Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Enfoque por conexiones de las ecuaciones de Einstein, Yang, Mills

Taboada, Horacio Héctor

1989

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Taboada, Horacio Héctor. (1989). Enfoque por conexiones de las ecuaciones de Einstein, Yang, Mills. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2268_Taboada.pdf

Cita tipo Chicago:
Taboada, Horacio Héctor. "Enfoque por conexiones de las ecuaciones de Einstein, Yang, Mills". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1989.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2268_Taboada.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

Tesis
2268
ej.2

Universidad Nacional de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

ENFOQUE POR CONEXIONES DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN-YANG-MILLS

Autor

Horacio Héctor Taboada

Director de Tesis

Dr. R. J. Noriega

Tesis para optar al título de

Doctor en Ciencias Matemáticas

— 2.268 —
Ej: 2

– 1989 –

Quiero expresar mi mayor gratitud al Dr. Ricardo Noriega Director de esta Tesis, quien me brindó un continuo y paciente aliento durante todo el trabajo.

INDICE

CAPITULO 5

TRATAMIENTO POR CONEXIONES SIMETRICAS DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN-YANG-MILLS: PARTE II

En el presente trabajo se estudian tres problemas inherentes a teorías de campo.

En el primero se demuestra la unicidad del tensor de momento-energía para la teoría de Einstein-Maxwell, mediante las siguientes hipótesis, naturales y mínimas:

Toda vez que se anule la divergencia covariante del tensor de campo electromagnético, debe anularse la correspondiente al tensor de momento-energía.

El tensor de momento-energía hallado coincide con el que usualmente se emplea en la teorías de Einstein-Maxwell.

En el segundo trabajo, mediante un enfoque por conexiones simétricas, en el marco de la teoría de gauge de Einstein-Yang-Mills, se resuelve el problema equivariante inverso del cálculo de variaciones. Se demuestra, para un lagrangiano arbitrario L, que si las ecuaciones de campo son tensoriales e invariantes de gauge, y si el operador de Euler-Lagrange asociado a la conexión es adecuadamente degenerado (sus componentes sólo dependen de las de la métrica, de su derivada y de las de la conexión), entonces existe una densidad lagrangiana $\tilde{L}$, invariante de gauge, equivalente a L, en el sentido que sendas expresiones de Euler-Lagrange coinciden. La verificación de las ecuaciones de campo en el vacío implica que la conexión simétrica arbitraria utilizada, coincide con la conexión de Levi-Civita.

En el último se demuestra -en el mismo marco teórico y con el mismo enfoque que en el trabajo anterior- que dada una densidad escalar lagrangiana e invariante de gauge $\tilde{L}$ (cuya existencia está asegurada por el trabajo anterior), y con idénticas hipótesis de degeneración, entonces $\tilde{L}$ es única y se exhibe su forma general, para un grupo de Lie arbitrario G.

GENERALIDADES SOBRE TEORIAS BASADAS EN LA RELATIVIDAD GENERAL

Entre los fundamentos heurísticos de la Teoría de la Relatividad General aparece la necesidad de ubicar a la gravitación en una posición central, destacada, en la descripción del espacio-tiempo, al considerarse a esta interacción de la materia como responsable de la forma y la estructura que, en gran escala presenta el Universo observable. Para lo cual se identifica la acción de los campos gravitatorios con la deformación o curvatura del espaciotiempo. Así deberá distinguirse a la gravitación, dentro de la teoría de la Relatividad General, por intermedio de un objeto intrínseco a la estructura matemática que la modele, que de cuenta de la "forma" o de la distorsión que su acción genera sobre el espaciotiempo.

La estructura matemática que se emplea para hacer tal descripción, es la de una variedad diferenciable M de clase C^{∞}, conexa, de Hausdorff, orientada y dotada de una métrica g de Lorentz, esto es de signatura (1,3). En este modelo, los campos tensoriales definidos sobre M identifican el comportamiento de la materia en el espaciotiempo. Así, estos campos obedecen ecuaciones que pueden expresarse como relaciones entre tensores sobre M.

Así se procura lograr una definición de los campos materiales y de sus interacciones, a través de ecuaciones que no dependan del punto del espaciotiempo donde estas se establecen.

Más aún, se persigue una descripción *intrínseca*, donde las ecuaciones (leyes) que rigen el comportamiento de la materia sean cabalmente relaciones cuya *forma* sea válida cualquiera sea el sistema coordenado elegido para formularlas. Se espera que dos descripciones de un mismo fenómeno, realizadas desde sistemas coordenados diferentes deben ser coincidentes. Este precepto recibió el nombre de "*principio de covariancia*".

1.1 EL PRINCIPIO DE COVARIANCIA Y LA TEORIA DE CONCOMITANTES

La intención de proceder de acuerdo a lo reseñado mas arriba -descripción de los fenómenos de manera intrínseca- se apoya en el concepto matemático de concomitantes geométricos, que, cuando los objetos geométricos involucrados son tensores (relativos), resultan funciones tensoriales invariantes por la acción de un grupo de Lie. El caracter concomitante de estas funciones de objetos geométricos arbitrarios permite realizar el cálculo de las identidades de invariancia, a partir de la condición de concomitante. Esta técnica consiste en lo siguiente: las matrices que describen una transformación "admisible" de sistema coordenado son no singulares, o sea pertenecientes a GL(n,R). Entonces puede calcularse la derivada, de la condición de concomitante, respecto de estas matrices, para la transformación idéntica, debido a que GL(n,R) es un grupo de Lie. Las derivadas de cualquier orden de las matrices de cambio de coordenada, son también objetos que varían de forma continua, por lo que también es posible calcular la derivada de la condición de concomitante, teniendo en cuenta que para la transformación idéntica estas derivadas de cualquier orden deben ser nulas. Queda así expuesta la técnica de cálculo de las identidades de invariancia de un concomitante. Con ellas es posible describir las condiciones necesarias que debe cumplir un concomitante; de acuerdo al caso, determinar si existe un tal objeto, y en caso afirmativo, llegar a describir la forma general del mismo. Por lo que dichas identidades son de gran utilidad para establecer la existencia y eventual unicidad de objetos concomitantes de otros objetos.

1.2 ECUACIONES DE CAMPO Y TENSOR DE MOMENTO-ENERGIA

El enfoque seguido adelante por Einstein [1.1], a fin de establecer las ecuaciones de la teoría de la relatividad general, es el de buscar un análogo tensorial de la ecuación de Poisson en la teoría gravitatoria de Newton:

$$\Delta\phi = 4\pi K\rho \tag{1.1}$$

donde Δ es el operador laplaciano, ϕ caracteriza al campo gravitatorio, K es la constante gravitatoria y ρ es la densidad de materia.

Por tal motivo, Einstein estableció una ecuación tensorial que vincula al potencial gravitatorio (representado por un tensor g de tipo (0,2)), con un objeto que reuna la información sobre la densidad de energía del campo electromagnético y de los campos de materia intervinientes (descripto por un tensor T, llamado de momento-energía, dei mismo tipo que el anterior). Dada una carta local (x,U), tales tensores tienen, respectivamente, componentes g_{uv} y T_{uv}.

La ecuación que vincule al tensor de momento-energía y al tensor métrico debiera ser tal que:

* En el miembro derecho debe aparecer T_{uv}

* El miembro izquierdo debe contener un tensor construido a expensas de g_{uv} y de sus derivadas hasta cierto orden. Dicho tensor queda completamente determinado mediante las tres condiciones:

1.- No debe contener derivadas de g_{uv} de orden superior a 2

2.- Debe ser lineal en dichas segundas derivadas.

3.- Su divergencia debe ser identicamente nula.

Este tensor es el llamado *tensor de Einstein*. E. Cartan fue quien originalmente demostró ese teorema [1.2]. Lovelock [1.3] demuestra- usando sólo la hipótesis 3 y el caracter de concomitante del objeto buscado- para n = 4 (dimensión del espaciotiempo), la forma del tensor de Einstein.

Las dos primeras condiciones son tomadas por analogía con la antedicha ecuación de Poisson. Mediante el tensor fundamental en este enfoque, el tensor métrico, se define la conexión ∇ de Levi-Civita, que dada una carta local (x,U) tiene las componentes:

$$\{^{t}_{uv}\} = 1/2g^{st}(g_{tu,v} + g_{vt,u} - g_{uv,t}) \qquad (1.2)$$

donde la coma denota derivación ordinaria respecto de las coordenadas y donde usualmente se denota a las componentes de esta conexión mediante $\{^{t}_{uv}\}$. Así definida, estas componentes resultan simétricas en el par de índices inferiores. Por tal motivo, el tensor de torsión, construido a partir de esta conexión es nulo:

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X \qquad (1.3) \\ &= 0, \text{ para todo par de campos vectoriales X e Y.} \end{aligned}$$

En general, las componentes del tensor de torsión son:

$$T^{t}_{uv} = \Gamma^{t}_{uv} - \Gamma^{t}_{vu}, \tag{1.4}$$

donde aquí Γ^{t}_{uv} denota las componentes de una conexión arbitraria.

El siguiente invariante que puede construirse a partir de la conexión es el tensor de curvatura o de Riemann, que, dados los campos vectoriales X, Y y Z, se define como:

$$R(X,Y)Z = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z \tag{1.5}$$

y su expresión en componentes, dada la carta local (x,U) es:

$$R^{t}_{uvv} = -\Gamma^{t}_{uv,v} + \Gamma^{t}_{uv,v} - \Gamma^{t}_{sv}\Gamma^{s}_{uv} + \Gamma^{t}_{sv}\Gamma^{s}_{uv} \tag{1.6}$$

Remitiéndonos a las dos primeras condiciones, a partir del tensor de curvatura se construye algebraicamente el tensor de Einstein:

$$G_{uv} = R_{uv} - 1/2g_{uv}R, \tag{1.7}$$

$$R_{uv} = R^{t}_{uvt}, \text{ componentes del tensor de Ricci, y} \tag{1.8}$$

$$R = g^{uv}R_{uv}, \text{ curvatura escalar} \tag{1.9}$$

A su vez, la conservación del momento y la energía exige -ver el enfoque variacional- que la divergencia covariante del tensor de momento-energía se anule. Por lo tanto también debe ser nula la divergencia del tensor de Einstein.

De modo que la réplica relativista de la ecuación de Poisson queda establecida como:

$$R_{uv} - 1/2g_{uv}R = -\varkappa T_{uv} \tag{1.10}$$

donde $\varkappa$ es una constante relacionada con la constante gravitatoria de Newton.

1.3 ENFOQUE VARIACIONAL

Desde el punto de vista variacional, se plantea el caracter estacionario de la integral $I = \int L dv$, bajo la variación de los campos en el interior de un compacto $\mathcal{D} \in M$, donde L es una densidad escalar función de n campos materiales, sus primeras derivadas covariantes y de la métrica. O sea,

$$L = L(g_{uv}; \Psi(i)^{bcd..}_{uvw..} \dots ; \Psi(i)^{bcd..}_{uvw..|q} \dots) \qquad (1.11)$$

, donde $1 \leq i \leq n$, $\Psi(i)^{bcd..}_{uvw..}$ identifica los campos materiales y la barra vertical denota derivación covariante inducida por la métrica a través de la conexión de Levi-Civita.

Por variación de los campos en $\mathcal{D}$, siguiendo a Hawking-Ellis [1.4], se entiende una familia monoparamétrica de campos $\psi(i)(u,r)$, donde si $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y si $r \in M$:

(1) $\psi(i)(0,r) = \Psi(i)(r)$

(2) $\psi(i)(u,r) = \Psi(i)(r)$ para $r \notin \mathcal{D}$ (1.12)

Para que la variación de la integral de acción sea nula, es necesario y suficiente que se verifiquen las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial L / \partial \Psi(i)^{bcd..}_{uvw..} - (\partial / \partial \Psi(i)^{bcd..}_{uvw..|e})_{|e} = 0, \; 1 \leq i \leq n \qquad (1.13)$$

Estas son las ecuaciones de campo.

El tensor de momento-energía se obtiene del lagrangiano L considerando la variación en la acción debida a una variación en la métrica. Se asume que esta última deja invariable a los campos de materia, pero no así las derivadas covariantes de los campos ni el elemento de volumen. Esto permite calcular y escribir $\partial I / \partial u$:

$$\partial I / \partial u = \int_D (T^{bc} \delta g_{bc}) dv \qquad (1.14)$$

donde T^{bc} son componentes de un tensor simétrico que se identifica como el tensor de momento-energía y δg_{bc} caracteriza a la antedicha variación de la métrica.

Así, en la Teoría de la Relatividad General, se le otorga un papel distinguido a la gravitación, en el sentido que su acción se expresa a través de la curvatura de la variedad, y por lo tanto interviene en las ecuaciones de campo en la parte izquierda de las mismas. En cambio, para los demás campos de materia, sus acciones se expresan a través de un tensor simétrico T_{uv} llamado de momento-energía, el cual dependerá de los campos, de sus derivadas covariantes y de la métrica, con las siguientes propiedades:

* T_{uv} se anula en un abierto $U \subset M$ si y sólo si allí se anulan dichos campos.

* T_{uv} obedece la ecuación:

$$g^{uv}T_{vr|u} = 0 \tag{1.15}$$

Este tensor cumple las ecuaciones de conservación como consecuencia de las ecuaciones de campo satisfechas por $\Psi_{(i)}{}^{bcd..}_{uvv..}$

Además cabe considerar lo siguiente:

Si se aplica el cálculo de variaciones a la *acción de Hilbert* $\int D dv$, donde el integrando es la densidad escalar

$$D = \sqrt{-g}.R \tag{1.16}$$

- g es el determinante del tensor métrico y R es la curvatura escalar (1.9)-, se deduce, como lo señala Schrödinger en [1.5], que el tensor de Einstein, de componentes G_{uv}, debe tener divergencia covariante nula.

En efecto, como la derivada covariante del tensor métrico, respecto de los símbolos de Christoffel, es identicamente nula, dicha propiedad del tensor de Einstein resulta consecuencia directa de la verificación, por parte del tensor de curvatura, de la denominada 2° identidad de Bianchi, adecuadamente contraída:

$$R^{a}_{\ bcd}|_{e} + R^{a}_{\ bde}|_{c} + R^{a}_{\ bec}|_{d} = 0 \qquad \text{(2° identidad de Bianchi)}$$

Contrayendo a con d:

$$R^{a}_{\ bca}|_{e} + R^{a}_{\ bae}|_{c} + R^{a}_{\ bec}|_{a} = 0$$

Haciendo uso de la antisimetría del tensor de curvatura en el último par de índices, se obtiene:

$$R_{bc}|_{e} - R^{a}_{\ bea}|_{c} - R^{a}_{\ bce}|_{a} = 0$$

Contrayendo con g^{bc} y teniendo en cuenta la propiedad del tensor métrico antes mencionada, se obtiene:

$$R|_{e} - R^{c}_{\ e}|_{c} - R^{a}_{\ e}|_{a} = 0 \tag{1.17}$$

Contrayendo con g^{ed} y reordenando:

$$R^{cd}|_{c} - 1/2.\, g^{cd}R|_{c} = 0 \tag{1.18}$$

O sea que el tensor de Einstein goza, a priori, de la propiedad de divergencia covariante nula, lo cual es deseable a fin de establecer una relación con el tensor de momento-energía.

1.4 ENFOQUE POR CONEXIONES:

Varias son las razones que justifican el estudio, mediante un enfoque por conexiones, de las ecuaciones de campo de las teorías basadas en la relatividad general. Mediante "enfoque por conexiones", se quiere aludir a la situación en la cual la conexión interviniente en el tratamiento, no es *necesariamente* la conexión de Levi-Cívita, derivada de la métrica de la variedad seudoriemanniana subyacente. Se reseñan algunas de estas razones:

Es posible establecer las ecuaciones de campo de la relatividad general utilizando una conexión arbitraria, sobre la *cual se aplican ciertas restricciones.*

Schrödinger [1.5] fue uno de los primeros investigadores que asentó una línea de pensamiento alternativa a fin de dar a la gravitación un fundamento puramente geométrico en el modelo del espaciotiempo, consistente en adoptar a la conexión afín como objeto fundamental de la teoría, motivado por el hecho que dicho objeto permite realizar operaciones con vectores definidos en distintos puntos de la variedad mediante el transporte paralelo. A su vez la métrica g es intrínseca a la estructura seudoriemanniana subyacente como base del modelo. Por lo tanto la conexión afín *debe ser compatible de alguna manera* con la métrica g.

Una condición *suficiente* para tal compatibilidad es que la longitud de un vector se conserve cuando éste es sometido a transporte paralelo, pues esto asegura la conservación de la longitud de un segmento de arco de curva, o sea se pide:

$l = g_{bc} X^b X^c$ constante por transporte paralelo,

donde X^a identifica las componentes de un vector arbitrario, tangente a M en p. Esto implica la anulación de la derivada covariante del tensor métrico g respecto de la conexión afín ∇:

$$g_{ij|k} \quad g_{ij,k} - \Gamma^h_{ik} g_{hj} - \Gamma^h_{jk} g_{ih} = 0 \qquad (1.19)$$

De lo cual se deduce la siguiente igualdad:

$$\{^h_{ij}\} = 1/2.[(\Gamma^h_{ji} + \Gamma^h_{ij}) + g^{hk}.g_{jn}.(\Gamma^n_{ki} - \Gamma^n_{ik}) + g^{hk}.g_{in}.(\Gamma^n_{kj} - \Gamma^n_{jk})]$$

Si se trabaja con $\Gamma^h_{[ji]} = 1/2.(\Gamma^h_{ji} + \Gamma^h_{ij})$, parte simétrica, se tiene:

$$\Gamma^h_{[ji]} = \{^h_{ij}\} - 1/2.g^{hk}.[g_{jn}.T^n_{ki} + g_{in}.T^n_{kj}] \qquad (1.20)$$

donde T^a_{bc} caracteriza a las componentes del tensor de torsión construido a expensas de la conexión arbitraria ∇. Esta es la ecuación que debe cumplir la parte simétrica de la conexión arbitraria para ser *compatible* con la métrica. De donde se desprende que la *única conexión simétrica compatible con la métrica es la de Levi-Civita.*

El enfoque de la relatividad general por conexiones ha sido tratado por diversos autores (Einstein, Eddington, Weyl Schrödinger entre otros). Schrödinger, en "Space-Time Structure" [1.5], describe la acción del campo gravitatorio sobre la materia, como una propiedad geométrica del espaciotiempo, merced a una conexión afín adscripta al mismo, que actúa mediante restricciones geométricas en el movimiento de las partículas. La conexión afín debe observarse como una propiedad inherente del continuo espaciotiempo, no como algo creado sólo cuando hay un campo gravitacional.

Para plasmar la descripción por conexiones de la relatividad, se vuelve a tomar como guía a la teoría de gravitación de Newton. La gravitación se describe por un potencial Φ, el gradiente del cual, cambiado de signo, es la aceleración que se le imparte a un pequeño cuerpo de prueba. La ley que gobierna al potencial Φ es:

1.- Φ = constante, allí donde no hay campo ni materia. (1.21)

(Esta suposición es clásica: no se contempla la "prohibición" cuántica de que el potencial o su derivada se anulen, de acuerdo con el principio de indeterminación de Heisenberg)

2.- $\nabla^2\Phi = 0$, (1.22)

donde existe campo en ausencia de masa gravitatoria

3.- $\nabla^2\Phi = 4\pi k\rho$, (1.23)

donde hay materia gravitatoria de densidad ρ y donde k es la constante de gravitación. Cada ecuación constituye un caso particular de la siguiente.

Las correspondientes ecuaciones a ser cumplidas por una conexión afín arbitraria ∇ quedan establecidas mediante las siguientes consideraciones:

1.- *Cuando no hay campo ni materia, la conexión debe ser integrable y las geodésicas son líneas rectas.*

La condición necesaria y suficiente para ello, es:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$
$$= 0, \tag{1.24}$$

$$R(X,Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z$$
$$= 0 \tag{1.25}$$

, para todos los campos vectoriales X,Y y Z, definidos sobre U.

O sea que la condición matemática es:

Anulación simultánea en un abierto de la variedad, de los tensores de torsión y curvatura.

2.- *Cuando existe campo gravitatorio y en ausencia de materia, las ecuaciones tensoriales que describan la situación, deben admitir a la anulación de los tensores de torsión y curvatura como caso límite cuando la intensidad del campo gravitatorio tiende a cero.*

Como las tres ecuaciones expuestas para la teoría gravitatoria de Newton son lineales, se plantea en forma heurística la linealidad en las derivadas de ∇. La única forma de deducir del punto 1, algo menos exigente, es mantener la primer ecuación y contraer la segunda:

Sea una carta local (x,U) y sean las componentes en dicha carta de la conexión ∇, Γ^a_{bc}. Contrayendo, se pueden definir dos tensores:

El tensor de Ricci (1.8), de componentes en la carta (x,U):

$$R_{bc} = R^a_{bca}$$
$$= - \Gamma^a_{bc,a} + \Gamma^a_{ba,c} - \Gamma^a_{ea}\Gamma^e_{bc} + \Gamma^a_{ec}\Gamma^e_{ba}$$

El tensor antisimétrico A, de componentes en la carta (x,U):

$$A_{bc} = R^a_{abc}$$
$$= - \Gamma^a_{ab,c} + \Gamma^a_{ac,b} \tag{1.26}$$

Manteniendo la nulidad del tensor de torsión y pidiendo la del de Ricci, se obtiene la anulación del tensor A:

En efecto, $R_{bc} = 0$ y $T^a_{bc} = 0$ implican que:

$$- \Gamma^a_{ab,c} = - \Gamma^a_{bc,a} - \Gamma^a_{ea}\Gamma^e_{bc} + \Gamma^a_{ec}\Gamma^e_{ba} \tag{1.27}$$

Con lo que

$$A_{bc} = - \Gamma^a_{ab,c} + \Gamma^a_{ac,b}$$
$$= - \Gamma^a_{bc,a} - \Gamma^a_{ea}\Gamma^e_{bc} + \Gamma^a_{ec}\Gamma^e_{ba} + \Gamma^a_{cb,a} + \Gamma^a_{ea}\Gamma^e_{cb} - \Gamma^a_{eb}\Gamma^e_{ca}$$
$$= 0 \tag{1.28}$$

(El trabajar con conexiones simétricas arbitrarias es razonable por dos motivos: por un lado no es claro con cual campo físico podría identificarse un tensor de torsión no identicamente nulo; por otro lado, desde el enfoque geométrico, la parte antisimétrica de la conexión no actúa en el cálculo de las geodésicas).

Por lo tanto es suficiente para la existencia de campo, en ausencia de materia:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$
$$= 0 \tag{1.24}$$

, para todos los campos vectoriales X e Y definidos sobre U, y

$$R_{bc} = R^{a}_{bca}$$
$$= 0, \qquad (1.29)$$

para cualquier sistema coordenado. Obsérvese que la anulación del tensor de Ricci en un abierto, implica la anulación allí de la curvatura escalar $R = R_{bc}.g^{bc}$

Por lo tanto también se anula el tensor de Einstein:

$$G_{bc} = R_{bc} - 1/2.R.g_{bc}$$
$$= 0 \qquad (1.30)$$

Reciprocamente, si se anula el tensor de Einstein *también se anula el de Ricci*. En efecto, si:

$$0 = R_{bc} - 1/2.R.g_{bc} \qquad (1.31)$$

entonces contrayendo dicha expresión con g^{bc} se deduce que:

$$R = 0 \qquad (1.32)$$

De las dos últimas ecuaciones se concluye que:

$$R_{bc} = 0 \qquad (1.33)$$

Dada esta característica del tensor de Einstein, unida a la propiedad de que su divergencia covariante es identicamente nula (como se vio en ocasión del enfoque variacional), pareciera ser que es éste el mas adecuado para describir la acción del campo gravitatorio.

Resumimos el resultado estableciendo:

Anulación simultánea en un abierto de la variedad, de los tensores de torsión y de Einstein.

3.- *Debe establecerse una ecuación que contenga, por un lado un tensor que de cuenta de la acción de la gravedad y por el otro la acción de los demás campos materiales actuantes en el espaciotiempo. La conservación del momento y la energía implican* *la anulación de la divergencia covariante del último, denominado tensor de momento-energía.*

Siguiendo este precepto, se plantea una igualdad entre un tensor de momento-energía, soporte de la acción de los campos materiales, y un tensor que exprese la acción del campo gravitatorio. Nuevamente se razona que, por continuidad, si la acción de los campos materiales tiende a cero, debiera recuperarse la condición establecida en el punto 2.

Si la métrica y la conexión son compatibles, esto es, si vale que la derivada covariante de la métrica es identicamente nula, resulta, como se vio a propósito del tratamiento variacional que la divergencia covariante del tensor de Einstein es nula.

Para poder completar la descripción por conexiones es necesario compatibilizar de alguna manera las mediciones de arcos de geodésicas mediante la métrica subyacente y la conexión afín. Esta compatibilidad exige que la derivada covariante del tensor métrico sea nula. En esas condiciones se puede establecer:

$$G^{bc} = -\varkappa T^{bc} \qquad (1.10)$$

donde $\varkappa$ es una constante gravitatoria adecuada a las unidades usadas.

1.5 LOS CAMPOS DE GAUGE Y LAS CONEXIONES EN UN FIBRADO PRINCIPAL

Simetría, Ley de Conservación y Grupos de Transformaciones

En lo que sigue, se adopta un enfoque motivador de la estructura de campos de gauge, debido a García Canal [1.8]

Emmy Noether [1.7] ha demostrado que la invariancia de la densidad escalar lagrangiana ante un dado grupo de transformaciones de coordenadas implica la aparición de una ley de conservación.

Las ecuaciones de campo en el vacío se expresan a través de la anulación de las expresiones de Euler-Lagrange de una dada densidad lagrangiana L, dependiente de un campo ψ y de su derivada ordinaria respecto de las coordenadas ψ_u, esto es:

$$\partial L/\partial\psi - \partial/\partial x^u(\partial L/\partial\psi_u) = 0 \qquad (1.34)$$

para un lagrangiano L:

$$L = L(\psi\ ;\psi_u) \qquad (1.35)$$

Supongamos ahora que L es invariante (simétrico) por la transformación:

$$\psi \longrightarrow \tilde{\psi} = \psi + \delta\psi \qquad (1.36)$$

y por lo tanto,

$$\psi_u \longrightarrow \tilde{\psi}_u = \psi_u + \delta\psi_u \qquad (1.37)$$

para una determinada variación $\delta\psi$ del campo ψ. O sea, L verifica

$$\delta L = (\partial L/\partial\psi).\delta\psi + (\partial L/\partial\psi_u).\delta\psi_u$$

$$= 0 \qquad (1.38)$$

Pero por la anulación de la expresión de Euler-Lagrange, es:

$$\partial L/\partial\psi = \partial/\partial x^u(\partial L/\partial\psi_u) \qquad (1.39)$$

y entonces

$$\delta L = \partial/\partial x^u(\partial L/\partial\psi_u).\delta\psi + (\partial L/\partial\psi_u).\delta\psi_u \qquad (1.40)$$

Como $\partial/\partial x^u(\partial L/\partial\psi_u).\delta\psi = \partial/\partial x^u[(\partial L/\partial\psi_u).\delta\psi] - (\partial L/\partial\psi_u).\delta\psi_u$, resulta ser la variación de L:

$$\delta L = \partial/\partial x^u[(\partial L/\partial\psi_u).\delta\psi]$$

$$= 0 \qquad (1.41)$$

se tiene la conservación del campo vectorial:

$$J^u = (\partial L/\partial\psi_u).\delta\psi \quad \text{(E. Noether)} \qquad (1.42)$$

La invariancia de L respecto a translaciones implica la conservación del momento y la energía. La invariancia frente a rotaciones implica la conservación del momento angular. En ambos casos se está frente a la acción de grupos de simetría; en el primero, el grupo de desplazamientos, a 4 parámetros y en el segundo el de rotaciones a 3 parámetros.

1.5.1 Invariancia de fase global

Sea ahora el lagrangiano de un campo escalar complejo:

$$L = L(\phi;\phi^*;\phi_u;\phi^*_u)$$

$$= \sum_u \phi^*_u.\phi_u - m^2.\phi^*.\phi \qquad (1.43)$$

Bajo qué transformación será L invariante?

Supongamos la existencia de $\tilde{L}$ lagrangiana en los mismos argumentos, pero variados:

$$\tilde{L} = \tilde{L}(\tilde{\phi};\tilde{\phi}^*;\tilde{\phi}_u;\tilde{\phi}^*_u) \qquad (1.44)$$

$$\tilde{\phi} = u.\phi \qquad (1.45)$$

para una dada función $u = u(x^h)$ a determinar:

Luego, $L = \tilde{L}$ implica:

$$\sum_u \phi^*_u.\phi_u - m^2.\phi^*.\phi = \sum_u \tilde{\phi}^*_u.\tilde{\phi}_u - m^2.\tilde{\phi}^*.\tilde{\phi} \qquad (1.46)$$

de donde, como ϕ y ϕ_u son independientes, resulta:

$$\phi^*.\phi = \tilde{\phi}^*.\tilde{\phi} \qquad (1.47)$$

$= |u|^2\phi^*.\phi$, de donde $|u| = 1$, o sea $u = \exp(i\alpha)$, para algún α adecuado.

Luego, una transformación que satisface lo anterior es:

$$\phi \longrightarrow \tilde{\phi} = \exp(i\alpha).\phi, \quad \alpha\in R \tag{1.48}$$

El lagrangiano L es entonces:

$$L = \sum_u \phi_{1u}.\phi_{1u} + \sum_u \phi_{2u}.\phi_{2u} - m^2.\phi_1.\phi_1 - m^2.\phi_2.\phi_2 \tag{1.49}$$

$$= L_1 + L_2 \tag{1.50}$$

donde $\phi_1 = \mathrm{Re}\phi$; $\phi_2 = \mathrm{Im}\phi$, y la transformación de fase se expresa ahora como:

$$\phi_1 \longrightarrow \tilde{\phi}_1 = \mathrm{Re}[\exp(i\alpha).\phi] = \cos\alpha.\phi_1 - \mathrm{sen}\alpha.\phi_2 \tag{1.51}$$

$$\phi_2 \longrightarrow \tilde{\phi}_2 = \mathrm{Im}[\exp(i\alpha).\phi] = \mathrm{sen}\alpha.\phi_1 + \cos\alpha.\phi_2 \tag{1.52}$$

La invariancia significa que los campos reales ϕ_1 y ϕ_2 no son distinguibles fisicamente. Se puede llamar ϕ_1 y ϕ_2 a dos combinaciones lineales ortogonales de los campos originales. Aquí la simetría es <u>global</u> ya que el cambio de fase de los campos es el mismo para todos los puntos del espacio-tiempo, <u>pues</u> α <u>no depende de las coordenadas</u> $\underline{x}^h$. Esta idea de simetría global puede extenderse a transformaciones de fase más complicadas, con una estructura grupal dependiente de más parámetros.

1.4.3 Invariancia de fase local

El siguiente es el enfoque que ha conducido a Yang y Mills a proponer la teoría de los campos de gauge.

En el mismo subyacen las siguientes ideas:

El concepto de campo y las interacciones locales implican propagación de información a puntos vecinos y descartan la acción a distancia. Además, en el lagrangiano aparecen productos de campos y de sus derivadas en un mismo punto. Entonces la invariancia de fase global -la misma en todos los puntos- parece contradecir la idea generalizada de localidad y deben estudiarse las invariancias frente a transformaciones que pueden ser diferentes en distintos puntos del espaciotiempo. Se pasa del estudio de transformaciones de gauge de 1° especie (globales), a las de 2° especie (locales). En concreto se trata de permitir que α sea función de clase C^1 de las coordenadas:

$$\alpha = \alpha(x^h)$$

y estudiar las transformaciones del tipo:

$$\phi \longrightarrow \hat{\phi} = \exp(i\alpha).\phi \tag{1.53}$$

y plantear la invariancia local de la teoría.

Aplicando la transformación (1.53) al lagrangiano

$$L = \sum_{u=1}^{4} \phi^{*}_{u}\phi_{u} - m^{2}\phi^{*}\phi \tag{1.54}$$

, se tiene trivialmente que

$$m^{2}\hat{\phi}^{*}\hat{\phi} = m^{2}\phi^{*}\phi \tag{1.55}$$

Pero

$$\hat{\phi}_{u} = \exp(i\alpha).[\partial/\partial x^{u} + i.\alpha_{u}](\phi) \tag{1.57}$$

$$\hat{\phi}^{*}_{u} = \exp(-i\alpha).[\partial/\partial x^{u} - i.\alpha_{u}](\phi^{*}) \tag{1.58}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{u=1}^{4} \hat{\phi}^{*}_{u}\hat{\phi}_{u} = \sum_{u=1}^{4} [\partial/\partial x^{u} - i.\alpha_{u}](\phi^{*}).[\partial/\partial x^{u} + i.\alpha_{u}](\phi) \tag{1.59}$$

y el lagrangiano resulta <u>no</u> <u>invariante</u> frente a la transformación de 2^{da} especie, debido a la contribución de α_u, el gradiente de α.

Pero como el campo electromagnético está definido a menos de un gradiente a consecuencia de la invariancia global de gauge de la teoría, puede aprovecharse esta libertad de elección de A_u agregando este campo como término compensatorio en la derivada:

$$\phi_{u} \longrightarrow D_{u}\phi = (\partial/\partial x^{u} - i.q.A_{u})\phi \tag{1.60}$$

que define la llamada "derivada covariante de gauge". Se debe exigir que cuando ϕ cambia por una transformación, según:

$$\phi \longrightarrow \hat{\phi} = \exp[i.\alpha(x^h)].\phi \tag{1.61}$$

, el campo electromagnético lo haga como:

$$A_u \longrightarrow \hat{A}_u = A_u + (1/q).\alpha_u \tag{1.62}$$

De esta forma, la derivada covariante de gauge de ϕ, cambia como ϕ:

$$\begin{aligned} D_u\phi \longrightarrow \hat{D}_u\hat{\phi} &= (\partial/\partial x^u - i.q.\hat{A}_u)(\hat{\phi}) \\ &= [\partial/\partial x^u - i.q.(A_u + (1/q).\alpha_u)](\exp[i.\alpha(x^h)].\phi) \\ &= \exp[i.\alpha(x^h)].[\partial/\partial x^u - i.q.A_u](\phi) \\ &= \exp[i.\alpha(x^h)].D_u\phi \end{aligned} \tag{1.63}$$

Volviendo al lagrangiano, si se define el mismo como:

$$L = D_u^*\phi^*.D_u\phi - m^2.\phi^*.\phi \tag{1.64}$$

entonces este verifica:

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \hat{D}_u^*\hat{\phi}^*.\hat{D}_u\hat{\phi} - m^2.\hat{\phi}^*.\hat{\phi} \\ &= \exp[-i.\alpha(x^h)].D_u^*\phi^*.\exp[i.\alpha(x^h)].D_u\phi - m^2.\phi^*.\phi \\ &= D_u^*\phi^*.D_u\phi - m^2.\phi^*.\phi \end{aligned} \tag{1.65}$$

y por lo tanto es invariante de fase local.

La matemática subyacente en la teoría de gauge es la estructura de fibrado principal, en el cual el espacio total P, para cada entorno de un dado punto del espacio base M (variedad seudoriemanniana), es difeomorfo al producto UxG, para G grupo de Lie llamado *fibra* del espacio. Este grupo actúa sobre el espacio total P del cual M es su proyección $\Pi(P)$. Los detalles específicos de esta estructura serán presentados en el capítulo II, junto a la noción de concomitante geométrico.

CAPITULO 2

2.1 CONCOMITANTES TENSORIALES

En esta sección se introduce la noción de concomitante tensorial. Dicho concepto puede encontrarse en Schouten [2.1], Nijenhuis [2.2].

Sea cierto objeto geométrico arbitrario O, y una familia finita $\mathfrak{F} = (E_{\lambda}, {}_{e\lambda})_{\lambda=1,\omega;e\lambda=0,d\lambda}$ de ω otros objetos E_{λ} y de sus derivadas hasta un dado orden $d_{\lambda} \in \mathbb{N}$.

Sobre una variedad diferencial orientada M, de dimensión n, dada una carta local (x,U), $p \in U$, las componentes del objeto O y de los miembros de la familia $\mathfrak{F}$, son las funciones:

$$E_{\lambda m_1 \ldots m_{j\lambda}, d_1 \ldots d_{h\lambda}}^{\;\; l_1 \ldots l_{i\lambda}} : x(U) \longrightarrow D_{j\lambda+h\lambda}^{i\lambda} \subset (\mathbb{R}^n)^{i\lambda} \times (\mathbb{R}^n)^{j\lambda+h\lambda} \tag{2.1}$$

$$O_{b_1 \ldots \ldots b_s}^{a_1 \ldots \ldots a_r} : \Pi_{\lambda=1}^{\omega} \Pi_{h\lambda=1}^{d\lambda} (D_{j\lambda+h\lambda}^{i\lambda}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^r \times (\mathbb{R}^n)^s \tag{2.2}$$

Sea (x',U') otra carta local, tal que $p \in U \cap U'$. Denominando a estos objetos como:

$$\partial x^a / \partial x'^b = B_b^a \tag{2.3}$$

$$\partial x'^b / \partial x^c = A_c^b \qquad (B_b^a . A_c^b = \delta_c^a) \tag{2.4}$$

donde para cada punto p de la variedad, $B_b^a(p)$, $A_c^b(p) \in GL(n,\mathbb{R})$

$$\partial^2 x^a / \partial x'^{b_1} \partial x'^{b_2} = B_{b_1 b_2}^a \tag{2.5}$$

$$\partial^n x^a / \partial x'^{b_1} \ldots \partial x'^{b_n} = B_{b_1 \ldots b_n}^a \tag{2.6}$$

$$\det(\partial x^a / \partial x'^b) = B \quad \text{(jacobiano de la transformación)} \tag{2.7}$$

supóngase ahora que, por un cambio de coordenadas, las componentes de O se transforman como:

$$O^{a1\ldots ar}_{b1\ldots bs} = B^{p}.A^{a1}_{t1}\ldots A^{ar}_{tr}.B^{u1}_{b1}\ldots B^{us}_{bs}.O^{t1\ldots tr}_{u1\ldots us} + P^{a1\ldots ar}_{b1\ldots bs}$$

(2.8)

donde $p\in Z$ y

$$P^{a1\ldots ar}_{b1\ldots bs} = P^{a1\ldots ar}_{b1\ldots bs}(B^{t}_{u};B^{t}_{u1u2}\ldots B^{t}_{u1\ldots un}) \qquad (2.9)$$

es una función polinómica en sus argumentos y donde en cada sumando aparece al menos una vez, para algún r, $1\leq r\leq n$, algún factor del tipo $B^{t}_{u1\ldots ur}$

Es decir que el objeto O se transforma como la suma de una densidad tensorial de peso p y de tipo (r,s), más una función polinómica. Además, O es función de los objetos E_{α} y de sus derivadas respecto de la posición hasta cierto orden. Es decir que en componentes, $O^{a1\ldots ar}_{b1\ldots bs}$ es función de los siguientes $\omega + \Sigma^{\omega}_{\lambda=1}h_{\lambda}$ argumentos, cuyas componentes son:

$$E^{l1\ldots li1}_{1m1\ldots mj1};\ldots;E^{l1\ldots li1}_{1m1\ldots mj1,d1\ldots dh1};\ldots;E^{l1\ldots li\omega}_{\omega m1\ldots mj\omega};\ldots;E^{l1\ldots li\omega}_{\omega m1\ldots mj\omega,d1\ldots dh\omega}$$

donde la coma denota derivación ordinaria.

Por último supongamos que cada elemento no derivado de la familia (o sea cuyo orden de derivación es $e_{\lambda}= 0$) se transforma como:

$$E^{l1\ldots li\lambda}_{\lambda m1\ldots mj\lambda} = B^{p\lambda}.A^{l1}_{t1}\ldots A^{li\lambda}_{ti\lambda}.B^{u1}_{m1}\ldots B^{uj\lambda}_{mj\lambda}.E^{t1\ldots ti\lambda}_{\lambda u1\ldots uj\lambda} + P^{l1\ldots li\lambda}_{\lambda m1\ldots mj\lambda}$$

$$\forall\lambda,\ 1\leq\lambda\leq\omega \qquad (2.10)$$

donde, nuevamente:

$$P^{l1\ldots li\lambda}_{\lambda m1\ldots mj\lambda} = P^{l1\ldots li\lambda}_{\lambda m1\ldots mj\lambda}(A^{u}_{t};B^{t}_{u};B^{t}_{u1u2}\ldots B^{t}_{u1\ldots u\lambda n})$$

Derivando (2.10) respecto de x'^{h}, se tiene:

$$E^{l1\ldots li\lambda}_{\lambda m1\ldots mj\lambda,h} = B^{p\lambda}.A^{l1}_{t1}\ldots A^{li\lambda}_{ti\lambda}.B^{u1}_{m1}\ldots B^{uj\lambda}_{mj\lambda}.B^{k}_{h}.E^{t1\ldots ti\lambda}_{\lambda u1\ldots uj\lambda,k} +$$

$$+ P'^{l1\ldots li\lambda}_{\lambda m1\ldots mj\lambda h}(A^{u}_{t};B^{t}_{u};B^{t}_{u1u2}\ldots B^{t}_{u1\ldots u\lambda n+1})$$

$$\forall\lambda,\ 1\leq\lambda\leq\omega \qquad (2.11)$$

donde $P'^{l1\ldots li\lambda}_{\lambda m1\ldots mj\lambda h}$ es la función polinómica que contiene a los términos complementarios de la derivación de E_{λ} y donde aparece al menos una vez como factor, objetos del tipo $B^{l}_{u1...us}$ $2\leq s\leq\lambda n+1$. Para ver esto último cabe recordar que como:

$$A^{a}_{b}.B^{b}_{c} = \delta^{a}_{c}, \text{ entonces}$$

$$\partial/\partial x^{h}(A^{a}_{b}.B^{b}_{c}) = (\partial/\partial x^{h}A^{a}_{b}).B^{b}_{c} + A^{a}_{b}.B^{b}_{ch}$$

$$= 0 \qquad (2.12)$$

de donde:

$$(\partial/\partial x^{h}A^{a}_{b}) = - A^{c}_{b}.A^{a}_{d}.B^{d}_{ch} \qquad (2.13)$$

y como:

$$B = \det(B^{a}_{b})$$

$$= \Sigma^{n}_{b=1}B^{a}_{b}.M^{b}_{a},$$ donde M^{b}_{a} identifica al menor correspondiente al elemento B^{a}_{b} y cuya expresión en función de los elementos A^{b}_{a} de la inversa es:

$$M^{b}_{a} = B.A^{b}_{a} \qquad (2.14)$$

Por lo tanto la derivada del determinante B vale:

$$B_{h} = [\partial/\partial x^{h}\det(B^{a}_{b})]$$

$$= (\partial/\partial B^{a}_{b})(B).B^{a}_{bh}$$

$$= M^{b}_{a}.B^{a}_{bh}$$

$$= B.A^{b}_{a}.B^{a}_{bh} \qquad (2.15)$$

lo que prueba que $P^{l1..li\lambda}_{\lambda m1..mj\lambda h}$ es una función polinómica en objetos del tipo $B^{l}_{u1...us}$ $2\leq s\leq\lambda n+1$.

Esto demuestra que, para cualquier orden de derivación, *todos* los objetos del tipo $E^{l1..li\lambda}_{\lambda m1..mj\lambda,d1..de}$, para $1\leq e\leq h_{\lambda}$ se transforman según:

$$E^{\ l1..li\lambda}_{\lambda m1..mj\lambda,d1..de} =$$

$$= B^{p}\lambda.\, A^{l1}_{t1}..A^{li\lambda}_{ti\lambda}.\, B^{u1}_{m1}..B^{uj\lambda}_{mj\lambda}.\, B^{r1}_{d1}..B^{re}_{de}.\, E^{\ t1..ti\lambda}_{\lambda u1..uj\lambda,r1..}$$
$$+ P^{\ l1..li\lambda}_{\lambda m1..mj\lambda d1..de}(A^{u}_{t};B^{t}_{u};B^{t}_{u1u2}...B^{t}_{u1...u\lambda n+e})$$

$\forall\lambda,\ 1\le\lambda\le\omega$ (2.16)

Planteadas estas identidades, se define la noción de concomitante. El objeto geométrico O es concomitante simultáneo de la familia de objetos geométricos $\mathfrak{F} = \{E_{\lambda},_{e\lambda}\}_{\lambda=1,\omega;e\lambda=0,d\lambda}$ si satisface la relación:

$$B^{p}.\, A^{a1}_{t1}..A^{ar}_{tr}.\, B^{u1}_{b1}..B^{us}_{bs}.\, O^{t1..tr}_{u1..us} + P^{a1..ar}_{b1..bs}(A^{u}_{t};B^{t}_{u};B^{t}_{u1u2};..;B^{t}_{u1..un})$$
$$= O^{a1..ar}_{b1..bs}(..;B^{p}\lambda.\, A^{l1}_{t1}..A^{li\lambda}_{ti\lambda}.\, B^{u1}_{m1}..B^{uj\lambda}_{mj\lambda}.\, B^{r1}_{d1}..B^{re}_{de}.\, E^{\ t1.ti\lambda}_{\lambda u1.uj\lambda,r1.re} +$$
$$+ P^{\ l1..li\lambda}_{\lambda m1..mj\lambda d1..de}(A^{u}_{t};B^{t}_{u};B^{t}_{u1u2};..;B^{t}_{u1..u\lambda n+e});..) \qquad (2.17)$$

donde los puntos suspensivos delante y detrás del término del paréntesis en el miembro derecho denotan la presencia implícita de los $\omega + \Sigma^{\omega}_{\lambda=1}h_{\lambda}$ objetos de la familia $\mathfrak{F}$ $\{E_{\lambda},_{e\lambda}\}_{\lambda=1,\omega;e\lambda=0,d\lambda}$ transformados todos ellos según (2.16).

IDENTIDADES DE INVARIANCIA DE UN CONCOMITANTE.

Este concepto lo introduce Rund [2.3]

Se considera ahora en (2.17) para p∈M, fijo, todos los posibles cambios de sistemas coordenados, por lo que interesa la dependencia respecto de los objetos $B^{t}_{u};B^{t}_{u1u2}..;B^{t}_{u1...u\lambda n+e}$. Es decir se interpreta a (2.17) como una ecuación entre aplicaciones definidas sobre el producto cartesiano de los conjuntos que tienen a $B^{t}_{u};B^{t}_{u1u2};..;B^{t}_{u1..u\lambda n+e}$ como elementos característicos y que toman valores sobre otros productos cartesianos de dichos conjuntos. Ya se vio que $B^{a}_{b}(p)\in GL(n,\mathbb{R})$. Denominamos:

$$H_1 = GL(n,\mathbb{R})$$

$$H_2 = \{B^t_{u1u2}(p)/B^t_{u1u2}(p) = \partial^2 x^t/\partial x'^{u1}\partial x'^{u2}(p)\}$$

$$H_n = \{B^t_{u1..un}(p)/B^t_{u1..un}(p) = \partial^n x^t/\partial x'^{u1}..\partial x'^{un}(p)\} \qquad (2.18)$$

Obsérvese que como la transformación idéntica, inducida por la elección de cartas idénticas $(x',U') = (x,U)$, es una posibilidad, entonces obviamente vale que:

$$Id_{\mathbb{R}^n} \in GL(n,\mathbb{R})$$

$$0 \in H_i,\ 2\le i\le n \qquad (2.19)$$

Abusando de la notación se tiene que:

$$O^{a1..ar}_{b1..bs}:(H_1\times H_2\times..\times H_n)\longrightarrow \mathbb{R}^{r+s+1}\times(H_1)^{r+s}\times(H_2)^{h2}\times..\times(H_n)^{hn}$$

$$O^{a1..ar}_{b1..bs}(B^t_u;..;B^t_{u1...un}) = B^p.A^{a1}_{t1}..A^{ar}_{tr}.B^{u1}_{b1}..B^{us}_{bs}.O^{t1..tr}_{u1..us} + \\ + P^{a1..ar}_{b1..bs}(B^t_u;B^t_{u1u2};..;B^t_{u1..un})$$

(2.20)

Analogamente se definen las aplicaciones de la familia $\mathscr{E}$:

$$E^{a1..ar\lambda}_{\lambda b1..bs\lambda,d1..de}:(H_1\times H_2\times..\times H_{n\lambda}\times..\times H_{n\lambda+e})\longrightarrow \\ \longrightarrow\mathbb{R}^{r\lambda+s\lambda+1}\times(H_1)^{r\lambda+s\lambda}\times(H_2)^{h\lambda 2}\times..\times(H_{n\lambda+e})^{h\lambda n\lambda+e}$$

$$E^{a1..ar\lambda}_{\lambda b1..bs\lambda,d1..de}(B^t_u;..;B^t_{u1...un\lambda+e}) = \\ = B^{p}\lambda.A^{a1}_{t1}..A^{ai\lambda}_{ti\lambda}.B^{u1}_{b1}..B^{uj\lambda}_{bj\lambda}.B^{r1}_{d1}..B^{re}_{de}.E^{t1..ti\lambda}_{\lambda u1..uj\lambda,r1..re} + \\ + P^{a1..ar\lambda}_{\lambda b1..bs\lambda d1..de}(B^t_u;B^t_{u1u2}..;B^t_{u1..u\lambda n+e}) \qquad (2.21)$$

El hecho ya señalado de que la transformación idéntica pertenece al conjunto de transformaciones admisibles, motiva la siguiente definición de la ι-ésima identidad de invariancia, a ser satisfecha por un concomitante tensorial:

Se calculan las derivadas de la ambos miembros de la definición de concomitante tensorial, respecto de los objetos del tipo $B^t_{u1..ul}$, y se evalúa en el punto $(\delta^a_b,0,...,0)\in(H_1\times H_2\times..\times H_v)$.

Así se obtienen ν identidades de invariancia a ser satisfechas por un concomitante dèl tipo (2.17), si ν es el máximo orden de los objetos de tipo $B^{l}_{u1..ul}$ que intervienen en (2.17). Es decir la l-ésima identidad de invariancia es de la forma:

$$[\partial/\partial B^{l}_{u1..ul} B^{p}.A^{a1}_{t1}..A^{ar}_{tr}.B^{u1}_{b1}..B^{us}_{bs}.O^{t1..tr}_{u1..us}+P^{a1..ar}_{b1..bs}](\delta^{a}_{b},0,..,0)$$
$$= [\partial O^{a1..ar}_{b1..bs}/\partial E_{\lambda m1..mj\lambda,d1..de}^{\ l1..li\lambda}.\partial E_{\lambda m1..mj\lambda,d1..de}^{\ l1..li\lambda}/\partial B^{l}_{u1..ul}](\delta^{a}_{b},..,0) \qquad (2.22)$$

donde la repetición de índices denota la suma desde 1 hasta n.

Sobre esta base se calcula la primer identidad de invariancia de concomitantes tensoriales como los reseñados en (2.17):

PRIMERA IDENTIDAD DE INVARIANCIA DE UN CONCOMITANTE TENSORIAL

Se deriva cada miembro de (2.17) respecto de B^{h}_{i}, y se especializa en $(\delta^{a}_{b},0,..,0)$, para lo cual se tiene en cuenta que:

$$(\partial/\partial B^{h}_{i})B^{p}(\delta^{a}_{b},0,..,0) = p.B^{p-1}.M^{i}_{h}(\delta^{a}_{b},0,..,0)$$
$$= p.B^{p}.A^{i}_{h}(\delta^{a}_{b},0,..,0)$$
$$= p.\delta^{i}_{h} \qquad (2.23)$$

$$(\partial/\partial B^{h}_{i})A^{ak}_{tk}(\delta^{a}_{b},0,..,0) = -A^{ak}_{h}.A^{i}_{tk}(\delta^{a}_{b},0,..,0)$$
$$= -\delta^{ak}_{h}.\delta^{i}_{tk} \qquad (2.24)$$

$$(\partial/\partial B^{h}_{i})B^{uk}_{bk}(\delta^{a}_{b},0,..,0) = \delta^{uk}_{h}.\delta^{i}_{bk}(\delta^{a}_{b},0,..,0)$$
$$= \delta^{uk}_{h}.\delta^{i}_{bk} \qquad (2.25)$$

$$(\partial/\partial B^{h}_{i})P^{a1..ar}_{b1..bs}(\delta^{a}_{b},0,..,0) = 0$$
$$(\partial/\partial B^{h}_{i})P_{\lambda m1..mj\lambda}^{\ l1..li\lambda}(\delta^{a}_{b},0,..,0) = 0 \qquad (2.26)$$

donde la nulidad de las relaciones (2.26) es debido a la propia definición de los objetos $P^{a1..ar}_{b1..bs}$, $P_{\lambda m1..mj\lambda}^{\ l1..li\lambda}$ especializados en e punto $(\delta^{a}_{b},0,..,0)$. Entonces se obtiene:

$$p.\delta^{i}_{h}.O^{a1..ar}_{b1..bs} - \Sigma^{r}_{k=1}\delta^{ak}_{h}.O^{a1..ak-1iak+1..ar}_{b1............bs} +$$
$$+ \Sigma^{s}_{l=1}\delta^{i}_{bl}.O^{a1............ar}_{b1..bl-1hbl+1..bs} =$$
$$= \Sigma^{\omega}_{\lambda=1}\Sigma^{d\lambda}_{e=0}\partial O^{a1..ar}_{b1..bs}/\partial E_{\lambda m1..mj\lambda,mj\lambda+1..mj\lambda+e}^{l1..li\lambda}(p_{\lambda}\delta^{i}_{h}E_{\lambda m1..,..mj\lambda+e}^{l1.li\lambda} -$$
$$- \Sigma^{i\lambda}_{k=1}\delta^{lk}_{h}.E_{\lambda m1...........mj\lambda,mj\lambda+1..mj\lambda+e}^{l1..lk-1ilk+1..li\lambda} +$$
$$+ \Sigma^{j\lambda+e}_{l=1}\delta^{i}_{ml}.E_{\lambda m1..ml-1hml+1.....mj\lambda+e}^{l1.............li\lambda})$$
$$(2.27)$$

Contrayendo en esta primera identidad de invariancia, h con i, se obtiene el siguiente Lema 2.1:

$$(p.n - r + s)O^{a1..ar}_{b1..bs} = \Sigma^{\omega}_{\lambda=1}\Sigma^{d\lambda}_{e=0}(p_{\lambda}n - i\lambda + j\lambda + e).$$
$$.[(\partial O^{a1..ar}_{b1..bs}/\partial E_{\lambda m1..,..mj\lambda+e}^{l1.li\lambda}).E_{\lambda m1..,..mj\lambda+e}^{l1.li\lambda}] \qquad (2.28)$$

2.2 ELEMENTOS DE LA TEORIA DE CONEXIONES EN UN FIBRADO PRINCIPAL

La presente estructura puede consultarse en Kobayashi-Nomizu [2.4] y en Horndeski [2.5].

Si G es un grupo de Lie de dimensión r, a es un elemento de G y LG es el álgebra de Lie de G, se define la *representación adjunta*

$$Ad(a):LG \longrightarrow G$$

$$Ad(a) = (L_{a}\circ R_{a^{-1}})_{*e} \qquad (2.29)$$

donde L_a y R_a son las translaciones a izquierda y a derecha respectivamente y e es el elemento neutro del grupo. Se tiene además, asociado a Ad(a) se tiene el endomorfismo de LG^*:

$$\tilde{A}d(a):LG^{*} \longrightarrow LG^{*}$$

$$\tilde{A}d(a)(\eta)(X_{e}) = \eta(Ad(a^{-1})(X_{e})) \qquad (2.30)$$

para η 1-forma de LG^* y X campo vectorial sobre G.

Si U es un entorno de cero en LG, tal que $\exp:U \longrightarrow V$ es difeomorfismo, tomando $z = \phi\circ\exp^{-1}:V \longrightarrow \mathbb{R}^{r}$ (ϕ es la identificación de LG con $\mathbb{R}^{r}$), (z,V) resulta ser carta local de G en torno de e.

Asociadas a la base $\{e_1,\dots,e_r\}$ de LG se tienen las *constantes de estructura del grupo*: $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ $(1 \le \alpha,\beta,\gamma \le r)$, que se vinculan con la representación adjunta de la siguiente manera:

Si $Ad(a)(e_\beta) = Ad^{\alpha}_{\beta}(a)e_\alpha$, entonces:

$$(\partial Ad^{\alpha}_{\beta}/\partial z^{\gamma})\Big|_{e} = C^{\alpha}_{\beta\gamma} \tag{2.31}$$

Si $\{\gamma^1,\dots,\gamma^r\}$ es la base dual de $\{e_1,\dots,e_r\}$, queda determinada $\tilde{\gamma}^{\alpha}$, la 1-forma invariante a izquierda generada por γ^{α}:

En un entorno de e en G, se tiene que:

$$\tilde{\gamma}^{\alpha} = \ell^{\alpha}_{\beta}dz^{\beta} \qquad (1\le\alpha,\beta\le r) \tag{2.32}$$

donde $\ell^{\alpha}_{\beta} = (\partial(z^{\alpha}\circ L_{a^{-1}})/\partial z^{\beta})_{a}$ y se verifican:

$$1.-\ \partial\ell^{\alpha}_{\beta}/\partial z^{\gamma} - \partial\ell^{\alpha}_{\gamma}/\partial z^{\beta} = C^{\alpha}_{\delta\varepsilon}\ell^{\delta}_{\beta}\ell^{\varepsilon}_{\gamma} \tag{2.33}$$

2.- Si $I:G\longrightarrow G$ está dada por $I(a) = a^{-1}$, entonces:

$$\partial(Ad^{\alpha}_{\beta}\circ I)/\partial z^{\gamma}\Big|_{a} = C^{\alpha}_{\delta\varepsilon}\ell^{\varepsilon}_{\gamma}Ad^{\delta}_{\beta}(a^{-1}) \tag{2.34}$$

Si se considera a LG como el conjunto de campos invariantes a izquierda definidos en G, a partir de $X\in LG$ queda definida la *1-forma natural θ a valores en G_e* mediante la relación:

$$\theta(X)(a) = X(e) \text{ para cada } a\in G. \tag{2.35}$$

Sean ahora P y M variedades diferenciales de dimensión m y n respectivamente, y sea G un grupo de Lie de dimensión r.

P(M,G) denota el *fibrado principal sobre* m *con espacio total* P, *grupo estructural* G *y proyección* $\pi:P\longrightarrow M$

El grupo G actúa sobre el espacio total P, del cual M es su proyección $\Pi(P)$.

A cada sección local σ tal que $M\supset U\xrightarrow{\sigma}P$ $(\pi\circ\sigma = id_U)$, de dicho fibrado, se le asigna la 1-forma ω_σ, llamada *forma de conexión, definida sobre* U *y a valores en* LG que verifica la siguiente condición:

Si σ' es otra sección local, $M\supset U' \xrightarrow{\sigma'} P$, tal que $U\cap U' \neq \emptyset$, allí vale:

$$\omega_{\sigma'}(p)(X_p) = Ad(\psi(p))^{-1})(\omega_{\sigma}(p)(X_p)) + \theta_{UU'}(p)(X_p) \qquad (2.36)$$

donde $\psi\colon U\cap U' \longrightarrow G$, está dada por $\sigma'(p) = \sigma(p)\cdot\psi(p)$,

$\cdot$ es la acción de G sobre P, $\theta_{UU'} = \psi^{*}\theta$ y θ es la 1-forma natural.

Si $M\supset U \xrightarrow{\sigma} P$ es una sección local del fibrado, el par (U,σ) se denomina *gauge* o *elección de gauge*. Un *campo de gauge* es una forma de conexión.

Si (x,V) es una carta local en M y $\{e_1,\dots,e_r\}$ es una base de LG, las funciones $A^{\alpha}_{i}\colon U\cap V \longrightarrow \mathbb{R}$ $(1\leq i\leq n,\ 1\leq\alpha\leq r)$ definidas por:

$$\omega_{\sigma} = (A^{\alpha}_{i}dx^{i})e_{\alpha} \qquad (2.37)$$

son los *potenciales de gauge respecto de* (U,σ), (x,V) y $\{e_1,\dots,e_r\}$

Dados dos gauges (U,σ) y (U',σ') tales que existe $p\in U\cap U'$ con $\sigma(p) = \sigma'(p)$, entonces:

$$A'^{\alpha}_{i} = (Ad^{\alpha}_{\beta}\circ\psi^{-1})A^{\beta}_{i} + (\ell^{\alpha}_{\beta}\circ\psi)\,\partial\psi^{\beta}/\partial x^{i} \qquad (2.38)$$

en $U\cap U'$ y donde $\psi^{-1} = I\circ\psi$, de modo que $\psi^{-1}(p) = (\psi(p))^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{Si}\ \mathbb{V} &= T^{\alpha}_{\beta}(LG) \\ &= \{T\colon LG^{*}\times\overset{\alpha}{\cdots}\times LG^{*}\times LG\times\overset{\beta}{\cdots}\times LG \longrightarrow \mathbb{R}\} \end{aligned} \qquad (2.39)$$

espacio de las aplicaciones $\mathbb{R}$-multilineales, se define:

$$\rho\colon G \longrightarrow GL(\mathbb{V})$$

$$\rho(a) = \tilde{A}d(a^{-1})\otimes\overset{\alpha}{\cdots}\otimes\tilde{A}d(a^{-1})\otimes Ad(a)\otimes\overset{\beta}{\cdots}\otimes Ad(a) \qquad (2.40)$$

o sea:

$$\begin{aligned} &\rho(a)(T)(\omega^{1},\dots,\omega^{\alpha},X_{1},\dots,X_{\beta}) = \\ &= T(\tilde{A}d(a^{-1})(\omega^{1}),\dots,\tilde{A}d(a^{-1})(\omega^{\alpha}),Ad(a)(X_{1}),\dots,Ad(a)(X_{\beta})) \end{aligned}$$

si $\omega^{i}\in LG^{*}$ $(1\leq i\leq\alpha)$, $X_{j}\in LG$ $(1\leq j\leq\beta)$ (2.41)

Un *campo tensorial de gauge de tipo* $(\mathbb{V};r;s;p)$ es la asignación que a cada gauge (U,σ) le hace corresponder un campo tensorial relativo T_{σ} de tipo (r,s) y de peso p, definido en U y a valores en $\mathbb{V}$. Vale decir que si T es un tal campo, para cada gauge (U,σ), cada carta local (x,V) en M tal que $U\cap V\neq\emptyset$ y cada base $\{e_1,\dots,e_r\}$ de LG se tienen las funciones:

$$T^{i1\dots ir}_{j1\dots js}: U\cap V \longrightarrow \mathbb{V}$$

$$T^{i1\dots ir}_{j1\dots js} = T^{i1\dots ir\mu1\dots\mu\alpha}_{j1\dots js\nu1\dots\nu\beta} e_{\mu1}\otimes\dots\otimes e_{\mu\alpha}\otimes\gamma^1\otimes\dots\otimes\gamma^\beta \tag{2.42}$$

que resultan ser densidades tensoriales de tipo (r,s) y peso p.

Un *campo tensorial de gauge de tipo* $(\rho;r;s;p)$ es un campo tensorial de gauge de tipo $(\mathbb{V};r;s;p)$ tal que si (U,σ) y (U',σ') son dos gauges con $U\cap U'\neq\emptyset$ se tiene:

$$T_{\sigma'} = \rho\circ\psi^{-1}(T_\sigma) \tag{2.43}$$

Vale decir que si T es un campo tensorial de gauge de tipo $(\rho;r;s;p)$ se tiene que:

$$T'^{\,i1\dots ir\mu1\dots\mu\alpha}_{\,j1\dots js\nu1\dots\nu\beta} = $$
$$= (Ad^{\mu1}_{\varepsilon1}\circ\psi^{-1})\dots(Ad^{\mu\alpha}_{\varepsilon\alpha}\circ\psi^{-1})(Ad^{\delta1}_{\nu1}\circ\psi)\dots(Ad^{\delta\beta}_{\nu\beta}\circ\psi)T^{i1\dots ir\varepsilon1\dots\varepsilon\alpha}_{j1\dots js\delta1\dots\delta\beta} \tag{2.44}$$

donde se tuvo en cuenta que $\tilde{A}d(a)\gamma^\omega = Ad(a^{-1})^\omega_\sigma\gamma^\sigma$.

Dado el gauge(U,σ) se define la *forma de curvatura* F_σ como la 2-forma a valores en LG cuyo *pull-back* σ^*F para toda sección σ, localmente se expresa como:

$$F_\sigma = (F^\alpha_{ij}dx^i\otimes dx^j)e_\alpha \tag{2.45}$$

donde (x,V) es una carta local en M tal que $U\cap V \neq \emptyset$ y las funciones $F^\alpha_{ij}: U\cap V\longrightarrow\mathbb{R}$ están definidas por:

$$F^\alpha_{ij} = -A^\alpha_{i,j} + A^\alpha_{j,i} + C^\alpha_{\beta\gamma}A^\beta_i A^\gamma_j \tag{2.46}$$

$(1\leq i,j\leq n,\ 1\leq\alpha,\beta,\gamma\leq r.\ A^\alpha_{i,j}$ denota la derivada $\partial A^\alpha_i/\partial x^j)$

La forma de curvatura resulta ser un campo tensorial de gauge de tipo $(Ad;0,2,0)$.

Si sobre M se tiene una métrica lorentziana de componentes g_{ij}, la *derivada covariante de gauge* de F^{α}_{ij} es:

$$
\begin{aligned}
F^{\alpha}_{ij\|h} &= F^{\alpha}_{ij|h} + F^{\gamma}_{ij} C^{\alpha}_{\beta\gamma} A^{\beta}_{h} \\
&= F^{\alpha}_{ij,h} - F^{\alpha}_{kj} \Gamma^{k}_{ih} - F^{\alpha}_{ik} \Gamma^{k}_{jh} + F^{\gamma}_{ij} C^{\alpha}_{\beta\gamma} A^{\beta}_{h} \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

donde la barra vertical indica la derivada covariante usual y Γ^{k}_{ih} denotan las componentes de la conexión de Levi-Civita. $F^{\alpha}_{ij\|h}$ son las componentes de un tensor de gauge de tipo (Ad;0,3,0).

CAPITULO 3

UNICIDAD DEL TENSOR DE MOMENTO ENERGIA

BAJO CONDICIONES MINIMAS Y NATURALES

En la teoría de la relatividad general, la interacción entre el campo gravitatorio (caracterizado por el tensor métrico g) y el campo electromagnético en ausencia de fuentes (caracterizado por el bivector F) se representa mediante las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell:

$$R^{bc} - 1/2g^{bc}.R = T^{bc} \qquad (3.1)$$

$$F^{bc}{}_{|c} = 0 \qquad (3.2)$$

$$F_{bc|d} + F_{cd|b} + F_{db|c} = 0 \qquad (3.3)$$

donde, dada la carta local (x,U) en torno del punto p, g_{bc} y F_{bc} caracterizan las componentes de g y F, R^{bc} son las componentes del tensor de Ricci, R es la curvatura escalar, y la barra vertical denota derivación covariante. T^{bc} son las componentes del tensor de momento-energía:

$$T^{bc} = T^{bc}(\ g_{uv};\ F_{uv})$$

$$-1/2(F^{bd}.F^{c}{}_{d} - 1/4g^{bc}.F^{mn}.F_{mn}) \qquad (3.4)$$

La condición (3.3) es equivalente a:

$${}^{*}F^{uv}{}_{|v} \qquad 0,\ \text{donde} \qquad (3.5)$$

${}^{*}F^{uv} = (1/2\sqrt{g}).\varepsilon^{uvwx}.F_{wx}$, para g valor absoluto del determinante de (g_{bc}), ε^{uvwx} son las componentes del tensor absolutamente antisimétrico de Levi-Civita.

Dado que el tensor de Einstein:

$$G^{bc} = R^{bc} - 1/2.g^{bc}.R \tag{3.6}$$

tiene divergencia covariante nula, lo mismo debe ocurrir con T^{bc}.

En efecto, se tiene:

$$\begin{aligned}
T^{bc}|_c &= -1/2(F^{bd}.F^c{}_d - 1/4g^{bc}.F^{mn}.F_{mn})|_c \\
&= -1/2.(F^{bd}.F^c{}_d)|_c + 1/8.g^{bc}.(F^{mn}.F_{mn})|_c \\
&= -1/2.(F^{bd}{}_{,c}.F^c{}_d + F^{bd}.F^c{}_{d,c} + F^{ed}.F^c{}_d.\Gamma^b_{ec} + F^{bd}.F^e{}_d.\Gamma^c_{ec}) \\
&\quad +1/8.g^{bc}.(F^{mn}|_c.F_{mn} + F^{mn}.F_{mn}|_c) \\
&= -1/2.F^b{}_n.F^{mn}|_m - 1/2.g^{bc}F_{cn}|_m.F^{mn} + 1/4.g^{bc}.F^{mn}.F_{mn}|_c \\
&= 1/2.F^b{}_m.F^{mn}|_n - 1/4.g^{bc}F^{mn}.(2.F_{cn}|_m + F_{nc}|_m + F_{cm}|_n) \\
&= 1/2.F^b{}_m.F^{mn}|_n
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Luego se anula la divergencia covariante de T^{bc} toda vez que lo propio ocurre con la de F^{bc}. Se plantea entonces como hipótesis la implicación:

$$F^{bc}{}_{|c} = 0 \Rightarrow T^{bc}{}_{|c} = 0 \tag{3.8}$$

En este trabajo se prueba que la forma usual (3.4) del tensor de momento-energía es esencialmente la única solución de:

$$T^{bc} = T^{bc}(g_{uv};F_{uv}) \tag{3.9}$$

para la cual vale (3.8), quedando así establecida la unicidad de T^{bc} bajo condiciones mínimas.

Este teorema fue probado por Kerrighan [3.1]. La demostración que sigue simplifica en gran medida la de Kerrighan y además, puede ser generalizada al caso del tensor momento-energía correspondiente a las ecuaciones de Einstein-Yang-Mills (Noriega-Schifini, [3.2])

Por ser T^{bc} un concomitante de g_{uv} y de F_{uv}, entonces de acuerdo con Kerrighan [3.3] y con Noriega-Schifini [3.4], debe ser de la forma:

$$T^{bc} = f(\phi;\psi)g^{bc} + h(\phi;\psi)F^{b}{}_{d}F^{cd} \tag{3.10}$$

donde $\phi = F^{uv}F_{uv}$, y $\psi = {}^{*}F^{uv}F_{uv}$ (3.11)

Calculando la derivada covariante de (3.10):

$$T^{bc}{}_{|c} = 2(f_{\phi}F^{uv} + f_{\psi}{}^{*}F^{uv})F_{uv|c}g^{bc} + 2(h_{\phi}F^{uv} + h_{\psi}{}^{*}F^{uv})F_{uv|c}F^{b}{}_{d}F^{cd} +$$
$$+ 1/2hg^{bd}F_{ce|d}F^{ce} + hF^{b}{}_{d}F^{cd}{}_{|c} \tag{3.12}$$

donde $F_{uv|a}F^{uv} \quad - (F_{va|u} + F_{au|v}).F^{uv}$

$$= -2.F_{av|u}.F^{uv} \tag{3.13}$$

debido a (3.3) y donde los subíndices ϕ, ψ denotan derivación parcial respecto de ϕ , ψ. Sea ahora $F_{uv,c}$ tal que $F^{bc}{}_{|c}$ 0. Entonces en (3.12), aplicando la hipótesis (3.8), resulta:

$$0 = [2(f_{\phi}F^{uv} + f_{\psi}{}^{*}F^{uv})g^{bc} + 2(h_{\phi}F^{uv} + h_{\psi}{}^{*}F^{uv})F^{b}{}_{d}F^{cd} +$$
$$+ 1/2hg^{bc}F^{uv}]F_{uv|c} \tag{3.14}$$

Para un punto p∈M, Hlavaty muestra [3.5] que existe un sistema coordenado tal que:

$$(g_{bc}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (F_{bc}) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

y así: (3.15)

$$({}^{*}F^{bc}) = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad (F^{bc}) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha,\ \beta \in R$ (3.16)

y también, como $F^{b}{}_{d} = F^{be}g_{ed}$

$$(F^{b}{}_{d}) \quad \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

En este sistema coordenado las ecuaciones (3.14), para $c = 1$ y para $c = 3$, son:

$$\begin{aligned} 0 = {} & [-(-\alpha f_{\phi}+\beta f_{\psi})+(-\alpha h_{\phi}+\beta h_{\psi})\alpha^{2}+1/4\alpha h]F_{12|1}+ \\ & + [-(\beta f_{\phi}+\alpha f_{\psi})+(\beta h_{\phi}+\alpha h_{\psi})\alpha^{2}-1/4\beta h]F_{34|1} \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & [(-\alpha f_{\phi}+\beta f_{\psi})+(-\alpha h_{\phi}+\beta h_{\psi})\beta^{2}-1/4\alpha h]F_{12|3}+ \\ & + [(\beta f_{\phi}+\alpha f_{\psi})+(\beta h_{\phi}+\alpha h_{\psi})\beta^{2}+1/4\beta h]F_{34|3} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Dada la independencia entre $F_{12|1}$ y $F_{34|1}$, y entre $F_{12|3}$ y $F_{34|3}$, los corchetes en (3.18) y (3.19) deben ser nulos:

$$0 = [-(-\alpha f_{\phi}+\beta f_{\psi})+(-\alpha h_{\phi}+\beta h_{\psi})\alpha^{2}+1/4\alpha h] \tag{3.20}$$

$$0 = [-(\beta f_{\phi}+\alpha f_{\psi})+(\beta h_{\phi}+\alpha h_{\psi})\alpha^{2}-1/4\beta h] \tag{3.21}$$

$$0 = [(-\alpha f_{\phi}+\beta f_{\psi})+(-\alpha h_{\phi}+\beta h_{\psi})\beta^{2}-1/4\alpha h] \tag{3.22}$$

$$0 = [(\beta f_{\phi}+\alpha f_{\psi})+(\beta h_{\phi}+\alpha h_{\psi})\beta^{2}+1/4\beta h] \tag{3.23}$$

quedando el sistema:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta & -\alpha^3 & \beta\alpha^2 \\ -\beta & -\alpha & \beta\alpha^2 & \alpha^3 \\ -\alpha & \beta & -\alpha\beta^2 & \beta^3 \\ \beta & \alpha & \beta^3 & \alpha\beta^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} f_\phi \\ f_\psi \\ h_\phi \\ h_\psi \end{bmatrix} = 1/4h. \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \\ -\alpha \\ \beta \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

que se reduce -debido a que en un denso abierto de M, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$- a:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta & -\alpha^3 & \beta\alpha^2 \\ -\beta & -\alpha & \beta\alpha^2 & \alpha^3 \\ 0 & 0 & -\alpha\beta^2 & \beta^3 \\ 0 & 0 & \beta^3 & \alpha\beta^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} f_\phi \\ f_\psi \\ h_\phi \\ h_\psi \end{bmatrix} = 1/4h. \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \\ -\alpha \\ \beta \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

y por lo tanto:

$$h_\phi = 0 \tag{3.26}$$

$$h_\psi = 0 \tag{3.27}$$

Resulta así h constante, y (3.25) se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} f_\phi \\ f_\psi \end{bmatrix} = 1/4h. \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

de donde:

$$f_\phi = -1/4h$$

$$f_\psi = 0$$

y f resulta ser:

$$f = -1/4h.\phi + k \tag{3.29}$$

donde k es una constante de integración. Por lo tanto (3.10) toma la forma:

$$T^{bc} = h[F^b{}_d F^{cd} - 1/4F^{uv}F_{uv}g^{bc}] + kg^{bc} \tag{3.30}$$

que es esencialmente el tensor de momento-energía usual para la teoría de Einstein-Maxwell, tomando $h = -1/2$ y $k = 0$. Se tiene el

TEOREMA 3.1

Sea $T^{bc} = T^{bc}(g_{uv};F_{uv})$ un tensor simétrico concomitante del tensor métrico **g** y del tensor de campo electromagnético **F**, tal que verifica (3.8). Entonces $T^{bc}= h(F^{bd}F^{c}{}_{d} -1/4g^{bc}F^{mn}F_{mn})+kg^{bc}$

CAPITULO 4

TRATAMIENTO POR CONEXIONES SIMETRICAS DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN-YANG-MILLS : EL PROBLEMA EQUIVARIANTE INVERSO

En el cálculo de variaciones, el operador de Euler-Lagrange $E(L)$ constituye el operador diferencial derivado de la primera variación de la integral de la acción. Las soluciones de la ecuación diferencial $E(L) = 0$ son entonces los puntos críticos de dicha integral. Reciprocamente, dado un operador diferencial D, es natural preguntarse si D puede identificarse como el operador de Euler-Lagrange de cierto lagrangiano L. Este es el problema inverso del cálculo de variaciones. Si el lagrangiano es invariante por la acción de un grupo de Lie G, es sabido que las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange son también invariantes por G. Entonces puede formularse el siguiente *problema equivariante inverso* del cálculo de variaciones. Si D es un operador diferencial tal que es:

(1) invariante por la acción de un grupo de Lie G.

(2) operador de Euler-Lagrange de cierto lagrangiano.

entonces, cuándo es D el operador de Euler-Lagrange de un lagrangiano L invariante por G?

En este trabajo se estudia el problema equivariante inverso mediante un enfoque por conexiones simétricas, para un lagrangiano

$$L = L(g_{bc};\ \Gamma^{a}_{bc};\ \Gamma^{a}_{bc,d};\ F^{\alpha}_{bc}) \qquad (4.01)$$

dependiente de las componentes del tensor métrico, de las de una conexión simétrica arbitraria y de las de su derivada y de las de la 2-forma de curvatura.

Se prueba que para tal lagrangiano, el caracter de densidad tensorial invariante de gauge de sus operadores de Euler-Lagrange,

$$E^{bc}(L) = \partial L/\partial g_{bc} = L^{;bc} \qquad (4.02)$$

$$\begin{aligned} E^{bc}_{a}(L) &= \partial L/\partial \Gamma^{a}_{bc} - \partial/\partial x^{d}(\partial L/\partial \Gamma^{a}_{bc,d}) \\ &= L^{;bc}_{a} - L^{;bc,d;uv}_{a}.g_{uv,d} - L^{;bc,d;uv}_{a\ t}.\Gamma^{t}_{uv,d} - \\ &\quad -L^{;bc,d;uv,v}_{a\ t}.\Gamma^{t}_{uv,vd} - L^{;bc,d;u}_{a\ \tau}.A^{\tau}_{u,d} - L^{;bc,d;u,v}_{a\ \tau}.A^{\tau}_{u,vd} \end{aligned} \qquad (4.03)$$

$$\begin{aligned} E^{b}_{\alpha}(L) &= \partial L/\partial A^{\alpha}_{b} - \partial/\partial x^{c}(\partial L/\partial A^{\alpha}_{b,c}) \\ &= L^{;b}_{\alpha} - L^{;b,c;uv}_{\alpha}.g_{uv,c} - L^{;b,c;uv}_{\alpha\ t}.\Gamma^{t}_{uv,c} - \\ &\quad - L^{;b,c;uv,v}_{\alpha\ t}.\Gamma^{t}_{uv,vc} - L^{;b,c;u}_{\alpha\ \tau}.A^{\tau}_{u,c} - L^{;b,c;u,v}_{\alpha\ \tau}.A^{\tau}_{u,vc} \end{aligned} \qquad (4.04)$$

unida a la degeneración del operador correspondiente a la conexión

$$\begin{aligned} E^{bc}_{a}(L) &= E^{bc}_{a}(L)(g_{uv};\ g_{uv,v};\ \Gamma^{t}_{uv}) \\ &= L^{;bc}_{a} - L^{;bc,d;uv}_{a}.g_{uv,d} - L^{;bc,d;uv}_{a\ t}.\Gamma^{t}_{uv,d} \end{aligned} \qquad (4.05)$$

determina la existencia de una densidad escalar lagrangiana invariante de gauge $\tilde{L}$ tal que satisface:

$$E^{bc}(L) = E^{bc}(\tilde{L}) \qquad (4.06)$$

$$E^{bc}_{a}(L) = E^{bc}_{a}(\tilde{L}) \qquad (4.07)$$

$$E^{b}_{\alpha}(L) = E^{b}_{\alpha}(\tilde{L}) \qquad (4.08)$$

Esto generaliza el trabajo de M^{c}Kellar [4.1] en el cual se estudia un enfoque por conexiones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell. Mas precisamente, el próximo capítulo se reduce, para el caso G = U(1), al resultado de M^{c}Kellar, aunque con una demostración sensiblemente mas sencilla.

La interacción entre un campo gravitatorio, representado por un tensor métrico lorentziano g, y un campo de gauge libre de fuentes, representado por una 2-forma de curvatura F sobre un fibrado principal de grupo estructural G, está gobernada por las ecuaciones de campo de Einstein-Yang-Mills:

$$R^{bc} - 1/2.g^{bc}.R = B_{\beta\chi}(F^{\beta be}.F^{\chi c}{}_{e} - 1/4.g^{bc}.F^{\beta de}.F^{\chi}{}_{de}) \qquad (4.09)$$

$$B_{\beta\chi}F^{\beta bc}\|_{c} = 0 \qquad (4.10)$$

donde $B_{\beta\chi}$ son los coeficientes de una forma bilineal simétrica Ad-G invariante sobre $\mathfrak{G}$, el álgebra de Lie del grupo de Lie G, y donde:

$$F^{\alpha}_{bc}\|_{d} = F^{\alpha}_{bc,d} - \{^{e}_{bd}\}.F^{\alpha}_{ec} - \{^{e}_{cd}\}F^{\alpha}_{be} + C^{\alpha}_{\chi\delta}.A^{\chi}_{d}.F^{\delta}_{bc} \qquad (4.11)$$

En esta última expresión, F^{λ}_{mn} caracterizan a los coeficientes de la forma de curvatura,

$$F^{\lambda}_{mn} = - A^{\lambda}_{m,n} + A^{\lambda}_{n,m} + C^{\lambda}_{\mu\nu}.A^{\mu}_{m}.A^{\nu}_{n} \qquad (4.12)$$

, construida a expensas de las componentes del potencial de gauge A^{α}_{b}, de su derivada $A^{\alpha}_{b,c}$, y de las constantes de estructura $C^{\beta}_{\chi\delta}$ del grupo de Lie G, correspondientes a una dada base del álgebra de Lie LG. Además, $\{^{a}_{bc}\}$ denotan las componentes de la conexión de Levi-Civita, construidas a expensas de las de la métrica g_{bc} y de su derivada primera $g_{bc,d}$.

También puede agregarse la siguiente ecuación, identicamente satisfecha por las derivadas covariantes de F^{α}_{bc}:

$$F^{\alpha}_{bc}\|_{d} + F^{\alpha}_{db}\|_{c} + F^{\alpha}_{cd}\|_{b} = 0 \qquad (4.13)$$

Las ecuaciones (4.09) y (4.10) pueden obtenerse a través de un principio variacional, (ver Horndeski [4.2], Yang [4.3]) de la siguiente forma. Si:

$$L = L(g_{bc}; g_{bc,d}; g_{bc,de}; F^{\alpha}_{bc}) \qquad (4.14)$$

es una densidad escalar, las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas son:

$$E^{bc}(L) = L^{;bc} - (L^{;bc,d})_{,d} + (L^{;bc,de})_{,de}$$

$$= 0 \qquad (4.15)$$

$$E^{b}_{\alpha}(L) = L^{;b}_{\alpha} - (L^{;b,c}_{\alpha})_{,c}$$

$$= 0 \qquad (4.16)$$

Si se elige a L, en particular, como:

$$L = \sqrt{g}.[R + 1/2.B_{\beta\chi}.F^{\beta bc}.F^{\chi}_{\ bc}] \qquad (4.17)$$

entonces (4.15) y (4.16) coinciden con (4.09) y (4.10).

Un enfoque alternativo a éste es considerar un principio variacional que emplee una conexión simétrica arbitraria, de componentes Γ^{a}_{bc}, en vez de los símbolos de Christoffel $\{^{a}_{bc}\}$. Se propone como en (4.01)

$$L = L(g_{bc}; \Gamma^{a}_{bc}; \Gamma^{a}_{bc,d}; F^{\alpha}_{bc})$$

cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas son, de acuerdo a (4.02) a (4.04)

$$E^{bc}(L) = L^{;bc}$$

$$= 0 \qquad (4.18)$$

$$E^{bc}_{a}(L) = L^{;bc}_{a} - (L^{;bc,d}_{a})_{,d}$$

$$= 0 \qquad (4.19)$$

$$E^{b}_{\alpha}(L) = L^{;b}_{\alpha} - (L^{;b,c}_{\alpha})_{,c}$$

$$= 0 \qquad (4.20)$$

Una elección natural para L es reemplazar en (4.17) a $\{^{a}_{bc}\}$ por Γ^{a}_{bc}:

$$L = \sqrt{g}.[K + 1/2.B_{\beta\chi}.F^{\beta bc}.F^{\chi}_{\ bc}] \qquad (4.21)$$

donde $K = g^{bc}.K_{bc}$, $K_{bc} = g^{bc}.K^{a}_{bca}$ y donde

$$K^{a}_{bcd} = -\Gamma^{a}_{bc,d} + \Gamma^{a}_{bd,c} - \Gamma^{a}_{ed}.\Gamma^{e}_{bc} + \Gamma^{a}_{ec}.\Gamma^{e}_{bd} \qquad (4.22)$$

Cuando L está dada por (4.17), las ecuaciones de campo (4.18) a (4.20) son:

$$K^{bc} + K^{cb} - 1/2g^{bc}K = 2B_{\beta\chi}(F^{\beta be}F^{\chi c}{}_{e} - 1/4g^{bc}F^{\beta de}F^{\chi}{}_{de}) \qquad (4.23)$$

$$(\sqrt{g}.g^{bc})|_{c} = 0 \qquad (4.24)$$

$$B_{\beta\chi}F^{\beta bc}\|_{c} = 0 \qquad (4.25)$$

donde la barra vertical denota derivación covariante definida respecto de Γ^{a}_{bc} en vez de $\{^{a}_{bc}\}$. Lovelock ha demostrado [4.4] que (4.24) implica, para n > 2 (n, dimensión de la variedad subyacente), que:

$$\Gamma^{a}_{bc} = \{^{a}_{bc}\}$$

con lo que (4.23) y (4.25) coinciden con las ecuaciones de campo de Einstein-Yang-Mills (4.09) y (4.10).

Las ecuaciones (4.23) a (4.25) son invariantes de gauge, es decir, no cambian por la elección de otro gauge, debido a las leyes de transformación:

$$F'^{\alpha}{}_{bc} = (Ad^{\alpha}_{\beta}\circ\psi^{-1})F^{\beta}{}_{bc} \qquad (4.26)$$

$$F'^{\alpha bc}{}_{|c} = (Ad^{\alpha}_{\beta}\circ\psi^{-1})F^{\beta bc}{}_{|c} \qquad (4.27)$$

por un cambio de gauge ψ. Es decir, mientras que la invariancia de gauge de las ecuaciones de campo es forzosa, no lo es para el lagrangiano, debido a que usualmente carece de significación física. En este capítulo se estudia cómo la invariancia de gauge y el caracter tensorial de (4.23) a (4.25), unido a la degeneración antes apuntada de $E^{bc}_{a}(L)$, afectan a la posible invariancia de gauge del lagrangiano L. Particularmente se prueba que bajo esas hipótesis, existe una densidad escalar lagrangiana $\tilde{L}$ tal que satisface las igualdades (4.06) a (4.08):

$$E^{bc}(L) = E^{bc}(\tilde{L})$$

$$E_{a}^{bc}(L) = E_{a}^{bc}(\tilde{L})$$

$$E_{\alpha}^{b}(L) = E_{\alpha}^{b}(\tilde{L})$$

Esto restringe severamente las posibles ecuaciones de campo, que resultan ser las de Einstein-Yang-Mills.

Como $L^{;bc} = L^{;bc}(g_{uv};\Gamma^{t}_{uv};\Gamma^{t}_{uv,v};F^{\tau}_{uv})$ es una densidad tensorial satisface tres identidades de invariancia, dos de las cuales son:

$$L^{;bc;xy,z}_{v} + L^{;bc;yz,x}_{v} + L^{;bc;zx,y}_{v} = 0 \quad (4.28)$$

$$L^{;bc;xy}_{v} - L^{;bc;xy,s}_{t}.\Gamma^{t}_{vs} - 1/2.[L^{;bc;st,x}_{v}\Gamma^{y}_{st} + L^{;bc;st,y}_{v}\Gamma^{x}_{st}] = 0$$

(ver Lemas 4.1 y 4.2 en el apéndice de este capítulo) (4.29)

Derivando la expresión (4.03) por $g_{uv,v}$, se obtiene:

$$E^{bc}_{a}(L)^{;uv,v} = - L^{;bc,v;uv}_{a} \quad (4.30)$$

Comparando los respectivos argumentos se deduce que:

$$L^{;bc,v;uv}_{a} = L^{;bc,v;uv}_{a}(\ g_{uv};\ \Gamma^{t}_{uv}) \quad (4.31)$$

Como $L^{;bc,v;uv}_{a}$ es una densidad tensorial, no depende de Γ^{t}_{uv}:

En efecto, por ser un concomitante de sus argumentos, resulta ser

$L^{;bc,v;uv;ij}_{a\qquad h} = 0$, luego

$$L^{;bc,v;uv}_{a} = L^{;bc,v;uv}_{a}(\ g_{mn}) \quad (4.32)$$

Integrando respecto de $\Gamma^{a}_{bc,d}$ se obtiene:

$$L^{;uv} = L^{;bc,d;uv}_{a}(\ g_{mn}).\Gamma^{a}_{bc,d} + \hat{P}^{uv}(\ g_{mn};\ \Gamma^{l}_{mn};\ A^{\lambda}_{m};\ A^{\lambda}_{m,n})$$

Debido al Teorema del Reemplazo de Horndeski [4.5], vale:

$$L^{;uv} = L^{;bc,d;uv}_{a}(\ g_{mn}).\Gamma^{a}_{bc,d} + P^{;uv}(\ g_{mn};\ \Gamma^{l}_{mn};\ F^{\lambda}_{mn}) \quad (4.33)$$

La segunda identidad de invariancia de $L^{;bc}$ (4.10), permite integrar $L^{;bc;xy}_{v}$ respecto de Γ^{v}_{xy}. Teniendo en cuenta (L2.3), puede verificarse que vale:

$$L^{;uv} = L^{;bc,d;uv}_{a}(\ g_{mn}).\Gamma^{a}_{ed}.\Gamma^{e}_{bc} + Q^{;uv}(g_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o};F^{\lambda}_{mn}) \quad (4.34)$$

De la comparación de (4.13) y (4.14) se deduce que existe una función $R^{;uv} = R^{;uv}(g_{mn};F^{\lambda}_{mn})$ tal que satisface:

$$L^{;bc,d;uv}_{a}(\ g_{mn}).\Gamma^{a}_{bc,d} - Q^{;uv}(g_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o};F^{\lambda}_{mn}) = - R^{;uv}(g_{mn};F^{\lambda}_{mn})$$

Entonces $L^{;uv}$ tiene la siguiente expresión:

$$L^{;uv} = L_a^{;bc,d;uv}(g_{mn}).(\Gamma^a_{bc,d} + \Gamma^a_{ed}.\Gamma^e_{bc}) + R^{;uv}(g_{mn};F^\lambda_{mn}) \qquad (4.35)$$

Al satisfacer $L^{;uv}$ la tercera identidad de invariancia vale:

$$L^{;uv} = (2/3.L_a^{;bc,d;uv} - 1/3.[L_a^{;cd,b;uv} + L_a^{;db,c;uv}]).(\Gamma^a_{bc,d} + \Gamma^a_{ed}.\Gamma^e_{bc}) +$$
$$+ R^{;uv}(g_{mn};F^\lambda_{mn})$$
$$= 2/3.L_a^{;bc,d;uv}(\Gamma^a_{bc,d} - \Gamma^a_{bd,c} + \Gamma^a_{ed}\Gamma^e_{bc} - \Gamma^a_{ec}\Gamma^e_{bd}) + R^{;uv}(g_{mn};F^\lambda_{mn})$$
$$= - 2/3.L_a^{;bc,d;uv}(g_{mn}).K_b{}^a{}_{cd} + R^{;uv}(g_{mn};F^\lambda_{mn}) \qquad (4.36)$$

donde $K_b{}^a{}_{cd} = - \Gamma^a_{bc,d} + \Gamma^a_{bd,c} - \Gamma^a_{ed}.\Gamma^e_{bc} + \Gamma^a_{ec}.\Gamma^e_{bd}$, es el tensor de curvatura construido a expensas de la conexión y de su derivada.

$R^{;uv}$ resulta ser una densidad tensorial e invariante de gauge, más aún, vale:

$$R^{;uv} = (L - 2/3.L_a^{;bc,d}.K_b{}^a{}_{cd})^{;uv} \qquad (4.37)$$

Por el teorema 1 del problema equivariante inverso de López *et al* [4.6], existen escalares R, R_1 y T tales que:

$$R = R_1(g_{mn};F^\lambda_{mn}) + (\ln g).l_{\alpha\beta}.\psi^{\alpha\beta} + T(F^\lambda_{mn}) \qquad (4.38)$$

donde R_1 es una densidad escalar y $l_{\alpha\beta}$ son constantes reales, g es el valor absoluto del determinante de las componentes del tensor métrico y $\psi^{\alpha\beta} = {}^*F^\alpha_{bc}.{}^*F^{\beta bc}$.

Además, dado que $L_a^{;bc,d;mn;uv}.g_{mn} = 0$, debido al teorema (2.1), entonces vale:

$$L_a^{;bc,d;uv} = [L_a^{;bc,d;mn}.g_{mn}]^{;uv} \qquad (4.39)$$

El corchete de la expresión anterior admite, debido a Noriega-Schifini [4.7], la forma:

$$L_a^{;bc,d;mn}.g_{mn} = \sqrt{g}.(\lambda_1\delta^b_a.g^{cd} + \lambda_2\delta^c_a.g^{db} + \lambda_3\delta^d_a.g^{bc} + \lambda_4\varepsilon^{bcde}.g_{ea}),$$

por lo tanto vale:

$$L_a^{;bc,d;mn}.g_{mn}.K^a_{bcd} = \sqrt{g}.(\lambda_2 K^a_{bad}.g^{db} + \lambda_3 K^a_{bca}.g^{bc} - \lambda_4\varepsilon^{ebcd}.K_{ebcd})$$
$$= \sqrt{g}.(\lambda_3 - \lambda_2).K^a_{bca}.g^{bc}$$
$$= \lambda\sqrt{g}.K \qquad (4.40)$$

donde $K = K^{a}_{bca} . g^{bc}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Volviendo a (4.17), con (4.19) y (4.20) se tiene:

$$R^{;uv} = (L - 2/3.\lambda\sqrt{g}.K\ )^{;uv} \tag{4.41}$$

Recapitulando, se tiene para L la forma:

$$L = \alpha\sqrt{g}K + R_{1}(g_{mn};F^{\lambda}_{mn}) + (\ln g).1_{\alpha\beta}.\psi^{\alpha\beta} + S(\Gamma^{l}_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o};F^{\lambda}_{mn}) \tag{4.42}$$

donde $S = S(\Gamma^{l}_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o};F^{\lambda}_{mn})$ es una función escalar que aparece al integrar (4.21), teniendo en cuenta (4.18). $\alpha = 2/3.\lambda$.

Aplicando a (4.22) la hipótesis (4.03) se deduce que:

$$\begin{aligned} E^{bc}_{a}(S) &= E^{bc}_{a}(L - \alpha\sqrt{g}K - R_{1}(g_{mn};F^{\lambda}_{mn}) - (\ln g).1_{\alpha\beta}.\psi^{\alpha\beta}) \\ &= E^{bc}_{a}(L) - E^{bc}_{a}(\alpha\sqrt{g}K) \end{aligned} \tag{4.43}$$

luego $E^{bc}_{a}(S)$ es densidad tensorial e invariante de gauge. Además, resulta ser:

$$\begin{aligned} E^{bc}_{a}(\alpha\sqrt{g}K) &= (\alpha\sqrt{g}K)^{;bc}_{a} - (\alpha\sqrt{g}K)^{;bc,d;uv}_{a}.g_{uv,d} \\ &= E^{bc}_{a}(\alpha\sqrt{g}K)(g_{uv};g_{uv,v};\Gamma^{t}_{uv}) \end{aligned}$$

De donde, por (4.22) y (4.23) resulta:

$$\begin{aligned} E^{bc}_{a}(S) &= E^{bc}_{a}(S)(\Gamma^{t}_{uv}) \\ &= S^{;bc}_{a} - S^{;bc,d;uv}_{a\ \ t}.\Gamma^{t}_{uv;d} - S^{;bc,d;u}_{a\ \ \tau}.A^{\tau}_{u,d} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.44}$$

debido a su 2^{o} identidad de invariancia.

Derivando (4.03) respecto de $\Gamma^{t}_{uv,vx}$ y teniendo en cuenta (4.05):

$$L^{;bc,x;uv,v}_{a\ \ t} + L^{;bc,v;uv,x}_{a\ \ t} = 0 \tag{4.45}$$

Asimismo repitiendo lo anterior para $A^{\tau}_{u,vv}$:

$$L^{;bc,v;u,v}_{a\ \ \tau} + L^{;bc,v;u,v}_{a\ \ \tau} = 0 \tag{4.46}$$

Además, como $L^{;u,v}_{\tau} = \partial L/\partial F^{\lambda}_{mn}.\partial F^{\lambda}_{mn}/\partial A^{\tau}_{u,v}$ resulta ser

$$L^{;u,v}_{\tau} = -2\partial L/\partial F^{\tau}_{uv} \tag{4.47}$$

Entonces, de acuerdo con (4.26) y (4.27):

$$L^{;bc,v;m,n;u,v}_{a\ \ \lambda\ \ \tau} = 0 \tag{4.48}$$

pues $L_{a\ \ \lambda\ \ \tau}^{;bc,v;m,n;u,v}$ resulta antisimétrica en v,m,n,u y v, siendo n = 4 la dimensión de la variedad. Trivialmente esta propiedad "hereda" S:

$$S_{a\ \ \lambda\ \ \tau}^{;bc,v;m,n;u,v} = 0 \tag{4.49}$$

Calculamos ahora $S_{a\ \ \tau}^{;bc,d;u}$.

Como $F^{\lambda}_{mn} = -A^{\lambda}_{m,n} + A^{\lambda}_{n,m} + C^{\lambda}_{\mu\nu}.A^{\mu}_{m}.A^{\nu}_{n}$, entonces

$$\partial F^{\lambda}_{mn}/\partial A^{\tau}_{u} = C^{\lambda}_{\tau\nu}.\delta^{u}_{m}.A^{\nu}_{n} + C^{\lambda}_{\mu\tau}.A^{\mu}_{m}.\delta^{u}_{n}$$

$$= 2.C^{\lambda}_{\tau\nu}.\delta^{uv}_{mn}.A^{\nu}_{v}$$

y por lo tanto:

$$S_{a\ \ \tau}^{;bc,d;u} = 2.C^{\lambda}_{\tau\nu}.A^{\nu}_{v}.S_{a\ \ \lambda}^{;bc,d;uv}$$

$E^{bc}_{a}(S)$ es invariante de gauge, luego por el teorema de reemplazo de Horndeski [4.5] es:

$$E^{bc}_{a}(S)(\Gamma^{l}_{uv};\Gamma^{l}_{uv,v};A^{\tau}_{u};A^{\tau}_{u,v}) = E^{bc}_{a}(S)(\Gamma^{l}_{uv};\Gamma^{l}_{uv,v};0;-1/2.F^{\tau}_{uv})$$

$$= S_{a}^{;bc} \quad S_{a\ \ l}^{;bc,d;uv}.\Gamma^{l}_{uv,d} \tag{4.50}$$

por lo que (4.24) toma la forma

$$0 = S_{a}^{;bc} - S_{a\ \ l}^{;bc,d;uv}.\Gamma^{l}_{uv,d} \tag{4.51}$$

de lo cual se deduce que:

$$S_{a\ \tau\ \lambda}^{;bc;u,v;m,n} = S_{a\ \ h\ \tau\ \lambda}^{;bc,d;ij;u,v;m,n}.\Gamma^{h}_{ij,d}$$

$$= 0 \tag{4.52}$$

esta última igualdad debida a (4.49). De (4.49) y (4.52) se deduce que existen las funciones $\tilde{S}^{uv}_{\tau} = \tilde{S}^{uv}_{\tau}(F^{\lambda}_{mn})$ y $\tilde{T}^{uv}_{\tau} = \tilde{T}^{uv}_{\tau}(\Gamma^{l}_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o})$ tales que:

$$S_{\tau}^{;u,v} = \tilde{S}^{uv}_{\tau}(F^{\lambda}_{mn}) + \tilde{T}^{uv}_{\tau}(\Gamma^{l}_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o}) \tag{4.53}$$

Más aún, como:

$$S_{\tau\ \ \lambda}^{;u,v;m,n} = \tilde{S}_{\tau\ \ \lambda}^{uv;m,n}$$

entonces existe $H = H(F^{\lambda}_{mn})$ tal que:

$\tilde{S}^{uv}_{\tau} = H_{\tau}^{;u,v}$ y por lo tanto de (4.33) se deduce:

$$(S - H)^{;u,v}_{\tau} = \tilde{T}^{uv}_{\tau}(\Gamma^{l}_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o}) \qquad (4.54)$$

pero, como se desprende de (4.30), $S = S(\Gamma^{l}_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o};F^{\lambda}_{mn})$, entonces:

$$(S - H)^{;u,v}_{\tau} = (S - H)^{;mn}_{\lambda}.\partial F^{\lambda}_{mn}/\partial A^{\tau}_{u,v}$$
$$= -2(S - H)^{;uv}_{\tau}$$

Por lo tanto vale la siguiente expresión para S:

$$S = H(F^{\lambda}_{mn}) + T^{uv}_{\tau}(\Gamma^{l}_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o}).F^{\tau}_{uv} + U(\Gamma^{l}_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o}) \qquad (4.55)$$

donde $T^{uv}_{\tau} = -1/2.\tilde{T}^{uv}_{\tau}$

Volviendo a la expresión (4.42) con el resultado (4.45):

$$L = \alpha\sqrt{g}K + R_{1}(g_{mn};F^{\lambda}_{mn}) + (\ln g).1_{\alpha\beta}.\psi^{\alpha\beta} + H(F^{\lambda}_{mn}) +$$
$$+ T^{uv}_{\tau}(\Gamma^{l}_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o}).F^{\tau}_{uv} + U(\Gamma^{l}_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o}) \qquad (4.56)$$

El operador de Euler-Lagrange (4.04) correspondiente al potencial de gauge A^{α}_{b}, aplicada a (4.56), es:

$$E^{b}_{\alpha}(L) = E^{b}_{\alpha}(R_{1} + (\ln g).1_{\alpha\beta}.\psi^{\alpha\beta} + H) + E^{b}_{\alpha}(T^{uv}_{\tau}.F^{\tau}_{uv}) \qquad (4.57)$$

El término $E^{b}_{\alpha}(T^{uv}_{\tau}.F^{\tau}_{uv})$ desarrollado explicitamente es:

$$E^{b}_{\alpha}(T^{uv}_{\tau}.F^{\tau}_{uv}) = \partial(T^{uv}_{\tau}.F^{\tau}_{uv})/\partial A^{\alpha}_{b} - \partial/\partial x^{c}[\partial(T^{uv}_{\tau}.F^{\tau}_{uv})/\partial A^{\alpha}_{b,c}]$$
$$= 2.C^{\tau}_{\alpha\rho}.A^{\rho}_{c}.T^{bc}_{\tau} - 2.\partial/\partial x^{c}[T^{cb}_{\alpha}]$$
$$= 2.C^{\tau}_{\alpha\rho}.A^{\rho}_{c}.T^{bc}_{\tau} - 2.[T^{cb;mn}_{\alpha\ l}.\Gamma^{l}_{mn,c} + T^{cb;mn,o}_{\alpha\ l}.\Gamma^{l}_{mn,oc}]$$
$$(4.58)$$

Aplicando la identidad (4.26) a la forma de L, explícita en (4.36), se obtiene:

$$[T^{uv}_{\tau}.F^{\tau}_{uv}]^{;bc,d;m,n}_{a\ \ \lambda} + [T^{uv}_{\tau}.F^{\tau}_{uv}]^{;bc,n;m,d}_{a\ \ \lambda} = 0$$

O sea:

$$T^{nm;bc,d}_{\lambda\ a} + T^{dm;bc,n}_{\lambda\ a} = 0 \qquad (4.59)$$

entonces el segundo término del corchete de (4.58) es nulo, quedando reducido a:

$$E^{b}_{\alpha}(T^{uv}_{\tau}.F^{\tau}_{uv}) = 2.C^{\tau}_{\alpha\rho}.A^{\rho}_{c}.T^{bc}_{\tau} - 2.T^{cb;mn}_{\alpha\ l}.\Gamma^{l}_{mn,c} \qquad (4.60)$$

Por otro lado, por (4.35) vale que:

$$S_{a}^{;bc} = T_{\tau\ a}^{uv;bc} . F_{uv}^{\tau} + U_{a}^{;bc} \qquad (4.61)$$

y por (4.41):

$$S_{a}^{;bc} = S_{l\ a}^{;mn;bc,d} . \Gamma_{mn,d}^{l}$$

$$= T_{\tau\ l\ a}^{uv;mn;bc,d} . \Gamma_{mn,d}^{l} . F_{uv}^{\tau} + U_{l\ a}^{;mn;bc,d} . \Gamma_{mn,d}^{l} \qquad (4.62)$$

Entonces:

$$[T_{\tau\ a}^{uv;bc} - T_{\tau\ l\ a}^{uv;mn;bc,d} . \Gamma_{mn,d}^{l}] . F_{uv}^{\tau} = U_{l\ a}^{;mn;bc,d} . \Gamma_{mn,d}^{l} - U_{a}^{;bc} \qquad (4.63)$$

Como ni el miembro derecho ni el corchete dependen de F_{bc}^{α} se concluye que:

$$T_{\tau\ a}^{uv;bc} - T_{\tau\ l\ a}^{uv;mn;bc,d} . \Gamma_{mn,d}^{l} = 0 \qquad (4.64)$$

$$U_{l\ a}^{;mn;bc,d} . \Gamma_{mn,d}^{l} - U_{a}^{;bc} = 0 \qquad (4.65)$$

Derivando $T_{\tau\ l}^{uv;mn} . \Gamma_{mn,u}^{l}$ respecto de $\Gamma_{bc,d}^{a}$, se obtiene:

$$[T_{\tau\ l}^{uv;mn} . \Gamma_{mn,u}^{l}]_{a}^{;bc,d} = T_{\tau\ l\ a}^{uv;mn;bc,d} . \Gamma_{mn,u}^{l} + T_{\tau\ a}^{dv;bc} \qquad (4.66)$$

que, merced a (4.59) y a (4.64) es:

$$[T_{\tau\ l}^{uv;mn} . \Gamma_{mn,u}^{l}]_{a}^{;bc,d} = - T_{\tau\ l\ a}^{dv;mn;bc,u} . \Gamma_{mn,u}^{l} + T_{\tau\ a}^{dv;bc}$$

$$= 0 \qquad (4.67)$$

Entonces $T_{\tau\ l}^{uv;mn} . \Gamma_{mn,u}^{l}$ no depende de $\Gamma_{bc,d}^{a}$, es decir:

$$T_{\tau\ l}^{uv;mn} . \Gamma_{mn,u}^{l} = 0 \qquad (4.68)$$

por lo que (4.60) se reduce a:

$$E_{\alpha}^{b}(T_{\tau}^{uv} . F_{uv}^{\tau}) = 2 . C_{\alpha\rho}^{\tau} . A_{c}^{\rho} . T_{\tau}^{bc} \qquad (4.69)$$

Volviendo a (4.42) y especializando en el punto $(g_{mn};0;0;F_{mn}^{\lambda})$, se tiene:

$$L_{o} = R_{1}(g_{mn};F_{mn}^{\lambda}) + (\ln g) . 1_{\alpha\beta} . \psi^{\alpha\beta} + S_{o} \qquad (4.70)$$

donde se ha llamado L_o a $L(g_{mn};0;0;F_{mn}^{\lambda})$ y S_o a $S(0;0;F_{mn}^{\lambda})$.

Sustrayendo (4.70) de (4.42) y reordenando, se obtiene:

$$L = L_{o} + \alpha\sqrt{g}K + [S - S_{o}] \qquad (4.71)$$

Entonces $E_{\alpha}^{b}(L)$ toma la forma:

$$E_{\alpha}^{b}(L) = E_{\alpha}^{b}(L_{o}) + E_{\alpha}^{b}([S - S_{o}]) \qquad (4.72)$$

El miembro de la izquierda y el primer tèrmino de la derecha son invariantes de gauge por hipótesis, quedando entonces, debido a (4.55) y a (4.60):

$$S - S_o = [T^{uv}_{\tau}(\Gamma^l_{mn};\Gamma^l_{mn,o}) - T^{uv}_{\tau}(0;0)].F^{\tau}_{uv} + U(\Gamma^l_{mn};\Gamma^l_{mn,o}) - U(0;0)$$

$$\begin{aligned} E^b_\alpha([S - S_o]) &= 2.C^{\tau}_{\alpha\rho}.A^{\rho}_{c}.[T^{bc}_{\tau}(\Gamma^l_{mn};\Gamma^l_{mn,o};F^{\lambda}_{mn}) - T^{bc}_{\tau}(0;0;F^{\lambda}_{mn})] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.73}$$

nuevamente debido al teorema de reemplazo de Horndeski [4.5].

Este operador de Euler-Lagrange cumple que:

$$E^b_\alpha(L) = E^b_\alpha(L_o + \alpha\sqrt{g}K) \tag{4.74}$$

Además, de (4.71) se concluye que:

$$\begin{aligned} E^{bc}(L) &= L^{;bc} \\ &= E^{bc}(L_o + \alpha\sqrt{g}K) \end{aligned} \tag{4.75}$$

y que:

$$E^{bc}_a(L) = E^{bc}_a(\alpha\sqrt{g}K) \tag{4.76}$$

dado que, por (4.44), $E^{bc}_a(S) = 0$.

Entonces

$$E^b_\alpha(L - \alpha\sqrt{g}K) = E^b_\alpha(L_o) \tag{4.77}$$

$$E^{bc}(L - \alpha\sqrt{g}K) = E^{bc}(L_o) \tag{4.78}$$

resultan densidades tensoriales e invariantes de gauge. En esas condiciones, por el Teorema 1 de López *et al* [4.6], existe una densidad escalar e invariante de gauge $\hat{L} = \hat{L}(g_{mn};F^{\lambda}_{mn})$ tal que satisface:

$$E^b_\alpha(L_o) = E^b_\alpha(\hat{L}) \tag{4.79}$$

$$E^{bc}(L_o) = E^{bc}(\hat{L}) \tag{4.80}$$

por lo tanto $\tilde{L} = \hat{L} + \alpha\sqrt{g}K$ resulta ser una densidad tensorial e invariante de gauge que verifica:

$$E^{bc}(\tilde{L}) = E^{bc}(L) \tag{4.81}$$

$$E_a^{bc}(\tilde{L}) = E_a^{bc}(L) \tag{4.82}$$

$$E_\alpha^{b}(\tilde{L}) = E_\alpha^{b}(L) \tag{4.83}$$

Finalmente por (4.76) y (4.82), el cumplimiento de las ecuaciones de campo implica que:

$$E_a^{bc}(\tilde{L}) = E_a^{bc}(\alpha\sqrt{g}K)$$

por lo que:

Se ha demostrado el siguiente:

TEOREMA 4.1

Si los operadores de Euler-Lagrange de la densidad escalar $L = L(g_{bc};\Gamma^a_{bc};\Gamma^a_{bc,d};F^\alpha_{bc})$ de clase C^3 en sus argumentos, son tales que verifican que:

$$E^{bc}(L) = \partial L/\partial g_{bc} \tag{4.02}$$

$$E_a^{bc}(L) = \partial L/\partial\Gamma^a_{bc} - \partial/\partial x^d(\partial L/\partial\Gamma^a_{bc,d}) \tag{4.03}$$

$$E_\alpha^{b}(L) = \partial L/\partial A^\alpha_b - \partial/\partial x^c(\partial L/\partial A^\alpha_{b,c}) \tag{4.04}$$

son densidades tensoriales e invariantes de gauge y además vale que:

$$E_a^{bc}(L) = E_a^{bc}(L)(\ g_{uv};\ g_{uv,v};\ \Gamma^t_{uv}) \tag{4.05}$$

es degenerada al depender solamente de esos argumentos, entonces:

Existe una densidad escalar $\tilde{L} = \tilde{L}(g_{bc};\Gamma^a_{bc};\Gamma^a_{bc,d};F^\alpha_{bc})$ que es invariante de gauge, tal que verifica:

$$E^{bc}(L) = E^{bc}(\tilde{L}) \tag{4.06}$$

$$E_a^{bc}(L) = E_a^{bc}(\tilde{L}) \tag{4.07}$$

$$E_\alpha^{b}(L) = E_\alpha^{b}(\tilde{L}) \tag{4.08}$$

donde $E^{bc}(\tilde{L})$ y $E_\alpha^{b}(\tilde{L})$ resultan ser las ecuaciones de campo de Einstein-Yang-Mills, debido a $E_a^{bc}(\tilde{L}) = 0$ implica que la conexión resulte la de Levi-Civita.

CAPITULO 5

TRATAMIENTO POR CONEXIONES SIMETRICAS DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN-YANG-MILLS

PARTE DOS

INTRODUCCION

El enfoque seguido adelante en este capítulo es similar al expuesto en el capítulo anterior. El problema estudiado es el siguiente. Sea:

$$L = L(g_{bc}; g_{bc,d}; g_{bc,de}; A^{\alpha}_{b}; A^{\alpha}_{b,c}). \tag{5.01}$$

una densidad escalar, tal que sus operadores de Euler-Lagrange asociados resultan:

$$\begin{aligned} E^{bc}(L) &= L^{;bc} - (L^{;bc,d})_{,d} + (L^{;bc,de})_{,de} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.02}$$

$$\begin{aligned} E^{b}_{\alpha}(L) &= L^{;b}_{\alpha} - (L^{;b,c}_{\alpha})_{,c} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.03}$$

Si se elige a L, en particular, como:

$$L = \sqrt{g}.[R + 1/2.B_{\beta\chi}.F^{\beta bc}.F^{\chi}{}_{bc}] \tag{5.04}$$

entonces (5.01) y (5.02) resultan ser las ecuaciones de Einstein-Yang-Mills:

$$R^{bc} - 1/2.g^{bc}.R = B_{\beta\chi}(F^{\beta be}.F^{\chi c}{}_{e} - 1/4.g^{bc}.F^{\beta de}.F^{\chi}{}_{de}) \tag{5.05}$$

$$B_{\beta\chi}F^{\beta bc}\|_{c} = 0 \tag{5.06}$$

para $B_{\beta\chi}$ coeficientes de una forma bilineal simétrica sobre LG, Ad-G invariante, y donde:

$$F^{\alpha}_{bc}\|_{d} = F^{\alpha}_{bc,d} - \{^{e}_{bd}\}.F^{\alpha}_{ec} - \{^{e}_{cd}\}F^{\alpha}_{be} + C^{\alpha}_{\chi\delta}.A^{\chi}_{d}.F^{\delta}_{bc} \tag{5.07}$$

Aquí F^{λ}_{mn} caracteriza a los coeficientes de la forma de curvatura,

$$F^{\lambda}_{mn} = -A^{\lambda}_{m,n} + A^{\lambda}_{n,m} + C^{\lambda}_{\mu\nu} . A^{\mu}_{m} . A^{\nu}_{n} \qquad (5.08)$$

Además, $\{^{a}_{bc}\}$ denotan las componentes de los símbolos de Christoffel, construídos a expensas de las de la métrica g_{bc} y de su derivada primera $g_{bc,d}$.

También puede agregarse la siguiente ecuación, identicamente satisfecha por las derivadas covariantes de F^{α}_{bc}:

$$F^{\alpha}_{bc}\|_{d} + F^{\alpha}_{db}\|_{c} + F^{\alpha}_{cd}\|_{b} = 0 \qquad (5.05)$$

Un enfoque alternativo a éste es considerar un principio variacional que emplee una conexión simétrica arbitraria, de componentes Γ^{a}_{bc}, en vez de los símbolos de Christoffel $\{^{a}_{bc}\}$. Se propone:

$$L = L(g_{bc}; \Gamma^{a}_{bc}; \Gamma^{a}_{bc,d}; A^{\alpha}_{b}; A^{\alpha}_{b,c}) \qquad (5.10)$$

cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas son:

$$E^{bc}(L) = L^{;bc}$$
$$= 0 \qquad (5.11)$$

$$E^{bc}_{a}(L) = L^{;bc}_{a} - (L^{;bc,d}_{a})_{,d}$$
$$= 0 \qquad (5.12)$$

$$E^{b}_{\alpha}(L) = L^{;b}_{\alpha} - (L^{;b,c}_{\alpha})_{,c}$$
$$= 0 \qquad (5.13)$$

Una elección natural para L es reemplazar en (5.09) a $\{^{a}_{bc}\}$ por Γ^{a}_{bc}:

$$L = \sqrt{g} . [K + 1/2 . B_{\beta\chi} . F^{\beta bc} . F^{\chi}{}_{bc}] \qquad (5.14)$$

donde $K = g^{bc} . K_{bc}$, $K_{bc} = g^{bc} . K^{a}_{bca}$ y donde

$$K^{a}_{bcd} = -\Gamma^{a}_{bc,d} + \Gamma^{a}_{bd,c} - \Gamma^{a}_{ed} . \Gamma^{e}_{bc} + \Gamma^{a}_{ec} . \Gamma^{e}_{bd} \qquad (5.15)$$

Cuando L está dada por (5.14), las ecuaciones de campo (5.11) a

(5.13) son:

$$K^{bc} + K^{cb} - 1/2 . g^{bc} . K = 2B_{\beta\chi}(F^{\beta be} . F^{\chi c}{}_{e} - 1/4 . g^{bc} . F^{\beta de} . F^{\chi}{}_{de}) \tag{5.16}$$

$$(\sqrt{g} . g^{bc}) |_{c} \tag{5.17}$$

$$B_{\beta\chi} F^{\beta bc} \|_{c} = 0 \tag{5.18}$$

donde la barra vertical denota derivación covariante definida respecto de Γ^{a}_{bc} en vez de $\{^{a}_{bc}\}$. Se conoce por Lovelock [4.4] que (5.17) implica, para $n > 2$ (n, dimensión de la variedad subyacente), que:

$$\Gamma^{a}_{bc} = \{^{a}_{bc}\}$$

con lo que (5.16) y (5.18) coinciden con las ecuaciones de campo de Einstein-Yang-Mills (5.01) y (5.02).

Es claro que no todas las densidades escalares lagrangianas de la forma (5.10) satisfacen a dichas ecuaciones. Pero el lagrangiano (5.14) se distingue por tener la siguiente propiedad de degeneración:

$$E^{bc}_{a}(L) = E^{bc}_{a}(L)(g_{uv}; g_{uv,v}; \Gamma^{t}_{uv}) \tag{5.19}$$

en vez de:

$$E^{bc}_{a}(L) = E^{bc}_{a}(L)(g_{uv}; g_{uv,v}; \Gamma^{t}_{uv}; \Gamma^{t}_{uv,v}; \Gamma^{t}_{uv,vx}; A^{\tau}_{u}; A^{\tau}_{u,v}; A^{\tau}_{u,vv})$$

como podría esperarse.

En este trabajo se demuestra que, en un espaciotiempo de dimensión $n = 4$, la densidad escalar e invariante de gauge de la forma (5.10), que satisfaga (5.19), está dada por

$$L = \alpha\sqrt{g} . K + L_{0}(g_{bc}; F^{\beta}_{bc}) + L_{1} \tag{5.20}$$

donde α es una constante, L_{0} es una densidad escalar arbitraria y L_{1} es una densidad escalar no activa, por satisfacer idénticamente las ecuaciones (5.11) a (5.13). La forma obtenida para el lagrangiano es minimamente acoplado. De las partes activas, una corresponde a la interacción gravitatoria:

$$\alpha\sqrt{g}.K$$

y la otra corresponde a la interacción de gauge:

$$L_o(g_{bc};F^{\beta}_{bc})$$

Dado que (5.17) implica que $\Gamma^{a}_{bc} = \{^{a}_{bc}\}$, entonces la ecuación de campo (5.16) se reduce a:

$$\alpha(K^{bc}- 1/2.g^{bc}.K) = \partial L_o/\partial g_{bc}$$

Queda por determinar la estructura de la densidad escalar L_o. Esto se hace mediante teoremas recientes sobre estos lagrangianos debidos a Noriega [5.1], y López *et al* [4.6] obteniéndose las ecuaciones de campo de Einstein-Yang-Mills.

Este trabajo es una generalización natural del de M^{c}Kellar [4.1], el cual constituye un caso particular de éste, cuando el grupo de Lie es G = U(1).

Dado que L es una densidad tensorial, satisface tres identidades de invariancia, (ver lemas 5.1, 5.2 en apéndice) dos de las cuales son:

$$0 = L_t^{;uv,v} + L_t^{;vv,u} + L_t^{;vu,v} \tag{5.21}$$

$$0 = L_t^{;uv} - L_r^{;uv,v}.\Gamma^r_{vt} + L_t^{;ur,s}\Gamma^v_{rs} + L_t^{;vr,s}\Gamma^u_{rs} + $$
$$+ 1/2.(L_\tau^{;u,v} + L_\tau^{;v,u}).A_t^\tau \tag{5.22}$$

Como $E_a^{bc}(L)$ es una densidad tensorial de tipo (2,1) y peso +1 satisface dos identidades de invariancia. Una de ellas es:

$$[E_a^{bc}(L)^{;uv,v} + E_a^{bc}(L)^{;vv,u}].g_{tv} + E_a^{bc}(L)_t^{;uv} = 0 \tag{5.23}$$

(ver lema 5.3 en apéndice).

La expresión desarrollada de $E_a^{bc}(L)$ es:

$$E_a^{bc}(L) = L_a^{;bc} - L_a^{;bc,d;uv}.g_{uv,d} - L_a^{;bc,d;uv}{}_t.\Gamma^t_{uv,d}$$
$$- L_a^{;bc,d;uv,v}{}_t.\Gamma^t_{uv,vd} - L_a^{;bc,d;u}{}_\tau.A^\tau_{u,d} - L_a^{;bc,d;u,v}{}_\tau.A^\tau_{u,vd}$$
$$\tag{5.24}$$

Debido a la degeneración de L, expresada en (5.19), (5.24) se reduce a:

$$E_a^{bc}(L) = L_a^{;bc} - L_a^{;bc,d;uv}.g_{uv,d} - L_a^{;bc,d;uv}{}_t.\Gamma^t_{uv,d} - L_a^{;bc,d;u}{}_\tau.A^\tau_{u,d}$$
$$\tag{5.25}$$

Derivando (5.25) respecto de $g_{uv,v}$ y teniendo en cuenta (5.10), se obtiene:

$$E_a^{bc}(L)^{;uv,d} = - L_a^{;bc,d;uv} \tag{5.26}$$

Ambos miembros en (5.26), sólo pueden depender de g_{mn} y Γ^l_{mn}, de acuerdo con (5.10) y (5.19), o sea:

$$L_a^{;bc,d;uv;mn,o}{}_l = 0 \tag{5.27}$$

$$L_a^{;bc,d;uv;m}{}_\lambda = 0 \tag{5.28}$$

$$L_{a}^{;bc,d;uv;m,n}{}_{\lambda} = 0 \tag{5.29}$$

Queda entonces la siguiente dependencia funcional:

$$L_{a}^{;bc,d;uv} = L_{a}^{;bc,d;uv}(g_{mn};\Gamma^{l}_{mn})$$

Dado que la conexión es simétrica y que $L_{a}^{;bc,d;uv}$ es una densidad tensorial, por (5.26), entonces ésta no puede depender de Γ^{l}_{mn}. En efecto, la identidad de invariancia de $L_{a}^{;bc,d;uv}$ correspondiente a B^{v}_{xy} es simplemente:

$$L_{a}^{;bc,d;uv;xy}{}_{v} = 0$$

de donde:

$$L_{a}^{;bc,d;uv} = L_{a}^{;bc,d;uv}(g_{mn}) \tag{5.30}$$

Integrando (5.30) se obtiene:

$$L_{a}^{;bc,d} = D_{a}^{bcd}(g_{mn}) + S_{a}^{bcd}(\Gamma^{l}_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o};A^{\lambda}_{m};A^{\lambda}_{m,n}) \tag{5.31}$$

Dado que el dominio de definición de L incluye $(g_{bc};0;0;0;0)$, se tiene:

$$L_{a}^{;bc,d}(g_{bc};0;0;0;0) = D_{a}^{bcd}(g_{mn}) + S_{a}^{bcd}(0;0;0;0) \tag{5.32}$$

De (5.31) y (5.32) se deducen dos cosas:

$$D_{a}^{bcd}(g_{mn}) = L_{a}^{;bc,d}(g_{bc};0;0;0;0) - S_{a}^{bcd}(0;0;0;0) \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned} T_{a}^{bcd} &= S_{a}^{bcd}(\Gamma^{l}_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o};A^{\lambda}_{m};A^{\lambda}_{m,n}) - S_{a}^{bcd}(0;0;0;0) \\ &= L_{a}^{;bc,d}(g_{mn};\Gamma^{l}_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o};A^{\lambda}_{m};A^{\lambda}_{m,n}) - L_{a}^{;bc,d}(g_{mn};0;0;0;0) \end{aligned} \tag{5.34}$$

Entonces T_{a}^{bcd} es una densidad tensorial, derivada respecto de $\Gamma^{a}_{bc,d}$ y (5.30) queda, aplicando (5.33) y (5.34):

$$L_{a}^{;bc,d} = L_{a}^{;bc,d}(g_{bc};0;0;0;0) + T_{a}^{bcd}(\Gamma^{l}_{mn};\Gamma^{l}_{mn,o};A^{\lambda}_{m};A^{\lambda}_{m,n}) \tag{5.35}$$

$L_{a}^{;bc,d}(g_{bc};0;0;0;0)$ es una densidad tensorial concomitante del tensor métrico. Estos objetos, en una variedad de dimensión n = 4 son conocidos (Lovelock [5.2], Prelat [5.3], Noriega-Schifini [4.7]) y teniendo en cuenta la simetría entre los supraíndices b y c, y la simetría cíclica (5.21), resulta:

$$L_a^{;bc,d}(g_{bc};0;0;0;0) = a.\sqrt{g}.(\delta_a^b.g^{cd} + \delta_a^c.g^{bd} - 2.\delta_a^d.g^{bc}) \tag{5.36}$$

donde $a\in\mathbb{R}$ y $\sqrt{g}$ caracteriza a la raíz cuadrada del valor absoluto del determinante del tensor métrico. Entonces, de acuerdo con (5.35) y (5.36), $L_a^{;bc,d}$ tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} L_a^{;bc,d} &= a.\sqrt{g}.(\delta_a^b.g^{cd} + \delta_a^c.g^{bd} - 2.\delta_a^d.g^{bc}) + \\ &+ T_a^{bcd}(\Gamma^l_{mn};\Gamma^l_{mn,o};A^\lambda_m;A^\lambda_{m,n}) \end{aligned} \tag{5.37}$$

De (5.23) y de (5.26) surge que:

$$E_a^{bc}(L)_t^{;uv} = [L_a^{;bc,v;uv} + L_a^{;bc,u;vv}].g_{tv} \tag{5.38}$$

entonces, por (5.30), puede integrarse para dar:

$$E_a^{bc}(L) = 2.L_a^{;bc,v;uv}.g_{tv}.\Gamma^t_{uv} + M_a^{bc}(g_{uv};g_{uv,v}) \tag{5.39}$$

Analogamente, de (5.26) y (5.30) se deduce que:

$$E_a^{bc}(L) = -L_a^{;bc,v;uv}.g_{uv,v} + N_a^{bc}(g_{uv};\Gamma^t_{uv}) \tag{5.40}$$

De la comparación de (5.39) y (5.40) se desprende que:

$$\begin{aligned} M_a^{bc}(g_{uv};g_{uv,v}) + L_a^{;bc,v;uv}g_{uv,v} &= N_a^{bc}(g_{uv};\Gamma^t_{uv}) - 2L_a^{;bc,v;uv}g_{tv}\Gamma^t_{uv} \\ &= O_a^{bc}(g_{uv}) \end{aligned} \tag{5.41}$$

donde la última igualdad es debida a que el miembro de la izquierda no depende de Γ^t_{uv} y a que el miembro de la derecha tampoco depende de $g_{uv,v}$. De lo cual se deduce la existencia de O_a^{bc}. De esta manera, es posible escribir (5.40) como:

$$\begin{aligned} E_a^{bc}(L) &= L_a^{;bc,v;uv}.(2g_{tv}\Gamma^t_{uv} - g_{uv,v}) + O_a^{bc}(g_{uv}) \\ &= -L_a^{;bc,v;uv}.g_{uv}|_v + O_a^{bc}(g_{uv}) \end{aligned} \tag{5.41}$$

De (5.41) se deduce que, como tanto $E_a^{bc}(L)$ como $L_a^{;bc,v;uv}.g_{uv}|_v$ son densidades tensoriales, entonces también debe serlo $O_a^{bc}(g_{uv})$, y por la caracterización de estos objetos debida a Prelat [5.4] es nula. Queda así:

$$E_{a}^{bc}(L) = - L_{a}^{;bc,v;uv} . g_{uv}\big|_{v} \tag{5.42}$$

De (5.42) y de (5.25) se deduce que:

$$2. L_{a}^{;bc,v;uv} . g_{tv} \Gamma_{uv}^{t} = L_{a}^{;bc} - L_{a}^{;bc,d;uv}{}_{t} . \Gamma_{uv,d}^{t} - L_{a}^{;bc,d;u}{}_{\tau} . A_{u,d}^{\tau} \tag{5.43}$$

Derivando (5.43) respecto de g_{mn} y teniendo en cuenta (5.30) se obtiene:

$$L_{a}^{;bc;mn} = [2. L_{a}^{;bc,v;uv} . g_{tv}]^{;mn} . \Gamma_{uv}^{t} \tag{5.44}$$

de donde se deduce que:

$$L_{a}^{;bc;mn} = L_{a}^{;bc;mn}(g_{uv} ; \Gamma_{uv}^{t}) \tag{5.45}$$

Si se deriva ahora (5.22), se obtiene:

$$L_{t}^{;uv;mn} = L_{r}^{;uv,v;mn} . \Gamma_{vt}^{r} - L_{t}^{;ur,s;mn} \Gamma_{rs}^{v} - L_{t}^{;vr,s;mn} \Gamma_{rs}^{u} - \\ - 1/2. (L_{\tau}^{;u,v;mn} + L_{\tau}^{;v,u;mn}) . A_{t}^{\tau} \tag{5.46}$$

En (5.46) ningún término (salvo el quinto del miembro derecho) depende de A_{a}^{α}. Por lo tanto:

$$L_{t}^{;uv;mn} = L_{r}^{;uv,v;mn} . \Gamma_{vt}^{r} - L_{t}^{;ur,s;mn} \Gamma_{rs}^{v} - L_{t}^{;vr,s;mn} \Gamma_{rs}^{u} \tag{5.47}$$

Si se tiene en cuenta (5.27) a (5.29), integrando (5.47) respecto de la conexión, se obtiene:

$$L^{;mn} = L_{t}^{;uv,v;mn} . \Gamma_{vr}^{t} . \Gamma_{uv}^{r} + W^{mn}(g_{bc} ; \Gamma_{bc,d}^{a}) + X^{mn}(g_{bc} ; A_{b}^{\beta} ; A_{b,c}^{\beta}) \tag{5.48}$$

Incluso, integrando ahora (5.30) respecto de $\Gamma_{bc,d}^{a}$ se obtiene:

$$L^{;mn} = L_{t}^{;uv,v;mn} . \Gamma_{uv,v}^{t} + U^{mn}(g_{bc} ; \Gamma_{bc}^{a}) + V^{mn}(g_{bc} ; A_{b}^{\beta} ; A_{b,c}^{\beta}) \tag{5.49}$$

De la comparación de (5.48) y (5.49) se obtiene:

$$L^{;mn} = L_{t}^{;uv,v;mn} . (\Gamma_{uv,v}^{t} + \Gamma_{vr}^{t} . \Gamma_{uv}^{r}) + Y^{mn}(g_{bc} ; A_{b}^{\beta} ; A_{b,c}^{\beta}) \tag{5.50}$$

Dado que Y^{mn} es una derivada respecto de las componentes del tensor métrico, vale que:

$$L = L_{t}^{;uv,v}.(\Gamma^{t}_{uv,v} + \Gamma^{t}_{vr}.\Gamma^{r}_{uv}) + Y(g_{bc};A^{\beta}_{b};A^{\beta}_{b,c}) +$$

$$+ S(\Gamma^{a}_{bc};\Gamma^{a}_{bc,d};A^{\beta}_{b};A^{\beta}_{b,c}) \tag{5.51}$$

aplicando (5.37) al primer término en (5.51) se tiene:

$$\begin{aligned} L_{a}^{;bc,d}.(\Gamma^{a}_{bc,d} + \Gamma^{a}_{dr}.\Gamma^{r}_{bc}) &= 2a.\sqrt{g}(\Gamma^{a}_{bc,d} + \Gamma^{a}_{dr}.\Gamma^{r}_{bc})(\delta^{b}_{a}g^{cd} - \delta^{d}_{a}g^{bc}) \\ &+ T_{a}^{bcd}.(\Gamma^{a}_{bc,d} + \Gamma^{a}_{dr}.\Gamma^{r}_{bc}) \\ &= 2a\sqrt{g}(\Gamma^{a}_{bc,d} - \Gamma^{a}_{bd,c} + \Gamma^{a}_{dr}\Gamma^{r}_{bc} - \Gamma^{a}_{cr}\Gamma^{r}_{bd})\delta^{b}_{a}g^{cd} \\ &+ T_{a}^{bcd}.(\Gamma^{a}_{bc,d} + \Gamma^{a}_{dr}.\Gamma^{r}_{bc}) \\ &= -2a.\sqrt{g}.K + T_{a}^{bcd}.(\Gamma^{a}_{bc,d} + \Gamma^{a}_{dr}.\Gamma^{r}_{bc}) \end{aligned} \tag{5.52}$$

Luego (5.51) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} L &= -2a.\sqrt{g}.K + Y(g_{bc};A^{\beta}_{b};A^{\beta}_{b,c}) + T_{a}^{bcd}.(\Gamma^{a}_{bc,d} + \Gamma^{a}_{dr}.\Gamma^{r}_{bc}) + \\ &+ S(\Gamma^{a}_{bc};\Gamma^{a}_{bc,d};A^{\beta}_{b};A^{\beta}_{b,c}) \\ &= -2a.\sqrt{g}.K + Y(g_{bc};A^{\beta}_{b};A^{\beta}_{b,c}) + T(\Gamma^{a}_{bc};\Gamma^{a}_{bc,d};A^{\beta}_{b};A^{\beta}_{b,c}) \end{aligned} \tag{5.53}$$

donde se ha usado:

$$T(\Gamma^{a}_{bc};\Gamma^{a}_{bc,d};A^{\beta}_{b};A^{\beta}_{b,c}) = T_{a}^{bcd}(\Gamma^{a}_{bc,d} + \Gamma^{a}_{dr}.\Gamma^{r}_{bc}) + S(\Gamma^{a}_{bc};\Gamma^{a}_{bc,d};A^{\beta}_{b};A^{\beta}_{b,c}) \tag{5.54}$$

Por (5.50) y el Teorema 1 de Noriega [5.5], Y puede tomarse como una densidad escalar y también T. Usando ahora la supuesta invariancia de gauge de L, (5.54) se transforma finalmente en:

$$L = -2a.\sqrt{g}.K + Y(g_{bc};F^{\beta}_{bc}) + T(\Gamma^{a}_{bc};\Gamma^{a}_{bc,d};F^{\beta}_{bc}) \tag{5.55}$$

Como puede verse en el apéndice, por los lemas 5.4 y 5.5, T satisface identicamente las ecuaciones de Euler-Lagrange. Por lo tanto se tiene:

Teorema 5.1

Si $L = L(g_{bc};\Gamma^{a}_{bc};\Gamma^{a}_{bc,d};A^{\alpha}_{b};A^{\alpha}_{b,c})$ es una densidad escalar e invariante de gauge, tal que satisface (5.19) entonces L es equivalente a (tiene las mismas expresiones de Euler-Lagrange que) un lagrangiano de la forma:

$$\tilde{L} = \alpha\sqrt{g}.K + L_o(g_{bc};F^{\beta}_{bc})$$

Más aún, la ecuación (5.12) implica que Γ^a_{bc} $\{^{a}_{bc}\}$, y así, la ecuación (5.11) es:

$$a(R^{bc} - 1/2.R.g^{bc}) = \partial L_o/\partial g_{bc} \qquad (5.56)$$

FORMA DEL LAGRANGIANO DE GAUGE L_o

Hasta el momento, ninguna restricción se aplicó a los operadores de Euler-Lagrange:

$$E^{bc}(L) = L^{;bc} \qquad (5.11)$$

$$E^b_\alpha(L) = L^{;b}_\alpha - (L^{;b,c}_\alpha)_{,c} \qquad (5.13)$$

Desde el punto de vista físico es deseable que, en ausencia de fuentes se satisfagan las ecuaciones de Yang y Mills:

$$B_{\beta\chi}F^{\beta bc}\|_c = 0 \qquad (5.06)$$

Se sabe por Noriega [5.6], que la condición

$$E^b_\alpha(L) = -B_{\alpha\beta}F^{\beta bc}\|_c \qquad (5.57)$$

implica, para una variedad de dimensión 4 que

$$L_o = 1/4.g^{1/2}B_{\alpha\beta}F^{\alpha bc}F^{\beta}{}_{bc} + bg^{1/2} + L_1 \qquad (5.58)$$

donde L_1 es una divergencia, y por lo tanto tiene expresiones de Euler-Lagrange identicamente nulas. Entonces L pasa a ser:

$$L = a.g^{1/2}.g^{bc}K_{bc} + 1/4.g^{1/2}B_{\alpha\beta}F^{\alpha bc}F^{\beta}{}_{bc} + bg^{1/2} + L_1 \qquad (5.59)$$

y $E^{bc}(L_o)$ vale:

$$E^{bc}(L_o) = -1/2g^{1/2}B_{\alpha\beta}(F^{\alpha bd}F^{\beta c}{}_d - 1/4g^{1/2}B_{\alpha\beta}F^{\alpha bc}F^{\beta}{}_{bc}) + bg^{1/2}g^{bc} \qquad (5.60)$$

expresión que constituye, esencialmente, el tensor de momento energía para las ecuaciones de campo de Einstein-Yang-Mills.

Reciprocamente, puede exigirse que valga (5.60). En este caso se conoce por Calvo *et al* [5.7], que L_0 se reduce a ser (5.58) (sin L_1). En este caso las ecuaciones de campo (5.11) a (5.13) pasan a ser:

$$a(R^{bc}-1/2g^{bc}R)-1/2bg^{bc}= -1/2B_{\alpha\beta}(F^{\alpha bd}F^{\beta c}{}_{d}-1/4g^{1/2}B_{\alpha\beta}F^{\alpha bc}F^{\beta}{}_{bc})$$

$$B_{\alpha\beta}F^{\beta bc}\|_{c}$$

$$(\Gamma^{a}_{bc} = \{^{a}_{bc}\})$$

a las que se puede agregar:

$$F^{\alpha}_{bc}\|_{d} + F^{\alpha}_{db}\|_{c} + F^{\alpha}_{cd}\|_{b} = 0 \qquad (5.05)$$

Así, el enfoque variacional por conexiones simétricas constituye una aproximación adecuada para motivar las ecuaciones de campo de Einstein-Yang-Mills.

§2.- APENDICE AL CAPITULO V

El propósito de este apéndice es probar una serie de resultados que son necesarios para demostrar el resultado principal.

TERCERA IDENTIDAD DE INVARIANCIA DE $L = L(g_{bc}; \Gamma^a_{bc}; \Gamma^a_{bc,d}; A^\alpha_b; A^\alpha_{b,c})$

LEMA 5.1

L densidad escalar de tipo (0,0) y peso 1, verifica:

$$L^{;xy,z}_v + L^{;yz,x}_v + L^{;zx,y}_v = 0$$

D/

Como L es una densidad escalar de peso 1, satisface una identidad de invariancia similar a la descripta en el Lema (4.1).

Sólo $\tilde{\Gamma}^a_{bc,d}$ depende de B^a_{bcd}. En efecto, este objeto no actúa ni a través de $\tilde{A}^\alpha_b$ ni de $\tilde{A}^\alpha_{b,c}$. Se obtiene, planteando la condición de invariante de L,

$$\tilde{L}(g_{bc};\ \Gamma^a_{bc};\ \Gamma^a_{bc,d};\ A^\alpha_b;\ A^\alpha_{b,c}) = L(\tilde{g}_{bc};\ \tilde{\Gamma}^a_{bc};\ \tilde{\Gamma}^a_{bc,d};\ \tilde{A}^\alpha_b;\ \tilde{A}^\alpha_{b,c}) \tag{L1.1}$$

$$\begin{aligned} &L(\ B^r_b.B^s_c g_{rs};\ A^a_t.B^r_b.B^s_c.\Gamma^t_{rs} + A^a_t.B^t_{bc};\ A^a_t.B^r_b.B^s_c.B^u_d.\Gamma^t_{rs,u} + \\ &+ A^a_t.(B^r_{bd}.B^s_c + B^r_{cd}.B^s_b).\Gamma^t_{rs} - A^a_u.A^v_t.B^u_{vd}.(\ B^r_b.B^s_c.\Gamma^t_{rs} + B^t_{bc}) + A^a_t.B^t_{bcd}; \\ &;B^r_b.A^\alpha_r;\ B^r_b.B^s_c.A^\alpha_{r,s} + B^r_{b,c}.A^\alpha_r) = B.L(\ g_{bc};\ \Gamma^a_{bc};\ \Gamma^a_{bc,d};\ A^\alpha_b;\ A^\alpha_{b,c}) \end{aligned} \tag{L1.2}$$

derivando respecto de B^v_{xyz} y evaluando en el punto del dominio de concomitancia $(\ B^v_x;\ B^v_{xy};\ B^v_{xyz}) = (\ \delta^v_x;\ 0;\ 0)$:

$$L^{;bc,d}_a.\delta^a_t.\delta^t_v.s^{xyz}_{bcd} = 0$$

o sea:

$$L^{;xy,z}_v + L^{;yz,x}_v + L^{;zx,y}_v = 0 \tag{L1.3}$$

SEGUNDA IDENTIDAD DE INVARIANCIA DE $L = L(g_{bc};\Gamma^{a}_{bc};\Gamma^{a}_{bc,d};A^{\alpha}_{b};A^{\alpha}_{b,c})$

LEMA 6.2

L densidad escalar de tipo (0,0) y peso 1, verifica:

$$L^{;xy}_{v} \quad L^{;xy,s}_{t}.\Gamma^{t}_{vs} - \quad L^{;xr,s}_{v}.\Gamma^{y}_{rs} - \quad L^{;yr,s}_{v}.\Gamma^{x}_{rs}$$

$$- 1/2.(L^{;x,y}_{\omega} + L^{;y,x}_{\omega})A^{\omega}_{v}$$

D/

En forma similar a la expuesta en el Lema anterior, se deriva la expresión (L1.1) respecto de B^{v}_{xy} y se evalúa en (δ^{v}_{x}; 0; 0). La diferencia respecto del Lema 4.2 es que L depende de $A^{\alpha}_{b,c}$, el cual varía por un cambio de coordenadas, respecto de B^{t}_{bc}. Por lo tanto se obtiene:

$$L^{;bc}_{a}\delta^{a}_{t}\delta^{t}_{v}s^{xy}_{bc} + \quad L^{;bc,d}_{a}[\delta^{a}_{t}\delta^{r}_{v}(s^{xy}_{bd}\delta^{s}_{c} + \quad s^{xy}_{cd}\delta^{s}_{b})\Gamma^{t}_{rs} - \quad \delta^{a}_{u}\delta^{v}_{t}\delta^{u}_{v}s^{xy}_{vd}\delta^{r}_{b}\delta^{s}_{c}\Gamma^{t}_{rs}] +$$

$$+ L^{;b,c}_{\alpha}\delta^{r}_{v}s^{xy}_{bc}A^{\alpha}_{r} = 0 \qquad (L2.1)$$

, o sea:

$$L^{;xy}_{v} + 1/2.[L^{;xs,y}_{t} + L^{;sx,y}_{t} + L^{;ys,x}_{t} + L^{;sy,x}_{t}]\Gamma^{t}_{vs} - 1/2[L^{;rs,x}_{v}\Gamma^{y}_{rs} +$$

$$L^{;rs,y}_{v}\Gamma^{x}_{rs}] + 1/2[L^{;x,y}_{\alpha} + L^{;y,x}_{\alpha}]A^{\alpha}_{v} = 0 \qquad (L2.2)$$

que, mediante (L1.3) se convierte en:

$$L^{;xy}_{v} - L^{;xy,s}_{t}\Gamma^{t}_{vs} + L^{;xr,s}_{v}\Gamma^{y}_{rs} + L^{;yr,s}_{v}\Gamma^{x}_{rs} + 1/2[L^{;x,y}_{\alpha} + L^{;y,x}_{\alpha}]A^{\alpha}_{v} = 0$$

(L2.3)

SEGUNDA IDENTIDAD DE INVARIANCIA DE $E^{mn}_{l}(L) = E^{mn}_{l}(L)(g_{uv};g_{uv,v};\Gamma^{t}_{uv})$

LEMA 5.3

$E^{mn}_{l}(L)$ densidad tensorial de tipo (2,1) y peso 1, satisface:

$$[E^{mn;bx,y}_{l}(L) + E^{mn;by,x}_{l}(L)]g_{bv} + E^{mn;xy}_{l\ v}(L) = 0 \qquad (L3.4)$$

D/

La condición de invariante de $E^{mn}_{l}(L)$ es:

$$E^{mn}_{l}(L)(\tilde{g}_{uv};\tilde{g}_{uv,v};\tilde{\Gamma}^{t}_{uv}) = \tilde{E}^{mn}_{l}(L) \qquad (L3.1)$$

$$E_l^{mn}(L)(B_b^u B_c^v g_{uv}; B_b^u B_c^v B_d^v g_{uv,v} + (B_b^u B_{cd}^v + B_{bd}^u B_c^v) g_{uv}; A_l^a B_b^u B_c^v \Gamma_{uv}^t + A_l^a B_{bc}^t)$$
$$= A_u^m A_v^n . B_l^t E_t^{uv}(L) \qquad (L3.2)$$

Se deriva respecto de B_{xy}^v y se evalúa en el punto del dominio de concomitancia $(B_x^v; B_{xy}^v) = (\delta_x^v; 0)$:

$$E_l^{mn;bc,d}(L)(\delta_b^u \delta_v^v s_{cd}^{xy} + \delta_c^v \delta_v^u s_{bd}^{xy}) g_{uv} + E_l^{mn;bc}{}_a(L) \delta_l^a \delta_v^t s_{bc}^{xy} = 0 (L3.3)$$

O sea:

$$(E_l^{mn;bx,y}(L) + E_l^{mn;by,x}(L)) g_{bv} + E_l^{mn;xy}{}_v(L) = 0 \qquad (L3.4)$$

FORMA DE LA DENSIDAD ESCALAR $T = T(\Gamma_{bc}^a; \Gamma_{bc,d}^a; F_{bc}^\alpha)$

LEMA 5.4

Si $T = T(\Gamma_{bc}^a; \Gamma_{bc,d}^a; F_{bc}^\beta)$ es una densidad escalar, entonces, en una variedad espaciotiempo de dimensión n = 4, vale que:

$$T = A\varepsilon^{bcde} K_b{}^a{}_{ca} K_d{}^h{}_{eh} + B\varepsilon^{bcde} K_b{}^a{}_{ch} . K_d{}^h{}_{ea} + C_\delta \varepsilon^{bcde} K_b{}^a{}_{ca} . {}^*F^{\delta bc}$$
$$+ D_{\beta\chi} \phi^{\beta\chi}$$

donde ${}^*F^{\delta bc} = \varepsilon^{bcde} . F^\delta_{de}$, $\phi^{\beta\chi} = {}^*F^{\beta bc} . F^\chi_{bc}$ y donde A, B, C_δ y $D_{\beta\chi}$ son números reales.

D/

Como T es una densidad escalar, satisface su primer identidad de invariancia (contraída)(ver Lema 2.1).

$$(p.n - r + s) O_{b1..bs}^{a1..ar} = \Sigma_{\lambda=1}^{\omega} \Sigma_{e=0}^{d\lambda} (p_\lambda n - i\lambda + j\lambda + e).$$
$$.[\partial O_{b1..bs}^{a1..ar} / \partial E_{\lambda m1..,..mj\lambda+e}^{l1.li\lambda} . E_{\lambda m1..,..mj\lambda+e}^{l1.li\lambda}] \qquad (2.28)$$

Aquí p = 1, n = 4, r = s = 0, por lo que vale (omitiendo la dependencia funcional):

$$4T = T_v^{;xy} \Gamma_{xy}^v + 2T_v^{;xy,z} \Gamma_{xy,z}^v + 2T_\omega^{;xy} F_{xy}^\omega \qquad (L4.1)$$

A su vez, $T_v^{;xy}$, $T_v^{;xy,z}$ y $T_\omega^{;xy}$ satisfacen sus respectivas primeras identidades de invariancia (contraídas). Las de $T_v^{;xy,z}$ y

$T^{;xy}_{\omega}$ son:

$$2T^{;xy,z}_{v} = T^{;xy,z;mn}_{v\ l}\Gamma^{l}_{mn} + 2T^{;xy,z;mn,o}_{v\ l}\Gamma^{l}_{mn,o} + 2T^{;xy,z;mn}_{v\ \lambda}F^{\lambda}_{mn}$$

(L4.2)

$$2T^{;xy}_{\omega} = T^{;xy;mn}_{\omega\ l}\Gamma^{l}_{mn} + 2T^{;xy;mn,o}_{\omega\ l}\Gamma^{l}_{mn,o} + 2T^{;xy;mn}_{\omega\ \lambda}F^{\lambda}_{mn} \qquad \text{(L4.3)}$$

Con lo que (L4.1) adopta la forma:

$$4T = S^{;mn}_{l}\Gamma^{l}_{mn} + 2T^{;xy,z;mn,o}_{v\ l}\Gamma^{v}_{xy,z}\Gamma^{l}_{mn,o} + 4T^{;xy,z;mn}_{v\ \lambda}\Gamma^{v}_{xy,z}F^{\lambda}_{mn} +$$
$$+ 2T^{;xy;mn}_{\omega\ \lambda}F^{\omega}_{xy}F^{\lambda}_{mn} \qquad \text{(L4.4)}$$

donde en $S^{;mn}_{l}\Gamma^{l}_{mn}$ se han agrupado todos los términos que admiten como factor a Γ^{l}_{mn} al menos una vez.

$T^{;xy,z;mn,o}_{v\ l}$, $T^{;xy,z;mn}_{v\ \lambda}$ y $T^{;xy;mn}_{\omega\ \lambda}$ son densidades tensoriales.

Entonces, por un cambio de sistema coordenado $x^{i} = \lambda\tilde{x}^{i}$, se tiene:

$$T^{;xy,z;mn,o}_{v\ l}(\lambda\Gamma^{a}_{bc};\lambda^{2}\Gamma^{a}_{bc,d};\lambda^{2}F^{\beta}_{bc}) = T^{;xy,z;mn,o}_{v\ l}(\Gamma^{a}_{bc};\Gamma^{a}_{bc,d};F^{\beta}_{bc})$$
$$T^{;xy,z;mn}_{v\ \lambda}(\lambda\Gamma^{a}_{bc};\lambda^{2}\Gamma^{a}_{bc,d};\lambda^{2}F^{\beta}_{bc}) = T^{;xy,z;mn}_{v\ \lambda}(\Gamma^{a}_{bc};\Gamma^{a}_{bc,d};F^{\beta}_{bc})$$
$$T^{;xy;mn}_{\omega\ \lambda}(\lambda\Gamma^{a}_{bc};\lambda^{2}\Gamma^{a}_{bc,d};\lambda^{2}F^{\beta}_{bc}) = T^{;xy;mn}_{\omega\ \lambda}(\Gamma^{a}_{bc};\Gamma^{a}_{bc,d};F^{\beta}_{bc})$$

(L4.5)

Las relaciones (L4.5) son válidas para todo $\Gamma^{a}_{bc},\Gamma^{a}_{bc,d}$ y F^{β}_{bc}. En particular para el reemplazo de éstos por $\lambda\Gamma^{a}_{bc}$, $\lambda^{2}\Gamma^{a}_{bc,d}$ y $\lambda^{2}F^{\beta}_{bc}$, para lo cual se tiene:

$$T^{;xy,z;mn,o}_{v\ l}(\lambda^{2}\Gamma^{a}_{bc};\lambda^{4}\Gamma^{a}_{bc,d};\lambda^{4}F^{\beta}_{bc}) = T^{;xy,z;mn,o}_{v\ l}(\Gamma^{a}_{bc};\Gamma^{a}_{bc,d};F^{\beta}_{bc})$$

y relaciones similares para las dos expresiones restantes.

Inductivamente se prueba, $\forall n\in\mathbb{N}$ que:

$$T^{;xy,z;mn,o}_{v\ l}(\lambda^{n}\Gamma^{a}_{bc};\lambda^{2n}\Gamma^{a}_{bc,d};\lambda^{2n}F^{\beta}_{bc}) = T^{;xy,z;mn,o}_{v\ l}(\Gamma^{a}_{bc};\Gamma^{a}_{bc,d};F^{\beta}_{bc})$$

(y similares relaciones *mutatis mutandi*).

Sea ahora $\lambda = 1/2$. Tomando el límite para $n\longrightarrow\infty$ y teniendo en cuenta el caracter C^{∞} de T, se deduce:

$$T^{;xy,z;mn,o}_{v\ l}(\Gamma^{a}_{bc};\Gamma^{a}_{bc,d};F^{\beta}_{bc}) = T^{;xy,z;mn,o}_{v\ l}(0;0;0)$$

$$T^{;xy,z;mn}_{\nu\ \ \lambda}(\Gamma^a_{bc};\Gamma^a_{bc,d};F^\beta_{bc}) = T^{;xy,z;mn}_{\nu\ \ \lambda}(0;0;0)$$

$$T^{;xy;mn}_{\omega\ \lambda}(\Gamma^a_{bc};\Gamma^a_{bc,d};F^\beta_{bc}) = T^{;xy;mn}_{\omega\ \lambda}(0;0;0) \qquad \text{(L4.6)}$$

L4.6 implica que los objetos considerados son densidades tensoriales *isotrópicas*. Noriega muestra [5.8] que se trata de combinaciones lineales de productos tensoriales de ε^{hijk} y de δ^a_b.

Por lo tanto, integrando en (L4.6), recurriendo a un sistema coordenado geodésico ($\Gamma^a_{bc} = 0$) y volviendo a (L4.4), se tiene:

$$T \quad A\varepsilon^{hijk}\Gamma^a_{ah,i}\Gamma^b_{bj,k} + B\varepsilon^{hijk}\Gamma^a_{bh,i}\Gamma^b_{aj,k} + C_\alpha\varepsilon^{hijk}\Gamma^a_{ah,i}F^\alpha_{jk} + D_{\alpha\beta}\varepsilon^{hijk}F^\alpha_{hi}F^\beta_{jk}$$

$$A\varepsilon^{bcde}K_b{}^a{}_{ca}K_d{}^h{}_{eh} + B\varepsilon^{bcde}K_b{}^a{}_{ch}.K_d{}^h{}_{ea} + C_\alpha K^a{}_{hia}\,{}^*F^{\alpha hi} + D_{\alpha\beta}\,{}^*F^{\alpha hi}F^\beta_{hi} \qquad \text{(L4.7)}$$

Como esta identidad tiene caracter tensorial vale en cualquier sistema coordenado.

LEMA 5.5

$$T = A\varepsilon^{bcde}K_b{}^a{}_{ca}K_d{}^h{}_{eh} + B\varepsilon^{bcde}K_b{}^a{}_{ch}.K_d{}^h{}_{ea} + C_\delta\varepsilon^{bcde}K_b{}^a{}_{ca}.\,{}^*F^{\delta bc} + D_{\beta\chi}\phi^{\beta\chi}$$

satisface identicamente las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$E^{bc}(T) = 0 \qquad (5.11)$$

$$E^{bc}_a(T) = 0 \qquad (5.12)$$

$$E^b_\alpha(T) = 0 \qquad (5.13)$$

D/

T satisface (5.11) trivialmente al no depender del tensor métrico. Usando un sistema coordenado geodésico ($\Gamma^a_{bc} = 0$), $E^{bc}_a(T)$ tiene la forma:

$$E^{bc}_a(T) = -\partial/\partial x^d(\partial T/\partial\Gamma^a_{bc,d})$$

$$= -[2A\varepsilon^{hdjk}\Gamma^u_{uh,k}s^{bc}_{aj} + 2B\varepsilon^{hdjk}\Gamma^u_{aj,k}s^{bc}_{uh} + C_\alpha\varepsilon^{hdjk}s^{bc}_{ah}F^\alpha_{jk}]_{,d}$$

$$= 0 \qquad \text{(L5.1)}$$

debido a la antisimetría de ε^{hdjk} en todos los índices y a la relación (5.05). Respecto del operador de Euler -Lagrange en (5.13):

$$E_{\alpha}^{b}(T) = T_{\alpha}^{;b} - (T_{\alpha}^{;b,c})_{,c}$$

Usando el teorema del reemplazo de Horndeski [4.5], el término $T_{\alpha}^{;b}$ es nulo, por depender de A_{b}^{α} (y ser 0). Entonces:

$$\begin{aligned} E_{\alpha}^{b}(T) &= -(T_{\alpha}^{;b,c})_{,c} \qquad \text{(L5.2)} \\ &= 2C_{\alpha}\varepsilon^{hibc}\Gamma^{\alpha}_{ah,ic} + 2D_{\alpha\beta}\varepsilon^{bcjk}F^{\beta}_{jk,c} \\ &= 0 \end{aligned}$$

debido a los mismos motivos aludidos respecto de $E_{a}^{bc}(T)$.

GLOSARIO DE PUBLICACIONES

ARM&A: Archive for Rational Mechanics and Analysis

GR&G: General Relatity and Gravitation

JMP: Journal of Mathematical Physics

JRM&A: Journal of Rational Mechanics and Analysis

JMPA: Journal of Mathematical Pure and Applied

TTSP: Transport Theory of Statistical Physics

UM: Utilitas Mathematica

UMA: Revista de la Unión Matemática Argentina

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS DEL CAPITULO 1

[1.1] A. Einstein "The Meaning of Relativity" (1922-1950) Chapman & Hall Londres

[1.2] E. Cartan (1922) JMPA 1,141-203

[1.3] D. Lovelock (1969) ARM&A 33,54

[1.4] S. Hawking- F. Ellis "The Large Scale Structure of Space-Time- Cam. Univ. Press.

[1.5] E. Schrödinger "Space-Time Structure" Cam.Univ.Press

[1.6] C.A. García Canal (1981) "Introducción a la Teoría de Campos de Medida" Serie Fís. de Part. y Campos, 4, Dto.Fís. U.N. La Plata

[1.7] E. Noether (1918) "Invariant Variation Problems" (1971) TTSP 1,186-207 (trad. M.A. Tavel)

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS DEL CAPITULO 2

[2.1] J.A. Schouten (1954) "Ricci Calculus" Springer Berlin

[2.2] A. Nijenhuis (1958) Proc. Int. Cong. Math. 14-21

[2.3] H. Rund (1966) "Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg",29,243

[2.4] K. Kobayashi - K. Nomizu (1969) "Foundation of Differential Geometry" Vol. I Wiley Interscience

[2.5] G.W. Horndeski (1981) ARM&A 75,211

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS DEL CAPITULO 3

[3.1] B. Kerrighan (1982) JMP

[3.2] R.J. Noriega-C. Schifini (1989) JMP

[3.3] B. Kerrighan (1981) GR&G 13,1,19

[3.4] R.J. Noriega-C. Schifini (1984) GR&G

[3.5] V. Hlavaty (1952) JRM&A 1,533-562

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS DEL CAPITULO 4

[4.1] R. M^{c}Kellar (1979) GR&G 10,467

[4.2] G.W. Horndeski, (1980) ARM&A

[4.3] C.N. Yang (1975) "Gauge Fields" Proc.VI Hawaii Top. Conf. on Part. Phys.

[4.4] D. Lovelock (1970) ARM&A 36,4,293

[4.5] G.W. Horndeski (1981) UM 19,215

[4.6] M.C. López - R.J. Noriega - C. Schifini (1989) JMP

[4.7] R.J. Noriega - C. Schifini, (1988) GR&G 9,983

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS DEL CAPITULO 5

[5.1] R.J. Noriega (1985) GR&G 7,629

[5.2] D. Lovelock (1969) ARM&A 33,54

[5.3] D. Prelat (1988) GR&G 9,983

[5.4] D. Prelat (por aparecer) UM

[5.5] R.J. Noriega (por aparecer) GR&G

[5.6] R.J. Noriega (1985) GR&G 7,629

[5.7] M.C. Calvo - M.C. López - R. Noriega - C. Schifini (por aparecer) GR&G

[5.8] R.J. Noriega (1984) UMA