Introducción a una teoría espectral no conmutativa

Boasso, Enrique Carlos Raúl

1989

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Introducción a una teoría espectral no conmutativa

por
ENRIQUE CARLOS RAUL BOASSO

Director de Tesis
Dr. Angel Rafael Larotonda

Lugar de Trabajo
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Tesis presentada para optar al título de:
Doctor en Ciencias Matemáticas
1989

INDICE

Introducción

Notación

I Conceptos básicos

II El espectro de un álgebra de Lie de operadores

III Propiedades fundamentales del espectro

IV Algunas consecuencias

V Propiedad de la aplicación espectral y cálculo funcional holomorfo

INTRODUCCION

Para un álgebra de Banach A, $(a_1, \ldots, a_n)$ una n-upla de elementos de A contenidos en su centro y X un A módulo de Banach (un espacio de Banach en el cual los elementos de A actuan como operadores acotados), J. F. Taylor definió en [9] una noción de espectro conjunto ($\mathrm{Sp}(a, X)$) de la n-upla $(a_1, \ldots, a_n)$ mediante el estudio de la exactitud del complejo de Koszul asociado a X y a a, además demostró que $\mathrm{Sp}(a, X)$ es un compacto no vacio de C^n y que posee la propiedad de la proyección. En [10], el mismo autor construyó el cálculo funcional holomorfo asociado a $\mathrm{Sp}(a, X)$; mientras que en [11], introdujo los conceptos básicos de algebra homológica en el contexto de álgebras topológicas, los cuales son usados en [12]; para dar una nueva versión del cálculo funcional holomórfo. Por último dicho autor, extendió en [13] parte de los resultados de [12] al caso de n-uplas de operadores que no conmutan.

El objeto del presente trabajo es el de dar una definición de espectro para n-uplas de operadores en un espacio de Banach, las cuales definen un álgebra de Lie,L. Dicho espectro posee la siguiente propiedad: si L es conmutativa, entonces se obtiene el espectro de Taylor.

Informalmente hablando, sea L un álgebra de Lie, $G(L)$ un grupo de Lie complejo conexo y simplemente conexo tal que su álgebra de Lie sea L, f un elemento de L^* y P una polarización de f, esto es: una subálgebra maximal con respecto a la propiedad $f([P, P]) = 0$. Sea $U(P)$ el álgebra envolvente de Py si E es un espacio de Banach donde L actúa, entonces E es un $U(L)$ y un $U(P)$ módulo. Por último, consideremos $\mathbf{C}(f|P)$, el $U(P)$ módulo a izquierda definido sobre $\mathbf{C}$ a través de $f|P$. Entonces E, P y $\mathbf{C}(f|P)$ definen un complejo de Koszul $(E \otimes \wedge^i|P, d_{i-1})$, cuya homología da los espacios $Tor^{U(P)}(E, \mathbf{C}(f|P))$; como esta homología es independiente (en algún sentido a precisar) de las órbitas por la representación coadjunta de $G(L)$ en L se define

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(L, E) = \{\alpha \in L^*/\mathrm{Coad}(L) : \exists f \in \alpha \\ \mathrm{Tor}^{U(P)}(E, \mathbf{C}(f|P)) \neq 0\} \end{aligned}$$

con lo cual, $\mathrm{Sp}(L, E)$ es un objeto geométrico contenido en un espacio de órbitas. En el caso conmutativo, $L \cong \mathbf{C}^n$, $G(L) = (\mathbf{C}^n, +)$, $L^*/\mathrm{Coad}(L) = L^*$, es decir, cada órbita es puntual, además, si pensamos las n-uplas de números complejos (λ) como elementos de L^* se tiene que $P = L$, $U(P) = U(L) = \mathbf{C}[X, \ldots X_n] = P_n$. Por otra parte, el complejo anterior coincide con el de Taylor de [12] en el caso conmutativo y su homología consiste en Tor^{P_n} $(E, \mathbf{C}(\lambda))$, de donde obtenemos el espectro usual de Taylor en el caso conmutativo.

Este espectro posee varias de las propiedades clásicas que son compartidas por los diferentes espectros definidos para teorías conmutativas y las generaliza para álgebras de Lie de operadores. Entre ellas, es compacto, no vacío y posee la propiedad de la proyección. Más aún, $\mathrm{Sp}(L, E)$ está contenido en un subespacio lineal de L^*: el de las órbitas singulares por la acción coadjunta de $G(L)$. Esta propiedad es fundamental para la teoría, pues, permite considerar al espectro no ya contenido en un espacio cociente, sino como un subconjunto de la forma $\{0\} \times \mathbf{C}^{n-k}$, con dim $L^2 = k$ y dim $L = n$, vía un sistema de coordenadas apropiado. Por otra parte, tanto la propiedad de la aplicación espectral, cuanto el problema del cálculo funcional holomorfo dejan de verificarse cuando L no es conmutativa, es este último hecho que convierte a la teoría esencialmente diferente del caso clásico.

Los temas tratados se han organizado de la siguiente forma: en el primer capítulo se enuncian varios de los resultados más conocidos de múltiples áreas que serán usados con frecuencia. En el segundo capítulo, se define el espectro para álgebras de Lie no conmutativas, se demuestran algunas de sus propiedades elementales y su coincidencia con la Teoría de Taylor en el caso conmutativo. En el tercero, se prueban los resultados característicos de una teoría espectral, no vacuidad, compacidad y fórmula de la proyección, mientras que en el cuarto se deducen varias consecuencias de las proposiciones del capítulo precedente. Por último, en el quinto se trata el problema del Cálculo Funcional holomorfo.

INDICE.

Capítulo I

Sección A

L, L^k, C^k, L^2, $S = (L_i)_{0 \leq i \leq n}$, (E, φ), $\mathcal{G}(E)$, ad

Sección B

$V(L)$, $V(\varphi)$, $T(L)$, $K(f)$, $(\mathbf{C}(f))$, $E(f)$.

Sección C

$PV(f, S)$

Sección D

$\mathrm{ind}(\varphi, L)$, $\widetilde{\mathrm{ind}}(\varphi, L)$.

Sección E

$G(L)$, G, $\exp$, Ad, Ad^{λ}, $\mathcal{G}(f)$.

Sección F

G_X, GX.

Sección G

ΛV, $\Lambda^p V$.

Sección I

$\otimes_i$, $\otimes_\pi$, $\overline{\otimes}$, $\hat{\otimes}$.

Capítulo II

Sección B

$\sigma(L, JH)$, $S_p(L,E,S)$, $S_p(L,E)$, $S_p(L,E,\text{Sing})$, $S_p(E, X_{i(1\le i\le n)})$, $S_p(E,(X_i)_{1\le i\le n},\text{Sing})$.

CAPITULO I

CONCEPTOS BASICOS

I.A Algebras de Lie

I.B Algebras envolventes

I.C Polarizaciones

I.D Representaciones

I.E Grupos de Lie

I.F Espacios homogéneos

I.G Algebra exterior

I.H Algebra homológica

I.I Productos tensoriales topológicos y espacios nucleares

En este capítulo se definirán y enunciarán los conceptos y proposiciones básicos, los cuales, en general, no pertenecen al Análisis Funcional. Se indicarán fuentes de consulta para profundizar temas.

I.A ALGEBRAS DE LIE ([2]).

Un álgebra de Lie es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, con una aplicación bilineal (notada $(x,y) \to [x,y]$) que define una estructura de K-álgebra en L que satisface las siguientes propiedades:

i) $[x,x] = 0$

ii) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$.

En nuestro caso $K = \mathbf{C}$, y todas las álgebras consideradas serán de dimensión finita.

Sea h un subespacio de L, h es un ideal (subálgebra) de L si $[L,h]([h,h]) \subseteq h$. En particular para $h = L$, el ideal $L^2 = [L,L]$ será llamado el conmutador de L, o su álgebra derivada. Un álgebra de Lie se dice conmutativva si $L^2 = 0$. Se llamará $L^k(C^k)$ a la serie derivada (central descendente) definida de la siguiente forma: $L^0 = L$,

$$L^{k+1} = [L^k, L^k] \quad (C^0 = L,\ C^{k+1} = [L, L^k]) \quad K \geq 0$$

Sean L_i ($i = 1,2$) dos álgebras de Lie, y sea ℓ un elemento de Horn (L_1, L_2), ℓ es un morfismo de álgebras de Lie si satisface

$$\ell([x_1 x_2]) = [\ell(x_1), \ell(x_2)] \quad (x_u\ (u = 1,2) \text{ en } L_1)$$

Si $h \subseteq L$ es un ideal, el espacio vectorial $L|h$ tiene una estructura natural de álgebra de Lie tal que la proyección de L sobre $L|h, \Pi$, es un morfismo de álgebras de Lie.

Si $h = L^2$, entonces $L|L^2$ es conmutativa.

Si E es un espacio vectorial, $\mathrm{End}_K(E)$ tiene una estructura de Algebra de Lie con el producto definido por U, V en $\mathrm{End}_k(E)$, $[U,V] = UV - VU$. Esta álgebra será notada por $\mathcal{G}L(E)$. Sea L un álgebra de Lie, un par (E, φ) se dirá una representación de L si φ es un morfismo de álgebras de Lie entre L y $\mathcal{G}L(E)$. A E se lo llamará el espacio de la representación. En particular si $E = L$, y $\varphi = \mathrm{ad}$, el morfismo definido por $\mathrm{ad}(x)(y) = [x,y]$, entonces (L, ad) es la representación adjunta de L.

Una sucesión de Jordan Hölder $(S = (L_i)_{0 \leq i \leq n})$ de álgebra L consiste de una cadena de ideales L_i que verifican las siguientes propiedades

i) $L_0 = 0$, $L_n = L$ $\quad (n = \dim\ L)$

ii) $L \subseteq L_{i+1}$

iii) $\dim\ L_i = i$

Un álgebra de Lie se dirá resoluble (nilpotente) si existe un K en $\mathbf{N}$ tal que $L^K(C^K) = 0$; y completamente resoluble si L posee una sucesión de Jordan Hölder. Se verifica que una álgebra nilpotente es completamente resoluble, y a su vez resoluble.

Se tienen las siguientes proposiciones: Sea L un álgebra de Lie sobre K

Proposición 1: L es resoluble si y sólo si L^2 es nilpotente ([2], V;3).

Proposición 2: Si K es algebraicamente cerrado, e I es un ideal de L, la cual es un álgebra resoluble, entonces I es miembro de una sucesión Jordan Hölder de L ([2], V;3).

Proposición 3: Si K es algebraicamente cerrado, L es un álgebra de Lie resoluble si y sólo si es completamente resoluble ([4], I;3.14).

Proposición 4: Sea L un álgebra de Lie. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes

a) L es nilpotente

b) $C^k = 0$ para k suficientemente grande

c) Existe un entero K, tal que ad $x_1 \circ \ldots \circ$ ad $x_k = 0$ para $x_1, \ldots, x_k$ elementos arbitrarios de L

d) Existe una sucesión decreciente de ideales $\{L_i'\}_{0 \leq i \leq \dim L}$ tal que $L_0' = L$, $L_n' = \{0\}$, dim $L_i = i$, y $[L, L_i'] \subset L_{i+1}'$ para $0 \leq i \leq n$ ([2], IV;1).

Reordenando la sucesión de la proposición anterior, se obtiene una sucesión creciente de ideales L_i, $0 \leq i \leq n$ tal que $L_0 = \{0\}$, $L_n = L$ y dim $L_i = i$, como $L_i = L_{n-i}'$, la condición $[L, L_i'] \subseteq L_{i+1}'$ se transforma en $[L, L_i] \subseteq L_{i-1}$, pues $[L, L_i] = [L, L_{n-i}'] \subseteq L_{n-i+1}' = L_{n-(i-1)}' = L_{i-1}$.

I.B ALGEBRAS ENVOLVENTES ([3], XII).

Sea L un álgebra de Lie, se denominará álgebra tensorial de L, $T(L)$ a la k-álgebra asociativa y graduada definida por:

$$T_0(L) = K\,, \quad T_n(L) = \bigotimes_{i=1}^{n}{}_k L\,,$$

con el producto

$$(X_1 \otimes \ldots \otimes X_p) \cdot (Y_1 \otimes \ldots \otimes Y_q) = X_1 \otimes \ldots \otimes X_p \otimes Y_1 \otimes \ldots \otimes Y_q$$

Sea h el ideal bilátero generado por los elementos de la forma

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]\,, \qquad (X, Y \text{ en } L)$$

Entonces se define como álgebra envolvente de L, al objeto: $U(L) = T(L)/h$.

Si (E,φ) es una representación del álgebra L, entonces se dirá que (E,φ) es una representacií a izquierda (derecha) si φ es un morfismo de álgebras de Lie entre L y $\mathcal{G}L(E)$

$(\mathcal{G}L(E)^{\text{op}})$ donde op indica el producto $T \times S_{\text{op}} = ST$, para S, T elementos de $\text{End}_k(E)$, en tal caso se verifica que $[S,T]^{\text{op}} = -[T,S]$.

Entonces, el álgebra $U(L)$ satisface la siguiente propiedad: (E,φ) es un espacio de representación a izquierda (derecha) para L si y sólo si E es un $U(L)$ módulo a izquierda (derecha). Si L es conmutativa, entonces $U(L) = \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n] = P_n$. Además, como $T_1(L) = L$, se define una aplicación natural i de L en $U(L)$ que resulta ser inyectiva ([3], XIII,3).

Si L_i $(i = 1,2)$ son dos álgebras de Lie, y ℓ un morfismo de L_1 en L_2, entonces ℓ se extiende en forma natural a un morfismo de álgebras entre $U(L_1)$ y $U(L_2)$, notado $U(\ell)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "\ell"] \arrow[d, "i_1"'] & L_2 \arrow[d, "i_2"] \\ U(L_1) \arrow[r, "U(\ell)"'] & U(L_2) \end{tikzcd}$$

El siguiente teorema será de gran utilidad.

Teorema 5 (Poincaré, Birkhoff, Witt). Sea $\{X_i\}_{1\le i\le n}$ una base de L como K-espacio vectorial, sea $Y_\alpha = i(Y_\alpha)$. Si I es una sucesión finita creciente de enteros no negativos $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$, se define

$$\begin{cases} Y_I = 1 & I = \phi \\ Y_I = Y_{\alpha_1}\ldots Y_{\alpha_p} & \text{si } I = (\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\ ,\ \alpha_1 \le \ldots \le \alpha_p \end{cases}$$

Entonces el conjunto $\{Y_\alpha\}$ es una base como K espacio vectorial de $U(L)$ ([3], XIII, 3).

Como consecuencia de este hecho se tiene que si h es una subálgebra de L, entonces $U(L)$ es un $U(h)$ módulo libre a izquierda o derecha.

Si L es un álgebra de Lie y f un elemento del dual algebraico (L^*) tal que $f(L^2) = 0$, entonces f define una representación de dimensión 1 en k. Luego, por la caracterización de $U(L)$, k tiene una estructura de $U(L)$ módulo a izquierda que se notará $K(f)$ y a la aumentación canónica de $U(L)$ en $K(f)$ se la denotará ε_f.

I.C POLARIZACIONES.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y B una forma bilineal alternada definida sobre B. Si ω es un subespacio de V se notará $\omega^\perp$ al subespacio ortogonal de ω relativo a B. Se dirá que ω es isotrópico si $\omega \subset \omega^\perp$ y en tal caso dim $\omega \leq \frac{1}{2}$ (dim V + dim $V^\perp$).

Las siguientes condiciones son equivalentes ([4], I, 12):

a) ω es isotrópico maximal

b) dim $\omega = \frac{1}{2}$ (dim V + dim $V^\perp$)

c) $\omega \supset \omega^\perp$

d) $\omega = \omega^\perp$

Si se satisfacen las condiciones anteriores, entonces $\omega \supset V^\perp$.

Sea L un álgebra de Lie, f un elemento de su dual algebraico (f en L^*). Esto define una forma bilineal alternada sobre L, B_f

$$B_f : L \times L \longrightarrow \mathbf{C}$$
$$B_f(x, y) = f([x, y])$$

Una subálgebra h isotrópica se llamará una polarización, si es maximal, equivalentemente, una polarización es una subálgebra que verifica

i) $f([h, h]) = 0$

ii) dim $h = \frac{1}{2}$ (dim L + dim $L^\perp$)

Sea L un álgebra de Lie completamente resoluble y $S = (L_i)_{0 \leq i \leq n}$ una sucesión de Jordan Hölder.

Sea S_j la sucesión $S_j = (L_i)_{0 \leq i \leq j}$, esto define para cada j una sucesión de Jordan Hölder de L_j, sea f_i la restricción de f a L_i y $g_i(f) = \ker B_{f_i}$ en L_i, $g_i(f) = L_i \cap L_i^\perp$, donde $\perp$ se refiere a la forma bilineal B_f. Sea $PV(f, S) = \sum_{i=0}^{n} g_i(f_i)$, entonces

Teorema 6. En las condiciones anteriores

1) $PV(f,S)$ es un subespacio totalmente isotrópico maximal para la forma Bf
2) $PV(f,S)$ es una subálgebra
3) $PV(f,S) \cap L_j = PV(f_j, S_j)$
4) Dada g en L^* tal que $g(PV(f,S)) = 0$, entonces $PV(f+g,S) = PV(f,S)$
5) Si φ es un automorfismo de L que deja estable f y S, entonces deja estable $PV(f,S)$ ([1], IV, 14).

I.D REPRESENTACIONES ([4], V).

Sea L un álgebra de Lie, y h una subálgebra, sea (ω, φ) una representación de h. Consideremos a $U(L)$ como $U(h)$ módulo a derecha y sea ind (φ, L) el L-módulo inducido por ω: ind $(\varphi, L) = U(L) \bigotimes_{U(h)} \omega$ el cual brinda una representación de L.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y V_1 un subespacio de V, sea u en $\mathrm{End}_K(E)$ tal que V_1 es estable por u. Se considera el escalar

$$\mathrm{tr}\, u - \mathrm{tr}(u|V_1) = \mathrm{tr}\, V|V_1\, u$$

Si h es una subálgebra de L, entonces para todo X en h, se tiene

$$\theta_{L,h}(X) = \frac{1}{2}\, \mathrm{tr}_{L|h}\, \mathrm{ad}_L(X)$$

Entonces $\theta_{L,h}$ es una forma lineal sobre h tal que $\theta_{L,h}(L^2) = 0$.

Además si h es un ideal de L, entonces $\theta_{L,h} = 0$ y si L es nilpotente $\theta_{L,h} = 0$ para toda subálgebra h de L.

Si h es una subálgebra de L y (ω, φ) es una representación de h, entonces para todo X en h $\widetilde{\varphi}(X) = \varphi(X) + \theta_{L,h}(X)I$ define una representación de h en ω, y al L-módulo inducido por $(\omega, \widetilde{\varphi})$ se lo nota $\widetilde{\mathrm{ind}}(\varphi, \omega)$ y se lo llama el L-módulo retorcido inducido por ω. Notar que si L es nilpotente, entonces $\widetilde{\mathrm{ind}}(\varphi, \omega) = \mathrm{ind}(\varphi, \omega)$.

Si h es una subálgebra de L, u pertenece a $U(L)$ y X es un elemento de h se define el producto

$$u * X = uX - \theta_{L|h}(x)u\,.$$

Entonces sobre $U(L)$ existe una única estructura de $U(h)$ módulo a derecha tal que $u\,.\,X = u * X$ y $u * 1 = u$, con esa estructura $U(L)$ es un $U(h)$ módulo libre a derecha. Sea (ω, φ) como antes, entonces si a $U(L)$ se lo considera con la estructura anterior, resulta $U(L) \otimes_{U(h)} \omega \cong \widetilde{\mathrm{ind}}(\varphi, \omega)$ como L-módulos.

Se tiene el siguiente teorema

Teorema 7. Sea L un álgebra de Lie, $S = (L_i)_{0 \leq i \leq n}$ una sucesión de Jordan Hõlder, sea f en L^* y $P = PV(f, S)$ entonces $\mathrm{ind}(f|P, L)$ e $\widetilde{\mathrm{ind}}(f, L)$ son L-módulos simples ([4],VI).

I.E GRUPOS DE LIE ([15,II]).

Un grupo de lIe será un grupo topológico G, con una estructura de variedad analítica compleja compatible con la topología de G tal que las aplicaciones

$$(x, y) \to x, y \quad ((x, y) \text{ en } G^2)$$
$$x \to x^{-1} \quad (x \text{ en } G)$$

son analíticas.

H será un subgrupo de Lie de G si es un subgrupo para la estructura multiplicativa, posee una estructura de grupo de Lie y es una subvariedad analítica de G.

Esta última condición asegura que la inclusión sea una aplicación analítica y además su diferencial sea inyectiva.

Con 1 se notará el elemento unidad de G.

Un grupo de Lie se dirá un grupo analítico si es conexo. En tal caso se tiene el siguiente resultado

Proposición 8. Sea G un grupo analítico, y sea U un entorno de 1 en G. Entonces $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, donde U^n consiste de todos los n-productos de elementos de U (U genera G) ([17],III).

Dado un grupo de Lie G, el conjunto de los campos vectoriales holomorfos invariantes a izquierda sobre G posee una estructura de álgebra de Lie, que se denotará $\mathcal{G}(G)$, y se la llamará el álgebra de Lie de G. Se tienen las siguientes proposiciones

Proposición 9. Sea G un grupo de Lie y $\mathcal{G}(G)$ su álgebra de Lie. Entonces la aplicación $X \to X_1$ (X en $\mathcal{G}(G)$) es un isomorfismo lineal de $\mathcal{G}(G)$ sobre el espacio $T_1(G)$. En particular dim $G =$ dim $\mathcal{G}(G)$. Esto permite introducir en $T_1(G)$ via el isomorfismo anterior una estructura de álgebra de Lie, isomorfa a la de $\mathcal{G}(G)$.

Teorema 10. Existe una correspondencia biyectiva entre subgrupos analíticos de G y las subálgebras de Lie $\mathcal{G}(G)$. Esta correspondencia asocia a cada subgrupo analítico su álgebra de Lie.

Teorema 11. Sean G_i ($i = 1, 2$) grupos analíticos y sea λ un morfismo de Lie entre $\mathcal{G}(G_1)$ y $\mathcal{G}(G_2)$. Entonces no puede existir más de un morfismo analítico entre G_1 y G_2 tal que $d\Pi = \lambda$. Además, si G_1 es simplemente conexo, entonces existe un tal Π.

Uno de los elementos más útiles de la teoría de grupos de Lie es la aplicación exponencial, la cual relaciona G con $\mathcal{G}(G)$. Se la define de la siguiente forma:

$(C, +)$ es un grupo analítico complejo simplemente conexo, sea z su coordenada usual, se tiene el operador diferencial $\left(\frac{d}{dz}\right)_{z=\tau}$ (τ en $\mathbf{C}$) definido en $T_\tau(\mathbf{C})$ (τ en $\mathbf{C}$). Sea X en $\mathcal{G}(G)$, por el teorema 11, existe un único morfismo analítico ξ_X de $\mathbf{C}$ en G tal que

$$d\xi_X\left(\frac{d}{dz}\right) = X\,.$$

Más aún, la aplicación que envía X en ξ_X es una biyección de $\mathcal{G}(G)$ sobre el conjunto de todos los morfismos analíticos complejos de $\mathbf{C}$ en G.

Se tiene la igualdad

$$\xi_{tX}(\tau) = \xi_X(t_\tau) \qquad (t, \tau \text{ en } \mathbf{C})$$

Entonces se define

$$\exp X = \xi_X(1) \qquad (X \text{ en } \mathcal{G}(G)) \text{ y se tiene}$$

Teorema 12. Sea G un grupo de Lie, $\mathcal{G}(G)$ su álgebra de Lie, entonces la aplicación exponencial es analítica entre $\mathcal{G}(G)$ y G. Más aún, si $\mathcal{G}(G)$ es la suma directa de subespacios lineales $h_1, \ldots, h_S$ $(S \geq 1)$, entonces existen entornos abiertos B_i de 0 en h_i $(1 \leq i \leq S)$ y de 1 en G, U tal que la aplicación $\varphi(z_1, \ldots, z_S) = \exp z_1 \ldots \exp z_S$ es un difeomorfismo analítico de $B_1 X \ldots X B_S$ sobre U.

Teorema 13. Sean G_i $(i = 1,2)$ grupos de Lie y $\mathcal{G}(G_i)$ $(i = 1,2)$ sus álgebras de Lie respectivas. Sea Π un morfismo analítico de G_1 en G_2, entonces

$$\Pi \exp x = \exp d\Pi(x) \qquad (x \text{ en } \mathcal{G}(G))$$

Teorema 14. Sea G un grupo de Lie, con álgebra de Lie $\mathcal{G}(G)$, H un subgrupo de Lie de G y sea $\mathcal{H}$ la subálgebra de $\mathcal{G}(G)$ definida por H. Sea X en $\mathcal{G}(G)$. Entonces X pertenece a $\mathcal{H}$ si y sólo si $\exp tX$ es un elemento de H (t en $\mathbf{C}$). Por último, como consecuencia de estos teoremas, podemos agregar la siguiente proposición

Proposición 15. Sea G un grupo de Lie y $\mathcal{G}(G)$ su álgebra de Lie. Sean L_1 y L_2 dos subálgebras de $\mathcal{G}(G)$ y G_1, G_2 sus respectivos grupos analíticos asociados (teorema 10). Entonces si $L_1 \subset L_2$, resulta que $G_1 \subset G_2$.

Demostración. Es consecuencia de la proposición 8 y de los teoremas 12 y 14.

Sea G un grupo de Lie complejo, y V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbf{C}$. Una representación de G en V es un morfismo de grupos de Lie entre G y $GL(V)$, esto es un morfismo Π tal que

$$\Pi : G \longrightarrow GL(V)$$

y satisface las siguientes propiedades

a) $\Pi(1) = 1$

b) $\Pi(xy) = \Pi(x)\Pi(y) \quad (x, y \text{ en } G)$

c) Si $v \in V$, la aplicación $x \to \Pi(x)v$ es analítica.

En el caso de los grupos de Lie existe una representación canónica, la representación adjunta definida de la siguiente manera:

Sea y en G, la aplicación iy : $iy(x) = yxy^{-1}$ es un difeomorfismo analítico de G tal que $iy(1) = 1$. Entonces diy_1 pertenece a Aut $(\mathcal{G}(G))$, la representación adjunta de G es la aplicación definida por

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}(G)) = GL(\mathcal{G}(G))$$

Ad $(x) = (di_x)_1$, la cual posee las siguientes propiedades

Teorema 16. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathcal{G}(G)$. Entonces la diferencial de la representación adjunta de G, es la representación adjunta de $\mathcal{G}(G)$. Más aún

$$\mathrm{Ad}(\exp X) = e^{\mathrm{ad}\, X} \qquad (x \text{ en } \mathcal{G}(G))$$

En otros términos, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(G) \arrow[r, "\mathrm{ad}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathrm{End}(L) \arrow[d, "\exp"] \\
G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"'] & \mathrm{Aut}(L)
\end{tikzcd}$$

Teorema 17. Sea G un grupo de Lie analítico, con álgebra de Lie $\mathcal{G}(G)$. H un subgrupo analítico de G, y $\mathcal{H}$ la correspondiente subálgebra de $\mathcal{G}(G)$. Entonces H es normal en G si y sólo si $\mathcal{H}$ es un ideal en $\mathcal{G}(G)$. En tal caso, ad $(x)\mathcal{H} = \mathcal{H}$ para todo X en G.

Dada la representación Ad de G, se puede definir la representación coadjunta de G notada Ad^*, de la siguiente forma

$$\mathrm{Ad}^* : G \to GL(\mathcal{G}(G)^*)$$
$$\mathrm{Ad}^*(g)f = f\,\mathrm{Ad}\, g - 1$$

Por último, se tiene el siguiente teorema (Tercer Teorema de Lie)

Teorema 18. Para toda álgebra de Lie de dimensión finita L, existe un grupo analítico conexo y simplemente conexo tal que $\mathcal{G}(G) = L$ ([8], LG, V).

I.F ESPACIOS HOMOGENEOS ([15], II).

Sea G un grupo de Lie, M una variedad analítica, se dirá que G actua analíticamente sobre M si existe una aplicación analítica A de $G \times M$ en M tal que

$$A(g, X) = g \,.\, X \qquad ((g, X) \text{ en } G \times M)$$

a) $1 \,.\, X = X$

b) $(g_1 . g_2) \,.\, X = g_1 \,.\, (g_2 . X)$

Si se define $tg(x) = g \,.\, x$, tg es un difeomorfismo analítico de M, y se verifica

$$t_{g_1 . g_2} = tg_1 \, tg_2$$
$$t_1 = 1_M$$

A M se lo llama un G espacio analítico. Se dice que G actúa transitivamente si existe x_0 en M tal que la aplicación $g \to g \,.\, x_0$ es suryectiva. En tal caso, M es un espacio homogéneo.

Sea M un G espacio analítico y x_0 en M, el grupo de isotropía de x_0, es el subgrupo

$$G_{x_0} = \{g \in G | g \,.\, x_0 = x_0\}$$

Proposición 19. Sea G un grupo de Lie y M un G espacio analítico donde G actúa transitivamente, entonces G_{x_0} es un subgrupo cerrado de Lie de G.

Teorema 20. Sea G un grupo de Lie, H un subgrupo de Lie cerrado. Entonces existe una única estructura analítica en $G|H = N$ tal que N sea una variedad analítica con la propiedad de que la acción natural de G en N sea analítica. Si M es una variedad analítica donde G actúa analítica y transitivamente, sea X_0 en M. Entonces M es analíticamente difeomorfa a $G|G_{x_0}$.

Consideremos ahora la siguiente situación. M es un G espacio analítico donde actúa G, en forma no necesariamente transitiva. Sea X en M y sea $G \,.\, X = \{g \,.\, X | g \in G\}$, a este conjunto se lo llama la órbita de X. Sea G_x el grupo de isotropía de X. Entonces:

Teorema 21. $G.X$ es una subvariedad de M, G_X es un subgrupo cerrado de Lie de G y $G.X$ es analíticamente difeomorfa a $G|G_X$. Además $\dim G.X = \dim G - \dim G_X$.

En el caso de la representación coadjunta de G en $GL(\mathcal{G}(G)^*)$ se tiene lo siguiente

Si f pertenece a $\mathcal{G}(G)^*$ y si Bf es la forma bilineal alternada de $I - C$, entonces $\mathcal{G}(Gf) = \ker Bf$. En particular $Gf = G$ si y sólo si $f(L^2) = 0$.

I.G ALGEBRA EXTERIOR.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n, se define el álgebra exterior de V; $\wedge V$, como el álgebra compleja con identidad generada por $\ell_i \dots \ell_n$, que satisfacen las siguientes relaciones

$$\ell_i \wedge \ell_j = -\ell_j \wedge \ell_i \qquad 1 \leq i, j \leq n\,,$$

donde la aplicación $(k, \ell) \to k \wedge \ell$ denota la multiplicación en $\wedge V$. El álgebra $\wedge v$ es graduada.

$\wedge v = \bigotimes_{i=0}^{n} n^i V$, con $\wedge^p v \wedge \wedge^q v \subset \wedge^{p+q} v$ y cada $\wedge^p V$ tiene por base los elementos de la forma

$$\ell_{j_1} \wedge \wedge \ell_{j_p} \qquad 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n \quad \text{y} \quad \wedge^0 V = \mathbb{C}\langle e \rangle$$

I.H ALGEBRA HOMOLOGICA ([3]).

Los siguientes teoremas serán utilizados en varias oportunidades.

Sean $\wedge$ y Γ dos anillos con aumentación $\varepsilon_\wedge$ y ε_Γ en los módulos $Q_\wedge$ y Q_Γ respectivamente. Sea $I_\wedge$ (I_Γ) el núcleo de $\varepsilon_\wedge(\varepsilon_\Gamma)$. Una aplicación de anillos aumentados es un morfismo de anillos tal que $\varphi(I_\wedge) \subset I_\Gamma$. Por pasaje al cociente se define un morfismo ψ de $Q_\wedge$ en Q_Γ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \wedge \arrow[r, "\varepsilon_\wedge"] \arrow[d, "\varphi"'] & Q_\wedge \arrow[d, "\psi"] \\ \Gamma \arrow[r, "\varepsilon_\Gamma"'] & Q_\Gamma \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} \varphi(\lambda x) = \varphi(\lambda)\varphi(x) \\ (X \text{ en } Q_\wedge \ \lambda \text{ en } \wedge) \end{array}$$

Luego ψ es un morfismo de Λ-módulos, si se mira Q_Γ con la estructura de Λ-módulo inducida por φ. Sea g la función

$$g : \Gamma \otimes_\Gamma \; Q_\Lambda \to Q_\Gamma$$
$$g(\gamma \otimes x) = \gamma(\psi(x))$$

Teorema 22. Si A es un Γ módulo a derecha, entonces $Tor_p^\Lambda(A, Q_\Gamma)$ es isomorfo a $Tor_p^\Gamma(A, Q_\Gamma)$ si y sólo si

a) g es un isomorfismo

b) $Tor_p^\Lambda(\Gamma, Q_\Lambda) = 0 \quad p > 0$ ([3], VIII,3).

Sean Λ, Γ dos k-álgebras y φ un morfismo de k- álgebras de Λ en Γ $(\varphi : \Lambda \to \Gamma)$. Si ε es una aplicación de Γ en k, se induce sobre Λ la aumentación $\varepsilon \circ \varphi$ de Λ en k.

Teorema 23. Si Γ es proyectivo como Λ-módulo a izquierda, entonces $Tor_p^\Lambda(A, K) = Tor_p^\Gamma(A_\Lambda \otimes \Gamma, K)$ para todo A, Λ-módulo a derecha ([3], X, 7).

Teorema 24. Si Γ es proyectivo como Λ-módulo a derecha, entonces $Tor_n^\Lambda(A, K) \cong Tor_n^\Gamma(A; \Gamma \otimes_\Lambda K)$ donde A es un Γ módulo a derecha ([3], X, 7).

Teorema 25. En las condiciones anteriores, sea A un Λ-módulo a derecha, C un Γ-módulo a izquierda y consideremos a Γ como Λ-módulo a izquierda y Γ módulo a izquierda. Si $Tor_p^\Lambda(A, \Gamma) = 0$ entonces $(p > 0)$

$$Tor^\Lambda p(A, C) \cong Tor^\Gamma p(A \otimes_\Lambda \Gamma, C) \qquad p \in \mathbf{N}$$

([3],VI,4).

I.I PRODUCTOS TENSORIALES TOPOLOGICOS Y ESPACIOS NUCLEARES ([7],[14]).

Definición 1. Un producto tensorial topológico definido en la categoría de los espacios Hausdorff localmente convexos, consiste en asignar a cada par (E, F) de dicha categoría, otro elemento $E\tilde{\otimes}F$ en la misma categoría, y una forma bilineal $\phi(\phi(x,y) = x\otimes y)$ de $E\times F$ en $E\tilde{\otimes}F$, separadamente continua que satisface las siguientes propiedades:

i) El subespacio generado por Im ϕ es denso

ii) Para cada aplicación continua, α de E_1 en E_2 hay aplicaciones continuas $\alpha\otimes 1$ de $E_1\tilde{\otimes}F$ en $E_2\tilde{\otimes}F$ y, $1\otimes\alpha$ de $F\tilde{\otimes}E_1$ en $F\tilde{\otimes}E_2$ tales que $(\alpha\otimes 1)(x\otimes y) = \alpha(x)\otimes y$ $(1\otimes\alpha)(x\otimes y) = x\otimes\alpha(y)$.

iii) Dados E, F, G tres espacios de la categoría anterior existe un isomorfismo topológico entre $E\tilde{\otimes}(F\tilde{\otimes}G)$ y $(E\tilde{\otimes}F)\tilde{\otimes}G$ tal que $x\otimes(y\otimes z)$ es enviado a $(x\otimes y)\otimes z$, con (x,y,z) en $E\times F\times G$.

iv) Para todo par de espacios en dicha categoría existe un isomorfismo topológico entre $E\tilde{\otimes}F$ y $F\tilde{\otimes}E$ tal que $x\otimes y$ es enviado a $y\otimes x$ con (x,y) en $E\times F$.

De las distintas definiciones de producto tensorial topológico existentes, para nosotros las más importantes serán las siguientes: el producto tensorial inductivo y proyectivo, con su correspondiente completador.

Los productos anteriores pueden ser definidos vía propiedades universales.

Definición 2. Sean (E,F) dos espacios vectoriales topológicos Hausdorff, un producto tensorial inductivo (proyectivo) es un par (H,φ) formado por un espacio Hausdorff localmente convexo y una forma bilineal separadamente (conjuntamente) continua, de $E\times F$ con valores en H tal que para todo otro par en las mismas condiciones (G,ϕ), existe una única aplicación lineal continua, h, de H en G tal que $h\circ\varphi = \phi$.

Para ver la existencia y las propiedades de estos objetos se puede consultar ([17], III,6) ([14], 42,43). Aquí observaremos solamente los siguientes hechos.

Notemos con $\otimes_i(\otimes_\pi)$ el producto tensorial inductivo (proyectivo) y con $\overline{\otimes}(\hat{\otimes})$ su respectivo completado. Entonces

Teorema 26. Sea E, F dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos cuyas topologías vienen definidas por las familias de seminormas $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(Q_\beta)_{\beta\in B}$ respectivamente. Sea $P_\alpha\otimes Q_\beta$ la aplicación $(P_\alpha\otimes Q_\beta)(\theta) = \inf\sum_j P_\alpha(X_j)Q_\beta(Y_j)$ con X_j en E, Y_j

en F y $\theta = \sum X_j \otimes Y_j$ en $E \otimes F$. Entonces el conjunto $(P_\alpha \otimes Q_\beta)_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ constituye una familia de seminormas que definen una topología en $E\otimes F$ (el producto tensorial algebraico), convirtiendo a este último espacio con la aplicación bilineal usual en un producto tensorial proyectivo de E y F ([14], 43). En particular

Teorema 27. Si E y F son dos espacios de Frechet, entonces $E\hat{\otimes}F$ es un espacio de Frechet.

Más aún, como en la categoría de espacios de Frechet, una aplicación bilineal es separadamente continua si y sólo si es continua, se tiene

Teorema 28. Si E y F son espacios de Frechet, entonces $E\overline{\otimes}F = E\hat{\otimes}F$.

Ahora nos ocuparemos de los espacios nucleares ([14], 50).

Definición 3. Sean E y F dos espacios de Banach y T una aplicación de E en F. Entonces T se dirá nuclear si satisface la siguiente propiedad: Existen tres sucesiones, una $\{X_k'\}$ de elementos de la bola unitaria cerrada de E', la segunda en la bola unitaria cerrada de F $\{Y_k\}$, y por último, una sucesión de números complejos tales que $\sum|\lambda_k|$ converge. Entonces $u(X) = \sum \lambda_k X_k'(x) Y_k$.

Dado E un espacio Hausdorff localmente convexo, y P una seminorma continua en E, se puede considerar el espacio $\widehat{E}_p$, que está formado por la completación del espacio $E/\ker\, P$, el cual es un espacio cociente con la norma inducida, en consecuencia $\widehat{E}_p$ es un espacio de Banach.

Definición 4. Sea E un espacio Hausdorff localmente convexo, E se dice nuclear si para toda seminorma P, continua existe otra seminorma Q, también continua tal que $Q \geq P$ y la aplicación natural de $\widehat{E}_q$ en E_p es nuclear.

Los espacios nucleares poseen las siguientes propiedades

Teorema 29.

a) Un espacio Hausdorff localmente convexo es nuclear si y sólo si su completado lo es.

b) Un subespacio lineal de un espacio nuclear es nuclear.

c) El cociente de un espacio nuclear por un subespacio cerrado es nuclear.

d) El producto de espacios nucleares es nuclear.

e) El límite proyectivo de espacios nucleares es nuclear.

f) El límite contable inductivo de espacios nucleares es nuclear.

g) Si E y F son dos espacios nucleares, entonces $E\hat{\otimes}F$ es nuclear.

Para tener una mayor profundidad con el tema consultar ([14], 50).

CAPITULO II

EL ESPECTRO DE UN ALGEBRA DE LIE DE OPERADORES

II.A Preliminares

II.B Definición de espectro

II.C Ejemplos

II.A PRELIMINARES.

En esta sección se probará la exactitud de un complejo, el cual es necesario para la definición de espectro y nos permitirá mostrar en forma más trasparente la generalización del caso conmutativo al resoluble.

Sea L un álgebra de Lie resoluble compleja, de dimensión finita n, sea f un elemento de L^* tal que $f(L^2) = 0$, es decir un carácter de L, esto define una representación a izquierda unidimensional de L en $\mathbf{C}$. Si $U(L)$ es el álgebra envolvente de L, y $\mathbf{C}(f)$ el $U(L)$ módulo a izquierda definido a través de la representación anterior, sea $\mathcal{E}(f)$ la aumentación de $U(L)$ en $\mathbf{C}$ determinada por la acción de $U(L)$:

$$\mathcal{E}(f)(x) = f(x) \qquad (x \text{ en } L)$$

Se considera el siguiente complejo

$$(U(L) \otimes \wedge^i L\,,\ \overline{d}_{i-1})\,,$$

donde $\overline{d}_{p-1} : U(L) \otimes \wedge^p L \to U(L) \otimes \wedge^{p-1} L$, y satisface

$$\overline{d}_{p_1}\langle x_{i_1} \ldots x_{i_p}\rangle = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} (x_{i_k} - f(x_{i_k}) \langle x_{i_1}\, \widehat{x}_{i_k}\, x_{i_p}\rangle$$
$$+ \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} (-1)^{k+\ell} \langle [x_{i_k}, x_{i_\ell}] x_{i_1}\, \widehat{x}_{i_k}\, \widehat{x}_{i_\ell}\, x_{i_p}\rangle$$

si (X_{ij}) $1 \leq j \leq p$ son elementos de L y $\langle x_{i_1} \ldots x_{i_p}\rangle$ denota un elemento de $\wedge^p L$. El operador anterior se extiende por linealidad a un morfismo de $U(L)$ módulos.

Teorema 30. El complejo $(U(L)\otimes \wedge^i L,\ \overline{d}_{i-1})$, es una resolución exacta libre de $C(f)$ como $U(L)$ módulo a izquierda.

<u>Demostración</u>: Es claro que cada término del complejo es un $U(L)$ módulo libre a izquierda. Sea

$$\overline{d}_0 : U(L)\otimes \wedge^1 L \to U(L)$$
$$\overline{d}_0(x) = x - f(x)\,,$$

luego

$$\operatorname{Im} \overline{d}_0 = U(L)\langle x - f(x)\rangle \qquad (x \text{ en } L)$$

Pero $U(L)\langle x - f(x)\rangle = \ker \mathcal{E}(f)$ por ([4], V, 5.18). Entonces el complejo es exacto en el nivel 0.

Ahora probaremos que $\overline{d}^2 = 0$.

En ([3], XIII, 7) se prueba que el complejo anterior es exacto para $f \equiv 0$, llamemos d_p al operador de borde asociado al complejo del teorema cuando $f \equiv 0$.

Sea H el siguiente morfismo de álgebras de Lie

$$H : L \to U(L) \qquad H(x) = x + f(x)1$$

Como $f(L^2) = 0$, $H([x,y]) = [x,y] = [H(x), H(y)]$.

Por la propiedad universal que posee $U(L)$, existe una aplicación de álgebras asociativas, $U(H)$, tal que

$$U(H) : U(L) \to U(L)$$
$$U(H)(x) = H(x) \qquad (x \in L)$$

Como $(-f)(L^2) = 0$, podemos definir $\overline{H} = x - f(x)$. Análogamente encontramos una $U(\overline{H})$.

Pero como $U(\overline{H})\circ U(H)(x) = U(H)\circ U(\overline{H})(x) = x$ con x en L, $U(\overline{H})U(H) = U(H)U(\overline{H}) = 1_{U(L)}$. Luego $U(H)$ es un isomorfismo.

Consideremos las siguientes aplicaciones, $U(H)_p$

$$U(H)_p : U(L)\otimes \wedge^p L \to U(L)\otimes \wedge^p L$$
$$U(H)_p = U(\overline{H})\otimes 1_{\wedge^p L}\,,$$

donde $1_{\wedge^p L}$ denota la identidad de $\wedge^p L$. Claramente $U(H)_p$ es una aplicación biyectiva de $U(L)$ módulos para todo p.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} U(L)\otimes\wedge^{p-2}L & \xleftarrow{\bar{d}_{p-2}} & U(L)\otimes\wedge^{p-1}L & \xleftarrow{\bar{d}_{p-1}} & U(L)\otimes\wedge^{p}L \\ \downarrow U(H)_{p-2} & & \downarrow U(H)_{p-1} & & \downarrow U(H)_{p} \\ U(L)\otimes\wedge^{p-2}L & \xleftarrow[d_{p-2}]{} & U(L)\otimes\wedge^{p-1}L & \xleftarrow[d_{p-1}]{} & U(L)\otimes\wedge^{p}L \end{array}$$

Como $U(H)_p$ es una aplicación biyectiva para todo P y $d_{p-2}\circ d_{p-1}=0$, si el diagrama anterior conmuta tendremos que $\bar{d}_{p-2}\,\bar{d}_{p-1}=0$.

Para verificar que el diagrama anterior es conmutativo basta probar que

$$U(H)_{p-1}\bar{d}_{p-1}=d_{p-1}U(H_p)\,,\qquad \forall P$$

Como todos los morfismos son $U(L)$ lineales, basta comprobar que $U(H)_{p-1}\bar{d}_{p-1}\langle x_{i_1}\dots x_{i_p}\rangle = d_{p-1}U(H)_p\langle x_{i_1}\dots x_{i_p}\rangle$ donde (X_{ij}) $1\le j\le P$ son elementos de L, entonces:

$$\begin{aligned} &d_{p-1}U(H)_p\langle x_{i_1}\dots x_{i_p}\rangle = d_{p-1}\langle x_{i_1}\dots x_{i_p}\rangle\,,\\ &U(H)_{p-1}\bar{d}_{p-1}\langle x_{i_1}\dots x_{i_p}\rangle=\\ &=U(H)_{p-1}\left[\sum_{1\le j\le P}(-1)^{j+1}(x_{i_j}-f(x_{i_j})\,\langle x_{i_1}\hat{x}_{i_j}x_{i_p}\rangle+\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{1\le k\le j\le P}(-1)^{k+j}\langle[x_{i_k},x_{i_j}]x_{i_1}\hat{x}_{i_k}\hat{x}_{i_j}x_{i_p}\rangle\right]=\\ &=\sum_{1\le j\le P}(-1)^{j+1}U(H)(x_{i_j}-f(x_{i_j}))\langle x_{i_1}\hat{x}_{i_j}x_{i_p}\rangle\\ &\qquad+\sum_{1\le k<j\le p}(-1)^{k+j}\langle[x_{i_k},x_{i_j}]x_{i_1}\hat{x}_{i_k}\hat{x}_{i_j}x_{i_p}\rangle\\ &=d_{p-1}\langle x_{i_1}\dots x_{i_p}\rangle\,. \end{aligned}$$

Luego, el diagrama es conmutativo y en consecuencia $\bar{d}_{p-1}\bar{d}_p=0$. De aquí, $(U(L)\otimes\wedge^i L,\ \bar{d}_{i-1})$ es un complejo de cadenas de $U(L)$ módulos libres a isquierda.

Para probar la exactitud del complejo en cuestión, se procederá a seguir la demostración de ([3], XIII, 7.1) para el caso $f\equiv 0$, la cual se adapta a este caso sin variantes.

Se ha visto que el complejo es exacto para $q = 0$, ahora se probará que su homología es cero:

$$H_q(U(L) \otimes \wedge^i L,\ \overline{d}_{i-1}) = 0 \qquad q > 0$$

Sea $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una base ordenada de L, entonces los elementos de la forma $\langle x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_r} \rangle$ definen una base de $\wedge^r L$ $(1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_r \leq n)$.

Por otra parte, los elementos de la forma $X_{\beta_1} \ldots X_{\beta_m}$ con $\beta_1 \leq \ldots \leq \beta_m$ constituyen una base de $U(L)$, según se vió en el Capítulo I, parte B, Teorema 5. Entonces el conjunto $\{X_{\beta_1} \ldots X_{\beta_m} \langle x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_r} \rangle\}$ con $1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_r$, $\beta_1 \leq \ldots \leq \beta_m$, es una base de $U(L) \otimes \wedge L$ como $\mathbf{C}$ espacio vectorial.

Sea $F_p(U(L) \otimes \wedge L)$ el submódulo de $U(L) \otimes \wedge L$ generado por los elementos que satisfacen $m + r \leq p$. Entonces, en $\omega p = F_p(U(L) \otimes \wedge L)/F_{r-1}(U(L) \otimes \wedge L)$ se tiene por base a los elementos que satisfacen $n + m = p$, gracias al lema 3.4 de ([3], XIII), un elemento de la base ωp es independiente del orden en el cual se escriben $X_{\beta_1} \ldots X_{\beta_m}$.

La diferencial $\overline{d}$ de $U(L) \otimes \wedge L$ verifica que

$$\begin{aligned} &\overline{d}(X_{\beta_1} \ldots X_{\beta_m} \langle x_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_r} \rangle) = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq m} (-1)^{i+1} X_{\beta_1} \ldots X_{\beta_m} X_{\alpha_i} \langle x_{\alpha_1} \hat{x}_{\alpha_i} x_{\alpha_r} \rangle \end{aligned}$$

módulo F_{m+r-1}.

Luego, los módulos $F_p(U(L) \otimes \wedge L)$ son subcomplejos de $(U(L) \otimes \wedge L,\ \overline{d})$ y la diferencial inducida en ωp está dada por la fórmula anterior.

Sea $\omega = \sum_p \omega_p$, entonces ω con la diferencial inducida es isomorfo a la resolución proyectiva de $\mathbf{C}$ como $\mathbf{C}[X_1 \ldots X_n]$ módulo construida en ([3], VIII, 4). Entonces $H_q(\omega) = 0$ para $q > 0$ y en consecuencia $H_q(\omega_p) = 0$ $q > 0$, pues la homología conmuta con la suma directa ([3], V, 9).

Consideremos la sucesión exacta

$$H(F_{p-1}(U(L) \otimes \wedge L) \rightarrow H_q(F_p(U(L) \otimes \wedge L) \rightarrow H_q(\omega_p) \qquad q > 0$$

entonces $H_q(F_{p-1}(U(L) \otimes \wedge L)) \rightarrow H_q(F_p(U(L) \otimes \wedge L)$ es un epimorfismo, como $F_{-1}(U(L) \otimes \wedge L) = 0$ se tiene que $H_q(F_p(U(L) \otimes \wedge L) = 0$ para $q > 0$ y todo p. Pero como $U(L) \otimes \wedge L =$

$\cup_p F_p(U(L) \otimes \wedge L)$ se sigue que $H_q(U(L) \otimes \wedge L) = 0$ para $q > 0$, con lo cual se termina la prueba del teorema pues la homología conmuta con el límite directo ([3], V, 9).

Observación. La condición $f(L^2) = 0$ es necesaria, sean x_i $(i = 1, 2)$ elementos de L, entonces

$$\bar{d}_0\bar{d}_1\langle x_1x_2\rangle = (\bar{d}_0((x_1 - f(x_1))\langle x_2\rangle - (x_2 - f(x_2))\langle x_1\rangle) - \langle [x_1, x_2]\rangle) =$$
$$= (x_1 - f(x_1))(x_2 - f(x_2) - (x_2 - f(x_2))(x_1 - f(x_1)) - [x_1, x_2] + f([x_1, x_2]) = f[x_1, x_2]$$

pues en $U(L)$ $x_1x_2 - x_1x_2 = [x_1x_2]$, luego $\bar{d}_0\bar{d}_1 \equiv 0$ si y sólo si $f(L^2) = 0$.

II.B DEFINICION DE ESPECTRO.

En primer lugar, se considera el caso conmutativo con el objeto de "motivar" la generalización al caso resoluble.

Sea $(E, \|.\|)$ un espacio de Banach, y $\wedge \mathbf{C}^n$ el álgebra exterior en n-generadores $(x_1, \ldots, x_n)$. Sea $(a_1 \ldots a_n)$ una n-upla de operadores de E, que conmutan dos a dos. Se define el complejo $(E \otimes \wedge^i \mathbf{C}^n, d_{i-1})$ de la siguiente forma

$$d_{p-1} : E \otimes \wedge^p \mathbf{C}^n \to E \otimes \wedge^{p-1} \mathbf{C}^n$$
$$d_{p-1}(e\langle x_{i_1} \ldots x_{i_p}\rangle = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} e a_{i_j} \langle x_{i_1} \hat{x}_{i_j} x_{i_p}\rangle$$

Se verifica que $d^2 = 0$ con lo cual $(E \otimes \wedge^i \mathbf{C}^n, d_{i-1})$ es un complejo de cadenas. Una n-upla a se dice inversible si el complejo anterior es exacto. El espectro de Taylor de a se define de la siguiente forma

$$Sp(a, E) = \{\lambda \in \mathbf{C}^n / a - \lambda \quad \text{es no inversible}\}$$

Este espectro posee la propiedad de la aplicación espectral para polinomios, gracias a la cual podemos limitarnos al caso de n-uplas de operadores linealmente independientes. Más explícitamente, sea a una n-upla de operadores que conmutan dos a dos, en un espacio de Banach E. Sean $a_{i_1} \ldots a_{i_k}$ tales que constituyan una base de $\langle a_1\rangle_{1 \leq i \leq n}$, donde $\langle \quad \rangle$

designa el $\mathbf{C}$ espacio vectorial generado por los elementos $(a_i)_{1\leq i\leq n}$. Entonces existen $n-k$ polinomios de $C[x_1\dots x_k]$ de grado 1 tales que $P_e(a_{i_1}\dots a_{i_k})=a_e$ $1\leq e\leq n$ $e=i_1,\dots,i_k$.

Sea $\overline{p}$ la aplicación polinomial definida por

$$\overline{p}:\mathbf{C}^k\to\mathbf{C}^n$$
$$\overline{p}_e(x_1\dots x_k)=p_e(x_1\dots x_k)\qquad e\neq i,\ i_k$$
$$\overline{p}_{ij}(x_1\dots x_k)=x_j\qquad i\leq j\leq k$$

Entonces $\overline{p}(a_{i_1}\dots a_{i_k})=a$ y se tiene que

$$Sp(a,E)=Sp(\overline{p}(a_{i_1}\dots a_{i_k}),E)=\overline{p}(Sp(a_{i_1}\dots a_{i_k}),E)$$

Luego conociendo $Sp((a_{i_1}\dots a_{i_k}),E)$ se obtiene $Sp(a,E)$ evaluando aquel en un polinomio de grado 1.

Este procedimiento permite reducir el cálculo del espectro de Taylor al caso de n-uplas linealmente independientes, de aquí en mas este será el caso de las n-uplas que se consideren.

Teniendo en cuenta esta observación, estudiemos más detenidamente la definición de Taylor. Esta definición adolece del inconveniente de no ser geométrica en el sentido de que no es independiente del subespacio de $\mathcal{L}(E)$ generado por a. Más detenidamente, tomemos el espacio vectorial generado por $(a_1,\dots,a_n)$ en $\mathcal{L}(E)$ y denotémoslo $\langle a\rangle$, entonces $Sp(a,E)$ no es un invariante asociado a $\langle a\rangle$ pues $Sp(a,E)$ depende fuertemente de a, se tiene que si a' es otra n-upla de elementos que conmutan dos a dos tal que $\langle a'\rangle=\langle a\rangle$, entonces $Sp(a',E)$ es en general distinto de $Sp(a,E)$. Por ejemplo, si a es un operador y tomamos r en $\mathbf{C}$, r distinto de 1 o 0, sea $a'=ra$, entonces $Sp(a')=r\,Sp(a)$. Sería interesante tener una aproximación geométrica al espectro de Taylor, la cual fuera independiente de la n-upla a y que estuviera asociada al subespacio $\langle a\rangle$, a la vez que permite recobrar $Sp(a,E)$.

Dicha aproximación se puede encarar de la siguiente manera:

Se considera el complejo $(E\otimes\wedge^p\langle a\rangle,d_{p-1}(f))$ donde $f\in(\langle a\rangle)^*\cong\mathbf{C}^n$, $d_{p-1}(f):E\otimes\wedge^p\langle a\rangle\to E\otimes\wedge^{p-1}\langle a\rangle$ y si $Y_{i_1}\dots Y_{i_p}$ denotan elementos de $\wedge^p\langle a\rangle$,

$$d_{p-1}e\langle y_1\dots y_p\rangle=\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}e(Y_{ij}-f(Y_{ij}))\langle x_{i_1}\widehat{x}_{i_j}x_{i_p}\rangle$$

Que $(E \otimes \wedge^p \langle a \rangle, d_{p-1}(f))$ es un complejo de Koszul se demuestra en forma usual. Entonces se define

$$Sp(\langle a \rangle, E) = \{ f \in (\mathbf{C}^n)^* / (E \otimes \wedge^p \langle a \rangle, d_{p-1}(f)) \}$$
$$\text{no es exacto}$$

$Sp(\langle a \rangle, E)$ es un objeto geométrico contenido en $(\mathbf{C}^n)^* \cong \langle a \rangle^*$.

Notar que si tomamos como base de $\langle a \rangle^*$ a la n-upla $(a_1 \dots a_n)$ el complejo anterior nos da

$$d_{p-1}(f) e \langle x_{i_1} \dots x_{i_p} \rangle = \sum (-1)^{j+1} e(a_{ij} - f(a_{ij})) \langle x_{i_1} \widehat{x}_{i_j} x_{i_p} \rangle \ ,$$

de donde se obtiene que f pertenece a $Sp(\langle a \rangle, E)$ si y sólo si $(f(a_i))_{1 \leq i \leq n}$ pertenece a $Sp(a, E)$.

Qué se ha hecho? Dada una n-upla de elementos linealmente independientes que conmutan dos a dos, se les ha asociado un subconjunto $Sp(\langle a \rangle, E)$ de $\langle a \rangle^*$ con la propiedad de que si a' es otra n-upla de operadores que conmutan dos a dos y tal que $\langle a' \rangle = \langle a \rangle$ entonces $Sp(\langle a \rangle, E) = Sp(\langle a' \rangle, E)$, además

$$Sp(a', E) = \{ f(a'_i)_{1 \leq i \leq n}, f \in Sp(\langle a' \rangle, E) = Sp(\langle a \rangle, E) \}$$

Este objeto geométrico, $Sp(\langle a \rangle, E)$ provee de una definición intrínseca de espectro asociado a $\langle a \rangle$ que buscábamos; $Sp(a, E)$ se transforma en el conjunto de las coordenadas de los elementos de $Sp(\langle a \rangle, E)$ en la base $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$.

En el caso de un operador, nuestro complejo es el siguiente

$$\begin{aligned}
&d_0(f) : E \otimes \wedge^1 \mathbf{C} \to E \qquad (f \text{ en } \mathbf{C}^*) \\
&d_0(f) e \langle x \rangle = e(x - f(x)) \\
&Sp(\langle a \rangle, E) = \{ f \text{ en } \mathbf{C}^* / d_0(f) \text{ no es biyectivo} \} \quad \text{y} \\
&Sp(a, E) = \{ (f(a)), \ f \text{ en } Sp(\langle a \rangle, E) \}
\end{aligned}$$

Si r no es 1 o 0, entonces

$$Sp(ra, E) = \{ f(ra), \ f \text{ en } Sp(\langle a \rangle, E) \} = r Sp(a, E) \ .$$

En este caso, se ha tomado como base de $\langle a\rangle$, por una parte, al operador a, y se obtuvo $Sp(a,E)$, y por otra, se ha usado la base ra y se ha calculado $Sp(ra,E)$. En ambos casos $Sp(a,E)$ y $Sp(ra,E)$ son objetos deducidos de $Sp(\langle a\rangle,E)$.

Recíprocamente, dado un espacio vectorial V, de $\mathcal{L}(E)$, generado por una n-upla de elementos linealmente independientes que conmutan dos a dos, se les puede asociar el objeto geométrico $Sp(V,E)$ y como subproducto se obtiene $Sp(b,E)$, cada vez que b es una n-upla base de V, formada por elementos que conmutan dos a dos.

En estas condiciones, podemos dar la

Definición 5. Sea $(E,\|\ \ \|)$ un espacio normado, y V un espacio vectorial de $\mathcal{L}(E)$ de dimensión finita que tiene por base una n-upla de operadores que conmutan dos a dos. Entonces $Sp(V,E)=\{f\in V^*/$ el complejo $(E\otimes\wedge^p V, d_{p-1}(f))$ no es exacto$\}$.

Se verifica que si $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ es una base de operadores dos a dos conmutativos, entonces $Sp(a,E)=\{f(a_i)_{1\leq i\leq n}\ f\in Sp(V,E)\}$. Al objeto $Sp(V,E)$ se lo llamará el espectro geométrico de Taylor del espacio V, y si (a_i) es una base de V con las propiedades anteriores, el espectro geométrico de Taylor asociado a la n-upla a.

Con esta óptica la noción de espectro de Taylor se transforma en un derivado de un objeto más básico $Sp(\langle a\rangle,E)$ asociado al subespacio $\langle a\rangle$. Este subespacio tiene como base a elementos que conmutan dos a dos, con lo cual se transforma en un álgebra de Lie conmutativa con la operación usual. La definición de espectro que se dará para un álgebra de Lie resoluble seguirá el rumbo anterior, generalizando al objeto geométrico $Sp(\langle a\rangle,E)$, en este contexto brinda una noción de espectro de Taylor para n-uplas de operadores que definan un álgebra de Lie.

Veamos como se realiza.

Sea L un álgebra de Lie resoluble, $U(L)$ su álgebra envolvente y (E,φ) una representación continua a derecha de L en el espacio de Banach $(E,\|\ \ \|)$. Es decir, φ es un morfismo de álgebras de Lie entre L y $\mathcal{L}(E)^{\rm op}$ donde $\mathcal{L}(E)$ denota los operadores acotados de E y "op" es el producto opuesto en $\mathcal{L}(E)$. Supondremos siempre que la representación es fiel, esto es ker $\varphi=0$. Entonces por lo visto en la sección I.B, E posee una estructura de $U(L)$ módulo a derecha.

Como el cuerpo de base es $\mathbf{C}$, un álgebra de Lie resoluble es completamente resoluble. Sea $S = (L_i)_{0 \leq i \leq n}$ una sucesión de Jordan Holder de L; sea f un elemento de L^*. Dadas f y S, se construye la polarización de Vergné asociada a f y S, $PV(f,S)$ del hecho $f([PV(f,S), PV(f,S)] = 0$, $f|PV(f,S))$ define un carácter de $PV(f,S)$, vía el cual se obtiene una representación unidimensional de $PV(f,S)$

$$P_{f|PV(f,S)}\, \lambda = f|PV(f,S)^{(P)\cdot 1} \quad (\lambda \text{ en } \mathbf{C},\ P \text{ en } PV(f,S))$$

que se denotará $\mathbf{C}(f|PV(f,S))$.

Esto permite dotar a C de una estructura de $U(PV(f,S))$ módulo a izquierda que extiende la acción de $f|PV(f,S)$, con aumentación $\mathcal{E}(f|PV(f,S))$ (Capítulo I, Parte B).

Sea $\widetilde{\operatorname{ind}}(f|PV(f,S),L)$ el módulo inducido por la representación $(\mathbf{C}(f|PV(f,S)),$ $f|PV(f,S)$ de $PV(f,S)$

$$\widetilde{\operatorname{ind}}(f|PV(f,S),L) = U(L) \bigotimes_{U(PV(f,S))} \mathbf{C}(f|PV(f,S))$$

donde la estructura de $U(L)$ como $U(PV(f,S))$ módulo a derecha es la explicada en la sección I.D.

Como $f|PV(f,S)$ es un caracter de $PV(f,S)$, estamos en las condiciones del Teorema 30 y podemos construir una resolución exacta libre de $\mathbf{C}(f|PV(f,S))$ como $U(PV(f,S))$ módulos; denotémosla por Res $(\mathbf{C}(f|PV(f,S)),\ U(PV(f,S))$.

Como $U(L)$ es un $U(PV(f,S))$ módulo libre a derecha, con la estructura de I.D, al tensorizar a Res $(\mathbf{C}(f|PV(f,S)),\ U(PV(f,S))$ por $U(L)$ sobre $U(PV(f,S))$, nos queda una resolución exacta libre a izquierda de $\widetilde{\operatorname{ind}}(f|PV(f,S),L)$ [3,II,6], que se denotará Res $(\widetilde{\operatorname{ind}}(f|PV(f,S),L), U(L))$.

Si tensorizamos la resolución anterior por el $U(L)$ módulo a derecha E, la homología del nuevo complejo consiste en los espacios: $Tor_p^{U(L)}(E, \widetilde{\operatorname{ind}}(f|PV(f,S)), L)$ es decir $H_p(E \otimes_{U(L)}$ Res$(\widetilde{\operatorname{ind}}(f|PV(f,S),L),\ U(L))) = Tor_p^{U(L)}(E, \widetilde{\operatorname{ind}}(f|PV(f,S),L))$. Por último, sea $G(L)$ el grupo de Lie conexo y simplemente conexo asociado a L, y sea Ad^* la representación coadjunta de $G(L)$ en L^*.

Ahora estamos en condiciones de definir el espectro. El espacio de órbitas por la representacií coadjunta se notará $L^*/\mathrm{A}^*\mathrm{d}(G(L))$.

Definición 6. Sea L un álgebra de Lie resoluble, $S = (L_i)_{0 \leq i \leq n}$ una sucesión de Jordan Hölder de L, y (E, φ) una representación continua a derecha de L. Entonces el conjunto $\{\alpha \in L^*/\mathrm{Ad}^*(G(L)) \,|\, \exists f \in \alpha$ con la propiedad $Tor_p^{U(L)}(E, \widetilde{\mathrm{ind}}(f|PV(f,S),L) \neq 0\}$ se llamará el espectro del álgebra L, que actúa en E relativo a la sucesión S, y se notará $Sp(L,E,S)$

$$Sp(L,E,S) = \{\alpha \in L^*/\mathrm{Ad}^*(G(L)) \,|\, \exists f \in \alpha : Tor_p^{U(L)}(E, \widetilde{\mathrm{ind}}(f|PV(f,S),L) \neq 0\}$$

Definición 7. Sea L un álgebra de Lie resoluble y (E, φ) una representación continua a derecha de L. Denotemos por $\sigma(L, JH)$ el conjunto de las sucesiones Jordan Hölder de L. Entonces a $U_{S \in \sigma(L.JH)} Sp(L,E,S)$ se lo llamará el espectro de L que actúa en E y se denotará $Sp(L,E)$

$$Sp(L,E) = U_{S \in \sigma(L.JH)} Sp(L,E,S)$$

Antes de pasar a la definición 8, se convendrá que una órbita de $G(L)$ en L^* se dirá singular si es puntual, esto es $\alpha = \{f\}$, f en L^*. Por lo visto en I.F, se sabe que la órbita de f es puntual si y sólo si $f(L^2) = 0$.

En tal caso, para toda sucesión de Jordan Hölder, $PV(f,S) = L$, y en consecuencia $\widetilde{\mathrm{ind}}(f|PV(f,S),L) = U(L) \otimes_{U(L)} C(f) = C(f)$.

Luego, el L-módulo $\widetilde{\mathrm{ind}}(f|PV(f,S),L)$ es independiente de S cuando L es singular.

Definición 8. Sea L un álgebra de Lie resoluble y (E, φ) una representación continua a derecha de L. Al conjunto $\{\{f\}$ en $L^*/\mathrm{Ad}^*(G(L))$, $\{f\}$ órbita singular / $Tor_p^{U(L)}(E, C(f))$ $\neq 0\}$ se lo llamará el espectro singular del álgebra L, la que actúa sobre E y se notará $Sp(L,E,SING)$

$$Sp(L,E,SING) = \{\{f\} \in L^*/\mathrm{Ad}(G(L)), \{f\}\text{singular} \,/ Tor_p^{U(L)}(E, C(f)) \neq 0\}$$

Notar que

$$Sp(L,E) \supset \bigcap_{S \in \sigma(L.JH)} Sp(L,S,E) \supset Sp(L,E,SING)$$

La definición de $Sp(L,E,S)$ depende de un representante en cada uno de sus elementos, veremos que dicha definición es en realidad independiente de la elección de un representante.

Proposición 31. En las condiciones de la definición 6, sea α un elemento de $Sp(L, E, S)$. Entonces para toda f perteneciente a α, se verifica que $Tor_p^{U(L)}(E, \widetilde{\text{ind}}(f|PV(f,S), L)) \cong Tor^{U(PV(f,S))}(E, \mathbf{C}(f|PV(f,S))$.

<u>Demostración</u>: Sea α una órbita por la representación coadjunta de $G(L)$ y f uno de sus elementos. Consideremos los anillos $\wedge$ y Γ definidos por $\wedge = U(PV(f,S))$ $\Gamma = U(L)$, con aumentaciones $\mathbf{C}(f|PV(f,S)) = Q_\wedge$ $\mathcal{E}_\wedge = \mathcal{E}(f|PV(f,S))$ para $\wedge$ e $\widetilde{\text{ind}}(f|PV(f,S), L) = U(L) \otimes_{U(PV(f.S))} C(f|PV(f,S)) = Q_\wedge$

$$\mathcal{E}_\Gamma(u) = u \otimes 1 \qquad u \quad \text{en} \quad \Gamma = U(L)$$

$U(L)$ posee una estructura de $U(PV(f,S))$ módulo libre a derecha, única con respecto a la propiedad

a) $u * 1 = u$

b) $u * h = u.h - \sigma_{L|PV(f,S)}(h)u$, para u en $U(L)$ y h en $PV(f,S)$ (I.D).

Sea φ un morfismo de anillos definido por

$$\varphi : \wedge \to \Gamma \qquad \varphi(\lambda) = 1 * \lambda, \quad \varphi \text{ verifica}$$
$$\varphi(1) = 1$$
$$\varphi(h) = h - \sigma_{L|PV(f,S)}(h) \qquad h \text{ en} \quad PV(f,S)$$

Al demostrar la exactitud del complejo definido poco antes del teorema 30, se vio que ker $\mathcal{E}_\wedge$ = ker $\mathcal{E}(f|PV(f,S)) = U(PV(f,S))(x - f|PV(f,S)(x))$ con x en $PV(f,S)$. Entonces $\varphi(\ker \mathcal{E}_\wedge) \subseteq \ker \mathcal{E}_\Gamma$ si y sólo si

$$\mathcal{E}_\Gamma(\varphi(x - f|PV(f,S)(x))) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{pero} \quad & \mathcal{E}_\Gamma(\varphi(x - f|PV(f,S)(x)) = \\ &= \mathcal{E}_\Gamma(1 * (x - f|PV(f,S)(x))) = \\ &= (1 * (x - f|PV(f,S)(x)) \otimes 1 = \\ &= 1 \otimes (x - f|PV(f,S)(x)1) = \\ &= 1 \otimes \mathcal{E}_\Gamma(x - f|PV(f,S)(x)) = 0 \end{aligned}$$

Luego $\ker \mathcal{E}_\Gamma \supset \varphi(\ker \mathcal{E}_\Gamma)$ y entonces estamos en las condiciones del teorema 22 (sección I.H).

Sea ψ el morfismo definido por pasaje al cociente de φ

$$\psi : \mathbf{C}(f|PV(f,S)) \to U(L) \otimes_{U(PV(f,S))} C(f|PV(f,S))$$

Sea P en $PV(f,S)$ tal que $\mathcal{E}_\Lambda(P) = 1$, entonces

$$\begin{aligned}\psi(1) &= \psi(\mathcal{E}_\Lambda(P)) = \mathcal{E}_\Gamma \varphi(P)\\ &= \mathcal{E}_\Gamma(1 * P) = 1 * P \otimes 1 = 1 \otimes \mathcal{E}_\Lambda(P) = 1 \otimes 1\end{aligned}$$

Sea g el morfismo definido en el mismo teorema

$g : \Gamma \otimes_\Lambda Q_\Lambda \to Q_\Gamma$ o equivalentemente $g : U(L) \otimes_{U(PV(f,S))} \mathbf{C}(f(PV(f,S)) \to U(L) \otimes_{U(PV(f,S))} C(f|PV(f,S))$.

$g(\gamma \otimes x) = \gamma \otimes \psi(x)$, luego $g(\gamma \otimes 1) = \gamma \otimes 1$, es decir g es la identidad de Q_Γ. Pero como $U(L)$ es un $U(PV(f,S))$ módulo libre, se verifica que $Tor_p^{UPV(f,S)}(U(L), C(f|PV(f,S)) = 0$, luego por dicho teorema

$$Tor^{U(PV(f,S))}(E, C(f|PV(f,S)) \cong Tor^{U(L)}(E, \widetilde{\mathrm{ind}}(f|PV(f,S),L)),$$

para toda f en α.

Proposición 32. En las condiciones de la definición 6. Si α es una órbita por la representación coadjunta de $G(L)$ y f un elemento de ella, entonces

$$\begin{aligned}&Tor_p^{U(PV(f,S))}(E, \mathbf{C}(f|PV(f,S))) \cong\\ &Tor^{U(PV(f\circ \mathrm{Ad}\, g^{-1},S)}(E, \mathbf{C}(f \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}|PV(f \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}, S))\end{aligned}$$

para todo g en $G(L)$.

<u>Demostración</u>: Sea f perteneciente a α y $f \circ \mathrm{Adg}^{-1}$, con g en $U(L)$, como la sucesión S está formada por ideales, $\mathrm{Adg}^{-1}(S) = S$ pues $\mathrm{Adg}^{-1}(L_i) = L_i \quad 0 \le i \le n$ (Teorema 17, I.E).

Esto nos permite calcular $PV(f \circ \mathrm{Adg}^{-1}, S)$ y se verá que $PV(f \circ \mathrm{Adg}^{-1}, S) = \mathrm{Adg}\, PV(f,S)$. Por la construcción del Teorema 6 sabemos que $PV(f\ \mathrm{Adg}^{-1}, S) = \sum_{i=0}^{n} g_i(f \circ$

$\mathrm{Adg}_i^{-1})$, donde $g_i(f \circ \mathrm{Adg}_i^{-1}) = \ker B(f \circ \mathrm{Adg}^{-1})_i$ y $B(f \circ \mathrm{Adg}^{-1})_i$ es la forma bilineal asociada a $f \circ \mathrm{Adg}^{-1}$ restringida a L_i, con lo cual

$$PV(f \circ \mathrm{Adg}^{-1}, S) = \sum_{i=0}^{n} \{X \in L_i / f \circ Adg^{-1}([X, L_i]) = 0\}$$

Sea X en L_i tal que $f \circ \mathrm{Adg}^{-1}([X, L_i]) = 0$, entonces $f([\mathrm{Adg}^{-1}(X), L_i]) = 0$, pues $\mathrm{Adg}^{-1} L_i = L_i$, luego $\mathrm{Adg}^{-1}(X)$ pertenece a $\{Y \in L_i / f([y, L_i]) = 0\}$, de aquí $g_i(f \circ \mathrm{Adg}_i^{-1}) \subseteq \mathrm{Adg}(g_i(f))$. Como $(f \circ \mathrm{Adg}^{-1})\ \mathrm{Adg} = f$, $g_i(f_i) = g_i((f \circ \mathrm{Adg}^{-1})\mathrm{Adg})_i \subseteq \mathrm{Adg}(g_i(f \circ \mathrm{Adg}^{-1})_i)$. Luego

$$(\mathrm{Adg}^{-1}) g(f_i) \subset (g_i(f \circ \mathrm{Adg}^{-1})_i$$

y en consecuencia

$$g_i(f \circ \mathrm{Adg}_i^{-1}) = \mathrm{Adg}(g_i(f_i)),$$

de donde $PV(f \circ \mathrm{Adg}^{-1}, S) = \mathrm{Adg}(PV(f, S))$. Llamemos $P_1(P_2)$ a $PV(f, S)$ $(PV | f \circ \mathrm{Adg}^{-1}, S))$, entonces $\mathrm{Adg}\, P_1 = P_2$. Se probará que

$$Tor^{U(P_1)}(E, \mathbf{C}(f|P_1)) \cong Tor^{U(P_2)}(E, \mathbf{C}|f\mathrm{adg}^{-1}|P_2)$$

mediante el teorema 22 de I.H.

En este caso $\Lambda = U(P_1)$ y $\Gamma = U(P_2)$, $\varphi = U(\mathrm{Adg})$, donde $U(\mathrm{Adg})$ designa al morfismo Adg extendido a las correspondientes álgebras envolventes.

Los correspondientes módulos aumentados son $\mathbf{C}(f|P_1) = Q_\Lambda$ y $C(f \circ \mathrm{Adg}^{-1}|P_2) = Q_\Gamma$ con las aumentaciones $\mathcal{E}_\Lambda = f|P_1$ y $\mathcal{E}_\Gamma = f \circ \mathrm{Adg}^{-1}|P_2$.

De la exactitud en el nivel cero del complejo definido poco antes del teorema 30 se sabe que

$$\ker\ \mathcal{E}_\Lambda = U(P_1)\langle X - f|P_1(X)\rangle \quad (X \text{ en } P_1)$$
$$\ker\ \mathcal{E}_\Gamma = U(P_2)\langle Y - f \circ \mathrm{Adg}^{-1} y\rangle \quad (Y \text{ en } P_2)$$

Sea y en P_2, entonces $y = \mathrm{Adg}\, X$, además

$$y - f \circ \mathrm{Adg}^{-1} y = \mathrm{Adg}\, X - f(X) = U(\mathrm{Adg})(X - f(X))$$

De aquí se deduce que

$$\ker\ \mathcal{E}_\Gamma = U(\mathrm{Adg}) \ker\ \mathcal{E}_\wedge$$

y estamos en las condiciones del citado teorema.

Sea ψ el morfismo definido por pasaje al cociente de φ

$$\psi !\, \mathbf{C}(f|P_1) \to C(f \circ \mathrm{Adg}^{-1}|P_2)$$

Sea 1 en $\wedge$, entonces $\mathcal{E}_\wedge(1) = 1$ y

$$\psi(1) = \psi(\mathcal{E}_\wedge(P)) = \mathcal{E}_\Gamma U(\mathrm{Adg}\, 1) = \mathcal{E}_\Gamma(1) = 1,$$

luego $\psi(1) = 1$.

Por otra parte, $C(f \circ \mathrm{Adg}^{-1}|P_2)$ mirado a través de $U(\mathrm{Adg})$ es $C(f|P_1)$.

Sea X en D, entonces

$$\begin{aligned} X_{U(\mathrm{Adg})} 1 &= \mathcal{E}_\Gamma((U(\mathrm{Adg}\, X))) = \mathcal{E}_\Gamma(\mathrm{Adg}\, X) = \\ &= f \circ \mathrm{Adg}^{-1} \mathrm{Adg}\, X = f(X) = X_{U(P_1)} 1 \end{aligned}$$

Luego ψ es la identidad de $\mathbf{C}(f|P_1)$. Sea g el siguiente morfismo

$$g : U(\mathrm{Adg}\, P_1) \otimes_{U(P_1)} C(f|P_1) \to C(f \circ \mathrm{Adg}^{-1}|P_2)$$

$$g(\gamma \otimes 1) = \gamma_{U(\mathrm{Adg}\, P_1)} 1$$

g es un morfismo suryectivo de $U(\mathrm{Adg}\ P_1)$ módulos.

Sea γ en $U(\mathrm{Adg}\, P_1)$ tal que

$$0 = g(\gamma \otimes 1) = \gamma_{U(\mathrm{Adg}\, P_1)} 1 = \mathcal{E}_\Gamma(\gamma)$$

Entonces γ pertenece a $\ker\ \mathcal{E}_\Gamma = U(\mathrm{Adg}) \ker\ \mathcal{E}_\wedge$.

Sea η en $\ker\ \mathcal{E}_\Gamma$ tal que $\gamma = \mathrm{Adg}\, \eta$, entonces $\gamma \otimes 1 = \mathrm{Adg}\, \eta \otimes 1 = 1 . \mathrm{Adg}\, \eta \otimes 1 = 1 \otimes \mathcal{E}_\wedge(\eta) 1 = 0$.

Luego g es un isomorfismo.

Por último, $U(\operatorname{Adg} P_1)$ mirado como $U(P_1)$ módulo a través de $\varphi = U(\operatorname{Adg} P_1)$ es un $U(P_1)$ módulo libre de dimensión 1, en particular

$$Tor^{\wedge}(\Gamma, Q_{\wedge}) = Tor^{U(P_1)}(U(P_2), C(f|P_1)) = 0$$

Entonces, por el teorema 22

$$Tor^{U(P_1)}(E, C(f|P_1)) \cong Tor^{U(P_2)}(E, C(f \circ \operatorname{Adg}^{-1}|P_2))$$

Proposición 33. En las condiciones de la definición 6, sea α una órbita de $G(L)$ por la representación coadjunta, y f_1, f_2 dos elementos de ella. Entonces

$$Tor^{U(L)}(E, \widetilde{\operatorname{ind}}(f_1|PV(f_1,S),L) \cong Tor^{U(L)}(E, \widetilde{\operatorname{ind}}(f_2|PV(f_2,S),L)$$

<u>Demostración</u>: Como $G(L)$ actúa transitivamente sobre α, sea g tal que $f_1 = f_2 \circ \operatorname{Adg}^{-1}$. Entonces por las proposiciones 31 y 32 se tiene

$$\begin{aligned} &Tor^{U(L)}(E, \widetilde{\operatorname{ind}}(f_1|PV(f,S),L)) \cong Tor^{U(PV(f,S))}(E, \mathbf{C}(f_1|PV(f,S))) \\ &\cong Tor^{U(PV|f_2,S)}(E, \mathbf{C}(f_2|PV(f_2,S)) \cong Tor^{U(L)}(E, \widetilde{\operatorname{ind}}(f_2|PV(f_2,S),L)) \end{aligned}$$

Corolario 34. En las condiciones de la definición 6, si α es una órbita por la representación coadjunta de $G(L)$, y dos elementos de ella, f_1, f_2, entonces

$$Tor^{U(L)}(E, \widetilde{\operatorname{ind}}(f_1|PV(f,S),L) \neq 0 \qquad (=0)$$

si y sólo si

$$Tor^{U(L)}(E, \widetilde{\operatorname{ind}}(f_2|PV(f_2,S),L) \neq 0 \qquad (=0)$$

Este último corolario muestra que la definición 6 es independiente del representante elegido en la órbita. Más aún, de aquí también se deduce que no pueden haber dos elementos en una órbita tales que para uno de ellos los espacios Tor sean nulos y para el otro no.

En consecuencia, la definición 6 puede enunciarse como sigue

Definición 6'. En las condiciones de la definición 6

$$\begin{aligned} Sp(L,E,S) : \{\alpha \in L/Ad^*(G(L)) | \forall f \in \alpha \\ Tor^{U(L)}(E, \widetilde{\operatorname{ind}}(f|PV(f,S),L) \neq 0\} \end{aligned}$$

Como corolario de las proposiciones anteriores se tiene

Corolario 35. En las condiciones de la definición 6, sea α una órbita por la representación coadjunta de $G(L)$, y S una sucesión Jordan Hölder de L. Entonces α pertenece (resp. no pertenece) a $Sp(L,E)$ si y sólo si para todo elemento f_1 de α $f|PV(f,S)$ pertenece (resp. no pertenece) a $Sp(PV(f,S),E,SING)$.

Demostración: En las hipótesis de la proposición 31 y del corolario

$$Tor^{U(L)}(E, \widetilde{\operatorname{ind}}(f|PV(f,S),L)) \cong Tor^{U(PV(f,S))}(E, \mathrm{C}(f|PV(f,S)))$$

Corolario 36. En las condiciones de la definición 6. Si α es una órbita por la representación coadjunta de $G(L)$ y S una sucesión de Jordan Hölder, sea f en α tal que $PV(f,S) = P$ es un ideal de L. Entonces α pertenece (resp. no pertenece) a $Sp(L,E)$ si y sólo si para todo elemento g de α $g|P$ pertenece (resp. no pertenece) a $Sp(P,E,SING)$.

Demostración: Sea f en α tal que $PV(f,S) = P$. Por la primera parte de la demostración de la proposición 32, sabemos que $PV(f \circ \mathrm{Adg}^{-1}, S) = \mathrm{Adg}(PV(f,S) = PV(f,S)$, pues este conjunto es un ideal de L (teorema 17).

Como $G(L)$ actúa transitivamente sobre α, $PV(g,S) = P$ para toda g en α. Luego el corolario 36 es una consecuencia del 35.

Estos dos corolarios permiten simplificar el problema de la determinación de los elementos de $Sp(L,E)$, pues lo reducen al caso de órbitas singulares en álgebras apropiadas. Veamos como se realiza. Por simplicidad, supondremos que tenemos una órbita singular de toda el álgebra. El teorema 30, nos provee una resolución exacta libre de $U(L)$ módulos de $\mathbb{C}(f)$. Tensorizando por el $U(L)$ módulo a derecha E se obtiene el complejo $(E\otimes\wedge^P L_i, d_{P-i})$

$$d_{P-1} : E \otimes \wedge^P L \to E \otimes \wedge^{P-1} L$$

$$d_{P-1}\langle x_{i_1}\dots x_{i_p}\rangle = \sum_{j=1}^{P}(-1)^{j+1}e(x_{i_j} - f(x_{i_j}))\langle x_i, \widehat{x}_{i_j} x_{i_p}\rangle$$

$$+ \sum_{1\le k<\ell\le p}(-1)^{k+\ell}e\langle [x_{i_k} x_{i_\ell}] x_{i_1}\widehat{x}_{i_k}\widehat{x}_{i_\ell} x_{i_p}\rangle$$

$$\text{y} \qquad Tor^{U(L)}(E, \mathbb{C}(f)) = H(E \otimes \wedge^P L, d_{P-1})$$

Es decir, $\{f\}$ pertenece a $Sp(L, E, SING)$ si y sólo si el complejo anterior no es exacto.

Con respecto a las sucesiones de Jordan Hölder, son introducidas para poder trabajar con las polarizaciones, las cuales nos permiten siempre restringirnos al caso de órbitas singulares, mientras que los módulos $\widetilde{\text{ind}}(f|PV(f,S), L)$ reemplazan y generalizan a los $C(f)$, que corresponden a las órbitas singulares.

El interés en las órbitas singulares es fundamental en la teoría, ellas poseen múltiples ventajas, están contenidas en un espacio lineal $(L^{2^\perp})$ son órbitas puntuales, y el módulo que definen es fácil de manejar, más aún, en el caso conmutativo, como veremos, todo se limita a la parte singular. Por último, es necesario recalcar, que la definición de espectro no es independiente de la representación φ de L en E, si ésta ha sido incorporada en el símbolo que denota al objeto de la definición 6, es solamente por brevedad, y en cada caso particular será explicitada.

Veamos que sucede con la noción de espectro en el caso clásico. Sea a una n-upla de operadores que actúa en un espacio de Banach E, los cuales conmutan dos a dos y son linealmente independientes.

En este caso $L = \langle a\rangle$, $\varphi = i_{L.\mathcal{L}(E)}$ la inclusión, $U(L) = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] = P_n$. Como L es conmutativa $L^2 = 0$ y todo elemento de L^* es singular. Luego $Sp(L, E) = Sp(L, E, SING)$.

Mirando el complejo que describimos anteriormente, a través del cual se determinan las órbitas singulares, nos da en el caso conmutativo: $(E \otimes \wedge^P L, d_{P-1})$

$$d_{P-1} : E \otimes \wedge^P L \to E \otimes \wedge^{P-1} L$$

$$d_{P-1}e\langle x_{i_1}\dots x_{i_p}\rangle = \sum_{j=1}^{P}(-1)^{j+1}e(x_{i_j} - f(x_{i_j})\langle x_{i_1}\widehat{x}_{i_j} x_{i_p}\rangle$$

de donde $Sp(L,E) = \{f \in L^*/Tor_P^{U(L)}(E, C(f)) \neq 0\}$.

Este conjunto coincide con el definido al comienzo de la sección A, el espectro geométrico de Taylor del espacio vectorial L, lo que nos permite recobrar la noción usual en el caso conmutativo y enunciar el siguiente resultado

Proposición 37. Sea a una n-upla de operadores que conmutan dos a dos en un espacio de Banach E. Entonces si L es el álgebra de Lie conmutativa generada por $a : L = \langle a \rangle$ se verifica que $Sp(L,E)$ es el espectro geométrico de Taylor de la n-upla. Más aún, $Sp(a,E) = \{f(a_i)_{i \leq i \leq n} f \in Sp(L,E)\}$. En particular,

Proposición 38. Si E es un espacio de Banach y a un elemento de E, entonces $Sp(a) = \{f(a), f \in Sp\langle a \rangle\}$.

La aproximación al espectro vía el complejo de Koszul permite mostrar en forma más transparente la generalización realizada. En el caso conmutativo, todas las órbitas son singulares y la homología del complejo da los espacios $Tor^{P_n}(E, C(f))$, los cuales brindan el espectro de Taylor ([12],4). Este complejo se generaliza a las órbitas singulares, dando como homología los espacios $Tor^{U(L)}(E, C(f))$. Por último, la determinación de los elementos del $Sp(L,E)$ viene dada por una variante del complejo anterior, relativa a una subálgebra de L.

Por último, recordemos que en el caso conmutativo, partimos del espectro de Taylor y se definió el espectro geométrico, cuya generalización está dada por el objeto $Sp(L,E)$. Análogamente, a partir de este conjunto podemos definir otro, cuya relación con aquel es semejante a la existente entre el espectro de Taylor y el espectro geométrico.

Más precisamente, sea L un álgebra de Lie y (E, φ) una representación continua a derecha de L en E. Sea $\{X_i\}(1 \leq i \leq n)$ una base de L, $\varphi(X_i)$ $1 \leq i \leq n$ una base de $\varphi(L)$, entonces

Definición 9. El espectro singular de la n-upla $\{X_i\}$ es el conjunto

$$\{f(X_i),\ f \in Sp(L, E, SING)\}$$

y será notado por $Sp(E, (X_i)_{1 \leq i \leq n})$.

Se deduce de la definición 9, que en el caso conmutativo, este conjunto nos brinda el espectro de Taylor de una n-upla de operadores que conmutan dos a dos.

II.C EJEMPLOS.

En esta sección se calcularán varios espectros de álgebras de Lie no conmutativas.

En primer término, se estudiará el álgebra G_2, la cual es la única álgebra resoluble no conmutativa de dimensión 2. Posee la siguiente estructura

$$G_2 = \mathbf{C}(y) \otimes \mathbf{C}(x)$$

y $[x, y] = y$.

Proposición 39. En $U(G_2)$ se tienen las identidades

$$[x, y^n] = ny^n$$

<u>Demostración</u>: Por inducción en n, $n = 1$, es la definición de G_2.

Supongamos $[X, Y^n] = ny^n$, entonces

$$\begin{aligned} xy^{n+1} &= xy^n y = (ny^n + y^n x)y \\ &= ny^{n+1} + y^n(xy) = ny^{n+1} + y^n(yx + y) \\ &= ny^{n+1} + y^{n+1}x + y^{n+1} = \\ &= (n+1)y^{n+1} + y^{n+1}x\ , \end{aligned}$$

de donde

$$[X, Y^{n+1}] = (n+1)y^{n+1}$$

Corolario 40. Sea $(E, \| \quad \|)$ un espacio de Banach, y (E, φ) una representación a derecha de G_2, entonces $\varphi(y)$ es nilpotente.

Demostración: Por lo visto en I.B, E es un $U(L)$ módulo a derecha, sea $\widetilde{\varphi}$ la acción de $U(L)$ en E, entonces

$$\begin{aligned} n\varphi(y)^n &= n\widetilde{\varphi}(y)^n = n\widetilde{\varphi}(y^n) = \\ &= \widetilde{\varphi}[X, Y^n] = [\widetilde{\varphi}(x)\widetilde{\varphi}(y^n)]^{\mathrm{op}} = \\ &= [\varphi(x), \varphi(y)^n]^{\mathrm{op}} \end{aligned}$$

Entonces $n\varphi(y)^n = [\varphi(x), \varphi(y)^n]^{\mathrm{op}}$ si y sólo si $n\varphi(y)^n = \varphi(y)^n\varphi(x) - \varphi(x)\varphi(y)^n$, tomando $\|\ \|$ en $\mathcal{L}(E)$

$$n\|\varphi(y)^n\| \leq 2\|\varphi(y)^n\|\,\|\varphi(x)\|\,.$$

Como $\varphi(x)$ es un operador acotado, resulta $\varphi(y)$ nilpotente.

Para la próxima proposición, supondremos por simplicidad, que el álgebra G_2 está definida por operadores de un espacio de Banach E y que la representación es la inclusión $\varphi = i_{G_2, \mathcal{L}(E)^{\mathrm{op}}}$.

Como $[X, Y]^{\mathrm{op}} = y$, se deduce que $[X - \lambda I, y]^{\mathrm{op}} = y$, de aquí

$$(X - \lambda)(\mathrm{Im}\, y) \subseteq \mathrm{Im}\, y$$

$$(X - \lambda) \ker y \subseteq \ker y\ ,$$

entonces se pueden considerar los conjuntos $\{\lambda \in \mathbf{C} / \overline{x} - \lambda$ no es biyectivo en $E/\mathrm{Im}\, y\}$, y $Sp(X, \ker y)$, donde $\overline{x}$ denota al operador cociente de X en el espacio $E/\mathrm{Im}\, y$.

Proposición 41. Sea E un espacio de Banach, x, y dos operadores de E linealmente independientes tales que $[X, Y]^{\mathrm{op}} = -[Y, X] = y$. Entonces si L es el álgebra de Lie generada por X e Y $(L = \mathbf{C}(y) \otimes \mathbf{C}(x))$, $Sp(L, E)$ carece de órbitas no singulares y $Sp(E, (y, x)) \subseteq \{0\} \times (Sp(x) \cup Sp(x) - 1)$. Más aún

$$Sp(E, (y, x)) = \{0\} \times \{\lambda \in \mathbf{C} / \overline{x} - \lambda \text{ no es biyectivo}\} \cup \{0\} \times Sp(x, \ker y)$$

Demostración: Veamos la primera parte, sea $S = (L_i)_{0 \leq i \leq 2}$ una sucesión de Jordan Hölder de G_2, entonces $L_0 = 0$ $L_2 = G_2$ y L es un ideal de dimensión 1 de G_2.

Sea $z = a_1 y + a_2 x$ tal que $L = \mathbf{C}\langle z\rangle$. Entonces

$$[y,z] = -a_2[x,y] = -a_2 y$$
$$[x,z] = a_1[x,y] = a_1 y$$

Como z no es cero, existe $i = 1,2$ tal que a_i no es cero, luego por ser L_1 un ideal, y debe pertenecer a L_1, luego $L_1 = \mathbf{C}(y)$.

Entonces existe una única sucesión Jordan Hölder de L,

$$L_0 = 0 \qquad L_1 = \mathbf{C}\langle y\rangle \qquad L_2 = L = G_2$$

Sea f un elemento de L^* en la base dual de $\{y,x\}$, f posee la siguiente expresión

$$f = \lambda_1 f_y + \lambda_2 f_x \qquad \text{con} \quad f_y(y) = 1\,,\ f_y(x) = 0\,,$$
$$f_x(y) = 0$$
$$f_x(x) = 1$$

Veamos las órbitas singulares: f es singular si y sólo si $f(L^2) = 0$, si y sólo si $f(y) = 0$, si y sólo si $\lambda_1 = 0$. Luego las órbitas singulares son de la forma $\{\lambda f_x\}$.

Si f es tal que λ_1 no es cero, entonces f pertenece a una órbita no singular. Calculemos las polarizaciones.

Si f es singular $PV(f,S) = L = G_2$. Si f no es singular, entonces

$$PV(f,S) = \sum_{i=0}^{2} g_i(f)\,, \qquad \text{con} \quad g_i(f) =$$
$$= \{\omega \in L_i / f([\omega, L_i]) = 0\}$$
$$g_0(f) = L_0 = 0$$
$$g_1(f) = \{\omega \in L_1 = \mathbf{C}\langle y\rangle / f([\omega, L_1]) = 0\} = L_1$$
$$= \mathbf{C}\langle y\rangle\,, \qquad \text{pues} \quad [y,y] = 0$$
$$g_2(f) = \{\omega \in G_2 / f([\omega, G_2]) = 0\}$$

pero $f([x,y]) = f(y) = \lambda_1 \neq 0$, luego $g_2(f) = \mathbf{C}(y)$, y en consecuencia $PV(f,S) = \mathbf{C}(y)$.

Veamos que $Sp(G_2, E)$ carece de órbitas no singulares.

Si α es una órbita no singular, y f un elemento de ella, se tiene que $\lambda_1 \neq 0$, pues α no es singular, y en tal caso $PV(f, S) = C(y)$.

La pertenencia de α depende de la no nulidad de los espacios

$$Tor^{U(G_2)}(E, \widetilde{\mathrm{ind}}(f|PV(f,S))G_2)$$

por el corolario 35, basta estudiar los espacios

$$Tor^{U(PV(f,S))}(E, \mathbf{C}(f|PV(f,S)) \ ,$$

en tal caso se tiene el complejo

$$0 \to E \otimes \wedge' C\langle y\rangle \xrightarrow{d_0} E \longrightarrow 0$$
$$d_0 e\langle y\rangle = e(y - f(y)) = C(y - \lambda_1)$$

Pero estamos en el caso $\lambda_1 \neq 0$, como y es un operador nilpotente, $Sp(y) = 0$. Luego, para todo $\lambda_1 \neq 0$ el complejo anterior es exacto y en consecuencia

$$0 = Tor^{U(PV(f,S))}(E, \mathbf{C}(f|PV(f,S)) \cong$$
$$\cong Tor^{U(G_2)}(E, \widetilde{\mathrm{ind}}(f|PV(f,S), G_2)$$

Luego $Sp(G_2, E)$ carece de órbitas singulares. De donde

$$Sp(L, E) \subseteq L^{2^\perp} = C(y)^\perp \cong \{0\} \times \mathbf{C}\langle f_x\rangle$$

en la base dual de $\{y, x\}$.

Veamos cuáles de las órbitas singulares forman parte del espectro, las cuales determinan a su vez, $Sp(E, (y, x))$. Se deben estudiar los espacios $Tor^{U(G_2)}(E, \mathbf{C}(f))$ con $f = \lambda f_x$.

El complejo de Kossul es de la forma

$$0 \longrightarrow E \otimes \wedge^2 G_2 \xrightarrow{d_1} E \otimes \wedge^1 G_2 \xrightarrow{d_0} E \longrightarrow 0$$
$$d_0 e\langle y\rangle = e(y - f(y)) = e_y$$
$$d_0 e\langle x\rangle = e(x - f(x)) = e(x - \lambda)$$
$$d_1 e\langle xy\rangle = e(y - f(y))\langle x\rangle - e(x - f(x))\langle y\rangle$$
$$- e\langle [y, x]\rangle = -e(x - \lambda - 1)\langle y\rangle + ey\langle x\rangle$$

y se tiene

$$Tor_0^{U(G_2)}(E, \mathbf{C}(f)) = E/\mathrm{Im}\, d_0$$
$$Tor_1^{U(G_2)}(E, \mathbf{C}(f)) = \ker d_0/\mathrm{Im}\, d_1$$
$$Tor_2^{U(G_2)}(E, \mathbf{C}(f)) = \ker d_1$$

Supongamos que $\lambda y \lambda + 1$ no pertenecen a $Sp(x)$. Entonces se construye el operador de homotopía $S = (S_i|_{0 \leq i \leq 1}$

$$S_0(e) = e(x-\lambda)^{-1}\langle x\rangle$$
$$S_1 e\langle y\rangle = -e(x-\lambda-1)^{-1}\langle yx\rangle$$
$$S_1(e\langle x\rangle) = 0$$

Debemos verificar que se satisfacen las ecuaciones

$$d_m S_m + S_{m-1} d_{m-1} = \overline{d} \qquad m = 0, 1, 2$$

$m = 0$:

$$d_0 S_0 e = d_0(e(x-\lambda)^{-1}\langle x\rangle = e(x-\lambda)^{-1}(x-\lambda) = e$$

$m = 1$:

$$\begin{aligned}
&d_1 S_1 e\langle x\rangle + S_0 d_0 e\langle x\rangle = S_0 d_0 e\langle x\rangle = \\
&= S_0 e(x - f(x)) = e(x-\lambda)(x-\lambda)^{-1}\langle x\rangle = e\langle x\rangle \\
&d_1 S_1 e\langle y\rangle + S_0 d_0 e\langle y\rangle = \\
&= d_1(-e(x-\lambda-1)^{-1}\langle yx\rangle) + S_0 ey = \\
&= e(x-\lambda-1)^{-1}(x-\lambda-1)\langle y\rangle \\
&- e(x-\lambda-1)^{-1} y\langle x\rangle + ey(x-\lambda)^{-1}\langle x\rangle \\
&= e\langle y\rangle + (-e(x-\lambda-1)^{-1} y + ey(x-\lambda)^{-1})\langle x\rangle = e\langle y\rangle
\end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned}
(x-\lambda-1)^{-1} y = y(x-\lambda)^{-1} \quad &\text{si y sólo si} \\
y(x-\lambda) = (x-\lambda-1)y \quad &\text{si y sólo si} \\
yx = xy - y \quad &\text{si y sólo si} \\
y = [x, y]
\end{aligned}$$

$m = 2$:

$$\begin{aligned}&S_1 d_1 e\langle yx\rangle = S_1(-e(x-\lambda-1)\langle y\rangle)+\\&+ey\langle x\rangle) = -S_1 e(x-\lambda-1)\langle y\rangle =\\&= e(x-\lambda-1)(x-\lambda-1)^{-1}\langle yx\rangle = e\langle yx\rangle\end{aligned}$$

Entonces se ha probado que

$$\{0\} \times Sp(x)^c \cap \{0\} \times (Sp(x)-1)^c \subseteq Sp(E,(y,x)) \,,$$

o equivalentemente

$$Sp(E,(y,x)) \subseteq \{0\} \times (Sp(x) \cup Sp(x) - 1)$$

Veamos la segunda parte.

Se verifican las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} d_0 &= \operatorname{Im} y + \operatorname{Im}(x-\lambda)\\ \ker\, d_0 &= \{(a,b) \in E \otimes \wedge^1 L / ay + b(x-\lambda) = 0\}\\ \operatorname{Im} d_1 &= \{(-c(x-\lambda-1), c(y)/c \in E \otimes \wedge^2 L\}\\ \ker\, d_1 &= \ker\, y \cap \ker(x-\lambda-1)\end{aligned}$$

Luego

i) $Tor_0^{U(L)}(E, C(\lambda f_x)) = 0$ si y sólo si $E = \operatorname{Im} j + \operatorname{Im}(x-\lambda)$, si y sólo si $\overline{x} - \lambda$ es suryectiva en $E/\operatorname{Im} j$.

ii) $Tor_2^{U(L)}/E, \mathbf{C}(\lambda f_x)) = 0$ si y sólo si $x - \lambda - 1$ es inyectivo actuando en ker y.

Por último: $Tor_1^{U(L)}(E, \mathbf{C}(\lambda f_x)) = 0$ si y s'olo si

a) $\overline{x} - \lambda$ es inyectivo

b) $x - \lambda - 1$ es suryectivo

Supongamos que $Tor_1^{U(L)}(E, \mathbf{C}(\lambda f_x)) = 0$

para a), sea b tal que $(\overline{x} - \lambda)\overline{b} = 0$, entonces existe a en E tal que $(x-\lambda)b = y(a)$, o equivalentemente $y(-a) + (x-\lambda)b = 0$. Entonces $d_0(-a,b) = 0$.

Como $\ker d_0 = \operatorname{Im} d_1$, existe c en E tal que $(-a, b) = (-c(x - \lambda - 1), c(y))$ en particular $b = cy$, luego $\bar{b} = 0$ y $\bar{x} - \lambda$ es inyectiva.

para b), sea V que pertenece a $\ker y$, entonces $d_0(V, 0) = 0$, como $\ker d_0 = \operatorname{Im} d_1$, existe c en E tal que $(V, 0) = (-c(x - \lambda - 1), cy)$, luego $y(c) = 0$ y c pertenece a $\ker y$. En consecuencia $x - \lambda - 1$ es suryectivo desde $\ker y$ y en $\ker y$.

Recíprocamente, sea (a, b) en $\ker d_0$, entonces $ay + b(x - \lambda) = 0$, luego $(\bar{x} - \lambda)\bar{b} = 0$ por ser $\bar{x} - \lambda$ inyectivo, resulta que existe c en E tal que $cy = b$. Además

$$\begin{aligned} 0 &= ay + b(x - \lambda) = ay + cy(x - \lambda) \\ &= ay + c(x - \lambda)y - cy = ay + c(x - \lambda - 1)y \\ &= (a + c(x - \lambda - 1))y\ , \end{aligned}$$

sea $\omega = a + c(x - \lambda - 1)$. Luego ω pertenece a $\ker y$, por ser $x - \lambda - 1$ suryectivo, existe V en $\ker y$ tal que $a + c(x - \lambda - 1) = V(x - \lambda - 1)$, luego $a = (V - c)(x - \lambda - 1) = -c(-V)(x - \lambda - 1)$. Como $V \,.\, y = 0$, se tiene que $(c - V)y = cy = b$, luego $(a, b) = \ (-(c - V)(x - \lambda - 1), (c - V)y) = d_1((c - V)\langle yx\rangle)$. En consecuencia $\ker d_0 = \operatorname{Im} d_1$ y $Tor_1^{U(L)}(E, C(\lambda f_x)) = 0$.

Se ha probado que

$$Sp(E, (y, x))^C = \{0\} \times \{\lambda / \bar{x} - \lambda \quad \text{es biyectivo}\} \cap \{0\} \times \{\lambda\}(Sp(x, \ker y) - 1)^C$$

equivalentemente

$$Sp(E, (y, x)) = \{0\} \times \{\lambda / \bar{x} - \lambda \quad \text{no es biyectivo}\} \cup \{0\} \times (Sp(x, \ker y) - 1)$$

Veamos un ejemplo en $E = \mathbf{C}^2$.

La condición $[x, y]^{\mathrm{op}} = y$ es equivalente a $[y, x] = y$.

Sean $a = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ dos operadores definidos sobre la base canónica, entonces

$$ba = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad ab = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

de donde $[b, a] = ba - ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = b$. En consecuencia, el espacio vectorial $C(b) \oplus C(a)$ brinda una estructura de álgebra de Lie de dimensión 2 isomorfa a G_2. Se la considera contenida en $\mathcal{L}(\mathbf{C}^2)^{\mathrm{op}}$, y φ será la inclusión $\varphi = i_{G_2, \mathcal{L}(C^2)^{\mathrm{op}}}$.

Se tiene que $b(1,0)=(1,-1)=b(0,1)$, luego $\operatorname{Im} b=\langle(1,-1)\rangle$, además $\ker b=\langle(1,-1)\rangle$. Con respecto al operador a, se tiene: $Sp(a)=\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$, y $a(1,-1)=\frac{1}{2}(1,1)$, $a(1,-1)=-\frac{1}{2}(1,-1)$. Luego $a|_{\langle(1,-1)\rangle}x=-\frac{1}{2}x$, en consecuencia $Sp(a,\ker b)=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Como $\langle(1,-1)\rangle\oplus\langle(1,1)\rangle=E$, resulta que, salvo isomorfismo, el operador $\tilde{a}$ definido en $E/\operatorname{Im} b$ consiste en $a|_{\langle(1,1)\rangle}$, pero $a|_{\langle(1,1)\rangle}x=\frac{1}{2}x$. Luego $\{X/\overline{x}-\lambda$ no es biyectivo $\}=Sp(a|_{\langle(1,1)\rangle},\langle(1,1)\rangle)=\left\{\frac{1}{2}\right\}$. En consecuencia

$$Sp(\mathbf{C}^2,(b,a))=\{0\}\times\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\{0\}\times\left\{-\frac{3}{2}\right\}=\{0\}\times\left\{\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right\}$$

Notar que

$$Sp(\mathbf{C}^2,(y,x))\not\subseteq\{0\}\times(Sp(a)\cup Sp(a)-1)=\{0\}\times\left\{\pm\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right\}$$

Consideremos otro ejemplo, el álgebra e Heisenberg, la cual es el álgebra de Lie nilpotente de dimensión más pequeña. Posee la siguiente estructura, $L=\mathbf{C}(x_1)\oplus\mathbf{C}(x_2)\oplus\mathbf{C}(x_3)$, con relaciones $[x_3,x_2]=x_1$, y las restantes iguales a cero. Su grupo asociado es $G(L)=\mathbf{C}^3$, con el producto

$$(x_1,x_2,x_3)(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1+x_3y_2,x_2+y_2,x_3+y_3)\,,$$

y con identidad $e=(0,0,0)$.

Si $x=(x_1,x_2,x_3)$, entonces $x^{-1}=(-x_1+x_2x_3,-x_2,-x_3)$. Si f es un elemento de L^*, con coordenadas $f=\xi_1f_1+\xi_2f_2+\xi_3f_3$ donde $\{f_i\}_{1\leq i\leq 3}$ es la base dual de $\{x_i\}_{1\leq i\leq 3}$, entonces la representación adjunta de G en L y la coadjunta de G en L^* tienen la siguiente expresión:

$$Ad((x_1,x_2,x_3))(ax_1+bx_2+cx_3)=(a_1+x_1a_2-x_2a_3)x_1+a_2x_2+a_3x_3$$
$$Ad^*((x_1,x_2,x_3))(\xi_1f_1+\xi_2f_2+\xi_3f_3)=\xi_1f_1+(\xi_2-x_3\xi_1)f_2+(\xi_3+x_2\xi_1)f_3$$

Consideremos, como en el ejempl de G_2, el álgebra L como una subálgebra de Lie de $\mathcal{L}(E)^{\mathrm{op}}$, con $\varphi=i_{L,\mathcal{L}(E)}$.

Corolario 42. En las condiciones anteriores, $Sp(L,E)$ no posee órbitas no singulares. Más aún, $Sp(E,(x_1,x_2,x_3))$ está contenido en $\{0\} \times Sp(x_2) \times Sp(x_3)$.

Demostración: Sea f un elemento de f^* como $L^2 = \langle x_1 \rangle$, entonces f es singular si y sólo si $f(L^2) = 0$, si y sólo si $\xi_1 = 0$, donde $f = \sum_{i=1}^{3} \xi_i f_i$. Consideremos una f tal que $\xi_1 \neq 0$, la cual será una órbita no singular, $\alpha = G(L) . f$. Calculemos las sucesiones de Jordan Hölder de $L : S = (L_i)_{0 \leq i \leq 3}$, con $L_0 = 0$, $L_3 = L$. Supongamos que $L_1 \neq \langle x_1 \rangle$, entonces existe V en L tal que V no pertenece a $\langle x_1 \rangle$ y $L_1 = \langle V \rangle$, V es de la forma $V = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$. Como L_1 es un ideal, $[L,V]$ está contenido en $\langle V \rangle$:

$$
\begin{aligned}
[X_1, V] &= 0 \\
[X_2, V] &= -a_3 x_1 \\
[X_3, V] &= a_2 x_1
\end{aligned}
$$

Como V no pertenece a $\langle x_1 \rangle$, resulta que $a_3 = a_2 = 0$, de donde $V = a_1 x_1$, absurdo. Luego $L_1 = \langle x_1 \rangle$. Sea H un espacio vectorial de dimensión 2, tal que $H \supset L$, luego $[L,H] \subseteq [L,L] = L^2 = \langle x_1 \rangle = L_1 = H$. En consecuencia, H es un ideal, y toda sucesión de Jordan Hölder es de la forma $L_0 = \{0\}$, $L_1 = \langle x_1 \rangle$, $L_2 = H$, $L_3 = L$, donde H es un plano que contiene a x_1. Más aún, como x_1 conmuta con toda identidad de L, H es un ideal conmutativo.

Veamos la primera afirmación: Dada f en L^*, la cual define una órbita no singular, calculemos $PV(f,S)$. Por el teorema 6 de I.D, sabemos que $PV(f,S) = \sum_{i=0}^{3} g_i(f_i)$, donde $g_i(f_i) = \{x \in L_i / f([x, L_i]) = 0\}$, además dim $PV(f,S) = \frac{1}{2}(\dim L + \dim L^\perp)$, y $L^\perp = g_3(f_3) = \{x \in L / f([x,L]) = 0\}$.

Sea z en $L^\perp$, entonces $z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$ y $0 = f([z, x_1])$ pues $[z, x_1] = 0$

$$
\begin{aligned}
0 &= f([z,x_2]) = a_3 f([x_3,x_2]) = a_3 f(x_1) = a_3 \xi_1 \\
0 &= f([z,x_3]) = -a_3 f([x_3,x_2]) = -a_3 \xi_1
\end{aligned}
$$

Como $\xi_1 \neq 0$, resulta $z = a_1 x_1$, en consecuencia $L^\perp = L$, y dim $PV(f,S) = 2$.

Como H es un ideal conmutativo resulta que $g_2(f_2) = H$, en consecuencia $H \subseteq PV(f,S)$, por tener la misma dimensión $H = PV(f,S)$./

Como H es un ideal, por el corolario 36, $H = PV(f \circ \mathrm{Ad}(x^{-1}), S)$ para todo x en $G(L)$, y $\alpha = G(L)\,.\,f$ pertenece a $Sp(L,E)$ si y sólo si $f \circ \mathrm{Ad}(x^{-1})|H$ pertenece a $Sp(H,E,SING)$ para todo x en $G(L)$. Como H es conmutativo, $Sp(H,E,SING) = Sp(H,E)$ y si x_1, V generan H, el conjunto $Sp(E,(x_1,V))$ nos da el espectro de Taylor definido por los operadores x_1, V, el cual es un compacto en $\mathbf{C}^2$, pensado como H^*.

Pero las coordenadas de $f \circ \mathrm{Ad}(x^{-1})|H$ en la base (x,V) son

$$f \circ \mathrm{Ad}(x^{-1})|_H(x_1) = \xi_1$$
$$f \circ \mathrm{Ad}(x^{-1})|_H(V) = a_2(\xi_2 - x_2\xi_1) + a_3(x_3 + x_2\xi_1)$$

si $V = a_2x_2 + a_3x_3$.

Como $\xi_1 \neq 0$, al movernos sobre la órbita de f, obtenemos que el conjunto $(\xi_1, \mathbf{C})$ está contenido en $Sp(E,(X_1,V))$, si α pertenece a $Sp(L,E)$ como aquel es un compacto esto es imposible. Luego $Sp(L,E,S)$ carece de órbitas no singulares, como esto se lo ha probado para toda sucesión de Jordan Hölder, $Sp(L,E) = Sp(L,E,SING)$.

Para la segunda parte, veremos que si $f = \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$, entonces para λ_2 en $Sp(x_2)^C$ o λ_3 en $Sp(x_3)^C$, se puede construir un operador de homotopía para el complejo de Koszul de f_1, con lo cual f no pertenecerá a $Sp(L,E)$.

El complejo de Koszul para el álgebra de Heisenberg es el siguiente:

$$0 \longrightarrow E \otimes \wedge^3 L \xrightarrow{d_2} E \otimes \wedge^2 L \xrightarrow{d_1} E \otimes \wedge' L \xrightarrow{d_0} E \longrightarrow 0$$

$$d_0 e\langle x_1\rangle = ex_1$$
$$d_0 e\langle x_2\rangle = e(x_2 - \lambda_2)$$
$$d_0 e\langle x_3\rangle = e(x_3 - \lambda_3)$$

$$d_1 e\langle x_1x_2\rangle = ex_1\langle x_2\rangle - e(x_2 - \lambda_2)\langle x_1\rangle$$
$$d_1 e\langle x_1x_3\rangle = ex_2\langle x_3\rangle - e(x_3 - \lambda_3)\langle x_1\rangle$$
$$d_1 e\langle x_2x_3\rangle = e(x_2 - \lambda_2)\langle x_3\rangle - e(x_3 - \lambda_3)\langle x_2\rangle + e\langle x_1\rangle$$

$$d_2\langle x_1x_2x_3\rangle = ex_1\langle x_2x_3\rangle - e(x_2 - \lambda_2)\langle x_1x_3\rangle + e(x_3 - \lambda_3)\langle x_1x_2\rangle$$

Supongamos que λ_2 no pertenece a $Sp(x_2, E)$. Sea $S = (S_i)_{0 \leq i \leq 2}$ el siguiente operador

$$S_i : E \otimes \wedge^i L \longrightarrow E \otimes \wedge^{i+1} L \qquad 0 \leq i \leq 2$$

$$S_0 e = e(x_2 - \lambda_2)^{-1} \langle x_2 \rangle$$

$$\begin{aligned}
S_1 e\langle x_2 \rangle &= 0 \\
S_1 e\langle x_1 \rangle &= -e(x_2 - \lambda_2)^{-1} \langle x_1 x_2 \rangle \\
S_1 e\langle x_3 \rangle &= e(x_2 - \lambda_2)^{-1} \langle x_2 x_3 \rangle + (x_2 - \lambda_2)^{-2} \langle x_1 x_2 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 e\langle x_1 x_2 \rangle &= 0 \\
S_2 e\langle x_2 x_3 \rangle &= 0 \\
S_2 e\langle x_1 x_3 \rangle &= -e(x_2 - \lambda_2)^{-1} \langle x_1 x_2 x_3 \rangle
\end{aligned}$$

Se verá que si $f = \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$, con λ_3 en $\mathbf{C}$ arbitrario y λ_2 en $Sp(x_2)^C$, entonces f no pertenece a $Sp(E, (x_1 x_2 x_3))$.

Debemos verificar que $d_m S_m + S_{m-1} d_{m-1} = I$ con $0 \leq m \leq 3$.

$m = 0$

$$d_0 S_0 e = d_0 e(x_2 - \lambda_2)^{-1} \langle x_2 \rangle = e(x_2 - \lambda_2)^{-1} (x_2 - \lambda_2) = e$$

$m = 1$

$$\begin{aligned}
& d_1 S_1 + S_0 d_0 = I \\
& d_1 S_1 e\langle x_2 \rangle + S_0 d_0 e\langle x_2 \rangle = S_0 d_0 e\langle x_2 \rangle = \\
& = S_0 e(x_2 - \lambda_2) = e(x_2 - \lambda_2)(x_2 - \lambda_2)^{-1} \langle x_2 \rangle = e\langle x_2 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d_1 S_1 e\langle x_1 \rangle + S_0 d_0 e\langle x_1 \rangle = \\
& = d_1(-e(x_2 - \lambda_2)^{-1} \langle x_1 x_2 \rangle) + S_0 e x_1 = \\
& = -e(x_2 - \lambda_2)^{-1} x_1 \langle x_2 \rangle + e(x_2 - \lambda_2)^{-1} (x_2 - \lambda_2) \langle x_1 \rangle \\
& \quad + e x_1 (x_2 - \lambda_2)^{-1} \langle x_2 \rangle
\end{aligned}$$

pero $[x_1, x_2]^{op} = 0$, entonces $[x_1, x_2 - \lambda_2]^{op} = 0$, en consecuencia $x_1(x_2 - \lambda_2) = (x_2 - \lambda_2)x_1$, de donde $(x_2 - \lambda_2)^{-1}x_1 = x_1(x_2 - \lambda_2)^{-1}$ y la ecuación anterior se transforma en $= e\langle x_1\rangle$.

$$
\begin{aligned}
&d_1 S_1 e\langle x_3\rangle + S_0 d_0 e\langle x_3\rangle = \\
&= d_1(-e(x_2-\lambda_2)^{-1}\langle x_2x_3\rangle + e(x_2-\lambda_2)^{-2}\langle x_1x_2\rangle) \\
&\quad + S_0 e(x_3-\lambda_3) = e(x_2-\lambda_2)^{-1}(x_2-\lambda_2)\langle x_3\rangle - \\
&\quad - e(x_2-\lambda_2)^{-1}(x_3-\lambda_3)\langle x_2\rangle + e(x_2-\lambda_2)^{-1}\langle x_1\rangle + \\
&\quad + e(x_2-\lambda_2)^{-2}x_1\langle x_2\rangle - e(x_2-\lambda_2)^{-2}(x_2-\lambda_2)\langle x_1\rangle \\
&\quad + e(x_3-\lambda_3)(x_2-\lambda_2)^{-1}\langle x_2\rangle = \\
&= (e(x_2-\lambda_2)^{-1} - e(x_2-\lambda_2)^{-1})\langle x_1\rangle + \\
&\quad + (-e(x_2-\lambda_2)^{-1}(x_3-\lambda_3) + e(x_2-\lambda_2)^{-2} + e(x_3-\lambda_3)(x_2-\lambda_2)^{-1})\langle x_2\rangle + e\langle x_3\rangle
\end{aligned}
$$

Pero $[x_3, x_2]^{op} = x_1$, de donde $[x_3 - \lambda_3, x_2 - \lambda_2]^{op} = x_1$, en consecuencia

$$[(x_2-\lambda_2)^{-1}, (x_3-\lambda_3)]^{op} = (x_2-\lambda_2)^{-1}x_1(x_3-\lambda_3)^{-1}$$

Como $0 = [x_1, x_2] = [x_1, x_2 - \lambda_2]$ se verifica que $0 = [x_1, (x_2-\lambda_2)^{-1}]$, entonces se obtiene $[(x_2-\lambda_2)^{-1}, x_3 - \lambda_3]^{op} = (x_2-\lambda_2)^{-2}x_1$. De aquí la ecuación anterior se reduce a $= e\langle x_3\rangle$.

$m = 2$

$$
\begin{aligned}
&d_2 S_2 e\langle x_1x_2\rangle + S_1 d_1 e\langle x_1x_2\rangle = S_1 d_1 e\langle x_1x_2\rangle = \\
&= S_1(ex_1\langle x_2\rangle - e(x_2-\lambda_2)\langle x_1\rangle) = \\
&= -e(x_2-\lambda_2)S_1\langle x_1\rangle = e(x_2-\lambda_2)(x_2-\lambda_2)^{-1}\langle x_1x_2\rangle \\
&= e\langle x_1x_2\rangle
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&d_2S_2e\langle x_2x_3\rangle + S_1d_1e\langle x_2x_3\rangle = \\
&= S_1d_1e\langle x_2x_3\rangle = S_1(e(x_2-\lambda_2)\langle x_3\rangle)- \\
&\quad - S_1(e(x_3-\lambda_3)\langle x_2\rangle + e\langle x_1\rangle) = \\
&= e(x_2-\lambda_2)(x_2-\lambda_2)^{-1}\langle x_2x_3\rangle + \\
&\quad + e(x_2-\lambda_2)(x_2-\lambda_2)^{-2}\langle x_1x_2\rangle - \\
&\quad - e(x_2-\lambda_2)^{-1}\langle x_1x_2\rangle = e\langle x_2x_2\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&d_2S_2e\langle x_1x_3\rangle + S_1d_1e\langle x_1x_3\rangle = \\
&= d_2(-e(x_2-\lambda_2)^{-1}\langle x_1x_2x_3\rangle + S_1ex_1\langle x_3\rangle - S_1e(x_3-\lambda_3)\langle x_1\rangle = \\
&= -e(x_2-\lambda_2)^{-1}x_1\langle x_2x_3\rangle + e(x_2-\lambda_2)^{-1}(x_2-\lambda_2)\langle x_1x_3\rangle - \\
&\quad - e(x_2-\lambda_2)^{-1}(x_3-\lambda_3)\langle x_1x_2\rangle + ex_1(x_2-\lambda_2)^{-1}\langle x_2x_3\rangle + \\
&\quad + ex_1(x_2-\lambda_2)^{-2}\langle x_1x_2\rangle + e(x_3-\lambda_3)(x_2-\lambda_2)^{-1}\langle x_1x_2\rangle = \\
&= [-e(x_2-\lambda_2)^{-1}(x_3-\lambda_3) + e(x_1(x_2-\lambda_2)^{-2} + \\
&\quad + e(x_3-\lambda_3)(x_2-\lambda_2)^{-1}]\langle x_1x_2\rangle + e\langle x_1x_3\rangle + \\
&\quad + [-e(x_2-\lambda_2)^{-1}x_1 + ex_1(x_2-\lambda_2)^{-1}]\langle x_2x_3\rangle
\end{aligned}$$

Como $[x_1,(x_2-\lambda_2)^{-1}]^{\mathrm{op}} = 0$, resulta

$$[(x_2-\lambda_2)^{-1}, X_3-\lambda_3] = x_1(x_2-\lambda_2)^{-2} = (x_2-\lambda_2)^{-2}x_1\ ,$$

y la ecuación se transforma en $= e\langle x_1x_3\rangle$.

$m = 3$

$$\begin{aligned}
&S_2d_2e\langle x_1x_2x_3\rangle = S_2(ex_1\langle x_2x_3\rangle) + \\
&\quad + S_2(-e(x_2-\lambda_2)\langle x_1x_3\rangle + e(x_3-\lambda_3)\langle x_2x_3\rangle) = \\
&= -e(x_2-\lambda_2)S_2\langle x_1x_3\rangle = e\langle x_1x_2x_3\rangle
\end{aligned}$$

Análogamente, si λ_3 no pertenece a $Sp\,x_3$, la función $f = \lambda_2f_2 + \lambda_3f_3$ no pertenece a

$Sp(L,E)$. Para ver esto se puede usar el operador de homotopía definido por

$$S_0 e = e(x_3 - \lambda_3)^{-1}\langle x_3\rangle$$

$$\begin{aligned} S_1\langle x_3\rangle &= 0 \\ S_1 e\langle x_1\rangle &= -e(x_3-\lambda_3)^{-1}\langle x_1 x_3\rangle \\ S_1 e\langle x_2\rangle &= -e(x_3-\lambda_3)^{-1}\langle x_2 x_3\rangle - e(x_3-\lambda_3)^{-1}\langle x_2 x_3\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 e\langle x_1 x_3\rangle &= 0 \\ S_2 e\langle x_2 x_3\rangle &= 0 \\ S_2 e\langle x_1 x_2\rangle &= -e(x_3-\lambda_3)^{-1}\langle x_1 x_2 x_3\rangle \end{aligned}$$

En consecuencia

$$Sp(E,(x_1,x_2,x_3)) \subseteq \{0\} \times Sp(x_2) \times Sp(x_3)$$

Tomemos como ejemplo $E = \mathbf{C}^3$ y el álgebra generada por los operadores, cuyas matrices en la base canónica son las siguientes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La relación $[x_3, x_2]^{\mathrm{op}} = x_1$ es equivalente a $[x_2, x_3] = x_1$.

Un simple cálculo muestra que se verifican las ecuaciones de estructura. Dado que los operadores son nilpotentes, su espectro es $\{0\}$.

Por lo visto se tiene que $Sp(L,E) \subseteq \{0\}$, luego

$$Sp(L,E) = \phi\,, \quad \text{o} \quad Sp(L,E) = \{0\}\,,$$

Más adelante veremos que el espectro es siempre no vacío, entonces $Sp(L,E) = \{0\}$.

Estos dos ejemplos permiten ver varias de las propiedades que posee el espectro, no vacuidad, compacidad y la propiedad fundamental de no poseer órbitas no singulares. Todo esto último será probado en el capítulo siguiente.

CAPITULO III

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DEL ESPECTRO

Aquí veremos varias de las propiedades básicas del espectro, entre ellas, la no vacuidad, su compacidad y la fórmula de la proyección.

Sea L un álgebra de Lie resoluble, sea $S = (L_i)_{0\leq i\leq n}$ una sucesión de Jordan Hölder de L y (E, φ) una representación continua a derecha de L.

Proposición 43. En las condiciones anteriores, $\Pi_{L_1 L_{n-1}}(S_P(L, E, SING))$ está contenido en $S_P(L_{n-1}, E, SING)$, donde L_{n-1} designa al ideal $(n-1)$-ésimo de S y $\Pi_{L_1 L_{n-1}}$ es la restricción de L^*_{n-1} de los elementos de L^*.

Demostración: Ante todo, notemos que por ser L_{n-1} un ideal, la representación φ de L restringida a L_{n-1} nos brinda una representación continua a derecha de L_{n-1} en E, más aún, si f es una órbita singular por la representación coadjunta de $G(L)$ entonces $f(L^2) = 0$, en consecuencia, $f|_{L_{n-1}}(L^2_{n-1}) = 0$, de aquí se deduce que $f|_{L_{n-1}}$ es una órbita singular para la representación coadjunta de $G(L_{n-1})$ (el subgrupo analítico de $G(L)$, tal que $\mathcal{G}(G(L_{n-1})) = L_{n-1}$ (Teorema 10, I.E), con lo cual la fórmula de la proposición tiene sentido.

Sea $\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$ una base de L, de tal forma que $\{X_j\}_{1\leq j\leq i}$ sea una base de L_i, en particular $L_{n-1} = \langle x_j\rangle_{1\leq j\leq n-1}$ y existe X_n en L tal que $L_{n-1}\oplus\langle x_n\rangle = L$.

Consideremos los siguientes complejos de $U(L)$ módulos:

$$A = (E\otimes\wedge^i L, d_{i-1}), \quad B = (E\otimes\wedge^i L_{n-1}, d_{i-1}|L_{n-1})$$

donde d_{p-1} es el operador definido por $d_{p-1} : E\otimes\wedge^P L \longrightarrow E\otimes\wedge^{P-1} L$

$$\begin{aligned} d_{P-1}e\langle x_{i_1}\dots x_{i_p}\rangle &= \sum_{j=1}^{P}(-1)^{j+1}e(x_{i_j} - f(x_{i_j}))\langle x_{i_1}\widehat{x}_{i_j}x_{i_p}\rangle \\ &+ \sum_{1\leq k<\ell\leq n}(-1)^{k+\ell}e\langle [x_{i_k}, x_{i_\ell}]x_{i_1}\widehat{x}_{i_k}\widehat{x}_{i_\ell}x_{i_p}\rangle \end{aligned}$$

El complejo A es la resolución proyectiva del $U(L)$ módulo a izquierda $C(f)$ (Teorema 30), tensorizado por E. Su homología consiste en los espacios $Tor^{U(L)}(E, \mathbf{C}(f)) = H(E \otimes \wedge^i L, d_{i-1})$.

Con respecto al complejo B, como L_{n-1} es un ideal de L, d_{p-1} deja estable a $E \otimes \wedge^P L_{n-1}$, es decir

$$d_{P-1}(E \otimes \wedge^P L_{n-1}) \subseteq E \otimes \wedge^{P-1} L_{n-1}$$

de aquí B se convierte en un subcomplejo de A.

Pero al complejo B, se lo puede mirar como un complejo de $U(L_{n-1})$ módulos: visto que $f|_{L_{n-1}}(L_{n-1}^2) = 0$, el complejo B consiste en la resolución libre a izquierda del $U(L_{n-1})$ módulo $\mathbf{C}(f|L_{n-1})$ tensorizada por E, en consecuencia, su homología como $U(L_{n-1})$ módulo nos brinda los espacios $Tor^{U(L_{n-1})}(E, \mathbf{C}(f|\,L_{n-1}))$.

Se construirá una sucesión exacta de complejos de $U(L)$ módulos

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\ i\ } A \xrightarrow{\ P\ } B \longrightarrow 0\,,$$

donde i consiste en la inclusión y P es un morfismo que baja el grado en 1, definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&P : (E \otimes \wedge^i L, d_{i-1}) \longrightarrow (E \otimes \wedge^{i-1} L_{n-1}, d_{i-1}|L_{n-1}) \\
&P(e\langle x_{i_1 \ldots x_{i_P}}\rangle) = 0 \qquad i_P \leq n-1 \\
&Pe\langle x_{i_1} \ldots x_{i_{P-1}} x_n\rangle = (-1)^{P-1} e\langle x_{i_1} \ldots x_{i_{P-1}}\rangle
\end{aligned}$$

donde los elementos X_{ij} se toman de la base elegida anteriormente. La aplicación así definida se extiende a un morfismo de $U(L)$ módulos, suryectivo, entre los complejos A y B. Más aún, por construcción Im $i = \ker P$. En consecuencia, para que tengamos una sucesión exacta de complejos, falta ver que los morfismos P e i conmutan con los operadores de borde.

Como i es la inclusión, no hay nada que probar. Para P se debe verificar la fórmula

$$d_{P-2}|L_{n-1} P = P\, d_{P-1}$$

Sea X_{ij} $1 \leq j \leq P$, elementos de la base anterior, entonces existen dos posibilidades

a) $X_n \neq X_{ij}$ $1 \leq j \leq P$, luego $P\,e\langle x_{i_1} \ldots x_{i_p}\rangle = 0$ pero $e\langle x_{i_1 \ldots x_{i_p}}\rangle \in E \otimes \wedge^P L_{n-1}$, en consecuencia $d_{P-1}(e\langle x_{i_1} \ldots x_{i_p}\rangle) \subseteq E \otimes \wedge^{P-1} L_{n-1}$ y entonces

$$0 = P\,d_{P-1}(e\langle x_{i_1} \ldots x_{i_p}\rangle) = P\,d_{P-1}|L_{n-1}\langle x_{i_1} \ldots x_{i_P}\rangle$$

b) $X_n = X_{iP}$, luego

$$d_{P-2}|L_{n-1}P e\langle x_{i_1} \ldots x_{i_{P-1}} x_n\rangle = d_{P-2}|L_{n-1}(-1)^{P-1} e\langle x_{i_1} \ldots x_{i_{p-1}}\rangle$$
$$= (-1)^{P-1}\left[\sum_{j=1}^{P-1}(-1)^{j+1} e(x_{i_j} - f|L_{n-1}(x_{ij}))\langle x_{i_1}\widehat{x}_{i_j}\widehat{x}_{i_{p-1}}\rangle\right]$$
$$+ (-1)^{P-1}\left[\sum_{1\leq k<\ell\leq p-1}(-1)^{k+\ell} e\langle [x_{i_k}, x_{i_\ell}] x_{i_1}\widehat{x}_{i_k}\widehat{x}_{i_\ell} x_{i_P}\rangle\right]$$

Por otra parte

$$d_{P-1} e\langle x_{i_1} \ldots x_{i_{p-1}} x_n\rangle = \sum_{j=1}^{P-1}(-1)^{j+1} e(x_{i_j} - f(x_{i_j}))\langle x_{i_1}\widehat{x}_{i_j}\widehat{x}_{i_{P-1}} x_n\rangle$$
$$+ (-1)^{P+1} e(x_n - f(x_n))\langle x_{i_1} \ldots x_{i_{P-1}}\rangle$$
$$+ \sum_{1\leq k<\ell\leq P-1}(-1)^{k+\ell} e\langle [x_{i_k}, x_{i_\ell}] x_{i_1}\widehat{x}_{i_k}\widehat{x}_{i_\ell} x_{i_{P-1}} x_n\rangle +$$
$$+ \sum_{1\leq m\leq P-1}(-1)^{P+m} e\langle [x_{i_m} x_n] x_{i_1}\widehat{x}_{i_m} x_{i_{P-1}}\rangle$$

Luego

$$P\,d_{P-1} e\langle x_{i_1} \ldots x_{i_{p-1}} x_n\rangle =$$
$$= (-1)^{P-1}\left(\sum_{j=1}^{P-1}(-1)^{j+1} e(x_{i_j} - f(x_{i_j}))\langle x_{i_1}\widehat{x}_{i_j} x_{i_{P-1}}\rangle\right)$$
$$+ (-1)^{P-1}\left(\sum_{1\leq k<\ell\leq P-1}(-1)^{k+\ell} e\langle [x_{i_k}, x_{i_\ell}] x_{i_1}\widehat{x}_{i_k}\widehat{x}_{i_\ell} x_{i_{P-1}}\rangle\right)$$

Como L_{n-1} es un ideal, los elementos de la forma $[x_m, x_n]$ pertenecen a L_{n-1}, de allí que desaparezca la última suma al aplicar P.

De a) y b) se ha probado

$$d_{P-2}|L_{n-1}P = P\,d_{P-1}$$

Ahora, como tenemos una sucesión de complejos de cadenas de $U(L)$ módulos, podemos considerar la sucesión exacta larga de homología ([6], II,4)

$$\longrightarrow H_P(E\otimes\wedge^i L_{n-1},d_{i-1}|L_{n-1}) \xrightarrow{i^*} H_P(E\otimes\wedge^i L,d_{i-1}) \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{p^*} H_{P-1}(E\otimes\wedge^i L_{n-1},d_{i-1}|L_{n-1}) \xrightarrow{\partial^*} H_{P-1}(E\otimes\wedge^i L_{n-1},d_{i-1}|L_{n-1})$$

Si f es tal que $f(L^2)=0$ y $f|L_{n-1}$ no pertenece a $S_P(L_{n-1},E,SING)$, se tiene que $Tor^{U(L_{n-1})}(E,(\mathrm{C},f|L_{n-1}))\equiv 0$ con $U(L_{n-1})$ módulos.

Pero el $U(L)$ módulo $H_P(E\otimes\wedge^i L_{n-1},d|L_{n-1})$ considerado como $U(L_{n-1})$ módulo es exactamente $Tor_P^{U(L_{n-1})}(E,\mathrm{C}(f|L_{n-1}))$ como estos $U(L_{n-1})$ módulos son nulos, y $U(L_{n-1})$ es un subanillo con unidad de $U(L)$ resulta que $H_P(E\otimes\wedge^i L_{n-1},d_{i-1}|L_{n-1})=0$ como $U(L)$ módulo. De la sucesión anterior obtenemos que

$$0=H_P(E\otimes\wedge^i L_{n-1},d_{i-1}|L_{n-1})=Tor^{U(L)}(E,\mathrm{C}(f))$$

, entonces f no pertenece a $S_P(L,E,SING)$ y hemos probado la proposición.

Teorema 44. Sea L un álgebra de Lie resoluble y $S=(L_i)_{0\le i\le n}$ una sucesión de Jordan Hölder de L. Si (E,φ) es una representación continua a derecha de L en E, entonces

$$S_P(L_{n-1},E,SING)=\Pi_{L,L_{n-1}}[S_P(L,E,SING)\cup$$
$$\cup\{f\in L^*/PV(f,S)=L_{n-1},\ \text{y } G(L)f\in S_P(L,E,S)\}]$$

donde L_{n-1} designa el elemento $(n-1)$-ésimo de S y $G(L).f$ la órbita de f por la representación coadjunta de $G(L)$ en L^*.

Demostración: Por la proposición 43 se sabe que $\Pi_{L,L_{n-1}}(S_P(L,E,SING))\subseteq S_P(L_{n-1},E,SING)$.

Sea f en L^* tal que $PV(f,S)=L_{n-1}$ y $\alpha=G(L).f$ pertenezca a $S_P(L,E,S)$ entonces $f|L_{n-1}(L_{n-1}^2)=0$ y en consecuencia $f|L_{n-1}$ define una órbita singular de L_{n-1}^*, además como

$$PV(f,S)=L_{n-1}:Tor^{U(L_{n-1})}(E,\mathrm{C}(f|L_{n-1}))\cong$$
$$Tor^{U(L)}(E,\widetilde{\mathrm{ind}}(f|PV(f,S),L)),$$

por la proposición 31. Como $\alpha = G(L).f$ pertenece a $S_P(L,E,S)$, los espacios anteriores no son nulos, y en consecuencia $f|L_{n-1}$ se encuentra en $S_P(L_{n-1},E,SING)$, de aquí

$$\Pi_{L,L_{n-1}}[S_P(L,E,SING) \cup \{f \in L^*|PV(f,S) = L_{n-1},\ G(L).f \in S_P(L,E,S)\}] \subseteq S_P(L_{n-1},E,SING)$$

Veamos la otra contención. En primer término observemos lo siguiente:

Sea f un elemento de L^*_{n-1} y $\overline{f}$ en L^* tal que $\overline{f}|L_{n-1} = f$.

Se considera $PV(\overline{f},S)$, entonces por el teorema 6, parte 3 de I.C: $PV(\overline{f},S) \cap L_{n-1} = PV(\overline{f}|L_{n-1},S_{n-1}) = L_{n-1}$ donde S_{n-1} designa la sucesión de Jordan Hölder de L_{n-1} formada por S_i $0 \leq i \leq n-1$, de aquí resulta que $PV(\overline{f},S)$ puede ser solamente L_{n-1}, o L. Más aún, si $\overline{f}'$ es otro elemento de L^*, que extiende a f, sea $g = \overline{f}' - \overline{f}$, entonces $0 = g(L_{n-1}) = g(PV(\overline{f},S)$, por el teorema 6, parte 5 de I.C, se tiene que $PV(\overline{f}+g,S) = PV(\overline{f},S)$.

Es decir $PV(\overline{f}',S) = PV(\overline{f},S)$. En consecuencia, las polarizaciones de una extensión de f son independientes de la extensión.

Lo que falta probar se dividirá en dos partes:

Primero supongamos que existe $\overline{f}$, extensión de f tal que $PV(\overline{f},S) = L_{n-1}$, por la proposición 31 $Tor^{U(L_{n-1})}(E,\mathbf{C}(f)) \cong Tor^{U(L)}(E,\widetilde{\mathrm{ind}}(\overline{f}|L_{n-1},L))$. Como f pertenece a $S_P(L_{n-1},E,SING)$ resulta que la órbita de $\overline{f}$ pertenece a $S_P(L,E,S)$, en consecuencia

$$f = \Pi_{L,L_{n-1}}\overline{f} \qquad \text{y}$$
$$\overline{f} \in \{g \in L^*|PV(g,S) = L_{n-1}\ G(l)g \in S_P(L,E,S)\}$$

Supongamos que existe una extensión $\overline{f}$ de f tal que $PV(\overline{f},S) = L$ en tal caso, por la observación anterior, para toda otra extensión $\overline{f}'$ de f se verifica $PV(\overline{f}',S) = L$.

Consideremos la sucesión exacta larga de homología definida en la proposición 43, asociada a $\overline{f}$ y f.

Calculemos el operador de borde

$$\delta^* H_{P-1}(E \otimes \wedge^i L_{n-1}, d_{i-1}|L_{n-1}) \longrightarrow H_{P-1}(E \otimes \wedge^i L_{n-1}, d_{i-1}|L_{n-1})$$

por construcción, el operador δ^* satisface la siguiente relación ([6],II,4):

Sea k en $E \otimes \wedge^{P-1} L_{n-1}$ tal que $d_{P-2}|L_{n-1}(k) = 0$, y sea m en $E \otimes \wedge^P L$ tal que $P_m = k$ (P es suryectiva), entonces si $\ell = d_{P-1} m$ $\delta^*[k] = [\ell]$, además la clase de $[\ell]$ es independiente de m.

Sea k tal que $d_{P-2}|L_{n-1}(k) = 0$, usando la base de la proposición 43, k puede escribirse

$$k = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_{p-1} \le n-1} e \langle x_{j_1} \ldots x_{j_{P-1}} \rangle \quad \text{en} \quad L_{n-1}$$

Tomemos como m:

$$m = \sum (-1)^{P-1} e_{j_1 j_{P-1}} \langle x_{j_1} \ldots x_{j_{P-1}} x_n \rangle \ ,$$

claramente $P_m = k$ y

$$\begin{aligned}
& d_{P-1} m = (-1)^{P-1} \sum e_{j_1 \ldots j_{P-1}} d_{P-1} \langle x_{j_1} x_{j_{P-1}} x_n \rangle \\
& = (-1)^{P-1} (\sum e_{j_1 \ldots j_P} (-1)^{P+1} (x_n - \overline{f}(x_n)) \langle x_{j_1} \ldots x_{j_P} \rangle) + \\
& \quad + (-1)^{P-1} (\sum e_{j_1 \ldots j_{P-1}} \sum_{1 \le i \le P-1} (-1)^{i+1} (x_{j_i} - f(x_{j_i})) \langle x_{j_1} \widehat{x}_{j_i} x_{j_{P-1}} x_n \rangle + \\
& \quad + (-1)^{P-1} (\sum e_{j_1 \ldots j_{P-1}} (\sum_{1 \le k < \ell \le P-1} (-1)^{k+\ell} \langle [x_{j_k} x_{j_\ell}] x_{j_1} \widehat{x}_{j_k} \widehat{x}_{j_\ell} x_{j_{P-1}} x_n \rangle) \\
& \quad + (-1)^{P-1} (\sum e_{j_1 j_{P-1}} (\sum_{1 \le k \le P-1} (-1)^{k+P} \langle [x_{j_k} x_n] x_{j_1} \widehat{x}_{j_k} x_{j_{P-1}} \rangle) \\
& = k . (x_n - \overline{f}(x_n)) + (-1)^{P-1} (d_{P-2}|L_{n-1}(k) \wedge x_n \\
& \quad + (-1)^{P-1} (\sum e_{j_1 j_{P-1}} (\sum_{1 \le k \le P-1} (-1)^{k+\ell} \langle [x_{j_n}, x_n] x_{j_1} \widehat{x}_{j_k} x_{j_{P-1}} \rangle) = \\
& = k(x_n - \overline{f}(x_n)) + A(k) \ ,
\end{aligned}$$

donde $A(k)$ designa el elemento definido por la suma anterior. Notar que por ser L_{n-1} un ideal, $A(k)$ pertenece a $E \otimes \wedge^{P-1} L_{n-1}$, y además es independiente de la extensión $\overline{f}$ de f y del m que surge en la definición de $\delta^*([k])$, más aún, como

$$\begin{aligned}
0 = d_{P-2}|L_{n-1} d_{P-1} m = d_{P-2}|L_{n-1} k(x_n - \overline{f}(x_n)) \\
+ d_{P-2}|L_{n-1}(Ak) = (d_{P-2} k)(x_n - \overline{f}(x_n) + \\
+ d_{P-2}|L_{n-1}(A(k)) = d_{P-2}|L_{n-1}(A(k))
\end{aligned}$$

se tiene que

$$\delta^*[k] = [d_{P-1}m] = [k].(x_n - \bar{f}(x_n)) + [A(k)]$$

Escribamos a las extensiones de f en la base dual de $\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$, $\bar{f} = (z_1 z_{n-1}, \xi)$ con $f(x_i) = z_i$ $1 \leq i \leq n-1$ y $\bar{f}(x_n) = \xi_n$.

Hecho esto, consideremos los complejos de espacios de Banach

$$(E \otimes \wedge^i L, d_{i-1}(z, z_{n-1}, \xi) \qquad xi \in \mathbf{C}\,,$$

donde $d_{i-1}(z, z_{n-1}, \xi)$ designa al operador de borde asociado a $\bar{f}$, extensión de f que satisface $\bar{f}(x_i) = z_i$ $1 \leq i \leq n-1$, $\bar{f}(x_n) = \xi$, o equivalentemente $f|L_{n-1} = \bar{f}$ $(x_n) = \xi$.

Sabemos que toda extensión de f a L es una órbita singular, en consecuencia, la homología del complejo anterior brinda los espacios $Tor^{U(L)}(E, \mathbf{C}(\bar{f}))$. Más aún, esta familia define un complejo analítico de espacios de Banach, parametrizado desde $\mathbf{C}$, en el sentido de la definición de [9] el cual es exacto en el "infinito".

Para ver esto último, debemos probar que $(E \otimes \wedge^P L,\ \omega d_{P-1}(z_i, z_{n-1}, 1/\omega))$ tiene una extension continua en $\omega = 0$, la cual es exacta para $\omega = 0$ [9].

El operador asociado al complejo anterior es el siguiente:

Si X_n no pertenece a $\{x_{i_1} \ldots x_{i_p}\}$

$$\begin{aligned}\omega\, d_{P-1}(z_1 z_{n-1}, 1/\omega) &= \omega \sum_{j=1}^{P} (-1)^{j+1} e(x_{i_j} - z_{i_j})\langle x_i \widehat{x}_{i_j} x_{i_P}\rangle \\ &+ \omega \sum_{1\leq k<\ell\leq P} (-1)^{k+\ell} e(\langle [x_{i_k}, x_{i_\ell}] x_{i_1} \widehat{x}_{i_k} \widehat{x}_{i_\ell} x_{i_P}\rangle)\end{aligned}$$

Cuando ω tiende a "0", $\omega\, d_{P-1}(z_1 z_{n-1}, 1/\omega)$ tiende uniformemente a "0".

Si $X_{i_P} = x_n$, se tiene

$$\begin{aligned}&\omega\, d_{P-1}(z_1 z_{n-1}, 1/\omega) e\langle x_{i_1} \ldots x_{i_{P-1}} x_n\rangle = \\ &= \omega\Big(\sum_{j=1}^{P-1} (-1)^{j+1} e(x_{i_j} - z_{i_j})\langle x_{i_1} \widehat{x}_{i_j} x_{i_{P-1}} x_n\rangle\Big) \\ &\quad + \omega\,(-1)^{P+1} e(x_n - 1/\omega)\langle x_{i_1} \ldots x_{i_{P-1}}\rangle \\ &\quad + \omega \sum_{1\leq k<\ell\leq P} (-1)^{k+\ell} e\langle [x_{i_k} x_{i_\ell}] x_{i_1} \widehat{x}_{i_k} \widehat{x}_{i_\ell} x_{i_P}\rangle\end{aligned}$$

Cuando ω tiende a "0" $\omega\, d_{P-1}(z_1 z_{n-1}, 1/\omega)$ tiende uniformemente a

$$\beta_{P-1} e\langle x_{i_1} \dots x_{i_{P-1}} x_n\rangle = (-1)^P e\langle x_{i_1} \dots x_{i_{P-1}}\rangle$$

Entonces cuando ω tiende a "0", el complejo $(E \otimes \wedge^P L, \omega\, d_{P-1}(z_1 z_{n-1}, 1/\omega))$ se extiende con continuidad al complejo $(E \otimes \wedge^P L, \beta_{P-1})$ con

$$\begin{aligned}
&\beta_{P-1} : E \otimes \wedge^P L \longrightarrow E \otimes \wedge^{P-1} L \\
&\beta_{P-1} e\langle x_{i_1} x_{i_P}\rangle = 0 \qquad i_P \leq n-1 \\
&\beta_{P-1} e\langle x_{i_1} \dots x_{i_{P-1}} x_n\rangle = (-1)^P e\langle x_{i_1} \dots x_{i_{P-1}}\rangle
\end{aligned}$$

Notar que si tomamos el álgebra definida por la n-upla de operadores $(0, \dots, 0, I)$ en E, entonces el complejo de Koszul de esta n-upla asociado a la n-upla de números complejos $(0, \dots, 0)$ es exactamente isomorfo a $(E \otimes \wedge^P L, -\beta_{P-1})$.

Como $S_P((0,0,I),E) = \{(0, \dots, 0, 1)\}$ se sigue que el complejo anterior es exacto en 0. De aquí se obtiene que los complejos analíticos de espacios de Banach parametrizados desde $\mathbf{C}$ definidos por $(E \otimes \wedge^P L, d_{P-1}(z_1, z_{n-1}, \xi))$ son exactos en el infinito.

Visto esto, se finalizará la prueba de la siguiente forma:

Tomemos la sucesión exacta definida en la proposición 43, si para toda extensión $\overline{f}$ de $f\, Tor^{U(L)}(E, \mathbf{C}(\overline{f})) = 0$ (equivalentemente $\overline{f}$ no pertenece $S_P(L, E, SING)$).

Consideremos el operador $\delta^*(\overline{f})$, el cual es biyectivo, pues para toda extensión $\overline{f}$ de f se verifica

$$\begin{aligned}
&Tor^{U(L)}(E, \mathbf{C}(\overline{f})) = 0 \\
&\longrightarrow H_P(E \otimes \wedge^i L, d_{i-1}(\overline{f}) \xrightarrow{P^*} H_{P-1}(E \otimes \wedge^P L_{n-1}, d_{i-1}(\overline{f})) \\
&\xrightarrow{\delta^*(\overline{f})} H_{P-1}(E \otimes \wedge^P L_{n-1}, d_{i-1}(\overline{f}) | L_{n-1}) \longrightarrow \\
&\longrightarrow H_{P-1}(E \otimes \wedge^i L, d_{i-1}(\overline{f})) \\
&Tor^{U(L)}(E, \mathbf{C}(\overline{f})) = 0
\end{aligned}$$

Notemos con $\delta^*(\xi)$ al operador de borde asociado con la extensión $\overline{f}$ que verifica $\overline{f}|L_{n-1} = f\ \overline{f}(x_n) = \xi$. Análogamente con $d_{P-1}(\xi)$, en vez de $d_{P-1}(\overline{f})$. Notar que $d_{P-1}(\xi)|E \otimes \wedge^P L_{n-1}$ es independiente de ξ.

Sea e en $E \otimes \wedge^P L_{n-1}$ tal que $d_{P-1}(\xi)|_{E\otimes\wedge^{P-1}L_{n-1}}(e) = 0$ entonces $d_{P-1}(\xi)e =$ $= d_{P-1}(\xi)|(e)E \otimes \wedge^{P-1} L_{n-1}$, entonces existe m en $E \otimes \wedge^P L$ tal que $d_P(\xi)m = e$, para todo ξ en $\mathbf{C}$, y m es independiente de ξ ([9],2.4).

Sea $k = P(m)$, entonces

$$d_{P-1}(\xi)|_{E\otimes\wedge^P L_{n-1}}(k) = d_{P-1}(\xi)|_{E\otimes\wedge^P L_{n-1}} P(m) = \\ = P\, d_P(\xi)m = P\, e = 0\,,$$

pues e pertenece a $E \otimes \wedge^{P-1} L_{n-1}$. Entonces, por construcción de $\delta^*(\xi)$ tenemos que $\delta^*(\xi)[k] = [e]$, en consecuencia, para toda ξ en $\mathbf{C}$, se verifica la ecuación

$$[k](x_n - \xi_n) = [e] - [Ak]\,,$$

para toda ξ en $\mathbf{C}$, de donde $[k] = [e] = 0$.

De aquí se deduce que el $U(L)$ módulo $H_P(E \otimes \wedge^P L_{n-1}, d_{i-1}(\xi)|_{E\otimes\wedge^P L_{n-1}} = 0\ \forall P$, pues $\delta^*(\xi)$ es un isomorfismo. Pero, mirado como módulo sobre $U(L_{n-1})$, estos espacios son $Tor_P^{U(L_{n-1})}(E, \mathbf{C}(f))$, luego f no pertenece a $S_P(E, L_{n-1}, SING)$, absurdo. Entonces debe existir un ξ tal que la extensión de f asociada a él pertenezca a $S_P(E, L, SING)$. Con esto se termina la prueba.

Proposición 45. Sea L un álgebra de Lie resoluble y (E, φ) una representación continua a derecha de L, entonces $S_P(L, E, SING)$ es cerrado en L^*.

Demostración: Sea $\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$ una base de L, y consideremos la siguiente familia de complejos de espacios de Banach

$$(E \otimes \wedge^i L, d_{i-1}(f)) \qquad \text{con} \quad f(L^2) = 0$$

Si consideramos a f escrita en la base dual de $\{X_i\}$, y parametrizamos la familia anterior desde $L^{2^\perp} = \{f \in L^*/f(L^2) = 0\}$, obtenemos un complejo parametrizado de espacios de Banach desde un subespacio de L^*, de longitud finita, entonces por [4,2.1]

$$\{f \in L^{2^\perp}/(E \otimes \wedge^i L, d_{i-1}(f)) \quad \text{es exacto}\}$$

es abierto, pero el conjunto anterior es igual a

$$\{f \in L^{2^\perp} / Tor^{U(L)}(E, C(f)) = 0\} = S_P(L, E, SING)\,.$$

Luego $S_P(L, E, SING)$ es un cerrado en $L^{2^\perp}$ y en consecuencia en L^*.

Proposición 46. Sea L un álgebra de Lie resoluble y (E, φ) una representación continua a derecha de L, si $\dim L^2 = \dim L - 1$, entonces $S_P(L, E, SING)$ es un compacto de $\mathbf{C}$.

<u>Demostración</u>: Basta ver que es acotado, pues ya se vio que es cerrado. Supongamos $\dim L = n$, $\dim L^2 = n-1$. Consideremos una base de $L\{X_i\}_{1 \le i \le n}$ de tal forma que $\{X_i\}_{1 \le i \le n-1}$ sea base de L^2. Considerando la base dual $\{f_i\}_{1 \le i \le n}$, un elemento de L^* satisface $f(L^2) = 0$ si y sólo si $f = \xi_n f_n$.

Sea el complejo $(E \otimes \wedge^i L, d_{i-1}(f))$, f tal que $f(L^2) = 0$. Se descompondrá dicho complejo con el fin de construir un operador de homotopía en una región apropiada

$$E \otimes \wedge^P L = (E \otimes \wedge^P L^2) \oplus (E \otimes \wedge^{P-1} L^2) \wedge x_n)$$

Como L^2 es un ideal de L

$$d_{P-1}(E \otimes \wedge^P L^2) \subseteq E \otimes \wedge^{P-1} L^2\,,$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
d_{P-1} e\langle x_{i_1} x_{i_{P-1}} x_n\rangle &= \sum_{j=1}^{P-1} (-1)^{j+1} e x_j \langle x_{i_1} \widehat{x}_{i_j} x_{i_{P-1}} x_n\rangle \\
&+ (-1)^{P+1} e(x_n - \xi_n)\langle x_{i_1} \dots x_{i_{P-1}}\rangle \\
&+ \sum_{1 \le k < \ell \le P-1} (-1)^{k+\ell} e\langle [x_{i_k} x_{i_\ell}] x_{i_1} \widehat{x}_{i_k} \widehat{x}_{i_\ell} x_{i_{P-1}} x_n\rangle \\
&+ \sum_{1 \le k < P-1} (-1)^{k+\ell} e\langle [x_{i_k} x_{i_\ell}] x_{i_1} \widehat{x}_{i_k} \dots x_{i_{P-1}}\rangle = \\
&= d_{P-2} e\langle x_{i_1} \dots x_{i_{P-1}}\rangle \wedge x_n + (-1)^{P+1} e(x_n - \xi_n)\langle x_{i_1} \dots x_{i_{P-1}}\rangle + \\
&+ (-1)^{P+1} \sum_{1 \le k \le P-1} (-1)^{k+1} e\langle [x_{i_k} x_n] x_{i_1} \widehat{x}_{i_k} x_{i_P}\rangle
\end{aligned}$$

Sea H_P la transformación lineal definida por

$$H_P : \wedge^P L^2 \to \wedge^P L^2$$
$$H\langle x_{i_1} \dots x_{i_P}\rangle = \sum_{1 \leq k \leq P} (-1)^{k+1} \langle [x_{i_k}, x_n] x_{i_1} \widehat{x}_{i_k} x_{i_P}\rangle$$

H está bien definida pues al ser L^2 un ideal de $L[x_{i_k}, x_n]$ pertenece a L^2.

Como los complejos son algebraicamente cerrados, la aplicación H es triangulable, es decir, existe una base $(V_i)_{1 \leq i \leq \dim \wedge^P L^2}$ tal que $H(V_j) = \sum_{i=1}^{j} \alpha_{ij} V_i$, llamemos $r = \dim \wedge^P L^2$.

Sean T y L'_P los operadores definidos en $E \otimes \wedge^{P-1} L^2$

$$T : E \otimes \wedge^P L^2 \longrightarrow E \otimes \wedge^P L^2$$
$$T = 1_E \otimes H \quad \text{y} \quad L'_P = (x_n - \xi_n) + T$$

T y L'_P son operadores acotados en $E \otimes \wedge^P L^2$, y la ecuación anterior se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} d_{P-1} e\langle x_{i_1} \dots x_{i_{P-1}} x_n\rangle = d_{P-2} e\langle x_{i_1} \dots x_{i_{P-2}}\rangle \wedge x_n \\ + (-1)^{P+1} L'_P e\langle x_{i_1} \dots x_{i_{P-1}}\rangle \end{aligned}$$

Más aún, si se descompone $E \otimes \wedge^P L^2$ como suma de espacios de Banach, cada uno isomorfo a E, $E \otimes \wedge^P L^2 = \oplus E\langle V_i\rangle$, al operador L'_P se lo puede pensar como una matriz de operadores acotados en E

$$L'_P = (L'_P)_{ij}, \ (L'_P)_{ij} = P_i((L'_P)_j) \ ,$$

donde $(L'_P)_j$ designa al operador L'_P restringido a $E\langle V_j\rangle$, $(L'_P e)_j = L'_P e\langle V_j\rangle$ y P_i es la proyección de E sobre $E\langle V_i\rangle$

$$\begin{aligned} L'_{P_j} e = L'_P e\langle V_j\rangle &= e(x_n - \xi_n)\langle V_j\rangle + T(e\langle V_j\rangle) \\ &= e(x_n - \xi_n)\langle V_j\rangle + eHV_j = e(x_n - \xi_n) + e\sum_{i=1}^{j} \alpha_{ij}\langle V_i\rangle \\ &= e(x_n - \xi_n + \alpha_{jj})\langle V_j\rangle + \sum_{i=1}^{j-1} e\alpha_{ij}\langle V_i\rangle \end{aligned}$$

Luego

$$L'_{P_{ij}}e = \begin{cases} e\,\alpha_{ij} & i<j \\ e(x_n - \xi_n + \alpha_{jj}) & i=j \\ 0 & i>j \end{cases}$$

Esta descomposición permite mostrar que fuera de un compacto el operador L'_P es inversible.

Sea k tal que $\bigcup_{1\leq j\leq r} S_P(x_n+\alpha_{jj})$ está contenido en $B[0,k]$ en $\mathbf{C}$. Entonces para ξ fuera de $B[0,k]$, $x_n+\alpha_{jj}-\xi$ es inversible para todo j, $1\leq j\leq r$. De esto deduciremos que L'_P es inversible fuera de $B[0,k]$. Sea $k=\sum e_i\langle V_i\rangle$ tal que $L'_P\,k=0$, en particular $(L'_Pk)_i=0$, entonces $(L'_Pk)_r=0$, pero

$$(L'_Pk)_r = \sum_{1\leq i\leq r}(L'_PeV_i)_r = (L'_Pe_rV_r)_r = e_r(x_n-\xi_n+\alpha_{rr}) = 0\ ,$$

luego $e_r=0$. Supuesto que $e_s=0$, para $t\leq s\leq r$, se probará que $e_{t-1}=0$.

Sabemos que $(L'_Pk)_{t-1}=0$, pero

$$\begin{aligned}(L'_Pk)_{t-1} &= \left(\sum_{1\leq i\leq r} L'_Pe_iV_i\right)_{t-1} = \sum_{1\leq i\leq t-1}(L'_Pe_iV_i)_{t-1} \\ &= (L'_{P_{t-1}}eV_{t-1})_{t-1} = e_{t-1}(x_n-\xi_n+\alpha_{t-1,t-1}) = 0\ ,\end{aligned}$$

luego $e_{t-1}=0$, de donde se concluye que L_P es inyectiva.

Para ver la suryectividad se procede análogamente.

Sea $k=\sum e_iV_i$, se definirá explícitamente un elemento k' de $E\otimes\wedge^{P-1}L^2$ tal que $L'_Pk'=k$.

La ecuación $L'_Pk'=k$ es equivalente a $(L'_Pk')_j=e_j$ $1\leq j\leq r$, en particular $(L'_Pk')_r=e_r$, pero $(L'_Pk')_r=k'_r(x_n-\xi_n+\alpha_{rr})$.

Se define $k'_r=(x_n-\xi_n+\alpha_{rr})^{-1}e_r$.

Notar que por la estructura triangular de L'_P, dado $e=\sum e_iV_i$ un elemento de E,

$(L'_P e)_j$ depende de las coordenadas $e_k (j \leq k \leq r)$.

$$(L'_P e)_j = \sum_{1 \leq i \leq r} L'_P e \langle V_i \rangle_j = \sum_{1 \leq i \leq r} P_j L'_{P_i} e =$$
$$= \sum_{j \leq i \leq r} P_j L'_{P_i} e \qquad \text{pues} \quad L'_{P_{ji}} = 0 \quad \text{para} \quad j > i$$
$$= \sum_{j \leq i \leq r} P_j L'_P e \langle V_i \rangle = \sum_{j \leq i \leq r} L'_P e \langle V_i \rangle_j$$

Entonces procederemos a despejar la ecuación $L_P k' = k$ por inducción. Para el caso r ya se ha hecho.

Supongamos que para todo s, $t \leq s \leq r$ se ha definido k'_s tal que

$$e_s = L'_P (0\ 0_{t-1}\ k'_t\ k'_s\ k_r) \qquad t \leq s \leq r$$

se busca k'_{t-1} tal que

$$e_s = L'_{P_s} (0\ 0_{t-2}\ k'_{t-1}\ k'_t\ k'_s\ k_r) \qquad t - 1 \leq s \leq r$$

Nuevamente, como $L_{P_s}(0\ 0_{t-2}\ k'_{t-1}\ k'_t\ k'_s\ k_r)$ depende solamente de k'_e $s \leq e \leq r$, por hipótesis inductiva tenemos que

$$e_s = L'_P (0\ 0_{t-2}\ k'_{t-1}\ k'_t\ k'_s\ k'_r) \qquad t \leq s \leq r$$

para cualquier k'_{t-1} que se coloque. De aquí nos basta definir k'_{t-1} con la condición de que se satisfaga la ecuación

$$e_{t-1} = L'_{P_{t-1}} (0\ 0_{t-2}\ k'_{t-1}\ k'_t\ k'_s\ k'_r) \qquad t \leq s \leq r$$

Pero

$$L'_{P_{t-1}} (0\ 0_{t-2}\ k'_{t-1}\ k'_t\ k'_s\ k'_r) =$$
$$= L'_{P_{t-1}} k'_{t-1} \langle V_{t-1} \rangle + L'_{P_{t-1}} (0\ 0_{t-1}\ k'_t\ k'_s\ k'_r)$$

de donde

$$e_{t-1} - L'_{P_{t-1}} (0\ 0_{t-1}\ k'_t\ k'_s\ k'_r) = L'_{P_{t-1}} k'_{t-1} \langle V_{t-1} \rangle =$$
$$= k'_{t-1} (x_n - \xi_n + \alpha_{t-1,t-1})$$

Eligiendo k'_{i-1} apropiadamente se obtiene lo deseado.

En consecuencia, L'_P es un operador acotado e inversible, por el teorema de Banach es un isomorfismo topológico. Todo esto, por supuesto, fuera de un compacto de $\mathbf{C}$. Tomemos N un número real positivo, de tal forma que L'_P sea un isomorfismo topológico para todo P, cada vez que ξ no pertenezca a $B[0,N]$.

Cuando P es mayor o igual a n, se toma $L'_P = 0$, elección que es consistente con la ecuación que define a L'_P, pues $\dim L^2 = n-1$ y en tal caso las aplicaciones d_P y $d_{P-1}|E\otimes\wedge^P L^2$ son idénticamente nulas. Como $E\otimes\wedge^P L^2 = 0$, para P mayor o igual que n, L'_P sigue siendo un isomorfismo topológico para P en estas condiciones, y en consecuencia L'_P es un isomorfismo topológico para todo P, fuera de $B[0,N]$. En dicha región se construirá un operador de homotopía para los complejos $(E\otimes\wedge^P L,\, d_{i-1}(f))$ con $f = \xi_n f_n$, de donde $S_P(L,E,SING)\subseteq B[0,N]$ y por la proposición 45 resultará compacto. En dicha región, el operador $L'_P = -L'_P$ también será inversible y satisfará la ecuación

$$\begin{aligned} d_{P-1}e\langle x_{i_1}\dots x_{i_{P-1}}x_n\rangle &= d_{P-2}e\langle x_{i_1}\dots x_{i_{P-1}}\rangle\wedge x_n \\ &\quad + (-1)^P L_{P-1}e\langle x_{i_1}\dots x_{i_{P-1}}\rangle \end{aligned}$$

El operador de homotopía S_P se construirá inductivamente, para todo P, y deberá satisfacer las siguientes propiedades

Pi) $S_P : E\otimes\wedge^P L \longrightarrow E\otimes\wedge^{P+1}L$
$d_P S_P + S_{P-1}d_{P-1} = I$

Pii) $S_P(E\otimes\wedge^{P-1}L^2\wedge x_n) = 0$

Piii) $S_P(E\otimes\wedge^P L^2)\subset(E\otimes\wedge^P L^2)\wedge x_n$

Piv) $S_P L_P = (-1)^{P+1} I\wedge\langle x_n\rangle$

Pv) $(-1)^{P+3}S_P d_P L_{P+1} = d_P\wedge x_n$

Veamos $P=0$. Sea define S_0 como sigue: $S_0 e = e(x_n-\xi)^{-1}\langle x_n\rangle$ debe verificarse

i) $d_0 S_0 e = d_0 e(x_n-\xi)^{-1}\langle x_n\rangle = e$, luego $d_0 S_0 = I$

ii) No hay nada que probar

iii) Se deduce por construcción

iv) Calculemos L_0

Sea e en $(E\otimes \wedge^0 L)\wedge x_n$, entonces

$$\begin{aligned} d_0 e\langle x_n\rangle = e(x_n-\xi) = d_{-1}e\wedge x_n + \\ +(-1)^{1+0}L_0 e = -L_0 e \end{aligned}$$

Luego $L_0 e = -e(x_n-\xi)$

$$\begin{aligned} S_0L_0e &= -S_0e(x_n-\xi) = -e(x_n-\xi)(x_n-\xi)^{-1}\langle x_n\rangle = \\ &= -e\langle x_n\rangle = (-1)^{0+1}e\wedge\langle x_n\rangle \end{aligned}$$

de donde $S_0L_0 = (-1)^{0+1}I\wedge x_n$.

v) Calculemos L_1

Sea k en $(E\otimes\wedge' L^2)\wedge x_n$, $k = \sum_{1\leq i\leq n-1} e_i\langle x_i x_n\rangle$

$$\begin{aligned} d_1 e\langle x_i x_n\rangle &= ex_i\langle x_n\rangle - e(x_n-\xi)\langle x_i\rangle - e\langle[x_i,x_n]\rangle = \\ &= (d_0e\langle x_i\rangle)\wedge x_n + (-1)^{1+1}L_1e\langle x_i\rangle \end{aligned}$$

de donde

$$L_1 e\langle x_i\rangle = -(e(x_n-\xi)\langle x_i\rangle + e\langle[x_i,x_n]\rangle)$$

Entonces

$$\begin{aligned} (-1)^{0+3}S_0d_0L_1e\langle x_i\rangle &= -S_0d_0(-e(x_n-\xi)\langle x_i\rangle) - \\ &- S_0d_0(e\langle[x_i,x_n]\rangle) = S_0(e(x_n-\xi)x_i) + \\ &+ S_0(e[x_i,x_n]) = [e(x_n-\xi)x_i(x_n-\xi)^{-1} \\ &+ e[x_i,x_n](x_n-\xi)^{-1}]\langle x_n\rangle \end{aligned}$$

usando que $[x_i, x_n-\xi] = [x_i,x_n]$, queda

$$\begin{aligned} &= (ex_i - e[x_i,x_n](x_n-\xi)^{-1} + e[x_i,x_n](x_n-\xi)^{-1})\langle x_n\rangle = \\ &= ex_i\langle x_n\rangle = d_0e\langle x_i\rangle\wedge x_n \end{aligned}$$

Luego

$$(-1)^{0+3}S_0d_0L_1 = d_0\wedge x_n$$

Hemos visto que S_0 satisface las propiedades anteriores. Supongamos que hemos definido el operador de homotopía hasta el índice $P-1$, y construyamos S_P. Por hipótesis inductiva sabemos que S_{P-1} satisface

P-1i) $S_{P-1} : E \otimes \wedge^{P-1} L \longrightarrow E \otimes \wedge^P L$

$d_{P-1} S_{P-1} + S_{P-2} d_{P-2} = I$

P-1ii) $S_{P-1}(E \otimes \wedge^{P-2} L^2 \wedge x_n) = 0$

P-1iii) $S_{P-1}(E \otimes \wedge^{P-1} L^2) \subset (E \otimes \wedge^{P-1} L^2) \wedge x_n$

P-1iv) $S_{P-1} L_{P-1} = (-1)^P I \wedge x_n$

P-1v) $(-1)^{P+2} S_{P-1} d_{P-1} L_P = d_{P-1} \wedge x_n$

y queremos construir S_P con las correspondientes propiedades. Se procede de la siguiente forma:

$$E \otimes \wedge^P L = (E \otimes \wedge^{P-1} L^2) \wedge x_n \oplus E \otimes \wedge^P L^2$$

Sea k en $E \otimes \wedge^P L^2$; para que se cumpla Piii) debe existir a en $E \otimes \wedge^P L^2$ tal que $S_P k = a \wedge \langle x_n \rangle$, además para satisfacer Pi)

$$d_P(a \wedge x_n) = k - S_{P-1} d_{P-1} k$$

Como $d_P(a \wedge x_n) = (d_{P-1} a) \wedge x_n + (-1)^{P+1} L_P a$, se tiene: $d_{P-1}(a) \wedge x_n + (-1)^{P+1} L_P a = k - S_{P-1} d_{P-1} k$, pero k y a pertenecen a $E \otimes \wedge^P L^2$, además por hipótesis inductiva P-1iii), $S_{P-1} d_{P-1} k$ pertenece a $(E \otimes \wedge^{P-1} L^2) \wedge x_n$, pues $d_{P-1} k$ está en $E \otimes \wedge^{P-1} L^2$, entonces de la descomposición anterior de E se tienen las ecuaciones

$$- S_{P-1} d_{P-1} k = d_{P-1} a \wedge x_n \tag{I}$$

$$(-1)^{P+1} L_P a = k \tag{II}$$

como L_P es biyectivo en donde estamos trabajando, elegimos a de tal forma que se satisfaga la ecuación (II).

Veamos ahora que con este a se satisface Pi), esto es equivalente a verificar

$$-S_{P-1} d_{P-1} k = d_{P-1} a \wedge x_n \qquad \text{pero}$$

$$-S_{P-1} d_{P-1} k = -S_{P-1} d_{P-1} (-1)^{P+1} L_P a$$

$$= (-1)^{P+2} S_{P-1} d_{P-1} L_P a = d_{P-1} a \wedge x_n$$

usando la hipótesis inductiva P-1v).

Luego hemos definido S_P en $E \otimes \wedge^P L^2$ y satisface Pi) y Piii).

Para definir S_P en $(E \otimes \wedge^{P-1} L^2) \wedge x_n$, observemos que para verificar Pii) solo podemos elegir

$$S_P k = 0\,, \quad k \text{ en } (E \otimes \wedge^{P-1} L^2) \wedge x_n$$

Veamos que se satisface i).

Se debe verificar que $S_{P-1} d_{P-1} k \wedge \langle x_n \rangle = k \wedge \langle x_n \rangle$, pero $d_{P-1} k \wedge \langle x_n \rangle = (d_{P-2} k) \wedge x_n + (-1)^P L_{P-1} k$, de donde se deduce

$$S_{P-1} d_{P-1} k \wedge x_n = S_{P-1}(d_{P-2} k \wedge x_n) + (-1)^P S_{P-1} L_{P-1} k\,.$$

Como k pertenece a $E \otimes \wedge^{P-1} L^2$, $d_{P-2} k$ se encuentra en $E \otimes \wedge^{P-2} L^2$, por hipótesis inductiva P-1ii), $S_{P-1}(d_{P-2} k) \wedge x_n = 0$, y por hipótesis inductiva P-1iv) $S_{P-1} L_{P-1} k = (-1)^P k \wedge x_n$, de donde

$$S_{P-1} d_{P-1} k \wedge x_n = k \wedge \langle x_n \rangle$$

Entonces, hemos definido el operador S_P entre $E \otimes \wedge^P L$ y $E \otimes \wedge^{P+1} L$, el cual, por construcción, satisface las propiedades Pi), Pii), Piii).

Veamos ahora Piv), se debe cumplir que $S_P L_P = (-1)^{P+1} I \wedge x_n$.

Sea k en $E \otimes \wedge^P L^2$, entonces $L_P k$ pertenece también a $E \otimes \wedge^P L^2$, por construcción $S_P L_P(k) = a \wedge x_n$, con a en $E \otimes \wedge^P L^2$ tal que $(-1)^{P+1} L_P a = L_P k - S_{P-1} d_{P-1} L_P k = d_{P-1} a \wedge x_n$, de la primera ecuación, $a = (-1)^{P+1} k$, luego $S_P L_P k = (-1)^{P+1} k \wedge x_n$, de aquí deducimos $S_P L_P = (-1)^{P+1} I \wedge x_n$, que es Piv).

Veamos Pv). Se debe satisfacer $(-1)^{P+3} S_P d_P L_{P+1} = d_P \wedge \langle x_n \rangle$. Sea S en $E \otimes \wedge^{P+1} L^2$, como

$$d_{P+1} S \wedge \langle x_n \rangle = (d_P S) \wedge x_n + (-1)^{P+2} L_{P+1} S\,,$$

se tiene

$$(-1)^{P+2} d_P L_{P+1} S = d_P(d_{P+1}(S \wedge x_n)) - d_P((d_P s) \wedge x_n) = -d_P((d_P S) \wedge x_n)$$

Como S pertenece a $E \otimes \wedge^{P+1} L^2$, $d_P S$ se encuentra en $E \otimes \wedge^P L^2$, entonces

$$\begin{aligned}(-1)^{P+3} d_P L_{P+1} S &= d_P((d_P S) \wedge x_n) = \\ &= d_{P-1}(d_P S) \wedge x_n + (-1)^{P+1} L_P d_P S = \\ &= (-1)^{P+1} L_P d_P S\ ,\end{aligned}$$

luego

$$(-1)^{P+3} S_P d_P L_{P+1}(S) = (-1)^{P+1} S_P L_P d_P S\ ,$$

por Piv) recientemente probado,

$$= (-1)^{P+1}(-1)^{P+1} d_P S \wedge \langle x_n \rangle = d_P S \wedge \langle x_n \rangle$$

con lo cual $(-1)^{P+3} S_P d_P L_{P+1} = d_P \wedge x_n$.

Con esto concluye el paso inductivo. Recapitulando, fuera de un compacto se ha construido un operador de homotopía (S_P), tal que si $f = \xi f_n$, entonces $S_P(L, E, SING)$ es un compacto, pues este conjunto está contenido en $B[0, N]$ y es cerrado.

Teorema 47. Sea L un algebra de Lie resoluble y (E, φ) una representación continua a derecha de L. Entonces $S_P(L, E, SING)$ es compacto.

<u>Demostración</u>: Se realizará la prueba por inducción en la dimensión de L. Si $\dim L = 1$, estamos en el caso conmutativo, allí el espectro singular coincide con el de Taylor, el cual es compacto.

Supongamos cierto el teorema para toda álgebra de dimensión menor que n. Si $\dim L = n$, existen dos posibilidades. La primera, $\dim L^2 = \dim L - 1 = n - 1$, en tal caso, el teorema 46 nos brinda lo que necesitamos. La segunda, $\dim L^2$ es menor o igual a $n - 2$. Si tal es el caso, existen L_1 y L_2 dos ideales de L tales que $L_i \supset L^2$ $(i = 1, 2)$ y $L_1 + L_2 = L$, esto se puede hacer de la siguiente forma: si $\{X_i\}_{1 \leq i \leq K}$ es una base de L^2, $(\dim L^2 = k)$, sea $\{X_0\}_{1 \leq i \leq n}$ una base de L, que extiende la dada de L^2. Sean

$$L_1 = \{X_i\}_{1 \leq i \leq n-1} \qquad \text{y} \qquad L_2 = \{X_i\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq n-1}}$$

L_1 y L_2 satisfacen los requerimientos anteriores. Por la proposición 2 de I.A, existen dos sucesiones de Jordan Hölder S^i de L tales que $S^i_{n-1} = L_i$ $(i = 1,2)$, donde S^i_{n-1} designa el término $(n-1)$-ésimo de S^i $(i = 1,2)$.

Por la proposición 43, sabemos que

$$\Pi_{L,L_i}(S_P(L,E,SING)) \subseteq S_P(L_i,E,SING) \qquad (i = 1,2)$$

Por hipótesis inductiva, $S_P(L_i,E,SING)$ es compacto y por ende acotado en L_i^*. Pensando los elementos de L^* en coordenadas de la base dual de la anterior, por la elección de L_i $(i = 1,2)$ y las contenciones anteriores nos queda $S_P(L,E,SING)$ es un conjunto acotado de L^*, como es cerrado por la proposición 45, $S_P(L,E,SING)$ resulta compacto.

Teorema 48. Sea L un álgebra de Lie resoluble, y (E,φ) una representación continua a derecha de L. Entonces $S_P(L,E) = S_P(L,E,SING)$.

<u>Demostración</u>: Basta probar que para toda sucesión de Jordan Hölder de L, $S_P(L,E,S) = S_P(L,E,SING)$.

La demostración será por inducción. Si $\dim L = 1$, toda órbita es singular y no hay qué probar.

Supongamos cierto el teorema para toda álgebra de dimensión menor que n. Sea S una sucesión de Jordan Hölder de L y α una órbita en $S_P(L,E,S)$.

Sea f un elemento de α, y supongamos que $PV(f,S)$ es distinto de L y L_{n-1}, donde L_{n-1} designa el $(n-1)$-ésimo término de S.

Por el teorema 6, parte 3 de I.C, $PV(f,s) \cap L_{n-1} = PV(f|L_{n-1},S_{n-1})$, donde S_{n-1} designa a la sucesión de Jordan Hölder de L_{n-1} definida por $(S_i)_{0 \leq i \leq n-1}$.

Existen dos posibilidades, primero $PV(f,S) \cap L_{n-1} = PV(f,S)$, de donde $PV(f,S) \subseteq L_{n-1}$, pero por la proposición 31,

$$Tor^{U(L)}(E, \widetilde{\text{ind}}(f|PV(f,S),L) \cong Tor^{U(PV(f,S))}(E, \mathbf{C}(f|PV(f,S))$$

Pero como $PV(f,S) = PV(f|L_{n-1},S_{n-1})$

$$Tor^{U(PV(f,S))}(E, \mathbf{C}(f|PV(f,S)) =$$
$$= Tor^{U(PV(f|L_{n-1},S_{n-1})}(E, \mathbf{C}(f|L_{n-1}|PV(f|L_{n-1},S_{n-1}))$$

Como α pertenece a $S_P(L,E,S)$, $f|L_{n-1}$ pertenece a $S_P(L_{n-1},E,S_{n-1})$. Pero $PV(f,S)$ es distinta de L y L_{n-1}, luego $f|L_{n-1}$ no define una órbita singular, lo que contradice la hipótesis inductiva.

La segunda posibilidad es que $PV(f,S) \cap L_{n-1}$ esté contenida estrictamente en $PV(f,S)$. En tal caso, si $\dim PV(f,S)/PV(f,S) \cap L_{n-1}$ fuera mayor o igual que 2, existiría un espacio vectorial V de dimensión mayor o igual que 2, tal que $V \cap L_{n-1} = 0$, absurdo pues $\dim L = \dim L_{n-1} + 1$.

Luego existe x_n en L tal que

$$L_{n-1} \oplus \langle x_n \rangle = L \qquad \text{y} \qquad PV(f,S) = \langle x_n \rangle \oplus PV(f,S) \cap L_{n-1}$$

Además, como L_{n-1} es un ideal de L, resulta que $PV(f,S) \cap L_{n-1}$ es un ideal de $PV(f,S)$ y de codimensión 1, si nos restringimos al álgebra $PV(f,S)$ podemos mediante la proposición 2 de I.A definir una sucesión de Jordan Hölder de ella tal que su penúltimo término sea $PV(f,S) \cap L_{n-1}$. Restringiendo la representación de L a $PV(f,S)$ estamos en las condiciones de la proposición 43.

Como α es un elemento de $S_P(L,E,S)$ por el corolario 35, $f|PV(f,S)$ pertenece a $S_P(PV(f,S),E,SING)$ y por la proposición 43 $f|PV(f,S) \cap L_{n-1}$ pertenece a $S_P(PV(f,S) \cap L_{n-1},E,SING)$ nuevamente, por el corolario 35 $f|L_{n-1}$ pertenece a $S_P(L_{n-1},E,S_{n-1})$ pues $PV(f|L_{n-1},S_{n-1}) = PV(f,S) \cap L_{n-1}$, por hipótesis inductiva, $S_P(L_{n-1},E,S_{n-1})$ es igual a $S_P(L_{n-1},E,SING)$, de donde $PV(f|L_{n-1},S_{n-1}) = L_{n-1}$, luego $L_{n-1} \subseteq PV(f,S)$. Absurdo, pues entonces $PV(f,S)$ es L_{n-1} o L, cosa que supusimos que no ocurría.

Hemos visto que si α pertenece a $S_P(L,E,S)$, todo elemento f de ella tiene como polarización a L o L_{n-1}, es decir

$$S_P(L,E,S) = S_P(L,E,SING) \cup \{\alpha \in L^*/\mathrm{Ad}^*G(L) | \forall f \in \alpha\, PV(f,S) = L_{n-1}\}$$

Para completar el paso inductivo, y en consecuencia el teorema, debemos ver que el conjunto

$$\{\alpha \in L^*/\mathrm{Ad}^*G(L) \mid \forall f \in \alpha\, PV(f,S) = L_{n-1}\}$$

es vacío.

Supongamos lo contrario, sea α una órbita por la representación coadjunta de $G(L)$ y sea f en α, entonces $\alpha = G(L).f$. Como $\dim PV(f,S) = n-1$, por lo visto en los comentarios previos del teorema 6 de I.C,

$$n-1 = \dim PV(f,S) = \frac{1}{2}(\dim L + \dim L^{\perp}) ,$$

luego $n-2 = \dim L^{\perp}$, donde

$$L^{\perp} = \{x \in L | f([x,L]) = 0\}$$

Sean $G(L_{n-1})$ y $G(L^{\perp})$ los subgrupos analíticos de $G(L)$ tales que sus álgebras de Lie son respectivamente L_{n-1} y $L^{\perp}$. Su existencia se deduce del teorema 10 de I.E. como $L_{n-1} = PV(f,S)$, por los considerandos previos del teorema 6 de I.C sabemos que $L^{\perp} \subseteq L_{n-1}$ y en consecuencia por el teorema 15 de I.E $G(L^{\perp}) \subset G(L_{n-1})$. Más aún, por lo visto en I.F sabemos que el álgebra de Lie del grupo de isotropía de f es $L^{\perp}$: $\mathcal{G}(G_f) = L^{\perp}$, en consecuencia, la componente conexa de la identidad en G_f es exactamente $G(L^{\perp})$.

Por el teorema 21 de I.F, se tiene que

$$\alpha = G.f \simeq G|G.f ,$$

y además

$$\dim \alpha = \dim G - \dim Gf = \dim G - \dim G(L^{\perp}) = \dim L - \dim L^{\perp} = 2 ,$$

luego $\dim \alpha = 2$, como variedad analítica.

Dado f en α, con α en $S_P(L,E,S)$ por el teorema 44, sabemos que $f|L_{n-1}$ se encuentra en $S_P(L_{n-1},E,SING)$. Más aún, el conjunto $\Pi_{L,L_{n-1}}(\alpha) = \Pi_{L,L_{n-1}}(G(L)f) = \{\Pi_{L,L_{n-1}}\bar{f},\ \bar{f} = f\,\mathrm{Ad}g^{-1}\ g \text{ en } G(L)\}$, está contenido en $S_P(L_{n-1},E,SING)$, pues $PV(\bar{f},S) = PV(f,S)$, por ser L_{n-1} un ideal (Corolario 35) y por actuar $G(L)$ transitivamente sobre α.

Sea X en L tal que $L_{n-1} \oplus \langle x \rangle = L$ y H la aplicación definida por

$$H : \mathbf{C} \longrightarrow L^{*}$$
$$H(z) = f\,\mathrm{Ad}\,\exp(-zx)$$

La aplicación t de $\mathbf{C}$ en L

$$t : \mathbf{C} \longrightarrow L \; t(z) = zx$$

es analítica, como la exponencial y la representación coadjunta de $G(L)$ también son aplicaciones analíticas, resulta que H lo es. Notar que $H(z) = \mathrm{Ad}^*(\exp zx)(f)$.

Por el teorema 13 sabemos que $\mathrm{Exp}\;\mathrm{ad}(x) = \mathrm{Ad}\,\mathrm{Exp}\,(x)$, donde Exp indica la aplicación exponencial entre $\mathrm{End}(L)$ y $\mathrm{Aut}(L)$.

$\mathrm{Exp} : \mathrm{End}(L) \rightarrow \mathrm{Aut}(L)$, luego $H(z) = f \circ \mathrm{Exp}\,\mathrm{ad}(x)$, en particular $H(z)(x) = f\,.\,\mathrm{Exp}\,(\mathrm{ad}(x))(x)$.

Como $\mathrm{ad}(x)(x) = 0$, resulta $\mathrm{Exp}\,\mathrm{ad}(x)(x) = x$, luego $H(z)(x) = f(x)$ y H puede ser descripta como $H(z) = (H(z)|L_{n-1}, f(x))$ en coordenadas de una base de L, de tal forma que los primeros $n-1$ elementos pertenezcan a L_{n-1} y el último sea x.

Como H es una función analítica de $\mathbf{C}$ en L^* si H es acotada, resulta H constante, en particular $H(z) = H(0) = f$. Pero por los teoremas 12, 14 y la proposición 8, G está generada como grupo por los elementos $\{\exp zx, g(L_{n-1})\}$, con z en $\mathbf{C}$ y $g(L_{n-1})$ en $G(L_{n-1})$, pues $L_{n-1} \oplus \langle x \rangle = L$ y el álgebra de Lie de $G(L_{n-1})$ es L_{n-1}. Más aún, como L_{n-1} es un ideal, resulta $G(L_{n-1})$ un subgrupo normal de G (Teorema 10). En consecuencia, todo elemento de g se escribe en la forma $g = \exp zx\, g(L_{n-1})$ con z en $\mathbf{C}$ y $g(L_{n-1})$ en $G(L_{n-1})$. De aquí y por ser H constante $G\,.\,f = G(L_{n-1})\,.\,f$. Entonces $G\,.\,f$ se convierte en una variedad analítica donde $G(L_{n-1})$ actúa transitivamente, por el teorema 20, resulta $G\,.\,f \simeq G(L_{n-1})/G(L_{n-1})f$ donde $G(L_{n-1})f$ designa al grupo de isotropía de f en $G(L_{n-1})$. Como $G(L^\perp)$ es la componente conexa de la identidad de Gf y $G(L^\perp)$ está contenida en $G(L_{n-1})$, resulta que la componente conexa de la identidad de $G(L_{n-1})f$ es $G(L^\perp)$. Por el teorema 21 tenemos que

$$\begin{aligned} \dim G\,.\,f &= \dim(G(L_{n-1})) - \dim G(L_{n-1})f = \dim G(L_{n-1}) - \dim G(L^\perp) = \\ &= \dim L_{n-1} - \dim L^\perp = 1\,. \end{aligned}$$

Absurdo pues $\dim G\,.\,f = 2$.

De aquí se deduce que H no puede ser acotada en L^*.

Como $H(z)(x) = f(x)$, resulta que $H(z)|L_{n-1}$ no puede ser acotada en L^*_{n-1}, de donde existe z_0 en $\mathbf{C}$ tal que $H(z_0)|L_{n-1}$ no pertenece a $S_P(L_{n-1}, E, SING)$, absurdo pues $H(z_0)|L_{n-1} = \Pi_{L,L_{n-1}} f \circ \mathrm{Ad}\exp(L - z_0)$, elemento que debe pertenecer a $S_P(L_{n-1}, E, SING)$, por el teorema 44, según se vio.

Entonces $\{\alpha \in S_P(L,E,S)/\forall f \in \alpha\, PV(f,S) = L_{n-1}\}$ es vacío, y de aquí

$$S_P(L,E,S) = S_P(L,E,SING)\ ,$$

de donde se deduce el teorema.

Teorema 49. Sea L un álgebra de Lie resoluble, (E,φ) una representación continua a derecha de L. Entonces $S_P(L,E)$ es un compacto de L^*.

Demostración: Se sigue de los teorema 47 y 48.

Teorema 50. En las condiciones del teorema 43, si L_{n-1} es un ideal de L de dimensión $n-1$, entonces $S_P(L_{n-1},E) = \Pi_{L,L_{n-1}}(S_P(L,E))$.

Demostración: Es consecuencia de los teoremas 44 y 48.

Teorema 51 (Fórmula de la proyección). Sea L un álgebra de Lie resoluble y (E,φ) una representación continua a derecha de L, si I es un ideal de L entonces $S_P(I,E) = \Pi_{L,I} S_P(L,E)$, donde I designa la restricción a I de los elementos de L^*.

Demostración: Por la proposición 2 de I.A, existe una sucesión de Jordan Hölder de L tal que I es un término de ella, por iteración del Teorema 50, se obtiene el resultado deseado.

Teorema 52. En las condiciones de la definición 7, $S_P(L,E)$ es no vacío.

Demostración: Por inducción en la dimensión de L.

Si $\dim L = 1$, estamos en el caso conmutativo, no hay nada que ver.

Supuesto cierto el teorema para toda álgebra de dimensión menor que n, sea L un álgebra de Lie resoluble de dimensión n y L_{n-1} un ideal, por el teorema 50

$$S_P(L_{n-1}, E) = \Pi_{L,L_{n-1}}(S_P(L, E))$$

por hipótesis inductiva $S_P(L_{n-1}, E)$ no es vacío, luego $S_P(L, E)$ no es vacío.

Teorema 53. En las condiciones de la definición 7, sea I un ideal de L tal que I está contenido en L^2. Entonces $S_P(I, E) = 0$. En particular $S_P(L^2, E) = 0$.

Demostración: Por ser I un ideal, podemos considerar la representación (E, φ) restringida a I.

Por el teorema 51, $S_P(I, E) = \Pi_{L,I}(S_P(L, E)) = \Pi_{L,I}(S_P(L, E, SING))$. Como los elementos de $S_P(L, E)$ verifican $f(L^2) = 0$, resulta que $f(I) = 0$, en consecuencia $\Pi_{L,I}(f) = 0$, de allí el teorema.

Con estos teoremas se han demostrado las propiedades más importantes del espectro, no vacuidad, compacidad, y la fórmula de la proyección, más aún, gracias al teorema 48, el espectro se encuentra contenido en un espacio vectorial, en vez de hallarse en un espacio de órbitas, lo cual permite trabajar más fácilmente con él.

CAPITULO IV

ALGUNAS CONSECUENCIAS

En este capítulo se tratarán varios resultados que se deducen de los teoremas anteriores, así como ejemplos que mostrarán las relaciones existentes entre el espectro de un álgebra de Lie resoluble y una conmutativa.

En primer término notemos que, como consecuencia del teorema 48, la definición 9 puede reformularse como sigue

Definición 9'. En las condiciones de la definición 9, el espectro (singular) de la n-upla, $\varphi(x_i)$ consiste en el conjunto $\{f(x_i), f \in S_P(L, E)\}$.

Gracias al teorema 48, y mediante las definiciones 5, 6, 8 y 9, la analogía entre el caso resoluble y conmutativo se clarifican.

En ambas situaciones se tiene un objeto asociado al álgebra definida por ciertos operadores (conmutativa o no) a partir del cual se obtiene otro objeto que está asociado a los operadores en si mismos, el cual, en el caso clásico brinda el espectro de Taylor.

Además, el complejo que determina la pertenencia de un elemento de L^* a $S_P(L, E)$, reducido al caso conmutativo es el definido por Taylor (Teorema 30 y [9], ([12],IV)).

Una de las propiedades que verifica el espectro de Taylor de una n-upla a es que $S_P(E, (a_i)_{1\leq i\leq n})$ está contenido en $\prod_{i=1}^{n} B[0, \|a_i\|]$. En el caso resoluble, dada un álgebra de Lie L y si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ es una base de la misma, dada una representación continua a derecha (E, φ) podemos considerar el conjunto $S_P(E, (X_i)_{1\leq i\leq n})$. La proposición análoga sería

$$S_P(E, (x_i)_{1\leq i\leq n}) \subseteq \prod_{1\leq i\leq n} B[0, \|\varphi(x_i)\|] \, .$$

Esta proposición es falsa cuando el álgebra no es conmutativa, esto puede verse mediante el ejemplo de la representación del álgebra G_2 ue se detalló en la sección II.C.

Sea $E = \mathbf{C}^2$, y los operadores $a = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, se tiene que $[a, b]^{\mathrm{op}} = b$. En consecuencia $\langle b, a\rangle$ generan un álgebra de Lie resoluble, no conmutativa. Si tomamos como representación a E y la inclusión: $i_{L,\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)^{op}}$, tenemos que

$$S_P(E,(b,a)) = \{0\} \times \left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$$

Pero $\|a\| = \frac{1}{2}$, de donde $S_P(E,(b,a))$ no está contenido en $B[0,\|b\|] \times B[0,\frac{1}{2}]$.

No obstante, si el álgebra de Lie es nilpotente, es cierta la generalización anterior. Para verlo son necesarios algunos preparativos.

Sea L un álgebra de Lie, entonces por la proposición 4-d, de I.A, sabemos que existe una sucesión creciente de ideales $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ tal que $\dim L_i = i$, $L_0 = \{0\}$, $L_n = L$ y $[L, L_i] \subseteq L_{i-1}$. A partir de dicha sucesión, podemos construir otra de elementos de L, $\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$, tales que $\{X_i\}_{1\leq j\leq i}$ sea una base de L_i.

Proposición 54. Sea L un álgebra de Lie nilpotente y $\{X_i\}$ una base de la misma obtenida de la forma descripta más arriba. Si (E,φ) es una representación continua a derecha de L, entonces

$$S_P(E,(X_i)_{1\leq i\leq n}) \subseteq \prod_{i=1}^{n} \|\varphi(x_i)\|$$

<u>Demostración</u>: Se realizará la prueba por inducción en la dimensión de L.

Si $\dim L = 1$, estamos en el caso conmutativo, no hay nada que probar.

Supuesta cierta la proposición cada vez que la dimensión sea menos que n, supongamos que $\dim L = n$.

Por la proposición 4, sabemos que $\{X_i\}_{1\leq i\leq n-1}$ generan un ideal de dimensión $n-1$. Más aún, $\{X_i\}_{\substack{1\leq i\leq n \\ i\neq n-1}}$, también generan un ideal de dimensión $n-1$. Notemos a este último conjunto por L'_{n-1}.

$$\begin{aligned}[L, L'_{n-1}] &\subseteq [L, L_{n-2}] + [L, x_n] \subseteq \\ &\subseteq L_{n-3} + [L_{n-1}, x_n] \subseteq \\ &\subseteq L_{n-3} + L_{n-2} \subseteq L_{n-2} = L'_{n-1}\end{aligned}$$

pues $L = L_{n-1} \oplus \langle x_n\rangle$ y $[L, L_i] \subseteq L_{i-1}$.

Sean $(L_i)_{0\leq i\leq n-1}$, y $(L'_i)_{0\leq i\leq n-1}$, con $L'_i = L_i$ $(0 \leq i \leq n-2)$, sendas sucesiones crecientes de ideales de L_{n-1} y L'_{n-1} respectivamente, definidas a partir de los elementos

$\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$, las cuales satisfacen $[L_{n-1}, L_i] \subseteq L_{i-1}$ y $[L'_{n-1}, L'_i] \subseteq L'_{i-1}$, pues $[L, L_j] \subseteq L_{j-1}$ y $L_i, L'_i (0 \leq i \leq n-2)$ son los términos de la sucesión original definida antes de la proposición. Entonces, podemos aplicar la hipótesis inductiva a los elementos $\{X_i\}_{1\leq i\leq n-1}$ y $\{X_i\}_{1\leq i\leq n,\ n\neq n-1}$. De aquí

$$S_P(E, (X_i)_{1\leq i\leq n-1}) \subseteq \prod_{1\leq i\leq n-1} B[0, \|\varphi(X_i)\|]$$

$$S_P(E, (X_i)_{\substack{1\leq i\leq n\\ n\neq n-1}} \subseteq \prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq n-1}} B[0, \|\varphi(X_i)\|$$

Pero por el teorema 50 sabemos que $S_P(L_{n-1}, E) = \Pi_{L, L_{n-1}}(S_P(L, E))$ y $S_P(L'_{n-1}, E) = \Pi_{L, L'_{n-1}}(S_P(L, E))$. Teniendo en cuenta la definición estas fórmulas y las definiciones de $S_P(E, (X_i)_{1\leq i\leq n})$, $S_P(E, (X_i)_{1\leq i\leq n-1})$, $S_P(E, (X_i)_{1\leq i\leq n,\ n\neq n-1}$ se concluye el paso inductivo y la proposición.

Veamos haora ciertas consecuencias de la no vacuidad del espectro.

Un resultado clásico de álgebras de Lie es el teorema de Engel ([2], 4,2).

Teorema de Engel: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, V no nulo. Si L es una subálgebra de dimensión finita de $\mathcal{G}L(V)$, tal que sus elementos son morfismos nilpotentes de V, entonces existe $u \neq 0$ en V tal que $X.u = 0$ para todo X en L.

Como consecuencia de dicho teorema, el álgebra L resulta nilpotente ([2], 4,2).

Este teorema puede ser interpretado desde el punto de vista de los espectros.

Proposición 55. Sea L un álgebra de Lie nilpotente, que actúa en un espacio de Banach E mediante operadores acotados (en este caso, la representación es la inclusión de L en $\mathcal{L}(E)^{op}$). Entonces son equivalentes

a) Existe e en E tal que $X(e) = 0$ para toda x en L, $e \neq 0$.

b) $Tor_n^{U(L)}(E, C_0) \neq 0$.

Más aún, en tal caso "0" pertenece a $S_P(L, E)$.

<u>Demostración</u>: La última afirmación se deduce de b).

Para probar la proposición, consideremos una base de L formada por elementos $\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$, los cuales se definen como en la proposición anterior. En consecuencia, si k es menor que ℓ, $[x_k, x_\ell] = \sum_{h=1}^{k-1} C_{k,\ell}^h X_h$, para cada $C_{k,\ell}^h$ apropiados números complejos. Esto se deduce de $[L, L_k] \subseteq L_{k-1}$.

Sea $(E\oplus\wedge^P L, d_{P-1})$ el complejo de Koszul asociado al elemento nulo de L^*, el operador d_{n-1} escrito en la base definido por los $\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$ tiene la forma

$$d_{n-1}e\langle x_1 \dots x_n\rangle = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} e x_j\langle x_1, \widehat{x}_j x_n\rangle + \sum_{1\leq k<\ell\leq n} (-1)^{k+\ell} e\langle [x_k, x_\ell] x_1 \widehat{x}_k \widehat{x}_\ell x_n\rangle$$

De la expresión de $[x_k, x_\ell]$ se deduce que la última suma desaparece pues $\langle [x_k, x_\ell] x_1\, \widehat{x}_k\, \widehat{x}_\ell\, x_n\rangle$ es cero para cada par (k,ℓ) con $k<\ell$.

De aquí se sigue que

$$Tor^{U(L)}(E, C(0)) = \ker\, d_{n-1} = \bigcap_{j=1}^{n} \ker\, X_j$$

De donde se sigue la equivalencia de a) y b).

De esta proposición se puede ver que el teorema de Engel es equivalente a la no nulidad de $Tor^{U(L)}(E, C(0))$, en consecuencia, el teorema 52, que asegura la no vacuidad del espectro de un álgebra de Lie nilpotente arbitraria, puede ser considerado como una extensión de dicho teorema, a las álgebras de Lie nilpotentes, ya que la no vacuidad es equivalente a la no nulidad de algún espacio $Tor_P^{U(L)}(E, C(f))$.

En las próximas proposiciones se verá una equivalencia entre la no vacuidad y el espectro de L^2.

Proposición 56. Sea L un álgebra de Lie resoluble, (E,φ) una representación continua a derecha de L, entonces

$$\begin{aligned} Tor_P^{U(L^2)}(E, \mathbf{C}(0)) &\cong Tor_P^{U(L)}(E \bigotimes_{U(L^2)} U(L), \mathbf{C}(f)) \\ &\cong Tor_P^{U(L)}(E, U(L) \bigotimes_{U(L^2)} C(0)) \cong \\ &\cong Tor_P^{U(L)}(E, U(L|L^2)) , \end{aligned}$$

donde $f(L^2) = 0$.

Demostración. Consideremos las álgebras $\wedge = U(L^2)$, $\Gamma = U(L)$ y la aumentación de $\Gamma = U(L)$ definida por $f : \mathcal{E}(f)$

$$\mathcal{E}(f) : U(L) \to \mathbf{C} \quad \mathcal{E}(f)(x) = f(x), \ (x \text{ en } L)$$

Sea φ el morfismo de álgebras definido por la inclusión de L^2 en L $\varphi = U(i_{L^2,L}) : \wedge \to \Gamma$ y sea $\mathcal{E}(f) \circ \varphi$ la aumentación de $\wedge = U(L^2)$ inducida por $\mathcal{E}(f)$. Como $f(L^2) = 0$, se verifica que $\mathcal{E}(f) \circ \varphi = \mathcal{E}(0)$, la aumentación de $\wedge = U(L^2)$ definida por el elemento nulo de L^2.

Sabemos como consecuencia del teorema 5, que $U(L)$ es un $U(L^2)$ módulo libre a izquierda y derecha, entonces por los teoremas 24 y 23 del Capítulo I, tenemos que

$$Tor_P^{U(L^2)}(E, C(0)) \cong Tor^{U(L)}(E \otimes_{U(L^2)} U(L),\ C(f))$$

y

$$Tor_P^{U(L^2)}(E, C(0)) \cong Tor^{U(L)}(E, U(L) \otimes_{U(L^2)} C(0))$$

Considerando en el primer caso a E como $U(L^2) = \wedge$ módulo a derecha, y en el segundo como $U(L) = \Gamma$ módulo a derecha. De aquí se deducen los dos primeros isomorfismos. Para el último, observemos que $U(L) \otimes_{U(L^2)} C(0)$ es isomorfo a $U(L|L^2)$, pues L^2 es un ideal de L ([3], XIII,4). De aquí se concluye la proposición

Proposición 57. En las condiciones de la proposición 56, si $Tor_P^{U(L)}(E, U(L|L^2)) = 0$ ($P > 0$), entonces

$$Tor_P^{U(L)}(E, C(f)) \cong Tor_P^{U(L|L^2)}(E \otimes_{U(L)} U(L|L^2), C(\overline{f}))$$

donde $\overline{f}$ pertenece a $(L|L^2)^*$ y $f = \overline{f}\,\Pi_{L|L^2}$, con Π_{L,L^2} la proyección al cociente de L sobre $L|L^2$. Notar que del isomorfismo $(L|L^2)^* \cong L^{2^\perp}$, se deduce que $f(L^2) = 0$.

Demostración. Sea $K = \dim L^2$, y sea $\{\overline{y}_j\}_{1 \leq j \leq n-k}$ una base de $L|L^2$. Sea $\{X_i\}_{1 \leq i \leq k}$ una base de L^2 y sea $\{Y_j\}_1 \leq j \leq n-k$ una extensión de la base anterior a L tal que $\Pi_{L,L^2}(Y_j) = \overline{y}_j$. Sea $\mathcal{E}(f)$ la aumentación de $U(L)$ en $\mathbf{C}$ asociada a f y $\mathcal{E}(\overline{f})$ la correspondiente de

$U(L|L^2)$ en $\mathbf{C}$. Se tiene que $\mathcal{E}(\overline{f}) \circ U_{L|L^2}(\Pi) = \mathcal{E}(f)$, donde $U(\Pi)$ es el morfismo que extiende Π_{L,L^2} a nivel de álgebras envolventes.

$\mathcal{E}(\overline{f}) \circ U(\Pi_{L,L^2})(X_i) = \mathcal{E}(\overline{f})(0) = 0$, como $f(L^2) = 0$ $\mathcal{E}(f)(X_i) = 0$. Por otra parte

$$\mathcal{E}(\overline{f})\, U(\Pi_{L,L^2})(Y_j) = \mathcal{E}(\overline{f})(\overline{y}_j) = \overline{f}(\overline{y}_j) = \overline{f} \circ \Pi_{L,L^2}(Y_j) = f(Y_j) = \mathcal{E}(f)(Y_j)$$

En consecuencia, $\mathcal{E}(\overline{f}) \circ U(\Pi_{L,L^2}) = \mathcal{E}(f)$, pues coinciden sobre una base de L, de aquí, la aumentación de $U(L)$ inducida por $\mathcal{E}(\overline{f})$ a través de $U(\Pi)$ es $\mathcal{E}(f)$.

Si definimos $\Lambda = U(L)$, $\Gamma = U(L|L^2)$, $\varphi = U(\Gamma_{L,L^2})$, nos encontramos en las condiciones del teorema 25 de I-C. Definiendo $A = E$, entonces si $Tor^{U(L)}(E, U(L|L^2)) = 0$ $(P > 0)$, resulta que

$$Tor_P^{U(L)}(E, C(f)) \cong Tor_P^{U(L^2)}(E \otimes_{U(L)} U(L|L^2), C(\overline{f}))$$

donde $C(f)$ $(\mathbf{C}(\overline{f}))$ denota a $\mathbf{C}$ como $U(L)$ $(U(L|L^2))$ módulo a través de $\mathcal{E}(f)$ $(\mathcal{E}(\overline{f}))$.

Proposición 58. Sea L un álgebra de Lie resoluble y (E, φ) una representación continua a derecha de L. Entonces son eqivalentes

a) 0 no pertenece a $S_P(L^2, E)$

b) $S_P(L, E)$ es vacío

Demostración. Supongamos que "0" no se encuentra en $S_P(L^2, E)$, entonces $Tor_P^{U(L^2)}(E, C(0)) \equiv 0$ $(P > 0)$. En particular $Tor_P^{U(L^2)}(E, C(0)) = 0$ $(P > 0)$.

Por la proposición 56, estos espacios son isomorfos a $Tor_P^{U(L)}(E, U(L|L^2))$. Por la proposición 57 se tiene que

$$Tor_P^{U(L)}(E, C(f)) \cong Tor_P^{U(L|L^2)}(E \otimes_{U(L)} U(L|L^2), C(\overline{f}))$$

con $\overline{f}$ en $(L|L^2)^*$ y $f = \overline{f} \circ \Pi_{L,L^2}$.

Sea φ la representación de L en $\mathcal{L}(E)^{op}$, como $Tor_0^{U(L^2)}(E, \mathbf{C}(0)) = E \,/\, \varphi(L^2)E$, se tiene que $\varphi(L^2)E = E$, donde $\varphi(L^2)(E) = \{x/x = \varphi(L)e,\ L \text{ en } L^2,\ e \text{ en } E\}$.

Por otra parte, por las propiedades del producto tensorial

$$\begin{aligned} E \otimes_{U(L)} U(L|L^2) &= \{\Sigma\, e_i \otimes u_i, \quad e_i \text{ en } E,\ u_i \text{ en } U(L|L^2)\} \\ &= \{\Sigma\, e_i \otimes U(\Pi\omega_i)1, \quad u_i \text{ en } U(L),\ e_i \text{ en } E\} \end{aligned}$$

para $U(\Pi)$ es suryectivo. Más aún, como $U(L|L^2)$ tiene su estructura de $U(L)$ módulo definida a través de $U(\Pi)$

$$E \otimes_{U(L)} U(L|L^2) = \{\Sigma\, e_i \,._{U(L)} u_i \otimes 1\} = \{\Sigma\, \overline{e_i} \otimes 1, \quad \overline{e_i} \quad \text{en} \quad E\}$$

Pero $E = \varphi(L^2)E$, entonces dado $\overline{e_i}$ en E, existe u_i en E y x_i en L^2 tal que $\overline{e_i} = a_i\, .\, \varphi(x_i)$, luego

$$E \otimes_{U(L)} U(L|L^2) = \{\Sigma\, a_i \varphi(x_i) \otimes 1\} = \{\Sigma\, a_i \otimes U(\Pi)(X_i)\, 1\} = 0$$

pues $\Pi(X_i) = 0$.

Luego $E \otimes_{U(L)} U(L|L^2) = 0$, entonces $Tor_P^{U(L)}(E, \mathbf{C}(f)) \equiv 0$, como $\overline{f}$ es arbitraria, y toda f en $L^{2^\perp}$ se obtiene vía el isomorfismo existente entre $(L|L^2)^*$ y $L^{2^\perp}$, resulta que $S_P(L, E, SING) = S_P(L, E)$ es vacío.

Notar que el teorema 48, que prueba la afirmación anterior, no es consecuencia de la no vacuidad del espectro, antes bien, este último resultado se deduce de aquel.

Recíprocamente, si 0 pertenece a $S_P(L^2, E)$, por la fórmula de la proyección (Teorema 51), resulta que $S_P(L, E)$ es no vacío, absurdo.

Una versión equivalente de este teorema es la siguiente: "0" pertenece a $S_P(L^2, E)$ si y sólo si $S_P(L, E)$ es no vacío. Esto permite ver que en el caso conmutativo, la no vacuidad del espectro es equivalente a que el operador "0" de E tenga como espectro al "0" de $\mathbf{C}$.

Veamos ahora otra consecuencia del teorema 48.

Sea L un álgebra de Lie, y consideremos dos sucesiones de Jordan Hölder de L, $S = (L_i)_{0 \le i \le n}$, $S' = (L'_i)_{0 \le i \le n}$. Entonces podemos construir los módulos $\widetilde{\text{ind}}(f|PV(f,S),L)$ e $\widetilde{\text{ind}}(f|PV(f,S'),L)$.

Uno podría pensar que, dado un $U(L)$ módulo a derecha A, los espacios $Tor_P^{U(L)}(A, \widetilde{\text{ind}}(f|PV(f,S),L)$ y $Tor_P^{U(L)}(A, \widetilde{\text{ind}}(f|PV(f,S'),L)$ sean isomorfos. Lamentablemente este no es en general el caso.

Por ejemplo, sea L el álgebra de Heisenberg definida en el Capítulo II, $L = \mathbf{C}(x_1) \oplus \mathbf{C}(x_2) \oplus \mathbf{C}(x_3)$, con relaciones $[x_3, x_2] = x_1$, y el resto de ellas nulo. En la proposición 42 vemos que toda sucesión de Jordan Hölder era de la forma:

$$L_0 = \{0\},\ L_1 = \langle x_1 \rangle,\ L_2 = H,\ L_3 = L\ ,$$

con H un plano que contiene a L. Más aún, si f es un elemento de L^*, tal que $f(L^2) \neq 0$, equivalentemente, f define una órbita no singular, $PV(f, S) = H$.

Consideremos las sucesiones

$$S : L_0 = \{0\},\ L_1 = \langle x_1 \rangle,\ L_2 = \langle x_1, x_2 \rangle,\ L_3 = L$$
$$S' : L'_0 = \{0\},\ L'_1 = \langle x_1 \rangle,\ L'_2 = \langle x_1, x_3 \rangle,\ L'_3 = L$$

Sean M y M' los $U(L)$ módulos inducidos por las representaciones $f|PV(f, S)$ y $f|PV(f, S'))$

$$M = U(L) \bigotimes_{U(\{x_1, x_2\})} C(f|\langle x_1, x_2 \rangle)$$
$$M' = U(L) \bigotimes_{U(\{x_1, x_3\})} C(f|\langle x_1, x_3 \rangle)$$

Tomemos $f = 1f_1 + 1f_2$, donde $\{f_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ es la base dual de $\{x_i\}_{1 \leq i \leq 3}$. Como $f(x_1) = 1$, f no define una órbita singular y estamos en las condiciones anteriores. Además, x_2 actúa como la identidad en M, pues: $(u \otimes 1)x_2 = u \otimes f(x_2) = u \otimes 1$.

Por otra parte, según ([4], V,5.6), tenemos que $M' = \bigoplus_{n \in N_0} x_2^n \otimes \mathbf{C}$, pues al ser L nilpotente $\mathrm{ind}(f|PV(f, S), L) = \widetilde{\mathrm{ind}}(f|PV(f, S), L)$. De donde se deduce que si M y M' fueran isomorfos, resultaría que x_2 debería actuar como la identidad en M', de aquí $M' = \mathbf{C}\langle 1 \otimes 1 \rangle$, absurdo. Luego, no son isomorfos. Pero

$$Tor_0^{U(L)}(U(L), M) \cong M$$
$$Tor_0^{U(L)}(U(L), M') \cong M'$$

de donde se deduce que los espacios $Tor^{U(L)}(A, M)$ y $Tor^{U(L)}(A, M')$ no son en general isomorfos. Sin embargo, si el módulo A es un espacio de Banach se tiene la siguiente proposición

Proposición 59. Sea L un álgebra de Lie resoluble y (E,φ) una representación continua a derecha de L. Si f es un elemento de L^* y S, S' son dos sucesiones de Jordan Hölder, entonces

$$Tor_P^{U(L)}(E,\widetilde{\mathrm{ind}}(f|PV(f,S),L) \cong Tor_P^{U(L)}(E,\widetilde{\mathrm{ind}}(f|PV(f,S),L)$$

En particular, si f no define una órbita singular, los espacios anteriores son idénticamente nulos.

Demostración: Si f define una órbita singular, entonces $\widetilde{\mathrm{ind}}(f|PV(f,S),L) = \widetilde{\mathrm{ind}}(f|PV(f,S'),L) = \mathbf{C}(f)$ y no hay nada que probar.

Por otra parte, si f no define una órbita singular, sabemos que la órbita por f, $G(L)f$ no pertenece a $S_P(L,E)$, luego por la definición de dicho conjunto,

$$0 = Tor_P^{U(L)}(E,\widetilde{\mathrm{ind}}(f|PV(f,S),L)) \cong Tor_P^{U(L)}(E,\widetilde{\mathrm{ind}}(f|PV(f,S'),L))$$

de donde se concluye la proposición.

Otra de las consecuencias del teorema 48, es que el espectro es siempre playo, en el siguiente sentido. Sea L un álgebra de Lie resoluble y $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ una base de L tal que $\{x_j\}_{1\leq j\leq k}$ define una base de L^2. Como L no es ni conmutativa ni semisimple, se verifica: $1 < k < n$. Sea f un elemento de L^* escrito en la base dual de la anterior: $f = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i$, si f define una órbita singular, entonces $f = \sum_{i=k+1}^{n} \xi_i f_i$, de donde $S_P(E,(x_i)_{1\leq i\leq n})$ está contenido en $\{0\}\times\mathbf{C}^{n-k}$, pues la primera k coordenada de sus elementos son idénticamente nulas. Veamos que propiedades se deducen de esto.

Proposición 60. Sea L un álgebra de Lie nilpotente y (E,φ) una representación continua a derecha de L. Sea $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ una base de L definida con las mismas propiedades de la usada en la proposición 54. Si $S_P(E,(x_i)_{1\leq i\leq n}) = 0$, entonces los operadores $\varphi(x_i)$ son topológicamente nilpotentes.

Demostración. Sabemos que dicha base verifica las siguientes propiedades: los conjuntos $\{x_j\}_{1\leq j\leq i} = L_i$ son ideales de L tal que

a) $L_i \subset L_{i+1}$

b) $L_0 = \{0\}$, $L_n = L$

c) $\dim L_i = i$

d) $[L, L_i] \subseteq L_{i-1}$

Realizaremos la prueba por inducción en la dimensión del álgebra.

Si $\dim L = 1$, estamos en el caso de un operador, como $S_P(\varphi(x)) = 0$, entonces resulta $\varphi(x)$ topológicamente nilpotente.

Supongamos cierta la proposición para álgebras de dimensión menor que n. Análogamente a lo hecho en la proposición 54, definamos los ideales

$$L_{n-1} = \langle\{x_i\}\rangle_{1\leq i\leq n-1}, \quad L'_{n-1} = \langle\{x_i\}\rangle_{\substack{1\leq i\leq n \\ i\neq n-1}}$$

Por lo visto en esa proposición, sabemos que las bases

$$\{x_i\}_{1\leq i\leq n-1} \quad \text{y} \quad \{x_i\}_{\substack{1\leq i\leq n \\ i\neq n-1}}$$

de L_{n-1} y L'_{n-1} respectivamente, satisfacen las hipótesis de la proposición. Notar que $S_P(E, (x_i)_{1\leq i\leq n}) = 0$ implica $S_P(L, E) = 0$, pues las coordenadas de los elementos de este en la base $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ dan aquel. Por el teorema 50,

$$S_P(L_{n-1}, E) = \Pi_{L_1 L_{n-1}}(S_P(L, E)) = 0$$
$$S_P(L'_{n-1}, E) = \Pi_{L_1 L_{n-1}}(S_P(L'_{n-1}, E)) = 0$$

de donde

$$S_P(L_{n-1}, (x_i)_{1\leq i\leq n-1}) = 0$$

y

$$S_P(L'_{n-1}, (x_i)_{\substack{1\leq i\leq n \\ i\neq n-1}}) = 0$$

por hipótesis inductiva, los operadores $\varphi(x_i)_{1\leq i\leq n}$ son topológicamente nilpotentes.

Proposición 61. Sea L un álgebra de Lie resoluble y (E, φ) una representación continua a derecha de L en E. Entonces si $\varphi(x_i)_{1\leq i\leq k}$ es una base de L^2 definida con las propiedades de la usada en las proposiciones 54 o 60, los operadores $\varphi(x_i)$ son topológicamente nilpotentes.

Demostración. Por la proposición 1, el álgebra L^2 es nilpotente y entonces podemos realizar la construcción de las proposiciones 54 o 60. La proposición se sigue de la proposición 60 y del teorema 53.

Ahora nos dedicaremos a estudiar con mayor detalle el operador de homotopía construido en la proposición 46. Recordemos que dada un álgebra de dimensión n, tal que su derivado, L^2, verifica dim $L^2 = n-1$, el operador S_P verifica

Pi) $S_P : E \otimes \wedge^P L \to E \otimes \wedge^{P+1} L$
$d_P S_P + S_{P-1} d_{P-1} = I$

Pii) $S_P(E \otimes \wedge^{P-1} L^2 \wedge x_n) = 0$

Piii) $S_P(E \otimes \wedge^{P-1} L^2) \subset (E \otimes \wedge^P L^2) \wedge x_n$

Piv) $S_P L_P = (-1)^{P+1} I \wedge \langle x_n \rangle$

Pv) $(-1)^{P+3} S_P d_P L_{P+1} = d_P \wedge x_n$

Además

$$L_0 e = -e(x_n - \xi)$$

y

$$L_1 e\langle x_i \rangle = -(e(x_n - \xi)\langle x_i \rangle + e\langle [x_1, x_n] \rangle)$$

Por otra parte, en el ejemplo desarrollado en el Capítulo II, donde se calculaba el espectro del álgebra G_2, proposición 41, tenemos que los operadores anteriores son

$$L_0 e = -e(x - \lambda) \qquad L_0 : E \to E$$
$$L_1 e\langle y \rangle : -e(x - \lambda - 1)\langle y \rangle : L_1 : E\langle y \rangle \to E\langle y \rangle$$

donde $G_2 = \mathbf{C}(y) \oplus \mathbf{C}(x)$ y $[x, y]^{\text{op}} y$. Más aún, dicha proposición asegura que:

$$S_P(G_2, E) = \{(0,\lambda) | L_0 \quad \text{no es biyectivo}\} \cup \\ \cup \{(0,\lambda) | L_1/\ker y \quad \text{no es biyectivo}\}$$

donde $\overline{L}_0 : E/\mathrm{Im}\, y \to E/\mathrm{Im}\, y$. Pero

$$\begin{aligned} E/\mathrm{Im}\, y &= Tor_0^{U(\mathbf{C}(y))}(E, C(0)) \\ \ker y &= Tor_1^{U(\mathbf{C}(y))}(E, \mathbf{C}(0)) \end{aligned}$$

Todo esto puede ser generalizado como sigue:

Proposición 62. Sea L un álgebra de Lie resoluble de dimensión n tal que dim $L^2 = n-1$. Sea x en L tal que $L^2 \oplus \langle x \rangle = L$ y sea f_x en L^* tal que $f_x(x) = 1,\ f_x(L^2) = 0$. Sea $f = \xi_x f_x$ una órbita singular. Son equivalentes:

a) $f = \xi_x f_x$ no pertenece a $S_P(L, E)$

b) Los operadores L_P asociados a f, definidos en $Tor^{U(L^2)}(E, \mathbf{C}(0))$ son biyectivos.

Demostración. En primer término veamos qué son los operadores definidos en b). Recordemos la definición de los operadores L_P.

$$L_{P-1} : E \otimes \wedge^{P-1} L^2 \to E \otimes \wedge^{P-1} L^2$$

y verifican la ecuación

$$\begin{aligned} d_{P-1} e\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_{P-1}} x \rangle = d_{P-2} e\langle x_{i_1} \ldots x_{i_{P-1}} \rangle \wedge x + \\ + (-1)^P L_{P-1} e\langle x_{i_1} \ldots x_{i_{P-1}} \rangle \end{aligned}$$

También se verifica

$$\begin{aligned} d_{P-2} e\langle x_{i_1} \ldots x_{i_{P-2}} x \rangle = d_{P-3} e\langle x_{i_1} \ldots x_{i_{P-2}} \rangle \wedge x + \\ + (-1)^{P-1} L_{P-2} e\langle x_{i_1} \ldots x_{i_{P-2}} \rangle \end{aligned}$$

Combinando las ecuaciones anteriores, y escribiendo sintéticamente

$$\begin{aligned} 0 = d_{P-2} d_{P-1} &= d_{P-2}(d_{P-1} \wedge x + (-1)^P L_{P-1}) \\ &= (d_{P-3}(d_{P-2})) \wedge x + (-1)^{P-1} L_{P-2} d_{P-2} + (-1)^P d_{P-2} L_{P-1} \ , \end{aligned}$$

como $d_{P-3}d_{P-2}=0$, obtenemos

$$d_{P-2}L_{P-1}=L_{P-2}d_{P-2} \tag{I}$$

Por otra parte, si consideramos el complejo $(E\otimes\wedge^P L^2, d_{P-1}|)$, donde $d_{P-1}|$ designa el operador d_{P-1} restringido a $E\otimes\wedge^P L^2$, obtenemos un complejo de cadenas pues L^2 es un ideal. Más aún, si miramos el complejo sobre $U(L^2)$, su homología nos da los espacios $Tor_P^{U(L^2)}(E,\mathbf{C}(0))$.

De la ecuación (I) vemos que

$$\begin{aligned}L_{P-1}(\ker d_{P-2})&\subseteq \ker d_{P-2}\\ L_{P-1}(\operatorname{Im} d_{P-1})&\subseteq \operatorname{Im} d_{P-1},\end{aligned}$$

lo que nos permite definir los operadores $\overline{L}_{P-1}$ en $Tor_{P-1}^{U(L^2)}(E,\mathbf{C}(0))$, por pasaje al cociente de los L_{P-1} anteriores. Son estos los operadores considerados en b).

Veamos como se prueba la proposición.

Supongamos que f no está en $S_P(L,E)$. Sea a en $\ker d_{P-2}\subseteq E\otimes\wedge^{P-1}L^2$ tal que $L_{P-1}a=d_{P-1}(b)$, con b en $E\otimes\wedge^P L^2$, es decir, $\overline{L}_{P-1}(\overline{a})=0$, $d_{P-2}a=0$. Entonces

$$\begin{aligned}d_{P-1}((-1)^{P+1}b+a\langle x\rangle)&=(-1)^{P+1}d_{P-1}b+(d_{P-2}a)\wedge x+(-1)^P L_{P-1}a=\\ &=(-1)^P(-d_{P-1}b+L_{P-1}a)=0\end{aligned}$$

Luego $(-1)^{P+1}b+a\langle x\rangle$ pertenece a $\ker d_{P-1}=\operatorname{Im} d_P$, pues $Tor_P^{U(L)}(E,\mathbf{C}(f))=0$.

Si consideramos a $E\otimes\wedge^P L$ y $E\otimes\wedge^{P+1}L$ descompuestos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}E\otimes\wedge^P L&=E\otimes\wedge^P L^2\oplus(E\otimes\wedge^{P-1}L^2)\wedge x\\ E\otimes\wedge^{P+1}L&=E\otimes\wedge^{P+1}L^2\oplus(E\otimes\wedge^P L^2)\wedge x\,,\end{aligned}$$

entonces existen c y d en $E\otimes\wedge^{P+1}L^2$ y $E\otimes\wedge^P L^2\wedge x$ respectivamente, tal que

$$((-1)^{P+1}b,a)=d_P(c,d)=(d_Pc+(-1)^{P+1}L_Pd,d_{P-1}d)$$

pues $d_P(E\otimes\wedge^{P+1}L^2)\subseteq E\otimes\wedge^P L^2$ y $d_P(d\wedge x)=d_{P-1}(d)+(-1)^{P+1}L_Pd$, en particular $a=d_{P-1}(d)$ con d en $E\otimes\wedge^P L^2$, luego $\overline{a}=0$ y $\overline{L}_{P-1}$ es inyectivo.

Veamos que es suryectivo.

Sea a en $E \otimes \wedge^{P-1} L^2$ tal que $d_{P-2}a = 0$, entonces $d_{P-2}(a,0) = 0$, y por verificarse $Tor_{P-1}^{U(L)}(E, \mathbf{C}(f)) = 0$, resulta que existen b y c con propiedades análogas a (c,d) del razonamiento anterior, tales que

$$(a,0) = d_{P-1}(b,c) = (d_{P-1}(b) + (-1)^P L_{P-1}c, d_{P-2}c)$$

En consecuencia, $0 = d_{P-2}c$ y $\overline{c}$ pertenece a $Tor_{P-1}^{U(L^2)}(E, \mathbf{C}(0))$, pues c está en $E \otimes \wedge^{P-1} L^2$. Pero como $a = d_{P-1}b + (-1)^P L_{P-1}c$, y b pertenece a $E \otimes \wedge^P L^2$, resulta que $\overline{a} = \overline{L}_{P-1}((-1)^P \overline{c})$, luego $\overline{L}_{P-1}$ es suryectiva y en consecuencia biyectiva.

Recíprocamente, supongamos que para todo P, $\overline{L}_P$ sea biyectivo.

Sea (a,b) en $E \otimes \wedge^P L = E \otimes \wedge^{P-1} L^2 \oplus (E \otimes \wedge^{P-1} L^2) \wedge x$ tal que $0 = d_{P-1}(a,b)$. Por los cálculos anteriores, tenemos que

$$0 = d_{P-1}(a,b) = (d_{P-1}a + (-1)^P L_{P-1}b, d_{P-2}b)$$

Luego $d_{P-2}b = 0$, y en consecuencia $\overline{b}$ pertenece a $Tor_{P-1}^{U(L^2)}(E, \mathbf{C}(0))$. Como $0 = d_{P-1}a + (-1)^P L_{P-1}b$ se tiene que $\overline{L}_{P-1}\overline{b} = 0$, pues a pertenece a $E \otimes \wedge^P L^2$. Por ser $\overline{L}_{P-1}$ inyectiva, existe c en $E \otimes \wedge^P L^2$ tal que $b = d_{P-1}c$. Además

$$\begin{aligned} 0 &= d_{P-1}a + (-1)^P L_{P-1} d_{P-1} c = \\ &= d_{P-1}a + (-1)^P d_{P-1} L_P c = d_{P-1}(a + (-1)^P L_P c) \end{aligned}$$

Como $a + (-1)^P L_P c$ pertenece a $E \otimes \wedge^P L^2$, pues a y c pertenecen a él, obtenemos que $a + (-1)^P L_P c$ está en $\ker d_{P-1}$, por ser $\overline{L}_P$ suryectivo, existe w en $\ker d_{P-1}$ y x en $E \otimes \wedge^{P+1} L^2$ tal que $a + (-1)^P L_P c = L_P w + d_P x$, de donde se deduce que $a = L_P(w + (-1)^{P+1}c) + d_P x$. Pero

$$\begin{aligned} &d_P(x, (-1)^{P+1}(w + (-1)^{P+1}c)) = \\ &= (d_P x + (-1)^{P+1} L_P((-1)^{P+1}(w + (-1)^{P+1}c)), d_{P-1}(-1)^{P+1}(w + (-1)^{P+1}c)) = \\ &= (a, d_{P-1}c) = (a,b) \end{aligned}$$

Entonces $\ker d_{P-1} = \operatorname{Im} d_P$ y $Tor_P^{U(L^2)}(E, \mathbf{C}(f)) = 0$, con lo que concluye la prueba.

Notar que si el álgebra L es conmutativa, dim $L = 1$ pues $L^2 = 0$, en este caso los espacios $Tor_P^{U(L^2)}(E, \mathbf{C}(0))$ consisten solamente de $Tor_0^{U(0)}(E, \mathbf{C}(0)) = Tor_0^{\mathbf{C}}(E, \mathbf{C}(0)) = E$ y el operador $L_0 e = -e(x - \lambda)$. La proposición anterior se reduce a

$$\lambda \text{ no pertenece a } S_P(x) \text{ si y sólo si } L_0 = (x - \lambda) \text{ es biyectivo}$$

Esto muestra el aumento de complejidad introducida por las álgebras no conmutativas en la teoría.

Ahora generalizaremos lo hecho para el caso dim $L^2 =$ dim $L - 1$. Si repasamos las demostraciones de los proposiciones 46 y 62, podremos observar que L^2 puede ser reemplazado por un ideal de L, de dimensión $n - 1$. En ningún momento hemos tenido en cuenta la estructura particular de L^2, solamente hemos usado que es un ideal. Más precisamente, sea L un álgebra de Lie resoluble y L_{n-1} un ideal de dimensión $n - 1$. Sea f una órbita singular de L, consideremos la siguiente descomposición asociada al complejo $(E \otimes \wedge^P L_1 d_{P-1})$

$$E \otimes \wedge^P L = E \otimes \wedge^P L_{n-1} \oplus E \otimes \wedge^{P-1} L_{n-1} \wedge x$$

con x en L tal que $L_{n-1} \oplus \langle x \rangle = L$. Además se verifica que

$$d_{P-1}(E \otimes \wedge^P L_{n-1}) \subseteq E \otimes \wedge^{P-1} L_{n-1}$$

y

$$d_{P-1} e\langle x_{i_1} \dots x_{i_{P-1}} x \rangle = d_{P-2} e\langle x_{i_1} \dots x_{i_{P-1}} \rangle \wedge x + (-1)^P L_{P-1} e\langle x_{i_1} \dots x_{i_{P-1}} \rangle$$

donde L_{P-1} es un operador definido en $E \otimes \wedge^{P-1} L_{n-1}$ que depende del parámetro $f(x)$ considerando una base de L^* de tal forma que su último elemento satisfaga $f_n(L_{n-1}) = 0$, $f_n(x) = 1$.

Mediante un procedimiento análogo al realizado en la proposición 62, tenemos que $d_{P-2} L_{P-1} = L_{P-2} d_{P-2}$ y podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 63. Sea L un álgebra de Lie y L_{n-1} un ideal de codimensión 1 de L. Sean (E, φ) una representación continua a derecha de L y f una órbita singular. Entonces son equivalentes

a) f no pertenece a $S_P(L, E)$

b) $\mathcal{L}_{P-1}$ definido en $Tor^{U(L_{n-1})}(E, C(f|L_{n-1}))$ es biyectivo.

Demostración: Es análoga a la correspondiente de la proposición anterior.

Por último, con esta generalización se puede dar una demostración de la compacidad singular, que es independiente de la propiedad de la proyección

Proposición 64. Sea L un álgebra de Lie resoluble, y (E, φ) una representación continua a derecha de L. Entonces $S_P(L, E, SING)$ es compacto en L^*.

Demostración. Por la proposición 45 sabemos que $S_P(L, E, SING)$ es cerrado, en consecuencia basta ver que es acotada. Sea $\{x_i\}$ una base de L tal que $\{x_i\}_{1 \leq i \leq k}$ es una base de L^2, considerando $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ la base dual de la anterior, sabemos que f es una órbita singular si y sólo si $f = \sum_{i=k+1}^{n} \xi_i f_i$. Para ver que $S_P(L, E, SING)$ es acotado en L^* basta probar que para cada $i(k+1 \leq i \leq r)$ existe r_i tal que si ξ_i es mayor que r_i, f no pertenece a $S_P(L, E)$.

Sea i en las condiciones anteriores, y L_i el subespacio de L generado por $\{x_j\}_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}}$. Como L^2 está contenido en L_i, L_i es un ideal de codimensión 1 de L para todo i. Aplicando la demostración de la proposición 46 a la construcción que la generaliza para el caso L y L_i, obtenemos que es posible construir un operador de homotopía, el cual asegura la nulidad de los espacios $Tor_P^{U(L)}(E, C(f))$, cada vez que ξ_i sea mayor que cierto r_i. Luego $S_P(L, E, SING)$ es compacto.

CAPITULO V

PROPIEDAD DE LA APLICACIÓN ESPECTRAL Y CALCULO FUNCIONAL HOLOMORFO

En este capítulo nos dedicaremos a dos de los más importantes puntos asociados a la teoría espectral: la aplicación espectral y el cálculo funcional holomorfo, los cuales, junto a las propiedades vistas en el Capítulo III, constituyen las características básicas del espectro.

En primer término nos ocuparemos de la propiedad de la aplicación espectral.

Es sabido que, en el caso conmutativo, dado un espacio de Banach E y a una n–upla de operadores que conmutan dos a dos, el espectro de Taylor de la n-upla $S_P(a,E)$ satisface la siguiente propiedad: Si P es una aplicación polinomial entre $\mathbf{C}^n$ y $\mathbf{C}^k(P:\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^k)$, entonces $S_P(P(a),E) = P(S_P(a,E))$.

Mirando este resultado desde la óptica de álgebras de Lie, tenemos que la n–upla a genera un álgebra conmutativa, isomorfa a $\mathbf{C}^n$, además $U(\mathbf{C}^n) = P_n$. Por otra parte, dada un álgebra de Lie resoluble, y (E,φ) una representacií continua a derecha de L, podemos considerar al objeto $S_P(L,E)$, contenido en L^*, y el álgebra $U(L)$ generaliza a P_n al caso resoluble. Esta álgebra actúa sobre $L^{2^\perp}$ de la siguiente forma: $P\,.\,f = \mathcal{E}(f)(P)$, donde $\mathcal{E}(f)$ denota a la aumentación de $U(L)$ definida sobre $\mathbf{C}$ a través de f, sección I-B. Notar que si fijamos f en $L^{2^\perp}$, el morfismo anterior resulta una aplicación de anillos de $U(L)$ en $\mathbf{C}$, que juega un papel análogo a la especialización del álgebra de polinomios.

Como $S_P(L,E)$ está contenido en $L^{2^\perp}$, podemos considerar el objeto $P(S_P(L,E))$, con P en $U(L)$. Pero lamentablemente, si el álgebra no es conmutativa, en general no tenemos la propiedad de la aplicación espectral.

Proposición 65. Sea G_2 el álgebra resoluble de dimensión 2 que verifica la relación $[x,y] = y$, con $G_2 = \mathbf{C}(y) \oplus \mathbf{C}(x)$. Consideremos $E = \mathbf{C}^2$ y las matrices $a = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces $C(b) \oplus C(a)$ define en $\mathcal{L}(\mathbf{C}^2)$, mediante la inclusión, una representación continua a derecha de G_2 en $\mathcal{L}(E)^{\mathrm{op}}$. Sea P en $U(L)$ el elemento $P(y,x) = x$. Entonces $PS_P(E,(y,x)) \neq S_P(E,P(y,x))$.

Demostración. Por los cálculos realizados en la proposición 41, sabemos que a y b definen un álgebra isomorfa a G_2 y que es una subálgebra de $\mathcal{L}(E)^{\mathrm{op}}$. Además $S_P(E,(y,x)) = \{0\} \times \left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$. Entonces $P(S_P(E,(y,x)) = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$ y $S_P(E, P(y,x)) = S_P(E,a) = \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$. Claramente

$$P(S_P(E(y,x))) \neq S_P(E, P(y,x))$$

Ahora nos ocuparemos del cálculo funcional holomorfo. Habiendo llegado a este punto, uno se enfrenta al problema de definir que es una función holomorfa de variables no conmutativas. Aquí daremos una que coincida con la usual en el caso conmutativo.

Hemos visto a lo largo de la definición de espectro, y de sus propiedades básicas, que el álgebra $U(L)$ hace las veces de los polinomios en n–variables, por otra parte, el completado de este último espacio, según cierta familia de seminormas, nos brinda las álgebras de funciones holomorfas, de aquí que procedamos como sigue.

Sea L un álgebra de Lie resoluble, y sea $\{x_i\}$ una base de L de tal forma que la sucesión de espacios L_j ($L_j = \langle x_i \rangle_{1 \leq i \leq j}$) defina una sucesión de Jordan Hölder de L. Sea $U(L)$ el álgebra envolvente de L y consideremos la base definida por $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ según el teorema 5, sea $r = (r_i)_{1 \leq i \leq n}$ una n–upla de números reales positivos y designemos con α un multiíndice de números enteros negativos $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Definición 10. El conjunto de series formales $\Sigma a_\alpha X^\alpha$, con a_α en $\mathbf{C}$ que satisfacen $\Sigma |a_\alpha| r^\alpha <$ para todo $r' < r$ ($r'_i < r_i$, $1 \leq i \leq n$), constituye el completado de $U(L)$ en las familias de seminormas $\|\ \ \|_{r'}$, $\|x\|_{r'} = \Sigma |a_\alpha| r'^\alpha$ y se lo notará $(U(L), r)$.

Es evidente que, cuando L es conmutativa, obtenemos las funciones holomorfas de un polidisco.

Proposición 66. Dada un álgebra de Lie resoluble L, y r una n–upla de números reales positivos, el espacio $(\overline{U(L)}, r)$ es un espacio nuclear de Fréchet.

Demostración. Para ver que es de Fréchet, se procede por definición, y mediante un argumento clásico se prueba dicha propiedad.

Para ver que es nuclear, procederemos por definición. Sean r_1 y r_2 dos n–uplas de números complejos, las seminormas asociadas $\| \|_{r_1}$ y $\| \|_{r_2}$ verifican $\| \|_1 \leq \| \|_2$ si y sólo si $r_1 \leq r_2$ $(r_1^i \leq r_2^i \ 1 \leq i \leq n)$. Según la definición 3 del Capítulo I, $(\overline{U(L)}, r)$ será nuclear si dado $r_1 < r$ existe otro r_2 que verifica $r_1 < r_2 < r$ y tal que la aplicación natural de $\overline{E} / \ker \| \|_{r_2}$ en $\overline{E} / \ker \| \|_{r_1}$ sea nuclear.

Sea r_1 menor que r, como nuestras seminormas, son en realidad normas, y el espacio $\overline{U(L)}$ es completo con respecto a cualquier $\| \|_{r_1}$ prefijado, nos basta ver que existe r_2 con las propiedades anteriores tal que

$$1 : (\overline{U(L)}, \| \|_{r_2}) \to (\overline{U(L)}, \| \|_{r_1})$$

es nuclear, donde 1 designa la identidad. Notar que al ser $\| \|_{r_1} \leq \| \|_{r_2}$ la aplicación anterior es continua.

Sea $X = \Sigma a_\alpha x^\alpha$ un elemento de $U(L)$ y escribamoslo de la siguiente forma:

$$X = \sum \frac{r_1^\alpha}{r_2^\alpha} (a_\alpha r_2^\alpha) \frac{X^\alpha}{r_1^\alpha}$$

La sucesión $\left\{ \dfrac{x^\alpha}{r_1^\alpha} \right\}$ es una familia de elementos de la bola unitaria de $(\overline{U(L)}, \| \|_{r_1})$.

Sea (f_α) la siguiente sucesión de funcionales de $(U(L), \| \|_{r_2})$ definida por $f_\alpha(x) = a_\alpha r_2^\alpha$. Es claro que cada una es lineal, además

$$\|f_\alpha(x)\| \leq \sum |a_\alpha| r_2^\alpha = \|x\|_{r_2} \ ,$$

luego $\|f_\alpha\| \leq 1$.

En consecuencia, si probamos que $\sum \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^\alpha$ es finito cuando $r_1 < r_2$, tendremos que la aplicacińn anterior es nuclear y se habrá probádo la proposición.

Pero $\sum \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^\alpha = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \dfrac{r_1^i}{r_2^i}\right)^{-1}$, como puede verse por inducción.

A pesar de que estos conjuntos generalizan las funciones holomorfas, carecen de una de sus propiedades más importantes: no constituyen álgebras topológicas, pues en general las seminormas que definen la topología no son submultiplicativas. Por ejemplo, si $L = G_2$, el álgebra resoluble generada por x_1 y x_2, satisfaciendo $[x_2, x_1] = x_1$, en $U(L)$ esto se traduce por $x_2 x_1 = x_1 x_2 + x_1$. Luego $\|x_2 x_1\|_r = \|x_1 + x_1 x_2\|_r = r_1 + r_1 r_2 > \|x_1\|_r \|x_2\|_r = r_1 r_2$.

No obstante, preservan la siguiente propiedad:

Proposición 67. Sean L_1 y L_2 dos álgebras de Lie resolubles de dimensión n y m respectivamente. Sea r_1 (respectivamente r_2) una n–upla (respectivamente, una m–upla) de números complejos y sea $L_1 \times L_2$ el álgebra de Lie que posee por espacio subyacente al producto de L_1 y L_2, y como operación $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2])$. Entonces

$$(\overline{U(L)}, r_1)\overline{\otimes}(\overline{U(L_2)}, r_2) \cong (\overline{U(L_1)}, r_1)\widehat{\otimes}(\overline{U(L_2)}, r_2) \cong (\overline{U(L_1 \times L_2)}, (r_1, r_2))$$

Demostración: Como todos los espacios considerados son Fréchet, por lo visto en la proposición 28 de la sección I.I, la primera igualdad se verifica. Probemos que $(\overline{U(L_1)}, r_1)\widehat{\otimes}(\overline{U(L_2)}, r_2) \cong (\overline{U(L_1 \times L_2)}, (r_1, r_2))$. Para esto veremos que este último espacio satisface la propiedad universal del producto tensorial topológico en la categoría de espacios de Fréchet. Notar que si tomamos en $L_1(L_2)$ una base con las propiedades requeridas para definir $(\overline{U(L_1)}, r_1)$ $((\overline{U(L_2)}, r_2))$, automáticamente por la estructura de $U(L_1 \times L_2)$, la base $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ de L_1 $(\{y_j\}_{1\leq j\leq m}$ de $L_2)$ brinda una base de $L_1 \times L_2 : \{(x_i, 0)_{1\leq i\leq n}, (0, y_j)_{1\leq j\leq m}\}$ que satisface los requisitos para considerar el espacio $(\overline{U(L_1 \times L_2)}, (r_1, r_2))$.

Sabemos que $U(L_1) \otimes U(L_2) \cong U(L_1 \times L_2)$ ([3], XIII,1.2). Sea ϕ la forma bilineal definida por

$$\begin{aligned}
&\phi : (\overline{U(L)}, r_1) \times (\overline{U(L_2)}, r_2) \to (\overline{U(L_1 \times L_2)}, (r_1, r_2)) \\
&\phi(\Sigma\, a_\alpha x^\alpha,\ \Sigma\, b_\beta x^\beta) = \Sigma\, a_\alpha\, b_\beta\, x^\alpha\, y^\beta\ ,
\end{aligned}$$

por el resultado anterior, deducimos que $\phi(U(L_1), U(L_2)) = U(L_1 \times L_2)$, además

$$\begin{aligned}
&\|\Sigma\, a_\alpha b_\beta\, x^\alpha y^\beta\|_{r_1 r_2} = \Sigma |a_\alpha b_\beta| r_1^\alpha r_2^\beta = \\
&= (\Sigma |a_\alpha| r_1^\alpha)(\Sigma |b_\beta| r_2^\beta < \infty
\end{aligned}$$

Luego ϕ es una aplicación bilineal conjuntamente continua, con imagen densa.

Probemos la propiedad universal que debe satisfacer $\widehat{\otimes}$.

Sea (G, ϕ) un espacio de Fréchet y una forma bilineal continua de $(\overline{U(L_1)}, r_1)\times(\overline{U(L_2)}, r_2)$ en G. Se busca una aplicación lineal y continua de $(\overline{U(L_1 \times L_2)}, (r_1, r_2))$ en G tal que $h \circ \phi = \varphi$.

Sea h la siguiente aplicación definida en $U(L_1 \times L_2),(r_1,r_2))$ $h(x^\alpha, y^\beta) = \psi(x^\alpha, y^\beta)$, notar que por ([3], XIII,1.2) h se extiende a todo $U(L_1 \times L_2)$. Sea P una seminorma continua en G, y sean $r_1 r_2$ tales que

$$\|\varphi(x,y)\|_P \leq M\|x\|_{r_1}\|y\|_{r_2}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\|h(\Sigma\, a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta)\|_P &\leq \Sigma|a_{\alpha\beta}|\|h(x^\alpha y^\beta)\|_P \\ &= \Sigma|a_{\alpha\beta}|M\|x^\alpha\|_{r_1}\|y^\beta\|_{r_2} = M\|\Sigma\, a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta\|_{(r_1,r_2)}\end{aligned}$$

Luego h es una aplicación uniformemente continua, de aquí que existe una única aplicación $\overline{h}$, extensión uniformemente continua de $ha(\overline{U(L_1 \times L_2)},(r_1 r_2))$. Pero $h \circ \phi = \psi$ en $U(L_1 \times L_2)$. Por densidad y continuidad resulta que $\overline{h} \circ \phi = \psi$ en $(\overline{U(L_1)}, r_1) \times (\overline{U(L_2)}, r_2)$. Luego $\overline{h}$ es el morfismo buscado, el cual nos asegura la propiedad universal del producto tensorial proyectivo, con lo cual se termina la prueba.

Ocupémonos ahora del cálculo funcional holomorfo, como en el caso conmutativo la propiedad de la aplicación espectral es consecuencia del cálculo, al no verificarse ella ni para elementos de $U(L)$, no es extraño que no podamos obtener, en el caso no conmutativo, un cálculo funcional holomorfo.

En primer término, veamos la siguiente proposición:

Proposición 68. Sea L un álgebra de Lie resoluble y r una n-upla de números reales positivos. Sean $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$, elementos que definen una base de L, los cuales satisfacen las condiciones necesarias para definir $(\overline{U(L)}, r)$. Sea (E,φ) una representación continua a derecha de L en el espacio de Banach E. Entonces si $\|\varphi(x_i)\| \leq r_i$, la acción de $U(L)$ se extiende continuamente a $(\overline{U(L)}, r)$.

Demostración. Sea $X = \Sigma\, a_\alpha x^\alpha$ con $\Sigma\,|a_\alpha|\, r'^\alpha < \infty$ si $r' < r$.

Definamos $\overline{\varphi}(x) = \Sigma\, a_\alpha\, \varphi(x)^\alpha$ como $\|\overline{\varphi}(x)\| \leq \Sigma\,(a_\alpha)\|\varphi(x)\|^\alpha < \Sigma\,|a_\alpha| r_1^\alpha < \infty$, con $\max\|\varphi(x_0)\| < r_1 < r$, resulta que la aplicación $\overline{\varphi}$ es un morfismo uniformemente continuo entre $(\overline{U(L)}, r)$ y $\mathcal{L}(E)$, que extiende a φ.

De aquí veremos la ausencia de cálculo funcional holomorfo para estos espacios. Sabemos que en el caso conmutativo, esto último se puede expresar como la extensión de la acción de P_n sobre el espacio E a ciertas álgebras de funciones holomorfas. Más aún, estas últimas están clasificadas de la siguiente forma: Sea U un dominio de holomorfía de $\mathbf{C}^n$, la acción de P_n en E se extiende a $\mathbf{O}(U)$ si y sólo si $U \supset S_P(E)$.

En el caso no conmutativo, hemos visto que la acción se extiende cada vez que las normas de los operadores están acotadas por un multiradio. No obstante, como veremos enseguida, puede haber una extensión, sin estar contenido el espectro en un conjunto de la forma $\prod_{i=1}^{n} B[0, r_i]$, lo cual muestra que se pierde la anterior clasificación y en consecuencia el cálculo funcional holomorfo.

Retornemos al ejemplo del Capítulo II, allí L era G_2, y calculamos $S_P(\mathbf{C}^2, (b, a))$, donde b y a representan dos matrices en C^2, tales que generan un álgebra isomorfa de G_2.

Además $\|a\| = \dfrac{1}{2}$ y $S_P(\mathbf{C}^2, (b, a)) = \{0\} \times \left\{\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right\}$. Sean (r_1, r_2) tal que $r_1 > \|b\|$ y $\dfrac{1}{2} < r_2 < \dfrac{3}{2}$. Entonces, la acción de $U(G_2)$ se extiende a $(\overline{U(G_2)}, (r_1, r_2))$, pero $S_P(\mathbf{C}^2, (b, a))$ no está contenido en $B[0, r_1] \times B[0, r_2]$.

Del hecho anterior, sabemos que para la generalización natural de las funciones holomorfas de un polidisco no podemos hablar de un cálculo funcional holomorfo. Pero estos conjuntos tienen el inconveniente de no ser, en general, álgebras topológicas de donde deducimos que en rigor no se puede hablar de un cálculo funcional holomorfo para ellas.

Ahora nos ocuparemos de una familia de álgebras topológicas, que poseen el álgebra universal como subconjunto denso y que generalizan en un sentido más apropiado a las funciones holomorfas de un polidisco. No obstante, tampoco para ellas se tendrá un cálculo funcional holomorfo, como en el caso clásico, pues sucede un hecho similar al del caso anterior.

Sea $r = (r_i)_{1 \le i \le n}$ una n-upla de números reales positivos y sea T el álgebra tensorial de $L : T = \oplus_{n \in N_0} T^n$, donde $T^n = L \otimes \otimes L$, ($n$ veces). Todo elemento de T es de la forma $x = \Sigma c_\sigma x^\sigma$, donde σ indica un conjunto de índices, los cuales verifican $1 \le \sigma_i \le n = \dim L$ y $x^\sigma = x_{\sigma_1} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma_t}$. Sea $P_{r'}$ la seminorma $(r' < r)$

$$P_{r'}(\Sigma c_\sigma x^\sigma) = \Sigma |c_\sigma| r'^\sigma$$

y sea $S(r)$ el subconjunto de series formales $\Sigma \lambda_\sigma x^\sigma$ que verifican

$$P_{r'}(\Sigma \lambda_\sigma x^\sigma) = \Sigma |\lambda_\sigma| r'^\sigma < \infty$$

Entonces $S(r)$ es un álgebra de Fréchet que además es un álgebra topológica con producto conjuntamente continuo, y cuya topología viene definida por una sucesión de seminormas submultiplicativas. Más aún, en dicha topología $\overline{T} = S(r)$ ([12],6).

Sea I el ideal bilátero generado por $xy - yx - [x,y]$ en T. Entonces $\overline{I}$ es un ideal bilátero en $S(r)$ y en consecuencia podemos considerar el álgebra de Fréchet cociente $S(r)/\overline{I}$, con la topología cociente.

Como la inclusión i, de T en $S(r)$ manda I en $\overline{I}$, tenemos una aplicación continua $\tilde{i}$, de $U(L)$ en $S(r)/\overline{I}$, más aún

Proposición 69. En las condiciones anteriores, $\tilde{i}$ es una aplicación inyectiva de imagen densa.

Demostración. Como T es denso en $S(r)$, resulta que $\tilde{i}$ posee imagen densa. Para ver que $\tilde{i}$ es inyectiva usaremos el siguiente resultado [5]:

Dado T en $U(L)$, T no nulo, existe una representación φ_T de $U(L)$ en un espacio vectorial complejo de dimensión finita V_T, tal que

$$\varphi_T(T) \neq 0$$

Sea $\| \ \|$ una norma en $\mathrm{End}(V)$ tal que $\|AB\| \leq \|A\| \ \|B\|$, con A y B elementos de $\mathrm{End}(V)$. Como φ_T es un morfismo de álgebras de Lie entre L y $\mathrm{End}(V_T)$, se extiende a un morfismo de álgebras asociativas $\widetilde{\varphi}_T$ en End V_T tal que $\widetilde{\varphi}_T(I) = 0$.

Dado r, sea S un número real positivo menor que $\min(r_i)_{1\leq i\leq n}$, y sea M en $R_{>0}$ tal que $M\|\widetilde{\varphi}_T(x_i)\| \leq S$, para todo $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ base de L.

Consideremos la representación de $U(L)$ en End V_T definida por $\phi_T = M\varphi_T$. ϕ_T verifica que $\phi_T(t) \neq 0$ y el correspondiente morfismo de álgebras asociativas $\widetilde{\phi}_T$ satisface $\widetilde{\phi}_T(I) = 0$.

Sea x en T, como $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ es una base de L, x puede ser escrito en la forma $x =$

$\Sigma\, c_\sigma x^\sigma$, con σ la familia de índices ya descripta. Entonces

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\phi}_T(x)\| &\leq \Sigma\, |c_\sigma|\, \|\widetilde{\phi}_T(x^\sigma)\| \\ &\leq \Sigma\, |c_\sigma|\, \|\widetilde{\phi}_T(x)\|^\sigma \leq \Sigma\, |c_\sigma|\, S^{(\sigma)} \\ &\leq \Sigma\, |c_\sigma|\, \rho^\sigma \leq \|x\|_\rho \end{aligned}$$

con $\rho = (\rho_i)_{1 \leq i \leq n}$ una n–upla de números complejos que verifican $S < \rho_i < r_{1}\ {}_{1 \leq i \leq n}$.

Luego $\widetilde{\phi}_T$ puede ser extendido a un morfismo de $S(r)$ en End V_T y como $\widetilde{\phi}_T(I) = 0$, podemos considerar el morfismo inducido en $S(r)/\overline{I}$, el cual es uniformemente continuo. Llamemos h a la extensión de $\widetilde{\phi}_T$ a $S(r)$ y $\overline{h}$ al morfismo inducido en $S(r)/\overline{I}$. Entonces $\overline{h}\,\Pi_{S(r)/\overline{I}} = h$, donde $\Pi_{S(r)/\overline{I}}$ denota la aplicación cociente de $S(r)$ sobre $S(r)/\overline{I}$. Pero la aplicación ϕ_T puede ser factorizada de la siguiente forma: $\phi_T = \overline{h} \circ \widetilde{\imath}$, como $\phi_T(T) \neq 0$, $\widetilde{\imath}(T) \neq 0$, y en consecuencia $\widetilde{\imath}$ es inyectiva.

Con esta proposición hemos construido una familia de álgebras de Fréchet que contienen a $U(L)$ como subálgebra densa. Más aún, estas álgebras generalizan las funciones holomorfas de un polidisco. Ahora veremos nuevamente la carencia de un cálculo funcional holomorfo.

Proposición 70. Sea L un álgebra de Lie resoluble y (E, φ) una representación continua a derecha de L en E. Entonces si $\|\varphi(x_i)\| \leq r_i$ $(1 \leq i \leq n)$, la acción de $U(L)$ se extiende continuamente a un morfismo de $S(r)/\overline{I}$ en $\mathcal{L}(E)^{\mathrm{op}}$.

Demostración. Dado φ, morfismo de álgebras de Lie entre L y $\mathcal{L}(E)^{\mathrm{op}}$, consideremos su extensión a T. Sea $\widetilde{\varphi}$ dicha aplicación, $\widetilde{\varphi}$ verifica

$$\begin{aligned} &\widetilde{\varphi} : T \to \mathcal{L}(E) \\ &\widetilde{\varphi}(I) = 0\,, \end{aligned}$$

y si escribimos los elementos de T en una base generada por una de $L\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$, tenemos que todo x en T se escribe: $x = \Sigma\, c_\alpha x^\alpha$, con $x^\alpha = x_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes x_{\alpha_s}$, entonces $\widetilde{\varphi}(x) = \Sigma\, c_\alpha \varphi(x^\alpha)$, de donde

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\varphi}(x)\| &\leq \Sigma |c_\alpha|\, \|\varphi(x_\alpha\| \leq \\ &\leq \Sigma |c_\alpha|\, \|\varphi(x)\|^\alpha \leq \Sigma |c_\alpha| r_1^\alpha \end{aligned}$$

con $\max\{\|\varphi(x_i)\|\} < r_1 < r$. Luego este morfismo se puede extender con continuidad a todo $S(r)$. Llamemos a dicha extensión ϕ. Como $\tilde{\varphi}(I) = 0$, resulta que $\phi(\overline{I}) = 0$. De aquí obtenemos una aplicación continua de $S(r)/\overline{I}$ en $\mathcal{L}(E)$, denotada $\overline{\phi}$.

Pero $\overline{\phi}|U(L) = \overline{\phi} \circ \tilde{\imath}$, además, $\tilde{\overline{\phi}}\,\Pi_{S(r)/I} = \phi$, de donde $\overline{\phi}\,\Pi_{S(r)/I}|_T = \phi|_T = \tilde{\varphi}$.

Pero $\Pi_{S(r)/I} = \tilde{\imath} \circ \Pi_{T,U(L)}$, donde la última aplicación denota el morfismo natural de T en $U(L)$. Luego

$$\tilde{\varphi} = \overline{\phi} \circ \tilde{\imath} \circ \Pi_{T,U(L)} = \phi\, \Pi_{T,U(L)}$$

De esto vemos que $\overline{\phi} \circ \tilde{\imath}$ es el único morfismo de álgebras que extiende la representación φ a $U(L)$, entonces la función $\overline{\phi}$ es una extensión continua de la acción de $U(L)$ en E a $S(r)/\overline{I}$. De aquí se deduce la proposición.

Análogamente a lo ya realisado, tomando el álgebra G_2 con la representación recientemente explicitada, tenemos un ejemplo de una extensión de la acción de $U(G_2)$ a las álgebras $S(r)/\overline{I}$, que no verifican contener al espectro en el polidisco definido por r. Nuevamente obtenemos que no se cumple la propiedad característica del cálculo funcional holomorfo para estas álgebras de Fréchet, que poseen a $U(L)$ como subálgebras densas.

Por último, veremos que la construcción anterior representa un caso particular de las álgebras topológicas que son completados de $U(L)$. Más precisamente:

Proposición 71. Sea L un álgebra de Lie resoluble, sea $U(L)$ su álgebra envolvente y sea $(\varphi_n)_{n\in N}$ una familia de seminormas submultiplicativas tal que $(U(L),(\varphi_n)_{n\in N})$ sea un álgebra topológica. Si $(A,(\overline{\varphi}_n)_{n\in N})$ es un álgebra de Fréchet que es un completado de $(U(L),(\varphi_n)_{n\in N})$, entonces existe una familia de seminormas $(\varphi'_n)_{n\in N}$ taql que dicha familia define una estructura de álgebra topológica en el álgebra tensorial de L, T, con la propiedad que A es isomorfa a $\overline{T}/\overline{I}$, donde $\overline{T}$ denota el completado de $(T,(\varphi'_n)_{n\in N})$ e I el ideal generado por los elementos $(x\otimes y - y\otimes x - [x,y])$.

Antes de realizar la demostración observemos que $S(r) = \overline{T}$ y $A = S(r)/\overline{I}$ (proposición 69).

<u>Demostración</u>. Sea j la inyección continua de $(U(L),(\varphi_n)_{n\in N})$ en $(A,(\overline{\varphi}_n)_{n\in N})$. Entonces $\overline{\varphi}_n\, j = \varphi_n$ $(n \in N)$, y además $\overline{\operatorname{Im} j} = A$.

17. Warner, F., Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Scott, Foresman and Co., 1970.

Sea Π el morfismo cociente de T en $U(L)$. Sea $\varphi'_n = \varphi_n \circ \Pi$. Entonces $(T, (\varphi'_n)_{n\in N})$ es un álgebra topológica y Π es una aplicación continua. Sea $(\overline{T}, (\overline{\varphi_n \circ \Pi})_{n\in N})$ el completado de $(T, (\varphi'_n)_{n\in N})$. Como A es completa y $j \circ \Pi$ es una aplicación uniformemente continua, resulta que existe una única extensión, $\overline{j \circ \Pi}$, de $j \circ \Pi$ a $\overline{T}$. Como el conjunto $\ker \overline{j \circ \Pi}$ es un ideal bilátero cerrado de $\overline{T}$, podemos considerar el álgebra de Fréchet $\overline{T}/\ker(\overline{j \circ \Pi})$ y el morfismo cociente $\widetilde{\overline{j \circ \Pi}}$, inducido por $\overline{j \circ \Pi}$.

Es claro que $\widetilde{\overline{j \circ \Pi}}$ es inyectiva y que $\operatorname{Im} \widetilde{\overline{j \circ \Pi}} = \operatorname{Im} \overline{j \circ \Pi}$. Veamos que $\operatorname{Im} \overline{j \circ \Pi} = A$.

Sea a en A, sabemos que existe una sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in N}$ en $(U(L), (\varphi_n)_{n\in N})$ tal que $j(x_n)$ tiende a a en A. Sea $(y_n)_{n\in N}$ una sucesión de elementos en T tal que $\Pi(y_n) = x_n$. Como $\varphi_i \Pi(y_m - y_n) = \varphi_i(x_m - x_n) = \varphi'_i(y_m - y_n)$, resulta que $(y_n)_{n\in N}$ es una sucesión de Cauchy en $(T, (\varphi'_n)_{n\in N})$. Sea y en $(\overline{T}, (\overline{\varphi'}_n)_{n\in N})$ con la propiedad que y_n tiende a y, luego

$$a = \lim_{n\to\infty} y(x_n) = \lim_{n\to\infty} j \circ \Pi(y_n) = \overline{j \circ \Pi}(y) .$$

En consecuencia, $\overline{j \circ \Pi}$ es suryectiva. Como $\overline{T}/\ker \overline{j \circ \Pi}$ y A son álgebras de Fréchet, se tiene que $\widetilde{\overline{j \circ \Pi}}$ es un isomorfismo topológico.

A fin de completar la prueba, basta ver que $\ker \overline{j \circ \Pi} = \overline{I}$.

Es evidente que $\ker \overline{j \circ \Pi}$ contiene a $\overline{I}$. Por otra parte, como $I = \ker \Pi$, y Π es continua, se obtiene que I es cerrado, y en consecuencia completo, luego $I = \overline{I}$ en $\overline{T}$.

Sea X en $\ker \overline{j \circ \Pi}$, si X está en T, entonces $\overline{j \circ \Pi}(x) = j \circ \Pi(x)$. Como j es injectiva, resulta $\Pi(x) = 0$, luego X pertenece a I.

Sea X en $\ker \overline{j \circ \Pi}$, X en $\overline{T} - T$. Sea $(X_n)_{n\in N}$ una sucesión de Cauchy en T tal que $(X_n)_{n\in N}$ tiende a X. Como $0 = \overline{j\Pi(x)} = \lim_{n\to\infty} j \circ \Pi(x_n)$, resulta que $\Pi(x_n)$ tiende a "0" en $U(L)$, pues $\varphi_k(\Pi(x_n)) = \overline{\varphi}_k \circ j\,\Pi(x_n)$. Pero $\varphi_k\,\Pi(x_n) = \varphi'_k(x_n)$, luego x_n tiende a "0" en T, absurdo, pues X no pertenece a T, de aquí se concluye la prueba.

BIBLIOGRAFIA

1. Bernat, P., Conze, N., Vergne, M., et al.: Représentations des Groupes de Lie Résolubles, Monographies de la Societé Mathématique de France No. 4, Dunod, Paris, 1972.
2. Bourbaki, N., Eléments de Mathématique, Groupes et Algèbres de Lie, Chaptre I, Algèbres de Lie, Fasc. XXVI, Hermann, Paris, 1960.
3. Cartan, H., Eilenberg, S., Homological Algebra. Princeton University Press, 1956.
4. Dixmier, J., Enveloping Algebras, North-Holland Publ. Co., 1977.
5. Haris-Chandra, On Representations of Lie Algebras, Ann. of Math. 50 (1949), 900-915.
6. Mac Lane, S., Homology, Springer-Verlag, 1963.
7. Schaëfer, Topological Vector Spaces, MacMillan Co., New York, 1966.
8. Serre, J.P., Lie Algebras and Lie Groups. Lectures given at Harvard University, 1964.
9. Taylor, J.F., A joint spectrum for several commuting operators. J. Funct. Anal. 6 (1976), 172-191.
10. Taylor, J.F., The analytic-functional calculus for several commuting operators, Acta Math. 125 (1970), 1-38.
11. Taylor, J.F., Homology and Cohomology for Topological Algebras. Advances in Math. 9 (1972), 137-182.
12. Taylor, J.F., A general framework for a multi-operator functional calculus. Advances in Math. 9 (1972), 137-182.
13. Taylor, J.F., Functions of several non-commuting variables, Bulletin of A.M.S., Vol. 79, No. 1, 1973.
14. Treves, F., Topological vector spaces, distributions and kernels, Academic Press, New York, 1967.
15. Varadarajan, Lie groupes, Lie algebras and their representations, Prentice-Hall,
16. Vasilescu, F.M., Stability of the index of a complex of Banach spaces. J. Operator Theory 2 (1979), 247-275.

17. Warner, F., Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Scott, Foresman and Co., 1970.