Geometría de órbitas unitarias

Andruchow, Esteban

1989

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Geometría de Orbitas Unitarias

por

ESTEBAN ANDRUCHOW

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Gustavo Corach

LUGAR DE TRABAJO

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

INTRODUCCION.

El propósito de este trabajo es estudiar las propiedades geométricas de las órbitas unitarias de elementos de un álgebra C^*. El principal resultado caracteriza los operadores $B \in L(H)$ para los cuales la órbita unitaria $\mathcal{U}(B)$ es subvariedad diferenciable de $L(H)$, y se da una condición suficiente para que la órbita de un elemento tenga estructura diferenciable, para C^*-algebras arbitrarias.

En los casos en que esto sucede, se observa además que la acción natural del grupo unitario sobre la órbita define una estructura de fibrado principal. En los capítulos finales se introduce una conexión en dicho fibrado, se estudian algunos de sus invariantes, así como de la conexión lineal inducida sobre la órbita: levantamientos horizontales, 1-forma, transporte paralelo, geodésicas, tensores de torsión y curvatura, exponencial, etc.

El desarrollo está inspirado en el estudio de la geometría de sistemas de proyectores realizado por Corach, Porta y Recht en [4] y [5]. Además, guarda cierto paralelo con la exposición hecha por Kowalski en [11], capítulo II, para el caso de dimensión finita.

El trabajo está organizado en once secciones y una nota preliminar. En la nota preliminar se enuncian las nociones básicas requeridas para la lectura del trabajo.

Las secciones 1, 2, 3, 7 y 8 contienen los conceptos básicos sobre los que se estructura el trabajo, así como los resultados conocidos referidos al tema en cuestión. Casi todo el material allí contenido es clásico dentro del análisis funcional y la geometría diferencial. He querido hacer una exposición elemental del mismo, incluyendo varias demostraciones de teoremas bien conocidos.

Los resultados de las secciones 4 y 5 son propios, si bien los teoremas principales de ambas secciones contienen implicaciones que ya eran conocidas.

Las secciones 6, 9, 10 y 11 contienen resultados que a mi juicio son enteramente nuevos.

Cabe aclarar que en el curso de la exposición se toca el tema de la geometría de las órbitas de similaridad conjunta de n-uplas en general, y del par (b, b^*) en particular (b es un elemento de una C^*-álgebra). Esto se hizo ya que las mismas guardan estrecha relación con las órbitas unitarias.

Quiero agradecer a mi director Gustavo Corach, por el tiempo, la dedicación y el afecto con que guió a su alumno. También a algunos matemáticos con cuyo contacto fui enriquecido y favorecido, ellos son Demetrio Stojanoff, Lázaro Recht, Domingo Herrero, Angel Larotonda *y Lawrence Fialkow, entre otros. A mi novia y mi familia, por la paciencia con que me sostuvieron.*

INDICE.

PRELIMINARES.

Si H_1 y H_2 son dos espacios de Hilbert complejos, $L(H_1, H_2)$ denotará el espacio de Banach de todos los operadores lineales y acotados de H_1 en H_2. En el caso en que $H_1 = H_2 = H$, este espacio, que con la composición en un álgebra de Banach, se notará $L(H)$.

Uno de los conceptos que más se utilizará en este trabajo es el de C^*-álgebra. En esta exposición, una C^*-álgebra será una subálgebra de Banach de $L(H)$, que contiene a la identidad, y que además es cerrada para la adjunción. Existe otro concepto, en principio más amplio, de álgebra C^*, que no requiere de un espacio de Hilbert para su definición. No obstante, la noción aquí adoptada no importa ninguna restricción, ya que toda C^*-álgebra se representa fielmente como subálgebra de operadores sobre un espacio de Hilbert.

En principio, todos los espacios de Hilbert que aquí aparecen, son separables. El lector advertirá que esta restricción ya no será necesaria a partir de la sección 6.

Si $\mathcal{R}$ es un subconjunto de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$, con $C^*(\mathcal{R})$ denotaremos la C^* subálgebra de $\mathcal{A}$ generada por $\mathcal{R}$, esto es, la menor subálgebra que contiene a $\mathcal{R}$. Con $\mathcal{A}^{-1}$ denotaremos el grupo de elementos invertibles de $\mathcal{A}$, que es abierto en $\mathcal{A}$, y con $\mathcal{U}$ el grupo de elementos unitarios, que es un subgrupo cerrado de $\mathcal{A}^{-1}$. Un elemento $x \in \mathcal{A}$ se dice autoadjunto si $x^* = x$, y positivo, si es de la forma $x = y^*y$, para algún $y \in \mathcal{A}$.

Para la lectura de este trabajo son necesarias algunas nociones básicas sobre cálculo funcional holomorfo en un álgebra de Banach $\mathcal{B}$. Si denotamos con $\sigma(b) = \{\lambda \in \mathbf{C}$ $b - \lambda . 1 \notin \mathcal{B}^{-1}\}$ al espectro de $b \in \mathcal{B}$, el cálculo funcional holomorfo es una regla que a cada función holomorfa f definida en un entorno de $\sigma(b)$ a valores en $\mathbf{C}$, asocia un elemento de $\mathcal{B}$, que suele denotarse $f(b)$. Esta aplicación goza de diversas propiedades, entre ellas:

i) $f(b)$ conmuta con todo elemento que conmute con b.

ii) la función $f(z) = \lambda$ constante, se aplica en el elemento $\lambda . 1$, y la función idéntica $g(z) = z$, se aplica en b.

iii) Si f y g son funciones holomorfas en un entorno de $\sigma(b)$, entonces $fg(b) = f(b)g(b)$ y $(f+g)(b) = f(b) + g(b)$.

Esta propiedad junto con la anterior dicen que el cálculo funcional restringido a los polinomios es simplemente la especialización en b.

iv) $\sigma(f(b)) = f(\sigma(b))$.

v) Si g es una función holomorfa en un entorno de $\sigma(b)$ y f es otra función holomorfa en un entorno de $\sigma(g(b))$, entonces tiene sentido la expresión $f(g(b))$ y coincide con $(f \circ g)(b)$.

Si el álgebra en cuestión es una C^*-álgebra y el elemento b es normal ($bb^* = b^*b$), se puede extender el cálculo holomorfo a un cálculo continuo. Es decir, se obtiene una aplicación que a cada función continua en $\sigma(b)$, asocia el elemento $f(b)$, con propiedades análogas a las cinco enunciadas, más una adicional: $\bar{f}(b) = f(b)^*$. No entraremos en detalles sobre estos conceptos bien conocidos, que pueden ser consultados en cualquier libro de Análisis Funcional (por ejemplo Rudin [18]).

Por último, si el álgebra es $L(H)$ y $B \in L(H)$ es un operador normal, existe una noción análoga a los cálculos mencionados, que extiende la clase de funciones que pueden ser evaluadas en B al espacio (álgebra) de funciones borelianas y acotadas sobre $\sigma(B)$. Esta aplicación y alguna de sus consecuencias, es lo que configura el teorema espectral para un operador normal, tal es el nombre con que figura en la literatura.

Estas herramientas del análisis funcional tienen muchas y muy variadas aplicaciones. Citaremos dos de ellas.

La primera es la descomposición polar de elementos inversibles de una C^*-álgebra. Sea $x \in \mathcal{A}^{-1}$, x se puede descomponer de manera única como $x = up$, donde p es positivo y u es unitario. Para ello, basta considerar el elemento positivo (y por lo tanto normal) x^*x, cuyo espectro está contenido en el semieje positivo de los reales, y aplicarle la función continua $t \mapsto t^{1/2}$ $(t \geq 0)$. Es inmediato que $(x^*x)^{1/2}$ es positivo, además de inversible. Basta ver entonces que $u = x(x^*x)^{-1/2}$ es unitario:

$$u^*u = (x^*x)^{-1/2}\, x^*(x(x^*x)^{-1/2}) = (x^*x)^{-1/2}\, x^*x(x^*x)^{-1/2} = 1 \ ,$$

pues x^*x y $(x^*x)^{-1/2}$ conmutan. Análogamente se ve que $uu^* = 1$.

El cálculo funcional proporciona además una manera de construir proyectores e idempotentes. Llamaremos idempotente a un elemento x tal que $x^2 = x$, y proyector a un idempotente autoadjunto. Si $\lambda \in \mathbf{C}$ es un punto aislado en el espectro de $b \in \mathcal{B}$, existen abiertos U y V en $\mathbf{C}$ tales que $\lambda \in U$, $\sigma(b) \subset U \cup V$, $[\sigma(b) \setminus \{\lambda\}] \cap U = \phi$ y $U \cap V = \phi$. Si llamamos φ a la función que vale 1 en U y 0 en V, φ resulta holomorfa en un entorno de $\sigma(b)$. Como $\varphi . \varphi = \varphi$, $\varphi(b)$ es un idempotente, que se conoce con el nombre de idempotente espectral asociado a λ. Si el álgebra es una C^*- álgebra y el elemento b es normal, el idempotente $\varphi(b)$ es además autoadjunto.

La restricción de que $\lambda \in \sigma(b)$ sea aislado suele ser excesiva. Mas en el caso $\mathcal{B} = L(H)$

no es necesaria: si $B \in L(H)$ es normal y $\lambda \in \sigma(B)$, la función $\mathcal{X}_{\{\lambda\}}$ dada por

$$\mathcal{X}_{\{\lambda\}}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = \lambda \\ 0 & \text{si } z \neq \lambda \end{cases}, \quad \text{es medible y acotada en } \sigma(B),$$

con lo cual siempre tiene sentido hacer $\mathcal{X}_{\{\lambda\}}(B)$, que resulta por supuesto un proyector (el proyector espectral de B asociado a λ).

Hay fórmulas que mediante integrales permiten "calcular" los idempotentes y proyectores espectrales. Mas si bien dichas fórmulas revisten gran importancia en la teoría, son a menudo incómodas y casi siempre impracticables. No obstante hay casos en que dichos proyectores pueden obtenerse mediante simples fórmulas polinomiales.

Por ejemplo si $x \in \mathcal{B}$ es anulado por un polinomio p de raíces simples. En tal caso $\sigma(x) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_K\}$, donde los α_i son raíces de p (es decir, $\sigma(x)$ consta únicamente de puntos aislados). Si llamamos p_i al idempotente espectral asociado a α_i,

$$p_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j} .$$

Otra fórmula idéntica se tiene cuando x es un elemento normal de espectro finito en una C^*-álgebra (que por lo tanto resulta anulado también por un polinomio de raíces simples). Nótese que en ambos casos resulta

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i .$$

Esta última observación indujo a Corach, Porta y Recht en [4] y [5] a estudiar elementos algebraicos "de raíces simples" de un álgebra de Banach o una C^*-álgebra, refiriéndolos a un modelo universal (independiente de las raíces α_i) que denominaron espacios de sistemas de idempotentes y de sistemas de proyectores. Llamaremos sistema de n-idempotentes a una n-upla $(p_1, \ldots, p_n)$ de idempotentes con la propiedad de que $p_i p_j = 0$ si $i \neq j$, $p_i \neq 0$, y $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Análogamente se define un sistema de n proyectores. I_n y P_n denotan, respectivamente, los conjuntos de todos los sistemas de n idempotentes y n proyectores del álgebra.

Estos conjuntos, que tienen una estructura muy rica, se revelarán como de singular importancia para la presente exposición.

Una de las aplicaciones que tienen, es que permiten visualizar a los elementos del álgebra como matrices de $n \times n$. Dado $x \in \mathcal{B}$ y $(p_1, \ldots, p_n)$ un sistema de idempotentes, es claro que $\mathcal{B}$ se descompone como $\mathcal{B} = \bigoplus_{i,j} p_i \mathcal{B} p_j$, donde las coordenadas de x son $p_i x p_j$, $1 \leq i, j \leq n$. Podemos disponer estas coordenadas en forma de matriz de manera natural (la entrada (i, j) es el elemento $p_i x p_j$). Lo notable de esta representación es que respeta sumas y productos: si $x, y \in \mathcal{B}$, las matrices de $x + y$ y $x \, . \, y$ se obtienen sumando y multiplicando (con la suma y multiplicación usual de las matrices) las matrices de x e y. Es claro además que el 1 se representa con la matriz identidad, y que un elemento $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$ como los de más arriba, tiene matriz "diagonal", con los α_i en las entradas. Lo mismo sucede a todo elemento que conmute con los p_i.

Si el álgebra es $L(H)$ (o $L(X)$ donde X es un espacio de Banach), esta representación tiene un significado geométrico: el sistema de idempotentes corresponde a una descomposición del espacio $H = \bigoplus_{i=1}^{n} Rp_i$ (que es ortogonal si los p_i son proyectores), y las entradas en la matriz de un operador corresponden a las restricciones y correstricciones del operador a los subespacios Rp_i. Por supuesto, si $H = \mathbf{C}^n$, el sistema de proyectores no es otra cosa que una base y las matrices resultan matrices de transformaciones lineales en el sentido usual.

A lo largo del trabajo nos referiremos a menudo a las relaciones de similaridad y equivalencia unitaria entre elementos. Diremos que dos n-uplas $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{A}^n$ son similares si existe $g \in \mathcal{A}^{-1}$ tal que $x_i = g y_i g^{-1}$, $1 \leq i \leq n$, y unitariamente equivalentes si existe $u \in \mathcal{U}$ tal que $x_i = u y_i u^*$, $1 \leq i \leq n$. Dada una n-upla $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}^n$, llamaremos órbita de similaridad de $(x_1, \ldots, x_n)$ al conjunto

$$\mathcal{S}(x_1, \ldots, x_n) = \{(g x_1 g^{-1}, \ldots, g x_n g^{-1}) \in \mathcal{A}^n \, : \, g \in \mathcal{A}^{-1}\} \, ,$$

y órbita unitaria de $(x_1, \ldots, x_n)$ a

$$\mathcal{U}(x_1, \ldots, x_n) = \{(u x_1 u^*, \ldots, u x_n u^*) \in \mathcal{A}^n \, : \, u \in \mathcal{U}\} \, .$$

Para finalizar estas notas preliminares, me referiré a los que se conocen como elementos relativamente invertibles de un álgebra. Un elemento $x \in \mathcal{B}$ se dice relativamente invertible si existe $y \in \mathcal{B}$ tal que $xyx = x$. Ejemplos de relativamente invertibles son el 0, los invertibles y los idempotentes. Si $\mathcal{B} = L(H)$, el concepto equivale al de tener rango cerrado.

Si x es relativamente invertible, se puede encontrar un elemento $y \in \mathcal{B}$ tal que $xyx = x$ e $yxy = y$. Un tal y es una inversa relativa de x. Nótese que en tal caso, tanto xy como

yx son proyectores. Si el álgebra es un álgebra de operadores, una inversa relativa queda caracterizada por su rango. Además, xy es el idempotente cuyo rango es el rango de x y cuyo núcleo es el núcleo de y.

§ 1. SUBVARIEDADES DIFERENCIABLES EN ESPACIOS DE BANACH.

En esta sección se incluyen las definiciones y conceptos básicos de la geometría diferencial en dimensión infinita. La atención estará concentrada en las subvariedades de un espacio de Banach, con lo cual los espacios tangentes se identificarán con subespacios lineales cerrados y complementados del espacio de Banach en cuestión. Se omitirán las pruebas de las propiedades más conocidas, y se incluirán algunas de las que lo son menos. Las principales referencias a las que puede recurrir el lector son los libros de S. Lang, "Differentiable Manifolds" [12], de A. R. Larotonda, "Notas sobre Variedades Diferenciables" [13], y un artículo de I. Raeburn [17].

Definición 1.1

Sean E y F espacios de Banach complejos, U un abierto de E y $f : U \to F$ una función continua. Decimos que f es holomorfa en $x \in U$, si existe la derivada de Frèchet real de f, $df_x : E \to F$, $df_x(V) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tV)-f(x)}{t}$, y es una aplicación lineal, compleja y continua de E en F. Si f es holomorfa en todo x de U, decimos que f es analítica.

La función f es C^1 en U si para cada $v \in E$, existe la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial v} : U \to F$, dada por $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$, y es una función continua en U. Diremos que f es de clase C^k, $1 \leq k \leq \infty$, si tiene derivadas direccionales hasta el orden k y son todas continuas.

Un homeomorfismo $h : U \to U'$ entre dos abiertos U y U' de sendos espacios de Banach complejos es un difeomorfismo analítico si tanto h como h^{-1} son analíticas. De manera análoga se define difeomorfismo de clase C^k.

Definición 1.2

Sea E un espacio de Banach complejo y sea $X \subset E$. X es subvariedad analítica de E si para cada $x_0 \in X$, existen abiertos U y V de E, con $0 \in U$ y $x_0 \in V$, un difeomorfismo analítico $\varphi_{U,V}$ de U en V y espacios suplementarios complejos K y T, $K \oplus T = E$, tal que $\varphi_{U,V}(U \cap T) = V \cap X$.

Diremos que X es una subvariedad de clase C^k de E, si existen U, V, $\varphi_{U,V}$, K y T como en el párrafo anterior, con la salvedad de que $\varphi_{U,V}$ sea un difeomorfismo de clase C^k y los espacios K y T sean reales.

En cualquiera de los dos casos, llamaremos espacio tangente a X en $x_0 \in X$, al espacio vectorial

$$TX_{x_0} = \left\{ \left.\frac{d\alpha(t)}{dt}\right|_0 : \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X, \quad \alpha \text{ de clase } C^1 \text{ y } \alpha(0) = x_0 \right\} .$$

Definición 1.3

Sean $X \subset E$ e $Y \subset F$ dos subvariedades analíticas. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. La función f es analítica si para cada par de "entornos coordenados" $(\varphi_{U,V}, U, V)$ y $(\varphi_{U',V'}, U', V')$ de X e Y respectivamente, con $f(V) \subset V'$, resulta $\varphi_{U',V'^{-1}} f \varphi_{U,V} : U \to U'$ una aplicación analítica. De manera análoga se define el concepto de aplicación de clase C^k entre variedades de clase C^m $(m \geq k)$.

En cualquier caso, llamaremos diferencial de f en $x \in X$, a la aplicación lineal (compleja en el caso analítico, real en el caso de variedades de clase C^k) df_x dada por

$$df_x : TX_x \longrightarrow TY_{f(x)}, \quad df_x \left(\left.\frac{d}{dt}\alpha(t)\right|_0 \right) = \left.\frac{d}{dt} [f \circ \alpha(t)]\right|_0$$

Una aplicación formal de la regla de la cadena, permite probar que df_x está bien definida y, usando los entornos coordenados, que TX_x es un subespacio complementado de E (complejo o real según el tipo de subvariedad).

Teorema 1.4

Sean E y F espacios de Banach complejos, U un abierto de E y $f : U \to F$ analítica. Si existe $x_0 \in U$ tal que $df_{x_0} : E \to F$ es un isomorfismo, entonces existe un entorno V de x_0 tal que $f(V)$ es un entorno de $f(x_0)$ y además $f|_V : V \to f(V)$ es un difeomorfismo analítico.

Un resultado análogo se obtiene para funciones de clase C^k (ver [12]).

Definición 1.5

Sean $X \subset E$, $Y \subset F$ subvariedades analíticas y $f : X \to Y$ analítica. Decimos que f es una sumersión, si para cada $x \in X$ se verifica que:

i) ker df_x es un subespacio complementado de E

ii) $df_x : TX_x \to TY_{f(x)}$ es suryectiva.

Con las modificaciones pertinentes, se define sumersión de clase C^k.

Teorema 1.6

Sean $X \subset E$, $Y \subset F$ subvariedades y $f : X \to Y$ una sumersión. Entonces se verifica:

i) para cada $x \in X$, $f^{-1}(f(x))$ es una subvariedad de X

ii) para cada $x \in X$ existe un entorno U de $f(x)$ en Y y una aplicación $g_U : U \to X$ tal que $f \circ g_U = id_U$.

El resultado es válido tanto en el caso analítico como C^k, la aplicación g_U es analítica o C^k según el caso (ver [17]).

Definición 1.7

Sea $G \subset E$ un grupo topológico, que es subvariedad analítica (respectivamente C^k). Decimos que G es un grupo de Lie-Banach analítico (respectivamente C^k) si las aplicaciones

$$G \times G \longrightarrow G,\ (x, x') \longmapsto x \,.\, x' \quad \text{y}$$
$$G \longrightarrow G,\ x \longmapsto x^{-1}$$

(donde . es la operación del grupo) son analíticas (respectivamente C^k).

Ejemplos (de grupos de Lie-Banach)

i) Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach, $\mathcal{A}^{-1}$ el grupo de elementos invertibles de $\mathcal{A}$ es un grupo de Lie-Banach analítico. Es claro además que $T\mathcal{A}_1^{-1} = \mathcal{A}$.

ii) Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, $\mathcal{U}$ el grupo de elementos unitarios de $\mathcal{A}$, es un grupo de Lie-Banach de clase C^∞. Para ello, obsérvese que la aplicación exponencial de $\mathcal{A}_{ah} = \{a \in \mathcal{A} : a^* = -a\}$ en $\mathcal{U}$ define un difeomorfismo local de clase C^∞, con lo cual $T\mathcal{U}_1 = \mathcal{A}_{ah}$.

Definiciones 1.8

i) Sea $G \subset E$ un grupo de Lie-Banach y $X \subset F$ una subvariedad, ambos analíticos (resp. C^k), decimos que G actúa sobre X si existe una aplicación (acción) analítica (resp. C^k) $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g * x$, $g \in G$, $x \in X$ que verifica $g_1 * (g_2 * x) = (g_1 \cdot g_2) * x$ y $1 * x = x$, $g_i \in G$, $x \in X$. La acción definida es transitiva si para cada par de puntos x

e y en X, existe $g \in G$ tal que $x = g * y$.

ii) Supongamos que G actúa transitivamente sobre X (de manera analítica o C^k). Si existe $x_0 \in X$ tal que $\pi_{x_0} : G \to X$, $\pi_{x_0}(g) = g * x_0$, es una sumersión, decimos entonces que X es un espacio homogéneo de Banach bajo la acción de G (analítico o C^k según el caso).

Obsérvese que si π_{x_0} es una sumersión, entonces también lo es π_x, para cualquier $x \in X$. En particular resulta que es subgrupo $\{g \in G : \pi_x(g) = x\} = G_x \subset G$ es una subvariedad de E, es decir, es un subgrupo de Lie-Banach de G.

Sea ahora G un grupo de Lie-Banach (analítico o C^k), que actúa sobre un espacio de Banach complejo F. Fijemos $x_o \in F$ y llamemos $X = \pi_{x_0}(G)$ la órbita de x_0. Estudiaremos de ahora en más las condiciones que la acción debe satisfacer para que la órbita X sea una subvariedad de F y más aún, para que sea un espacio homogéneo de Banach bajo la acción de G. Si bien es posible establecer un resultado general al respecto (ver [17]), he preferido presentar aquí una versión particular, que es la que requerirá el resto de la exposición.

De aquí en adelante los grupos considerados serán el grupo de unidades o el grupo unitario de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ con elemento 1, actuando sobre el espacio de Banach $\mathcal{A}^n$ por conjugación, esto es

$$u * (a_1, \ldots, a_n) = (ua_1u^{-1}, \ldots, ua_nu^{-1}), \quad u \text{ en el grupo y } a_i \in \mathcal{A},\ i = 1, \ldots, n.$$

Es claro que dicha acción es analítica en el caso de que el grupo considerado sea $\mathcal{A}^{-1}$, y de clase C^∞ en el caso unitario. Las órbitas se denominan órbitas de similaridad conjunta u órbita unitaria conjunta, según el caso. Fijando la n-upla $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^n$, llamaremos $\delta_{(a_1,\ldots,a_n)}$ a la derivación interior, esto es

$$\delta_{(a_1,\ldots,a_n)}(x) = (xa_1 - a_1x, \ldots, xa_n - a_nx),$$

para x en $\mathcal{A}$ o $\mathcal{A}_{ah}$, según el caso. Nótese que, de cualquier manera $\delta_{(a_1,\ldots,a_n)} = d(\pi_{(a_1,\ldots,a_n)})_1$, donde para diferenciar a $\pi_{(a_1,\ldots,a_n)}$, la suponemos con rango en todo $\mathcal{A}^n$.

Teorema 1.9

Con las condiciones y notaciones precedentes, si se verifica además que

i) $\pi_{(a_1,\ldots,a_n)} : G \to X$ es abierta

ii) $\delta_{(a_1,\ldots,a_n)}$ tiene rango y núcleo complementados (como subespacios complejos en el caso $G = \mathcal{A}^{-1}$, y reales si $G = \mathcal{U}$, y poniendo X como la órbita de $(a_1, \ldots, a_n)$ de similaridad o unitaria según corresponda), entonces la acción de G sobre X define un espacio homogéneo de Banach (analítico resp. C^∞). Además X resulta una subvariedad (analítica resp. C^∞) de $\mathcal{A}^n$.

Demostración: Haremos el caso $G = \mathcal{A}^{-1}$. El otro es completamente análogo. En virtud de las definiciones dadas, alcanza con probar que X es subvariedad analítica de $\mathcal{A}^n$, con $TX_{(a_1,\ldots,a_n)} = R\delta_{(a_1,\ldots,a_n)}$. Sea K un suplemento de ker $\delta_{(a_1,\ldots,a_n)}$, es decir $K \oplus$ ker $\delta_{(a_1,\ldots,a_n)} = \mathcal{A}$. Sea $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, dada por $\phi(k+y) = e^k e^y$ con $k \in K$ e $y \in$ ker $\delta_{(a_1,\ldots,a_n)}$. Obsérvese que $d\phi_0(x) = x$, con lo cual, en virtud del teorema 1.4, ϕ resulta un difeomorfismo analítico entre un entorno V de 0 y el entorno $\phi(V)$ de 1. Pongamos $\psi : V \to X$, $\psi(z) = (\phi(z)a_1\phi(z)^{-1}, \ldots, \phi(z)a_n\phi(z)^{-1})$. Resulta evidente que ψ es analítica, y que $\psi(k+y) = \psi(k)$, si $k \in K$ e $y \in$ ker $\delta_{(a_1,\ldots,a_n)}$. En efecto, como $y \in$ ker $\delta_{(a_1,\ldots,a_n)}$, y conmuta con a_i, $i = 1, \ldots, n$. Con lo cual e^y conmuta con a_i, es decir, $e^y a_i e^{-y} = a_i$, $1 \leq i \leq n$. Como $\pi_{(a_1,\ldots,a_n)}$ es abierta, ψ también lo es.

Sea ahora L un suplemento de $R\delta_{(a_1,\ldots,a_n)}$, $L \oplus R\delta_{(a_1,\ldots,a_n)} = \mathcal{A}^n$. Definimos la aplicación analítica $\varphi : K \times L \to \mathcal{A}^n$, $\varphi(k,\ell) = \psi(k) + \ell$. Nótese que $d\varphi_{(0,0)}(k,\ell) = \delta_{(a_1,\ldots,a_n)}(k) + \ell$, con lo que $d\varphi_{(0,0)}$ es un isomorfismo lineal de $K \times L$ en $\mathcal{A}^n$. Por lo tanto, existe un entorno W de (0,0) en $K \times L$ tal que $\varphi|_W$ es un difeomorfismo entre W y $\varphi(W)$ que es un entorno de $(a_1, \ldots, a_n)$ en X. Para concluir que X es subvariedad analítica de $\mathcal{A}^n$, alcanza con componer a φ con un isomorfismo lineal de $\mathcal{A}^n$ en $K \times L$ (por ejemplo $d\varphi^{-1}_{(0,0)}$) para que la carta modele a X según $\mathcal{A}^n$, y no $K \times L$, como lo requiere la definición 1.2.

Para culminar, nótese que $\psi|_{W \cap K}$ es un difeomorfismo de un entorno de 0 en K con un entorno de $(a_1, \ldots, a_n)$ en X. Con lo cual $TX_{(a_1,\ldots,a_n)} = d\psi_0(K) = R\delta_{(a_1,\ldots,a_n)}$. ♦

En las condiciones del teorema anterior, $\pi_{(a_1,\ldots,a_n)}$ resulta ser una sumersión, con lo cual, según 1.6, tiene secciones locales analíticas (resp. C^∞). Expondremos a continuación una recíproca de este hecho. De nuevo, G es $\mathcal{A}^{-1}$ o $\mathcal{U}$ y X es la órbita de un elemento fijo $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^n$.

Teorema 1.10

Supongamos que existe un entorno U de $(a_1, \ldots, a_n)$ en $\mathcal{A}^n$ y una aplicación analítica (resp. C^∞) $\omega : U \to G$ tal que $\omega(a_1,\ldots,a_n) = 1$ y $\omega|_{U\cap X}$ es una sección local para $\pi_{(a_1,\ldots,a_n)}$. Entonces X es un espacio homogéneo de Banach analítico (resp. C^∞) bajo la acción de G.

Demostración: De nuevo, probaremos el caso $G = \mathcal{A}^{-1}$ y dejaremos el otro al lector. Nos valdremos del teorema anterior. Es inmediato que $\pi_{(a_1,\ldots,a_n)} : G \to X$ es abierta. Probaremos que

$$\delta_{(a_1,\ldots,a_n)} \circ d\omega_{(a_1,\ldots,a_n)} \circ \delta_{(a_1,\ldots,a_n)} = \delta_{(a_1,\ldots,a_n)} .$$

Sea $V \in \mathcal{A}$, $\delta_{(a_1,\ldots,a_n)}(V) = d(\pi_{(a_1,\ldots,a_n)})_1(V)$. Tomemos $\alpha(t) = e^{tV}$, $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Es claro que $\alpha(0) = 1$ y que $\frac{d}{dt}\alpha(t)|_0 = V$. Luego $d(\pi_{(a_1,\ldots,a_n)})_1(V) = \frac{d}{dt}[\pi_{(a_1,\ldots,a_n)}(e^{tV})]|_0$. Con lo cual

$$\delta_{(a_1,\ldots,a_n)} \circ d\omega_{(a_1,\ldots,a_n)} \circ \delta_{(a_1,\ldots,a_n)}(V) = \frac{d}{dt}[\pi_{(a_1,\ldots,a_n)} \circ \omega \circ \pi_{(a_1,\ldots,a_n)}(e^{tV})]|_0 .$$

Si tomamos ε pequeño de manera que $\pi_{(a_1,\ldots,a_n)}(e^{tV}) \in U \cap X$, resulta

$$\frac{d}{dt}[\pi_{(a_1,\ldots,a_n)} \circ \omega \circ \pi_{(a_1,\ldots,a_n)}(e^{tV})\Big|_0 = \frac{d}{dt}[\pi_{(a_1,\ldots,a_n)}(e^{tV})]\Big|_0 = \delta_{(a_1,\ldots,a_n)}(V) .$$

Por la igualdad probada, vale que $\delta_{(a_1,\ldots,a_n)} \circ d\omega_{(a_1,\ldots,a_n)}$ y $d\omega_{(a_1,\ldots,a_n)} \circ \delta_{(a_1,\ldots,a_n)}$ son idempotentes en $L(\mathcal{A}^n)$ y $L(\mathcal{A})$ respectivamente. El primero tiene como rango a $R\delta_{(a_1,\ldots,a_n)}$ y el segundo tiene núcleo igual a ker $\delta_{(a_1,\ldots,a_n)}$. Por lo tanto estos espacios son complementados. ♦

Ejemplos.

i) Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* y p un idempotente de $\mathcal{A}$, entonces la órbita de similaridad de p, $S(p) = \{gpg^{-1} : g \in \mathcal{A}^{-1}\}$ es un espacio homogéneo de Banach analítico (ver [5], [17]).

ii) Si p además es autoadjunto, entonces la órbita unitaria $\mathcal{U}(p) = \{upu^* : u \in \mathcal{U}\}$ es un espacio homogéneo de Banach de clase C^∞ (ver [5]).

§ 2. C^* ALGEBRAS DE DIMENSION FINITA.

En esta sección caracterizaremos las C^*-álgebras de dimensión finita, que jugarán un papel importante en lo que sigue de ahora en más en la exposición. Para ello seguiremos casi sin variantes el desarrollo hecho por J.T. Schwarz en el capítulo 1, páginas 1 a 14 de [19].

Definición 2.1

Una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ es un factor si su centro $Z_{\mathcal{A}} = \{x \in \mathcal{A} \, : \, xa = ax \text{ para todo } a \in \mathcal{A}\}$ consiste solo de múltiplos escalares de la unidad.

En lo que sigue, $\mathcal{A}$ será una C^*-álgebra de dimensión finita sobre $\mathbf{C}$.

Lema 2.2

Si $a \in \mathcal{A}$, entonces $\sigma(a)$ es finito.

Demostración: Consideremos la transformada de Gelfand $\wedge : C(a) \to C(\mathcal{X}(C(a)))$, $\widehat{b}(\varphi) = \varphi(b)$, donde $C(a)$ es el álgebra generada por $a \in \mathcal{A}$. Es claro que $C(a)$ es conmutativa y de dimensión finita. Por otra parte, es inmediato que $C(\mathcal{X}(C(a)))$ es isomorfa a $C(\sigma(a))$. Identificando a estas dos álgebras, resulta que $\widehat{C(a)}$ es una subálgebra de $C(\sigma(a))$, cerrada (por ser de dimensión finita), que contiene a los polinomios, ya que el polinomio z^n es imagen de a^n. Luego, como los polinomios con dominio en $\sigma(a)$ son un álgebra de dimensión finita, $\sigma(a)$ debe ser finito. ♦

Supongamos de ahora en más, que $\mathcal{A}$ está representada en un espacio de Hilbert H.

Proposición 2.3

El álgebra $\mathcal{A}$ se descompone en suma de factores: $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$, con $\mathcal{A}_i$ factor. Además, cada factor $\mathcal{A}_i$ consiste en $\mathcal{A}_i = \{a|_{H_i} \, : \, a \in \mathcal{A}\}$, donde $H = \bigoplus_{i=1}^{n} H_i$ es una descomposición ortogonal de H.

Demostración: Si $\mathcal{A}$ es un factor, no hay nada que demostrar. Si no, sea $a \in Z_{\mathcal{A}}$ y a no es múltiplo escalar de 1. En tal caso o bien $\mathrm{Re}(a)$ o $\mathrm{Im}(a)$ no son múltiplos escalares de 1. Luego se puede suponer que el elemento central a es autoadjunto. Como no es múltiplo de

1, $\sigma(a)$, que es finito, debe tener más de un punto. Pongamos $\sigma(a) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, $k \geq 2$. Llamemos $p_i(a)$ al proyector espectral de a asociado a λ_i, $1 \leq i \leq k$. Es claro que $p_i(a)$ es un polinomio en a.

Como $a \in Z_{\mathcal{A}}$, $p_i(a)$ también. Entonces, si descomponemos a H como $H = \bigoplus_{i=1}^{k} Rp_i(a)$, resulta evidente que cada elemento $b \in \mathcal{A}$, puede escribirse $b = \bigoplus_{i=1}^{k} b|_{Rp_i(a)}$. Con lo cual $\mathcal{A}$ se descompone, $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{A}|_{Rp_i(a)}$. Si alguna de las C^*-álgebras $\mathcal{A}|_{Rp_i(a)}$ no es un factor, volvemos a descomponerla mediante el mismo procedimiento, que no puede repetirse indefinidamente, ya que $\mathcal{A}$ es de dimensión finita. ♦

Definición 2.4

Un proyector no nulo $p \in \mathcal{A}$ es minimal, si cada vez que hay otro proyector no nulo $q \in \mathcal{A}$ con $R(q) \subset R(p)$, debe ser $p = q$.

Proposición 2.5

Existen proyectores minimales $e_1, \ldots, e_n$ en $\mathcal{A}$, tales que $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1$ y $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$.

Demostración: Probemos primero que existe un proyector minimal $e \in \mathcal{A}$. Supongamos que no. Entonces existe una sucesión $\{p_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ de proyectores de $\mathcal{A}$, con la propiedad $R(p_{k+1}) \subset R(p_k)$. Luego, es inmediato verificar que el conjunto $\{p_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ es linealmente independiente, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{A}$ es de dimensión finita. En efecto, si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_{n_i} p_{n_i} = 0$, suponiendo los p_{n_i} "ordenados", tomando $x \in R(p_{n_j}) \ominus Rp_{n_{j-1}}$, resulta $0 = \sum \lambda_{n_i} p_{n_i}(x) = \lambda n_j x$, lo que implica que $\lambda_{n_j} = 0$, $1 \leq j \leq k$.

Llamemos e_1 al proyector minimal hallado. Si $1 - e_1$ es minimal, el resultado queda probado. Si no, llamemos $\mathcal{A}_1$ a la C^*-álgebra $\mathcal{A}|_{R(1-e_1)}$. Es claro que $\mathcal{A}_1$ es de dimensión finita. En $\mathcal{A}_1$ hay un proyector minimal e_2, que si sumergimos a $\mathcal{A}_1$ en $\mathcal{A}$ canónicamente (extendiendo como 0 en $R(e_1)$ a sus elementos), sigue siendo un proyector minimal, que además verifica que $e_1 e_2 = 0$. Si $1 - e_1 - e_2$, que es un proyector, no es minimal, procedemos de idéntica forma. De nuevo, el proceso no puede continuar indefinidamente. ♦

Lema 2.6

Si $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{A}$ son proyectores minimales tales que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i p_j = 0$ si $i \neq j$, entonces si $a \in \mathcal{A}$ conmuta con los p_i, $1 \leq i \leq n$, implica que $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$, $\lambda_i \in \mathbf{C}$.

Demostración: Si conseguimos probar el resultado para $\mathrm{Re}(a)$ e $\mathrm{Im}(a)$, lo habremos probado para a. Por lo cual basta con suponer que a es autoadjunto. Como a tiene aspecto finito, resulta $a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i q_i$, donde $\sigma(a) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ y q_i es el proyector espectral de a asociado a α_i. Como a conmuta con los p_j, $1 \leq j \leq n$, resulta que cada q_i conmuta con los p_j. Entonces, para cada i y j, $q_i p_j$ es un proyector, cuyo rango está contenido en el rango de p_j. Debe ser luego $q_i p_j = p_j$ o bien $q_i p_j = 0$. Con lo cual resulta que $a = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i q_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} p_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_j$, donde los $\lambda_j \in \mathbf{C}$ son iguales a 0 o a algún α_i. ♦

Lema 2.7

Si $\mathcal{A}$ es un factor y $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{A}$ son proyectores minimales tales que $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1$ y $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$, entonces existen $e_{ij} \in \mathcal{A}$, $1 \leq i, j \leq n$, tales que:

i) $e_{ij} e_{ij}^* = e_i$

ii) $e_i e_{ij} = e_{ij} e_j = e_{ij}$.

Demostración: Veamos primero que para cada par de índices i y j existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $e_i a e_j \neq 0$. Supongamos que no. Sean

$$S = \{k : e_i b e_k = 0 \; \forall b \in \mathcal{A}\} \quad \text{y} \quad T = \{m : e_m b e_k = 0 \; \forall b \in \mathcal{A}, \; k \in S\}.$$

Es claro que S y T son no vacíos y disjuntos. Llamemos $e_S = \sum_{\ell \in S} e_i$, $e_T = \sum_{h \in T} e_j$. Ambos son proyectores cuyo producto da 0.

Si $e_S + e_T = 1$, entonces para todo elemento $c \in \mathcal{A}$ autoadjunto, vale que $e_S c(1 - e_S) = 0$. Es decir, $e_S c = e_S c e_S = c e_S$. Luego e_S conmuta con todo $\mathcal{A}$. Como $e_S \neq 0, 1$, esto es absurdo. Por lo tanto debe ser $e_S + e_T \neq 1$. O sea, existe e_m con $m \notin S \cup T$. En otras palabras, hay elementos b y c, este último se puede elegir autoadjunto, tales que $e_{i_0} b e_m \neq 0$ y $e_m c e_k \neq 0$. para algún $k \in S$.

Como $k \in S$, $e_{i_0}(b e_m c) e_k = 0$. Con lo cual $0 = e_i b e_m (e_m c e_k c e_m) = e_i b e_m (u e_m)$, para algún $u \in \mathbf{C}$, pues $e_m c e_k c e_m$ conmuta con e_ℓ, $1 \leq \ell \leq n$. Es decir, $0 = u e_{i_0} b e_m$, por lo tanto $u = 0$. O sea $e_m c e_k c e_m = 0$. Como $e_m c e_k c e_m = (e_m c e_k)(e_m c e_k)^* = 0$, debe ser $e_m c e_k = 0$, contra lo supuesto.

Sea $\tilde{a}_{ij}$ tal que $e_i \tilde{a}_{ij} e_j = a_{ij} \neq 0$, $1 \leq i, j \leq n$. Llamemos $h_{ij} = a_{ij} a_{ij}^*$. Se verifica que $e_i h_{ij} = h_{ij} e_i = h_{ij}$. Como h_{ij} es autoadjunto y positivo, debe ser $h_{ij} = c e_i$ con $c > 0$. Tomemos entonces $e_{ij} = c^{-1/2} a_{ij}$. Resulta de inmediato que $e_{ij} e_{ij}^* = e_i$ y que $e_i e_{ij} = e_{ij} e_j = e_{ij}$. ♦

Observaciones 2.8

1) En el lema anterior se puede obtener además que $e_{ii} = e_i$, $1 \leq i \leq n$. En efecto, como e_{ii} conmuta con e_i, resulta $e_{ii} = \lambda e_i$, $\lambda \in \mathbf{C}$ de módulo 1. Modificando e_{ii} ligeramente se obtiene lo deseado.

Se puede obtener además, poniendo en la demostración de 2.7 $\tilde{a}_{ij}^* = \tilde{a}_{ji}$, $i > j$, que $e_{ij}^* = e_{ji}$.

Redefiniendo los e_{ij} de la siguiente manera: $\bar{e}_{ij} = \bar{e}_{i1} \bar{e}_{1j}$, $1 \leq i, j \leq n$, obtenemos un nuevo conjunto, $\{\bar{e}_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ que además de verificar las propiedades anteriores, satisface que $\bar{e}_{ij} \bar{e}_{jk} = \bar{e}_{ik}$. En efecto, $\bar{e}_{ij} \bar{e}_{jk} = e_{i1} e_{1j} e_{j1} e_{1k} = e_{i1} e_1 e_{1k} = e_{i1} e_{1k} = \bar{e}_{ik}$. Llamaremos e_{ij} a estos nuevos elementos hallados.

2) Si $a \in \mathcal{A}$, $a = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} e_{ij}$, $\lambda_{ij} \in \mathbf{C}$. Alcanza con probarlo para elementos autoadjuntos. Es claro que $a = \sum_{i,j=1}^{n} e_i a e_j$. Como $e_{ji}(e_i a e_j) = (e_{ji} e_i a e_j) e_j = e_j (e_{ji} e_i a e_j)$, debe ser $e_{ji} e_i a e_j = \lambda_{ij} e_j$, $\lambda_{ij} \in \mathbf{C}$.

Multiplicando a izquierda por e_{ij} resulta

$$e_i a e_j = e_{ij} e_{ji} e_i a e_j = e_{ij} \lambda_{ij} e_j = \lambda_{ij} e_{ij} .$$

Se tiene entonces que $\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} e_{ij} \ : \ \lambda_{ij} \in \mathbf{C}, \quad 1 \leq i, j \leq n \right\}$, con lo cual los factores de dimensión finita tienen una estructura muy simple.

Podemos resumir la información obtenida en el siguiente

Teorema 2.9

Si $\mathcal{A} \subset L(H)$ es una C^*-álgebra de dimensión finita, entonces existen espacios de Hilbert $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_p$, números enteros positivos $n_1, \ldots, n_p$ y una isometría sobreyectiva J, $J : H \to \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i}$, tal que a pertenece a $\mathcal{A}$ si y sólo si JaJ^* es de la forma

$$JaJ^* = A_1 \oplus \ldots \oplus A_p, \text{ con } A_i \in L(\mathcal{K}_i^{n_i}), \quad 1 \leq i \leq p$$
$$A_i = (\alpha_{\ell,m} \operatorname{Id}_{\mathcal{K}_i})_{1 \leq \ell, m \leq n_i}, \quad \alpha_{\ell m} \in \mathbf{C} .$$

Demostración: Como $\mathcal{A}$ es de dimensión finita, tenemos que $H = \bigoplus_{i=1}^{p} H_i$ de manera que $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{A}|_{H_i}$ y cada $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{H_i}$ es un factor. Cada factor $\mathcal{A}_i$ posee además una descomposición de proyectores minimales $e_1^i, \ldots, e_{n_i}^i$ y elementos $\{e_{jk}^i\}_{1 \le j,k \le n_i}$, como en 2.8.

Obsérvese que como $e_{jk}^i e_{jk}^{i*} = e_j^i$ y $e_{jk}^{i*} e_{jk}^i = e_k^i$, e_{jk}^i transforma isométricamente a Re_k^i en Re_j^i. Podemos conseguir entonces un espacio de Hilbert $\mathcal{K}_i$ y una isometría $J_i : H_i = \bigoplus_{j=1}^{n_i} Re_j^i \to \mathcal{K}_i^{n_i}$. Por la parte 2) de la observación 2.8 sabemos que si $a_i \in \mathcal{A}_i$, entonces $a_i = \sum_{j,k=1}^{n_i} \lambda_{j,k}^i e_{j,k}^i$, $\lambda_{j,k}^i \in \mathbf{C}$, con lo cual

$$J_i a_i J_i^* = \sum_{j,k=1}^{n_i} \lambda_{j,k}^i J_i e_{j,k}^i J_i^* = \sum_{j,k=1}^{n_i} \lambda_{j,k}^i J_{j,k}^i .$$

Los $J_{j,k}^i$ son isometrías entre las distintas copias de $\mathcal{K}_i$ en $\mathcal{K}_i^{n_i}$. Más precisamente, de la k-ésima copia de la j-ésima.

Eligiendo J_i con cuidado, por ejemplo, poniendo $\mathcal{K}_i = Re_1^i$ y $J_i(x) = (e_{11}^i x, e_{12}^i x, \ldots, e_{1n_i}^i x)$ se obtiene que

$$J_{jk}^i(0, \ldots, 0, z, 0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0, z, 0, \ldots, 0) .$$

La demostración se termina poniendo $J = \bigoplus_{i=1}^{p} J_i$. ♦

Corolario 2.10

Si $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra de dimensión finita, existen enteros positivos $n_1, \ldots, n_p$ y un *-isomorfismo τ,

$$\tau : \mathcal{A} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{p} \mathbf{C}^{n_i \times n_i} .$$

Demostración: La isometría J del teorema 2.9 produce un *-isomorfismo $\overline{\tau}$, a saber

$$\overline{\tau}(a) = J a J^* .$$

El isomorfismo buscado se obtiene componiendo τ con la aplicación natural

$$J \mathcal{A} J^* \ni \bigoplus_{i=1}^{p} (\alpha_{j,k}^i \, \mathrm{Id}_{\mathcal{K}_i})_{1 \le j,k \le n_i} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{p} (\alpha_{jk}^i)_{1 \le j,k \le n_i} \in \bigoplus_{i=1}^{p} \mathbf{C}^{n_i \times n_i} . \quad ♦$$

§ 3. ORBITAS UNITARIAS CON SECCIONES LOCALES.

En esta sección entraremos de lleno en el tema central de esta exposición, el cual es estudiar la estructura de las órbitas unitarias de elementos de una C^*-álgebra. En las páginas que siguen delinearé sucintamente los resultados conocidos obtenidos por D. Voiculescu, L. Fialkow y D. Deckard en diversos trabajos (ver por ejemplo [8], [10], [21]) que conciernen a la topología de las órbitas unitarias. El resultado que mejor resume la información es el teorema 3.1, que es fruto del trabajo de los tres autores mencionados. Fijemos antes alguna notación.

H es un espacio de Hilbert complejo, y $\mathcal{U}(H)$ su grupo unitario. Fijemos $B \in L(H)$, con $\mathcal{U}(B)$ notaremos la órbita unitaria de B, $\mathcal{U}(B) = \{UBU^* : U \in \mathcal{U}(H)\}$, y con $\mathcal{U}_B(H)$ el subgrupo estabilizador de B, $\mathcal{U}_B(H) = \{V \in \mathcal{U}(H) : VB = BV\}$. Diremos que $\mathcal{U}(B)$ tiene secciones locales si la aplicación

$$\pi_B : \mathcal{U}(H) \longrightarrow \mathcal{U}(B), \quad \pi_B(U) = UBU^*, \quad U \in \mathcal{U}(H)$$

tiene secciones locales continuas, es decir, si para cada $C \in \mathcal{U}(B)$ existe un entorno $\mathcal{W}_C$ de C en $\mathcal{U}(B)$ (con la topología inducida por $L(H)$) y una aplicación continua

$$s_C : \mathcal{W}_C \longrightarrow \mathcal{U}(H) \quad \text{tal que} \quad s_C(C) = I \quad \text{y} \quad \pi_B \circ s_C = \mathrm{id}_{\mathcal{W}_C} .$$

Es inmediato verificar que para que todo esto suceda, alcanza con que exista una sección local de un entorno de B.

La clase de operadores $B \in L(H)$ con la propiedad de que su órbita unitaria tenga secciones locales puede caracterizarse mediante el siguiente

Teorema 3.1

Sea $B \in L(H)$, son equivalentes:

i) $\mathcal{U}(B)$ tiene secciones locales

ii) $\mathcal{U}(B)$ es cerrada en $L(H)$

iii) La C^*-álgebra $C^*(B)$ generada por B y por I tiene dimensión finita

iv) B es unitariamente equivalente a un operador de la forma $a \oplus (b \oplus b \oplus \ldots)$, donde a y b son operadores actuando en espacios de dimensión finita.

Demostración: ii) $\Longrightarrow$ iii) es un resultado profundo de D. Voiculescu, sobre representaciones aproximadamente equivalentes de C^*-álgebras, que excede las intenciones de esta exposición (ver [21]).

i) $\Longrightarrow$ ii) fue demostrado en [10], transcribiremos aquí dicha prueba. Como $\mathcal{U}(B)$ tiene secciones locales, para cada $n \geq 1$, existe un número real positivo δ_n tal que si $\|UBU^* - B\| < \delta_n$, entonces $\|s_B(UBU^*) - I\| < 1/2^n$. Sea $X \in \overline{\mathcal{U}(B)}$. $X = \lim_{n\to\infty} U_n B U_n^*$. Existe entonces $k_n \in \mathbf{N}$, tal que si $k \geq k_n$, $\|U_k B U_k^* - X\| < \delta_n/2$.

Podemos tomar la sucesión k_n de manera que sea creciente. Nótese que $\|U_{k_{n+1}} B U_{k_{n+1}}^* - U_{k_n} B U_{k_n}^*\| = \|U_{k_n}^* U_{k_{n+1}} B U_{k_{n+1}}^* U_{k_n} - B\|$.

Por otro lado

$$\|U_{k_{n+1}} B U_{k_{n+1}}^* - U_{k_n} B U_{k_n}^*\| \leq \|U_{k_{n+1}} B U_{k_{n+1}}^* - X\| + \|X - U_{k_n} B U_{k_n}^*\| < \delta_n \ .$$

Con lo cual tiene sentido tomar $s_B(U_{k_n}^* U_{k_{n+1}} B U_{k_{n+1}}^* U_{k_n}) = W_n$, y se verifica que $\|W_n - I\| < 1/2^n$, y que $W_n B W_n^* = U_{k_n}^* U_{k_{n+1}} B U_{k_{n+1}}^* U_{k_n}$.

Llamemos $V_n = U_{k_n} W_n U_{k_n}^*$. Resulta $\|V_n - I\| < 1/2^n$ y además $V_n U_{k_n} B U_{k_n}^* V_n^* = U_{k_n} W_n B W_n^* U_{k_n}^* = U_{k_{n+1}} B U_{k_{n+1}}^*$. Sustituyendo estas identidades sucesivamente, llegamos a que

$$U_{k_{n+1}} B U_{k_{n+1}}^* = (V_n V_{n-1} \ldots V_1) U_{k_1} B U_{k_1}^* (V_1^* V_2^* \ldots V_n^*) \ .$$

Veamos que existe $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^n V_i^*$. Como $\|V_i^* - I\| < 1/2^i$,

$$\left\| \prod_{i=1}^{n+1} V_i^* - \prod_{i=1}^{n} V_i^* \right\| = \left\| \prod_{i=1}^{n} V_i^* (V_{n+1}^* - I) \right\| \leq \|V_{n+1}^* - I\| < \frac{1}{2^{n+1}} \ .$$

Con lo cual se tiene que $\left\| \prod_{i=1}^{n+j} V_i^* - \prod_{i=1}^{n} V_i^* \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} 1/2^i$, que tiende a 0 cuando n tiende a ∞. Resulta luego que $\prod_{i=1}^{n} V_i^*$ es de Cauchy, y por lo tanto, convergente a V^* en $\mathcal{U}(H)$. Tenemos entonces

$$X = \lim_{n\to\infty} U_{k_{n+1}} B U_{k_{n+1}}^* = \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} V_i^* \right)^* U_{k_1} B U_{k_1}^* \left(\prod_{i=1}^{n} V_i^* \right) =$$
$$= V U_{k_1} B U_{k_1}^* V^*, \text{ o sea, } \quad X \in \mathcal{U}(B) \ .$$

iii) $\Longrightarrow$ iv). Como $C^*(B)$ es de dimensión finita, por el teorema 2.9, resulta que existen enteros positivos $n_1, \ldots, n_p$, espacios de Hilbert $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_p$ y una isometría $J : H \to$

$\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i}$, de tal modo que B, por pertenecer a $C^*(B)$ verifica que $JBJ^* = A_1 \oplus \ldots \oplus A_p$, donde cada $A_i \in L(\mathcal{K}_i^{n_i})$ es de la forma $A_i = (\alpha_{j,k}^i \operatorname{Id}_{\mathcal{K}_i})_{1\le j,k\le n_i}$. Podemos suponer que los espacios están ordenados de manera que $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_\ell$ son de dimensión finita y $\mathcal{K}_{\ell+1}, \ldots, \mathcal{K}_p$ son de dimensión infinita.

Si llamamos $m = \sum_{i=\ell+1}^{p} n_i$, existen un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ y una isometría sobreyectiva $J' : \bigoplus_{i=\ell+1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i} \to \mathcal{K}^m$ de modo que $J'(A_{\ell+1} \oplus \ldots \oplus A_p)J'^* = (b_{ij} \operatorname{Id}_{\mathcal{K}})_{i\le i,j\le m}$. Llamando $a = A_1 \oplus \ldots \oplus A_\ell$, resulta entonces que B es unitariamente equivalente a $a \oplus (b \oplus b \oplus \ldots)$.

Nótese que iv) $\Longrightarrow$ iii) es evidente.

$(a \oplus b \oplus b \oplus \ldots)^* = a^* \oplus b^* \oplus b^* \oplus \ldots$, con lo cual $C^*(a \oplus b \oplus b \oplus \ldots)$ es una subálgebra de $C^*(a) \oplus C(b^{(\infty)})$. $C^*(a)$ es de dimensión finita, y lo mismo para con $C^*(b^{(\infty)})$ por ser *-isomorfa a $C^*(b)$. Por otra parte, la isometría que conjuga a B con $a \oplus b \oplus b \oplus \ldots$ provee un *-isomorfismo entre las C^*-álgebras respectivas, con lo cual resulta que $C^*(B)$ es de dimensión finita.

Queda por ver iii) $\Longrightarrow$ i). Aquí transcribiremos la demostración dada en [8], que consiste en la construcción de una sección local de π_B en un entorno de B. Varias de las herramientas definidas en esta demostración las volveremos a emplear a lo largo de toda la exposición.

Como $C^*(B)$ es de dimensión finita, tenemos $n_1, \ldots, n_p$, $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_p$ y J como en el caso anterior. Basta con probar el resultado para $JBJ^* \in L(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i})$. En otras palabras, podemos suponer que B es de la forma $B = \bigoplus_{i=1}^{p} A_i$, $A_i = (\alpha_{j,k}^i \operatorname{Id}_{\mathcal{K}_i})_{1\le j,k\le n_i}$.

Si $C \in L(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i})$, notemos con $(C_{ij})_{1\le i,j\le p}$ la matriz de C relativa a la descomposición $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{L}_i$, donde $\mathcal{L}_i = \mathcal{K}_i^{n_i}$. Sea $C_i = C_{ii}$ y sea $(C_{jk}^i)_{1\le j,k\le n_i}$ la matriz de C_i relativa a la descomposición $\mathcal{L}_i = \mathcal{K}_i^{n_i}$. Llamemos, para i, r y s fijos, $1 \le i \le p$, $1 \le r, s \le n_i$, E_{rs}^i al operador cuya matriz verifica $(E_{rs}^i)_{jk} = 0$ si $j \ne i$ ó $k \ne i$ y $(E_{rs}^i)_{ii}$ tiene ceros en todas las entradas salvo $\operatorname{Id}_{\mathcal{K}_i}$ en la entrada r, s. Nótese que los E_{rs}^i son los análogos de los e_{jk}^i del teorema 2.9. Del corolario 2.10 surge que existen polinomios $p_{rs}^i(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ de dos variables no conmutativas $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, tales que $p_{rs}^i(B, B^*) = E_{rs}^i$. Sea $\delta > 0$ tal que si $C \in \mathcal{U}(B)$ y $\|C - B\| < \delta$, entonces $\|p_{rs}^i(C, C^*) - E_{rs}^i\| < 1$, para $1 \le r, s \le n_i$, $1 \le i \le p$. Se definirá una sección local en el entorno

$$\mathcal{W} = \{C \in \mathcal{U}(B) : \|C - B\| < \delta\} \quad \text{de } B \text{ en } \mathcal{U}(B)\,.$$

Sea $C \in \mathcal{W}$ y sea $V \in \mathcal{U}(H)$ tal que $VBV^* = C$.

$\|VE_{11}^iV^* - E_{11}^i\| = \|p_{11}^i(C, C^*) - E_{11}^i\| < 1$. Luego, también $\|V^*E_{11}^iV - E_{11}^i\| < 1$,

$1 \leq i \leq p$. Esto muestra que

$$\|I_{K_i} - V_{11}^i (V_{11}^i)^*\| = \|E_{11}^i - E_{11}^i V E_{11}^i V^* E_{11}^i\| = \|E_{11}^i (E_{11}^i - V E_{11}^i V^*) E_{11}^i\| \leq$$
$$\leq \|E_{11}^i - V E_{11}^i V^*\| < 1 \, .$$

Análogamente se prueba que $\|I_{K_i} - (V_{11}^i)^* V_{11}^i\| < 1$. Luego, resulta que $V_{11}^i V_{11}^{i*}$ y $V_{11}^{i*} V_{11}^i$ son inversibles, con lo cual también lo es V_{11}^i, $1 \leq i \leq p$.

Sea $V_{11}^i = P_i X_i$ la descomposición polar de V_{11}^i, con $X_i \in \mathcal{U}(K_i)$ y $P_i \in L(K_i)$ positivo. Llamemos U_V al operador cuya matriz en la descomposición

$$(K_1 \oplus \ldots \oplus K_1) \oplus \ldots \oplus (K_p \oplus \ldots \oplus K_p)$$

está dada por

$$U_V = (X_1^* \oplus \ldots \oplus X_1^*) \oplus \ldots \oplus (X_p^* \oplus \ldots \oplus X_p^*) \, ,$$

donde cada X_i^* está repetido n_i veces. Es inmediato verificar que U_V conmuta con los E_{rs}^i, con lo cual $U_V \in \mathcal{U}_B(H)$.

Definimos entonces

$$s_B(C) = s_B(VBV^*) = VU_V \, .$$

Veamos que s_B está bien definida. Supongamos que $C = V'BV'^*$, con lo cual V'^*V conmuta con B y con B^*, y por lo tanto con los E_{rs}^i. Luego su matriz relativa a la descomposición dada por los K_i es de la forma

$$V'^*V = (Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_1) \oplus \ldots \oplus (Y_p \oplus \ldots \oplus Y_p) \, ,$$

con $Y_i \in \mathcal{U}(K_i)$. Nótese que entonces la descomposición polar de $V_{11}'^i$ es $V_{11}'^i = P_i X_i Y_i^*$. Luego

$$U'_V = (Y_1 X_1^* \oplus \ldots \oplus Y_1 X_1^*) \oplus \ldots \oplus (Y_p X_p^* \oplus \ldots \oplus Y_p X_p^*) \, .$$

Por lo tanto $V'U_{V'} = V'(V'^*V)U_V = VU_V$. Es claro que $s_B(B) = I$, eligiendo en primer lugar $V = 1$. Además

$$\pi_B \circ s_B(C) = s_B(C) B s_B(C)^* = VU_V BU_V^* V^* = VBV^* = C \, ,$$

si $C \in \mathcal{W}$.

Para completar la prueba, falta ver que s_B es continua.

Sea $\{V_n\} \subset \mathcal{U}(H)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|V_n B V_n^* - B\| = 0$. Esto implica que $\lim_{n\to\infty} \|V_n B - BV_n\| = \lim_{n\to\infty} \|V_n^* B - BV_n^*\| = 0$. Luego, como los p_{rs}^i son funciones continuas, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \|V_n E_{rs}^i - E_{rs}^i V_n\| = \lim_{n\to\infty} \|V_n^* E_{rs}^i - E_{rs}^i V_n^*\| = 0 \,.$$

Probaremos lo siguiente:

a) $\lim_{n\to\infty} \|(V_n)_{ij}\| = 0 \quad \text{si } 1 \le i,j \le p \text{ e } i \ne j$.

b) $\lim_{n\to\infty} \|(V_n)_{ij}^i\| = 0 \quad \text{si } 1 \le j,k \le n_i,\ j \ne k,\ 1 \le i \le p$.

c) $\lim_{n\to\infty} \|(V_n)_{ss}^i - (V_n)_{rr}^i\| = 0 \quad \text{si } 1 \le r,s \le n_i,\ 1 \le i \le p$.

d) $\lim_{n\to\infty} \|\mathrm{Id}_{\mathcal{K}_i} - (V_n)_{ss}^{i*}(V_n)_{ss}^i\| = \lim_{n\to\infty} \|\mathrm{Id}_{\mathcal{K}_i} - (V_n)_{ss}^i(V_n)_{ss}^{i*}\| = 0$,
si $1 \le s \le n_i,\ 1 \le i \le p$.

En efecto:

$$\text{a)}\quad \|(V_n)_{ij}\| = \left\| \left(\sum_{\ell=1}^{n_i} E_{\ell\ell}^i\right) V_n \left(\sum_{k=1}^{n_j} E_{kk}^j\right) \right\| \le \sum_{\ell=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{n_j} \|E_{\ell\ell}^i V_n E_{kk}^j\| \,.$$

Luego alcanza con ver que

$$\lim_{n\to\infty} \|E_{\ell\ell}^i V_n E_{kk}^j\| = 0 \quad \text{si } i \ne j \,.$$

$$\|E_{\ell\ell}^i V_n E_{kk}^j\| = \|E_{\ell\ell}^i V_n E_{kk}^j - E_{\ell\ell}^i E_{kk}^j V_n\| \le \|V_n E_{kk}^j - E_{kk}^j V_n\| \,,$$

que tiende a 0.

b) Se prueba análogamente, usando que $E_{kk}^i E_{jj}^i = 0$ si $j \ne k$.

Para probar c), alcanza con ver que $\|(V_n)_{ss}^i - (V_n)_{11}^i\|$ tiende a cero.

Para estimar la norma de la diferencia entre las entradas $(V_n)_{ss}^i = E_{ss}^i V_n E_{ss}^i$ y $(V_n)_{11}^i = E_{11}^i V_n E_{11}^i$, hay que referirlas antes, mediante las isometrías E_{jk}^i apropiadas, a una misma copia de $\mathcal{K}_i$, por ejemplo, aquella correspondiente a E_{11}^i, en la cual actúen los dos operadores. Esto se hace componiendo a $E_{ss}^i V_n E_{ss}^i$ con E_{1s}^i y E_{s1}^i a izquierda y derecha, respectivamente.

$$\begin{aligned}
&\|(V_n)_{ss}^i - (V_n)_{11}^i\| = \|E_{1s}^i E_{ss}^i V_n E_{ss}^i E_{s1}^i - E_{11}^i V_n E_{11}^i\| = \\
&= \|E_{1s}^i V_n E_{s1}^i - E_{11}^i V_n E_{11}^i\| \le \|E_{1s}^i V_n E_{s1}^i - V_n E_{11}^i\| + \\
&\quad + \|E_{11}^i V_n E_{11}^i - V_n E_{11}^i\| \,.
\end{aligned}$$

El segundo sumando tiene a cero, pues

$$\|E^i_{11} V_n E^i_{11} - V_n E^i_{11}\| \leq \|E^i_{11} V_n - V_n E^i_{11}\| .$$

Luego hay que estimar

$$\|E^i_{1s} V_n E^i_{s1} - V_n E^i_{11}\| = \|(E^i_{1s} V_n - V_n E^i_{1s}) E^i_{s1}\| \leq \|E^i_{1s} V_n - V_n E^i_{1s}\| ,$$

que tiende a cero.

Por último, d):

$$\begin{aligned} \|\mathrm{Id}_{K_i} - (V_n)^{i*}_{ss} (V_n)^i_{ss}\| &= \|E^i_{ss} - E^i_{ss} V_n^* E^i_{ss} V_n E^i_{ss}\| = \\ = \|E^i_{ss} (E^i_{ss} - V_n^* E^i_{ss} V_n) E^i_{ss}\| &\leq \|E^i_{ss} - V_n^* E^i_{ss} V_n\| \leq \\ \leq \|V_n E^i_{ss} - E^i_{ss} V_n\| &\quad \text{que tiende a } 0 . \end{aligned}$$

El otro límite se prueba de manera análoga.

La igualdad d) dice que si $(V_n)^i_{11} = P^i_n X^i_n$ es la descomposición polar usada en la definición de s_B, se verifica que P^i_n tiende a Id_{K_i} cuando n tiende a infinito. Con lo cual usando a), b) y c), resulta que las entradas de la matriz de $V_n U_{V_n}$ tienden a las entradas correspondientes a la matriz de la identidad. Es decir, $s_B(V_n B V_n^*)$ tiende a la identidad. Esto dice que s_B es continua en B.

Supongamos ahora que $V_n B V_n^* \to V_0 B V_0^*$. Luego, $V_0^* V_n B V_n^* V_0$ tiende a B. Llamando $W_n = s_B(V_0^* V_n B V_n^* V_0)$, se tiene que $W_n \to I$, y que $V_n B V_n^* = V_0 W_n B W_n^* V_0^*$.

Por la buena definición de s_B, se puede calcular $s_B(V_n B V_n^*)$ usando $V_0 W_n$. Como $V_0 W_n \to V_0$, $(V_0 W_n)^i_{11} \to (V_0)^i_{11}$, y resulta

$$\lim_{n \to \infty} s_B(V_n B V_n^*) = \lim_{n \to \infty} s_B(V_0 W_n B W_n^* V_0^*) = s_B(V_0 B V_0) ,$$

con lo cual s_B es continua. ♦

En las secciones siguientes, veremos que a las condiciones equivalentes del teorema precedente, se les pueden agregar otras, concernientes a la estructura diferenciable de $\mathcal{U}(B)$.

§ 4. ESTRUCTURA DIFERENCIABLE DE ORBITAS UNITARIAS DE OPERADORES.

Ya observamos que el grupo unitario de un espacio de Hilbert complejo, $\mathcal{U}(H)$, es un grupo de Lie de clase C^∞, que es una subvariedad de $L(H)$. Además, que su espacio tangente $T\mathcal{U}(H)_I$ se identifica con $L_{ah}(H) = \{A \in L(H) : A^* = -A\}$.

En esta sección estudiaremos la geometría de la aplicación $\pi_B : \mathcal{U}(H) \to \mathcal{U}(B)$. La primera pregunta que surge es: ¿ para cuáles operadores B es $\mathcal{U}(B)$ subvariedad de $L(H)$? La respuesta es bien sencilla y será delineada en esta sección. Son precisamente aquellos operadores que satisfacen cualquiera de las condiciones equivalentes del teorema 3.1.

Para probarlo utilizaremos el teorema 1.9, que estipula que si $B \in L(H)$ verifica que π_B es abierta y que $\delta_B(L_{ah}(H))$ y ker $\delta_B \cap L_{ah}(H)$ son espacios reales cmplementados en $L(H)$ y $L_{ah}(H)$ respectivamente, entonces $\mathcal{U}(B)$ resulta un espacio homogéneo de Banach de clase C^∞ bajo la acción de $\mathcal{U}(H)$.

Nótese que si B está en las condiciones del teorema 3.1, queda garantizado el que π_B sea abierta. En esta sección probaremos que los otros dos requisitos también se cumplen y que las condiciones de 3.1 además de ser suficientes son necesarias para que $\mathcal{U}(B)$ sea subvariedad de $L(H)$.

Notación:

Sean $a \in \mathbf{C}^{n\times n}$ y H_0 un espacio de Hilbert. Con $a\otimes \mathrm{Id}_{H_0}$ notaremos al operador que actúa en $H = H_0^n$, cuya matriz respecto de esta descomposición de H es de la forma $(a_{ij}\, \mathrm{Id}_{H_0})_{1\le i,j\le n}$, donde a_{ij}, $1 \le i,j \le n$, son las entradas de la matriz a.

Nótese que un operador de este tipo satisface las condiciones de 3.1. Es inmediato que la C^*-álgebra generada por él y por la identidad es de dimensión finita. Más aún, no es difícil ver que un operador de la forma $a \oplus (b^{(\infty)})$, con a y b operadores en espacios de dimensión finita, es unitariamente equivalente (mediante un cambio de orden en la base ortonormal de H) a $a \oplus (b \otimes \mathrm{Id}_{H_0})$, para un cierto H_0. Con lo cual todos los operadores de la clase definida por 3.1, son unitariamente equivalentes a uno de este tipo, y viceversa.

Proposición 4.1

Si $B \in L(H)$ es tal que $C^*(B)$ es de dimensión finita, entonces ker $\delta_B \cap L_{ah}(H)$ es complementado en $L_{ah}(H)$.

Demostración: Como $C^*(B)$ es de dimensión finita, existen números enteros $n_1, \ldots, n_p$, espacios de Hilbert $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_p$ y una isometría $J : H \to \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i}$, como en 2.9. La isometría J produce un *-isomorfismo $\omega : L(H) \to L(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i})$, $\omega(X) = JXJ^*$. Es inmediato verificar que ω transforma el subespacio $\ker \delta_B \cap L_{ah}(H)$ en $L_{ah}(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i}) \cap \ker \delta_{JBJ^*}$. Luego, alcanza con ver que este último es complementado. Recuérdese que $C^*(JBJ^*) = \bigoplus_{i=1}^{p} M_{n_i}(\mathcal{K}_i)$, donde $M_{n_i}(\mathcal{K}_i)$ nota el álgebra de operadores con matrices de la forma $(\alpha_{j,k} \ \mathrm{Id}_{\mathcal{K}_i})_{1 \le j,k \le n_i}$ para $\alpha_{j,k} \in \mathbb{C}$ arbitrarios. Sea $A \in L_{ah}(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i})$, si $\delta_{JBJ^*}(A) = 0$, resulta que tanto A como A^* conmutan con JBJ^*. Es decir que A conmuta con JBJ^* y JB^*J^* y con toda el álgebra $C^*(JBJ^*)$. Luego, debe ser de la forma $A = (A_1 \oplus \ldots \oplus A_1) \oplus \ldots \oplus (A_p \oplus \ldots \oplus A_p)$, donde cada $A_i \in L_{ah}(\mathcal{K}_i)$ está repetido n_i-veces. Es decir

$$\ker \delta_{JBJ^*} \cap L_{ah}\left(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i\right) = \{(A_1 \oplus \ldots \oplus A_1) \oplus \ldots \oplus (A_p \oplus \ldots \oplus A_p) \in L_{ah}\left(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i}\right) :$$

$$A_i \in L_{ah}(\mathcal{K}_i), \quad 1 \le i \le p\}. \text{ Que es claramente complementado en } L_{ah}\left(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i}\right). \ \blacklozenge$$

Lema 4.2

Sean H y H' espacios de Hilbert complejos, $H = H_1^n$, $H' = H_2^m$. Sean $A = a \otimes \mathrm{Id}_{H_1} \in L(H)$ y $B = b \otimes \mathrm{Id}_{H_2} \in L(H')$, con $a \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Entonces el subespacio complejo $W \subset L(H, H') \times L(H, H')$ dado por

$$\begin{aligned} W = \{(C, D) \in L(H, H') \times L(H, H') \ &: \ \text{existe } X \in L(H, H') \text{ con} \\ C = XA - BX \quad &\text{y} \quad D = XA^* - B^*X\} \end{aligned}$$

es cerrado y complementado.

Demostración: Las descomposiciones de H y H' determinan un isomorfismo entre los espacios de Banach $L(H, H')^2$ y $L(H_1, H_2)^{n \times m \times 2}$. Veremos que el operador $\alpha \in L(L(H, H')^2)$ dado por $\alpha(X, Y) = (XA - BX, \ XA^* - B^*X)$, cuyo rango es W, tiene matriz relativa a la descomposición mencionada del espacio de Banach $L(H, H')^2$, de la forma

$$(\alpha_{j,k} \cdot \mathrm{Id}_{L(H_1, H_2)})_{1 \le j,k \le 2nm}$$

para ciertos $\alpha_{j,k} \in \mathbf{C}$.

Veamos, por ejemplo, que el operador elemental $(X,Y) \mapsto (BX,0)$ tiene matriz del tipo descripto. Para ello, indiquemos las coordenadas de las matrices dadas por la representación $L(H,H')^2 = L(H_1,H_2)^{n\times m\times 2}$, de la siguiente manera:

$$\text{si} \quad \eta \in L(L(H,H')^2), \quad \eta = (\eta_{i,j,k;\,r,s,t})_{\substack{1\leq i,r\leq n\\ 1\leq j,s\leq m\\ 1\leq k,t\leq 2}}$$

Con esta notación, es inmediato verificar que el operador β, $\beta(X,Y) = (BX,0)$ tiene las siguientes coordenadas:

$$\beta_{i,j,k;\,r,s,t} = \begin{cases} 0 & \text{si } k=2 \text{ o } t=2 \\ \delta_{js}\delta_{ir}\,\mathrm{Id}_{L(H_1,H_2)} & \text{si } k=t=1\ , \end{cases}$$

donde $b_{i,r}$ son las coordenadas de b $(B = b\otimes\,\mathrm{Id}_{H_2})$.

En forma análoga se encuentran coordenadas "escalares" para los otros operadores de multiplicación a izquierda o derecha, en la primera o segunda coordenada, definidos por A, A^* y B^*. Luego, bastará ver que un operador con entradas escalares, tiene rango complementado.

Sea η un tal operador, con coordenadas dadas por una matriz escalar $\tilde{\eta} \in \mathbf{C}^{2mn\times 2mn}$. Está claro que existe $\tilde{\gamma} \in \mathbf{C}^{2mn\times 2mn}$ tal que $\tilde{\eta}\tilde{\gamma}\tilde{\eta} = \tilde{\eta}$ y $\tilde{\gamma}\tilde{\eta}\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}$. Luego, si ponemos $\gamma \in L(L(H,H')^2)$, $\gamma = (\tilde{\gamma}_{i,j}\,\mathrm{Id}_{L(H_1,H_2)})_{1\leq i,j\leq 2mn}$ resulta que $\eta\gamma\eta = \eta$ y $\gamma\eta\gamma = \gamma$. Por lo tanto, $(\eta\gamma)^2 = \eta\gamma$ y $R\eta\gamma = R\eta$. Con lo cual $R\eta$ es complementado en $L(H,H')^2$. ♦

Proposición 4.3

Si $T = a \oplus (b\otimes\,\mathrm{Id}_{H_0})$, con $a \in \mathbf{C}^{n\times n}$, $b \in \mathbf{C}^{m\times m}$ y $H = \mathbf{C}^n \oplus H_0^m$, $\delta_T(L_{ah}(H))$ es complementado en $L(H)$.

<u>Demostración</u>: Como $H = \mathbf{C}^n \oplus H_0^m$, $L(H)$ se descompone en $L(\mathbf{C}^n)\oplus L(H_0^m)\oplus L(\mathbf{C}^n,\, H_0^m)\oplus L(H_0^m, \mathbf{C}^n)$. Sea $A \in L_{ah}(H)$, su matriz relativa a la descomposición de H es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad -A_{ii}^* = A_{ii}, \quad i = 1,2\ .$$

Luego

$$\delta_T(A) = \left(\begin{array}{c|c} \delta_a(A_{11}) & A_{12}(b\otimes \mathrm{Id}_{H_0}) - aA_{12} \\ \hline (b\otimes \mathrm{Id}_{H_0})A_{12}^* - A_{12}^*a & \delta_{(b\otimes \mathrm{Id}_{H_0})}(A_{22}) \end{array}\right).$$

Por lo tanto, alcanza con probar que:

a) $\delta_a(L_{ah}(\mathbf{C}^n))$ es complementado en $L(\mathbf{C}^n)$.

b) $\delta_{(b\otimes \mathrm{Id}_{H_0})}(L_{ah}(H_0^m))$ es complementado en $L(H_0^m)$.

c) $J = \{(C,D) \in L(H_0^m,\mathbf{C}^n)\times L(\mathbf{C}^n,H_0^m)$: existe $X\in L(H_0^m,\mathbf{C}^n)$ con $C = X(b\otimes \mathrm{Id}_{H_0}) - aX$ y $D = (b\otimes \mathrm{Id}_{H_0})X^* - X^*a\}$ es complementado en $L(H_0^m,\mathbf{C}^n)\times L(\mathbf{C}^n,H_0^m)$.

a) es inmediato.

c) se sigue del lema 4.2, poniendo $H = H_0^m$, $H' = \mathbf{C}^n$ y aplicando el isomorfismo lineal real de $L(H_0^m,\mathbf{C}^n)^2$ en $L(H_0^m,\mathbf{C}^n)\times L(\mathbf{C}^n,H_0^m)$ que transforma a (F,G) en $(F,-G^*)$.

Veamos b).

Llamemos $\Delta : L(H_0^m) \to L(H_0^m)^2$,

$$\Delta(X) = \left(\delta_{b\otimes \mathrm{Id}_{H_0}}(X),\ \delta_{(b\otimes \mathrm{Id}_{H_0})^*}(X)\right).$$

Por el lema anterior, poniendo $H = H' = H_0^m$ y $a = b$, resulta que $R\Delta$ es complementado en $L(H_0^m)^2$.

Sea K un suplemento de ker $\delta_{b\otimes \mathrm{Id}_{H_0}} \cap L_{ah}(H_0^m)$ en $L_{ah}(H_0^m)$, que existe en virtud de 4.1 (nótese que $b\otimes \mathrm{Id}_{H_0}$ satisface las condiciones del teorema 3.1). Entonces , $K\oplus iK$ es un suplemento de:

$$\left[\ker \delta_{b\otimes \mathrm{Id}_{H_0}} \cap L_{ah}(H_0^m)\right] \oplus i\left[\ker \delta_{b\otimes \mathrm{Id}_{H_0}} \cap L_{ah}(H_0^m)\right] =$$
$$= \ker \delta_{b\otimes \mathrm{Id}_{H_0}} \cap \ker \delta_{(b\otimes \mathrm{Id}_{H_0})^*} = \ker \Delta, \quad \text{en } L(H_0^m).$$

Luego, $R\Delta = \Delta(K)\oplus i\Delta(K) \subset L(H_0^m)^2$, con lo cual $\Delta(K)$ es complementado (real) en $L(H_0^m)^2$. Consideremos $\rho : L(H_0^m)^2 \to L(H_0^m)^2$ el isomorfismo lineal real dado por

$$\rho(X,Y) = \left(\frac{X+Y^*}{2}, \frac{X-Y^*}{2}\right).$$

Es evidente que $\rho\Delta(K) = \delta_{b\otimes \mathrm{Id}_{H_0}}(K)\times\{0\}$. Con lo cual $\delta_{b\otimes \mathrm{Id}_{H_0}}(K) = \delta_{b\otimes \mathrm{Id}_{H_0}}(L_{ah}(H_0^m))$ es complementado en $L(H_0^m)$. ♦

Resumiendo, tenemos el siguiente

Teorema 4.4

Sea $B \in L(H)$. Entonces $\mathcal{U}(B)$ es subvariedad diferenciable de $L(H)$ si y sólo si B satisface alguna de las condiciones equivalentes del teorema 3.1.

En tal caso, $\mathcal{U}(B)$ resulta un espacio homogéneo de Banach de clase C^∞ bajo la acción de $\mathcal{U}(H)$.

<u>Demostración</u>: Tanto la suficiencia como la observación precedente son claras y se siguen de 1.9, 3.1, 4.1 y 4.3. Veamos la necesidad. Supongamos que $\mathcal{U}(B)$ es subvariedad diferenciable de clase $C^p (1 \le p \le \infty)$ de $L(H)$. Entonces, es claro que existe $\delta > 0$ tal que $\{X \in L(H) : \|X - B\| \le \delta\} \cap \mathcal{U}(B)$ es cerrado en $L(H)$ (usando una carta local alrededor de B). Luego

$$\mathcal{B}(UBU^*, \delta) := \{X \in L(H) : \|UBU^* - X\| \le \delta\} \cap \mathcal{U}(B) =$$
$$U^*\mathcal{B}(B, \delta)U \quad \text{también es cerrado en } L(H) \text{ para } U \in \mathcal{U}(H) .$$

Luego, si $U_n B U_n^* \to X$, existe n_0 tal que si $n \ge n_0$, $U_n B U_n^* \in \mathcal{B}(U_{n_0} B U_{n_0}^*, \delta)$, que es cerrado, con lo cual $X \in \mathcal{B}(U_{n_0} B U_{n_0}^*, \delta) \subset \mathcal{U}(B)$. Es decir, $\mathcal{U}(B)$ es cerrado. ♦

Nótese que la aplicación Δ que se estudia en la demostración de 4.3, no es otra cosa que la δ_{B,B^*}, es decir, la diferencial en la identidad de la aplicación π_{B,B^*} (ver § 1). Lo que se probó es que si B es de la forma $b \otimes \mathrm{Id}_{H_0}$, con b una matriz finita, entonces la aplicación lineal δ_{B,B^*} tiene rango y núcleo complementados. En la siguiente sección completaremos este análisis, que habla de la relación existente entre las estructuras de $\mathcal{U}(B)$ y de $\mathcal{S}(B, B^*) := \{(UBU^{-1}, UB^*U^{-1}) : U \in \mathcal{G}\ell(H)\}$, llamada la órbita de similaridad conjunta del par (B, B^*).

§ 5. LA ORBITA DE SIMILARIDAD CONJUNTA DEL PAR $(B, B)^*$.

En esta sección se estudiará la estructura de la aplicación $\pi_{B.B^*} : \mathcal{G}\ell(H) \to \mathcal{S}(B, B^*) = \{(UBU^{-1}, UB^*U^{-1}) \in L(H) : U \in \mathcal{G}\ell(H)\}$, que guarda una relación estrecha con lo expuesto hasta ahora referido a la órbita unitaria de B. Los operadores para los cuales π_{B,B^*} tienen secciones locales continuas coinciden con aquellos tales que $\mathcal{S}(B, B^*)$ es subvariedad analítica de $L(H)^2$, y son precisamente los definidos por los condiciones del teorema 3.1. Es decir que $\mathcal{S}(B, B^*)$ es subvariedad si y sólo si $\mathcal{U}(B)$ lo es.

Definición 5.1

Sea $B \in L(H)$ tal que $C^*(B)$ es de dimensión finita. Están definidos entonces los operadores "elementales" E^i_{jk} y los polinomios en dos variables no conmutativas $p^i_{jk}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ con $p^i_{jk}(B, B^*) = E^i_{jk}$, $1 \le j, k \le n_i$, $1 \le i \le p$ (ver 3.1). Definiremos la aplicación

$$\phi : L(H)^2 \longrightarrow L(H)^n, \quad \text{con} \quad n = \sum_{i=1}^{p} n_i, \quad \text{dada por}$$

$$\phi(C, D) = (p^1_{11}(C, D), p^1_{22}(C, D), \ldots, p^1_{n_1.n_1}(C, D), p^2_{11}(C, D), \ldots, \\ p^p_{11}(C, D), \ldots, p^p_{n_p.n_p}(C, D))$$

Observación 5.2

Nótese que si $(C, D) \in \mathcal{S}(B, B^*)$, entonces $\phi(C, D) \in I_n(H) = \{(Q_1, \ldots, Q_n) \in L(H)^n \quad Q_i^2 = Q_i, \ Q_iQ_j = 0 \text{ si } i \neq j, \ 1 \le i, j \le n \text{ y } \sum_{i=1}^n Q_i = I\}$, llamado el conjunto de sistemas de idempotentes de orden n de $L(H)$. Este conjunto fue estudiado exhaustivamente en [4] y [5], allí por ejemplo, se demuestra que las componentes conexas de $I_n(H)$ (que son abiertas en $I_n(H)$) son subvariedades analíticas de $L(H)^n$.

El hecho de que $\phi(\mathcal{S}(B, B^*)) \subset I_n(H)$ es claro, pues $\phi(UBU^{-1}, UB^*U^{-1}) = U\phi(B, B^*)U^{-1}$. Además, como ϕ es continua y $\mathcal{S}(B, B^*)$ conexo, ϕ manda la órbita conjunta dentro de una subvariedad analítica de $L(H)^n$. De ahora en más, pongamos $\phi = \phi|_{\mathcal{S}(B.B^*)}$. Con las notaciones del teorema 3.1, tenemos el siguiente

Teorema 5.3

Sea $B \in L(H)$ tal que $C^*(B)$ es de dimensión finita. Entonces π_{B,B^*} tiene secciones locales continuas.

Demostración: Vía la isometría J, podemos suponer directamente que B actúa en $H = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i}$, y que es de la forma $B = \bigoplus_{i=1}^{p} A_i$ con $A_i = (\alpha_{jk}^i \operatorname{Id}_{\mathcal{K}_i})_{1\le j,k\le n_i}$, $1 \le i \le p$. Es claro que la aplicación ϕ de 5.1 es racional. Sea σ definida en un entorno $\mathcal{W}$ de $\phi(B, B^*)$ en $I_n(H)$,

$$\sigma : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{G}\ell(H), \quad \text{dada por} \quad \sigma(Q_1, \ldots, Q_n) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(B, B^*)Q_i$$

Como $\sigma(\phi(B, B^*)) = I$ y σ es continua, se puede encontrar un tal entorno $\mathcal{W}$ de manera que $\sigma(\mathcal{W}) \subset \mathcal{G}\ell(H)$. Pongamos

$$\rho : \widetilde{\mathcal{W}} \subset \mathcal{S}(B, B^*) \longrightarrow \mathcal{S}(B, B^*), \quad \rho(C, D) = [\sigma\phi(C, D)]\,(C, D)\,[\sigma\phi(C, D)]^{-1}$$

donde $\widetilde{\mathcal{W}}$ es un entorno de (B, B^*) de modo que $\phi(\widetilde{\mathcal{W}}) \subset \mathcal{W}$. Veamos que $\phi\rho(C, D) = \phi(B, B^*)$, $(C, D) \in \widetilde{\mathcal{W}}$.

$$\phi\rho(C, D) = \phi\left([\sigma\phi(C, D)]\,(C, D)\,[\sigma\phi(C, D)]^{-1}\right) = [\sigma\phi(C, D)]\,\phi(C, D)\,[\sigma\phi(C, D)]^{-1}.$$

Alcanza con probar que

$$[\sigma\phi(C, D)]\,\phi(C, D) = \phi(B, B^*)[\sigma\phi(C, D)]$$

lo cual es inmediato, recordando que $\sigma\phi(C, D) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(B, B^*)\phi_i(C, D)$ y usando las propiedades que definen a $I_n(H)$.

Mediante la aplicación de esta función "racional" ρ, podemos suponer directamente que los pares (C, D) cercanos a (B, B^*) a los cuales queremos asignarle un operador invertible, pertenecen a $\phi^{-1}(\phi(B, B^*))$.

Sea $U \in \mathcal{G}\ell(H)$ tal que $U(B, B^*)U^{-1} = (C, D)$. Como $\phi(C, D) = \phi(B, B^*)$, resulta que $U\phi(B, B^*)U^{-1} = \phi(B, B^*)$. Es decir, U conmuta con E_{jj}^i, $1 \le j \le n_i$, $1 \le i \le p$. Por lo tanto, la matriz de un tal U en la descomposición de H es de la forma

$$U = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & a_{n_1} \end{matrix} & & & \mathbf{O} \\ \hline
& \begin{matrix} b_1 & & 0 \\ & b_2 & \\ 0 & & b_{n_2} \end{matrix} & & \\ \hline
& & \ddots & \\ \hline
\mathbf{O} & & & \begin{matrix} x_1 & & 0 \\ & x_2 & \\ 0 & & x_{n_p} \end{matrix}
\end{array}\right]$$

con $a_i \in \mathcal{G}\ell(\mathcal{K}_1)$, $1 \le i \le n_1$; $b_i \in \mathcal{G}\ell(\mathcal{K}_2)$, $1 \le i \le n_2; \ldots; x_i \in \mathcal{G}\ell(\mathcal{K}_p)$, $1 \le i \le n_p$.

Consideremos el operador $V_U \in \mathcal{G}\ell(H)$ que en la descomposición de H está dado por $V_U = (a_1^{-1} \oplus a_1^{-1} \oplus \ldots \oplus a_1^{-1}) \oplus \ldots \oplus (x_1^{-1} \oplus \ldots \oplus x_1^{-1})$. Este operador V_U es el análogo del operador homónimo introducido en la construcción de s_B en 3.1.

Es inmediato que V_U conmuta con B y con B^*. Pongamos

$$\mathcal{K} : \phi^{-1}(\phi(B, B^*)) \longrightarrow \mathcal{G}\ell(H),$$
$$\mathcal{K}(C, D) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} p^i_{j1}(C, D) E^i_{1j}$$

$\mathcal{K}$ está bien definida: $(C, D) = U(B, B^*)U^{-1}$ con U que conmuta con los E^i_{jj}, con lo cual resulta

$$\mathcal{K}(C, D) = U \left\{ \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} E^i_{j1} U^{-1} E^i_{1j} \right\} = U \left\{ \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} E^i_{j1} E^i_{11} U^{-1} E^i_{11} E^i_{1j} \right\}$$

Como U conmuta con E^i_{11}, $E^i_{11} U^{-1} E^i_{11}$ actúa como un isomorfismo en el rango de E^i_{11}, con lo cual $E^i_{j1} E^i_{11} U^{-1} E^i_{11} E^i_{1j}$ es un isomorfismo del rango de E^i_{jj} en sí mismo. Sumando sobre j y luego sobre i, resulta entonces un isomorfismo en $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i}$.

Además, es claro que $\mathcal{K}(C,D) = UV_U$. En efecto, basta observar que

$$\sum_{j=1}^{n_1} E^1_{j1}E^1_{11}U^{-1}E^1_{11}E^1_{1j} = a_1^{-1} \oplus \ldots \oplus a_1^{-1} \,;$$

$$\sum_{j=1}^{n_2} E^2_{j1}E^2_{11}U^{-1}E^2_{11}E^2_{1j} = b_1^{-1} \oplus \ldots \oplus b_1^{-1} \,;$$

$$\sum_{j=1}^{p} E^p_{j1}E^p_{11}U^{-1}E^p_{11}E^p_{1j} = x_1^{-1} \oplus \ldots \oplus x_1^{-1} \,;$$

$$\text{es decir,} \quad \sum_{j=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} E^i_{j1}U^{-1}E^i_{1j} = V_U \,.$$

Resumiendo, tenemos que $\mathcal{K}$ verifica que

$$\mathcal{K}(C,D)(B,B^*)\,\mathcal{K}(C,D)^{-1} = (C,D) \quad \text{si} \quad (C,D) \in \phi^{-1}(\phi(B,B^*))$$

pues V_U conmuta con B y B^* y por lo tanto

$$UV_U(B,B^*)(UV_U)^{-1} = UV_U(B,B^*)V_U^{-1}U^{-1} = U(B,B^*)U^{-1} = (C,D)\,.$$

Juntando toda la información, estamos ahora en condiciones de exhibir una sección local "racional" de ϕ_{B,B^*} en un entorno de (B,B^*) en $\mathcal{S}(B,B^*)$:

$$\omega : \widetilde{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathcal{G}\ell(H)\,,$$

$\omega(C,D) = [\sigma\phi(C,D)]^{-1}\mathcal{K}(\rho(C,D))$, donde

$$\phi(C,D) = (p^1_{11}(C,D),\ldots,p^1_{n_1,n_1}(C,D),\ldots,p^p_{11}(C,D),\ldots,p^p_{n_p,n_p}(C,D))\,;$$

$$\sigma(Q_1,\ldots,Q_n) = \sum_{i=1}^{n}\phi_i(B,B^*)Q_i\,, \quad (Q_1,\ldots,Q_n) \in \mathcal{W} \quad \left(n = \sum_{i=1}^{p} n_i\right)\,;$$

$$\rho(C,D) = [\sigma\phi(C,D)]\,(C,D)\,[\sigma\phi(C,D)]^{-1}\,, \quad (C,D) \in \widetilde{\mathcal{W}} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{K}(X,Y) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} p^i_{j1}(X,Y)E^i_{1j}\,, \quad (X,Y) \in \phi^{-1}(\phi(B,B^*))\,.$$

En efecto, vimos que $\rho(C,D) \in \phi^{-1}(\phi(B,B^*))$, con lo cual

$$\begin{aligned}\omega(C,D)(B,B^*)[\omega(C,D)]^{-1} &= [\sigma\phi(C,D)]^{-1}\mathcal{K}\rho(C,D)(B,B^*)[\mathcal{K}\rho(C,D)]^{-1}\sigma\phi(C,D) = \\ &= [\sigma\phi(C,D)]^{-1}\rho(C,D)[\sigma\phi(C,D)] = (C,D)\,. \quad \blacklozenge\end{aligned}$$

Observación 5.4

1) La sección ω de la demostración precedente tiene en realidad un aspecto más sencillo, a saber

$$\omega(C,D) = \left[\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} E^i_{j1}p^i_{1j}(C,D)\right]^{-1} \qquad (C,D) \in \widetilde{W} .$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\omega(C,D) &= [\sigma\phi(C,D)]^{-1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} p^i_{j1}(\sigma\phi(C,D)(C,D)[\sigma\phi(C,D)]^{-1})E^i_{1j}\\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} p^i_{1j}(C,D)[\sigma\phi(C,D)]^{-1}E^i_{1j} .\end{aligned}$$

Calculemos

$$\begin{aligned}&\omega(C,D)\sum_{\ell=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_\ell} E^i_{j1}\sigma\phi(C,D)p^i_{1j}(C,D)\\ &=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} p^i_{j1}(C,D)[\sigma\phi(C,D)]^{-1}\,.\,E^i_{11}\sigma\phi(C,D)\,.\,p^i_{1j}(C,D)\end{aligned}$$

como $\sigma\phi(C,D)p^i_{11}(C,D) = E^i_{11}p^i_{11}(C,D) = E^i_{11}\sigma\phi(C,D)$, resulta que la última suma da

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} p^i_{j1}(C,D)p^i_{11}(C,D)p^i_{1j}(C,D) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} p^i_{jj}(C,D) = I .$$

La demostración finaliza observando que

$$E^i_{j1}\sigma\phi(C,D)p^i_{1j}(C,D) = E^i_{j1}E^i_{11}p^i_{11}(C,D)p^i_{1j}(C,D) = E^i_{j1}p^i_{1j}(C,D) .$$

2) Es claro que $\omega(C,D)$ pertenece a la C^*-álgebra generada por C, D, B y la identidad.

Teorema 5.5

Si $B \in L(H)$ tal que $C^*(B)$ es de dimensión finita, entonces $S(B,B^*)$ es un espacio homogéneo analítico bajo la acción de $\mathcal{G}\ell(H)$. En particular $S(B,B^*)$ resulta una subvariedad analítica de $L(H)^2$, cuyo espacio tangente en (C,D) es

$$R\delta_{(C,D)} = \{(\delta_C(X),\ \delta_D(X)) \in L(H)^2 \ :\ X \in L(H)\} .$$

Demostración: De nuevo podemos suponer $B = A_1 \oplus \ldots \oplus A_p$ como en 5.3. Usando el teorema 1.9, junto con 5.3, para probar el teorema alcanza con ver que $\delta_{(B,B^*)}$ tiene núcleo y rango complementados.

Que el núcleo es complementado es inmediato. Basta con observar que los operadores $X \in L(H)$ tales que $\delta_{(B,B^*)}(X) = 0$ son aquellos que conmutan con B y con B^*, es decir, que son de la forma

$$X = (X_1 \oplus \ldots \oplus X_1) \oplus \ldots \oplus (X_p \oplus \ldots \oplus X_p)$$

en la descomposición $H = \bigoplus_{i=1}^{p} K_i^{n_i}$ donde cada $X_i \in \mathcal{G}\ell(K_i)$ está repetido n_i-veces. Este espacio es claramente complementado.

Para ver que el rango de $\delta_{(B,B^*)}$ es complementado, consideremos el isomorfismo real θ : $L(H)^2 \to L(H)^2$, $\theta(X,Y) = (X+Y, X^* + Y^*)$. Es inmediato verificar que $\theta(\delta_B(L_{ah}(H)) \times i\delta_B(L_{ah}(H))) = R\delta_{(B,B^*)}$, con lo cual es complementado (real) en $L(H)^2$ (ver 4.3). Si M es un suplemento de $\delta_B(L_{ah}(H))$ en $L(H)$, $\theta(M \times iM)$ es un suplemento, en principio real, de $R\delta_{(B,B^*)}$. Es directo verificar que $\theta(M \times iM)$ es en realidad un subespacio complejo de $L(H)^2$. ♦

Observación 5.6

Si $B \in L(H)$ como en el teorema anterior, las subvariedades de $L(H)^2$, $\mathcal{U}(B) \times \mathcal{U}(B)$ y $\mathcal{S}(B, B^*)$ son C^∞-localmente difeomorfas. Esto es porque θ provee un isomorfismo entre los respectivos espacios tangentes en (B, B) y (B, B^*).

Una aplicación inmediata de las técnicas usadas en [15] permite demostrar además que ambas tienen los mismos grupos de homotopía.

Definición 5.7

Diremos que $S \subset L(H)^n$ es localmente cerrado si para cada $x \in S$, existen $\varepsilon_i > 0$, $1 \le i \le n$, tal que

$$S \cap \{y \in L(H)^n : \|x_i - y_i\| \le \varepsilon_i, \quad 1 \le i \le n\} \quad \text{es cerrado en} \quad L(H)^n .$$

Lema 5.8

Sea $B \in L(H)$. Si $\mathcal{S}(B, B^*)$ es localmente cerrado, entonces $C^*(B)$ es de dimensión finita.

Demostración: Mostraremos que si $\mathcal{S}(B, B^*)$ es localmente cerrado, $\mathcal{U}(B)$ también lo es, lo que en virtud de 4.4 y de 3.1 será suficiente. Sea $\mathcal{U}(B, B^*) = \{(UBU^*, UB^*U^*) \in L(H)^2 : U \in \mathcal{U}(H)\}$.

Veamos que $\mathcal{U}(B, B^*) = \{(C, D) \in \mathcal{S}(B, B^*) : D^* = C\}$.

Que $\mathcal{U}(B, B^*) \subset \{(C, D) \in \mathcal{S}(B, B^*) : D^* = C\}$ es inmediato.

Al revés, si $D^* = C$, sea $U \in \mathcal{G}\ell(H)$ tal que $UBU^{-1} = C$, $UB^*U^{-1} = C$. Entonces $UBU^{-1} = (UB^*U^{-1})^* = U^{*-1}BU^*$. Luego, U^*U conmuta con B, y por ser autoadjunto, también con B^*, con lo cual $|U| = (U^*U)^{1/2}$ conmuta con B y B^*. Luego

$$(C, D) = \pi_{(B,B^*)}(U) = \pi_{(B,B^*)}(U\,|U|^{-1}) \in \mathcal{U}(B, B^*)\,.$$

En particular, resulta $\mathcal{U}(B, B^*)$ cerrado en $\mathcal{S}(B, B^*)$. Es inmediato entonces que $\mathcal{U}(B, B^*)$ es localmente cerrado.

Dado $C \in \mathcal{U}(B)$, $(C, C^*) \in \mathcal{U}(B, B^*)$, por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{U}(B, B^*) \cap \{X \in L(H)^2 : \|X_1 - C\| \le \varepsilon,\ \|X_2 - C^*\| \le \varepsilon\}$ es cerrado en $L(H)^2$.

Veamos que $\mathcal{U}(B) \cap \{X \in L(H) : \|X - C\| \le \varepsilon\}$ es cerrado.

Sean $X_n \in \mathcal{U}(B)$, $\|X_n - C\| \le \varepsilon$, $X_n \to X$.

Luego, $X_n^* \to X^*$ y $\|X_n^* - C^*\| \le \varepsilon$, con lo cual $(X, X^*) \in \mathcal{U}(B, B^*)$, es decir, $X \in \mathcal{U}(B)$. ♦

Podemos resumir la información obtenida en el siguiente

Teorema 5.9

Sea $B \in L(H)$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1) B satisface alguna de las condiciones del teorema 3.1.

2) $\mathcal{U}(B)$ es subvariedad diferenciable de $L(H)$.

3) $\mathcal{U}(B)$ es subvariedad de clase C^∞ de $L(H)$.

4) $\mathcal{U}(B)$ es localmente cerrado.

5) $\mathcal{S}(B, B^*)$ es localmente cerrado.

6) $\mathcal{S}(B, B^*)$ es cerrado.

7) $\mathcal{S}(B, B^*)$ es subvariedad diferenciable de $L(H)^2$.

8) $S(B, B^*)$ es subvariedad analítica de $L(H)^2$.

9) $\pi_{(B,B^*)} : \mathcal{G}\ell(H) \to S(B, B^*)$ tiene secciones locales continuas.

Demostración: 1) $\iff$ 2) $\iff$ 3) $\iff$ 4) es el teorema 4.4. 5) $\implies$ 4) es lema 5.8. 1) $\implies$ 7) es el teorema 5.5. 7) $\implies$ 5) es inmediato, 6) $\implies$ 5) también. 1) $\implies$ 6) es un teorema de R. Curto y D. Herrero que no expondremos aquí (ver [6], Th. 8.4). 8) Es claramente equivalente a los anteriores. Sólo falta ver que 9) es equivalente al resto.

Que 1) $\implies$ 9) es el teorema 5.3. Veamos que 9) $\implies$ 1).

Sea $s : \mathcal{W} \subset S(B, B^*) \to \mathcal{G}\ell(H)$ una sección local de π_{B,B^*} en un entorno de (B, B^*). Llamemos $i : \mathcal{U}(B) \to \mathcal{U}(B, B^*) \subset S(B, B^*)$, $i(C) = (C, C^*)$. La aplicación u, $u(C) = s(i(C))[s(i(C))^* s(i(C))]^{-1/2}$ definida en $i^{-1}(\mathcal{W})$ es una sección local unitaria para π_B en un entorno de B.

En efecto, $s(i(C))^* s(i(C))$ conmuta con B y con B^*, por una cuenta similar a la de la demostración del lema anterior. Luego u es una sección unitaria claramente continua. ♦

Corolario 5.10

Sea $B \in L(H)$ satisfaciendo alguna de las condiciones equivalentes de 5.9. Sea $\widetilde{\mathcal{W}}$ como en 5.4, entonces

$$\hat{\omega} : \{C \in \mathcal{U}(B) : (C, C^*) \in \widetilde{\mathcal{W}}\} \longrightarrow \mathcal{U}(H),$$

$$\hat{\omega}(C) = \left[\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} E_{j1}^i p_{1j}^i(C, C^*)\right]^{-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} p_{j1}^i(C, C^*) E_{11}^i p_{1j}^i(C, C^*)\right]^{-1/2}$$

es una sección local C^∞ para $\pi_B : \mathcal{U}(H) \to \mathcal{U}(B)$.

Demostración: Sea ω la sección de π_{B,B^*} obtenida en 5.4. En virtud de la última parte de la demostración de 5.9, se puede obtener una sección unitaria $\hat{\omega}$ definida en $i^{-1}(\widetilde{\mathcal{W}}) = \{C \in \mathcal{U}(B) : (C, C^*) \in \mathcal{W}\}$, poniendo

$$\hat{\omega}(C) = \omega(C, C^*)[\omega(C, C^*)^* \omega(C, C^*)]^{-1/2} =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{p} p_{j1}^i(C, C^*) E_{1j}^i\right)^{-1} \left[\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} p_{j1}^i(C, C^*) E_{1j}^i E_{j1}^i (p_{j1}^i(C, C^*))^*\right]^{-1/2}$$

La prueba se termina observando que como $(C, C^*) \in \mathfrak{U}(B, B^*)$,

$$(p^i_{j1}(C, C^*))^* = (VE^i_{j1}V^*)^* = VE^i_{1j}V^* = p^i_{1j}(C, C^*) \ . \quad \blacklozenge$$

§ 6. ORBITAS UNITARIAS EN C^*-ALGEBRAS.

Las dos secciones locales explícitas de $\pi_{(B,B^*)}$ y de π_B construidas en la sección anterior tienen la propiedad de poder ser definidas en la C^*-álgebra generada por B, los argumentos y la identidad. Ello motiva el estudio de la estructura de las órbitas unitarias de elementos en una C^*-álgebra arbitraria $\mathcal{A}$.

Comenzaremos definiendo una nueva sección local explícita unitaria para π_B ($B \in L(H)$ con $C^*(B)$ de dimensión finita), inspirada en la sección local construida por Deckard y Fialkow, transcripta a esta exposición en el teorema 3.1.

Primero, observemos que la aplicación ϕ se puede restringir a $\mathcal{U}(B)$, y que en tal caso, toma valores en $P_n(H)$ el conjunto de sistemas de proyectores de orden n de H, esto es

$$P_n(H) = \{(P_1, \ldots, P_n) \in I_n(H) \, : \, P_i^* = P_i, \quad 1 \leq i \leq n\},$$

donde como siempre, $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$.

En efecto, si $C \in \mathcal{U}(B)$, $C = UBU^*$, con $U \in \mathcal{U}(H)$, con lo cual $\overline{\phi}(C) := \phi(C, C^*) = U\phi(B, B^*)U^* \in P_n(H)$, pues $\phi(B, B^*) \in P_n(H)$ y U es unitario.

El conjunto $P_n(H)$ también fue estudiado en [5], y por ejemplo, es una subvariedad de $L(H)^n$ de clase C^∞.

Definición 6.1

Llamaremos $\overline{\sigma} : \mathcal{V} \subset P_n(H) \to L(H)$ a la aplicación continua dada por

$$\overline{\sigma}(P_1, \ldots, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\phi}_i(B) P_i \, [I - (\overline{\phi}_i(B) - P_i)^2]^{-1/2},$$

donde $\mathcal{V}$ es un entorno de $\overline{\phi}(B)$ en $P_n(H)$, de manera que $\overline{\sigma}$ esté bien definida (por ejemplo, si $\|Q_i - \overline{\phi}_i(B)\| < 1, \quad 1 \leq i \leq n$ para $(Q_1, \ldots, Q_n) \in P_n(H)$).

Proposición 6.2

Para $P = (P_1, \ldots, P_n)$ en un entorno apropiado $\widetilde{\mathcal{V}}$ de $\overline{\phi}(B)$ en $P_n(H)$, $\overline{\sigma}(P) \in \mathcal{U}(H)$ y además verifica que $\overline{\sigma}(P)P_i = \overline{\phi}_i(B)\overline{\sigma}(P)$, $1 \leq i \leq n$.

Demostración: Verifiquemos primero esto último. Para ello observemos que $\overline{\phi}_i(B)P_i$ conmuta $(\overline{\phi}_i(B) - P_i)^2$, lo cual es inmediato. Entonces

$$\overline{\sigma}(P)P_i = \overline{\phi}_i(B)P_i\,[I - (\overline{\phi}_i(B) - P_i)^2]^{-1/2} = \overline{\phi}_i(B)\,.\,\overline{\sigma}(P)\,.$$

Falta ver que $\overline{\sigma}(P) \in \mathcal{U}(H)$.

$$\overline{\sigma}(P)^* = \sum_{i=1}^{n}[I - (\overline{\phi}_i(B) - P_i)^2]^{-1/2}P_i\overline{\phi}_i(B)\,,$$

pues $(\overline{\phi}_i(B) - P_i)^2$ es autoadjunto. Además, conmuta con $P_i\overline{\phi}_i(B)$.

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(P)^*\overline{\sigma}(P) &= \left\{\sum_{i=1}^{n}[I - (\overline{\phi}_i(B) - P_i)^2]^{-1/2}P_i\overline{\phi}_i(B)\right\}\left\{\sum_{j=1}^{n}\overline{\phi}_j(B)P_j\,[I - (\overline{\phi}_j(B) - P_j)^2]^{-1/2}\right\}\\ &= \sum_{i=1}^{n}[I - (\overline{\phi}_i(B) - P_i)^2]^{-1/2}P_i\overline{\phi}_i(B)P_i\,[I - (\overline{\phi}_i(B) - P_i)^2]^{-1/2}\,.\end{aligned}$$

Para ver que esto da como resultado I, alcanza con probar que

$$[I - (\overline{\phi}_i(B) - P_i)^2]^{-1}P_i\overline{\phi}_i(B)P_i = P_i$$

o equivalentemente, que $P_i\overline{\phi}_i(B)P_i = [I - (\overline{\phi}_i(B) - P_i)^2]P_i$, lo cual es inmediato, pues entonces

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(P)^*\overline{\sigma}(P) &= \sum_{i=1}^{n}[I - (\overline{\phi}_i(B) - P_i)^2]^{-1/2}P_i\overline{\phi}_i(B)\overline{\phi}_i(B)P_i[I - (\overline{\phi}_i(B) - P_i)^2]^{-1/2} =\\ &= \sum_{i=1}^{n}[I - (\overline{\phi}_i(B) - P_i)^2]^{-1}P_i\overline{\phi}_i(B)P_i = \sum_{i=1}^{n}P_i = I\,.\end{aligned}$$

Vale, análogamente, que $\overline{\sigma}(P)\overline{\sigma}(P)^* = I$. ♦

Observación 6.3

Definiendo $\overline{\rho}(C)$, para $C \in \overline{\phi}^{-1}(\widetilde{\mathcal{V}})$, como $\overline{\rho}(C) = \overline{\sigma}\overline{\phi}(C)\,C[\overline{\sigma}\overline{\phi}(C)]^*$, por la propiedad anterior resulta que

$$\overline{\phi}(\overline{\rho}(C)) = \overline{\phi}(B), \quad C \in \overline{\phi}^{-1}(\widetilde{\mathcal{V}})\,.$$

La demostración es análoga a la de la propiedad similar cumplida por ρ de la sección anterior.

Proposición 6.4

La aplicación continua $\overline{\omega}_0$, definida en $\overline{\phi}^{-1}(\widetilde{\mathcal{V}})$ (que es un entorno de B en $\mathcal{U}(B)$),

$$\overline{\omega}_0 : \overline{\phi}^{-1}(\widetilde{\mathcal{V}}) \longrightarrow \mathcal{U}(H), \quad \text{dada por} \quad \overline{\omega}_0(C) = [\sigma\overline{\phi}(C)]^* \overline{K}\overline{\rho}(C) \, ,$$

donde $\overline{K}(X) := K(X, X^*)$, $\quad X \in \overline{\phi}^{-1}(\overline{\phi}(B))$, es una sección local C^∞ para π_B.

<u>Demostración</u>: Es claro que $\overline{\omega}_0(C) \in \mathcal{U}(H)$. Que es sección es consecuencia inmediata de la demostración de 5.3 (nótese en este caso, el U_V de 5.3 es el mismo de la demostración de 3.1). ♦

Observaciones 6.5

1) Se le puede dar a $\omega_0(C)$ un aspecto más sencillo,

$$\overline{\omega}_0(C) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} p_{j1}^i(C, C^*)[I - (E_{11}^i - p_{11}^i(C, C^*))^2]^{-1/2} p_{11}^i(C, C^*) E_{1j}^i \, ,$$

$C \in \overline{\phi}^{-1}(\widetilde{\mathcal{V}})$. Pues

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_0(C) &= [\sigma\overline{\phi}(C)]^* [\overline{K}(\sigma\overline{\phi}(C) C [\sigma\overline{\phi}(C)^*)] = \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} p_{j1}^i(C, C^*)[\sigma\overline{\phi}(C)]^* E_{1j}^i = \left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} E_{j1}^i \sigma\overline{\phi}(C) p_{1j}^i(C, C^*) \right)^* \end{aligned}$$

Como $E_{j1}^i \sigma\overline{\phi}(C) = E_{j1}^i E_{11}^i p_{11}^i(C, C^*)[I - (E_{11}^i - p_{11}^i(C, C^*))^2]^{-1/2}$, resulta

$$\overline{\omega}_0(C) = \left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} E_{j1}^i p_{11}^i(C, C^*)[I - (E_{11}^i - p_{11}^i(C, C^*))^2]^{-1/2} p_{1j}^i(C, C^*) \right)^*$$

de donde se sigue de inmediato lo buscado.

2) $\overline{\omega}_0(C)$ pertenece a la C^*-álgebra generada por C, B y la identidad.

Definición 6.6

Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra, que supondremos contenida en $L(H)$. Llamaremos $\mathcal{A}^{-1}$ al grupo de Lie de elementos invertibles de $\mathcal{A}$, y $\mathcal{U}$ al grupo de Lie de elementos unitarios.

Para $b \in \mathcal{A}$, llamaremos a $\mathcal{U}(b) = \{ubu^* : u \in \mathcal{U}\}$ la órbita unitaria de b. Sea π_b la aplicación

$$\pi_b : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}(b), \quad \pi_b(u) = ubu^*, \quad u \in \mathcal{U} .$$

Observación 6.7

Sea $b \in \mathcal{A}$ tal que $C^*(b)$ es de dimensión finita. Entonces $\mathcal{A}$ se representa en $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i}$, de manera que $C^*(b)$ se identifica con la suma de álgebras de matrices $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{M}_{n_i}(\mathcal{K}_i)$, donde $\mathcal{M}_{n_i}(\mathcal{K}_i)$ nota a la C^*-álgebra que consiste de elementos de la forma $(\alpha_{jk}^i \mathrm{Id}_{\mathcal{K}_i})_{1 \leq j,k \leq n_i}$, para $(\alpha_{j,k}^i)_{1 \leq j,k \leq n_i} \in \mathbf{C}^{n_i \times n_i}$ arbitrarios, $1 \leq i \leq p$ (ver § 2).

Proposición 6.8

Si $b \in \mathcal{A}$ tal que $C^*(b)$ es de dimensión finita, entonces π_b tiene secciones locales continuas.

Demostración: Podemos trabajar en $\widetilde{\mathcal{A}}$, la imagen de $\mathcal{A}$ por la representación citada en 6.7. Las aplicaciones $\bar{\sigma}$, $\bar{\phi}$, $\bar{p}$ y $\bar{\mathcal{K}}$ tienen sentido en el nuevo contexto (Notar que $E_{rs}^i \in \widetilde{\mathcal{A}}$).

Es decir, restringidas a $\widetilde{\mathcal{A}}$ y a $\mathcal{U}(\tilde{b})$ ($\tilde{b}$ la imagen de b) toman valores en $\widetilde{\mathcal{A}}$ o en $P_n = \{(p_1, \ldots, p_n) \in \widetilde{\mathcal{A}}^n : p_i^2 = p_i^* = p_i, \;\; p_i p_j = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \;\; 1 \leq i,j \leq n\}$, según corresponda. Por lo tanto, la sección ϖ_0 restringida a $\mathcal{U}(\tilde{b})$, toma valores en $\mathcal{U} = \mathcal{U}\left(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i}\right) \cap \widetilde{\mathcal{A}}$. Con lo cual resulta lo deseado. ♦

Teorema 6.9

Si $b \in \mathcal{A}$ tal que $C^*(b)$ es de dimensión finita, entonces $\mathcal{U}(b)$ es un espacio homogéneo de Banach de clase C^∞, bajo la acción de $\mathcal{U}$. En particular, resulta $\mathcal{U}(b)$ una subvariedad de clase C^∞ de $\mathcal{A}$, cuyo espacio tangente en c es $R\delta_c = \{xc - cx : x \in \mathcal{A}_{ah}\}$.

Demostración: Podemos suponer que $\mathcal{A}$ coincide con $\widetilde{\mathcal{A}}$, es decir que es suma de C^*-álgebras de matrices, en el sentido ya expuesto. Para probar el teorema, nos valdremos ahora del teorema 1.10 que dice que si existe una aplicación θ definida en un entorno $\mathcal{W}$ de b en $\mathcal{A}$, a valores en $\mathcal{A}$, de clase C^∞, con la propiedad de que $\theta(b) = 1$ y que $\theta|_{\widetilde{W} \cap \mathcal{U}(b)}$ es una sección local unitaria para π_b, entonces $\mathcal{U}(b)$ resulta un espacio homogéneo de Banach de clase C^∞ bajo la acción de $\mathcal{U}$.

Para ello veamos que la sección local ϖ_0 definida en $\overline{\phi}^{-1}(\widetilde{V}) \cap \mathcal{A}$, se puede extender a una aplicación C^∞ en un entorno $\widetilde{W}$ de b en $\mathcal{A}$. Recordemos que $\varpi_0(c) = [\overline{\sigma}\overline{\phi}(c)]^* \overline{K}\overline{p}(c)$.

Es claro que $\overline{\phi}$ se puede extender a todo $\mathcal{A}$, con valores en $\mathcal{A}^n$, de manera obvia. Llamemos $\widetilde{\phi}$ a esa extensión, que es evidentemente C^∞. Definiremos $\widetilde{\sigma}$ de la siguiente manera,

$$\widetilde{\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\phi}(b) x_i \left[1 - (\widetilde{\phi}_i(b) - x_i)(\widetilde{\phi}_i(b) - x_i^*)\right]^{-1/2}$$

para $(x_1, \ldots, x_n)$ en un entorno de $\widetilde{\phi}(b)$ en $\mathcal{A}^n$, de manera que $1 - (\widetilde{\phi}_i(b) - x_i)(\widetilde{\phi}_i(b) - x_i^*)$ sea estrictamente positivo. Esta aplicación también es C^∞.

Finalmente, $\widetilde{K}$ y $\widetilde{p}$ se definen extendiendo naturalmente a $\overline{K}$ y $\overline{p}$, de manera que resultan aplicaciones de clase C^∞ en un entorno de b en $\mathcal{A}$.

Poniendo $\theta(x) = [\widetilde{\sigma}\widetilde{\phi}(x)]^* \widetilde{K}\widetilde{p}(x)$, está claro que θ es C^∞ en un cierto entorno $\widetilde{W}$ de b en $\mathcal{A}$, $\theta(b) = 1$ y $\theta|_{\mathcal{U}(b) \cap \widetilde{W}} \equiv \varpi_0$. ♦

Teorema 6.10

Sea $b \in \mathcal{A}$ tal que $C^*(b)$ es de dimensión finita. Entonces la órbita de similaridad conjunta del par (b, b^*), $\mathcal{S}(b, b^*) = \{gbg^{-1}, gb^*g^{-1}) \in \mathcal{A}^2 : g \in \mathcal{A}^{-1}\}$, es un espacio homogéneo de Banach analítico bajo la acción de $\mathcal{A}^{-1}$. En particular, $\mathcal{S}(b, b^*)$ es una subvariedad analítica de $\mathcal{A}^2$, cuyo espacio tangente en (c, d) es $R\delta_{(c,d)} = \{(\delta_c(x), \delta_d(x)) : x \in \mathcal{A}\}$. Además, en tal caso, $\mathcal{U}(b) \times \mathcal{U}(b)$ y $\mathcal{S}(b, b^*)$ resultan C^∞-localmente difeomorfas.

<u>Demostración</u>: La demostración es completamente análoga a la de 6.9, inclusive más sencilla, por contarse con la sección local más simple

$$\omega(c, d) = \left[\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} E_{j1}^i p_{1j}^i(c, d)\right]^{-1} \qquad (c, d) \in \widetilde{W} \cap \mathcal{A}^2 \,,$$

dada en 5.4. La última parte es consecuencia inmediata de lo observado en 5.6. ♦

Observación 6.11

La recíproca de ambos resultados es falsa. Basta considerar el contraejemplo dado en [10], es decir, $\mathcal{A} = C([0,1], \mathbf{C})$ y $b \in \mathcal{A}$ la función $b(t) = t$. $C^*(b)$ no es de dimensión finita (contiene a los polinomios), pero tanto $\mathcal{U}(b)$ como $\mathcal{S}(b, b^*)$ se reducen a un punto, por ser $\mathcal{A}$ conmutativa.

§ 7. ECUACIONES DIFERENCIALES EN ESPACIOS DE BANACH.

En esta sección se presentarán los rudimentos básicos de la teoría de ecuaciones en espacios de Banach. A saber, los teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones lineales y el teorema de existencia y unicidad local de una ecuación no lineal donde el coeficiente satisface cierta condición de Lifschitz. La exposición estará basada en el capítulo del libro de Ju. L. Daleckiĭ y M. G. Krein (ver [7]).

Además agregaremos algunas nociones que en apariencia no están relacionadas con este tema, pero que serán requeridas en secciones posteriores.

En esta exposición nos interesará solamente el problema homogéneo. Esto es, estudiar la existencia y unicidad de solución de una ecuación del tipo

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dt}(t) = A(t)\gamma(t), & t \in [\alpha, \beta] \\ \gamma(t_0) = x_0, \end{cases}$$

donde x_0 y $\gamma(t)$ pertenecen a un espacio de Banach X, $A(t) \in L(X)$ para $t \in [\alpha, \beta]$, y t_0 fijo en $[\alpha, \beta]$.

El primer caso que consideraremos es el de la ecuación con coeficiente constante, o sea, $A(t) = A \in L(X)$ para $t \in [\alpha, \beta]$. El resultado en este caso es bien sencillo. Sea X un espacio de Banach fijo.

Teorema 7.1

Dado $x_0 \in X$ y $A \in L(X)$, existe una única solución a la ecuación

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\gamma(t) = A(t)\gamma(t), & t \in [\alpha, \beta] \\ \gamma(t_0) = x_0, \end{cases}$$

y está dada por $\gamma(t) = e^{A(t-t_0)}(x_0)$.

<u>Demostración</u>: Que $\gamma(t) = e^{A(t-t_0)}(x_0)$ es solución es inmediato,

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = Ae^{A(t-t_0)}(x_0) = A\gamma(t) \quad \text{y} \quad \gamma(t_0) = e^{A(t_0-t_0)}(x_0) = x_0 \, .$$

Para ver la unicidad, alcanza con demostrar que la única solución (diferenciable) de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\gamma(t) = A(t)\gamma(t), \\ \gamma(t_0) = 0 \end{cases}$$

es la curva $\gamma \equiv 0$. Una solución γ de este problema, debe satisfacer

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} A\gamma(t)dt \, .$$

Con lo cual, si $|t - t_0| \leq \delta$, vale que

$$\|\gamma(t)\| \leq \delta\|A\| \sup_{|t-t_0|\leq\delta} \|\gamma(s)\| \, ,$$

lo cual, si γ no es idénticamente cero en $|t - t_0| \leq \delta$ es una contradicción, si tomamos δ de manera que $\delta\|A\| < 1$. Resulta luego, que una solución que se anule en t_0, se anula también en

$$\left[t_0 - \frac{1}{\|A\|+1}, \quad t_0 + \frac{1}{\|A\|+1}\right] .$$

Tomando como puntos iniciales sucesivos a

$$t_n = t_{n-1} + \frac{n}{\|A\|+1} \quad \text{y} \quad t'_n = t'_{n-1} - \frac{n}{\|A\|+1} \, ,$$

se obtiene que γ se anula en $[\alpha, \beta]$. ♦

Observación 7.2

Nótese que en todos los casos, la solución diferenciable resulta de clase C^∞.

El caso de coeficientes no constantes es similar aunque de demostración un poco más complicada. Para resolverlo precisaremos un resultado bien conocido, que vale en un contexto más amplio que el citado aquí, y del que no daremos demostración (ver [7], pág. 52).

Teorema 7.3

Sea S un operador continuo, no necesariamente lineal, actuando en un cerrado $M \subset X$, con la propiedad de que existe $m \geq 1$ tal que S^m es una contracción, esto es, $\|S^m_x - S^m_y\| \leq q\|x - y\|$, con $0 \leq q \leq 1$. Entonces, existe en M un único punto fijo v de S. Más aún, el punto fijo puede ser obtenido a partir de cualquier $x_0 \in M$,

$$v = \lim_{k\to\infty} S^k_{x_0} \, . \quad ♦$$

Introduciremos además un lema que será de utilidad en lo que sigue.

Lema 7.4

Sea $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ continua, entonces

$$\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{S_n} \cdots \int_{t_0}^{S_2} f(S_n) f(S_{n-1}) \ldots f(S_1) dS_1 dS_2 \ldots dS_n = \frac{1}{n!} \left[\int_{t_0}^{t} f(S) dS \right]^n$$

Demostración: Por inducción en n. Si $n = 1$ es evidente. Si $n > 1$,

$$\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{S_{n+1}} \int_{t_0}^{S_n} \cdots \int_{t_0}^{S_2} f(S_{n+1}) f(S_n) \ldots f(S_1) dS_1 dS_2 \ldots dS_n dS_{n+1} =$$

$$= \int_{t_0}^{t} f(S_{n+1}) \left[\int_{t_0}^{S_{n+1}} \int_{t_0}^{S_n} \cdots \int_{t_0}^{S_2} f(S_n) \ldots f(S_1) dS_1 \ldots dS_n \right] dS_{n+1} \,.$$

Aplicando la hipótesis inductiva a la integral entre barras, resulta

$$\int_{t_0}^{S_{n+1}} \int_{t_0}^{S_n} \cdots \int_{t_0}^{S_2} f(S_n) \ldots f(S_1) dS_1 \ldots dS_n = \frac{1}{n!} \left[\int_{t_0}^{S_{n+1}} f(S) dS \right]^n$$

Con lo cual la integral que queríamos calcular queda igual a

$$\frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} f(S_{n+1}) \left[\int_{t_0}^{S_{n+1}} f(S) dS \right]^n dS_{n+1} \,.$$

Llamemos $g(t) = \dfrac{1}{(n+1)!} \left[\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(S) dS \right]^{n+1}$. Como f es continua, g es derivable y vale que

$$\frac{d}{dt} g(t) = \frac{1}{n!} \left[\int_{t_0}^{t} f(S) dS \right]^n . f(t) \,.$$

Por otra parte, llamando $h(t) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(S_{n+1}) \left[\int_{t_0}^{S_{n+1}} f(S) dS \right]^n dS_{n+1}$, es claro que también h es derivable, y su derivada es

$$\frac{d}{dt} h(t) = \frac{1}{n!} f(t) \left[\int_{t_0}^{t} f(S) dS \right]^n$$

Como $h(t_0) = g(t_0) = 0$, resulta $g(t) = h(t)$ para $t \in [\alpha, \beta]$. ♦

Sea $A(t) \in L(X)$, $t \in [\alpha, \beta]$, una curva de clase C^p de operadores ($0 \leq p \leq \infty$). Sean $t_0 \in [\alpha, \beta]$ y $x_0 \in X$ fijos. Buscamos ahora una curva $\gamma(t)$ en X diferenciable tal que

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\gamma(t) = A(t)\gamma(t) \\ \gamma(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Nótese que tal solución debe verificar necesariamente que

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(S)\gamma(S)dS \, .$$

Teorema 7.5

Con las notaciones precedentes, existe una única solución γ diferenciable de la ecuación

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\gamma(t) = A(t)\gamma(t) \\ \gamma(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Demostración: Sea $C([\alpha, \beta], X)$ el espacio de Banach de funciones continuas del intervalo $[\alpha, \beta]$ en X, con la norma $|||x||| = \max_{t \in [\alpha, \beta]} \|x(t)\|$. En este espacio consideraremos el operador

$$(Sx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds \, .$$

Está bien definido, pues siendo A continua, Sx es claramente continua. Nótese que

$$(S^2x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(S_1)x_0 dS_1 + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{S_2} A(S_2)A(S_1)x(S_1)dS_1 dS_2$$

y en general

$$\begin{aligned} (S^n x)(t) = x_0 &+ \int_{t_0}^{t} A(S_1)x_0 dS_1 + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{S_2} A(S_2)A(S_1)x_0 dS_1 dS_2 + \\ &+ \ldots + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{S_{n-1}}\int_{t_0}^{S_{n-2}} \cdots \int_{t_0}^{S_2} A(S_{n-1})A(S_{n-2})\ldots A(S_1)x_0 dS_1 dS_2 \ldots dS_{n-1} + \\ &+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{S_n} \cdots \int_{t_0}^{S_2} A(S_n)A(S_{n-1})\ldots A(S_1)x(S_1)dS_1 dS_2 \ldots dS_n \, . \end{aligned}$$

Luego, se tiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} (S^n x_2)(t) - (S^n x_1)(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{S_n} \cdots \int_{t_0}^{S_2} A(S_n)A(S_{n-1})\ldots A(S_1)[x_2(S_1) - x_1(S_1)] \, . \\ . \, dS_1 \ldots dS_n \, . \end{aligned}$$

Con lo cual podemos estimar

$$\|(S^n x_2)(t) - (S^n x_1)(t)\| \leq \|\|x_2 - x_1\|\| \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{S_2} \cdots \int_{t_0}^{S_2} \|A(S_n)\| \ldots \|A(S_1)\| dS_1 \ldots dS_n \, .$$

En virtud del lema anterior, tenemos que

$$\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{S_n} \cdots \int_{t_0}^{S_2} \|A(S_n)\| \ldots \|A(S_1)\| dS_1 \ldots dS_n = \frac{1}{n!} \left[\int_{t_0}^{t} \|A(s)\| ds \right]^n$$

Obsérvese que si $n \longrightarrow \infty$, $\frac{1}{n!} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \|A(s)\| ds \right]^n \longrightarrow 0$. Sea m tal que $q = \frac{1}{m!} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \|A(s)\| ds \right]^m < 1$. Resulta entonces que $\|\|S^m x_2 - S^m x_1\|\| \leq q \|\|x_2 - x_1\|\|$.

Sea $\gamma \in C([\alpha,\beta], X)$ tal que $S\gamma = \gamma$, es decir $\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\gamma(S) dS$. Esta γ es entonces de clase C^1, y resuelve la ecuación:

$$\gamma(t_0) = x_0 \, , \quad \frac{d}{dt}\gamma(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_{t_0}^{t} A(s)\gamma(s) ds \right] = A(t)\gamma(t) \, .$$

Es la única, puesto que cualquier otra provee un punto fijo en $C([\alpha,\beta], X)$ del operador S. ♦

Observaciones 7.6

1) La solución γ se puede obtener mediante el límite

$$\gamma(t) = \left[\lim_{n \to \infty} (S^n x) \right](t) \, ,$$

para cualquier $x : [\alpha, \beta] \to X$ continuo. Por ejemplo, poniendo $x(t) = x_0$, se tiene

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s) x_0 ds + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{S_n} \cdots \int_{t_0}^{S_2} A(S_n) \ldots A(S_1) x_0 dS_1 \ldots dS_n \, .$$

2) Si $A(t)$ es de clase C^p, $0 \leq p \leq \infty$, un razonamiento inductivo permite probar que γ es de clase C^{p+1}.

Nos referiremos ahora al caso no lineal, con un resultado básico que daremos sin demostración, ya que la misma es muy similar a la de 7.5, pues se basa también en 7.3 (ver [7], pág. 276).

Teorema 7.7

Sea $f(t,x)$ una función continua de las variables $x \in X$, $t \in [\alpha,\beta]$, que tiene la propiedad de que en un entorno de (t_0, x_0) fijo satisface una condición de Lifschitz en x, esto es

$$\|f(t,x_2) - f(t,x_1)\| \leq M\|x_2 - x_1\|$$

para (x_1,t), (x_2,t) en el citado entorno. Entonces existe un entorno de t_0 en el cual la ecuación

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\phi(t) = f(t,\phi(t)) \\ \phi(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene única solución diferenciable ϕ. ♦

En lo que sigue nos referiremos a dos cuestiones. La primera concierne a la existencia de curvas integrales de campos vectoriales. La segunda es acerca del levantamiento de curvas diferenciables en espacios homogéneos de Banach. No haremos esto en el caso general, sino en los casos particulares de las órbitas unitarias o de similaridad conjunta de n-uplas $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathcal{A}^n$, donde $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra.

Sea M una subvariedad de clase C^p de un espacio de Banach X.

Definición 7.8

i) Decimos que una aplicación V definida en un entorno en la variedad M a valores en X es un campo vectorial, si verifica que $V(x) \in TM_x$ para cada x en el entorno. Diremos que el campo V es de clase C^k, si es de clase C^k como aplicación entre subvariedades ($k \leq p$).

ii) Dado un campo vectorial diferenciable V, definido en un abierto $\mathcal{W} \subset M$. Decimos que una curva $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathcal{W}$ es una curva integral de V si verifica que

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = V(\gamma(t)), \quad t \in [\alpha,\beta]\,.$$

El siguiente es un resultado bien conocido, que puede ser consultado en [12] o en [13].

Teorema 7.9

Sea V un campo vectorial de clase C^k en un entorno $\mathcal{W}$ de x_0 en M. Entonces existe un número $\varepsilon > 0$ y una curva integral de clase C^{k+1} de V, $v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{W}$, con la propiedad de que $v(0) = x_0$. Además, si w es otra curva integral de V con la misma propiedad, definida en el intervalo $(-\delta, \delta)$, entonces v y w coinciden en la intersección de los dos intervalos. ♦

Definición 7.10

i) Dados V y V' campos vectoriales diferenciables en M, notaremos con VV' a la aplicación de M en X dada por $VV'_x = \left.\frac{d}{dt}V'(v(t))\right|_0$, donde $v(t)$ es una curva integral diferenciable de V con $v(0) = x$.

ii) Dados V y V' como en i), llamaremos $[V, V']$ a la aplicación de M en X dada por $[V, V']_x = VV'_x - V'V_x$.

Es un hecho bien conocido que en tal caso, $[V, V']$ es un campo vectorial diferenciable.

Supongamos ahora que G es el grupo de Lie de inversibles o el grupo unitario de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$. Sea $b \in \mathcal{A}^n$ un elemento con la propiedad de que en la órbita M de b bajo la acción de G sobre $\mathcal{A}^n$ tiene estructura de espacio homogéneo de Banach (analítico o C^∞ según el caso). Sea además $\gamma : [\alpha, \beta] \to M$ una curva de clase C^p $(1 \leq p \leq \infty)$.

Buscaremos una curva $\Gamma : [\alpha, \beta] \to G$ con la propiedad de que $\pi_b(\Gamma(t)) = \gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Impondremos la condición adicional de que $\Gamma(t_0) = g_0$, para t_0 y $g_0 \in \pi_b^{-1}(\gamma(t_0))$ fijos.

El resultado que se enuncia a continuación puede ser consultado en [20].

Teorema 7.11

Con las notaciones precedentes, y para cada $g_0 \in \pi_b^{-1}(\gamma(t_0))$ fijo, existe una curva $\Gamma : [\alpha, \beta] \to G$ de clase C^p con la propiedad de que $\Gamma(t_0) = g_0$ y $\pi_b(\Gamma(t)) = \gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. ♦

Es inmediato verificar que la curva Γ no es única. Basta multiplicar a una de ellas por cualquier curva $h : [\alpha, \beta] \to \pi_b^{-1}(b)$ de clase C^p para obtener otra.

Para finalizar la sección, citaremos un ejemplo contenido en [5], en el que se aplican algunas de las ideas expuestas.

Ejemplo

Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra con 1, sea $P = \{p \in \mathcal{A} : p^2 = p^* = p\}$ el conjunto de proyectores de $\mathcal{A}$. En [5] se probó que este conjunto es unión discreta de espacios homogéneos de Banach de clase C^∞ bajo la acción de $\mathcal{U}$. Fijemos $p_0 \in P$. La órbita unitaria de p_0, $\mathcal{U}(p_0)$, es uno de los espacios homogéneos en que se descompone P. Consideremos una curva $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{U}(p_0)$ de clase C^p $(1 \leq p \leq \infty)$. Supongamos además para simplificar la exposición, que $\gamma(t_0) = p_0$.

Veremos que la única solución Γ de la ecuación diferencial lineal

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Gamma(t) = \left\{ \left[\dfrac{d}{dt}\gamma(t)\right] \gamma(t) - \gamma(t)\, \dfrac{d}{dt}\gamma(t) \right\} \Gamma(t) \\ \Gamma(t_0) = 1 \end{cases}$$

verifica que $\pi_{p_0}(\Gamma(t)) = \gamma(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$.

Es claro que la ecuación tiene solución única Γ. El operador que hace las veces de $A(t)$ es la multiplicación a izquierda por el factor $\left[\dfrac{d}{dt}\gamma(t)\right] \gamma(t) - \gamma(t)\dfrac{d}{dt}\gamma(t)$.

Veamos que $\Gamma(t) \in \mathcal{U}$. Como $\gamma(t) \in P$, $\gamma(t)^* = \gamma(t)$ y $\gamma(t)\dfrac{d}{dt}\gamma(t) + \left[\dfrac{d}{dt}\gamma(t)\right] \gamma(t) = \dfrac{d}{dt}\gamma(t)$. Luego $\Gamma^*(t)$ verifica que $\dfrac{d}{dt}[\Gamma^*(t)\Gamma(t)] = 0$, con lo cual $\Gamma^*(t)\Gamma(t) = 1$. Observemos además que tanto $\Gamma(t)\Gamma^*(t)$ como 1 son soluciones de la ecuación lineal

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Omega(t) = \left\{ \left[\dfrac{d}{dt}\gamma(t)\right] \gamma(t) - \gamma(t)\dfrac{d}{dt}\gamma(t) \right\} \Omega(t) - \Omega(t) \left\{ \left[\dfrac{d}{dt}\gamma(t)\right] \gamma(t) - \gamma(t)\dfrac{d}{dt}\gamma(t) \right\}, \\ \Omega(t_0) = 1. \end{cases}$$

Con lo cual $\Gamma(t)\Gamma^*(t) = 1$. Es decir, $\Gamma(t) \in \mathcal{U}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Por último, verifiquemos que Γ "levanta" a γ:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}[\Gamma^*(t)\gamma(t)\Gamma(t)] = \left(\frac{d}{dt}\Gamma(t)\right)^* \gamma(t)\Gamma(t) + \Gamma^*(t) \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right) \Gamma(t) + \\
&+ \Gamma^*(t)\gamma(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t) = -\Gamma^*(t) \left\{ \left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right] \gamma(t) - \gamma(t)\frac{d}{dt}\gamma(t) \right\} \gamma(t)\Gamma(t) + \\
&+ \Gamma^*(t) \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right) \Gamma(t) + \Gamma^*(t)\gamma(t) \left\{ \left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right] \gamma(t) - \gamma(t)\frac{d}{dt}\gamma(t) \right\} \Gamma(t) = \\
= &\Gamma^*(t) \left\{ - \left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right] \gamma(t) + \gamma(t) \left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right] \gamma(t) + \gamma(t) \left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right] \gamma(t) - \right. \\
&\left. -\gamma(t)\frac{d}{dt}\gamma(t) + \frac{d}{dt}\gamma t \right\} \Gamma(t).
\end{aligned}$$

Usando la relación $\left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right]\gamma(t)+\gamma(t)\frac{d}{dt}\gamma(t)=\frac{d}{dt}\gamma(t)$ y su consecuencia

$$\gamma(t)\left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right]\gamma(t)+\gamma(t)\left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right]\gamma(t)=\gamma(t)\left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right]\gamma(t)$$

es decir, $\gamma(t)\left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right]\gamma(t)=0$, resulta que la expresión entre llaves da cero. Con lo que se tiene

$$\Gamma^*(t)\gamma(t)\Gamma(t)=\Gamma^*(t_0)\gamma(t_0)\Gamma(t_0)=p_0\,,\quad t\in[\alpha,\beta]\,,$$

es decir

$$\pi_{p_0}(\Gamma(t))=\gamma(t)\;.$$

§ 8. CONEXIONES.

En esta sección serán introducidas las nociones básicas sobre conexiones. Primero, considerando conexiones en el espacio homogéneo (y por lo tanto fibrado principal) $\pi_b : G \to M$, donde G, como en capítulos anteriores, es $\mathcal{A}^{-1}$ o $\mathcal{U}$ y M es la órbita de una n-upla fija $b \in \mathcal{A}^n$. Luego nos referiremos a conexiones lineales en la variedad M. No haremos hincapié en la relación existente entre estos dos conceptos en esta sección.

Recordemos que si M es un espacio homogéneo de Banach, resulta π_b una sumersión, con lo cual $\pi_b^{-1}(b)$ es un subgrupo de Lie de G.

Llamemos $\mathcal{V}g = \ker d(\pi_b)_g = g \ker \delta_b$, para $g \in G$. Nótese que por ser M un espacio homogéneo $\mathcal{V}g$ es un subespacio complementado de TG (TGg es $g\mathcal{A}$ si $G = \mathcal{A}^{-1}$ y $g\mathcal{A}_{ah}$ si $G = \mathcal{U}$).

Definición 8.1

Una conexión en el fibrado $\pi_b : G \to M$ es una aplicación que a cada $g \in G$ le asocia un subespacio complementado $\mathcal{H}g$ de TGg, y satisface las siguientes propiedades:

i) $TGg = \mathcal{H}g \oplus \mathcal{V}g$.

ii) Para cada $v \in \pi_b^{-1}(b)$, $\mathcal{H}g \,.\, v = \mathcal{H}_{gv}$.

iii) La distribución $g \mapsto \mathcal{H}g$ es diferenciable.

Precisaremos el punto iii): Dado un campo vectorial X definido en un entorno en G, para cada g en su dominio, se tiene $Xg = Yg + Zg$, donde $Yg \in \mathcal{H}g$ y $Zg \in \mathcal{V}g$, con lo que queda definido un campo vectorial Y; la condición iii) se traduce en que cada vez que X sea diferenciable, Y también lo sea.

El espacio $\mathcal{H}g$ se denomina subespacio horizontal en g. $\mathcal{V}g$ es entonces el subespacio vertical. Nótese que $\mathcal{V}g = g\mathcal{V}_1$.

Si N es una subvariedad de un espacio de Banach, notaremos con $\mathcal{X}(N)$ al espacio vectorial de campos vectoriales diferenciables sobre N. Si $\mathbf{V}$ es un espacio de Banach, $C^\infty(N, \mathbf{V})$ notará al espacio vectorial de funciones C^∞ de N en $\mathbf{V}$. Obsérvese que si $\mathbf{V} = \mathbf{C}$, $C^\infty(N, \mathbf{C})$ es un anillo y $\mathcal{X}(N)$ es un $C^\infty(N, \mathbf{C})$-módulo.

Observación 8.2

Dada una conexión en el espacio homogéneo $\pi_b : G \to M$, podemos definir una 1-forma diferenciable de G a valores en el álgebra de Lie $\ker \delta_b$. Es decir, una aplicación $\theta : \mathcal{X}(G) \to C^\infty(G, \ker \delta_b)$, $C^\infty(G, \mathbb{C})$-lineal, de la siguiente manera:

Dado $X \in \mathcal{X}(G)$, $\theta(X)_g$ es igual a la parte vertical de $g^{-1}Xg \in TG_1$. Si $Xg = Yg + Zg$ con $Zg \in \mathcal{V}g$, $\theta(X)_g = g^{-1}Zg$. La 1-forma θ cumple las siguientes propiedades:

i) Si $Z \in \ker \delta_b$ y si llamamos $\widetilde{Z}$ al campo invariante a izquierda definido por Z, esto es, $\widetilde{Z}g = gZ$, $g \in G$, entonces $\theta(\widetilde{Z}) = Z$.

ii) Para cada $v \in \pi_b^{-1}(b)$, si notamos con r_v al difeomorfismo de G que consiste en multiplicar a derecha por v, para $X \in \mathcal{X}(G)$,

$$\theta_{gv}(r_v \circ Xg) = v^{-1}\theta g(Xg)v, \quad g \in G\,.$$

iii) θ es diferenciable, es decir, que cuando se aplica a campos diferenciables, efectivamente produce funciones diferenciables de G en $\ker \delta_b$.

Las propiedades i) y iii) son claras. Veamos que se cumple ii). Primero, en el caso particular en que $X \in \mathcal{X}(G)$ sea horizontal, es decir, $Xg \in \mathcal{H}g$, $g \in G$. Es claro que, por un lado, $\theta(X)$ es la función nula. Por otra parte, $Xg \cdot v \in \mathcal{H}g \cdot v = \mathcal{H}_{gv}$ si $v \in \pi_b^{-1}(b)$, con lo cual $\theta_{gv}(r_v\, Xg)$ también es nulo y ii) se cumple en este caso.

Supongamos ahora que $X = \widetilde{Z}$, para $Z \in \ker \delta_b$. Tenemos que $v^{-1}\theta_g(\widetilde{Z}g)v = v^{-1}Zv$, $g \in G$. Por otro lado también $\theta_{gv}(r_v \circ \widetilde{Z}g) = v^{-1}Zv$, pues $r_v(\widetilde{Z}g) = gZv = gv(v^{-1}Zv)$, y como $v^{-1}Zv \in \ker \delta_b$ (v conmuta con b) resulta esto último igual a $(v^{-1}Zv)^{\sim}_{gv}$.

Nótese ahora que como la igualdad a probar es puntual (depende del valor de X en g para cada g solamente), cada campo vertical coincide en un punto g_0 con el valor de un campo vertical invariante a izquierda, a saber, X coincide en g_0 con $(g_0^{-1}\, Xg_0)^{\sim}$. Con lo que ii) se cumple también para campos verticales. Luego, vale para todo $X \in \mathcal{X}(G)$.

Es un hecho bien conocido que la 1-forma θ con las tres propiedades enunciadas, caracteriza a la conexión. Vale decir que si ω es una 1-forma a valores en $\ker \delta_b$ que cumple i), ii) y iii), se puede definir una conexión en $\pi_b : G \to M$, tomando $\mathcal{H}g = \ker \omega_g$.

Definición 8.3

Sea $\gamma : [\alpha, \beta] \to M$ una curva C^1, sean $t_0 \in [\alpha, \beta]$ y $g_0 \in \pi_b^{-1}(\gamma(t_0))$ fijos. Llamaremos levantamiento horizontal de γ por g_0 en t_0 a una curva $\Gamma : [\alpha, \beta] \to G$ de clase C^1 tal que

i) $\Gamma(t) b \Gamma(t)^{-1} = \pi_b(\Gamma(t)) = \gamma(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$.

ii) $\Gamma(t_0) = g_0$.

iii) $\dfrac{d}{dt}\Gamma(t) \in \mathcal{H}_{\Gamma(t)}, \quad t \in [\alpha, \beta]$.

Obsérvese que iii) puede ser sustituido por la condición

$$\theta_{\Gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}\Gamma(t)\right) \equiv 0 \, .$$

El siguiente es un resultado clásico, que puede ser consultado en [14], cap. 2, donde está hecho para variedades de dimensión finita. De todas formas, la misma demostración con ligeras modificaciones puede aplicarse a nuestro caso.

Teorema 8.4

Dadas $\gamma : [\alpha, \beta] \to M$, t_0 y g_0 como en 8.3, existe un único levantamiento horizontal de γ por g_0 en t_0. ♦

Definición 8.5

Sea $X \in \mathcal{X}(M)$. Llamaremos levantamiento horizontal de X a un campo $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(G)$ con las propiedades:

i) $d(\pi_b)_g(\mathbf{X}_g) = X_{\pi_b(g)}$,

ii) $\mathbf{X}g \in \mathcal{H}g, \quad g \in G$.

La unicidad y existencia de $\mathbf{X}$ son claras, ya que para cada g, $d(\pi_b)_g$ es un isomorfismo de $\mathcal{H}g$ en $TM_{\pi_b(g)}$.

Observación 8.6

Existe una relación muy clara entre levantamiento horizontal de campos y curvas. Sea $X \in \mathcal{X}(M)$ y sea $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ una curva integral de X. Si $\mathbf{X}$ es el levantamiento horizontal de X y $\mathbf{x} : (-\delta, \delta) \to G$ es una curva integral de $\mathbf{X}$ con $\mathbf{x}(0) \in \pi_b^{-1}(x(0))$, entonces $\mathbf{x}$ es el levantamiento horizontal de x por $\mathbf{x}(0)$ en 0. En efecto, primero, es claro que $\dfrac{d}{dt}\mathbf{x}(t) =$

$X_{\bar{x}(t)} \in \mathcal{H}_{\bar{x}(t)}$. Segundo, $X_{\pi_b(\bar{x}(t))} = d(\pi_b)_{\bar{x}(t)}(X_{\bar{x}(t)}) = d(\pi_b)_{\bar{x}(t)}\left(\frac{d}{dt}\bar{x}(t)\right) = \frac{d}{dt}\pi_b(\bar{x}(t))$, $t \in (-\delta, \delta)$. Con lo cual $\pi_b(\bar{x}(t))$ es una curva integral de X, con $\pi_b(\bar{x}(0)) = x(0)$. Por lo tanto, $\pi_b(\bar{x}(t))$ y $x(t)$ coinciden en la intersección de los intervalos $(-\varepsilon, \varepsilon)$ y $(-\delta, \delta)$.

Pasaremos a considerar ahora conexiones lineales en la subvariedad M de $\mathbb{A}^n$.

Definición 8.7

Una conexión lineal en la subvariedad M es una regla ∇ que asigna a cada $X \in \mathcal{X}(M)$ una aplicación lineal ∇_X de $\mathcal{X}(M)$ en si mismo, y que satisface las siguientes condiciones, si $f, g \in C^\infty(M, \mathbf{C})$ y si $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$:

i) $\nabla_{fX_1+gX_2} = f\,\nabla_{X_1} + g\nabla_{X_2}$

ii) $\nabla_{X_1}(fX_2) = f\,\nabla_{X_1}(X_2) + (X_1 f)\,.\,X_2$

donde $X_1 f$ denota a la función C^∞ de M en $\mathbf{C}$ dada por $(X_1 f)_x = \frac{d}{dt}f(x(t))\Big|_0$, donde $x(t)$ es una curva diferenciable adaptada a $X_1 x$, esto es, $x(0) = x$, $\frac{d}{dt}x(0) = X_{1x}$.

Si $X \in \mathcal{X}(M)$, a la aplicación ∇_X la denominaremos derivada covariante con respecto a X.

Observación 8.8

Si $X \in \mathcal{X}(M)$ se anula en $x \in M$, entonces ∇_X también. Este es un hecho bien conocido, que implica que el valor de ∇_X en x, depende del valor de X_x.

Definición 8.9

Sea $X \in \mathcal{X}(M)$ y $\gamma : [\alpha, \beta] \to M$ una curva C^2. Por la observación precedente tiene sentido considerar la derivada $\nabla_{(d\gamma/dt)(t)}$ (extendiendo a la curva diferenciable de vectores tangentes $\frac{d}{dt}\gamma(t)$, a un campo vectorial diferenciable en M). Diremos que el campo X es paralelo a lo largo de la curva γ si se verifica que $(\nabla_{(d\gamma/dt)(t)}X)_{\gamma(t)} \equiv 0$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Definición 8.10

Sea $\gamma : [\alpha, \beta] \to M$ de clase C^2. Diremos que γ es geodésica, si para cada $t_0 \in [\alpha, \beta]$,

$(\nabla_{(d\gamma/dt)(t_0)}X)\gamma(t_0) = 0$, donde X es un campo vectorial en un entorno de $\gamma(t_0)$ en M, que "extiende" a $\frac{d}{dt}\gamma(t)$, o sea $X_{\gamma(t)} = \frac{d}{dt}\gamma(t)$ en dicho entorno.

Un resultado general, que aquí no expondremos, establece que dado $x \in M$ y $V \in TM_x$, existe una única geodésica $\gamma : (\varepsilon, \delta) \to M$, con $0 \in (\varepsilon, \delta)$, $\gamma(0) = x$, $\frac{d}{dt}\gamma(0) = V$.

Definición 8.11

i) Dados dos campos vectoriales diferenciables $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, llamaremos torsión de X e Y al campo vectorial $T(X,Y) \in \mathcal{X}(M)$,

$$T(X,Y)_x = (\nabla_X Y)_x - (\nabla_Y X)_x - [X,Y]_x \,.$$

Es inmediato verificar que si $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, $T(fX, gY) = fg\,T(X,Y)$, y que T es bilineal en $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$. Esto implica que $T(X,Y)_x$ depende sólo de los valores X_x, Y_x.

ii) Dados X, Y y $Z \in \mathcal{X}(M)$, llamaremos tensor de curvatura de X, Y y Z al nuevo campo $R(X,Y)Z \in \mathcal{X}(M)$,

$$\{R(X,Y)Z\}_x = [\nabla_X(\nabla_Y Z)]_x - [\nabla_Y(\nabla_X Z)]_x - (\nabla_{[X,Y]}Z)_x \,.$$

Es inmediato también que R es $C^\infty(M, \mathbb{C})$ tri-lineal en $\mathcal{X}(M)$.

Para finalizar esta sección, volveremos sobre el ejemplo $\pi_{p_0} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}(p_0)$, donde $p_0 \in \mathcal{A}$ es un proyector fijo. En [5] se introduce una conexión para este fibrado. El espacio horizontal en $u \in \mathcal{U}$ está dado por

$$\mathcal{H}_u = \{x \in u\mathcal{A}_{ah} = T\mathcal{U}_u : p_0 u^* x p_0 = (1-p_0)u^* x(1-p_0) = 0\} \,.$$

Con lo cual es inmediato verificar que si $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{U}(p_0)$ es una curva diferenciable, entonces el levantamiento provisto por la solución de la ecuación

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Gamma(t) = \left\{ \left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right] \gamma(t) - \gamma(t)\frac{d}{dt}\gamma(t) \right\} \Gamma(t) \\ \Gamma(t_0) = u_0 \end{cases}$$

para $u_0 \in \pi_{p_0}^{-1}(\gamma(t_0))$ fijo, es horizontal:

$$\begin{aligned} p_0\Gamma(t)^* \frac{d}{dt}\Gamma(t)p_0 &= p_0\Gamma(t)^* \left\{ \left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right] \gamma(t) - \gamma(t)\frac{d}{dt}\gamma(t) \right\} \Gamma(t)p_0 \\ &= \Gamma(t)^*\gamma(t) \left\{ \left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right] \gamma(t) - \gamma(t)\frac{d}{dt}\gamma(t) \right\} \gamma(t)\Gamma(t) = 0 \end{aligned}$$

y de manera similar $(1-p_0)\Gamma(t)^*\dfrac{d}{dt}\Gamma(t)(1-p_0)=0$.

Esta situación se puede estudiar con mayor generalidad, considerando la órbita unitaria de un sistema de proyectores $(p_1,\ldots,p_n)\in \mathcal{A}^n$, $p_i^2=p_i^*=p_i$, $p_ip_j=0$ si $i\neq j$, $1\leq i,j\leq n$, y $\sum_{i=1}^n p_i=1$. Es decir, se estudian descomposiciones ortogonales de un espacio de Hilbert en n sumandos, en lugar de sólo dos. En este caso, se puede probar que la aplicación $\pi_{(p_1,\ldots,p_n)}:\mathcal{U}\to\mathcal{U}(p_1,\ldots,p_n)$ define en $\mathcal{U}(p_1,\ldots,p_n)$ una estructura de espacio homogéneo de Banach, y que además se puede definir una conexión, donde los espacios horizontales son

$$\mathcal{H}_u=\{x\in u\,\mathcal{A}_{ah}:p_iu^*xp_i=0,\qquad 1\leq i\leq n\}\,.$$

Además, si $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathcal{U}(p_1,\ldots,p_n)$ es una curva diferenciable, la levantada horizontal que en t_0 pasa por $u_0\in\pi^{-1}_{(p_1,\ldots,p_n)}(\gamma(t_0))$ fijo, está dada por la única solución de la ecuación

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\Omega(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^n\left[\dfrac{d}{dt}\gamma_i(t)\right]\gamma_i(t)\cdot\Omega(t)\\ \Omega(t_0)=u_0,\end{cases}$$

donde γ_i son las coordenadas de γ.

§ 9. UNA CONEXIÓN EN $\pi_b : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}(b)$.

En esta sección introduciremos una conexión en el fibrado definido por π_b, para un $b \in \mathcal{A}$ fijo. Desde ahora supondremos que $C^*(b)$ es de dimensión finita, y utilizaremos la notación del § 6. Estudiaremos levantadas horizontales de campos y curvas y daremos la fórmula explícita de la 1-forma de la conexión.

Recordemos que $\mathcal{U}_b = \{v \in \mathcal{U} : vb = bv\} = \pi_b^{-1}(b)$. Veamos la forma explícita de los subespacios verticales $\mathcal{V}_u$, $u \in \mathcal{U}$. Es muy sencillo ver que

$$\mathcal{V}_u = u\,\mathcal{V}_1 = u\{a \in \mathcal{A}_{ah} : ab = ba\}$$

pues $d(\pi_b)_u = \delta_{\pi_b(u)} \circ r_{u^*}$.

Podemos también utilizar los polinomios p^i_{jk} para describir a $\mathcal{V}_u$:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 = \{x \in \mathcal{A}_{ah} : E^i_{jj} x E^\ell_{kk} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq \ell \quad \text{o} \quad j \neq k \quad \text{y} \\ E^i_{1j} x E^i_{j1} = E^i_{11} x E^i_{11}\,, \quad 1 \leq j \leq n_i\,, \quad 1 \leq k \leq n_\ell\,, \quad 1 \leq i, \ell \leq p\}\,.\end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_u = \{x \in u\mathcal{A}_{ah} : p^i_{jj}(ubu^*, ub^*u^*) x E^\ell_{kk} = 0 \quad \text{si} \\ i \neq \ell \quad \text{o} \quad j \neq k \quad \text{y} \quad p^i_{1j}(ubu^*, ub^*u^*) x E^i_{j1} = \\ = p^i_{11}(ubu^*, ub^*u^*) x E^i_{11}\,, \quad 1 \leq j \leq n_i\,, \quad 1 \leq k \leq n_\ell\,, \quad 1 \leq i, \ell \leq p\}\,.\end{aligned}$$

Definiremos ahora la distribución de subespacios horizontales.

Definición 9.1

Llamaremos $\mathcal{H}_1 = \{x \in \mathcal{A}_{ah} : E^i_{11} x E^i_{11} = 0,\ 1 \leq i \leq p\}$, y en general, $\mathcal{H}_u = u\mathcal{H}_1$, $u \in \mathcal{U}$. Nótese que

$$\mathcal{H}_u = \{x \in u\mathcal{A}_{ah} : p^i_{11}(ubu^*, ub^*u^*) x E^i_{11} = 0, \quad 1 \leq i \leq p\}\,.$$

la descomposición $H = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i^{n_i}$, de la forma

$$\left[\begin{array}{ccc} \begin{matrix} u_1 & & 0 \\ & u_1 & \\ 0 & & u_1 \end{matrix} & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \begin{matrix} u_p & & 0 \\ & u_p & \\ 0 & & u_p \end{matrix} \end{array}\right] \quad \text{y} \quad \left[\begin{array}{ccc} 0 & & \\ & \ddots & \\ * & & \begin{matrix} 0 \\ * \end{matrix} \end{array}\right].$$

Proposición 9.2

La distribución $u \mapsto \mathcal{H}_u$, $u \in \mathcal{U}$, recién definida, es una conexión en el fibrado $\pi_b : \mathcal{U} \to \mathcal{U}(b)$.

Demostración: Primero, como $T\mathcal{U}_u = u\,\mathcal{A}_{ah}$, para ver que $\mathcal{H}_u$ y $\mathcal{V}_u$ son suplementarios, alcanza con probar que $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{V}_1 = \mathcal{A}_{ah}$. Para ello, obsérvese que si $x \in \mathcal{A}_{ah}$

$$x = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} E^i_{j1} x E^i_{1j} + \left(x - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} E^i_{j1} x E^i_{1j} \right)$$

El primer sumando está en $\mathcal{V}_1$:

$$\begin{aligned} &\text{si } \ell \neq r \text{ o } j_0 \neq k_0, \quad E^\ell_{j_0,j_0} \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} E^i_{j1} x E^i_{1j} \right) E^r_{k_0,k_0} = \\ &= E^\ell_{j_0 1} x E^\ell_{1 j_0} E^r_{k_0,k_0} = 0\ ; \quad \text{además} \\ &E^\ell_{1j_0} \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} E^i_{j1} x E^i_{1j} \right) E^\ell_{j_0 1} = E^\ell_{1j_0} E^\ell_{j_0 1} x E^\ell_{1j_0} E^\ell_{j_0 1} = \\ &= E^\ell_{11} x E^\ell_{11}\ . \end{aligned}$$

El segundo sumando está en $\mathcal{H}_1$:

$$E^\ell_{11} \left(x - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} E^i_{j1} x E^i_{1j} \right) E^\ell_{11} = E^\ell_{11} x E^\ell_{11} - E^\ell_{11} x E^\ell_{11} = 0\ .$$

Es evidente que $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{V}_1 = \{0\}$, pues si $x \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{V}_1$, $E^i_{11} x E^i_{11} = 0$, $i = 1, \ldots, p$, luego

$$E^i_{jj} x E^i_{jj} = E^i_{j1} E^i_{1j} x E^i_{j1} E^i_{1j} = E^i_{j1} E^i_{11} x E^i_{11} E^i_{1j} \, ,$$

que es cero, pues $x \in \mathcal{V}_1$.

Además, que x esté en $\mathcal{V}_1$ implica también que $E^i_{jj} x E^\ell_{kk} = 0$ si $i \neq \ell$ o $j \neq k$. En resumen, resulta que para el sistema de proyectores $\overline{\phi}(b)$, es $\overline{\phi}_i(b) x \overline{\phi}_j(b) = 0$, $1 \leq i, j \leq n$. Entonces debe ser $x = 0$.

La descomposición dada para x, permite calcular explícitamente a $P_{\mathcal{V}_u}$ y $P_{\mathcal{H}_u}$ los idempotentes en $L(u\,\mathcal{A}_{ah})$ asociados a la suma directa $u\,\mathcal{A}_{ah} = \mathcal{H}_u \oplus \mathcal{V}_u$:

$$P_{\mathcal{V}_u}(x) = u \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} E^i_{j1} u^* x E^i_{1j} \, , \quad P_{\mathcal{H}_u} = \mathrm{Id} - P_{\mathcal{V}_u} \, .$$

Con esto, resulta inmediatamente que la distribución es diferenciable, si $X \in \mathcal{X}(\mathcal{U})$ es un campo vectorial diferenciable, su parte horizontal está dada por el campo vectorial

$$u \longmapsto P_{\mathcal{H}_u}(X_u) = X_u - u \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} E^i_{j1} u^* X_u E^i_{1j} \, ,$$

que es claramente diferenciable.

Lo último que queda por verificar es que si $u \in \mathcal{U}$ y $v \in \mathcal{U}_b$, entonces $\mathcal{H}_u \cdot v = \mathcal{H}_{uv}$.

Esta identidad se transforma en $u\mathcal{H}_1 v = uv\mathcal{H}_1$, que es equivalente a $v\mathcal{H}_1 v^* = \mathcal{H}_1$. Veamos esto último.

Como v conmuta con b y es unitario, también conmuta con b^*. Luego, conmuta con los E^i_{jk}. Sea $x \in v\mathcal{H}_1 v^*$, con lo cual $v^* x v \in \mathcal{H}_1$. Esto dice que $0 = E^i_{11} v^* x v E^i_{11} = v^* E^i_{11} x E^i_{11} v$, y por lo tanto $x \in \mathcal{H}_1$. La otra inclusión es análoga. ♦

Definición 9.3

i) Llamaremos $S : \delta_b(\mathcal{A}_{ah}) \to \mathcal{A}_{ah}$ a la inversa relativa horizontal de δ_b. Esto es, como $\delta_b = d(\pi_b)_1$ es un isomorfismo de $\mathcal{H}_1$ (suplemento en $\mathcal{A}_{ah}$ de ker δ_b) en $\delta_b(\mathcal{A}_{ah}) = R\delta_b$, sea S' su inversa. S es entonces S' compuesta con la inclusión de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{A}_{ah}$. Nótese que S está caracterizada por las relaciones:

$$S\delta_b S = S \, , \quad \delta_b S \delta_b = S \quad \text{y} \quad RS = \mathcal{H}_1 \, .$$

ii) Para $c \in \mathcal{U}(b)$, llamaremos $\mathcal{H}^c = u\mathcal{H}_1 u^*$, donde u está tomado de manera que $\pi_b(u) = c$.

$\mathcal{H}^c$ está bien definido, pues si $u' \in \pi_b^{-1}(c)$, $u'^*u \in \mathcal{U}_b$, y entonces $u'^*u\mathcal{H}_1(u'^*u)^* = \mathcal{H}_1$, es decir, $u\mathcal{H}_1u^* = u'\mathcal{H}_1u'^*$.

Nótese además que $\mathcal{H}^c$ es un suplemento para ker δ_c en $\mathcal{A}_{ah}$, pues ker $\delta_c =$ ker $\delta_{ubu^*} = u(\ker \delta_b)u^*$.

iii) Llamaremos $S_c : \delta_c(\mathcal{A}_{ah}) = R\delta_c \to \mathcal{A}_{ah}$ al operador definido por las relaciones

$$S_c\delta_cS_c = S_c\,, \quad \delta_cS_c\delta_c = \delta_c \quad \text{y} \quad RS_c = \mathcal{H}^c\,.$$

iv) Sea M un suplemento, fijo de ahora en más, de $R\delta_b$ en $\mathcal{A}$. Llamaremos $\overline{S}$ al operador lineal y acotado dado por

$$\overline{S}|_{R\delta_b} = S \quad \text{y} \quad \overline{S}|_M \equiv 0\,.$$

Observación 9.4

S_c es la inversa de $\delta_c|_{\mathcal{H}^c}$, compuesta con la inclusión de $\mathcal{H}^c$ en $\mathcal{A}_{ah}$. Además, vale que

$$S_c = ad(u) \circ S \circ ad(u^*)\,,$$

donde $u \in \pi_b^{-1}(c)$ y $ad(u)(x) = uxu^*$.

En efecto, es claro que $R(ad(u) \circ S \circ ad(u^*)) = \mathcal{H}^c$; además,

$$\begin{aligned} &ad(u) \circ S \circ ad(u^*) \circ \delta_{ubu^*} \circ ad(u) \circ S \circ ad(u^*) = \\ &= ad(u) \circ S \circ \delta_b \circ S \circ ad(u^*) = ad(u) \circ S \circ ad(u^*)\,. \end{aligned}$$

Análogamente se verifica que $\delta_{ubu^*} \circ ad(u) \circ S \circ ad(u^*) \circ \delta_{ubu^*} = \delta_{ubu^*}$.

$$\text{Es claro que} \quad S_b = S\,.$$

Usando esta aplicación S es muy sencillo computar la levantada horizontal de un campo vectorial en $\mathcal{U}(b)$.

Proposición 9.5

Sea X un campo vectorial diferenciable definido en un abierto $\mathcal{W}$ de $\mathcal{U}(b)$. Entonces el levantamiento horizontal de X, definido en $\pi_b^{-1}(\mathcal{W})$, está dado por la expresión

$$X_u = uS(ad(u^*) \circ X_{\pi_b(u)}), \quad u \in \pi_b^{-1}(\mathcal{W})\,.$$

Demostración: Calculemos

$$d(\pi_b)_u(X_u) = \delta_{\pi_b(u)}(X_u \cdot u^*) = \delta_{\pi_b(u)}(ad(u) \circ S(ad(u^*) \circ X_{\pi_b(u)}) =$$
$$= \delta_{\pi_b(u)} \circ S_{\pi_b(u)}(X_{\pi_b(u)}) \,.$$

Como $X_{\pi_b(u)} \in T\mathcal{U}(b)_{\pi_b(u)}$ y $\delta_{\pi_b(u)} \circ S_{\pi_b(u)}$ es la identidad de $R\delta_{\pi_b(u)}$, resulta $d(\pi_b)_u(X_u) = X_{\pi_b(u)}$.

Además, es claro que X es horizontal,

$$X_u = uS(ad(u^*) \circ X_{\pi_b(u)}) \in uRS = \mathcal{H}_u \,. \quad \blacklozenge$$

Observación 9.6

Aplicando lo observado en 8.6, podemos encontrar las ecuaciones diferenciales que satisfacen las levantadas horizontales de curvas. Al menos localmente son curvas integrales de las levantadas horizontales de los campos vectoriales diferenciables definidos por las curvas diferenciables en $\mathcal{U}(b)$. Precisando un poco, sea $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathcal{U}(b)$ una curva diferenciable y sea X un campo vectorial que extiende a $\frac{d}{dt}\gamma(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, es decir, $X_{\gamma(t)} = \frac{d}{dt}\gamma(t)$. Entonces la ecuación

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Gamma(t) = X_{\Gamma(t)} = \Gamma(t)S(ad(\Gamma(t)^*) \circ X_{\pi_b(\Gamma(t))}) \\ \Gamma(t_0) = u_0 \end{cases}$$

tiene solución local alrededor de t_0 que levanta horizontalmente a γ por u_0 en t_0 ($u_0 \in \pi_b^{-1}(\gamma(t_0))$). Nótese que entonces la ecuación puede ser llevada a la forma

$$\text{(9.7)} \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\Gamma(t) = \Gamma(t)\overline{S}(\Gamma(t)^* \left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right] \Gamma(t)) \\ \Gamma(t_0) = u_0 \,. \end{cases}$$

Ponemos $\overline{S}$ en lugar de S, pues la intención ahora es estudiar la ecuación 9.7, independientemente de que sea inducida por la ecuación integral de un campo. Ya no sabemos pues que Γ levanta a γ, con lo cual no tenemos garantía de que $\Gamma^*(t)\left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right]\Gamma(t)$ pertenezca al dominio de S, que es $R\delta_b$.

En (9.7) exigiremos además, que la relación se cumpla no sólo alrededor de t_0, sino en todo el intervalo $[\alpha,\beta]$.

Teorema 9.8

Sea $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathcal{U}(b)$ una curva de clase C^1, $\gamma(t_0) = u_0 b u_0^*$. Entonces la levantada horizontal de γ por u_0 en t_0 es la única solución de (9.7).

<u>Demostración</u>: Veamos primero que la levantada horizontal Γ es solución. Tenemos que $b = \Gamma(t)^*\gamma(t)\Gamma(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$ con lo cual

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}[\Gamma^*(t)\gamma(t)\Gamma(t)] &= \left[\frac{d}{dt}\Gamma^*(t)\right]\gamma(t)\Gamma(t) + \\ &+ \Gamma^*(t)\left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right]\Gamma(t) + \Gamma^*(t)\gamma(t)\frac{d}{dt}\gamma(t)\,, \end{aligned}$$

o sea,

$$\begin{aligned} \Gamma^*(t)\left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right]\Gamma(t) &= -\left[\frac{d}{dt}\Gamma^*(t)\right]\gamma(t)\Gamma(t) - \Gamma^*(t)\gamma(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t) \\ &= -\left[\frac{d}{dt}\Gamma^*(t)\right]\Gamma(t)b - b\Gamma^*(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t)\,. \end{aligned}$$

Como $\Gamma^*(t)\Gamma(t) = 1$, $\left[\frac{d}{dt}\Gamma^*(t)\right]\Gamma(t) + \Gamma(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t) = 0$, por lo tanto lo de arriba queda igual a

$$\Gamma^*(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t)\cdot b - b\Gamma^*(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t) = \delta_b\left(\Gamma^*(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t)\right)$$

Con lo cual

$$\overline{S}\left(\Gamma^*(t)\left[\frac{d}{dt}\Gamma^*(t)\right]\Gamma(t)\right) = \overline{S}\delta_b\left(\Gamma^*(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t)\right)\,.$$

Usando que $\frac{d}{dt}\Gamma(t) \in \mathcal{H}_{\Gamma(t)}$, es decir $\Gamma^*(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t) \in \mathcal{H}_1$, y como $\overline{S}\delta_b$ es un proyector sobre el rango de S, que es $\mathcal{H}_1$, resulta

$$\overline{S}\left(\Gamma^*(t)\left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right]\Gamma(t)\right) = \Gamma^*(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t)\,.$$

Como ya sabemos que $\Gamma(t_0) = u_0$, esto último es equivalente a satisfacer (9.7).

Llamemos Γ_0 a esta solución. Veamos ahora que es la única. Para ello mostraremos que la aplicación de $\mathcal{A} \times [\alpha,\beta]$ en $\mathcal{A}$ que manda (u,t) en $u\overline{S}\left(u^*\frac{d}{dt}\gamma(t)u\right)$, cumple localmente una condición de Lifschitz en cada par (v,t). Esto es, para cada $v \in \mathcal{A}$ fijo, existe $\varepsilon_v > 0$ tal que si $u, u' \in \{x \in \mathcal{A} : \|x - v\| \leq \varepsilon_v\}$, entonces $\left\| u\overline{S}\left(u^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u\right) - u'\overline{S}\left(u'^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u'\right)\right\| \leq C_v\|u - u'\|$. Si verificamos esta condición, en virtud de 7.7, resultará que la ecuación

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Gamma(t) = \Gamma(t)\overline{S}\left(\Gamma^*(t)\left[\dfrac{d}{dt}\gamma(t)\right]\Gamma(t)\right) \\ \Gamma(s) = \Gamma_0(s) \end{cases}$$

tiene solución única en un entorno de s, para cada $s \in [\alpha, \beta]$ fijo, y que por lo tanto coincide con Γ_0 en dicho entorno. Luego, Γ_0 es la única solución global de (9.7).

Verifiquemos la condición de Lifschitz:

$$\begin{aligned} &\left\| u\overline{S}\left(u^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u\right) - u'\overline{S}\left(u'^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u'\right)\right\| \leq \left\| u\overline{S}\left(u^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u\right) - \right. \\ &\quad \left. - u'\overline{S}\left(u^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u\right)\right\| + \left\| u'\overline{S}\left(u^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u\right) - u'\overline{S}\left(u'^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u'\right)\right\| \\ &\leq \left\|\overline{S}\left(u^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u\right)\right\| \|u - u'\| + \|u'\| \left\|\overline{S}\left(u^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u - u'^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u'\right)\right\| \\ &\leq \|\overline{S}\| \left\|\frac{d}{dt}\gamma(t)\right\| \|u\|^2\|u - u'\| + \|u\| \, \|\overline{S}\| \left\| u^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u - u'^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u'\right\| \\ &\leq \|\overline{S}\| \left\|\frac{d}{dt}\gamma(t)\right\| \|u\|^2\|u - u'\| + \|u'\| \, \|\overline{S}\| \left(\left\| u^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u - u^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u'\right\|\right. \\ &\quad \left. + \left\| u^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u' - u'^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u'\right\|\right) \leq \|\overline{S}\| \, \|u\|^2 \left\|\frac{d}{dt}\gamma(t)\right\| \|u - u'\| \\ &\quad + \|u\| \, \|u'\| \, \|\overline{S}\| \left\|\frac{d}{dt}\gamma(t)\right\| \|u - u'\| + \|u'\|^2\|\overline{S}\| \left\|\frac{d}{dt}\gamma(t)\right\| \|u - u'\| . \end{aligned}$$

Nótese que $\|u\| \leq \varepsilon_v + \|v\|$, y que otro tanto sucede con $\|u'\|$ con lo cual resulta

$$\begin{aligned} &\left\| u\overline{S}\left(u^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u\right) - u'\overline{S}\left(u'^* \frac{d}{dt}\gamma(t)u'\right)\right\| \\ &\leq 3\|\overline{S}\|(\varepsilon_v + \|v\|)^2 \max_{t\in[\alpha,\beta]} \left\|\frac{d}{dt}\gamma(t)\right\| \|u - u'\| . \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Buscaremos ahora las ecuaciones lineales satisfechas por las levantadas.

Proposición 9.9

Si $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{U}(b)$ es de clase C^p $(1 \leq p \leq \infty)$, entonces $S_\gamma\left(\frac{d}{dt}\gamma\right) : [\alpha, \beta] \to \mathcal{A}_{ah}$ es de clase C^{p-1}.

Demostración: Primero veamos que $S_\gamma\left(\frac{d}{dt}\gamma\right)$ está bien definida, pues $\frac{d}{dt}\gamma(t) \in T\mathcal{U}(b)_{\gamma(t)}$ $= R\delta_{\gamma(t)}$, que es el dominio de $S_{\gamma(t)}$. Sea $u : [\alpha,\beta] \to \mathcal{U}$ una levantada de γ de clase C^p (ver 7.11). Sea M el suplemento de $R\delta_b$ considerado en 9.3. Luego, $u(t)Mu(t)^*$ es un suplemento de $u(t)R\delta_b u(t)^* = R\delta_{\gamma(t)}$. Definiremos $\overline{S}_t : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{ah}$ lineal y acotado de la siguiente forma:

$$\overline{S}_t|_{R\delta_{\gamma(t)}} = S_{\gamma(t)} \quad \text{y} \quad \overline{S}_t|_{u(t)Mu(t)^*} \equiv 0\,.$$

Es inmediato que $\overline{S}_t = ad(u(t)) \circ \overline{S} \circ ad(u(t)^*)$. Resulta entonces evidente que la aplicación $t \mapsto \overline{S}_t$ de $[\alpha,\beta]$ en $L(\mathcal{A},\mathcal{A}_{ah})$ es de clase C^p. Entonces $t \mapsto \overline{S}_t\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)$ es de clase C^{p-1}. Como $\overline{S}_t\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right) = S_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)$, queda probado el resultado. ♦

Teorema 9.10

Sea $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathcal{U}(b)$ de clase C^p. Sean $t_0 \in [\alpha,\beta]$ y $u_0 \in \pi_b^{-1}(\gamma(t_0))$ fijos. Entonces la ecuación lineal

$$\text{(9.11)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Gamma(t) = S_{\gamma(t)}\left(\dfrac{d}{dt}\gamma(t)\right)\Gamma(t), & t \in [\alpha,\beta], \\ \Gamma(t_0) = u_0, \end{cases}$$

tiene por única solución a la levantada horizontal (de clase C^p) de γ por u_0 en t_0.

Demostración: Sea Γ la solución de (9.11). Veamos que:

i) $\Gamma(t) \in \mathcal{U}$, $t \in [\alpha,\beta]$.

ii) Γ levanta a γ.

iii) Γ es horizontal.

Consideremos la ecuación lineal

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Delta(t) = -\Delta(t)S_{\gamma(t)}\left(\dfrac{d}{dt}\gamma(t)\right), \\ \Delta(t_0) = u_0^*\,. \end{cases}$$

que tiene solución única. Como $S_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right) \in \mathcal{A}_{ah}$, Γ^* es solución de esta ecuación. Luego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Gamma^*(t)\Gamma(t) &= \left[\frac{d}{dt}\Gamma^*(t)\right]\Gamma(t) + \Gamma^*(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t) \\ &= -\Gamma^*(t)S_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)\Gamma(t) + \Gamma^*(t)S_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)\Gamma(t) = 0\,. \end{aligned}$$

Como $\Gamma^*(t_0)\Gamma(t_0) = 1$, resulta $\Gamma^*(t)\Gamma(t) = 1,\ t \in [\alpha, \beta]$.

Consideremos ahora

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Omega(t) = S_{\gamma(t)}\left(\dfrac{d}{dt}\gamma(t)\right)\Omega(t) - \Omega(t)S_{\gamma(t)}\left(\dfrac{d}{dt}\gamma(t)\right) \\ \Omega(t_0) = 1 \end{cases}$$

que también es lineal, y tiene por soluciones a $\Gamma(t)\Gamma^*(t)$ y a la curva constantemente igual a 1. Por lo tanto $\Gamma(t)\Gamma^*(t) = 1,\ t \in [\alpha, \beta]$.

Para ver ii) calculemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Gamma^*(t)\gamma(t)\Gamma(t)) = -\Gamma^*(t)S_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)\gamma(t)\Gamma(t) + \\ + \Gamma^*(t)\left[\frac{d}{dt}\gamma(t)\right]\Gamma(t) + \Gamma^*(t)\gamma(t)S_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)\Gamma(t) = \\ = \Gamma^*(t)\left\{-S_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)\gamma(t) + \frac{d}{dt}\gamma(t) + \gamma(t)S_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)\right\}\Gamma(t) = \\ = \Gamma^*(t)\left\{\frac{d}{dt}\gamma(t) - \delta_{\gamma(t)}S_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)\right\}\Gamma(t)\,. \end{aligned}$$

Como $\delta_{\gamma(t)}S_{\gamma(t)}$ es la identidad en $R\delta_{\gamma(t)}$ y $\dfrac{d}{dt}\gamma(t) \in R\delta_\gamma(t)$, la expresión entre llaves da cero. Como $\Gamma^*(t_0)\gamma(t_0)\Gamma(t_0) = u_0^*\gamma(t_0)u_0 = b$, resulta $\Gamma^*(t)\gamma(t)\Gamma(t) = b,\ t \in [\alpha, \beta]$.

Por último, veamos iii):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Gamma(t) = S_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)\Gamma(t) \in [RS_{\gamma(t)}]\Gamma(t) = \\ = \mathcal{H}^{\gamma(t)}\Gamma(t) = \Gamma(t)\mathcal{H}_1\Gamma^*(t)\Gamma(t) = \mathcal{H}_{\Gamma(t)}\,. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Veremos a continuación otra caracterización de la levantada horizontal.

Recordemos la definición de la aplicación $\overline{\phi}$

$$\begin{aligned} &\overline{\phi} : \mathcal{U}(b) \longrightarrow P_n = \{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{A}^n : p_i^2 = p_i^* = p_i\,, \quad p_ip_j = 0 \quad \text{si} \\ &i \neq j\,, \quad 1 \leq i, j \leq n\,, \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1\}\,, \quad \text{dada por} \\ &\overline{\phi}(c) = (p_{11}^1(c, c^*), \ldots, p_{n_1,n_1}^1(c, c^*), \ldots, p_{11}^p(c, c^*), \ldots, p_{n_p,n_p}^p(c, c^*))\,, \end{aligned}$$

así como la conexión en $\mathcal{U}(p_1,\ldots,p_n)$, para $(p_1,\ldots,p_n) \in P_n$ fijo, donde los espacios horizontales son

$$\mathcal{H}_u = \{x \in u\,\mathcal{A}_{ah} : p_i u^* x p_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n\}, \quad u \in \mathcal{U} .$$

La levantada horizontal de una curva $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n) : [\alpha,\beta] \to \mathcal{U}(\overline{\phi}(b))$ por u_0 en t_0 es la solución de la ecuación

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Omega(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[\dfrac{d}{dt}\omega_i(t)\right] \omega_i(t) \,.\, \Omega(t) \\ \Omega(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Usaremos además la aplicación $\mathcal{K} : \overline{\phi}^{-1}(\overline{\phi}(b)) \to \mathcal{U}$,

$$\mathcal{K}(c) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} p_{j1}^{i}(c,c^*)E_{1j}^{i} .$$

Observación 9.12

Sea $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathcal{U}(b)$ con $\gamma(t_0) = u_0 b u_0^*$. La levantada horizontal Γ de γ con $\Gamma(t_0) = u_0$ coincide con $u_0\Gamma$, donde Γ es la levantada horizontal de $u_0^*\gamma u_0$, con $\Gamma(t_0) = 1$. Es decir, para conocer las levantadas horizontales de curvas en $\mathcal{U}(b)$, alcanza con calcular las levantadas horizontales por 1 en t_0, de curvas γ con $\gamma(t_0) = b$.

Teorema 9.13

Sea $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathcal{U}(b)$ de clase C^p con $\gamma(t_0) = b$. Sea $(p_1,\ldots,p_n) = \overline{\phi}(b)$ y sea ω la curva $\omega : [\alpha,\beta] \to \mathcal{U}(\overline{\phi}(b))$, dada por $\omega(t) = \overline{\phi}(\gamma(t))$. Si $\Omega : [\alpha,\beta] \to \mathcal{U}$ es la levantada horizontal de ω con $\Omega(t_0) = 1$, entonces $\Gamma(t) = \Omega(t)\mathcal{K}(\Omega^*(t)\gamma(t)\Omega(t))$ es la levantada horizontal de γ con $\Gamma(t_0) = 1$.

<u>Demostración:</u>

$$\Gamma(t_0) = \Omega(t_0)\mathcal{K}(\Omega(t_0)^*\gamma(t_0)\Omega(t_0)) = \mathcal{K}(b) = 1$$

Como $\overline{\phi}(\Omega(t)^*\gamma(t)\Omega(t)) = \Omega(t)^*\overline{\phi}(\gamma(t))\Omega(t) = \Omega(t)^*\omega(t)\Omega(t) = \overline{\phi}(b)$, $\Omega(t)^*\gamma(t)\Omega(t)$ pertenece a $\overline{\phi}^{-1}(\overline{\phi}(b))$ que es el dominio de $\mathcal{K}$. Asimismo, es inmediato que $\Gamma(t)$ es unitario. Verifiquemos que levanta a γ. En 6.4 vimos que $\mathcal{K}$ es una sección global de π_b desde $\overline{\phi}^{-1}(\overline{\phi}(b))$, con lo cual

$$\mathcal{K}(\Omega(t)^*\gamma(t)\Omega(t))\, b\, [\mathcal{K}(\Omega(t)^*\gamma(t)\Omega(t))]^* = \Omega(t)^*\gamma(t)\Omega(t)$$

y entonces

$$\Gamma(t)b\Gamma(t)^* = \gamma(t)\,.$$

Veamos por último que es horizontal. Para ello alcanza con demostrar que $p^i_{11}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\left[\frac{d}{dt}\Gamma(t)\right]E^i_{11} = 0,\ \ 1 \leq i \leq p,\ \ t \in [\alpha,\beta]$. Pues como ya sabemos que Γ levanta a γ, vale que $p^i_{jk}(\gamma(t),\gamma^*(t)) = \Gamma(t)E^i_{jk}\Gamma(t)^*$.

Del hecho que Ω levanta a ω, se deduce que $\omega^i_{jj}(t) = p^i_{jj}(\gamma(t),\gamma(t)^*) = \Omega(t)E^i_{jj}\Omega(t)^*$.

$$\frac{d}{dt}\Gamma(t) = \left[\frac{d}{dt}\Omega(t)\right]\overline{K}(\Omega(t)^*\gamma(t)\Omega(t)) + \Omega(t)\frac{d}{dt}\overline{K}(\Omega(t)^*\gamma(t)\Omega(t))\,.$$

Como Ω es horizontal, tenemos que

$$p^i_{jj}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\left[\frac{d}{dt}\Omega(t)\right]E^i_{jj} = 0\,,\quad 1 \leq j \leq n_i\,,\quad 1 \leq i \leq p\,,\quad t \in [\alpha,\beta]\,.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\overline{K}(\Omega(t)^*\gamma(t)\Omega(t))E^{i_0}_{11} &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} p^i_{j1}(\Omega(t)^*(\gamma(t),\gamma(t)^*)\Omega(t))E^i_{1j}E^{i_0}_{11}\\ &= p^{i_0}_{11}(\Omega(t)^*(\gamma(t),\gamma(t)^*)\Omega(t))E^{i_0}_{11} = \Omega(t)^*p^{i_0}_{11}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\Omega(t)E^{i_0}_{11} =\\ &= E^{i_0}_{11}\,,\quad 1 \leq i_0 \leq p\,,\end{aligned}$$

con lo cual

$$\frac{d}{dt}\overline{K}(\Omega(t)^*\gamma(t)\Omega(t))E^{i_0}_{11} = 0,\quad 1 \leq i_0 \leq p\,.$$

Con estas dos últimas identidades se cumple que

i) $p^i_{11}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\left[\frac{d}{dt}\Omega(t)\right]\overline{K}(\Omega^*(t)\gamma(t)\Omega(t))E^i_{11} = 0,\quad 1 \leq i \leq p\,,\quad t \in [\alpha,\beta]\,.$

ii) $p^i_{11}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\Omega(t)\frac{d}{dt}\overline{K}(\Omega(t)^*\gamma(t)\Omega(t))e^i_{11} = 0,\quad 1 \leq i \leq p\,,\quad t \in [\alpha,\beta]\,.$

Por lo tanto, Γ es horizontal. ♦

§ 10. CONEXION LINEAL EN $\mathcal{U}(b)$.

En esta sección estudiaremos la conexión lineal en $\mathcal{U}(b)$ inducida por la conexión definida en la sección precedente. A tal efecto, seguiremos suponiendo que el elemento $b \in \mathcal{A}$ es tal que $C^*(b)$ es de dimensión finita, y conservaremos las notaciones ya usadas.

Calcularemos el transporte paralelo de vectores, las geodésicas, la exponencial y los tensores de torsión y curvatura de esta conexión.

El procedimiento para inducir una conexión en $\mathcal{U}(b)$ se basa en la ecuación diferencial

$$(10.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Gamma(t) = S_{\gamma(t)}\left(\dfrac{d}{dt}\gamma(t)\right)\Gamma(t), & t \in [\alpha,\beta] \\ \Gamma(t_0) = 1, \end{cases}$$

donde $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathcal{U}(b)$ es una curva de clase C^1. Esta ecuación es muy similar a 9.11, y repitiendo la demostración de 9.10, es posible demostrar que la solución Γ levanta a γ en el siguiente sentido

$$\Gamma(t)\gamma(t_0)\Gamma(t)^* = \gamma(t), \qquad t \in [\alpha,\beta]$$

Esta ecuación diferencial será llamada la ecuación de transporte de γ. En general las soluciones de (10.1) no serán curvas horisontales, aunque podemos relacionarlas con curvas de este tipo.

Si $\gamma(t_0) = u_0 b u_0^*$, sea Γ la levantada horisontal de $u_0^*\gamma u_0$ con $\Gamma(t_0) = 1$, entonces $u_0\Gamma u_0^*$ es solución de (10.1).

La relación sería más clara si hubiésemos introducido el fibrado tangente de $\mathcal{U}(b)$ como fibrado asociado a $\pi_b : \mathcal{U} \to \mathcal{U}(b)$ (ver [5]).

Definición 10.2

Sea $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathcal{U}(b)$ de clase C^1. Sea $t_0 \in [\alpha,\beta]$ fijo. Para cada $t \in [\alpha,\beta]$, definiremos la aplicación lineal

$$\tau_{t_0}^t(\gamma) : T\mathcal{U}(b)_{\gamma(t_0)} \longrightarrow T\mathcal{U}(b)_{\gamma(t)},$$
$$\tau_{t_0}^t(\gamma)(X) = \Gamma(t)X\Gamma(t)^*, \qquad X \in T\mathcal{U}(b)_{\gamma(t_0)},$$

donde Γ es la solución de la ecuación de transporte de γ, con $\Gamma(t_0) = 1$. Esta aplicación será denominada el transporte paralelo a lo largo de la curva γ.

Está bien definida, ya que

$$T\mathcal{U}(b)_{\gamma(t)} = R\delta_{\gamma(t)} = \Gamma(t)R\delta_{\gamma(t_0)}\Gamma^*(t) = \Gamma(t)T\mathcal{U}(b)_{\gamma(t_0)}\Gamma(t)^* .$$

Ahora definiremos la conexión.

Definición 10.3

i) Sea $X \in T\mathcal{U}(b)_c$, e $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{U}(b))$, definimos

$$(\nabla_X Y)_c = \lim_{t\to t_0} \frac{[\tau_{t_0}^t(\gamma)]^{-1}Y_{\gamma(t)} - Y_c}{t-t_0} = \frac{d}{dt}[\Gamma^*(t)Y_{\gamma(t)}\Gamma(t)]\bigg|_{t_0} ,$$

donde $\gamma : (t_0 - \varepsilon,\ t_0 + \varepsilon) \to \mathcal{U}(b)$ es una curva C^1 adaptada a X en c (i.e. $\gamma(t_0) = c$, $\frac{d}{dt}\gamma(t_0) = X$) y Γ es la solución de la ecuación de transporte de γ, con $\Gamma(t_0) = 1$.

ii) Si $Z(t)$ es un campo vectorial diferenciable a lo largo de una curva $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{U}(b)$, esto es, $Z(t) \in T\mathcal{U}(b)_{\gamma(t)}$, definimos

$$\frac{DZ}{d\gamma}(t_0) := \left(\nabla^Z_{\frac{d}{dt}\gamma(t)}\right)_{\gamma(t_0)} .$$

Está bien definido, ya que en el cálculo de $\nabla_X Y$ sólo se usan los valores de Y a lo largo de γ.

Nótese que $(\nabla_X^Y)_c \in T\mathcal{U}(b)_c$ y que $\frac{DZ}{d\gamma}(t) \in T\mathcal{U}(b)_{\gamma(t)}$. Esto es pues el transporte paralelo τ verifica que $[\tau_{t_0}^t(\gamma)]^{-1}Y_{\gamma(t)} \in T\mathcal{U}(b)_c$ para cada t (en i)).

Es inmediato que ∇ así definida satisface las condiciones requeridas a una conexión lineal (ver 8.7).

Observación 10.4

i) Si abreviamos $[[x, y]] = xy - yx$; $x, y \in \mathcal{A}$, entonces para $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{U}(b))$ vale que

$$(\nabla_X^Y)_c = (\nabla_{X_c}^Y)_c = XY_c + [[Y_c, S_c(X_c)]] ,$$

y para $Z(t)$ un campo diferenciable a lo largo de $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{U}(b)$ de clase C^1,

$$\frac{DZ}{d\gamma}(t) = \frac{d}{dt}Z(t) + \left[\left[Z(t), S_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)\right]\right] .$$

En efecto, recordemos que $XY_c = \left.\frac{d}{dt}Y_{\gamma(t)}\right|_{t_0}$, donde γ es una curva adaptada a X_c en c. Sea Γ la solución de la ecuación de transporte de γ, con $\Gamma(t_0) = 1$.

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{X_c}Y)_c &= \frac{d}{dt}[\Gamma(t)^* Y_{\gamma(t)}\Gamma(t)]|_{t_0} = \left[\frac{d}{dt}\Gamma^*(t_0)\right] Y_{\gamma(t_0)}\Gamma(t_0) + \\
&\quad + \Gamma^*(t_0)\left[\left.\frac{d}{dt}Y_{\gamma(t)}\right|_{t_0}\right]\Gamma(t_0) + \Gamma^*(t_0)Y_{\gamma(t_0)}\frac{d}{dt}\Gamma(t_0) = \\
&= -S_{\gamma(t_0)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t_0)\right)Y_{\gamma(t_0)} + Y_{\gamma(t_0)}S_{\gamma(t_0)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t_0)\right) + \left.\frac{d}{dt}Y_{\gamma(t)}\right|_{t_0} \\
&= (XY)_c + [[Y_c, S_c(X_c)]] .
\end{aligned}
$$

La igualdad referida a $Z(t)$ se prueba de manera análoga.

Ahora podemos calcular las geodésicas de esta conexión. Recordemos que $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{U}(b)$ de clase C^2 es geodésica si $\frac{D}{d\gamma}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right) \equiv 0$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Teorema 10.5

Sean $c \in \mathcal{U}(b)$ y $X \in T\mathcal{U}(b)_c$. Entonces la única geodésica $\psi : \mathbf{R} \to \mathcal{U}(b)$ tal que $\psi(0) = c$ y $\frac{d}{dt}\psi(0) = X$ está dada por $\psi(t) = e^{tS_c(X)}.c.e^{-tS_c(X)}$, $t \in \mathbf{R}$.

En particular resulta que con esta conexión, la variedad $\mathcal{U}(b)$ es completa.

Demostración: Primero, supongamos que $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{U}(b)$ es una geodésica con $\varphi(0) = c$ y $\frac{d}{dt}\varphi(0) = X$. Veremos que φ coincide con ψ en $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Como $\frac{D}{d\varphi}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right) \equiv 0$, si Γ_{t_0} es la solución de

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dt}\Gamma_{t_0}(t) = S_{\varphi(t)}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)\Gamma_{t_0}(t), & t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\
\Gamma_{t_0}(t_0) = 1
\end{cases}
$$

entonces, $\left.\frac{d}{dt}\left[\Gamma^*_{t_0}(t)\left[\frac{d}{dt}\varphi(t)\right]\Gamma_{t_0}(t)\right]\right|_{t_0} = 0.$

Nótese que para cada $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,tenemos que

$$
S_{\varphi(t)}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right) = ad(\Gamma_{t_0}(t)) \circ S_{\varphi(t_0)} \circ ad(\Gamma^*_{t_0}(t))\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right) .
$$

Entonces vale que

$$0 = S_{\varphi(t_0)}\left(\frac{d}{dt}\left[\Gamma^*_{t_0}(t)\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)\Gamma_{t_0}(t)\right]\Big|_{t_0}\right) =$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{S_{\varphi(t_0)}\left(\Gamma^*_{t_0}(t)\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)\Gamma_{t_0}(t)\right)\right\}\Big|_{t_0}$$

De estas identidades surge que

$$0 = \frac{d}{dt}\left\{ad(\Gamma^*_{t_0}(t))\circ S_{\varphi(t)}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)\right\}\Big|_{t_0} = \left[\frac{d}{dt}\Gamma^*_{t_0}(t_0)\right]S_{\varphi(t_0)}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t_0)\right) +$$
$$+ S_{\varphi(t_0)}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t_0)\right)\frac{d}{dt}\Gamma_{t_0}(t_0) + \frac{d}{dt}\left[S_{\varphi(t)}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)\right]\Big|_{t_0}$$

Como

$$\left[\frac{d}{dt}\Gamma^*_{t_0}(t_0)\right]S_{\varphi(t_0)}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t_0)\right) + S_{\varphi(t_0)}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t_0)\right)\cdot\frac{d}{dt}\Gamma_{t_0}(t_0) =$$
$$= -S_{\varphi(t_0)}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t_0)\right)^2 + S_{\varphi(t_0)}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t_0)\right)^2 = 0\,,$$

resulta entonces

$$\frac{d}{dt}\left[S_{\varphi(t)}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)\right]\Big|_{t_0} = 0\,,$$

y vale para cada $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Por lo tanto,

$$S_{\varphi(t)}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right) = S_{\varphi(0)}\left(\frac{d}{dt}\varphi(0)\right) = S_c(X)\,, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\,.$$

Calculemos ϕ, la solución de la ecuación de transporte de φ, con $\phi(0) = 1$.

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = S_{\varphi(t)}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)\phi(t) = S_c(X)\phi(t)\,, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\,.$$

Por lo tanto debe ser $\phi(t) = e^{tS_c(X)}$. Como ϕ "levanta" a φ, resulta

$$\varphi(t) = \phi(t)\,c\,\phi(t)^* = e^{tS_c(X)}\,c\,e^{-tS_c(X)}\,.$$

Veamos ahora que las curvas $\psi(t) = e^{tS_c(X)}\,c\,e^{-tS_c(X)}$ son geodésicas con $\psi(0) = c$ y $\frac{d}{dt}\psi(0) = X$. Es inmediato que $\psi(0) = c$. Además $\frac{d}{dt}\psi(0) = S_c(X)c - cS_c(X) = \delta_c S_c(X) = X$, pues $X \in T\mathcal{U}(b)_c = R\delta_c$.

Probemos que $\phi(t) = e^{tS_c(X)}$ es solución de la ecuación de transporte de ψ, con $\phi(0) = 1$. Esto es equivalente a mostrar que $\overline{\phi} = u^*\phi u$ es el levantamiento horizontal de $\overline{\psi} = u^*\psi u$, para $u \in \pi_b^{-1}(c)$ fijo. Veamos que es horizontal.

$$\overline{\phi}(t)^* \frac{d}{dt}\overline{\phi}(t) = u^*\phi(t)^* \frac{d}{dt}\phi(t)u = u^*\phi(t)^* S_c(X)\phi(t)u\,.$$

Como $\phi(t)$ y $S_c(X)$ conmutan, esto es igual a $u^*S_c(X)u$, que pertenece a $u^*\mathcal{H}^c u = \mathcal{H}_1$. Que $\overline{\phi}$ levanta a $\overline{\psi}$ es inmediato, pues $\overline{\phi}(t)b\overline{\phi}(t) = u^*\phi(t)c\phi(t)^*u = u^*\psi(t)u = \overline{\psi}(t)$.

Por lo tanto,

$$\frac{D}{d\psi}\left(\frac{d}{dt}\psi(t)\right)_c = \frac{d}{dt}\left[\phi(t)^*\frac{d}{dt}\psi(t)\phi(t)\right]\Big|_0 =$$
$$= \frac{d}{dt}[e^{-tS_c(X)}(e^{tS_c(X)}S_c(X)\,c\,e^{-tS_c(X)} - e^{tS_c(X)}\,c\,S_c(X)\,e^{-tS_c(X)}).$$
$$.\,e^{tS_c(X)}]|_0 = \frac{d}{dt}(\delta_c S_c(X))\Big|_0 = 0\,.$$

De manera análoga se prueba en todos los puntos. ♦

Observación 10.6

Usando 10.4 se pueden explicitar las ecuaciones diferenciales satisfechas por las geodésicas. Estas son

$$0 = \frac{d^2}{dt^2}\psi(t) + \left[\left[\frac{d}{dt}\psi(t),\; S_{\psi(t)}\left(\frac{d}{dt}\psi(t)\right)\right]\right]\,.$$

Corolario 10.7

La exponencial de la conexión definida en $\mathcal{U}(b)$ está dada por

$$\exp_c : T\mathcal{U}(b)_c \longrightarrow \mathcal{U}(b), \quad c \in \mathcal{U}(b)\,,$$
$$\exp_c(X) = e^{S_c(X)}\,c\,e^{-S_c(X)}\,. \quad ♦$$

Proposición 10.8

Sean $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{U}(b))$. Entonces la torsión $T(X,Y)$ y el tensor de curvatura $R(X,Y)Z$ de la conexión están dados por las siguientes expresiones para $c \in \mathcal{U}(b)$

$$T(X,Y)_c = [[Y_c, S_c(X_c)]] - [[X_c, S_c(Y_c)]] \quad \text{y}$$
$$R(X,Y)Z_c = [[Z_c, [[S_c(X_c), S_c(Y_c)]] + S_c(T(X,Y)_c)]]\,.$$

Demostración: Recordemos que $T(X,Y)_c = (\nabla_X Y)_c - (\nabla_Y X)_c - [X,Y]_c$. Usando $(\nabla_X Y)_c = XY_c + [[Y_c, S_c(X_c)]]$ y la expresión análoga para $(\nabla_Y X)_c$, resulta de inmediato lo buscado, sustituyendo.

Para el tensor de curvatura

$$\{R(X,Y)Z\}_c = \{\nabla_X(\nabla_Y Z)\}_c - \{\nabla_Y(\nabla_X Z)\}_c - (\nabla_{[X,Y]}Z)_c\,,$$

un cálculo directo muestra que esto es igual a

$$\begin{aligned}&[[Z_c, X(\widetilde{S}(Y))_c - Y(\widetilde{S}(X)_c)]] + [[\,[[Z_c, S_c(Y_c)]], S_c(X_c)]] - \\ &- [[\,[[Z_c, S_c(X_c)]], S_c(Y_c)]] - [[Z_c, S_c([X,Y]_c)]]\,,\end{aligned}$$

donde $\widetilde{S}(X)_d = S_d(X_d)$, $\widetilde{S}(Y)_d = S_d(Y_d)$, $d \in \mathcal{U}(b)$.

Nótese que

$$\begin{aligned}&[[\,[[Z_c, S_c(Y_c)]], S_c(X_c)]] - [[\,[[Z_c, S_c(X_c)]], S_c(Y_c)]] = \\ &[[Z_c, [[S_c(Y_c), S_c(X_c)]]\,]]\,.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$X(\widetilde{S}(Y))_c = \frac{d}{dt} S_{x(t)}(Y_{x(t)})\Big|_0 = \frac{d}{dt}\left[\overline{x}(t) S_c(\overline{x}(t)^* Y_{x(t)} \overline{x}(t))\overline{x}(t)^*\right]\Big|_0\,,$$

donde x es una curva integral de X, con $x(0) = c$, y $\overline{x}$ es la solución de la ecuación de transporte de x, con $\overline{x}(0) = 1$. Luego queda

$$\begin{aligned}X(\widetilde{S}(Y))_c &= \left[\frac{d}{dt}\overline{x}(0)\right] S_c(Y_c) + \frac{d}{dt} S_c(\overline{x}(t)^* Y_{x(t)} \overline{x}(t))\Big|_0 + \\ &+ S_c(Y_c)\frac{d}{dt}\overline{x}(0)^* = S_c(X_c)S_c(Y_c) - S_c(Y_c)S_c(X_c) + \\ &+ S_c\left(\frac{d}{dt}[\overline{x}(t)^* Y_{x(t)} \overline{x}(t)]\Big|_0\right) = [[S_c(X_c), S_c(Y_c)]] + S_c((\nabla_X Y)_c)\,.\end{aligned}$$

Volviendo a la expresión original

$$\begin{aligned}\{R(X,Y)Z\}_c &= [[Z_c, [[S_c(Y_c), S_c(X_c)]]\,]] + [[Z_c, X(\widetilde{S}(Y))_c - Y(\widetilde{S}(X))_c - S_c([X,Y]_c)]] \\ &= [[Z_c, [[S_c(Y_c), S_c(X_c)]] + S_c((\nabla_X Y)_c - (\nabla_Y X)_c - [X,Y]_c)]] \\ &= [[Z_c, [[S_c(Y_c), S_c(X_c)]] + S_c(T(X,Y)_c)]]\,. \quad \blacklozenge\end{aligned}$$

Observación 10.9

i) Nótese que las construcciones de $\mathcal{H}^c$, S_c y por lo tanto de las ecuaciones de levantamiento, así como de las geodésicas, etc., no dependen de la forma específica de $\mathcal{H}_1$, sino de las propiedades que lo capacitan para definir una conexión (particularmente delicada es la invarianza de $\mathcal{H}_1$ bajo la acción del grupo de isotropía $\mathcal{U}_b$). Por lo tanto, esta maquinaria puede ser aplicada de manera completamente análoga, con las modificaciones pertinentes en cada caso, a órbitas conjuntas unitarias y de similaridad con estructura diferenciable (ver [1]), cada vez que un tal subespacio invariante $\mathcal{H}_1$ pueda ser encontrado.

Todos los cálculos hechos en las dos últimas secciones pueden ser repetidos en el contexto más general.

Sin embargo, la existencia de este espacio $\mathcal{H}_1$ no siempre está garantizada. Puede hallársele en el caso de la órbita de similaridad conjunta del par (b, b^*), cuando $C^*(b)$ es de dimensión finita. Lo mismo sucede con órbitas conjuntas unitarias con estructura diferenciable. Pero puede fallar en el caso de la órbita de similaridad de un solo elemento, como puede verse fácilmente tomando la órbita de similaridad de la celda de Jordan de orden 2, $q_2 \in \mathbf{C}^{2\times 2}$.

ii) En el caso de la órbita de similaridad de un idempotente q en un álgebra de Banach $\mathcal{B}$, la aplicación lineal $S_{q'}$ coincide con $\delta_{q'}$, $(q'^2 = q')$. De manera que la ecuación 9.11,

$$\frac{d}{dt}\Omega(t) = S_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)\Omega(t)$$

se transforma en

$$\frac{d}{dt}\Omega(t) = \left[\left[\frac{d}{dt}\gamma(t), \gamma(t)\right]\right]\Omega(t)$$

que es la obtenida en [5]. Otro tanto sucede con la ecuación 9.7.

§ 11. APENDICE.

Daremos en esta sección nuevas caracterizaciones de objetos ya estudiados en secciones anteriores, como ser los operadores S_c, $c \in \mathcal{U}(b)$, las ecuaciones de transporte y levantamiento horizontal y las geodésicas, en términos de los polinomios de dos variables no conmutativas p^i_{jk}, $1 \leq j,k \leq n_i$, $1 \leq i \leq p$.

Primero recordemos la expresión de la sección local ϖ_0 definida en un entorno de b en $\mathcal{U}(b)$,

$$\varpi_0(c) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} p^i_{j1}(c,c^*)E^i_{11}[1-(E^i_{11}-p^i_{11}(c,c^*))^2]^{-1/2}E^i_{1j}, \quad c \in \phi^{-1}(\tilde{\mathcal{V}}) .$$

Sea ahora $x \in \mathcal{U}(b)$, $x = ubu^*$, y sea $y \in u\phi^{-1}(\tilde{\mathcal{V}})u^*$, tiene sentido definir

$$s_x(y) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} p^i_{j1}(y,y^*)p^i_{11}(x,x^*)[1-(p^i_{11}(x,x^*)-p^i_{11}(y,y^*))^2]^{-1/2}p^i_{1j}(x,x^*) .$$

Es inmediato verificar que $s_x(y)$ está bien definido y es unitario. Además, cumple que

$$s_x(y)xs_x(y)^* = y .$$

En efecto, $s_x(y)xs_x(y)^* = s_{ubu^*}(y)ubu^*s_{ubu^*}(y)^* = u\varpi_0(u^*yu)u^* = y$.

Cada vez que uno tiene una distribución de secciones locales, en cierto sentido uniforme (todas definidas mediante la misma expresión algebraica, y más aún, si los entornos se tomaran como bolas en $\mathcal{U}(b)$, podría elegirse todas del mismo radio), se puede intentar seguir un procedimiento de "integral multiplicativa" para construir levantamiento de curvas (ver [4] y [16]).

Dada una curva $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathcal{U}(b)$ de clase C^1, con $\gamma(\alpha) = b$, y una partición $\pi = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta\}$ del intervalo $[\alpha,\beta]$, lo suficientemente fina, de modo que estén definidos los unitarios $s_{\gamma(t_{i-1})}(\gamma(t_i))$, $1 \leq i \leq m$, para cada $t \in [\alpha,\beta]$, sea $\pi_t = \{\alpha = t_0 < \ldots < t_j < t\}$ una partición de $[\alpha,t]$, donde t_j es el mayor miembro de la partición π tal que $t_j < t$.

Consideraremos el unitario

$$\Gamma_{\pi_t} = s_{\gamma(t)}(\gamma(t_j))s_{\gamma(t_j)}(\gamma(t_{j-1}))\ldots s_{\gamma(\alpha)}(\gamma(t_1)) .$$

Es inmediato verificar que Γ_{π_t} tiene la propiedad

$$\Gamma_{\pi_t}\, b\, \Gamma_{\pi_t}^* = \gamma(t)\,, \qquad t\in[\alpha,\beta]\,.$$

El procedimiento informal, sugiere suponer (de hecho, se puede intentar demostrar, ver [4]) que existe el límite

$$\lim_{|\pi|\to 0}\Gamma_{\pi_t} = \Gamma(t)\,,$$

que por consiguiente satisface que $\Gamma(t) b \Gamma(t)^* = \gamma(t)$. A partir de allí, consideremos

$$\frac{\Gamma_{\pi_{t+h}} - \Gamma_{\pi_t}}{h}\,,$$

si $h_{>0}$ es suficientemente pequeño, de modo que $t_j < t < t+h < t_{j+1}$, esto da aproximadamente

$$\frac{s_{\gamma(t)}(\gamma(t+h))\Gamma_{\pi_t} - \Gamma_{\pi_t}}{h} = \frac{\left[s_{\gamma(t)}(\gamma(t+h)) - 1\right]\Gamma_{\pi_t}}{h}\,.$$

Calculemos $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{s_{\gamma(t)}(\gamma(t+h)) - 1}{h}$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{s_\gamma(t)(\gamma(h+t)) - 1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} p^i_{j1}(\gamma(t+h),\gamma(t+h)^*)p^i_{11}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\,.\\ &\cdot[1-(p^i_{11}(\gamma(t),\gamma(t)^*) - p^i_{11}(\gamma(t+h),\gamma(t+h)^*))^2]^{-1/2}p^i_{1j}(\gamma(t),\gamma(t)^*) - 1\} =\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}[p^i_{j1}(\gamma(t+h),\gamma(t+h)^*) - p^i_{j1}(\gamma(t),\gamma(t)^*)][1-(p^i_{11}(\gamma(t),\gamma(t)^*) -\\ &- p^i_{11}(\gamma(t+h),\gamma(t+h)^*))^2]^{-1/2}p^i_{1j}(\gamma(t),\gamma(t)^*) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}p^i_{j1}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\,.\\ &\cdot[1-(p^i_{11}(\gamma(t),\gamma(t)^*) - p^i_{11}(\gamma(t+h),\gamma(t+h)^*))^2]^{-1/2}p^i_{1j}(\gamma(t),\gamma(t)^*) - 1\}\,.\end{aligned}$$

El primer sumando tiende a

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\frac{d}{dt}p^i_{j1}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\right]p^i_{1j}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\,.$$

Veamos que el segundo tiende a cero. Escribiendo a 1 como $\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{n_i}p^i_{j1}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\,.$ $.\,p^i_{1j}(\gamma(t),\gamma(t)^*)$, alcanza con probar que

$$\lim_{h\to 0}\frac{[1-(p^i_{11}(\gamma(t),\gamma(t)^*) - p^i_{11}(\gamma(t+h),\gamma(t+h)^*))^2]^{-1/2} - 1}{h} = 0\,,\quad 1\le i\le p\,.$$

Usando la expansión en serie de $\frac{1}{(1-x)^{1/2}}$ para $|x| < 1$, si h es pequeño de modo que $\|p^i_{11}(\gamma(t),\gamma(t)^*) - p^i_{11}(\gamma(t+h),\gamma(t+h)^*)\| < 1$, vale que el límite a estimar es

$$\lim_{h\to 0}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(n+1)!\,2^{2n}}\cdot(p^i_{11}(\gamma(t),\gamma(t)^*) - p^i_{11}(\gamma(t+h),\gamma(t+h)^*))^{2n} - 1\right\}\frac{1}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(n+1)!\,2^{2n}}\,\frac{[p^i_{11}(\gamma(t),\gamma(t)^*) - p^i_{11}(\gamma(t+h),\gamma(t+h)^*))]^{2n}}{h}$$

Es inmediato verificar que $\lim_{h\to 0}\frac{[p^i_{11}(\gamma(t),\gamma(t)^*) - p^i_{11}(\gamma(t+h),\gamma(t+h)^*))]^2}{h} = 0$, lo cual es suficiente.

Resumiendo, el levantamiento Γ construido, de existir y ser de clase C^1, debería cumplir que

$$(11.1)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\Gamma(t) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\frac{d}{dt}p^i_{j1}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\right]p^i_{1j}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\,.\,\Gamma(t)\\ \Gamma(t_0) = 1\end{cases}$$

Teorema 11.2

Sea $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathcal{U}(b)$ de clase C^1, con $\gamma(\alpha) = b$. Entonces el levantamiento horizontal de γ que pasa por 1 en t_0 es la única solución de (11.1).

<u>Demostración</u>: Alcanza con probar que el levantamiento horizontal Γ de γ con $\Gamma(t_0) = 1$ es solución de (11.1).

Calculemos

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\frac{d}{dt}p^i_{j1}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\right]p^i_{1j}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\Gamma(t) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\frac{d}{dt}(\Gamma(t)E^i_{j1}\Gamma(t)^*)\right]\Gamma(t)E^i_{1j}$$
$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{d}{dt}\Gamma(t)E^i_{j1}E^i_{1j} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\Gamma(t)E^i_{j1}\left[\frac{d}{dt}\Gamma(t)^*\right]\Gamma(t)E^i_{1j}\,.$$

El primer sumando da $\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{d}{dt}\Gamma(t)E^i_{jj} = \frac{d}{dt}\Gamma(t)$.

Veamos que el segundo da cero. Alcanza con probar que

$$E^i_{j1}\left[\frac{d}{dt}\Gamma(t)^*\right]\Gamma(t)E^i_{1j} = 0,\quad 1\le j\le n_i,\quad 1\le i\le p\,.$$

Como $\Gamma(t)$ es unitario, $\left[\frac{d}{dt}\Gamma^*(t)\right]\Gamma(t) = -\Gamma^*(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t)$. Además, como Γ es horizontal, $\frac{d}{dt}\Gamma(t) \in \mathcal{H}_{\Gamma(t)} = \Gamma(t)\mathcal{H}_1$, es decir, $\Gamma^*(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t) \in \mathcal{H}_1$, $t \in [\alpha,\beta]$. Por lo tanto, $E^i_{11}\Gamma^*(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t)E^i_{11} = 0$, $1 \leq i \leq p$. Entonces $E^i_{j1}\left[\frac{d}{dt}\Gamma^*(t)\right]\Gamma(t)E^i_{1j} = -E^i_{j1}\Gamma^*(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t)E^i_{1j} = -E^i_{j1}E^i_{11}\Gamma^*(t)\frac{d}{dt}\Gamma(t)E^i_{11}E^i_{1j} = 0$. ♦

Corolario 11.3

El operador $S_c : R\delta_c \to \mathcal{A}_{ah}$, $c \in \mathcal{U}(b)$, está dado por la expresión

$$S_c = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} r_{p^i_{1j}(c,c^*)} \circ d(p^i_{j1})_{(c,c^*)} \circ i$$

donde $i : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^2$, $i(x) = (x, x^*)$.

<u>Demostración</u>: Sea $X \in R\delta_c$, sea $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathcal{U}(b)$ una curva C^1 adaptada a X en c. Si $c = ubu^*$, sean $\overline{\gamma} = u^*\gamma u$ y Γ la levantada horizontal de $\overline{\gamma}$ con $\Gamma(0) = 1$. Entonces

$$S_c(X) = S_{\gamma(0)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(0)\right) = uS\left(u^*\frac{d}{dt}\gamma(0)u\right)u^* = uS_{\overline{\gamma}(0)}\left(\frac{d}{dt}\overline{\gamma}(0)\right)\Gamma(0)u^* =$$

$$= u\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\frac{d}{dt}p^i_{j1}(\overline{\gamma}(t),\overline{\gamma}(t)^*)\right]\Bigg|_0 E^i_{1j}u^* = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\frac{d}{dt}p^i_{j1}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\right]\Bigg|_0 p^i_{1j}(c,c^*)$$

Finalmente $\frac{d}{dt}p^i_{j1}(\gamma(t),\gamma(t)^*)|_0 = d(p^i_{j1})_{(\gamma(0),\gamma(0)^*)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(0), \frac{d}{dt}\gamma(0)^*\right)$. ♦

Corolario 11.4

Sea $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathcal{U}(b)$ de clase C^1, sean $t \in [\alpha,\beta]$ y $u_0 \in \pi_b^{-1}(\gamma(t_0))$ fijos. Entonces la levantada horizontal de γ por u_0 en t_0 es la solución de la ecuación

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Gamma(t) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\frac{d}{dt}p^i_{j1}(\gamma(t),\gamma(t)^*)\right]p^i_{1j}(\gamma(t),\gamma(t)^*).\Gamma(t) \\ \Gamma(t_0) = u_0 \quad ♦ \end{cases}$$

Corolario 11.5

Sean $c \in \mathcal{U}(b)$ y $X \in T\mathcal{U}(b)_c$. La geodésica $\psi : \mathbf{R} \to \mathcal{U}(b)$ con $\psi(0) = c$ y $\dfrac{d}{dt}\psi(0) = X$, está dada por la expresión

$$\psi(t) = \pi_c\left(e^{t\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} d(p^i_{j1})_{(c,c^*)}(X,X^*)p^i_{1j}(c,c^*)}\right), \quad t \in \mathbf{R}. \quad \blacklozenge$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] Andruchow, E.; Fialkow, L.A.; Herrero, D.A.; Pecuch Herrero, M.; Stojanoff, D., *Joint similarity orbits with local cross sections* (preprint).

[2] Andruchow, E.; Stojanoff, D., *Differentiable structure of similarity orbits*, J. of Operator Theory (por aparecer).

[3] Apostol, C.; Fialkow, L.A.; Herrero, D.A.; Voiculescu, D.V.,*Approximation of Hilbert space operators*, Vol.2, Pitman, Boston, 1984.

[4] Corach, G.; Porta, H.; Recht, L., *Algebraic elements and systems of projectors in Banach algebras*, Trabajos de Matemática, IAM, N° 114.

[5] Corach, G.; Porta, H.; Recht, L., *Differential geometry and systems of projectors in Banach algebras* (preprint).

[6] Curto, R.E.; Herrero, D.A., *On closures of joint similarity orbits*, Int. Eq. and Op. Th., Vol. 8 (1985), 489-556.

[7] Daleckii, J.L.; Krein, M.G., *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, Trans. Math. Monographs AMS, Providence, 1974.

[8] Deckard, D.; Fialkow, L.A., *Characterisation of Hilbert space operators with unitary cross sections*, J. of Operator Theory 2 (1979), 153-158.

[9] Dixmier, J., *Les C^*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[10] Fialkow, L.A., *A note on unitary cross sections for operators*, Can. J. Math. Vol. XXX, N° 6 (1978) 1215-1227.

[11] Kowalski, O., *Generalised symmetric spaces*, Lecture Notes in Math. 805, Springer, New York, 1980.

[12] Lang, S., *Differential manifolds*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.

[13] Larotonda, A.R., *Notas sobre variedades diferenciables*, Notas de Geometría y Topología 1, INMABB-CONICET, Bahía Blanca, 1980.

[14] Nomizu, K., *Lie groups and differential geometry*, Publications of the Math. Soc. of Japan 2, Tokio, 1956.

[15] Pecuch Herrero, M., *Global cross sections of unitary and similarity orbits of Hilbert space operators*, J. of Operator Theory, 12 (1984), 265-283.

[16] Potapov, P., *The multiplicative structure of J-contractive matrix functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 15 (1960), 131-244.

[17] Raeburn, I., *The relation between a commutative Banach algebra and its maximal ideal space*, J. of Functional Anal. 25 (1977), 366-390.

[18] Rudin, W., *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[19] Schwartz, J.T., *W^*-algebras*, Gordon Breach, New York, 1967.

[20] Steenrod, N., *The topology of fiber bundles*, Princeton, 1951.

[21] Voiculescu, D.V., *A non commutative Weyl-Von Neumann theorem*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 21 (1976), 97-113.

GUSTAVO CORACH