Estudio electromagnético de la reflexión en superficies de discontinuidad en cristales

Echarri, Rodolfo Manuel

1989

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE FISICA- LABORATORIO DE OPTICA

ESTUDIO ELECTROMAGNETICO DE LA REFLEXION EN SUPERFICIES DE DISCONTINUIDAD EN CRISTALES

por

RODOLFO MANUEL ECHARRI

Director de Tesis: Prof. Dra. MARIA C. SIMON

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas

1989

A Teresa, Martín,

Sebastián y Javier.

INTRODUCCION

La doble refracción, conocida desde hace mucho tiempo, fue descubierta en cristales de calcita (S XVII) debido a que en ellos el fenómeno aparece muy particularmente acentuado. (Fig. 1).

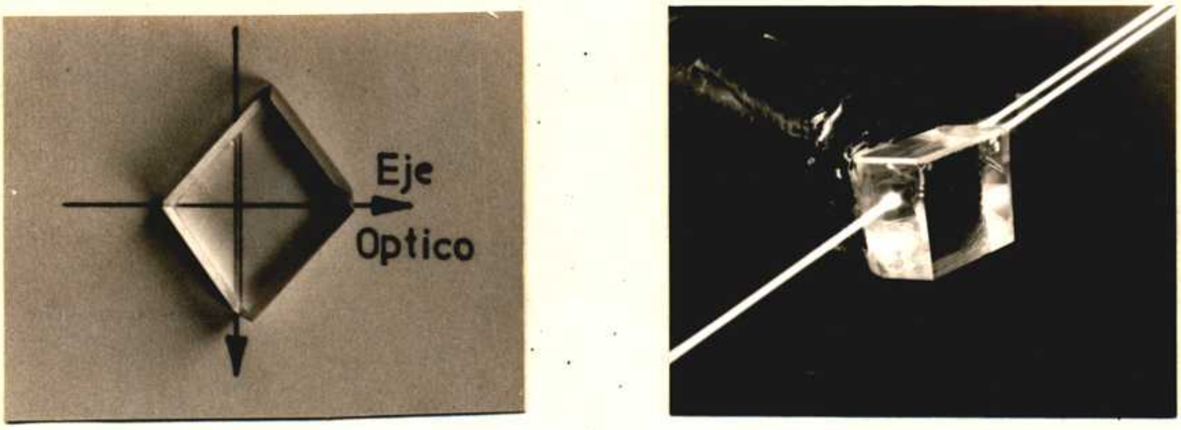


Fig. 1: Doble refracción en la calcita. La flecha en la dirección del eje óptico indica sólo la proyección del mismo en el plano del papel. El eje óptico en sí forma un ángulo de 45° con dicho plano.

Sin embargo, dicho fenómeno no ocurre sólo en ese medio, sino que es inherente a toda una serie de sustancias que son anisótropas desde el punto de vista de la óptica y se denominan birrefringentes.

La inmensa mayoría de estos medios pertenece a la categoría de los cristales y si bien es cierto que son conocidos desde muy antiguo en la óptica, también es cierto que los fenómenos de refracción y reflexión en ellos no han recibido la suficiente dedicación por parte de los científicos, salvo en las últimas décadas.

Esto llama la atención, ya que por ejemplo los cristales birrefringentes monoaxiales presentan un campo muy interesante y fértil, tanto desde el punto de vista teórico como desde el de las aplicaciones prácticas.

Los estudios realizados en estos medios se han orientado, en general, en dos direcciones. Por un lado, se realizaron métodos de trazado de rayos como puede verse en los trabajos de O. Stavroudis (1962)[1] y W. Swindell[2] (1975), y en los que básicamente se recurre a construcciones de Huygens para resolver el problema en forma análoga a la de los medios isótropos, es decir, tratando de encontrar una relación directa entre el rayo refractado y el incidente como la ley de Snell.

Por otro lado se han estudiado los coeficientes de reflexión y transmisión para el caso en que la luz pasa de un medio isótropo hacia uno monoaxial, obteniéndose las ecuaciones que los describen para ciertos casos particulares en los que se simplifica el cálculo debido a la simetría.[3]

De todas formas, para el caso en que la luz pasa de un medio monoaxial hacia uno isótropo, solamente se ha hablado de la onda refractada, no habiendo tenido en cuenta qué es lo que pasa con lo que se refleja, y mucho menos con los coeficientes de reflexión y transmisión. Esto proviene del hecho que el problema de la reflexión interna (medio anisótropo- medio isótropo) está formalmente ligado con el de la refracción y éste fue simplificado conceptualmente hace relativamente poco tiempo, con dos trabajos publicados por María Simon [4,5]. En el primero de ellos se muestra que el problema de la refracción se debe dividir en tres etapas: primero, ya que la velocidad de fase de la llamada onda extraordinaria depende de la dirección de esta última, se encuentra una expresión para dicha velocidad, en función de la onda incidente. Luego, se puede calcular la dirección de la onda refractada en función de la incidente mediante una ecuación similar a la ley de Snell. Con esto se tienen resueltas las direcciones de las ondas (que son las normales a los planos de igual fase), pero falta calcular la dirección de propagación de la energía (rayos) que en estos medios no coincide con la anterior; esto se resuelve en la tercera etapa.

En el segundo de los trabajos mencionados, se procede a una formulación vectorial del problema, con lo que se consiguen dos ventajas: la primera es que al plantear el problema mediante relaciones vectoriales, las expresiones resultantes se hacen independientes del sistema de coordenadas particular y la segunda es que la relación entre el rayo y la onda toma una forma sumamente sencilla: la dirección del rayo resulta de sumarle al versor en la dirección de la onda, un vector paralelo al eje óptico, en la forma que se indica en la Figura 2.

Teniendo en cuenta lo expuesto hasta aquí, es que se atacará el problema a resolver, que consiste en el estudio de la reflexión interna en cristales birrefringentes monoaxiales. Para ello, lo dividiremos en dos partes bien diferenciadas.

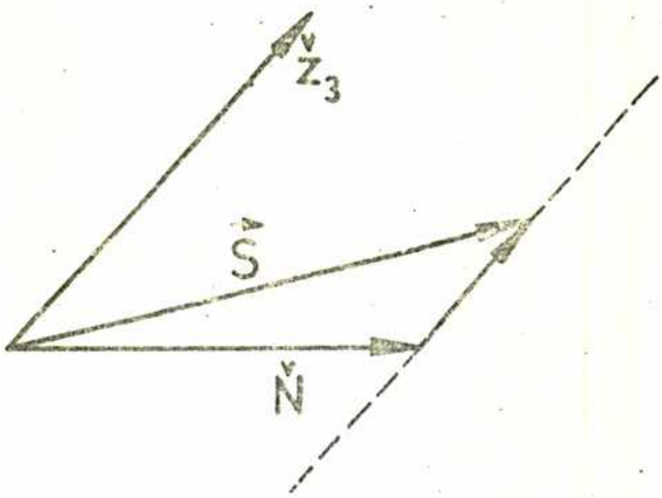


Figura 2: Relación entre el rayo y la onda.
$\check{z}_3$ eje óptico.
$\check{N}$ versor normal al frente de ondas.
$\vec{S}$ dirección del rayo.

En la primera se describirá la parte geométrica del fenómeno en[6] la que se pueden distinguir dos casos según sea ordinaria o extraordinaria la onda incidente. En cada uno de los casos, existen a su vez dos ondas reflejadas: la ordinaria y la extraordinaria.

Para cada una de las ondas reflejadas se define por analogía con el índice de refracción, un índice de reflexión relativo, como el cociente entre la velocidad de fase de la onda incidente y la de la reflejada. En el caso particular en que tanto la onda incidente como la reflejada son ordinarias, la velocidad de fase es la misma para ambas y por lo tanto el índice de reflexión valdrá uno, como es de esperar, ya que dicho caso es igual al de la reflexión en medios isótropos. En los demás casos, es distinto de la unidad, pudiendo, inclusive, ser menor.

Esto tiene como consecuencia, que el ángulo bajo el que se refleja la onda en ese caso, es mayor que el ángulo con el que incide, con lo que para determinado ángulo de incidencia el rayo reflejado se hace rasante y para ángulos mayores no puede haber rayo reflejado, por lo que hablamos de una reflexión inhibida. Este fenómeno se analizará en forma detallada más adelante.

En los casos en que el índice de reflexión es mayor que uno, el haz reflejado no logra hacerse rasante para ningún ángulo de incidencia.

Como parte de la descripción geométrica, también será estudiado el fenómeno de reflexión total[8] tanto para la onda incidente ordinaria como para la extraordinaria.

Con lo hecho hasta aquí se podrá resolver la segunda parte del problema que consiste en el cálculo de las amplitudes de los campos reflejados y transmitidos. Para esto es fundamental comprender que, mientras que en un medio isótropo los modos de propagación son tales que el campo eléctrico de la onda es paralelo o perpendicular al plano de incidencia, en un medio monoaxial los modos son el ordinario y el extraordinario que no coinciden con los anteriores. De esta forma, es necesario tratar el problema vectorialmente, para así tener en cuenta los tres componentes de los campos al mismo tiempo.

Por otro lado, es posible descomponer el problema en dos casos, uno en que la onda incidente es ordinaria, y otro en el que es extraordinaria.[,10]

A partir de los resultados obtenidos para las amplitudes de los campos, se pueden obtener los coeficientes de reflexión y transmisión para cualquier dirección de incidencia y eje óptico. Efectuaremos cálculos para algunos casos con distintas direcciones de eje óptico y analizaremos los resultados.

CAPITULO I

Ondas planas en cristales monoaxiales.

La intensidad de campo eléctrico $\vec{\mathscr{E}}$, el desplazamiento eléctrico $\vec{\mathscr{D}}$, la inducción magnética $\vec{\mathscr{B}}$ y la intensidad de campo magnético $\vec{\mathscr{H}}$ que describen el comportamiento de una onda en un medio de propiedades electromagnéticas conocidas, se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Dichas ecuaciones, en el caso en que no existen cargas ni corrientes, toman la forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathscr{E}} = - \frac{\partial \vec{\mathscr{B}}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathscr{H}} = \frac{\partial \vec{\mathscr{D}}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathscr{B}} = 0 \qquad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathscr{D}} = 0 \qquad (4)$$

Esto representa un sistema de ocho ecuaciones con doce incógnitas (las tres componentes de cada uno de los campos).

Las ecuaciones faltantes son las que relacionan a $\vec{\mathscr{E}}$ con $\vec{\mathscr{D}}$ y a $\vec{\mathscr{B}}$ con $\vec{\mathscr{H}}$ y representan el comportamiento del medio en cuestión, desde el punto de vista electromagnético.

En el caso que vamos a tratar, de medios anisótropos monoaxiales, que no absorben energía y no son magnéticos ni conductores, dichas ecuaciones se escriben:

$$\vec{\mathscr{D}} = \bar{\bar{\varepsilon}}\, \vec{\mathscr{E}} \qquad (5)$$

$$\vec{\mathscr{B}} = \mu_0\, \vec{\mathscr{H}} \qquad (6)$$

donde μ_o es la constante de inducción magnética del vacío y $\bar{\bar{\varepsilon}}$ el tensor de las constantes dieléctricas, que se puede llevar a una forma diagonal en el llamado sistema de ejes principales del cristal (z_1, z_2, z_3) o más brevemente, sistema principal. Este último es propio de cada medio y en él, la relación (5) se puede escribir

$$\vec{\mathcal{D}}_j = \varepsilon_j \, \mathcal{E}_j \qquad j = 1,2,3 \tag{7}$$

con $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_o$ y $\varepsilon_3 = \varepsilon_e$, los tres elementos diagonales del tensor, llamados constantes dieléctricas principales.

Para hallar una solución en ondas planas, se propone como es habitual

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}\, e^{i(\breve{N}.\vec{r} - ut)\frac{2\pi}{\lambda}} \tag{8}$$

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},t) = \vec{D}\, e^{i(\breve{N}.\vec{r} - ut)\frac{2\pi}{\lambda}} \tag{9}$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) = \vec{H}\, e^{i(\breve{N}.\vec{r} - ut)\frac{2\pi}{\lambda}} \tag{10}$$

con $\breve{N}$ el versor normal al frente de onda, u la velocidad de fase en la dirección de $\breve{N}$ y λ la longitud de onda de la radiación.

La ecuación para $\vec{\mathcal{B}}$ no es necesaria, ya que éste no es otra cosa que $\vec{\mathcal{H}}$ multiplicado por un factor constante.

Si se reemplazan las ecuaciones (7),(8) y (9) en (1), (2), (3) y (4), se llega a

$$\breve{N} \times \vec{\mathcal{H}} = \mu_o \vec{\mathcal{D}} \tag{11}$$

$$\breve{N} \times \vec{\mathcal{E}} \quad \mu_o \, u \, \vec{\mathcal{H}} \tag{12}$$

$$\breve{N} . \vec{\mathcal{D}} = 0 \tag{13}$$

$$\breve{N} . \vec{\mathcal{H}} = 0 \tag{14}$$

De estas relaciones, surge que, mientras $\vec{\mathcal{D}}$ y $\vec{\mathcal{H}}$ son perpendiculares a $\check{N}$, $\vec{\mathcal{E}}$ no tiene por qué serlo. Además, $\vec{\mathcal{D}}$ y $\vec{\mathcal{E}}$ son perpendiculares a $\vec{\mathcal{H}}$.

De lo anterior, la dirección del flujo de energía, dado por un versor en la dirección del vector de Poynting

$$\check{R} = \frac{\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}}{|\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}|} \qquad (15)$$

no tiene por qué ser paralelo a $\check{N}$.

Dicho de otro modo: la energía (rayo luminoso) no avanza en la misma dirección que la perturbación (onda).

De las ecuaciones (11) a (15) y de las (8), (9) y (10), se encuentran relaciones entre los vectores $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{D}}$, $\check{R}$ y $\check{N}$ que se sintetizan en la Figura 3. Para construirla, se reemplaza (12) en (11), de donde se obtiene:

$$\vec{\mathcal{E}} = \mu_0 u^2 \vec{\mathcal{D}} \quad (\check{N} . \vec{\mathcal{E}}) \check{N} \qquad (16)$$

y el ángulo $\hat{\rho}$ que forman $\check{R}$ y $\check{N}$ es el mismo que forman $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{D}}$, puesto que $\check{R}$ es perpendicular a $\vec{\mathcal{E}}$ y $\check{N}$ es perpendicular a $\vec{\mathcal{D}}$ y los cuatro vectores están en un plano ya que $\vec{\mathcal{H}}$ es perpendicular a todos ellos.

Por otro lado, definiendo una "velocidad del rayo" v, como la velocidad con que avanza la fase en la dirección de $\check{R}$, se tiene la siguiente relación:

$$\frac{u}{v} = \cos \hat{\rho} \qquad (17)$$

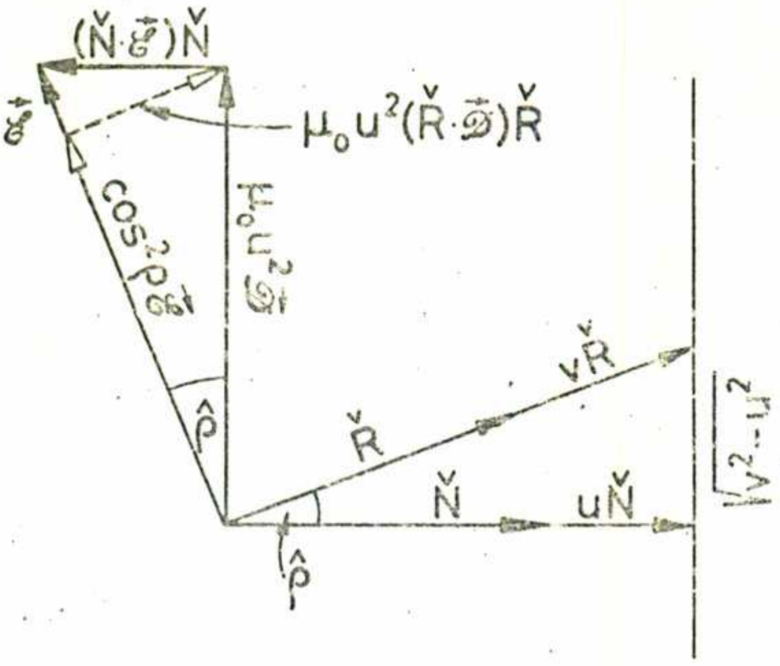


Figura 3: Diagrama de vectores que describen las ondas planas (plano normal a $\mathscr{H}$).

Si se proyecta $\mu_o u^2 \vec{\mathscr{D}}$ según $\breve{R}$, se puede encontrar la siguiente suma de vectores.

$$\mu_o u^2 \vec{\mathscr{D}} = \cos^2 \hat{\rho}\ \vec{\mathscr{E}} + \mu_o u^2 (\breve{R}.\ \vec{\mathscr{D}})\ \breve{R} \qquad (18)$$

También, de la figura, surge que

$$\mu_o u^2\ (\breve{R}.\ \vec{\mathscr{D}}) = -(\breve{N}.\ \vec{\mathscr{E}})\ \cos \hat{\rho} \qquad (19)$$

Por otro lado, tomando como punto de partida las ecuaciones (4) a (15) y la Figura 3, se deducen los valores de u, v y los vectores $\breve{R}$, $\vec{\mathscr{D}}$, $\vec{\mathscr{E}}$ y $\vec{\mathscr{H}}$ para cada dirección de $\breve{N}$ en un medio birrefringente monoaxial dado. Operando con las ecuaciones mencionadas, se llega a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que tendrá solución no trivial si se anula el determinante de sus coeficientes (4),(5); dicho determinante es:

$$(u^2-u_o^2)\left\{(1-(\breve{N}.\breve{z}_3)^2)(u^2-u_e^2) + (\breve{N}.\breve{z}_3)^2(u^2-u_o^2)\right\} = 0 \qquad (20)$$

Donde $\check{z}_3$ es un versor en la dirección del eje principal z_3 y u_o y u_e las velocidades principales de fase, definidas como:

$$u_o = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \, \varepsilon_o}} \quad \text{y} \quad u_e = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \, \varepsilon_e}} \tag{21}$$

que son las velocidades con las que se propagan las vibraciones paralelas a los ejes principales.

La relación (20) representa una ecuación para la velocidad de fase y sus soluciones son:

$$u'^2 = u_o^2 \tag{22}$$

$$u''^2 = (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}.\check{z}_3)^2 + u_e^2 \tag{23}$$

De estas relaciones resulta una ambigüedad en el signo de las soluciones, pero los valores negativos se desechan por representar una propagación de las ondas en sentido opuesto.

De (22) y (23) se encuentra una dirección de la onda para la cual ambas velocidades de fase son iguales. Dicha dirección, que dado que se eligió $\varepsilon_3 \neq \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ coincide con $\check{z}_3$, se llama eje óptico del cristal.

Escribiendo (16) en el sistema de ejes principales y reemplazando $u = u_o$, se obtiene

$$\frac{(\mathcal{D}'.\check{z}_1)}{(\mathcal{D}'.\check{z}_2)} = -\frac{(\check{N}.\check{z}_2)}{(\check{N}.\check{z}_1)} \quad \text{y} \quad (\vec{\mathcal{D}}'.\check{z}_3) = 0 \tag{24}$$

donde $\check{z}_1$, $\check{z}_2$ y $\check{z}_3$ son los versores según los ejes principales.

Si en cambio ahora se reemplaza $u = u''$, el resultado es

$$\frac{(\vec{\mathscr{D}}''\cdot\breve{z}_1)}{(\vec{\mathscr{D}}''\cdot\breve{z}_2)} = \frac{(\breve{N}\cdot\breve{z}_1)}{(\breve{N}\cdot\breve{z}_2)} \quad y \quad \frac{(\mathscr{D}''\cdot\breve{z}_3)}{(\mathscr{D}''\cdot\breve{z}_2)} = - \frac{\left[1-(\breve{N}\cdot\breve{z}_3)^2\right]}{(\breve{N}\cdot\breve{z}_2)(\breve{N}\cdot\breve{z}_2)} \qquad (25)$$

Las ecuaciones (24) y (25) son las relaciones entre las componentes del desplazamiento eléctrico para la onda ordinaria y para la onda extraordinaria respectivamente (se llama onda ordinaria a la que tiene velocidad de fase u_o y extraordinaria a la que tiene velocidad de fase u").

De las últimas relaciones, se ve que para una dada dirección de avance, existen dos vibraciones con distinta velocidad de fase, u_o y u" que son perpendiculares entre sí, como se puede comprobar realizando el producto escalar $(\vec{\mathscr{D}}'\cdot\vec{\mathscr{D}}'')$ y notando que se anula.

Hasta aquí, dada una dirección de avance, podemos calcular las relaciones entre las componentes del desplazamiento tanto para la onda ordinaria como para la extraordinaria. Dicho de otro modo, si conocemos la dirección de avance, conocemos la dirección de la vibración (sea ésta ordinaria o extraordinaria), pero también es importante conocer la dirección del flujo de energía o rayo luminoso $(\breve{R})$.

Para realizar ese cálculo, primero debemos tener en cuenta que $\breve{R}$, $\vec{\mathscr{D}}$ y $\breve{N}$ son coplanares, por lo tanto se puede pensar a $\breve{R}$ como combinación lineal de los otros dos vectores.

$$\breve{R} = \alpha \frac{\vec{\mathscr{D}}}{|\vec{\mathscr{D}}|} + \beta\, \breve{N} \qquad (26)$$

Multiplicando esta última escalarmente por $\breve{N}$ se tiene

$$\breve{R}.\breve{N} = \beta \tag{27}$$

pero por otro lado, como el producto escalar es el coseno del ángulo que forman ambos vectores y teniendo en cuenta (17)

$$\beta = \frac{u}{v} \tag{28}$$

De aquí y teniendo en cuenta la condición de normalización para $\breve{R}$, se tiene

$$\breve{R} = \pm \sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}} \quad \frac{\vec{\mathcal{D}}}{|\vec{\mathcal{D}}|} + \frac{u}{v} \quad \breve{N} \tag{29}$$

Además, de la Figura 2 se puede deducir que

$$\frac{u}{v} = \mu_o \frac{u^2 |\vec{\mathcal{D}}|}{|\vec{\mathcal{E}}|} \tag{30}$$

Si en (30) se reemplazan los valores obtenidos para $\vec{\mathcal{D}}'$ y los correspondientes de $\vec{\mathcal{E}}'$ se llega a

$$\frac{u'}{v'} = 1 \tag{31}$$

de donde

$$\breve{R}' = \breve{N}' \tag{32}$$

no importando el doble signo en la raíz.

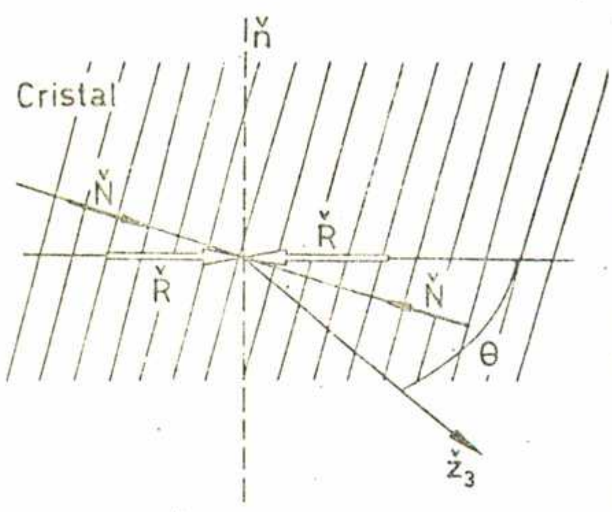
Si, por el contrario, en (30) se reemplazan $\vec{\mathcal{D}}''$ y el correspondiente $\vec{\mathcal{E}}''$ la raíz del segundo miembro de (29) no se anula, por lo que hay que tener en cuenta el doble signo. Para recuperar la información de dicho signo, se debe recurrir a construcciones de Huygens para cada caso particular[5] de las que se concluye que el signo que corresponde es positivo para cristal negativo ($u_o < u_e$) y negativo para cristal positivo.

Tomando en cuenta lo anterior, se obtiene en ambos casos la misma relación:

$$\check{R} = \frac{u_e^2\,\check{N}+(u_o^2-u_e^2)(\check{N}.\check{z}_3)\check{z}_3}{\sqrt{(u_o^4-u_e^4)(\check{N}.\check{z}_3)^2+u_e^4}} \qquad (33)$$

Como se puede apreciar, mientras en el caso ordinario $\check{R}$ y $\check{N}$ coinciden, en el extraordinario la diferencia entre rayo y normal es un vector paralelo al eje óptico.

De aquí surge un hecho que es conveniente observar. Si tomamos un rayo que se desplaza rasante al plano que separa a un medio isótropo de otro cualquiera, la normal al frente de onda puede formar un ángulo menor o mayor que $\pi/2$ respecto de la normal, como se puede observar en la Figura 4, la que representa el fenómeno para el caso en que el plano de incidencia contiene al eje óptico.



CAPITULO II

Refracción y reflexión interna: descripción geométrica.

1- Relaciones entre los sistemas de coordenadas.

El sistema de coordenadas natural para tratar los fenómenos de refracción y reflexión es tal, que uno de sus ejes es normal a la superficie de discontinuidad, que nosotros tomaremos plana sin perder generalidad, ya que dada una superficie de forma arbitraria, bastará con tomar como plano un entorno de la intersección del rayo con la superficie.

Los otros dos ejes estarán contenidos en dicho plano. De ahora en más, a dicho sistema lo llamaremos "sistema de la superficie".

Pero por otra parte, la simetría propia de los cristales impone un sistema privilegiado en el tratamiento de las ecuaciones de las ondas que se desplazan dentro de éstos; éste es el sistema de ejes principales, que en general no coincide con el anterior, por lo que se hace necesario encontrar una relación entre ambos ya que en lo que sigue, deberemos tratar alternativamente con uno y otro.

Dado que trataremos con cristales monoaxiales, el eje óptico coincide con uno de los ejes principales, al que llamaremos z_3. El versor en dicha dirección se denotará por $\breve{z}_3$.

Los otros dos ejes principales están contenidos en un plano perpendicular a $\breve{z}_3$ y son perpendiculares entre sí, siendo irrelevantes sus direcciones.

Denotando $\breve{n}$ al versor perpendicular a la superficie de discontinuidad, se puede construir el llamado sistema de la superficie (x,y,z), de la siguiente forma (ver Figura 5).

$$\breve{x} = \breve{n} \tag{34}$$

$$\breve{y} = \frac{\breve{z}_3 \times \breve{n}}{|\breve{z}_3 \times \breve{n}|} \tag{35}$$

$$\breve{z} = \breve{n} \times \frac{(\breve{z}_3 \times \breve{n})}{|\breve{z}_3 \times \breve{n}|} \tag{36}$$

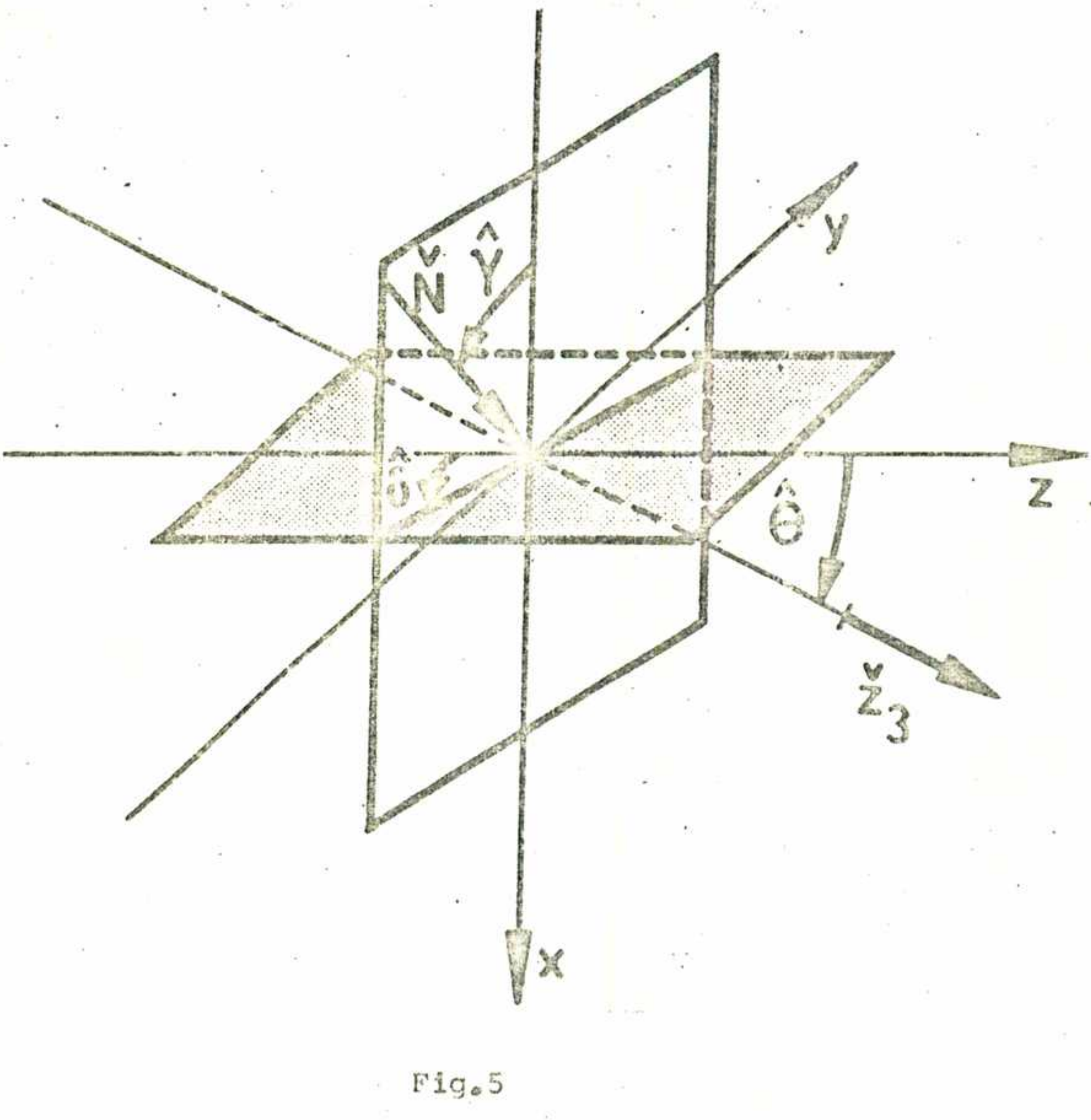


Fig. 5

Además del sistema coordenado definido, en la Fig.5 se puede ver a la onda incidente, y, en relación a ella, los ángulos $\hat{\gamma}$ y $\hat{\delta}$. Allí, $\hat{\gamma}$ es el ángulo que forma la normal al frente de ondas con la normal a la superficie de discontinuidad, mientras que $\hat{\delta}$ es el ángulo formado por el plano de incidencia con el plano que contiene a $\breve{n}$ y $\breve{z}_3$. (A este último plano se lo llama sección principal).

Por otro lado, llamando

$$f_n = |\breve{z}_3 \times \breve{n}| = \sqrt{1-(\breve{z}_3 . \breve{n})^2} \qquad (37)$$

y desarrollando el doble producto vectorial de (36) se tiene:

$$\breve{x} = \breve{n} \qquad (38)$$

$$y = \frac{1}{f_n} (\breve{z}_3 \times \breve{n}) \qquad (39)$$

$$z = \frac{1}{f_n} \left\{ \breve{z}_3 - (\breve{z}_3 . \breve{n})\breve{n} \right\} \qquad (40)$$

Es de notar que así expresadas, las direcciones de los ejes del sistema de superficie quedan en función de parámetros físicos, la dirección del eje óptico y la normal a la superficie.

Dado que, mediante las relaciones anteriores queda fijada la posición de $\breve{z}_3$ respecto al sistema de la superficie, para encontrar las relaciones entre ambos sistemas hará falta definir otro de los ejes, por ejemplo z_2, al que se hace coincidir con el eje y.

Conviene aclarar que esta elección no afecta la generalidad del problema ya que implica una rotación particular alrededor de z_3 y como habíamos dicho, en cristales monoaxiales esta rotación es totalmente irrelevante.

Dado un vector en el sistema de ejes principales, se lo puede expresar en el sistema de la superficie aplicándole la matriz de rotación.

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} (\check{x}.\check{z}_1) & (\check{y}.\check{z}_1) & (\check{z}.\check{z}_1) \\ (\check{x}.\check{z}_2) & (\check{y}.\check{z}_2) & (\check{z}.\check{z}_2) \\ (\check{x}.\check{z}_3) & (\check{y}.\check{z}_3) & (\check{z}.\check{z}_3) \end{pmatrix} \qquad (41)$$

que, una vez calculados los productos escalares con la elección hecha $\check{y} = \check{z}_2$, queda

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} f_n & 0 & -(\check{n}.\check{z}_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ (\check{n}.\check{z}_3) & 0 & f_n \end{pmatrix} \qquad (42)$$

2. Ondas y rayos reflejados y refractados: fórmulas vectoriales.

Es bien conocido el hecho de que la ley de la reflexión como la de la refracción son el resultado de las condiciones de contorno que establecen la igualdad de las fases sobre la superficie de discontinuidad entre la onda incidente y la reflejada.

Aplicando dichas condiciones se obtienen las fórmulas para las direcciones de las ondas y rayos reflejados y transmitidos en función de los incidentes.

Por otra parte, mientras que en medios isótropos el problema se puede descomponer en el modo paralelo y el perpendicular al plano de incidencia, en los medios monoaxiales los modos de propagación son el ordinario y el extraordinario, por lo que conviene estudiar dos casos por separado, aquél en que la onda incidente es ordinaria y el que la onda incidente es extraordinaria.

a) Onda incidente ordinaria.

En este caso habrá en general, además de la refractada, dos ondas reflejadas: la ordinaria y la extraordinaria. (Figura 6). Primero deduciremos la dirección de onda y rayo reflejados ordinarios en función del incidente, para luego hacerlo con el haz reflejado extraordinario y por último con el refractado.

Sean u_o la velocidad de fase de las ondas ordinarias, $\breve{N}_o$ el versor normal al frente de ondas incidente y $\breve{N}'_o$ el versor normal al frente de ondas ordinario y reflejado: $\breve{R}_o$ y $\breve{R}'_o$ los correspondientes rayos. Sean u''_o, $\breve{N}''_o$ y $\breve{R}''_o$ las correspondientes velocidad de fase, normal al frente de ondas y rayo para la onda reflejada extraordinaria y también u y $\breve{S}_o$ la velocidad de fase y normal al frente de ondas del haz refractado (en el caso de medio isótropo, rayo y onda coinciden).

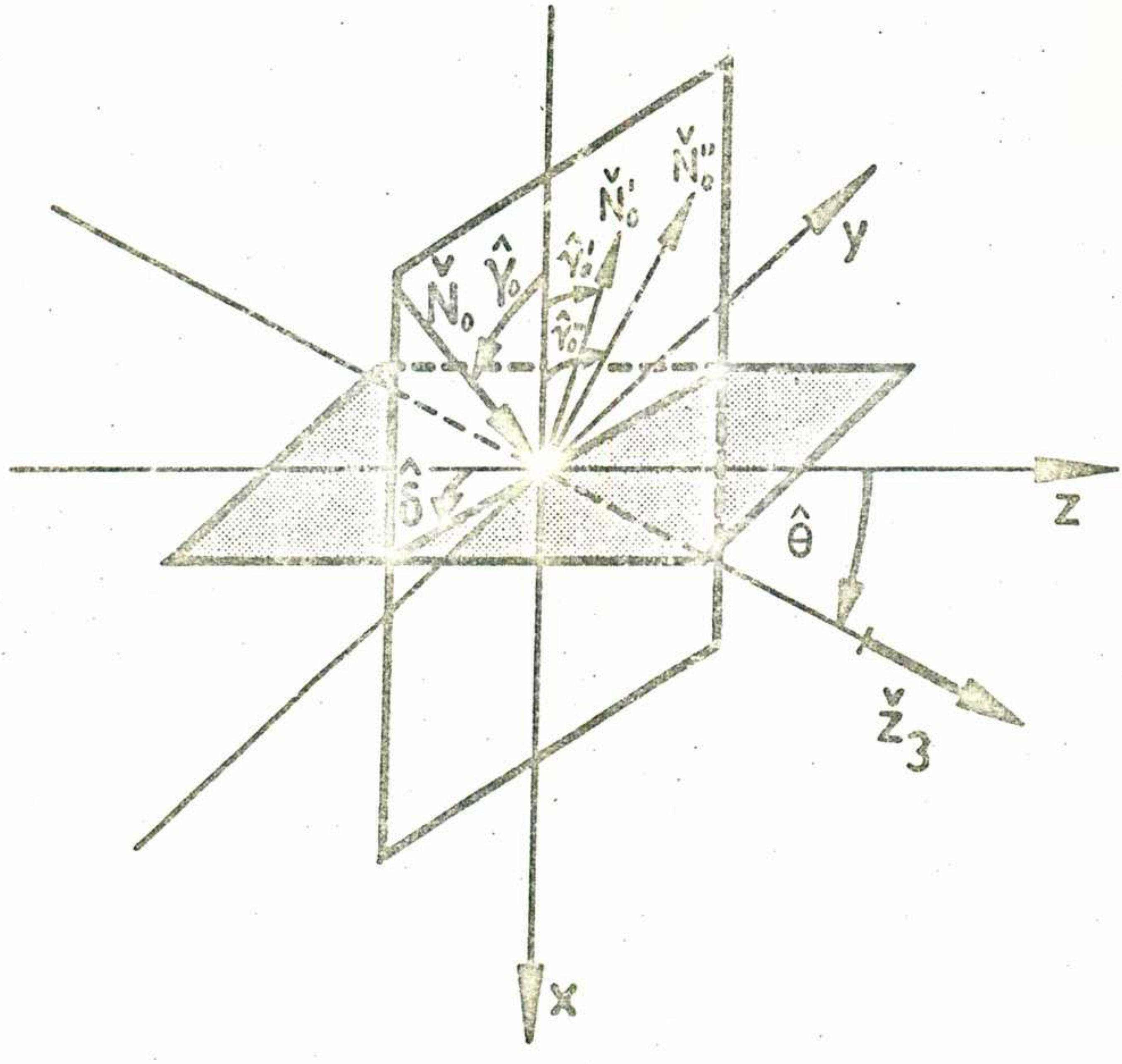
Las relaciones que establece la igualdad de las fases para este caso son:

$$\frac{\breve{N}_o \cdot \breve{y}}{u_o} = \frac{\breve{N}'_o \cdot \breve{y}}{u_o} \quad ; \quad \frac{\breve{N}_o \cdot \breve{z}}{u_o} = \frac{\breve{N}'_o \cdot \breve{z}}{u_o} \qquad (43)$$

$$\frac{\breve{N}_o \cdot \breve{y}}{u_o} = \frac{\breve{N}''_o \cdot \breve{y}}{u''_o} \quad ; \quad \frac{\breve{N}_o \cdot \breve{z}}{u_o} = \frac{\breve{N}''_o \cdot \breve{z}}{u''_o} \qquad (44)$$

$$\frac{\breve{N}_o \cdot \breve{y}}{u_o} = \frac{\breve{S}_o \cdot \breve{y}}{u} \quad ; \quad \frac{\breve{N}_o \cdot \breve{z}}{u_o} \quad \frac{\breve{S}_o \cdot \breve{y}}{u} \qquad (45)$$

donde $\breve{N}_o$ es la normal al frente de ondas ordinarias incidente, $\breve{N}'_o$ la normal al frente de ondas ordinarias reflejado, $\breve{S}_o$ la normal al



$\check{N}_0$
$\hat{\gamma}_0$
$\hat{\gamma}_0'$
$\hat{\gamma}_0''$
$\check{N}_0'$
$\check{N}_0''$
y
z
$\hat{\delta}$
$\hat{\theta}$
$\check{z}_3$
x

Figura 6.

frente de ondas refractado; además u_o es la velocidad de fase de las ondas ordinarias, u''_o la de las ondas extraordinarias y de la velocidad de fase en el medio isótropo.

Las relaciones (43) representan la condición para la reflexión cuando la onda incidente es ordinaria y la reflejada ordinaria (de ahora en adelante, reflexión ordinaria-ordinaria) y dado que la velocidad de fase (u_o tanto para la incidente como para la reflejada) no depende de la dirección de propagación, no son más que la ley de la reflexión de los medios isótropos, cuya forma vectorial es bien conocida y en nuestra notación queda:

$$\check{N}'_o = \check{N}_o - 2(\check{N}_o \cdot \check{n})\,\check{n} \qquad (46)$$

El esquema vectorial que representa dicha relación, se puede observar en la Figura 7, donde también se ve que el ángulo de incidencia $\hat{\gamma}_o$ es igual al de reflexión $\hat{\gamma}'_o$. Por razones que se verán más adelante, conviene definir un índice de reflexión, como el cociente de las velocidades de fase de la onda incidente y reflejada:

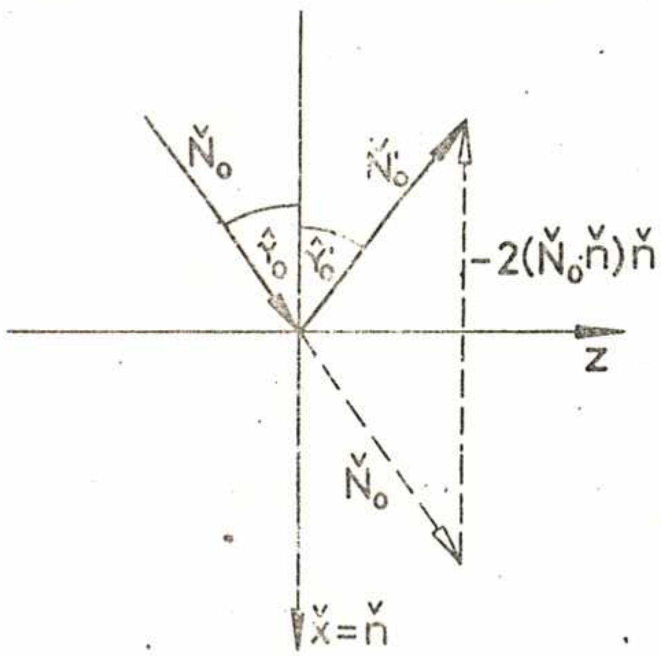


Fig. 7

$$r'_o = \frac{u_o}{u_o} = 1 \qquad (47)$$

que, como era de esperar, para el caso ordinario-ordinario, vale la unidad.

Además, dado que la onda y el rayo coinciden cuando son ordinarios,(46) alcanza para describir completamente el fenómeno.

Si ahora fijamos la atención en las ecuaciones (44), que son las que representan la reflexión ordinaria-extraordinaria, y recordamos que u''_o depende de $\check{N}''_o$, en general es distinta de u_o, se desprende en forma inmediata, que el ángulo de reflexión $\hat{\gamma}''_o$ será distinto del de incidencia $\hat{\gamma}_o$.

Para resolver el problema, basta con observar que las (44) son idénticas a las ecuaciones que representan la refracción desde un medio isótropo en el que las ondas tienen velocidad de fase u_o, hacia un medio birrefringente con velocidades principales de fase u_o y u_e. Por lo tanto, la resolución se lleva a cabo en forma análoga[5] para lo que se cuenta con las siguientes ecuaciones:

La condición de normalización

$$(\check{N}''_o.\check{x})^2 + (\check{N}''_o.\check{y})^2 + (\check{N}''_o.\check{z})^2 = 1 \qquad (48)$$

la relación entre u''_o y N''_o

$$u''^2_o = (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}''_e.\check{z}_3)^2 + u_e^2 \qquad (49)$$

y las relaciones (44).

Resolviendo el sistema, se obtiene la siguiente ecuación bicuadrática:

$$A_o\left(\frac{1}{r''_o}\right)^4 + B_o\left(\frac{1}{r''_o}\right)^2 + C_o = 0 \qquad (50)$$

donde r''_o es el índice de reflexión ordinario-extraordinario definido como:

$$r''_o = \frac{u_o}{u''_o} \qquad (51)$$

y los coeficientes:

$$A_o = \left\{ 1+b_o\left[1-(\breve{N}_o\cdot\breve{n})^2-(\breve{N}_o\cdot(\breve{n}\times\breve{z}_3))^2\right]\right\}^2 - 4b_o\left\{\left[1-(\breve{N}_o\cdot\breve{n})^2\right]\left[1-(\breve{z}_3\cdot\breve{n})^2\right]-\left[\breve{N}_o\cdot(\breve{n}\times\breve{z}_3)\right]^2\right\} \qquad (52)$$

$$B_o = 2\left\{1+b_o\left[1-(\breve{N}_o\cdot\breve{n})^2-(\breve{N}_o\cdot(\breve{n}\times\breve{z}_3))^2\right]\right\}\left\{b_o(\breve{z}_3\cdot\breve{n})^2+\frac{u_e^2}{u_o^2}\right\} - 4b_o\frac{u_e^2}{u_o^2}\left\{\left[1-(\breve{N}_o\cdot\breve{n})^2\right]\left[1-(\breve{z}_3\cdot\breve{n})^2\right]-\left[\breve{N}_o\cdot(\breve{n}\times\breve{z}_3)\right]^2\right\} \qquad (53)$$

$$C_o = \left\{b_o(\breve{z}_3\cdot\breve{n})^2+\frac{u_e^2}{u_o^2}\right\}^2 \qquad (54)$$

donde

$$b_o = \frac{u_o^2 - u_e^2}{u_o^2} \qquad (55)$$

cuya solución será

$$r''_o = \sqrt{\frac{-B_o \pm \sqrt{B_o^2 - 4A_oC_o}}{2A_o}} \qquad (56)$$

y donde la elección del doble signo se debe realizar mediante una construcción de Huygens para recuperar información que se pierde en la resolución del problema.

La regla que se obtiene a partir de dichas construcciones es la siguiente. (Ver Apéndice 1): vale el signo positivo si

$$(u_e - u_o)\ (\breve{N}.\breve{z})\ (\breve{n}.\breve{z}_3) > 0 \tag{57}$$

y el negativo en caso contrario.

El índice definido en (51) resulta mayor que uno para cristales positivos ($u_o > u_e$) y menor que uno para negativos; debido a esto, el ángulo de reflexión $\hat{\gamma}''_o$, será distinto del de incidencia.

En la Figura 8 se ve r''_o en función del ángulo de incidencia $\hat{\gamma}_o$ para calcita ($n_o = 1{,}66$; $n_e = 1{,}49$) en el caso $\theta = 45^o$ y $\delta = 1^o$. Esta curva se corta en $\hat{\gamma}_o = 72^o$ dado que para ángulos mayores r''_o es complejo, coincidiendo esto con que el rayo reflejado es rasante. Este fenómeno, que llamamos reflexión inhibida, se analizará más adelante.

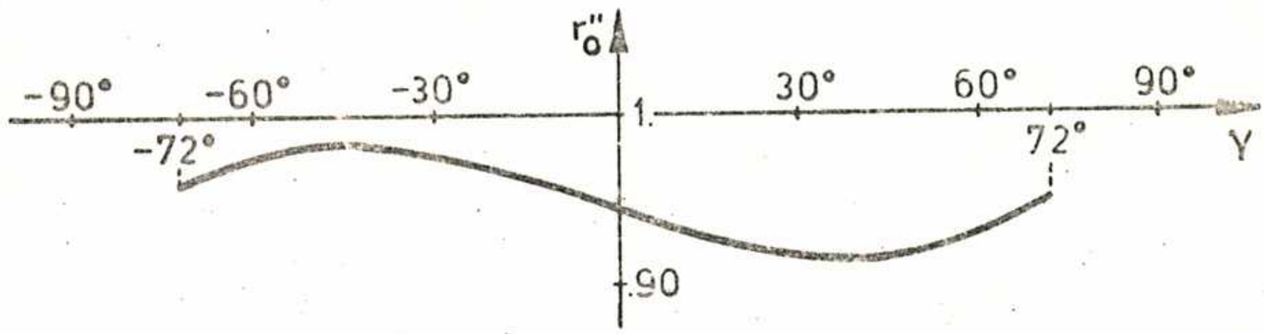


Figura 8: Coeficiente de reflexión ordinario-extraordinario para el caso calcita ($n_o = 1{,}66$; $n_e = 1{,}49$) con $\theta = 45^o$ y $\delta = 1^o$ en función del ángulo de incidencia.

Además, de (44) y (48) se obtienen en forma inmediata las siguientes expresiones para las componentes del versor $\breve{N}''_o$

$$(\breve{N}''_o \cdot \breve{x}) = - \sqrt{1-\left(\frac{u_o}{u''_o}\right)^2 \left[1-(\breve{N}_o \cdot x)^2\right]} \qquad (58)$$

$$(\breve{N}''_o \cdot \breve{y}) = \frac{u_o}{u''_o} (\breve{N}''_o \cdot \breve{y}) \qquad (59)$$

$$(\breve{N}''_o \cdot \breve{z}) = \frac{u_o}{u''_o} (\breve{N}''_o \cdot \breve{z}) \qquad (60)$$

A partir de esto, y recordando que $\breve{x} = \breve{n}$, se llega a la siguiente expresión vectorial para $\breve{N}''_o$

$$N''_o = \frac{1}{r''_o} \left\{ \breve{N}_o - \left[r''_o \sqrt{1+ \frac{1}{r''^2_o} \left[-1+ (\breve{N}_o \cdot \breve{n})^2\right]} + (\breve{N}_o \cdot \breve{n})\right] \breve{n} \right\} \qquad (61)$$

Esta es la generalización de la relación que representa la ley de la reflexión para medios anisótropos. Para el caso en que el índice de reflexión vale la unidad se ve que (61) se reduce a la (46) que vale en medios isótropos (o en el caso ordinario-ordinario).

En la figura 9 se representa la relación mencionada; en la misma se ve que el ángulo que forma la normal incidente con $\breve{n}$ es distinto del de la normal reflejada.

Por otro lado, dado que la onda reflejada es extraordinaria, la dirección correspondiente al rayo reflejado ($\breve{R}''_o$) no coincide con la de la normal reflejada y es necesario calcularla

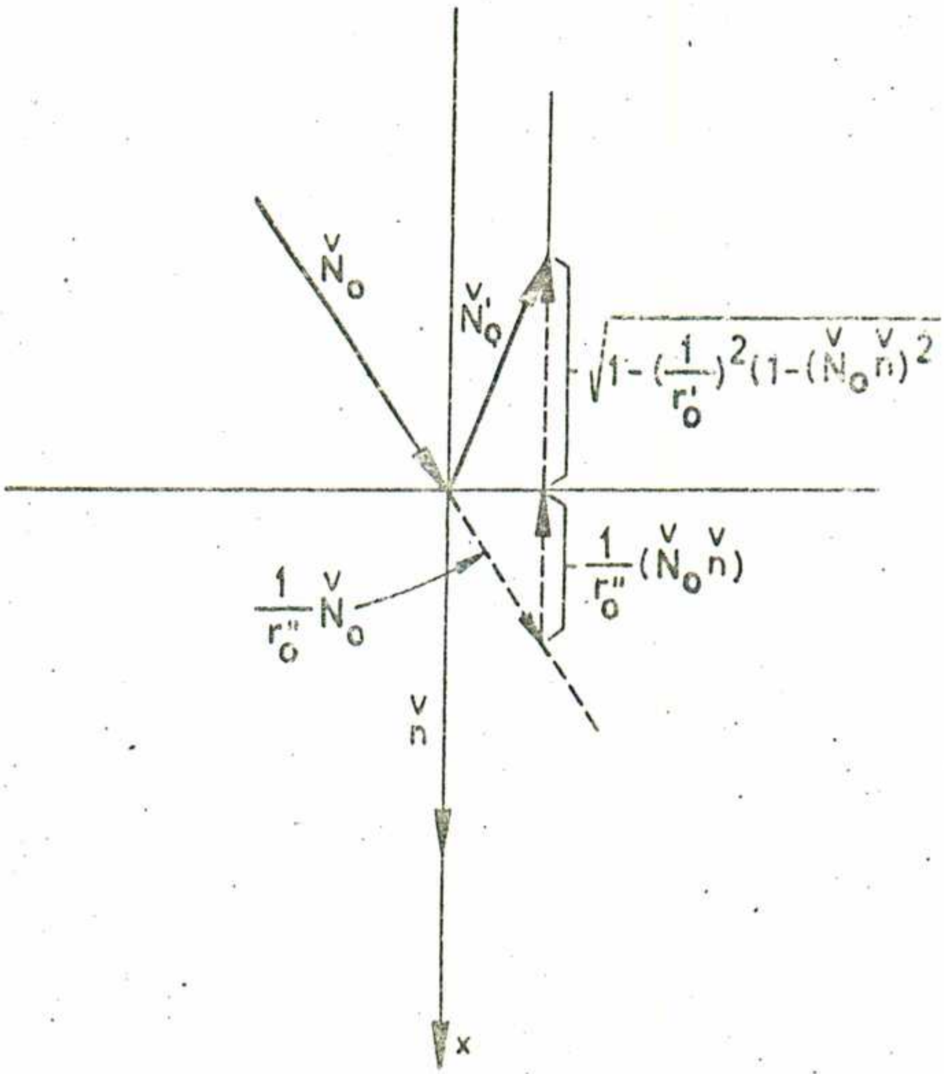


Figura 9: diagrama vectorial para la reflexión en medios anisótropos.

a partir de la ecuación (33), que en este caso toma la forma

$$\breve{R}''_o = \frac{u_e^2\,\breve{N}''_o + (u_o^2 - u_e^2)(\breve{N}''_o \cdot \breve{z}_3)\breve{z}_3}{\sqrt{(u''_o - u''_e)(\breve{N} \cdot \breve{z}_3)^2 + u''_e}} \qquad (62)$$

A partir de (56) y (60), se puede calcular el ángulo $\hat{\gamma}''_o$ en función de $\hat{\gamma}_o$, θ y δ ; en la Figura 10a) se grafica $\hat{\gamma}''_o$ en función de γ_o para calcita con $\theta = 45°$ y $\delta = 1°$. Luego, a partir de (61) se puede calcular el ángulo que forma el rayo reflejado $\hat{\gamma}''_{Ro}$ en función del ángulo del rayo incidente $\hat{\gamma}_{Ro}$; este último es igual al de la onda incidente. El gráfico correspondiente es el de la Figura 10b). En él se ve que, cuando el rayo reflejado llega a ser rasante, $\hat{\gamma}_{Ro}$ todavía no alcanza los 90° (reflexión inhibida), y en 10a) se ve que para esos casos, el correspondiente $\hat{\gamma}_o$ es distinto de 90°, como ya fue comentado en el capítulo anterior.

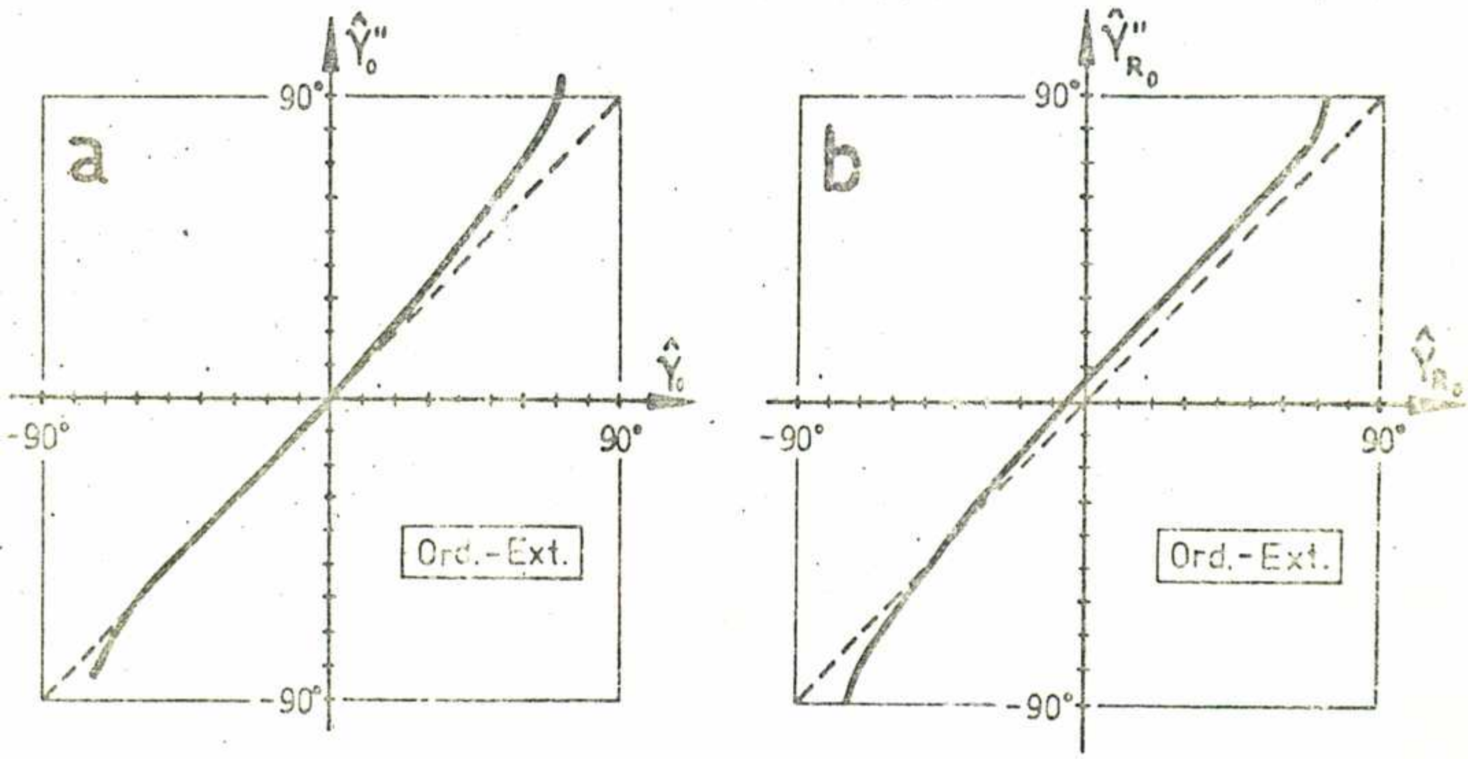


Figura 10: ángulos de reflexión en función del de incidencia para calcita con $\theta = 45°$, $\delta = 1°$. La línea punteada representa la ley de reflexión para medios isótropos.

a) onda reflejada en función de onda incidente.

b) rayo reflejado en función de rayo incidente.

Por último, pasaremos a analizar la refracción, que está representada por las ecuaciones (45); en ellas, tanto u_o

como u no dependen de la dirección de propagación y por lo tanto no son más que la ley de Snell de medios isótropos que en forma vectorial puede expresarse:

$$\check{S}_o = \frac{\check{N}_o + a_o \check{n}}{\sqrt{1 + a_o^2 + 2 a_o (\check{N}_o \cdot \check{n})}} \tag{63}$$

con $\check{S}_o$ la dirección de la onda refractada, y

$$a_o = \sqrt{\frac{u_o^2}{u^2} - 1 \quad (\check{N}_o \cdot \check{n})^2} - (\check{N}_o \cdot \check{n}) \tag{64}$$

b) Onda incidente extraordinaria.

En este caso, al igual que el anterior, primero fijaremos la notación. Sean u" y u''_e las velocidades de fase de la onda incidente y de la reflejada extraordinaria respectivamente; $\check{N}_e$ y $\check{N}''_e$ los respectivos versores normales al frente de ondas y $\check{R}_e$ y $\check{R}''_e$ los correspondientes versores en la dirección de los rayos. Se denotará por $\check{N}'_e$, $\check{R}'_e$ y u_o la normal al frente de ondas, versor en la dirección del rayo y velocidad de fase para la onda reflejada ordinaria.

Por otro lado, ya que la onda refractada está en un medio isótropo, su dirección coincide con la del rayo y se denotará a ésta por $\check{S}_e$ correspondiéndole una velocidad de fase u.

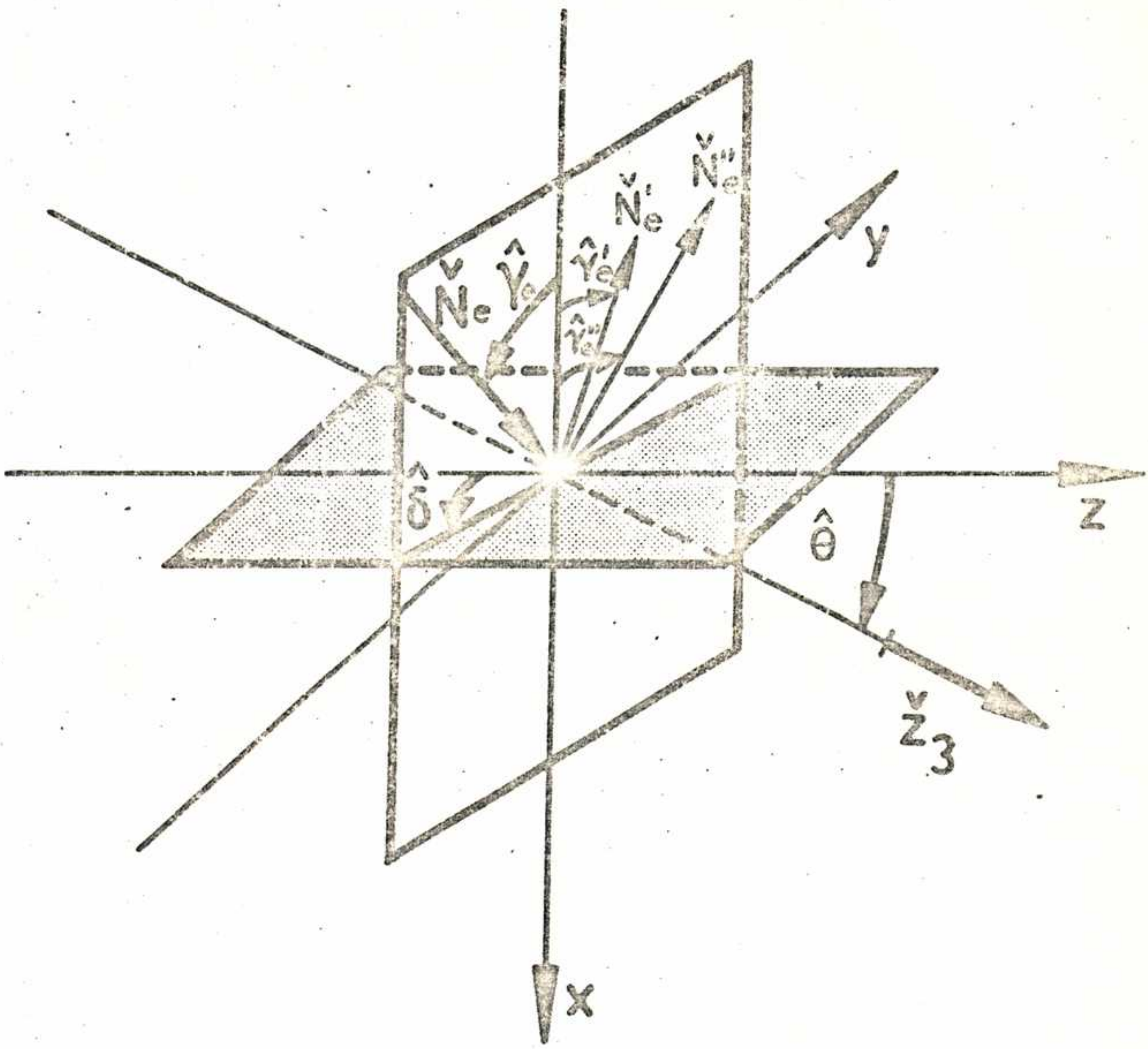
Como puede apreciarse en la Figura 11, el ángulo que forma la normal incidente con $\check{n}$ se llamará $\hat{\delta}_e$, mientras que el correspondiente a la onda reflejada ordinaria será $\hat{\delta}'_e$ y para la reflejada extraordinaria $\hat{\delta}''_e$.

A partir de la condición de igualdad de las fases a uno y otro lado de la superficie de discontinuidad, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\frac{\check{N}_e\cdot\check{y}}{u''} = \frac{\check{N}'_e\cdot\check{y}}{u_o} \quad ; \quad \frac{\check{N}_e\cdot\check{z}}{u''} = \frac{\check{N}'_e\cdot\check{z}}{u_o} \tag{65}$$

$$\frac{\check{N}_e\cdot\check{y}}{u''} = \frac{\check{N}''_e\cdot\check{y}}{u''_e} \quad ; \quad \frac{\check{N}_e\cdot\check{z}}{u''} = \frac{\check{N}''_e\cdot\check{z}}{u''_e} \tag{66}$$

$$\frac{\check{N}_e\cdot\check{y}}{u''} = \frac{\check{S}_e\cdot\check{y}}{u} \quad ; \quad \frac{\check{N}_e\cdot\check{z}}{u''} = \frac{\check{S}_e\cdot\check{z}}{u} \tag{67}$$



$\check{N}_e''$
$\check{N}_e'$
$\check{N}_e$
$\hat{\gamma}_e$
$\hat{\gamma}_e'$
$\hat{\gamma}_e''$
y
z
$\hat{\delta}$
$\hat{\theta}$
$\check{z}_3$
x

Figura 11.

Las ecuaciones (65) corresponden a la reflexión de una onda ordinaria, cuando la incidente es extraordinaria. (Caso extraordinario-ordinario); en ellas u" depende de $\check{N}_e$ a través de una relación similar a la (23), que con la notación correspondiente a este caso es:

$$u'' = \sqrt{(u_o^2 - u_e^2)\,(\check{N}_e \cdot \check{z}_3)^2 + u_e^2} \tag{68}$$

Teniendo en cuenta esto último, el coeficiente de reflexión relativo extraordinario- ordinario queda

$$r'_e = \frac{u''}{u_o} = \sqrt{\left(1 - \frac{u_e^2}{u_o^2}\right)(\check{N}_e \cdot \check{z}_3)^2 + \frac{u_e^2}{u_o^2}} \tag{69}$$

Este índice resulta menor que uno para cristales positivos ($u_o > u_e$) y mayor que uno para cristales negativos ($u_e > u_o$), con lo que, en el último caso, el ángulo de reflexión $\hat{\gamma}'_e$ será menor que el de incidencia (al revés del caso ordinario-extraordinario), mientras que $\hat{\gamma}'_e$ será mayor que $\hat{\gamma}_e$ para cristales positivos.

La variación de r'_e con $\hat{\gamma}_e$ se puede ver en la Figura 12:

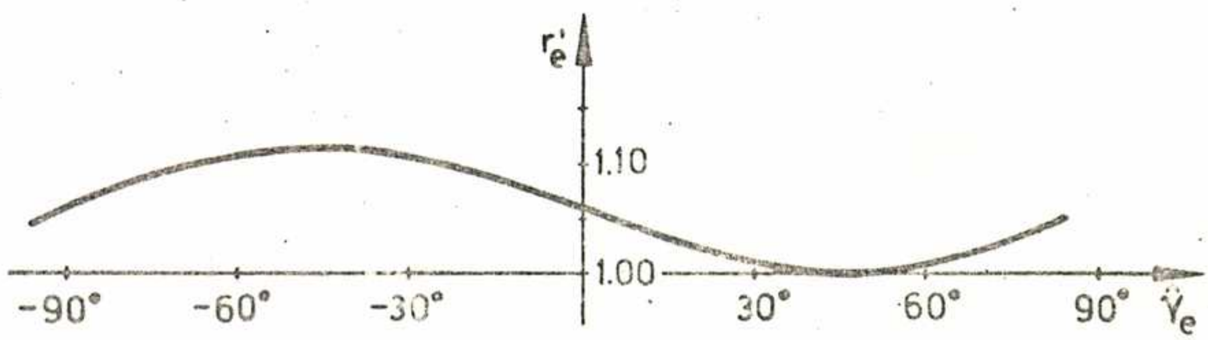


Figura 12: Coeficiente de reflexión extraordinario-ordinario para calcita con $\theta = 45°$, $\delta = 1°$.

Con el valor de r'_e ya calculado, se puede encontrar $\check{N}'_e$ a partir de una expresión similar a la (61), que se deduce teniendo en cuenta (65) y la condición de normalización para $\check{N}'_e$. Dicha expresión es:

$$\check{N}'_e = \frac{1}{r'_e}\left\{ \check{N}_e - \left[\sqrt{r'^2_e - 1 + (\check{N}_e.\check{n})^2} + (\check{N}_e.\check{n})\right]\check{n}\right\} \qquad (70)$$

Para el haz reflejado, onda y rayo coinciden al ser ordinario, mientras que no ocurre lo mismo con el incidente. Para encontrar la dirección del rayo en este último caso, debemos recurrir nuevamente a (33) con lo que se tiene:

$$\check{R}_e = \frac{u_e^2\,\check{N}_e + (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}_e.\check{z}_3)\check{z}_3}{\sqrt{(u''_o - u''_e)\,(\check{N}_e.\check{z}_3) + u''_e}} \qquad (71)$$

Con estos resultados, es posible realizar los gráficos que aparecen en la Figura 13a) y 13b); en ellos se tiene el ángulo de reflexión para la onda reflejada $\hat{\gamma}''_e$ en función del de la onda incidente $\hat{\gamma}'_e$ para calcita también en $\delta = 1^o$ y $\theta = 45^o$. (Fig. 13a), y el ángulo de reflexión para el rayo reflejado $\hat{\gamma}''_{Re}$ en función del rayo incidente $\hat{\gamma}_{Re}$. (Fig. 13b).

Conviene aclarar que, dado que el haz reflejado es ordinario, $\hat{\gamma}'_e$ coincide con $\hat{\gamma}'_{Re}$.

De los gráficos se desprende que, para esta situación, el ángulo de reflexión para las ondas, siempre es menor que el de incidencia; es decir, aquí no tenemos reflexión inhibida. Además, en 13a) se nota un corrimiento del gráfico, en lugar de

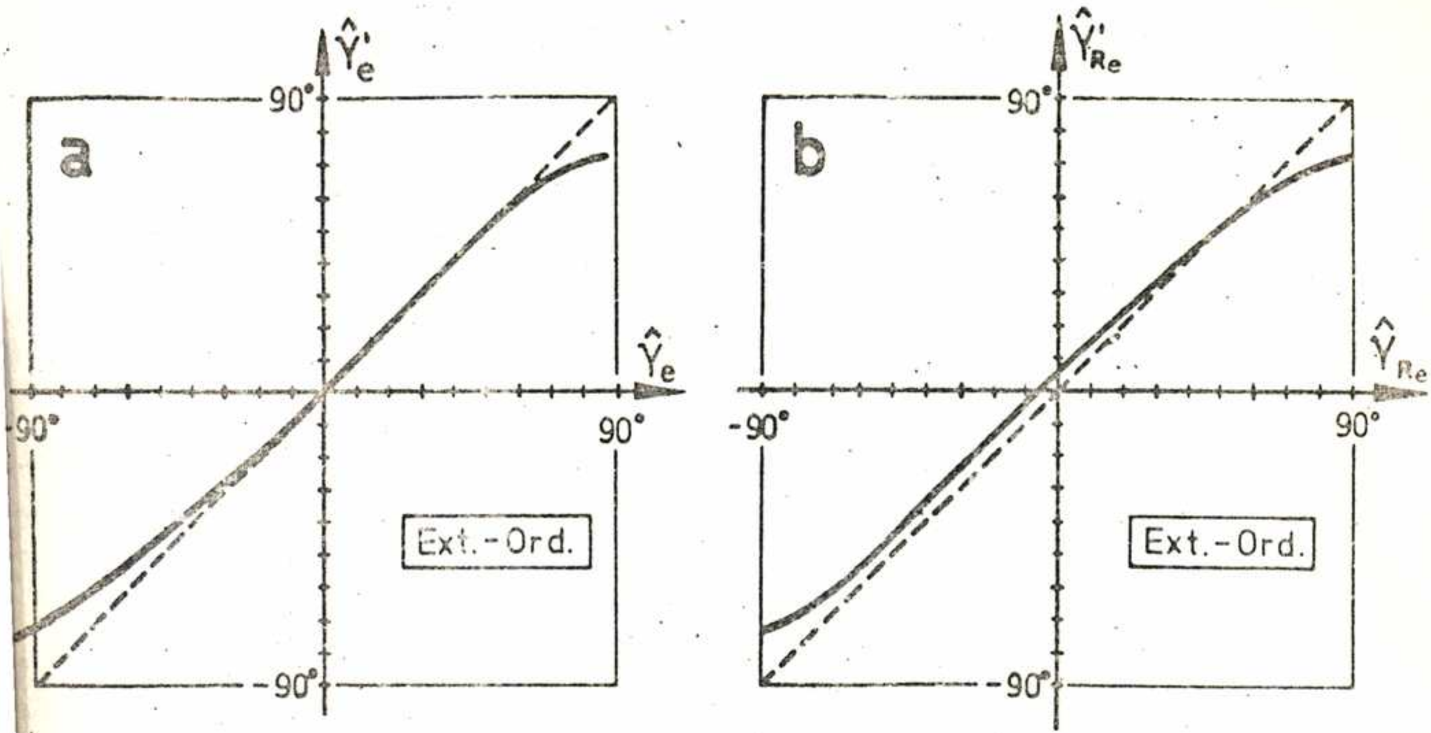


Figura 13: Angulos de reflexión en función del de incidencia con $\theta = 45^{\circ}$ y $\delta = 1^{\circ}$ en calcita. La línea punteada corresponde a reflexión en medios isótropos.

a) onda reflejada en función de onda incidente.

b) rayo reflejado en función de rayo incidente.

ir desde -90° a 90° va desde -96° a 84°, esto se debe a que, como ya hemos discutido, rayo y onda no coinciden en dirección y que los límites de incidencia son $\pm 90^{\circ}$ para el rayo.

Analizando ahora las (66), estamos en el caso extraordinario-extraordinario; es decir, tanto la onda incidente como la reflejada son extraordinarias. Allí tanto u''_e como u'' son función de $\breve{N}_e$, pero u" se puede calcular en forma sencilla utilizando (23). Una vez hecho esto, se obtiene un sistema de ecuaciones similares a las del caso ordinario-extraordinario, de donde se deduce también una ecuación bicuadrática para el coeficiente de reflexión extraordinario-extraordinario, definido como

$$r''_e = \frac{u''_e}{u''} \tag{72}$$

Dicha ecuación es:

$$A_e\left(\frac{1}{r''_e}\right)^4 + B_e\left(\frac{1}{r''_e}\right)^2 + C_e = 0 \tag{73}$$

$$A_e = \left\{1+b''\left[1-(\breve{N}_e\cdot\breve{n})^2-(\breve{N}_e\cdot(\breve{n}\times\breve{z}_3))^2\right]\right\}^2 - 4\,b''\left\{\left[1-(\breve{N}_e\cdot\breve{n})^2\right]\left[1-(\breve{z}_3\cdot\breve{n})^2\right] - \left[\breve{N}_e\cdot(\breve{n}\times\breve{z}_3)\right]^2\right\} \tag{74}$$

$$B_e = 2\left\{1+b''\left[1-(\breve{N}_e\cdot\breve{n})^2-(\breve{N}_e\cdot(\breve{n}\times\breve{z}_3))^2\right]\right\}\left\{b''(\breve{z}_3\cdot\breve{n})^2+\frac{u_e^2}{u_o^2}\right\} - 4b''\frac{u_e^2}{u_o^2}\left\{\left[1-(\breve{N}_e\cdot\breve{n})^2\right]\left[1-(\breve{z}_3\cdot\breve{n})^2\right] - \left[\breve{N}_e\cdot(\breve{n}\times\breve{z}_3)\right]^2\right\} \tag{75}$$

$$C_e = \left\{b''(\breve{z}_3\cdot\breve{n})^2+\frac{u_e^2}{u_o^2}\right\}^2 \tag{76}$$

con

$$b'' = \frac{u_o^2 - u_e^2}{u''^2} \tag{77}$$

y su solución es:

$$r''_e = \sqrt{\frac{-B_e \pm\sqrt{B_e^2-4A_eC_e}}{2A_e}} \tag{78}$$

donde se lleva a cabo la elección del signo de acuerdo a lo ya discutido, obteniéndose que corresponde el signo positivo si

$$(u_e - u_o)\,(\breve{N}\cdot\breve{z})(\breve{n}\cdot\breve{z}_3) > 0 \qquad (79)$$

y el negativo en el caso contrario.

Podemos ver a r''_e en función de $\hat{\gamma}_e$ para calcita con $\delta = 1^{\circ}$ y $\theta = 45^{\circ}$ en la figura 14:

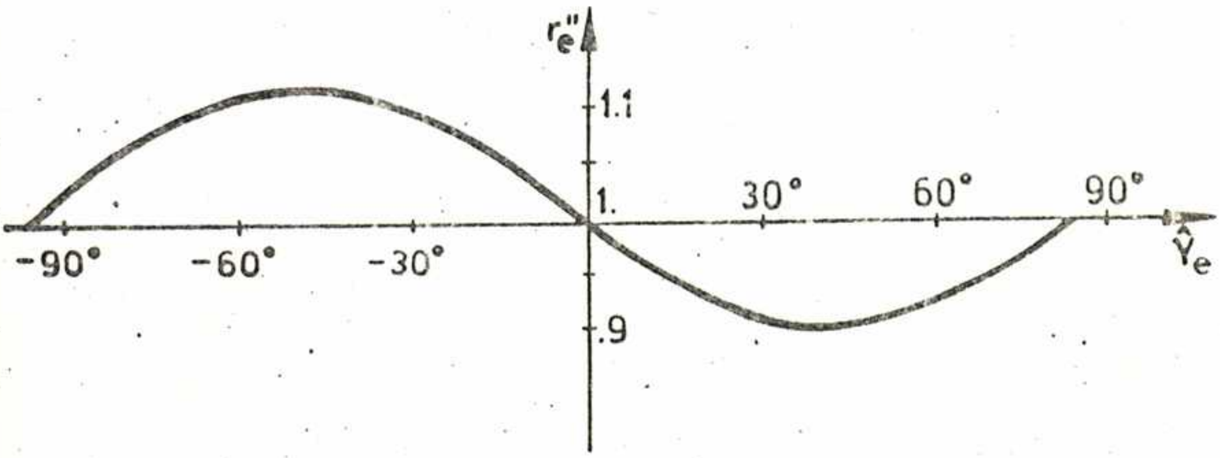


Figura 14: r''_e en función de γ_e en calcita $\theta = 45^{\circ}$, $\delta = 1^{\circ}$.

en la misma se observa el corrimiento debido a que onda y rayo no coinciden.

Por otro lado, una vez conocido r''_e y utilizando expresiones análogas a (70) y (71) se pueden calcular los ángulos de reflexión en función de los de incidencia tanto para los rayos ($\hat{\gamma}''_{Re}$, $\hat{\gamma}_{Re}$) como para las ondas ($\hat{\gamma}''_e$, $\hat{\gamma}_e$); los gráficos correspondientes se ven en la Fig. 15.

Con respecto a la Fig. 15b), es de notar que a un rayo que incide rasante, le corresponde un rayo reflejado que también lo es.

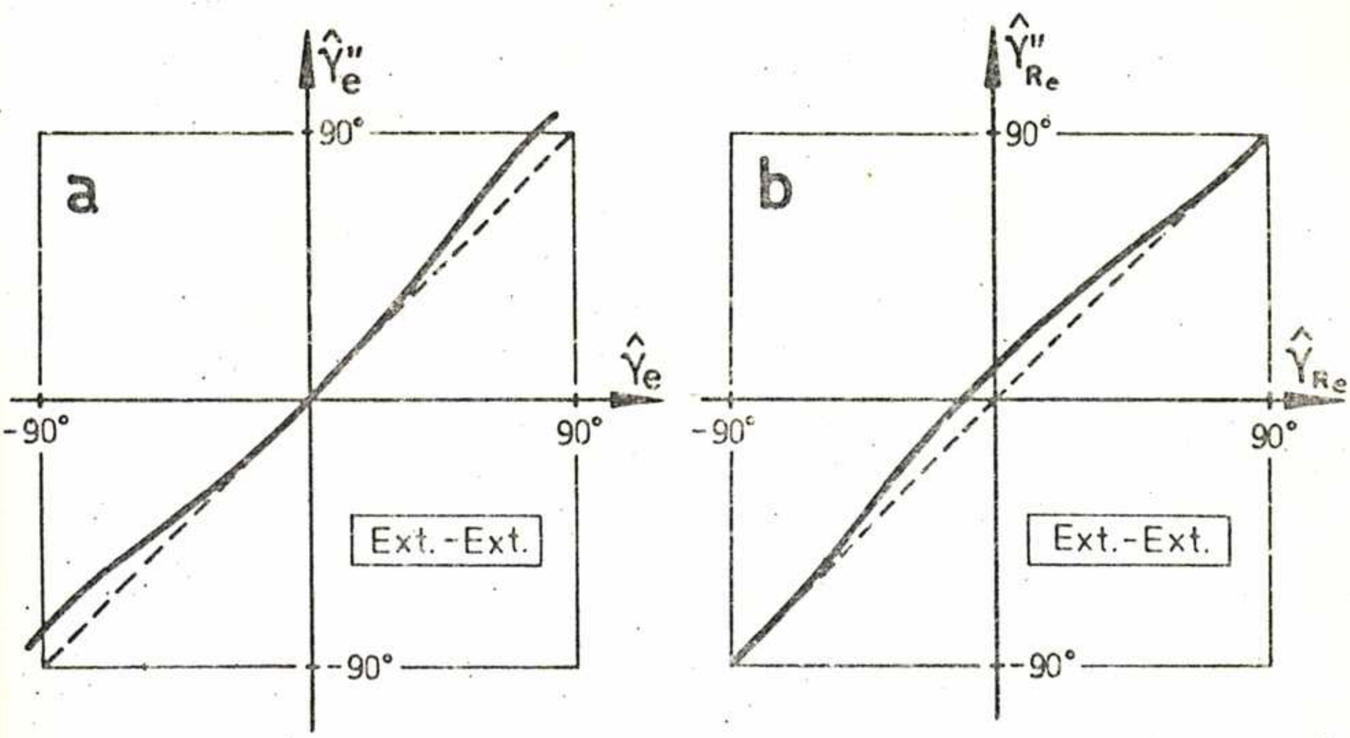


Figura 15: Angulos de reflexión en función de los de incidencia cuando el haz incidente y el reflejado son extraordinarios.

a) para las ondas,

b) para los rayos.

Por último, de las ecuaciones (67) se pueden obtener expresiones análogas a (63) y (64) con u" en vez de u_o.

$$\breve{S}_e = \frac{\breve{N}_e + a_e\breve{n}}{\sqrt{1+a_e^2+2a_e(\breve{N}_e\cdot\breve{n})}} \qquad (80)$$

con

$$a_e = \sqrt{\frac{u''^2}{u^2} - 1 + (\breve{N}_e\cdot\breve{n})^2} - (\breve{N}_e\cdot\breve{n}) \qquad (81)$$

en ellas u" depende de $\breve{N}_e$, pero como esta última es dato, el problema queda resuelto.

3. <u>Reflexión total</u>. a) Reflexión total ordinaria y extraordinaria.

Se puede dividir el estudio de la reflexión total interna en dos casos, según sea el haz incidente: ordinario o extraordinario. Mientras que en el caso ordinario, la condición de reflexión total es equivalente a la de un medio isótropo, en el caso extraordinario no ocurre lo mismo y el ángulo límite depende del plano de incidencia.

a) Reflexión total ordinaria y extraordinaria.

A pesar de que el caso ordinario coincide con el de medios isótropos, es conveniente desarrollarlo en una forma más adecuada a nuestros propósitos.

Para eso se parte de las ecuaciones (45) que son:

$$\frac{\breve{N}_o \cdot \breve{y}}{u_o} = \frac{\breve{S}_o \cdot \breve{y}}{u} \; ; \qquad \frac{\breve{N}_o \cdot \breve{z}}{u_o} = \frac{\breve{S}_o \cdot \breve{z}}{u} \tag{45}$$

a las que se agrega la condición de que el rayo refractado sea rasante

$$\breve{S}_o \cdot \breve{n} = 0 \tag{82}$$

o lo que es lo mismo, teniendo en cuenta que $\breve{S}_o$ tiene módulo unidad

$$(\breve{S}_o \cdot \breve{y})^2 + (\breve{S}_o \cdot \breve{z})^2 = 1 \tag{83}$$

reemplazando (45) en (83)

$$(\breve{N}_o \cdot \breve{y})^2 + (\breve{N}_o \cdot \breve{z})^2 = \frac{u_o^2}{u^2} \tag{84}$$

Con esta última y sabiendo que $|\breve{N}_o| = 1$, se tiene

$$(\breve{N}_o \cdot \breve{x})^2 = 1 - \frac{u_o^2}{u^2} \tag{85}$$

Las ecuaciones(84) y (85) representan un cono de eje perpendicular a la superficie de discontinuidad (Figura 16), cuya altura es:

$$h = \sqrt{1 - \frac{u_o^2}{u^2}} \qquad (86)$$

y el radio de su base

$$\rho = \frac{u_o}{u} \qquad (87)$$

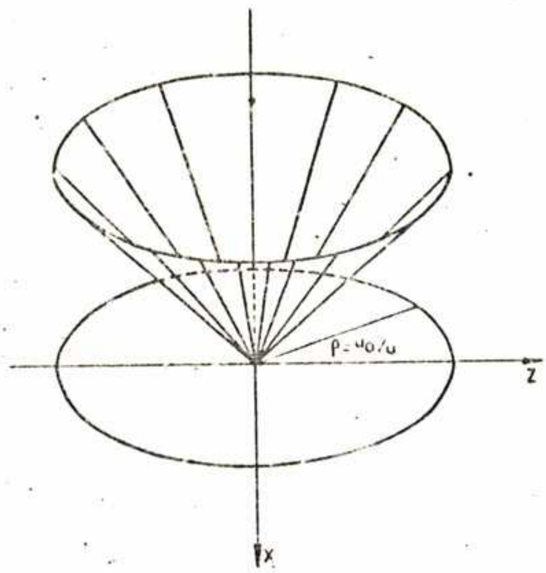


Figura 16: Superficie cónica limitando la zona de reflexión total para el rayo ordinario.

El ángulo de abertura del cono es el ángulo límite de reflexión total

$$\left| \operatorname{sen} \hat{\gamma}_{oT} \right| = \frac{u_o}{u} \qquad (88)$$

Por lo tanto, sufrirán reflexión total aquellas ondas que incidan sobre la superficie de discontinuidad con ángulos mayores que el del cono.

Ahora pasaremos a describir la reflexión total interna, cuando la onda incidente es extraordinaria.

Las ecuaciones a tener en cuenta en este caso son las (65):

$$\frac{\breve{N}_e\cdot\breve{y}}{u''} = \frac{\breve{S}_e\cdot\breve{y}}{u} \; ; \quad \frac{\breve{N}_e\cdot\breve{z}}{u''} = \frac{\breve{S}_e\cdot\breve{z}}{u} \qquad (65)$$

y también

$$\breve{S}_e\cdot\breve{x} = 0 \qquad (89)$$

La condición de reflexión total queda, como en el caso anterior:

$$(\breve{N}_e\cdot\breve{y})^2 + (\breve{N}_e\cdot\breve{z})^2 = \frac{u''^2}{u_o^2} \qquad (90)$$

Sin embargo, dado que u" depende de $\breve{N}_e$, (90) no es totalmente análoga a la expresión correspondiente al caso ordinario. Para resolverla, falta reemplazar la expresión de u" en función de $\breve{N}_e$ dada en (68) con lo que queda:

$$(\breve{N}_e\cdot\breve{y})^2 + (\breve{N}_e\cdot\breve{z})^2 = b(\breve{N}_e\cdot\breve{z}_3)^2 + \frac{u_e^2}{u^2} \qquad (91)$$

con $$b = \frac{u_o^2 - u_e^2}{u^2} \qquad (92)$$

Desarrollando $(\breve{N}_e\cdot\breve{z}_3)$ en función de las componentes en el sistema (x,y,z)

$$(\breve{N}_e\cdot\breve{y})^2 + (\breve{N}_e\cdot\breve{z})^2 = b\Big((\breve{N}_e\cdot\breve{x})(\breve{z}_3\cdot\breve{x}) + (\breve{N}_e\cdot\breve{z})(\breve{z}_3\cdot\breve{z})\Big)^2 + \frac{u_e^2}{u^2} \qquad (93)$$

y considerando que

$$(\breve{N}_e\cdot\breve{y})^2 + (\breve{N}_e\cdot\breve{z})^2 = \operatorname{sen}^2 \hat{\gamma}_{eT} \qquad (94)$$

$$(\check{N}_e \cdot \check{x}) = \cos \hat{\gamma}_{eT} = \sqrt{1 - \operatorname{sen} \hat{\gamma}_{eT}} \qquad (95)$$

$$(\check{N} \cdot \check{z}) = - \operatorname{sen} \hat{\gamma}_{eT} \cos \delta$$

y reemplazando estas relaciones en (93) se obtiene la siguiente ecuación bicuadrática:

$$A_T \operatorname{sen}^4 \hat{\gamma}_{eT} + B_T \operatorname{sen}^2 \hat{\gamma}_{eT} + C_T = 0 \qquad (96)$$

con

$$A_T = b^2 \left[1-(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2\right]^2 \cos^4 \delta + 2b \left[1-(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2\right] \cos^4 \delta \times \left[b(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 - 1\right] + \left[1+b(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2\right]^2 \qquad (97)$$

$$B_T = 2 \left\{ b \left[1-(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2\right] \left(\frac{u_e^2}{u^2} - b(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right) \cos^2 \delta - \left[1+b(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2\right] \left(\frac{u_e^2}{u^2} + b(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right) \right\} \qquad (98)$$

$$C_T = \left(\frac{u_e^2}{u^2} + b(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right)^2 \qquad (99)$$

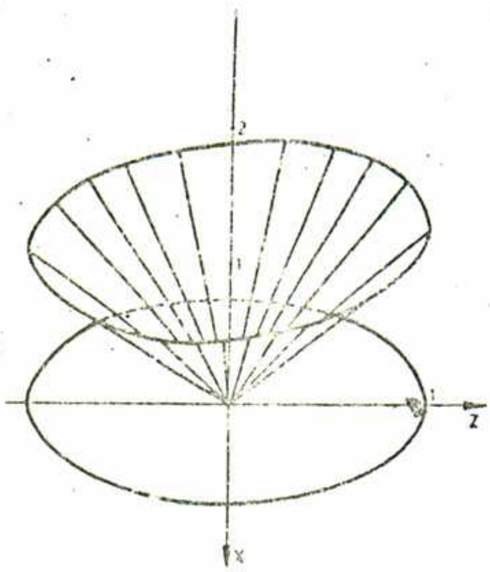
Esta ecuación bicuadrática es la condición de reflexión total para el rayo extraordinario y en su solución aparece nuevamente un doble signo que es necesario decidir a través de construcciones de Huygens.

$$\hat{\gamma}_{eT} = \sqrt{\frac{-B_T \pm \sqrt{B_T^2 - 4A_T C_T}}{2 A_T}} \qquad (100)$$

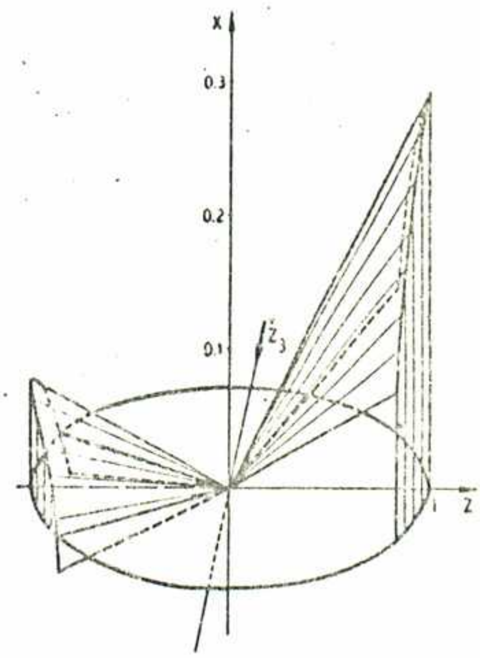
Corresponde el signo positivo si:

$$(u_o^2 - u_e^2)\,(\breve{N}_e . \breve{z})\,(\breve{n} . \breve{z}_3) > 0 \tag{101}$$

Con esto es posible calcular $\hat{\gamma}_{eT}$ en función de δ y se puede dibujar la superficie que determina el límite entre la reflexión parcial y la reflexión total. La forma de dicha superficie difiere del caso isótropo ya que la superficie cónica se deforma debido a la variación del índice con $\hat{\delta}$. Esto se puede apreciar en las Figuras 17a) y b).



(a)



(b)

Figura 17 a). Superficie límite para el caso $n < n_e < n_o$.

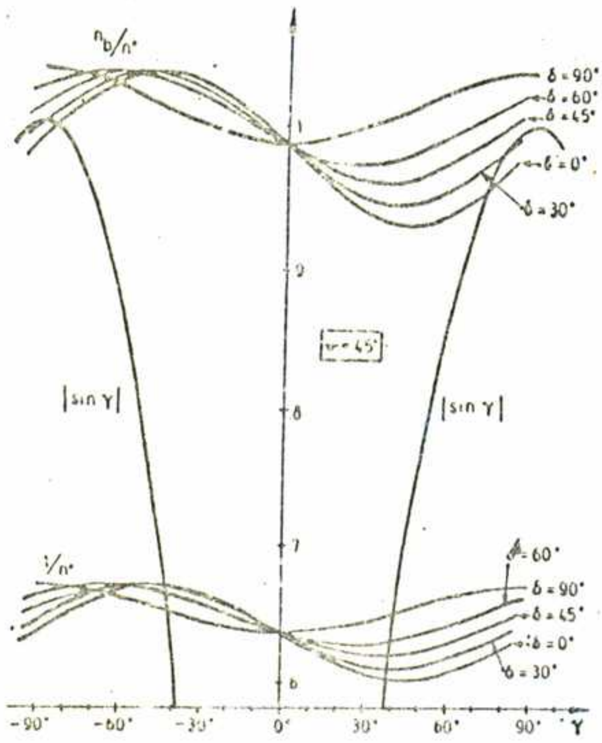
b). Superficie límite para el caso $n_e < n < n_o$.

En la 17a) el valor del índice del medio isótropo es menor que los dos índices del cristal y, por lo tanto, la reflexión total siempre es posible. Para el caso de la Figura 17b) en cambio, el medio isótropo tiene un índice intermedio entre los dos del cristal, por lo tanto, a partir de cierto valor del ángulo $\hat{\delta}$, el índice de la onda extraordinaria será menor que el del medio isótropo y, por lo tanto, no habrá posibilidad de reflexión total; a partir de ese $\hat{\delta}$, no existirá una superficie límite.

Para verlo de otra forma, consideremos nuevamente la ecuación (90) y la (94). De ellas se puede escribir

$$|\mathrm{sen}\ \hat{\gamma}_{eT}| = \frac{u''}{u} \qquad (102)$$

y a partir de aquí, podemos ver que el ángulo de reflexión total estará dado por la intersección de las curvas $|\mathrm{sen}\ \hat{\gamma}_e|$ y $\frac{u''}{u}$ como función de $\hat{\gamma}_e$. Dichas curvas se representan en las Figuras 18a) y 18b) para diferentes valores de $\hat{\delta}$ y $\hat{\theta}$



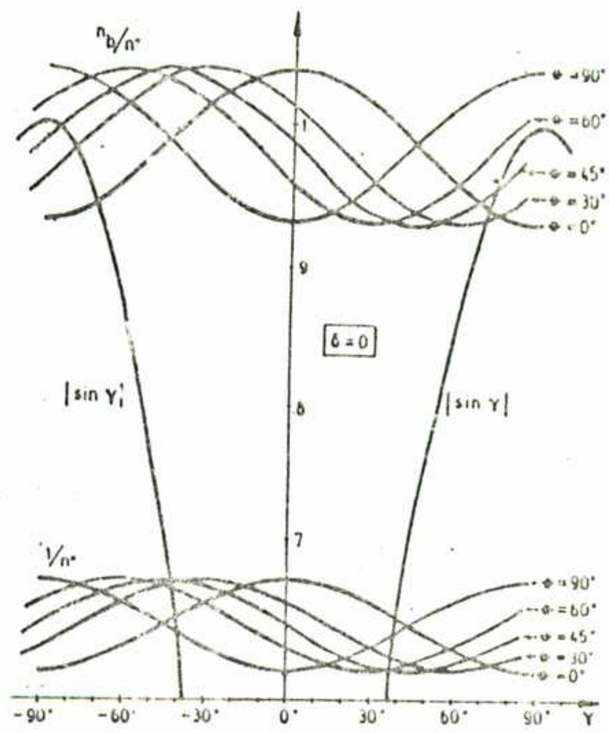


Figura 18. a). Condición de reflexión total para n=1 y n_o= 1.55 para distintos $\hat{\delta}$ con $\hat{\theta}$ = 45°.

b) Condición de reflexión total para n=1, n_o=1.55 para distintos $\hat{\theta}$ con $\hat{\delta}$= 0.

b) Reflexión total en un prisma de Nicol.

El prisma de Nicol consiste en un romboedro de calcita cuyas caras laterales son los planos naturales de clivaje y cuyos extremos han sido modificados de forma tal que el ángulo natural de clivaje de 71° se ha reducido a 68°.

Luego de esto, el romboedro se corta por un plano diagonal que pasa a través de los ángulos obtusos de 123°; las dos partes resultantes se cementan en su posición original mediante bálsamo del Canadá, cuyo índice de refracción ($n = 1.55$) es intermedio entre n_o y n_e de la calcita.

En la Figura 19 se muestra una sección del prisma, normal al plano del bálsamo y que contiene al eje óptico. En la misma se puede comprender el funcionamiento del Nicol siguiendo los rayos A,B,C. Cuando incide sobre el Nicol, un rayo que tiene la dirección axial (rayo A) se divide en dos rayos: el ordinario y el extraordinario. Al llegar a la superficie del bálsamo, el rayo ordinario se refleja totalmente ya que el índice del bálsamo es inferior al de la calcita, y el prisma está cortado de forma tal que se produzca ese efecto.

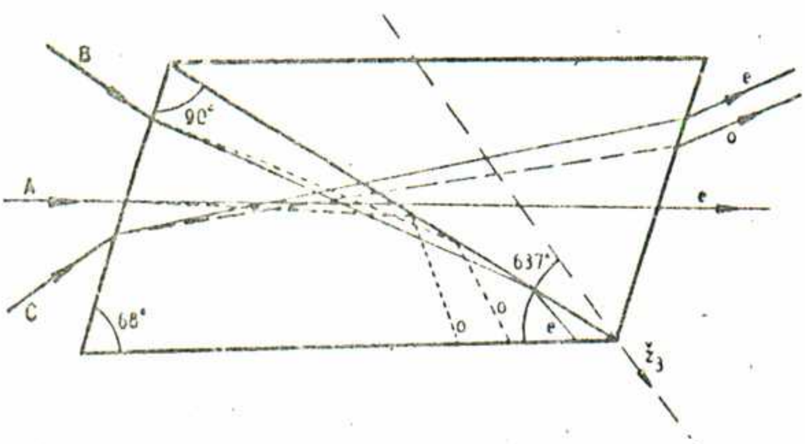


Figura 19. Sección de un Nicol mostrando el paso de los rayos.

Por otro lado, el rayo extraordinario atraviesa el prisma sin cambiar su dirección y, en consecuencia, el haz que emerge está linealmente polarizado. Sin embargo, si el haz incidente no es paralelo al eje del sistema, las condiciones anteriores no siempre se cumplen al mismo tiempo, por ejemplo, si seguimos el rayo B, se puede ver que el ángulo de incidencia sobre la superficie del bálsamo para el rayo ordinario es tal que ya no se produce reflexión total y, por lo tanto, para inclinaciones mayores o iguales que la de B, el haz emergente no está polarizado.

Si, en cambio, ahora seguimos el rayo C, se ve que es posible para una dada dirección de incidencia, que tanto el rayo ordinario como el extraordinario sufran reflexión total, y, por lo tanto, para inclinaciones mayores a ésta, no habrá luz que emerja del Nicol.

En efecto, el campo de un prisma de Nicol está compuesto por tres zonas: una central de luz polarizada, y a los lados de ésta, una zona de luz no polarizada y otra oscura.

Para observar las tres zonas, se montó la experiencia esquematizada en la Figura 20:

La fuente f es enfocada sobre un prisma de Nicol N, mediante el sistema de lentes L de forma de obtener un haz muy convergente (aproximadamente 60°). La luz emergente se observa en la pantalla P. El resultado se puede ver en las fotografías de la Figura 21.

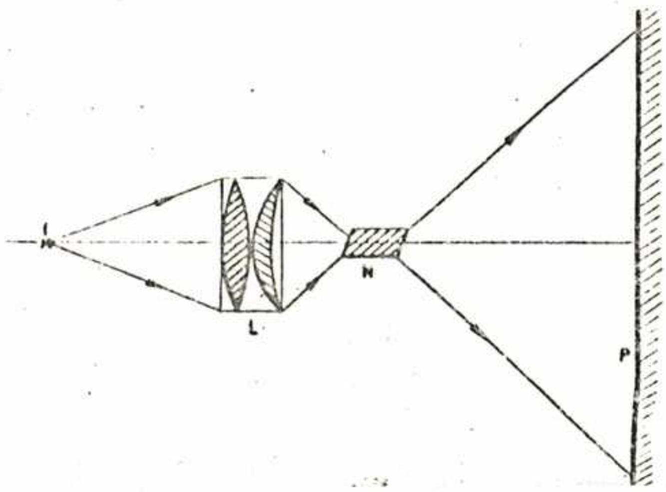


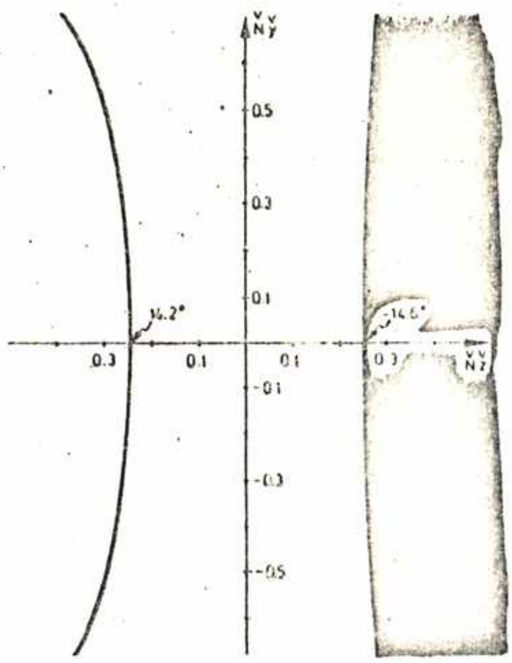
Figura 20: Disposición experimental para la observación del campo de un Nicol.

(a) (b) (c)

Figura 21: Campo de un prisma de Nicol: a) con el polarizador orientado de forma que es absorbido el rayo ordinario; b) las tres zonas del campo; c) la zona no polarizada eliminando los rayos extraordinarios con un polarizador.

En la Figura 21 b) se ven las tres zonas con sus diferentes intensidades; esto puede observarse a simple vista, pero para mejorar el contraste en la fotografía, se intercala un polarizador y se lo orienta en forma adecuada para que absorba parcialmente los rayos extraordinarios. Cuando se coloca el polarizador con su eje de transmisión vertical, de forma que los rayos ordinarios sean absorbidos totalmente, se obtiene 21 a) y girando el mismo 90^{0}, de forma de anular los rayos extraordinarios, se obtiene 21 c), que muestra la zona no polarizada del campo.

Por otro lado, utilizando las fórmulas (88) y (100), que dan los ángulos límites para el rayo ordinario y el extraordinario, se puede calcular la forma que hacen las dos curvas que dividen el campo del Nicol en tres zonas distintas . A partir de dicho cálculo, se obtiene lo representado en la Figura 22, que reproduce en forma apropiada lo hallado experimentalmente.



<u>Figura 22:</u>
las tres zonas del campo de un Nicol obtenidas teóricamente.

4) Reflexión inhibida.

De lo expuesto en la Sección 2, se deduce que, en el caso ordinario-extraordinario, r''_o es menor que uno para cristales negativos y que en el caso extraordinario-ordinario lo es r'_e para cristales positivos. Debido a eso, en ambas situaciones el ángulo que forma la onda reflejada con $\check{n}$ será mayor que el que forma la incidente y, por lo tanto, se puede pensar en la posibilidad de existencia de un ángulo de incidencia crítico para el cual el rayo reflejado es rasante. Para ángulos de incidencia mayores que el crítico, dicho rayo reflejado desaparece y la energía incidente, en principio, se debería redistribuir entre el otro reflejado y el refractado, aunque si nos hallamos en la zona de reflexión total, toda la energía del rayo incidente debe pasar al otro reflejado (ya que no existe rayo refractado).

a) <u>El cálculo.</u>

Primero se analizará el caso de los cristales positivos; en ellos la reflexión inhibida ocurre para el rayo reflejado ordinario, cuando el incidente es extraordinario (caso E-O). En dicho caso, el índice de reflexión es menor que uno y la forma más sencilla de estudiar el fenómeno, es escribir la relación entre el ángulo de incidencia y el de reflexión.

$$\frac{\operatorname{sen}\hat{\gamma}_e}{u''} = \frac{\operatorname{sen}\hat{\gamma}'_e}{u} \qquad (103)$$

Esta fórmula es formalmente idéntica a la ley de Snell para una onda que se refracta desde un medio en el que viaja con velocidad de fase u'' hacia uno en el que lo hace con u_o y puede deducirse a partir de (65), teniendo en cuenta que

$$\check{N}_e \cdot \check{x} = \cos\hat{\gamma}_e \qquad (104)$$

$$\check{N}_e \cdot \check{y} = \operatorname{sen}\hat{\gamma}_e \operatorname{sen}\delta \qquad (105)$$

$$\check{N}_e \cdot \check{z} = \operatorname{sen}\hat{\gamma}_e \cos\delta \qquad (106)$$

$$\check{N}'_e \cdot \check{x} = \cos\hat{\gamma}'_e \qquad (107)$$

$$\check{N}'_e \cdot \check{y} = \operatorname{sen}\hat{\gamma}'_e \operatorname{sen}\delta \qquad (108)$$

$$\check{N}'_e \cdot \check{z} = \operatorname{sen}\hat{\gamma}'_e \cos\delta \qquad (109)$$

El ángulo crítico, $\hat{\gamma}'^{+}_c$, para el cual el rayo reflejado es rasante, está dado por la relación

$$\operatorname{sen} \hat{\gamma}_c^{+} = \frac{u''}{u_o} \qquad (110)$$

que se obtiene habiendo tomado $\hat{\gamma}_e' = 90°$ en (103) ya que rayo y onda coinciden para el reflejado.

Dado que u" depende de la dirección de incidencia, es necesario hacer explícita su dependencia con $\hat{\gamma}_c^{+}$, para ello se parte de la ecuación (23), que transcribimos

$$u''^2 = (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}_e \cdot \check{z}_3)^2 + u_e^2 \qquad (23)$$

y desarrollando el producto escalar allí presente, en términos de las componentes de los versores en el sistema de la superficie, y reemplazando sus valores en función de los ángulos, en forma análoga a lo realizado en la Sección 3, se llega, teniendo en cuenta que para reflexión inhibida $\hat{\gamma}_e = \hat{\gamma}_c^{+}$ a una ecuación bicuadrática como la(96):

$$A_c \operatorname{sen}^4 \hat{\gamma}_c^{+} + B_c \operatorname{sen}^2 \hat{\gamma}_c^{+} + C_c = 0 \qquad (111)$$

$$A_c = b_o^2 \left[1-(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2\right]^2 \cos^4\delta + 2b\left[1-(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2\right]$$
$$b\left[(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 - 1\right] \cos^2\delta + \left[1+b(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2\right]^2 \qquad (112)$$

$$B_c = 2\left\{b_o\left[1-(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2\right]\left[\frac{u_e^2}{u_o^2} - b_o(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2\right] \cos^2\delta - \right.$$
$$\left. - \left[1+b_o(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2\right]\left[\frac{u_e^2}{u^2} + b_o(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2\right]\right\} \qquad (113)$$

$$C_c = \left[\frac{u_e^2}{u^2} + b(\check{z}_3 . \check{x})^2 \right]^2 \qquad (114)$$

donde

$$b_o = \frac{u_o^2 - u_e^2}{u_o^2} \qquad (115)$$

La analogía entre (96) y (111) no es casual, ya que la (96) representa la reflexión total desde un medio de índice n" hacia uno de índice n (o, lo que es lo mismo, desde uno con velocidad de fase u" hacia otro con u), mientras que este caso de reflexión inhibida, se puede pensar formalmente como la reflexión total desde un medio de velocidad de fase u" hacia uno de velocidad de fase u_o.

Para los cristales negativos, en cambio, el fenómeno se produce cuando el rayo incidente es ordinario, ya que en ese caso, el extraordinario se refleja bajo un ángulo mayor que el de incidencia.

Sea $\hat{\gamma}_c^-$ el ángulo a partir del cual el rayo reflejado es rasante, en el sistema de la superficie, esto equivale a:

$$\check{R}''_o . \check{x} = 0 \qquad (116)$$

Por otro lado, volvemos a escribir la relación entre el rayo y la onda dada por (62)

$$\check{R}''_o = \frac{u_e^2 \check{N}''_o + (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}''_o . \check{z}_3)\check{z}_3}{\sqrt{(u''_o - u''_e)(\check{N}''_o . \check{z}_3)^2 + u''_e}} \qquad (62)$$

Si ahora se escriben las componentes de $\check{N}''_o$ en función de los ángulos δ y $\hat{\gamma}_{RR}$ (que es el ángulo que forma la normal al frente de ondas $\breve{N}''_o$ con $\breve{n}$) cuando el rayo correspondiente es rasante, se obtiene lo siguiente:

$$\cot \hat{\gamma}_{RR} = \frac{-b_e \cos\delta\, (\breve{z}_3 \cdot \breve{z})(\breve{z}_3 \cdot \breve{x})}{1 + b_e\, (\breve{z}_3 \cdot \breve{x})^2} \qquad (117)$$

con

$$b_e = \frac{u_o^2 - u_e^2}{u_e^2} \qquad (118)$$

Ahora, el ángulo $\hat{\gamma}_c^-$ se puede obtener de la relación entre el ángulo de incidencia y el de reflexión para las normales

$$\frac{\operatorname{sen} \hat{\gamma}_c^-}{u_o} = \frac{\operatorname{sen} \hat{\gamma}_{RR}}{u''_o} \qquad (119)$$

donde u''_o se calcula a partir de una ecuación similar a (23).

De (23), (119) y (117) se obtiene la siguiente expresión para sen $\hat{\gamma}_c^-$

$$\operatorname{sen} \hat{\gamma}_c^- = \frac{u_o}{u_e} \sqrt{1 + \frac{b_e \cos^2\delta\, (\breve{z}_3 \cdot \breve{z})^2}{1 + b_e (\breve{z}_3 \cdot \breve{x})^2}} \qquad (120)$$

Aquí no se encuentra la analogía entre la reflexión inhibida y la reflexión total en medio isótropos como en el caso de los cristales positivos. Esto se debe a que en el caso $b_e > 0$

la condición de rayo rasante es equivalente a la de onda rasante, y ésta es la condición para la reflexión total en medios isótropos, mientras que en el caso O-E, la condición de rayo rasante, lleva a(117).

b) La experiencia.

Para mostrar el fenómeno que se acaba de describir, se realizó la siguiente experiencia, utilizando un cristal de calcita con sus caras orientadas según los ángulos de clivaje.

Como se puede apreciar en la Figura 23, dicha experiencia consiste en hacer pasar un haz de luz por la primera cara del del cristal (a); al atravesarla, éste se divide en dos, el ordinario y el extraordinario, los que, a su vez, al reflejarse en la cara posterior(b), se vuelven a dividir en dos, dando lugar a los cuatro casos de reflexión interna ya estudiados.

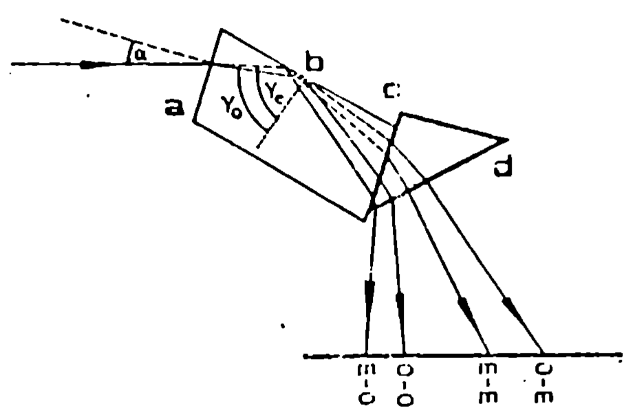
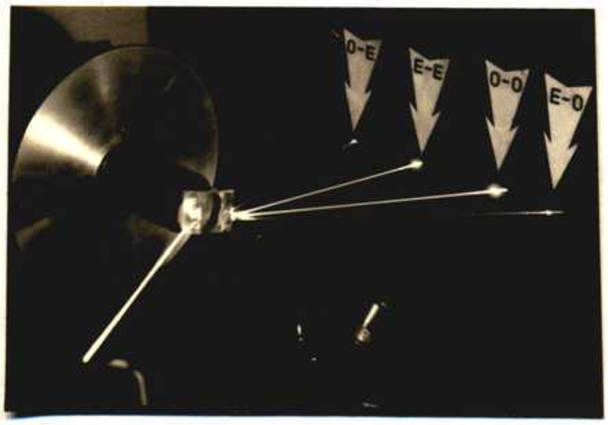


Fig.23: Esquema del experimento. α es el ángulo entre el haz incidente, la normal a la cara (a).

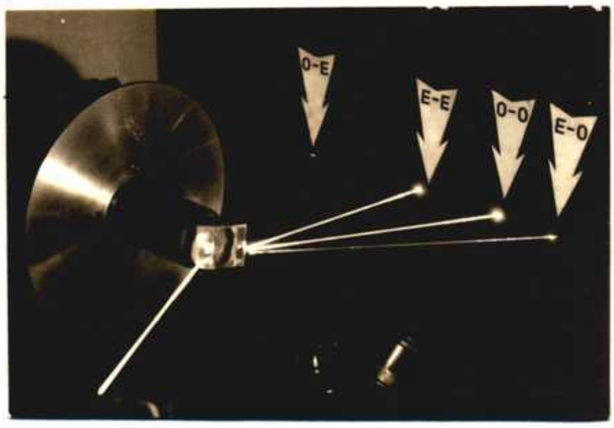
Los cuatro haces llegan a una nueva cara del cristal (c), en la que se encuentra cementado con bálsamo del Canadá un prisma de vidrio, el que fue colocado para evitar la reflexión total del rayo E-O en la cara (c). De esta forma, se pueden ver los cuatro casos de reflexión como se muestra en la fotografía de la Figura 24a).

El cristal se montó sobre un goniómetro y la disposición es tal que $\hat{\theta} = 45.3^{o} \pm 0.5^{o}$ y $\hat{\delta} = 45.3^{o} \pm 0.5^{o}$; girando el cristal, se varía el ángulo de incidencia y se observa que para cierto valor de dicho ángulo, desaparece el rayo O-E, haciéndose más intenso el O-O.

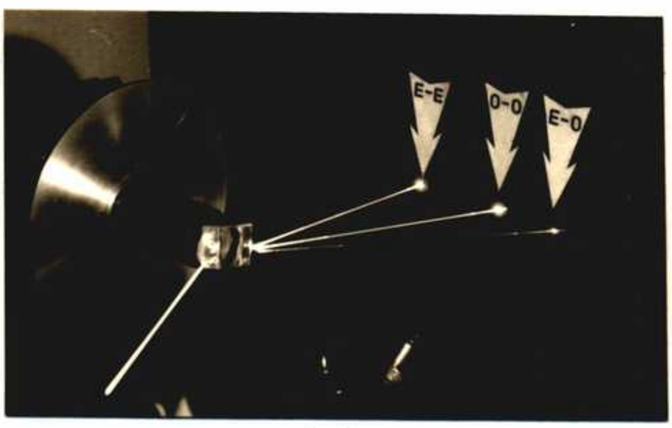
La Figura 24 muestra los rayos reflejados para tres ángulos de incidencia: $\hat{\gamma}_o = 62.6^{o} \pm 0.2^{o}$ con el que se observan los cuatro rayos reflejados (24.a); $\hat{\gamma}_o = 65.5^{o} \pm 0.2^{o}$ para el que la intensidad del rayo O-E disminuye en forma notable (24.b) y $\hat{\gamma}_o = 69.7^{o} \pm 0.2^{o}$ para el cual el rayo O-E ya no existe (24.c).



(a)



(b)



(c)

Fig. 24: Los rayos resultantes por reflexión interna.
a) $\hat{\gamma}_o = 62.6$; b) $\hat{\gamma}_o = 65.5$; c) $\hat{\gamma}_o = 69.7$

Además, se midieron las correspondientes intensidades en unidades arbitrarias, con un fotómetro (Tektronic J-16). De los valores obtenidos, según se ve en la Tabla I, es claro que la intensidad del O-O crece a medida que disminuye la del O-E, hasta extinguirse.

Se observa un comportamiento similar para los rayos E-O y E-E, sin embargo para esos casos la intensidad no cae a cero en ningún momento.

Se debe notar, que la suma de las intensidades de todos los rayos transmitidos a través del sistema, más el reflejado en la primera cara, no da exactamente la intensidad del incidente ya que falta tener en cuenta las reflexiones en las caras c y d.

TABLA I: Intensidades relativas de los cuatro rayos reflejados.

Intensidades relativas.

Angulos de incidencia			Rayos reflejados internamente				Reflejado en la 1º cara	Rayo incidente
$\hat{\alpha}$ (°)	$\hat{\gamma}_o'$ (°)	$\hat{\gamma}_o''$ (°)	E–O	O–O	E–E	O–E		
21.1 ± 0.2	62.6 ± 0.2	61.2 ± 0.2	4.3 ± 0.3	27 ± 2	21 ± 2	3.8 ± 0.3	4.5 ± 0.1	101 ± 2
17.6 ± 0.2	64.6 ± 0.2	63.5 ± 0.2	8.0 ± 0.6	29 ± 2	26 ± 2	2.3 ± 0.4	4.5 ± 0.1	101 ± 2
16.1 ± 0.2	65.5 ± 0.2	64.5 ± 0.2	7.5 ± 0.6	32 ± 2	26 ± 2	0.6 ± 0.2	4.5 ± 0.1	101 ± 2
9.1 ± 0.3	69.[illegible] ± 0.2	69.2 ± 0.2	5.2 ± 0.6	35 ± 2	30 ± 2		4.5 ± 0.1	100 ± 2

Midiendo el ángulo de incidencia $\hat{\alpha}$ sobre la cara (a) para el que desaparece el rayo O-E, se puede calcular el ángulo crítico en la cara (b), lo que da:

$$\hat{\gamma}_L = 67,1^\circ \pm 0,2^\circ$$

Por otro lado se puede calcular $\hat{\gamma}_L$ de la ecuación (120) deducida antes

$$\hat{\gamma}_L = 67,4^\circ \pm 0,5^\circ$$

Estos resultados dan un buen acuerdo entre la teoría y las mediciones.

El error en el cálculo de $\hat{\gamma}_L$ según (120) proviene del hecho de que el ángulo $\hat{\theta}$ está determinado con un error de $0,5^\circ$.

También es importante notar que si bien en esta experiencia la reflexión inhibida se produce en la zona de reflexión total, el fenómeno ocurrirá aunque éste no sea el caso, es decir, la reflexión inhibida no depende del índice de refracción del medio externo.

CAPITULO III

Coeficientes de reflexión y transmisión en una interfase cristal monoaxial-medio isótropo.

1. Planteo del problema.

Como ya vimos en el Capítulo I, los modos de propagación de una onda plana en cristales monoaxiales, son el ordinario y el extraordinario; en ambos casos, conocida la dirección de propagación de la onda, quedan automáticamente dadas las direcciones del campo eléctrico $\vec{\mathcal{E}}$, desplazamiento $\vec{\mathcal{D}}$ e intensidad de campo magnético $\vec{\mathcal{H}}$.

Además, dado que estos tres vectores están relacionados entre sí, alcanza con conocer una componente de uno solo de ellos para conocer a todos. Por lo tanto, será posible expresar a todos los vectores en función de una componente de sólo uno de ellos, por ejemplo, en el sistema de superficie la componente "y" del desplazamiento ($\vec{\mathcal{D}}.\check{y}$).

En un medio isótropo, en cambio, la polarización no es conocida, por lo tanto, harán falta dos componentes de uno de los campos para determinar las demás.

En lo que sigue, se encontrarán las relaciones entre las componentes de los campos, para cada una de las ondas involucradas, ya sea en el caso de onda incidente ordinaria, o en el caso de onda incidente extraordinaria, en el sistema de la superficie que es el sistema natural para la resolución de las condiciones de contorno en la superficie de discontinuidad. Una vez hecho esto, se procederá a resolver las condiciones mencionadas con lo que se obtendrán todos los campos en función del incidente, o, lo que es lo mismo, en función de la dirección de la onda incidente y de una componente de uno de los campos.

Luego de esto, con los resultados obtenidos se calcularán los coeficientes de reflexión y transmisión para todos los haces.

2. Relaciones entre las componentes de los campos en el sistema de la superficie.

a) Ondas ordinarias.

Denotando $\vec{\mathcal{D}}_o$, $\vec{\mathcal{E}}_o$ y $\vec{\mathcal{H}}_o$ a los campos de una onda incidente ordinaria y $\vec{D}_o$, $\vec{E}_o$ y $\vec{H}_o$ a sus respectivas amplitudes, se tiene

$$\vec{\mathcal{D}}_o = \vec{D}_o \, e^{i \varphi_o} \tag{121}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_o = \vec{E}_o \, e^{i \varphi_o} \tag{122}$$

$$\vec{\mathcal{H}}_o = \vec{H}_o \, e^{i \varphi_o} \tag{123}$$

con

$$\varphi_o = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\check{N}_o \cdot \check{r} - u_o t \right] \tag{124}$$

De acuerdo con las ecuaciones (24) del Capítulo I, las relaciones entre las componentes del desplazamiento en el sistema de ejes principales se escribirán:

$$\vec{\mathcal{D}}_o \cdot \check{z}_1 = - \frac{(\check{N}_o \cdot \check{z}_2)}{\check{N}_o \cdot \check{z}_1} \, (\vec{\mathcal{D}}_o \cdot \check{z}_3) \tag{125}$$

$$\vec{\mathcal{D}}_o \cdot \check{z}_3 = 0 \tag{126}$$

Sustituyendo (121) y (21) en (125) y (126) se obtienen las siguientes relaciones entre las componentes principales de $\vec{E}$ y $(\vec{D}_o \cdot \check{z}_2)$:

$$(\vec{E}_o \cdot \check{z}_1) = - \mu_o u_o^2 \, \frac{(\check{N}_o \cdot \check{z}_2)}{(\check{N}_o \cdot \check{z}_1)} \, (\vec{D}_o \cdot \check{z}_2) \tag{127}$$

$$(\vec{E}_o\cdot\breve{z}_2) = \mu_o u_o^2\,(\vec{D}_o\cdot\breve{z}_2) \qquad (128)$$

$$(\vec{E}_o\cdot\breve{z}_3) = 0 \qquad (129)$$

Por otro lado, las componentes principales de $\vec{H}_o$ se encuentran a partir de (11) que es

$$\breve{N}_o \times \vec{\mathcal{H}}_o = \mu_o\,\vec{\mathcal{D}}_o \qquad (11)$$

de la que inmediatamente se obtiene

$$\breve{N}_o \times \vec{H}_o = \mu_o \vec{D}_o \qquad (130)$$

simplificando la exponencial de ambos miembros.

Las relaciones buscadas quedan:

$$(\vec{H}_o\cdot\breve{z}_1) = -u_o(\breve{N}_o\cdot\breve{z}_3)(\vec{D}_o\cdot\breve{z}_2) \qquad (131)$$

$$(\vec{H}_o\cdot\breve{z}_2) = -u_o\,\frac{(\breve{N}_o\cdot\breve{z}_3)(\breve{N}_o\cdot\breve{z}_2)}{(\breve{N}_o\cdot\breve{z}_1)}\,(\vec{D}_o\cdot\breve{z}_2) \qquad (132)$$

$$(\vec{H}_o\cdot\breve{z}_3) = u_o\,\frac{\left[1-(\breve{N}_o\cdot\breve{z}_3)^2\right]}{(\breve{N}_o\cdot\breve{z}_1)}\,(\vec{D}_o\cdot\breve{z}_2) \qquad (133)$$

Hasta aquí hemos encontrado lo que se pretendía, pero en el sistema de ejes principales, lo que no se puede aplicar en forma directa a la resolución de las condiciones de contorno, ya que esto último debe hacerse en el sistema de superficie. Por lo tanto, es necesario llevar a cabo un cambio de coordenadas, lo que se lleva a cabo utilizando la matriz de rotación $\mathcal{R}$ dada en (42).

Realizando esto, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} (\vec{D}_o\cdot\breve{x}) &= \rho_o(\vec{D}_o\cdot\breve{y}) \\ (\vec{D}_o\cdot\breve{y}) &= 1\,(\vec{D}_o\cdot\breve{y}) \\ (\vec{D}_o\cdot\breve{z}) &= \eta_o(\vec{D}_o\cdot\breve{y}) \end{aligned}\right\} \qquad (134)$$

$$\left.\begin{aligned} (\vec{E}_o\cdot\breve{x}) &= \delta_o\,(\vec{D}_o\cdot\breve{y}) \\ (\vec{E}_o\cdot\breve{y}) &= \mu_o\,u_o^2(\vec{D}_o\cdot\breve{y}) \\ (\vec{E}_o\cdot\breve{z}) &= \lambda_o\,(\vec{D}_o\cdot\breve{y}) \end{aligned}\right\} \qquad (135)$$

$$\left.\begin{aligned} (\vec{H}_o\cdot\breve{x}) &= \alpha_o\,(\vec{D}_o\cdot\breve{y}) \\ (\vec{H}_o\cdot\breve{y}) &= \beta_o\,(\vec{D}_o\cdot\breve{y}) \\ (\vec{H}_o\cdot\breve{z}) &= \gamma_o\,(\vec{D}_o\cdot\breve{y}) \end{aligned}\right\} \qquad (136)$$

En las que ρ_o, η_o, δ_o, λ_o, α_o, β_o y γ_o están dadas en función de los datos $\breve{n}$, $\breve{z}_3$, $\breve{N}_o$ y u_o de la siguiente forma:

$$\rho_o = \frac{-[\breve{N}_o\cdot(\breve{z}_3\times\breve{n})]\;f_n}{(\breve{N}_o\cdot\breve{n})-(\breve{N}_o\cdot\breve{z}_3)(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)} \qquad (137)$$

$$\eta_o = \frac{[\breve{N}_o\cdot(\breve{z}_3\times\breve{n})]\;(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)}{(\breve{N}_o\cdot\breve{n})-(\breve{N}_o\cdot\breve{z}_3)(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)} \qquad (138)$$

$$\delta_o = \frac{-\mu_o u_o^2 \left[\breve{N}_o \cdot (\breve{z}_3 x \breve{n}) \right] f_n}{(\breve{N}_o \cdot \breve{n}) - (\breve{N}_o \cdot \breve{z}_3)(\breve{n} \cdot \breve{z}_3)} \qquad (139)$$

$$\lambda_o = \frac{\mu_o u_o^2 \left[\breve{N}_o \cdot (\breve{z}_3 x \breve{n}) \right] (\breve{n} \cdot \breve{z}_3)}{(\breve{N}_o \cdot \breve{n}) - (\breve{N}_o \cdot \breve{z}_3)(\breve{n} \cdot \breve{z}_3)} \qquad (140)$$

$$\alpha_o = u_o f_n \left\{ \frac{(\breve{n} \cdot \breve{z}_3) - (\breve{N}_o \cdot \breve{n})(\breve{N}_o \cdot \breve{z}_3)}{(\breve{N}_o \cdot \breve{n}) - (\breve{N}_o \cdot \breve{z}_3)(\breve{n} \cdot \breve{z}_3)} \right\} \qquad (141)$$

$$\beta_o = \frac{-u_o (\breve{N}_o \cdot \breve{z}_3) \left[\breve{N}_o \cdot (\breve{z}_3 x \breve{n}) \right]}{(\breve{N}_o \cdot \breve{n}) - (\breve{N}_o \cdot \breve{z}_3)(\breve{n} \cdot \breve{z}_3)} \qquad (142)$$

$$\gamma_o = u_o \left\{ \frac{(\breve{N}_o \cdot \breve{z}_3)(\breve{N}_o \cdot \breve{n})(\breve{n} \cdot \breve{z}_3) - (\breve{N}_o \cdot \breve{z}_3)^2 + f_n^2}{(\breve{N}_o \cdot \breve{n}) - (\breve{N}_o \cdot \breve{z}_3)(\breve{n} \cdot \breve{z}_3)} \right\} \qquad (143)$$

Si la onda ordinaria de la que estamos hablando, no es la incidente sino que se trata de una reflejada, las relaciones entre las componentes de sus campos no varían respecto de las anteriores, ya que éstas son intrínsecas de la onda y no dependen de su origen. Sin embargo, por prolijidad de cálculo, es necesario separar un caso del otro, diferenciándolos mediante distinta notación.

Una onda reflejada ordinaria será descripta por las siguientes ecuaciones, si la incidente es ordinaria:

$$\vec{\mathcal{D}}'_o = \vec{D}'_o \, e^{i \varphi'_o} \qquad (144)$$

$$\vec{\mathscr{E}}'_o = \vec{E}'_o \, e^{i \varphi'_o} \tag{145}$$

$$\vec{\mathscr{H}}'_o = \vec{H}'_o \, e^{i \varphi'_o} \tag{146}$$

con

$$\varphi'_o = \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \breve{N}'_o \cdot \breve{r} - u_o t \right\} \tag{147}$$

y las relaciones entre campos serán:

$$\left.\begin{aligned} (\vec{D}'_o \cdot \breve{x}) &= \rho'_o (\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) \\ (\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) &= 1 (\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) \\ (\vec{D}'_o \cdot \breve{z}) &= \eta'_o (\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) \end{aligned}\right\} \tag{148}$$

$$\left.\begin{aligned} (\vec{E}'_o \cdot \breve{x}) &= \delta'_o (\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) \\ (\vec{E}'_o \cdot \breve{y}) &= \mu_o u_o^2 (\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) \\ (\vec{E}'_o \cdot \breve{z}) &= \lambda'_o (\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) \end{aligned}\right\} \tag{149}$$

$$\left.\begin{aligned} (\vec{H}'_o \cdot \breve{x}) &= \alpha'_o (\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) \\ (\vec{H}'_o \cdot \breve{y}) &= \beta'_o (\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) \\ (\vec{H}'_o \cdot \breve{z}) &= \gamma'_o (\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

Con ρ'_o, η'_o, δ'_o, λ'_o, α'_o, β'_o y γ'_o dados nuevamente en función de los datos $\breve{n}$, z_3 y u_o y de $\breve{N}'_o$ que se calcula a partir de (46).

$$\rho'_o = \frac{-\left[\breve{N}'_o\cdot(\breve{z}_3 x \breve{n})\right] f_n}{(\breve{N}'_o\cdot\breve{n})-(\breve{N}'_o\cdot\breve{z}_3)(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)} \tag{151}$$

$$\eta'_o = \frac{\left[\breve{N}'_o\cdot(\breve{z}_3 x \breve{n})\right](\breve{n}\cdot\breve{z}_3)}{(\breve{N}'_o\cdot\breve{n})-(\breve{N}'_o\cdot\breve{z}_3)(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)} \tag{152}$$

$$\delta'_o = \frac{-\mu_o u_o^2\left[\breve{N}'_o\cdot(\breve{z}_3 x \breve{n})\right] f_n}{(\breve{N}'_o\cdot\breve{n})-(\breve{N}'_o\cdot\breve{z}_3)(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)} \tag{153}$$

$$\lambda'_o = \frac{\mu_o u_o^2\left[\breve{N}'_o\cdot(\breve{z}_3 x \breve{n})\right](\breve{n}\cdot\breve{z}_3)}{(\breve{N}'_o\cdot\breve{n})-(\breve{N}'_o\cdot\breve{z}_3)(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)} \tag{154}$$

$$\alpha'_o = u_o\, f_n\left\{\frac{(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)-(\breve{N}'_o\cdot\breve{n})(\breve{N}'_o\cdot\breve{z}_3)}{(\breve{N}'_o\cdot\breve{n})-(\breve{N}'_o\cdot\breve{z}_3)(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)}\right\} \tag{155}$$

$$\beta'_o = \frac{-u_o(\breve{N}'_o\cdot\breve{z}_3)\left[\breve{N}'_o\cdot(\breve{z}_3 x \breve{n})\right]}{(\breve{N}'_o\cdot\breve{n})-(\breve{N}'_o\cdot\breve{z}_3)(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)} \tag{156}$$

$$\gamma'_o = u_o\left\{\frac{(\breve{N}'_o\cdot\breve{z}_3)(\breve{N}'_o\cdot\breve{n})(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)-(\breve{N}'_o\cdot\breve{z}_3)^2+f_n^2}{(\breve{N}'_o\cdot\breve{n})-(\breve{N}'_o\cdot\breve{z}_3)(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)}\right\} \tag{157}$$

Si en cambio, la onda incidente es extraordinaria, los campos para la reflejada ordinaria se escriben

$$\vec{\mathcal{D}}'_e = \vec{D}'_e\, e^{i\varphi'_e} \tag{158}$$

$$\vec{\mathcal{E}}'_e = \vec{E}'_e\, e^{i\varphi'_e} \tag{159}$$

$$\vec{\mathcal{H}}'_e = \vec{H}'_e\, e^{i\varphi'_e} \tag{160}$$

$$\eta'_e = \frac{\left[\breve{N}'_e \cdot (\breve{z}_3 x \breve{n})\right] (\breve{n} \cdot \breve{z}_3)}{(\breve{N}'_e \cdot \breve{n}) - (\breve{N}'_e \cdot \breve{z}_3)(\breve{n} \cdot \breve{z}_3)} \qquad (166)$$

$$\delta'_e = \frac{-\mu_o u_o^2 \left[\breve{N}'_e \cdot (\breve{z}_3 x \breve{n})\right] f_n}{(\breve{N}'_e \cdot \breve{n}) - (\breve{N}'_e \cdot \breve{z}_3)(\breve{n} \cdot \breve{z}_3)} \qquad (167)$$

$$\lambda'_e = \frac{\mu_o u_o^2 \left[\breve{N}'_e \cdot (\breve{z}_3 x \breve{n})\right] (\breve{n} \cdot \breve{z}_3)}{(\breve{N}'_e \cdot \breve{n}) - (\breve{N}'_e \cdot \breve{z}_3)(\breve{n} \cdot \breve{z}_3)} \qquad (168)$$

$$\alpha'_e = u_o f_n \left\{ \frac{(\breve{n} \cdot \breve{z}_3) - (\breve{N}'_e \cdot \breve{n})(\breve{N}'_e \cdot \breve{z}_3)}{(\breve{N}'_e \cdot \breve{n}) - (\breve{N}'_e \cdot \breve{z}_3)(\breve{n} \cdot \breve{z}_3)} \right\} \qquad (169)$$

$$\beta'_e = \frac{-u_o (\breve{N}'_e \cdot \breve{z}_3) \left[\breve{N}'_e \cdot (\breve{z}_3 x \breve{n})\right]}{(\breve{N}'_e \cdot \breve{n}) - (\breve{N}'_e \cdot \breve{z}_3)(\breve{n} \cdot \breve{z}_3)} \qquad (170)$$

$$\gamma'_e = u_o \left\{ \frac{(\breve{N}'_e \cdot \breve{z}_3)(\breve{N}'_e \cdot \breve{n})(\breve{n} \cdot \breve{z}_3) - (\breve{N}'_e \cdot \breve{z}_3)^2 + f_n^2}{(\breve{N}'_e \cdot \breve{n}) - (\breve{N}'_e \cdot \breve{z}_3)(\breve{n} \cdot \breve{z}_3)} \right\} \qquad (171)$$

b) Ondas extraordinarias.

Los campos de la onda incidente extraordinaria se denotarán:

$$\vec{\mathscr{D}}_e = \vec{D}_e \, e^{i \varphi_e} \qquad (172)$$

$$\vec{\mathscr{E}}_e = \vec{E}_e \, e^{i \varphi_e} \qquad (173)$$

$$\vec{\mathscr{H}}_e = \vec{H}_e \, e^{i \varphi_e} \qquad (174)$$

con
$$\varphi_e = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\breve{N}_e \cdot \breve{r} - u'' t \right] \qquad (175)$$

donde u" es la velocidad de fase de la onda, que en este caso, dado que la onda es extraordinaria, es función de $\breve{N}_e$.

A partir de las ecuaciones (25), es inmediato que

$$(\vec{D}_e \cdot \breve{z}_1) = \frac{(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_1)}{(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_2)} (\vec{D}_e \cdot \breve{z}_2) \qquad (176)$$

$$(\vec{D}_e \cdot \breve{z}_3) = \frac{-[1-(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)^2]}{(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_2)} (\vec{D}_e \cdot \breve{z}_2) \qquad (177)$$

Con esto, y de (12), (173) y (21) se tiene:

$$(\vec{E}_e \cdot \breve{z}_1) = \mu_o u_o^2 \frac{(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_1)}{(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_2)} (\vec{D}_e \cdot \breve{z}_2) \qquad (178)$$

$$(\vec{E}_e \cdot \breve{z}_2) = \mu_o u_o^2 (\vec{D}_e \cdot \breve{z}_2) \qquad (179)$$

$$(\vec{E}_e \cdot \breve{z}_3) = -\mu_o u_e^2 \frac{[1-(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)^2]}{(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_2)(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)} (\vec{D}_e \cdot \breve{z}_2) \qquad (180)$$

y

$$(\vec{H}_e \cdot \breve{z}_1) = \frac{-u''}{(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)} (\vec{D}_e \cdot \breve{z}_2) \qquad (181)$$

$$(\vec{H}_e \cdot \breve{z}_2) = \frac{u''}{(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)} \frac{(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_1)}{(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_2)(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)} (\vec{D}_e \cdot \breve{z}_2) \qquad (182)$$

$$(\vec{H}_e \cdot \breve{z}_3) = 0 \qquad (183)$$

Realizando la misma transformación de coordenadas que se hizo en el caso de ondas ordinarias, es decir, aplicando la matriz R dada por (42), que lleva los vectores expresados en el sistema de ejes principales, a los mismos vectores expresados en el sistema de la superficie, se obtiene

$$\left.\begin{aligned}(\vec{D}_e\cdot\breve{x}) &= \rho_e(\vec{D}_e\cdot\breve{y})\\ (\vec{D}_e\cdot\breve{y}) &= 1(\vec{D}_e\cdot\breve{y})\\ (\vec{D}_e\cdot\breve{z}) &= \eta_e(\vec{D}_e\cdot\breve{y})\end{aligned}\right\} \tag{184}$$

$$\left.\begin{aligned}(\vec{E}_e\cdot\breve{x}) &= \delta_e(\vec{D}_e\cdot\breve{y})\\ (\vec{E}_e\cdot\breve{y}) &= \mu_o u_o^2(\vec{D}_e\cdot\breve{y})\\ (\vec{E}_e\cdot\breve{z}) &= \lambda_e(\vec{D}_e\cdot\breve{y})\end{aligned}\right\} \tag{185}$$

$$\left.\begin{aligned}(\vec{H}_e\cdot\breve{x}) &= \alpha_e(\vec{D}_e\cdot\breve{y})\\ (\vec{H}_e\cdot\breve{y}) &= \beta_e(\vec{D}_e\cdot\breve{y})\\ (\vec{H}_e\cdot\breve{z}) &= \gamma_e(\vec{D}_e\cdot\breve{y})\end{aligned}\right\} \tag{186}$$

con

$$\rho_e = \frac{f_n\left[(\breve{N}_e\cdot\breve{n})(\breve{N}_e\cdot\breve{z}_3)-(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)\right]}{\left[\breve{N}_e\cdot(\breve{z}_3\times\breve{n})\right](\breve{N}_e\cdot\breve{z}_3)} \tag{187}$$

$$\eta_e = \frac{(\breve{N}_e \cdot \breve{n})(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)(\breve{n} \cdot \breve{z}_3) - (\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)^2 + f_n^2}{\left[\breve{N}_e \cdot (\breve{z}_3 x \breve{n})\right] (\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)} \tag{188}$$

$$\delta_e = \mu_o f_n \frac{\left[u_o^2 (\breve{N}_e \cdot \breve{n})(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3) - u''^2 (\breve{n} \cdot \breve{z}_3)\right]}{\left[\breve{N}_e \cdot (\breve{z}_3 x \breve{n})\right] (\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)} \tag{189}$$

$$\lambda_e = \mu_o \frac{-u_o^2 (\breve{N}_e \cdot \breve{n})(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)(\breve{n} \cdot \breve{z}_3) + (\breve{n} \cdot \breve{z}_3)^2 u''^2 f_n^2}{\left[\breve{N}_e \cdot (\breve{z}_3 x \breve{n})\right] (\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)} \tag{190}$$

$$\alpha_e = \frac{-u'' f_n}{(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)} \tag{191}$$

$$\beta_e = \frac{u''\left[(\breve{N}_e \cdot \breve{n}) - (\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)(\breve{n} \cdot \breve{z}_3)\right]}{\left[\breve{N}_e \cdot (\breve{z}_3 x \breve{n})\right] (\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)} \tag{192}$$

$$\gamma_e = \frac{u''(\breve{n} \cdot \breve{z}_3)}{(\breve{N}_e \cdot \breve{z}_3)} \tag{193}$$

Así es posible encontrar todos los campos incidentes, conocidos $(\vec{D}_e \cdot \breve{y})$, $\breve{N}_e$ y datos del cristal $(\breve{n}, \breve{z}_3, u_o$ y $u_e)$.

Si se trata de una onda reflejada extraordinaria que proviene de una incidente ordinaria, la notación será:

$$\vec{\mathcal{D}}''_o = \vec{D}''_o \, e^{i \varphi''_o} \tag{194}$$

$$\vec{\mathcal{E}}''_o = \vec{E}''_o \, e^{i \varphi''_o} \tag{195}$$

$$\vec{\mathcal{H}}''_o = H''_o \, e^{i \varphi''_o} \tag{196}$$

con

$$\varphi''_o = \frac{2\pi}{\lambda} \left[(\breve{N}''_o \cdot \breve{r}) - u''_o\, t \right] \tag{197}$$

y teniendo en cuenta, como ya se dijo en la sección anterior, que las relaciones entre las componentes de los campos no dependen de si la onda es incidente o reflejada, sino del hecho que sea ordinaria o extraordinaria, aquí sólo nos limitemos a escribir las relaciones finales en el sistema de la superficie, que son:

$$\left.\begin{aligned}
(\vec{D}''_o \cdot \breve{x}) &= \rho''_o\, (\vec{D}''_o \cdot \breve{y}) \\
(\vec{D}''_o \cdot \breve{y}) &= 1(\vec{D}''_o \cdot \breve{y}) \\
(\vec{D}''_o \cdot \breve{z}) &= \eta''_o (\vec{D}''_o \cdot \breve{y})
\end{aligned}\right\} \tag{198}$$

$$\left.\begin{aligned}
(\vec{E}''_o \cdot \breve{x}) &= \delta''_o (\vec{D}''_o \cdot \breve{y}) \\
(\vec{E}''_o \cdot \breve{y}) &= \mu_o u''^2_o\, (\vec{D}''_o \cdot \breve{y}) \\
(\vec{E}''_o \cdot \breve{z}) &= \lambda''_o (\vec{D}''_o \cdot \breve{y})
\end{aligned}\right\} \tag{199}$$

$$\left.\begin{aligned}
(\vec{H}''_o \cdot \breve{x}) &= \alpha''_o (\vec{D}''_o \cdot \breve{y}) \\
(\vec{H}''_o \cdot \breve{y}) &= \beta''_o (\vec{D}''_o \cdot \breve{y}) \\
(\vec{H}''_o \cdot \breve{z}) &= \gamma''_o (\vec{D}''_o \cdot \breve{y})
\end{aligned}\right\} \tag{200}$$

con

$$\rho''_o = \frac{f_n \left[(\breve{N}''_o \cdot \breve{n})(\breve{N}''_o \cdot \breve{z}_3) - (\breve{n} \cdot \breve{z}_3) \right]}{\left[\breve{N}''_o \cdot (\breve{z}_3 \times \breve{n}) \right] (\breve{N}''_o \cdot \breve{z}_3)} \tag{201}$$

$$\eta''_o = \frac{(\breve{N}''_o\cdot\breve{n})(\breve{N}''_o\cdot\breve{z}_3)(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)-(\breve{N}''_o\cdot\breve{z}_3)^2+f_n^2}{\left[\breve{N}''_e\cdot(\breve{z}_3 x\breve{n})\right](\breve{N}''_o\cdot\breve{z}_3)} \tag{202}$$

$$\delta''_o = \mu_o\, f_n\, \frac{\left[u_o^2(\breve{N}''_o\cdot\breve{n})(\breve{N}''_o\cdot\breve{z}_3)-u''^2_o\,(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)\right]}{\left[\breve{N}''_o\cdot(\breve{z}_3 x\breve{n})\right](\breve{N}''_o\cdot\breve{z}_3)} \tag{203}$$

$$\lambda''_o = \mu_o \left\{ \frac{-u_o^2(\breve{N}''_o\cdot\breve{n})(\breve{N}''_o\cdot\breve{z}_3)(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)+(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)^2 u''^2_o\, f_n^2}{\left[\breve{N}''_o\cdot(\breve{z}_3 x\breve{n})\right](\breve{N}''_o\cdot\breve{z}_3)} \right. \tag{204}$$

$$\alpha''_o = \frac{-u''_o\, f_n}{(\breve{N}''_o\cdot\breve{z}_3)} \tag{205}$$

$$\beta''_o = \frac{u''_o\left[(\breve{N}''_o\cdot\breve{n})-(\breve{N}''_o\cdot\breve{z}_3)(\breve{n}\cdot\breve{z}_3)\right]}{\left[\breve{N}''_o\cdot(\breve{z}_3 x\breve{n})\right](\breve{N}''_o\cdot\breve{z}_3)} \tag{206}$$

$$\gamma''_o = \frac{u''_o\,(\breve{n}\cdot\breve{z}_2)}{(\breve{N}''_o\cdot\breve{z}_3)} \tag{207}$$

Aquí, $\breve{N}''_o$ se calcula con (61).

Si se trata de una onda reflejada extraordinaria, que se produce a partir de una onda incidente extraordinaria (caso E-E), las relaciones son totalmente análogas a las anteriores, pero intercambiando el subíndice "o" por el "e". De todas formas, para realizar cálculos posteriores, es conveniente escribirlas.

$$\vec{\mathcal{D}}''_e = \vec{D}''_e\, e^{i\varphi''_e} \tag{208}$$

$$\vec{\mathcal{E}}''_e = \vec{E}''_e\, e^{i\varphi''_e} \tag{209}$$

$$\vec{\mathcal{H}}''_e = \vec{H}''_e\, e^{i\varphi''_e} \tag{210}$$

Con

$$\varphi''_e = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\breve{N}''_e\cdot\breve{r} - u''_e\, t\right] \tag{211}$$

Además

$$\left.\begin{aligned}
(\vec{D}''_e\cdot\breve{x}) &= \rho''_e(\vec{D}''_e\cdot\breve{y})\\
(\vec{D}''_e\cdot\breve{y}) &= 1\,(\vec{D}''_e\cdot\breve{y})\\
(\vec{D}''_e\cdot\breve{z}) &= \eta''_e\,(\vec{D}''_e\cdot\breve{y})
\end{aligned}\right\} \tag{212}$$

$$\left.\begin{aligned}
(\vec{E}''_e\cdot\breve{x}) &= \delta''_e(\vec{D}''_e\cdot\breve{y})\\
(\vec{E}''_e\cdot\breve{y}) &= \mu_o u_o^2\,(\vec{D}''_e\cdot\breve{y})\\
(\vec{E}''_e\cdot\breve{z}) &= \lambda''_e\,(\vec{D}''_e\cdot\breve{y})
\end{aligned}\right\} \tag{213}$$

$$\left.\begin{aligned}
(\vec{H}''_e\cdot\breve{x}) &= \alpha''_e(\vec{D}''_e\cdot\breve{y})\\
(\vec{H}''_e\cdot\breve{y}) &= \beta''_e\,(\vec{D}''_e\cdot\breve{y})\\
(\vec{H}''_e\cdot\breve{z}) &= \gamma''_e\,(\vec{D}''_e\cdot\breve{y})
\end{aligned}\right\} \tag{214}$$

con

$$\rho''_e = \frac{f_n\left[(\breve{N}''_e\cdot n)(\breve{N}''_e\cdot\breve{z}_2)-(\breve{n}\cdot\breve{z}_2)\right]}{\left[\breve{N}''_e\cdot(\breve{z}_2 x \breve{n})\right](\breve{N}''_e\cdot\breve{z}_3)} \tag{215}$$

$$\eta''_e = \frac{\left[(\breve{N}''_e\cdot\breve{n})(\breve{N}''_e\cdot\breve{z}_2)(\breve{n}\cdot\breve{z}_2)-(\breve{N}''_e\cdot\breve{z}_3)^2 + f_n^2\right]}{\left[\breve{N}''_e\cdot(\breve{z}_2 x \breve{n})\right](\breve{N}''_e\cdot\breve{z}_3)} \tag{216}$$

$$\delta''_e = \mu_o f_n \left\{ \frac{u_o^2 (\check{N}''_e \cdot \check{n})(\check{N}''_e \cdot \check{z}_3)(\check{n} \cdot \check{z}_3) + u''^2_e (\check{n} \cdot \check{z}_3)}{\left[N''_e \cdot (\check{z}_3 x \check{n}) \right] (\check{N}''_e \cdot \check{z}_3)} \right. \tag{217}$$

$$\lambda''_e = \mu_o \left\{ \frac{-u_o^2 (\check{N}''_e \cdot \check{z}_3)(\check{n} \cdot \check{z}_3) + (\check{n} \cdot \check{z}_3)^2 \; u''^2_e f_n^2}{\left[\check{N}''_e \cdot (\check{z}_3 x \check{n}) \right] (\check{N}''_e \cdot \check{z}_3)} \right. \tag{218}$$

$$\alpha''_e = \frac{-u''_e \; f_n}{(\check{N}''_e \cdot \check{z}_3)} \tag{219}$$

$$\beta''_e = \frac{u''_e \left[(\check{N}''_e \cdot \check{n}) - (\check{N}''_e \cdot \check{z}_3)(\check{n} \cdot \check{z}_3) \right]}{\left[\check{N}''_e \cdot (\check{z}_3 x \check{n}) \right] (\check{N}''_e \cdot \check{z}_3)} \tag{220}$$

$$\gamma''_e = \frac{u''_e \; (\check{n} \cdot \check{z}_3)}{(\check{N}''_e \cdot \check{z}_3)} \tag{221}$$

Donde ahora $\check{N}''_e$ se calcula según lo desarrollado en el Capítulo II para el caso (E-E).

c) Ondas refractadas.

Como se sabe, en el problema que nos ocupa, la onda refractada se mueve en un medio isótropo y, en ese caso, para conocer todos los campos, son necesarias dos componentes de uno de ellos.

En nuestro problema, la onda refractada puede provenir tanto de un rayo ordinario, como de uno extraordinario. Primero supondremos que proviene de un rayo ordinario, y denotaremos los campos como:

$$\vec{\mathcal{D}}^*_o = \vec{D}^*_o \, e^{i\varphi^*_o} \qquad (222)$$

$$\vec{\mathcal{E}}^*_o = \vec{E}^*_o \, e^{i\varphi^*_o} \qquad (223)$$

$$\vec{\mathcal{H}}^*_o = \vec{H}^*_o \, e^{i\varphi^*_o} \qquad (224)$$

con

$$\varphi^*_o = \frac{2\pi}{\lambda}\left[(\breve{S}_o \cdot r) - u\,t\right] \qquad (225)$$

Sustituyendo las anteriores en (11), (12), (13), (14) se tiene:

$$(\vec{D}^*_o \cdot \breve{x}) = \frac{-(\breve{S}_o \cdot \breve{y})}{(\breve{S}_o \cdot \breve{x})}(\vec{D}^*_o \cdot \breve{y}) - \frac{(\breve{S}_o \cdot \breve{z})}{(\breve{S}_o \cdot \breve{x})}(\vec{D}^*_o \cdot \breve{z}) \qquad (226)$$

$$\vec{E}^*_o = \mu_o u^2 \vec{D}^*_o \qquad (227)$$

$$(\vec{E}^*_o \cdot \breve{x}) = -\mu_o u^2 \left\{ \frac{(\breve{S}_o \cdot \breve{y})}{(\breve{S}_o \cdot \breve{x})}(\vec{D}^*_o \cdot \breve{y}) + \frac{(\breve{S}_o \cdot \breve{z})}{(\breve{S}_o \cdot \breve{x})}(\vec{D}^*_o \cdot \breve{y}) \right\} \qquad (228)$$

y

$$(\vec{H}_o^{*}\cdot\check{x}) = a_o(\vec{E}_o^{*}\cdot\check{y}) - d_o(\vec{E}_o^{*}\cdot\check{z}) \tag{229}$$

$$(\vec{H}_o^{*}\cdot\check{y}) = -g_o(\vec{E}_o^{*}\cdot\check{y}) - e_o(\vec{E}_o^{*}\cdot\check{z}) \tag{230}$$

$$(\vec{H}_o^{*}\cdot\check{z}) = h_o(\vec{E}_o^{*}\cdot\check{y}) + g_o(\vec{E}_o^{*}\cdot\check{z}) \tag{231}$$

con

$$a_o = \frac{(\check{S}_o\cdot\check{y})}{\mu_o\, u} \quad ; \quad d_o = \frac{(\check{S}_o\cdot\check{z})}{\mu_o\, u}$$

$$e_o = \frac{(\check{S}_o\cdot\check{x})^2+(\check{S}_o\cdot\check{z})^2}{\mu_o u\,(\check{S}_o\cdot\check{x})} \quad ; \quad h_o = \frac{(\check{S}_o\cdot\check{x})^2+(\check{S}_o\cdot\check{y})^2}{\mu_o u(\check{S}_o\cdot\check{x})} \tag{232}$$

$$g_o = \frac{(\check{S}_o\cdot\check{z})(\check{S}_o\cdot\check{y})}{\mu_o u(\check{S}_o\cdot\check{x})}$$

Si, en cambio, la onda refractada proviene de un rayo extraordinario, la denotaremos con subíndice "e":

$$\vec{\mathcal{D}}_e^{*} = \vec{D}_e^{*}\, e^{i\,\varphi_e^{*}} \tag{233}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_e^{*} = \vec{E}_e^{*}\, e^{i\,\varphi_e^{*}} \tag{234}$$

$$\vec{\mathcal{H}}_e^{*} = \vec{H}_e^{*}\, e^{i\,\varphi_e^{*}} \tag{235}$$

con

$$\varphi_e^{*} = \frac{2\pi}{\lambda}\left[(\check{S}_e\cdot\vec{r}) - u\,t\right] \tag{236}$$

y las relaciones entre las componentes de los campos, que son exactamente iguales a las anteriores, quedarán escritas

$$(\vec{D}^*_e\cdot\breve{x}) = \frac{-(\breve{S}_e\cdot\breve{y})}{(\breve{S}_e\cdot\breve{x})}(\vec{D}^*_e\cdot\breve{y}) - \frac{(\breve{S}_e\cdot\breve{z})}{(\breve{S}_e\cdot\breve{x})}(\vec{D}^*_e\cdot\breve{z}) \tag{237}$$

$$\vec{E}^*_e = \mu_0 u^2 \vec{D}^*_e \tag{238}$$

$$(\vec{E}^*_e\cdot\breve{x}) = -\mu_0 u^2\left\{\frac{(\breve{S}_e\cdot\breve{y})}{(\breve{S}_e\cdot\breve{x})}(\vec{D}^*_e\cdot\breve{y}) - \frac{(\breve{S}_e\cdot\breve{z})}{(\breve{S}_e\cdot\breve{x})}(\vec{D}^*_e\cdot\breve{z})\right\} \tag{239}$$

$$(\vec{H}^*_e\cdot\breve{x}) = a_e(\vec{E}^*_e\cdot\breve{y}) - d_e(\vec{E}^*_e\cdot\breve{z}) \tag{240}$$

$$(\vec{H}^*_e\cdot\breve{y}) = -c_e(\vec{E}^*_e\cdot\breve{y}) - g_e(\vec{E}^*_e\cdot\breve{z}) \tag{241}$$

$$(\vec{H}^*_e\cdot\breve{z}) = h_e(\vec{E}^*_e\cdot\breve{y}) + g_e(\vec{E}^*_e\cdot\breve{z}) \tag{242}$$

con

$$a_e = \frac{(\breve{S}_e\cdot\breve{y})}{\mu_0 u} \quad ; \quad d_e = \frac{(\breve{S}_e\cdot\breve{z})}{\mu_0 u}$$

$$c_e = \frac{(\breve{S}_e\cdot\breve{x})^2+(\breve{S}_e\cdot\breve{z})^2}{\mu_0 u(\breve{S}_e\cdot\breve{x})} \quad ; \quad h_e = \frac{(\breve{S}_e\cdot\breve{x})^2+(\breve{S}_e\cdot\breve{y})^2}{\mu_0 u^2(\breve{S}_e\cdot\breve{x})} \tag{243}$$

$$g_e = \frac{(\breve{S}_e\cdot\breve{z})(\breve{S}_e\cdot\breve{y})}{\mu_0 u(\breve{S}_e\cdot\breve{x})}$$

3. Resolución de las condiciones de contorno.

Como es sabido, las condiciones de contorno que deben cumplir los campos en la superficie de discontinuidad son la continuidad de las componentes tangenciales de $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{H}}$ y continuidad de las componentes normales de $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{B}}$.

Estas, a su vez, dan lugar a la condición de igualdad de las fases y a la de continuidad de las amplitudes $\vec{E}$ y $\vec{H}$ tangenciales y $\vec{D}$ y $\vec{H}$ normales.

Para encontrar las amplitudes, basta con resolver las ecuaciones correspondientes a los campos tangenciales, ya que las otras se cumplen automáticamente por tratarse de ondas planas de dirección conocida.

a) Onda incidente ordinaria.

Por lo discutido antes, las ecuaciones a resolver serán:

$$(\vec{E}^*_o\cdot\breve{y}) = (\vec{E}_o\cdot\breve{y}) + (\vec{E}'_o\cdot\breve{y}) + (\vec{E}''_o\cdot\breve{y}) \tag{244}$$

$$(\vec{E}^*_o\cdot\breve{z}) = (\vec{E}_o\cdot\breve{z}) + (\vec{E}'_o\cdot\breve{z}) + (\vec{E}''_o\cdot\breve{z}) \tag{245}$$

$$(\vec{H}^*_o\cdot\breve{y}) = (\vec{H}_o\cdot\breve{y}) + (\vec{H}'_o\cdot\breve{y}) + (\vec{H}''_o\cdot\breve{y}) \tag{246}$$

$$(\vec{H}^*_o\cdot\breve{z}) = (\vec{H}_o\cdot\breve{z}) + (\vec{H}'_o\cdot\breve{z}) + (\vec{H}''_o\cdot\breve{z}) \tag{247}$$

Reemplazando en estas últimas las expresiones que permiten escribir a todas las componentes de los campos en función de $(\vec{D}_o\cdot\breve{y})$, $(\vec{D}'_o\cdot\breve{y})$, $(\vec{D}''_o\cdot\breve{y})$, $(\vec{E}^*_o\cdot\breve{y})$ y $(\vec{E}^*_o\cdot\breve{z})$, se llega a:

$$(\vec{D}^*_o\cdot\breve{y}) = \mu_o u_o^2 \left\{ (\vec{D}_o\cdot\breve{y}) + (\vec{D}'_o\cdot\breve{y}) + (\vec{D}''_o\cdot\breve{y}) \right\} \tag{248}$$

$$(\vec{E}^*_o \cdot \breve{z}) = \lambda_o (\vec{D}_o \cdot \breve{y}) + \lambda'_o (\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) + \lambda''_o (\vec{D}''_o \cdot \breve{y}) \qquad (249)$$

$$-g_o(\vec{E}^*_o \cdot \breve{y}) - e_o(\vec{E}^*_o \cdot \breve{z}) = \beta_o(\vec{D}_o \cdot \breve{y}) + \beta'_o(\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) + \beta''_o(\vec{D}''_o \cdot \breve{y}) \qquad (250)$$

$$h_o(\vec{E}^*_o \cdot \breve{z}) + g_o(\vec{E}^*_o \cdot \breve{z}) = \gamma_o(\vec{D}_o \cdot \breve{y}) + \gamma'_o(\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) + \gamma''_o(\vec{D}''_o \cdot \breve{y}) \qquad (251)$$

Resolviendo este sistema, se obtiene:

$$(\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) = \frac{F''_o G_o - F_o G''_o}{F'_o G''_o - F''_o G'_o} \qquad (252)$$

$$(\vec{D}''_o \cdot \breve{y}) = \frac{F_o G'_o - F'_o G_o}{F'_o G''_o - F''_o G'_o} \qquad (253)$$

con

$$F_o = e_o \lambda_o + g_o \mu_o u_o^2 + \beta_o \qquad (254)$$

$$F'_o = e_o \lambda'_o + g_o \mu_o u_o^2 + \beta'_o \qquad (255)$$

$$F''_o = e_o \lambda''_o + g_o \mu_o u_o^2 + \beta''_o \qquad (256)$$

$$G_o = g_o \lambda_o + h_o \mu_o u_o^2 - \gamma_o \qquad (257)$$

$$G'_o = g_o \lambda'_o + h_o \mu_o u_o^2 - \gamma'_o \qquad (258)$$

$$G''_o = g_o \lambda''_o + h_o \mu_o u_o^2 - \gamma''_o \qquad (259)$$

Para las amplitudes refractadas encontramos

$$(\vec{E}^*_o \cdot \breve{y}) = \mu_o^2 u^2 (g_o \beta_o + e_o \gamma_o)(\vec{D}_o \cdot \breve{y}) +$$
$$+ \mu_o^2 u^2 (g_o \beta'_o + e_o \gamma'_o)(\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) +$$
$$+ \mu_o^2 u^2 (h_o \beta''_o + e_o \gamma''_o)(\vec{D}''_o \cdot \breve{y}) \qquad (260)$$

$$(\vec{E}^*_o \cdot \breve{z}) = - \mu_o^2 u^2 (h_o \beta_o + g_o \gamma_o)(\vec{D}_o \cdot \breve{y}) +$$
$$- \mu_o^2 u^2 (h_o \beta'_o + g_o \gamma'_o)(\vec{D}'_o \cdot \breve{y}) +$$
$$- \mu_o^2 u^2 (h_o \beta''_o + g_o \gamma''_o)(\vec{D}''_o \cdot \breve{y}) \qquad (261)$$

Si asumimos conocida $(\vec{D}_o \cdot \breve{y})$ ya que corresponde al campo incidente, podemos calcular $(\vec{D}'_o \cdot \breve{y})$ y $(\vec{D}''_o \cdot \breve{y})$ a partir de (252) y (253). Una vez hecho esto, podemos calcular $(\vec{E}^*_o \cdot \breve{y})$ y $(\vec{E}^*_o \cdot \breve{z})$ de (260) y (261); utilizando estos resultados y reemplazándolos en las relaciones halladas para las amplitudes de los campos en función de las componentes "y" del desplazamiento, se pueden calcular todas las componentes para dichas amplitudes.

b) Onda incidente extraordinaria.

Aquí también las ecuaciones que deben resolverse serán

$$(\vec{E}^*_e \cdot \breve{y}) = (\vec{E}_e \cdot \breve{y}) + (\vec{E}'_e \cdot \breve{y}) + (\vec{E}''_e \cdot \breve{y}) \qquad (262)$$

$$(\vec{E}^*_e \cdot \breve{z}) = (\vec{E}_e \cdot \breve{z}) + (\vec{E}'_e \cdot \breve{z}) + (\vec{E}''_e \cdot \breve{z}) \qquad (263)$$

$$(\vec{H}^{*}_e \cdot \breve{y}) = (\vec{H}_e \cdot \breve{y}) + (\vec{H}'_e \cdot \breve{y}) + (\vec{H}''_e \cdot \breve{y}) \tag{264}$$

$$(\vec{H}^{*}_e \cdot \breve{z}) = (\vec{H}_e \cdot \breve{z}) + (\vec{H}'_e \cdot \breve{z}) + (\vec{H}''_e \cdot \breve{z}) \tag{265}$$

A partir de este sistema, y procediendo en forma análoga al caso anterior (onda incidente ordinaria), se llega a

$$(\vec{D}'_e \cdot \breve{y}) = \frac{F''_e\, G_e - F_e\, G''_e}{F'_e\, G''_e - F''_e G'_e} \tag{266}$$

$$(\vec{D}''_e \cdot \breve{y}) = \frac{F_e\, G'_e - F'_e\, G_e}{F'_e\, G''_e - F''_e\, G'_e} \tag{267}$$

con

$$F_e = e_e\, \lambda_e + g_e\, \mu_o\, u_o^2 + \beta_e \tag{268}$$

$$F'_e = e_e\, \lambda'_e + g_e\, \mu_o\, u_o^2 + \beta'_e \tag{269}$$

$$F''_e = e_e\, \lambda''_e + g_e\, \mu_o\, u_o^2 + \beta''_e \tag{270}$$

$$G_e = g_e\, \lambda_e + h_e\, \mu_o\, u_o^2 - \gamma_e \tag{271}$$

$$G'_e = g_e\, \lambda'_e + h_e\, \mu_o\, u_o^2 - \gamma'_e \tag{272}$$

$$G''_e = g_e\, \lambda''_e + h_e\, \mu_o\, u_o^2 - \gamma''_e \tag{273}$$

y, además

$$\begin{aligned}(\vec{E}^{*}_e \cdot \breve{y}) = {} & \mu_o\, u^2 (g_e\, \delta_e + e_e\, \gamma_e)(\vec{D}_e \cdot \breve{y}) + \\ & + \mu_o u^2 (g_e\, \delta'_e + e_e\, \gamma'_e)(\vec{D}'_e \cdot \breve{y}) + \\ & + \mu_o^2\, u^2 (h_e\, \delta''_e + e_e\, \gamma''_e)(\vec{D}''_e \cdot \breve{y})\end{aligned} \tag{274}$$

4. Coeficientes de reflexión y transmisión.

Con las relaciones halladas en el párrafo anterior, es posible calcular las amplitudes de todos los campos, tanto reflejados como transmitidos para cualquier plano de incidencia y cualquier ángulo θ que forme el eje óptico con la superficie de discontinuidad. A su vez, con éstas como dato, se podrán calcular los coeficientes de reflexión y transmisión que se definen como sigue:

Coeficiente de reflexión ordinario-ordinario:

$$\mathcal{R}'_o = \frac{|\vec{\mathcal{E}}'_o|}{|\vec{\mathcal{E}}_o|} \tag{276}$$

Coeficiente de reflexión ordinario-extraordinario:

$$\mathcal{R}''_o = \frac{|\vec{\mathcal{E}}''_o|}{|\vec{\mathcal{E}}_o|} \tag{277}$$

Coeficiente de reflexión extraordinario-ordinario:

$$\mathcal{R}'_e = \frac{|\vec{\mathcal{E}}'_e|}{|\vec{\mathcal{E}}_e|} \tag{278}$$

Coeficiente de reflexión extraordinario-extraordinario:

$$\mathcal{R}''_e = \frac{|\vec{\mathcal{E}}''_e|}{|\vec{\mathcal{E}}_e|} \tag{279}$$

Coeficiente de transmisión ordinario:

$$\mathcal{T}^*_o = \frac{|\vec{\mathcal{E}}^*_o|}{|\vec{\mathcal{E}}_o|} \tag{280}$$

Coeficiente de transmisión extraordinario:

$$\mathcal{T}^*_e = \frac{|\vec{\mathcal{E}}^*_e|}{|\vec{\mathcal{E}}_e|} \tag{281}$$

En la Figura 25 se muestra cómo varían R'_o y R''_o con el ángulo de incidencia $\hat{\gamma}_o$ para $\theta = 45°$ y $\delta = 45°$ en el caso de tener un medio anisótropo de índices $n_o = 1.544$ y $n_e = 1.533$ y un medio isótropo de índice 1.76.

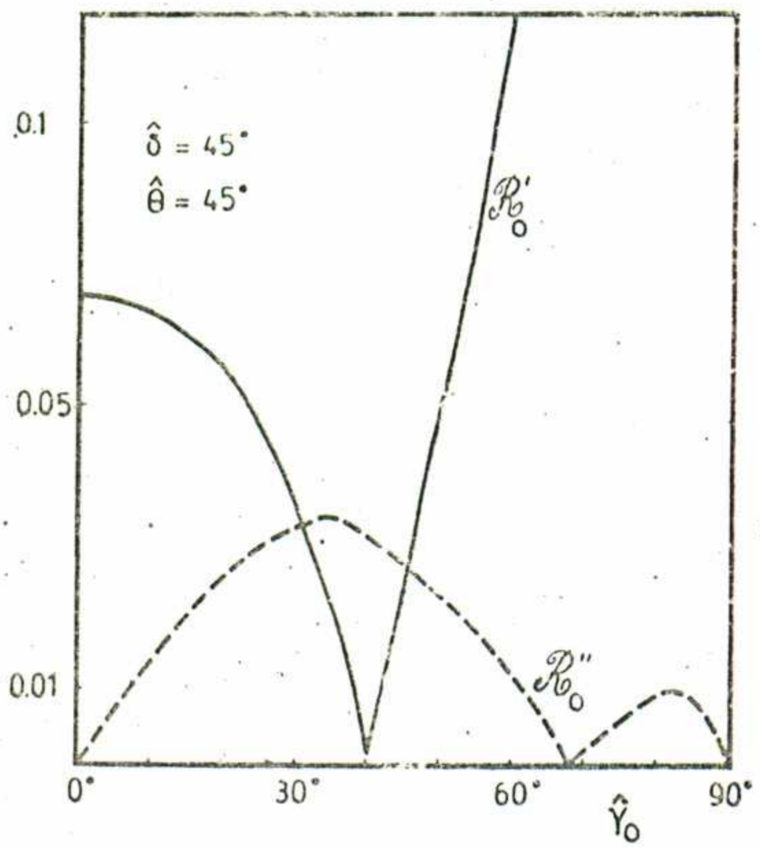


Figura 25:

Coeficientes de reflexión en función del ángulo de incidencia para cuarzo.

$n_o = 1.544$; $n_e = 1.533$,

$n = 1.76$.

$\mathcal{R}'_o$ coeficiente ordinario-ordinario.

$\mathcal{R}''_o$ coeficiente extraordinario-ordinario.

En la Figura 26 se muestra el índice de transmisión para la interfase del caso anterior; esta última curva es muy similar a las de los coeficientes de transmisión de los medios isótropos y no varía con δ como era de esperar, ya que la onda incidente es ordinaria.

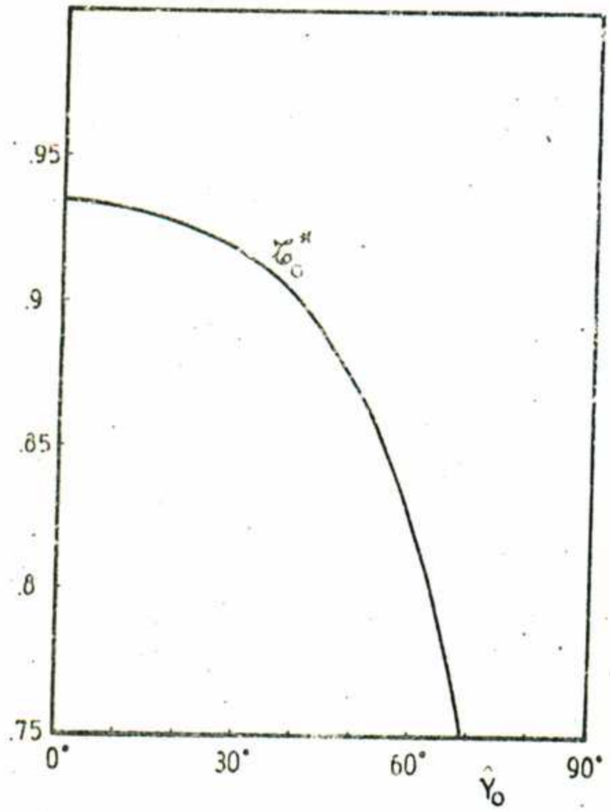


Figura 26:

Indice de transmisión para cuarzo.

$n_o = 1.544$; $n_e = 1.533$, $n = 1.76$

Por otro lado, las fórmulas deducidas presentan singularidades para incidencia normal por lo que los coeficientes de reflexión y transmisión se calculan por extrapolación. Los valores obtenidos para este caso son: $T_o^* = 0.935$; $R_o' = 0.065$ y $\mathcal{R}_o'' = 0.$

Para dos medios isótropos de índices n_o y n_e los coeficientes son:

$$\mathcal{T}_o^* = \frac{2n_o}{n_o+n} = 0.935$$

$$\mathcal{R}_o' = \frac{n-n_o}{n+n_o} = 0.065$$

O sea que los coeficientes de reflexión y transmisión para incidencia normal, obtenidos para el cristal coinciden con los que se obtendrían si se reemplazase el cristal por un medio isótropo de índice n_o.

También para incidencia rasante se obtienen resultados análogos a los del caso isótropo. A partir de las fórmulas obtenidas antes, se puede deducir fácilmente que, para ángulo de incidencia 90°:

$$\mathcal{T}'_o = 0$$

$$\mathcal{R}'_o = 1$$

$$\mathcal{R}''_o = 0$$

A pesar de las coincidencias enunciadas antes , las curvas de los coeficientes de reflexión son cualitativamente diferentes de las de los medios isótropos. Primero, se puede observar que las mismas cambian apreciablemente con el plano de incidencia (o lo que es lo mismo, con $\hat{\delta}$) y luego se nota la presencia de un ángulo de pseudo-Brewster para ambas curvas de reflexión, dicho ángulo es tal que en él, el coeficiente de reflexión disminuye en forma apreciable, tomando valores cercanos a cero. Existen casos en que el valor del coeficiente cae efectivamente a cero, por lo que allí hablamos de ángulo de Brewster y, en algunos casos, el coeficiente puede pasar hasta dos veces por cero, con lo que allí denominaremos a los ángulos como ángulo de Brewster y segundo Brewster respectivamente.

En la Figura 27 se ve el valor que toman los ángulos de pseudo-Brewster o Brewster en función de la posición del plano de incidencia (dada por $\hat{\delta}$) para el caso del reflejado ordinario ($\hat{\gamma}'_{oB}$) y del reflejado extraordinario ($\hat{\gamma}''_{oB}$).

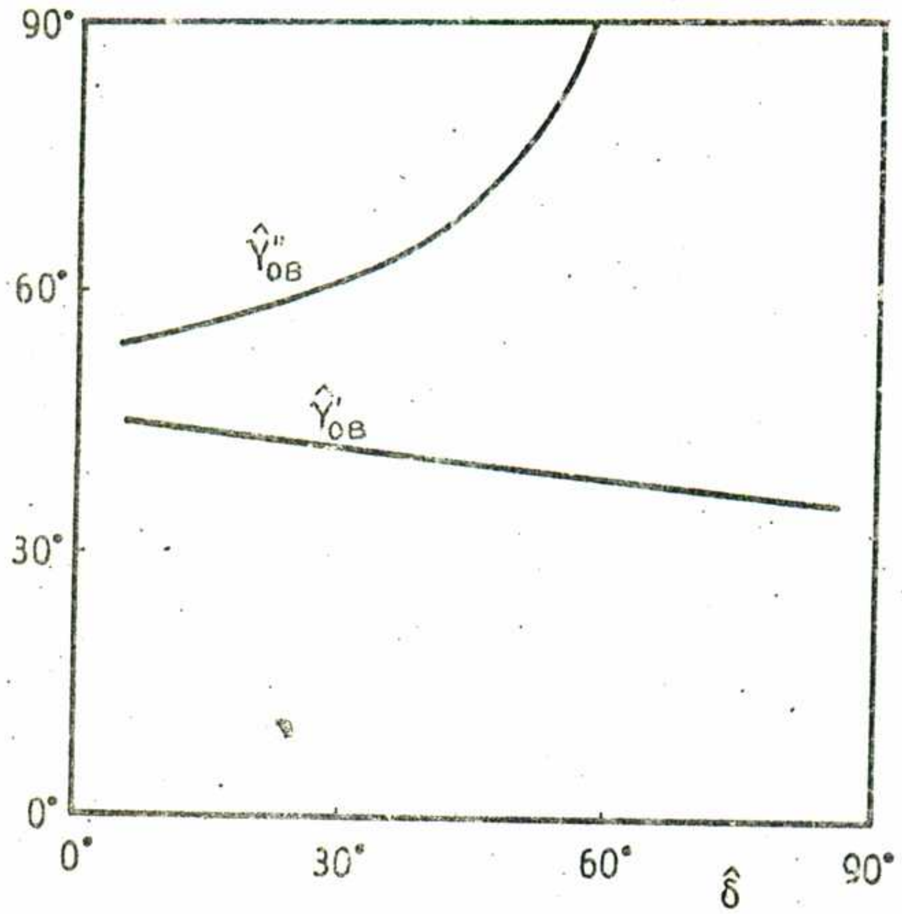


Figura 27: Angulos de pseudo-Brewster en función de $\hat{\delta}$. $\hat{\gamma}'_{oB}$ corresponde al reflejado ordinario. $\hat{\gamma}''_{o}$ corresponde al reflejado extraordinario.

Para el caso en que el haz incidente es extraordinario, las curvas se calcularon para calcita para diferentes planos de incidencia y direcciones del eje óptico.

En la Figura 28 se pueden observar dos de los gráficos, en ellos debe notarse la presencia de un ángulo de pseudo-Brewster sólo para el haz extraordinario-extraordinario; para el extraordinario-ordinario sólo aparece con $\vartheta = 45^{\circ}$ para ángulos $\hat{\delta}$ mayores a los 140° como se ve en la Figura 29.

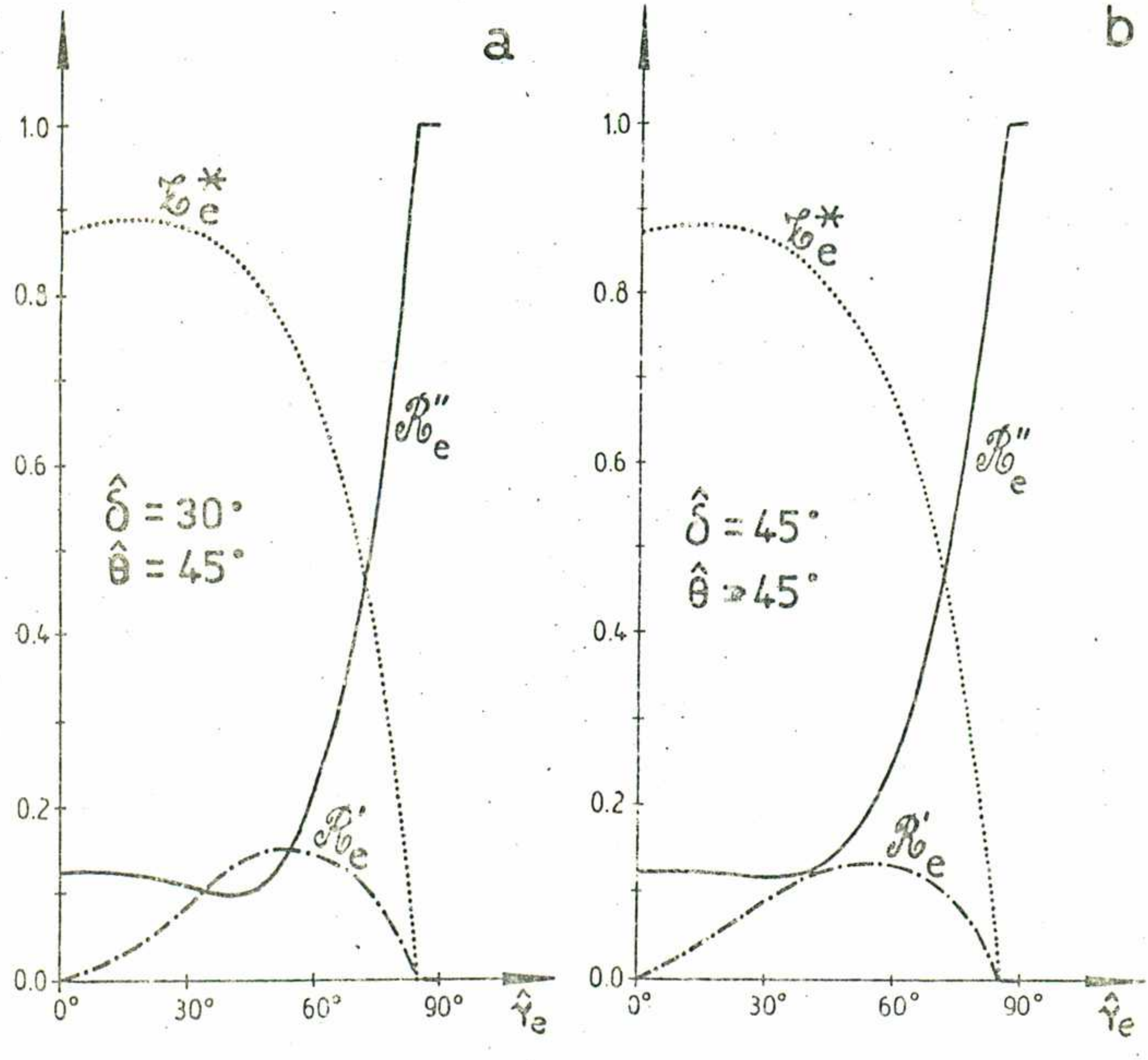


Figura 28: coeficientes de reflexión y transmisión para calcita para onda incidente extraordinaria.

$n_o = 1{,}66$; $n_e = 1{,}49$; $n = 2$.

a) $\hat{\delta} = 30°$ y $\hat{\theta} = 45°$ y b) $\hat{\delta} = 45°$ y $\theta = 45°$

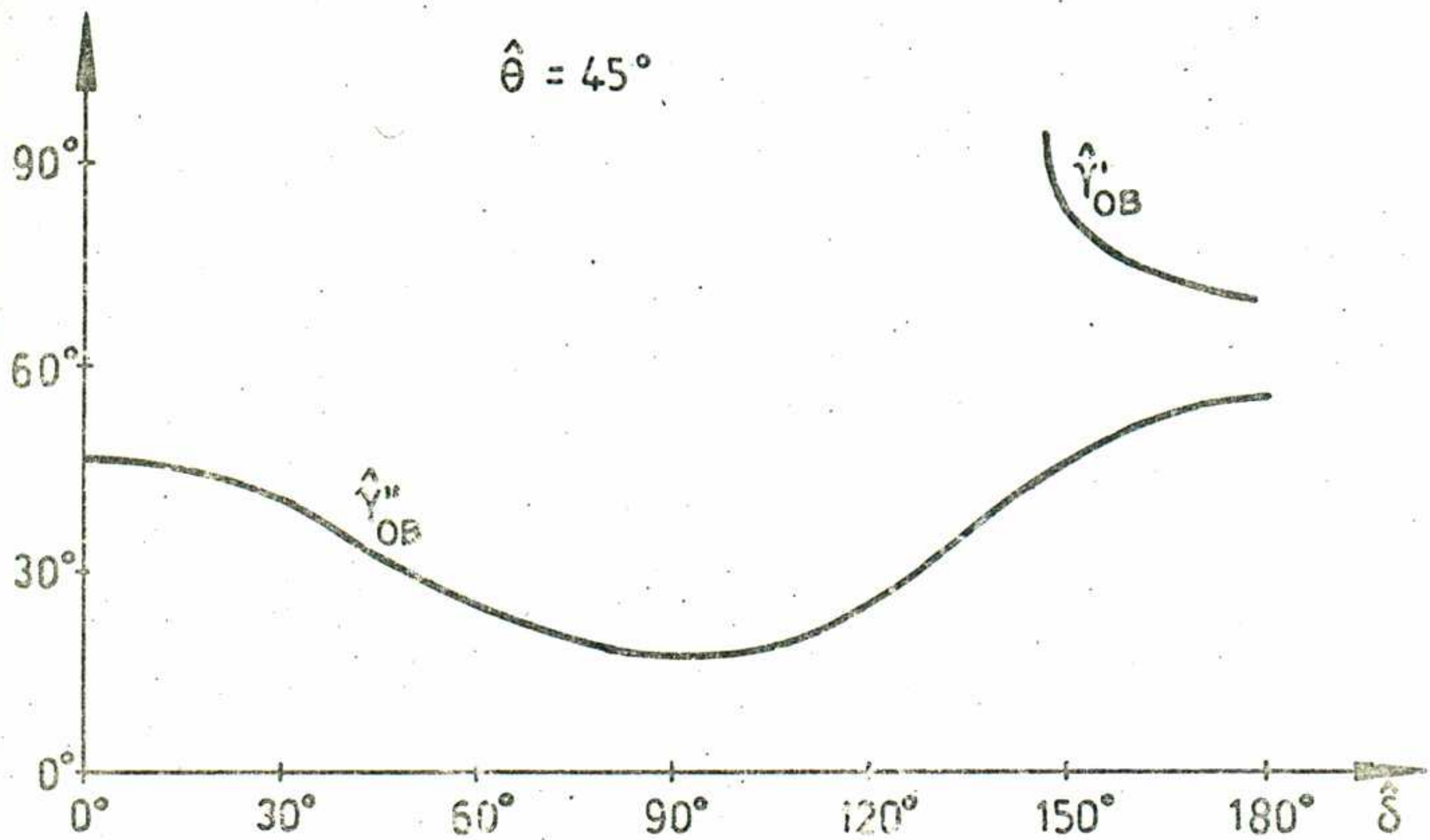


Figura 29: ángulos de pseudo-Brewster para haz extraordinario-ordinario ($\hat{\gamma}'_{eB}$) y extraordinario-extraordinario ($\hat{\gamma}''_{eB}$) para calcita. $n_o = 1{,}66$, $n_e = 1{,}49$, $n = 2$ $\theta = 45°$.

Para mostrar un caso en el que se encuentra un ángulo de Brewster, segundo Brewster como lo enunciado antes, se grafica el caso $\hat{\theta} = 75°$ y $\hat{\delta} = 45°$ también en calcita (Figura 30).

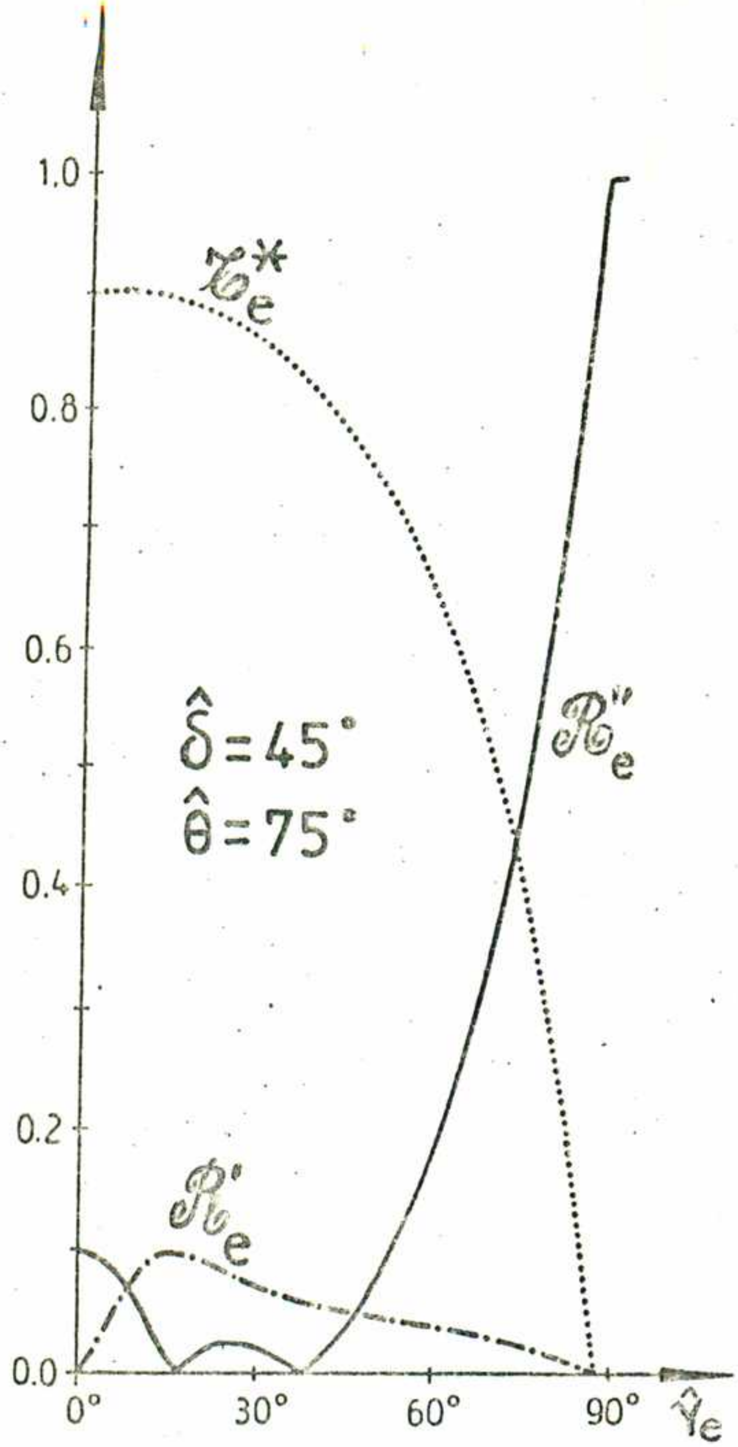


Figura 30:

Coeficiente de reflexión y transmisión en calcita para $\theta = 75°$ y $\delta = 45°$

En R''_e puede apreciarse la presencia de un ángulo de Brewster y un segundo Brewster.

En los gráficos correspondientes a la calcita, también es de notar que los valores límites para los coeficientes de reflexión y transmisión ocurren antes que $\hat{\gamma}_e$ llegue a los 90°. Esto se debe a que, como ya comentamos, la condición de rasante es para el rayo y aquí se grafica en

En cuanto a los valores de $\mathcal{R}_e'$ y $\mathcal{T}_e^*$ para incidencia normal, concuerdan con los obtenidos para dos medios isótropos de índices n (el del medio isótropo) y n" (el índice de la onda extraordinaria para incidencia normal con el correspondiente $\hat{\theta}$).

Por otra parte, conviene aclarar que no es casual el haber tomado el índice de refracción del medio isótropo mayor que los del medio birrefringente, y que se calculen los coeficientes de reflexión y transmisión para cuarzo (cristal positivo) en el caso de rayo incidente ordinario o para calcita (cristal negativo) en el caso de rayo incidente extraordinario. Esto obedece al hecho que en el caso de reflexión total o reflexión inhibida, las amplitudes de los campos no son más números reales, sino que pasan a ser complejos por lo que a partir de ahí el problema se debe plantear con ese enfoque.

Sin embargo, podemos ver lo que ocurre desde el punto de vista de las amplitudes desde incidencia normal hasta el ángulo de reflexión inhibida, en la Figura 31. En ella se graficó el caso de onda incidente ordinaria para calcita con $\hat{\theta} = 45°$ y $\hat{\delta} = 45°$.

Es de notar que $\mathcal{R}_o''$ crece hasta el ángulo crítico, lo que en principio parecería contradecir a lo enunciado antes, es decir, si no existe más haz reflejado, cómo se puede tener campo?

El hecho se aclara si se estudia qué es lo que ocurre, ya no con los campos, sino con el flujo de energía. En la Figura 32 se puede observar, que si bien la intensidad correspondiente al

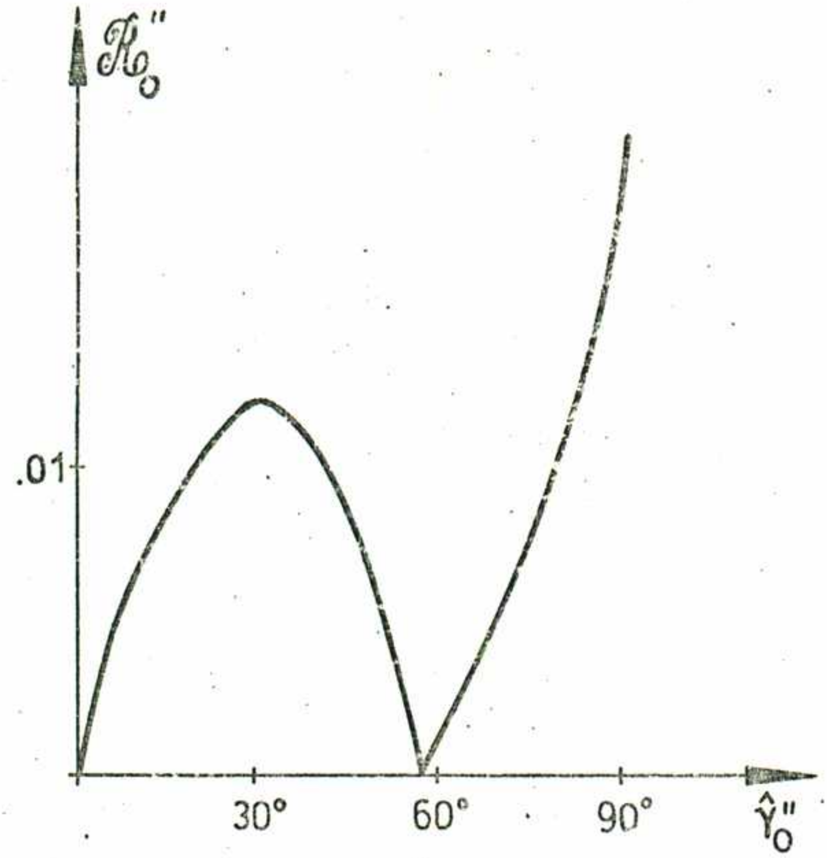


Figura 31

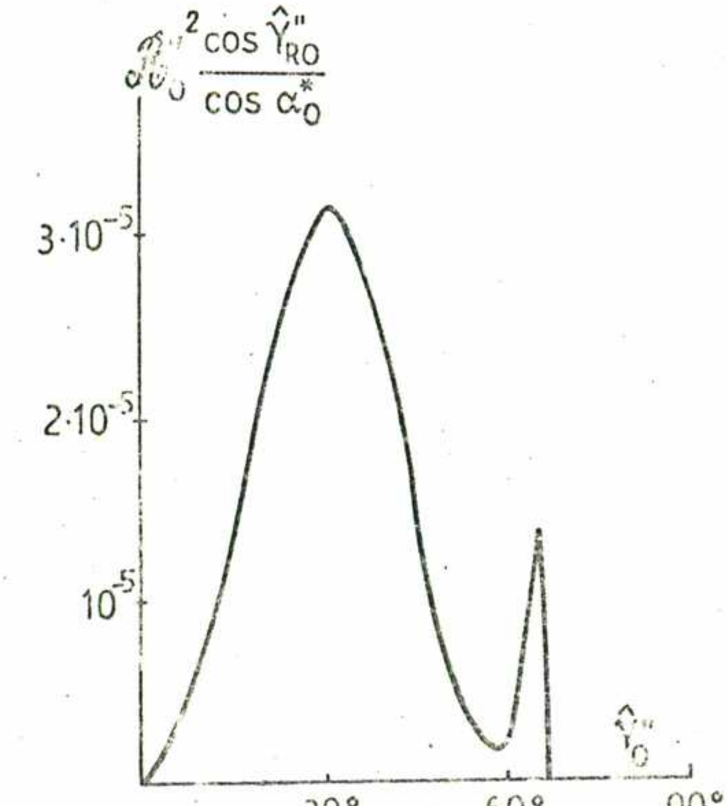


Figura 32.

haz reflejado extraordinario crece, justo antes de la reflexión inhibida cae a cero. Esto se debe a que en el cálculo de los flujos de energía, entra en juego la sección del haz que se va estrechando hasta hacerse nula cuando el rayo es rasante.

Como ya comentamos, en caso de no tener reflexión total o reflexión inhibida, las amplitudes de los campos están representadas por números reales, de lo que se deduce inmediatamente que la diferencia de fase de los haces reflejado y transmitido con respecto al incidente debe ser nula, pudiendo variar sólo después de la ocurrencia de uno de los dos hechos enunciados antes. Lo que sí ocurre aunque no varíe la fase, es que cambia la orientación de los campos cuando varía el ángulo de incidencia. Para visualizar este hecho, se calcula el ángulo que forma el vector campo eléctrico con un versor normal al plano de incidencia; para esto se define dicho versor normal como:

$$\breve{T} = \frac{\breve{n} \times \breve{N}}{|\breve{n} \times \breve{N}|} \qquad (282)$$

El ángulo entre este versor y el campo eléctrico correspondiente está dado por:

$$W = \arccos \frac{\vec{E} \cdot \breve{T}}{|\vec{E}|} \qquad (283)$$

Se efectúa el cálculo en el caso particular de onda incidente extraordinaria, por lo que se tendrá:

$$\breve{T} = \frac{\breve{n} \times \breve{N}_e}{|\breve{n} \times \breve{N}_e|} \qquad (284)$$

y los ángulos para los campos involucrados serán:

Onda incidente extraordinaria:

$$W_e = \arccos\left(\frac{\vec{E}_e \cdot \breve{T}}{|\vec{E}_e|}\right) \tag{285}$$

Onda reflejada ordinaria:

$$W'_e = \arccos\left(\frac{\vec{E}'_e \cdot \breve{T}}{|\vec{E}'_e|}\right) \tag{286}$$

Onda reflejada extraordinaria

$$W''_e = \arccos\left(\frac{\vec{E}''_e \cdot \breve{T}}{|\vec{E}''_e|}\right) \tag{287}$$

Onda refractada:

$$W^*_e = \arccos\left(\frac{\vec{E}''_e \cdot \breve{T}}{|\vec{E}''_e|}\right) \tag{288}$$

En la Figura 33 se ve el gráfico correspondiente a estos resultados en función del ángulo de incidencia para el caso calcita con $\hat{\theta} = 45^o$ y $\hat{\delta} = 45^o$, en particular puede verse que los ángulos para la onda incidente y la refractada concuerdan para incidencias menores que 30^o.

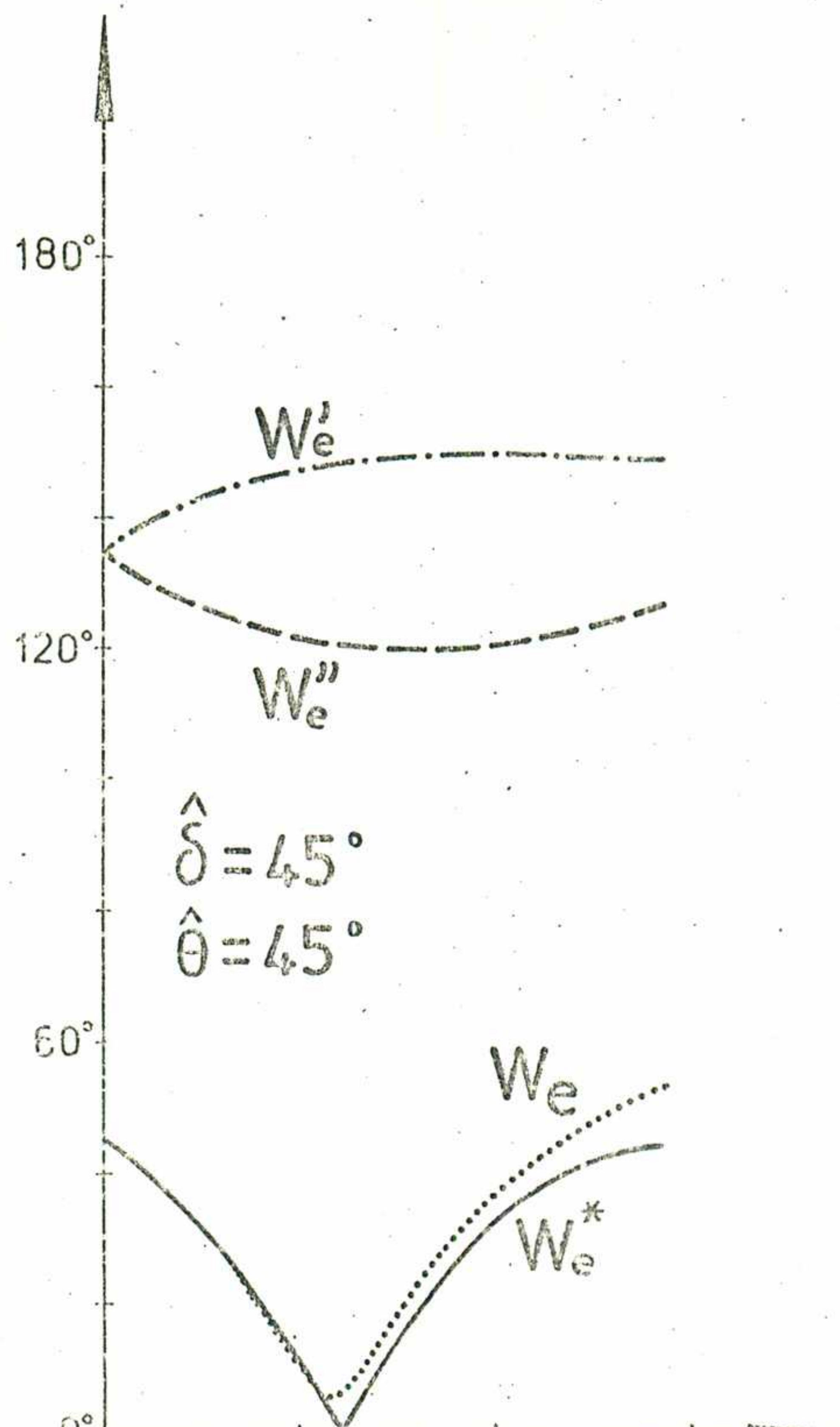

180°
W_e'
120°
W_e''
$\hat{\delta} = 45°$
$\hat{\theta} = 45°$
60°
W_e
W_e^*
0°
0°
30°
60°
90°
$\hat{\gamma}_e$

Figura 33.

5. Conclusiones.

Se ha desarrollado un formalismo que permite calcular tanto las direcciones de ondas y rayos, como las amplitudes de los campos correspondientes a las ondas refractadas y transmitidas en una interfase cristal monoaxial-medio isótropo cuando la luz incide desde el cristal.

Además, dado que se calculan las componentes de las amplitudes, es posible conocer en forma automática las polarizaciones de cada uno de los haces y, por otro lado, el carácter vectorial de dicho formalismo tiene la ventaja de hacerlo independiente del sistema de coordenadas, con lo que la parte geométrica se puede aplicar en forma inmediata al trazado de rayos a través de superficies de discontinuidad de forma arbitraria, lo que lo hace una herramienta aprovechable en el diseño de elementos ópticos que utilicen la reflexión interna de medios monoaxiales.

Se ha encontrado un fenómeno no descripto antes en la literatura, nos referimos al fenómeno de reflexión inhibida.

También se ha visto que, a pesar de resultados similares con los medios isótropos para incidencia rasante y normal, los coeficientes de reflexión y transmisión varían en forma apreciable respecto de los anteriores para ángulos intermedios, tal es el caso de los ángulos de pseudo Brewster y segundo Brewster encontrados.

Por otro lado, la comparación entre la polarización del rayo incidente y la del rayo refractado, mostrando una coincidencia entre ambos para ángulos menores que 30° confirma que es válido el asumir que la polarización del rayo refractado es igual a la del incidente, como es usual hacerlo en el diseño de polarizadores y retardadores.

6. Prospectiva.

Si bien consideramos que se ha realizado un avance importante, no por esto el tema ha quedado cerrado, sino que, por el contrario, se ha abierto el interrogante de qué es lo que ocurre más allá de la reflexión total y la reflexión inhibida con la fase de las ondas.

Es de esperar que, a partir de reflexión total, la fase de las ondas comience a variar como sucede en medios isótropos, pero en cuanto a qué es lo que sucede a partir de la reflexión inhibida, no se tiene un análogo isótropo para comparar, aunque se podría esperar un comportamiento parecido al de la reflexión total. En fin, todo esto no pasa del plano de la especulación, para resolverlo se deberá llevar el problema aquí resuelto al plano complejo, con lo que se podrán calcular las amplitudes resultantes más allá de los ángulos críticos y así encontrar los desfasajes esperados.

Apéndice 1: Construcciones de Huygens.

Las dos posibles soluciones a la ecuación bicuadrática son:

$$\frac{u''_o}{u_o} = \sqrt{\frac{-B_o \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}}$$

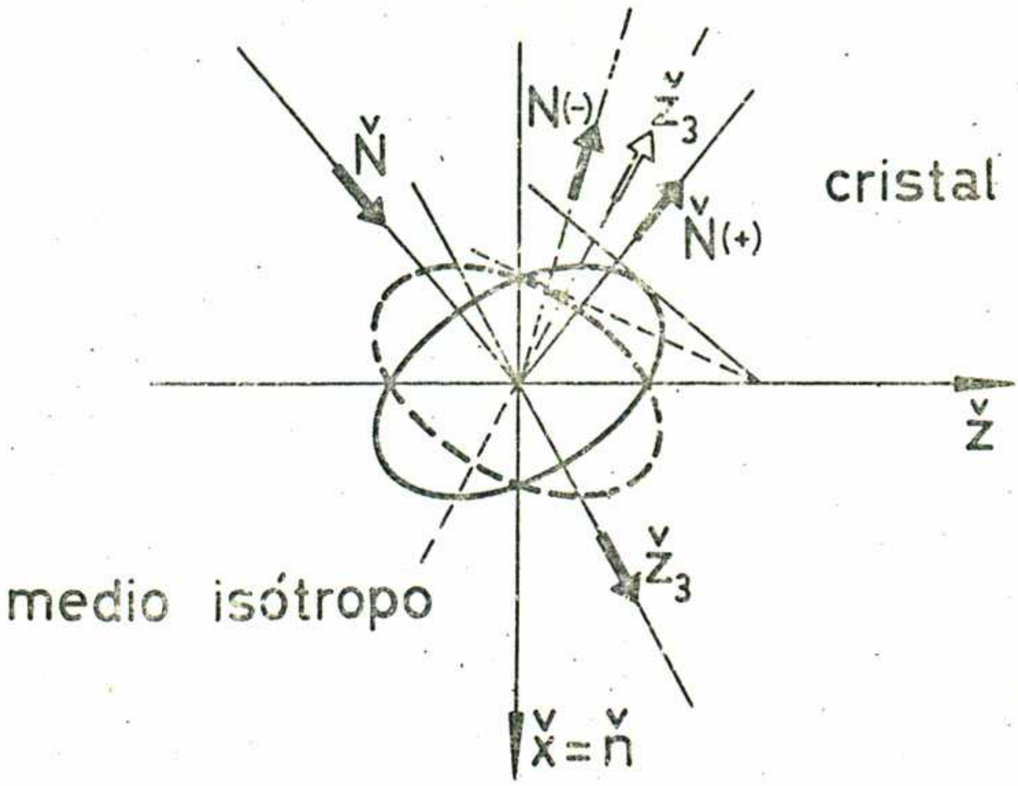
de donde es fácil ver que, el tomar el signo negativo equivale a elegir la menor de las dos velocidades, mientras que el tomar el positivo, es elegir la mayor de las dos posibles velocidades. Para decidir cuál de las dos es la que corresponde, se realizan las construcciones de Huygens de las figuras; en ellas se observan los correspondientes ovaloides de las velocidades para dos posiciones diferentes del eje óptico y se pueden deducir, dadas las posiciones de los correspondientes frentes de onda reflejadas, que para el cristal positivo, si

$$(\breve{N}.\breve{z})\ (\breve{z}_3.\breve{n}) > 0$$

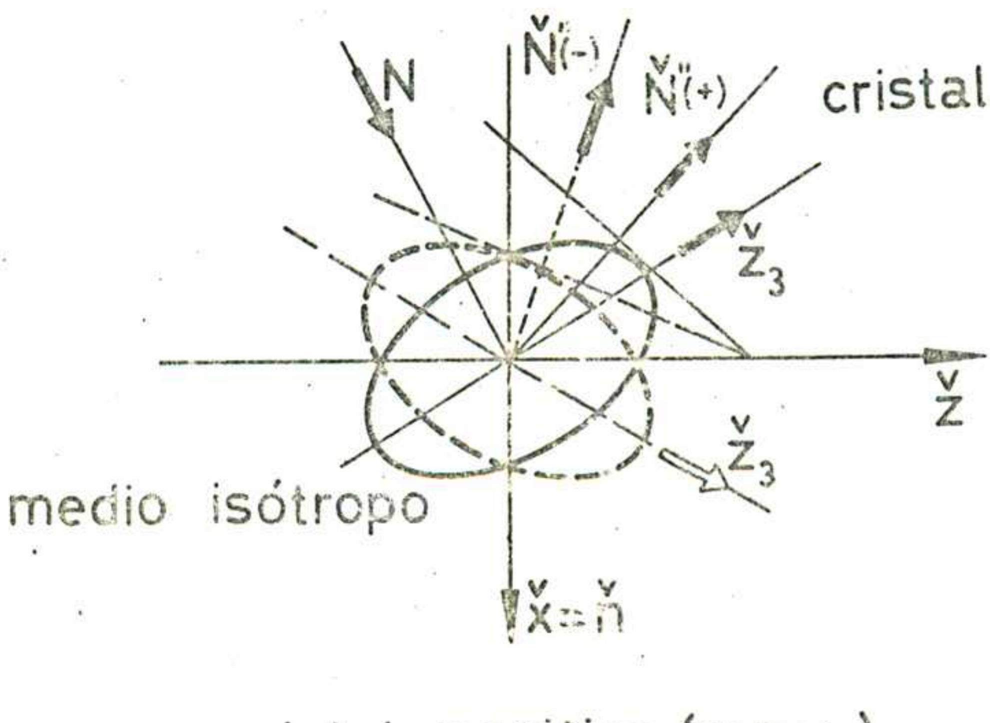
entonces vale el signo negativo de la bicuadrática, y el positivo en caso contrario.

Por otro lado, para cristal negativo ocurre exactamente al revés, de lo que, teniendo en cuenta que (u_o-u_e) es positivo o negativo según se trate de cristal positivo o negativo respectivamente, se puede poner las condiciones para uno u otro tipo de cristal bajo la siguiente forma.

Si $(u_o-u_e)(\breve{N}.\breve{z})(\breve{z}_3.\breve{n}) > 0$, entonces vale el signo negativo de la solución y valdrá el positivo en caso contrario.



cristal negativo ($u_o < u_e$)



cristal positivo ($u_o > u_e$)

REFERENCIAS

1) Stavroudis O.N. J. Opt. Soc. Am. 52, 187 (1962).

2) Swindell W. Appl. Opt. 14, 2298 (1975).

3) Elshazly-Zaghloul, M; Azzam, R.M.A. Opt. Soc. of Am. 72, 657 (1982).

4) Simon, María C. Appl. Opt. 22, 354 (1983).

5) Simon, María C.; Echarri, R.M. Appl. Opt. 25, 1935 (1986).

6) Simon, María C.; Echarri, R.M. Internal Reflection in Uniaxial Crystals I: Geometrical Description. Jour. Mod. Opt. (en prensa).

7) Simon, María C.; Echarri, R.M. Opt. Lett. 14, 257 (1989).

8) Simon, María C.; Echarri, R.M. Appl. Opt. 18, 3879 (1987).

9) Simon, María C.; Echarri, R.M. Internal Reflection in Uniaxial Crystals II: Coefficients of Transmission and Reflection for an Ordinary Incident Wave. Jour. Mod. Opt. (en prensa).

10) Simon, María C.; Echarri, R.M. Internal Reflection in Uniaxial Crystals III: Coefficients of Transmission and Reflection for an Extraordinary Incident Wave. Jour. Mod. Opt. (en prensa).

Prof. Dra. María C. Simon

Directora de Tesis

Lic. Rodolfo M. Echarri

Tesista

INDICE

INDICE (Cont.)

AGRADECIMIENTOS.

Agradezco a la Dra. María C. Simon, la que, a través de sugerencias sutiles algunas veces y duras pero fructíferas críticas otras, con incontables horas de dedicación, fue capaz de mostrarme el camino respetando mi libertad de pensamiento.

También agradezco a cada uno de los miembros del GRUPO DE OPTICA, con quienes en mayor o menor medida, he compartido discusiones que siempre me resultaron de inestimable valor.

Muy especialmente agradezco a mi esposa, la que resignando su propio tiempo, ha multiplicado el mío.

Por último, agradezco al Sr. Ricardo Dato por la preparación de las fotografías, y a la Srta. Marta Pedernera, por la realización de los dibujos.