Covariancia de las ecuaciones de campo y principios variacionales

López, María Cristina

1989

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

COVARIANCIA DE LAS ECUACIONES DE CAMPO Y PRINCIPIOS VARIACIONALES

AUTOR
MARÍA CRISTINA LOPEZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. RICARDO J. NORIEGA

LUGAR DE TRABAJO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TITULO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

- 1989 -

INDICE

INTRODUCCION

El objeto del presente trabajo es estudiar ciertos aspectos de las ecuaciones de campo a las que da lugar una teoría de gauge arbitraria si se la acopla con un campo gravitacional. Más explícitamente, si consideramos una variedad espacio-tiempo con tensor métrico g_{ij} y una conexión sobre un fibrado principal con forma de curvatura F, entonces dicho tensor y dicha forma deben satisfacer las ecuaciones de Einstein-Yang-Mills:

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = B_{\alpha\beta} (F^{\alpha i}{}_{k} F^{\beta jk} - \frac{1}{4} g^{ij} F^{\alpha hk} F^{\beta}_{hk})$$

$$F^{\alpha ij}{}_{\| j} = 0,$$

constituyendo el segundo grupo de ecuaciones las ecuaciones de Yang-Mills propiamente dichas.

Es sabido que, al igual que en el caso de la teoría de Einstein-Maxwell, dichas ecuaciones se pueden obtener a partir de un principio variacional de la siguiente manera:

Si

$$L = \sqrt{g}\, R + B_{\alpha\beta} F^{\alpha ij} F^{\beta}_{ij},$$

entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange $E^{ij}(L) = 0$, $E^{i}_{\alpha}(L) = 0$,

donde

$$E^{ij}(L) = \frac{\partial L}{\partial g_{ij}} - \frac{\partial}{\partial x^h} (\frac{\partial L}{\partial g_{ij,h}}) + \frac{\partial^2}{\partial x^h \partial x^k} (\frac{\partial L}{\partial g_{ij,hk}})$$

y

$$E^{i}_{\alpha}(L) = \frac{\partial L}{\partial A^{\alpha}_{i}} - \frac{\partial}{\partial x^{j}} \left(\frac{\partial L}{\partial A^{\alpha}_{i,j}}\right),$$

siendo A^{α}_{i} los potenciales de gauge a partir de los cuales se construye la forma de curvatura, son las indicadas.

Es fácil ver que las ecuaciones de Einstein-Yang-Mills tienen un doble tipo de "covariancia": por un lado tienen carácter tensorial frente a un cambio de coordenadas, lo cual asegura que el hecho de que se cumplan o no es independiente del sistema elegido. Por otra parte, por un cambio de gauge (que significa, como definimos más adelante, un cambio de sección en el fibrado principal) tienen una propiedad de homogeneidad, apareciendo los coeficientes de la transformada adjunta como factores. Nuevamente, esto asegura que si las ecuaciones se cumplen para un gauge, entonces se cumplen para cualquiera.

Estas dos propiedades de covariancia son entonces obligatorias por razones físicas naturales. Se puede verificar también que el Lagrangiano que da lugar a dichas ecuaciones tiene similares propiedades de covariancia. Esto no parece, en principio, obligatorio ya que el Lagrangiano no tiene, en general, una interpretación física. De hecho, es fácil conseguir un Lagrangiano que dé las mismas ecuaciones y que no sea covariante suprimiendo la parte de las derivadas de la conexión de Levi-Civita en L.

Está claro que la aparente diversidad de Lagrangianos posibles se reduce a un conjunto de clases de equivalencia, siendo dos Lagrangianos equivalentes sí y sólo sí dan lugar a las mismas expresiones de Euler- Lagrange. Aún así, en un contexto de justificación de la teoría (el otro contexto sería el de la experimentación) parecería haber demasiados Lagrangianos posibles que den lugar a ecuaciones de campo covariantes. En este trabajo mostraremos cómo se reduce esa cantidad de Lagrangianos de manera tal que las ecuaciones de Einstein-Yang-Mills sean las únicas compatibles con ciertas hipótesis razonables. Como vamos a trabajar con objetos geométricos concomitantes del tensor métrico y la forma de curvatura, definiremos con precisión en el Capítulo 2 lo que significa dicha noción de concomitancia en este caso. La principal dificultad está en definir la noción de concomitante covariante por cambios de gauge.

En el Capítulo 3 mostraremos que, si las ecuaciones de campo tienen covariancia de gauge y se obtienen a partir de una densidad escalar, entonces también se pueden obtener a partir de una densidad escalar con covariancia de gauge. En segundo lugar veremos que la hipótesis de que el Lagrangiano sea una densidad escalar puede ser suprimida, en el sentido de que, si hay covariancia de las ecuaciones de campo obtenidas a partir de una función cualquiera, que depende de la métrica y la forma de curvatura, entonces dichas ecuaciones pueden ser obtenidas a partir de una densidad escalar. Desde un punto de vista matemático esto significa la solución por la afirmativa del problema equivariante inverso en el Cál culo de Variaciones correspondiente a las variables de cam po utilizadas.

Estos dos resultados muestran que, cualesquiera sean las ecuaciones de campo, mientras sean covariantes, siempre hay una densidad escalar con covariancia de gauge que de lu gar a ellas, limitándose así notablemente un número de ecua ciones de campo lógicamente posibles. Esto se hace en el Capítulo 4.

Dada la hipótesis de mínimo acoplamiento del campo gra vitacional con el campo de gauge, suponiendo principios va-riacionales para las ecuaciones y que éstas provienen de un tensor métrico y de una forma de curvatura, mostraremos des pués (ver Capítulo 5) que las ecuaciones de Einstein-Yang-Mills son las únicas posibles de conseguir en esas condicio nes. Este resultado puede considerase como un análogo natu-ral del resultado de E. Cartan acerca de la unicidad de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Esto muestra que, dentro del contexto matemático en el que se trabaja, la forma de di chas ecuaciones es inevitablemente la usual.

1. PRELIMINARES

1.1. Si G es un grupo de Lie de dimensión r, a es un elemento de G y LG es el álgebra de Lie de G, *la representación adjunta* $Ad(a):LG \to LG$ se define como:

$$Ad(a) = (L_a \circ R_{a^{-1}})_{*e}$$

donde L_a y R_a son las traslaciones a izquierda y a derecha respectivamente y e es el elemento neutro del grupo. Asociado a $Ad(a)$ se tiene el endomorfismo de LG^*: $\widetilde{Ad}(a)$, dado por:

$$\widetilde{Ad}(a)(\eta)(X_e) = \eta(Ad(a^{-1})(X_e))$$

con X campo vectorial sobre G.

Si U es un entorno de cero en LG, tal que $\exp:U \to V$ es difeomorfismo, tomando $z = \phi\circ\exp^{-1}:V \to R^r$ (ϕ es la identificación de LG con R^r), (z,V) resulta ser una carta local en G alrededor de e.

Asociadas a la base $\{e_1,\dots,e_r\}$ de LG se tienen las *constantes de estructura de grupo*: $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ $(1 \leq \alpha,\beta,\gamma \leq r)$, que se vinculan con la representación adjunta de la siguiente manera:

Si $Ad(a)(e_\alpha) = Ad^{\beta}_{\alpha}(a)e_\beta$, entonces:

$$\left.\frac{\partial Ad^{\beta}_{\alpha}}{\partial z^{\gamma}}\right|_e = C^{\beta}_{\gamma\alpha}$$

Si $\{\gamma^1,\dots,\gamma^r\}$ es la base dual de $\{e_1,\dots,e_r\}$, queda determinada $\tilde{\gamma}^{\alpha}$, la 1-forma invariante a izquierda generada por γ^{α}.

En un entorno de e en G, se tiene que

$$\tilde{\gamma}^{\alpha} = \ell^{\alpha}_{\beta}\, dz^{\beta} \qquad (1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant r)$$

donde $$\ell^{\alpha}_{\beta} = \left(\frac{\partial (z^{\alpha} \circ L_{a^{-1}})}{\partial z^{\beta}}\right)_a$$

y se verifican las siguientes propiedades:

i) $$\frac{\partial \ell^{\alpha}_{\beta}}{\partial z^{\gamma}} - \frac{\partial \ell^{\alpha}_{\gamma}}{\partial z^{\beta}} = C^{\alpha}_{\varepsilon\theta}\, \ell^{\varepsilon}_{\beta}\, \ell^{\theta}_{\gamma}$$

ii) Si $I:G \to G$ estś dada por $I(a) = a^{-1}$, entonces:

$$\left.\frac{\partial (Ad^{\alpha}_{\varepsilon} \circ I)}{\partial z^{\gamma}}\right|_a = C^{\alpha}_{\beta\theta}\, \ell^{\theta}_{\gamma}(a)\, Ad^{\beta}_{\varepsilon}(a^{-1})$$

Si se considera a LG como el conjunto de campos invariantes a izquierda definidos en G, a partir de $X \in LG$ queda definida la *1-forma natural* θ *a valores en* G_e mediante la relación

$$\theta(X)(a) = X(e) \qquad \text{para cada } a \in G.$$

1.2. Sean P y M variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente y sea G un grupo de Lie de dimensión r. Si P(M,G) denota el *fibrado principal sobre M con espacio total P, grupo estructural G y proyección* $\pi:P \to M$, a cada sección local $\sigma:U \subset M \to P$ ($\pi\circ\sigma = id_U$), de dicho fibrado, se le asigna una 1-forma ω_σ, llamada *forma de conexión, definida sobre U y a valores en LG* que verifica la siguiente condición:

Si $\sigma':U' \subset M \to P$ es otra sección local, con $U \cap U' \neq \emptyset$, entonces:

$$\omega_{\sigma'}(p)(X_p) = Ad((\psi(p))^{-1})(\omega_\sigma(p)(X_p)) +$$

$$+ \theta_{UU'}(p)(X_p) \qquad \forall p \in U \cap U'$$

donde $\psi:U \cap U' \to G$ está dada por $\sigma'(p) = \sigma(p) \bullet \psi(p)$, $\bullet$ es la acción de G sobre P, $\theta_{UU'} = \psi^*\theta$ y θ es la 1-forma natural.

Si $\sigma:U \subset M \to P$ es una sección local del fibrado, el par (U,σ) se dice *un gauge o una elección de gauge.* Un *campo de gauge* es una forma de conexión.

Si (x,V) es una carta local en M y $\{e_1,\ldots,e_r\}$ es una base de LG, las funciones $A_i^\alpha:U \cap V \to R$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant r)$ definidas por $\omega_\sigma = (A_i^\alpha\, dx^i)e_\alpha$ son los *potenciales de gauge respecto de* (U,σ), (x,V) *y* $\{e_1,\ldots,e_r\}$.

Dados los gauges (U,σ) y (U',σ') tales que existe $p \in U \cap U'$ con $\sigma(p) = \sigma'(p)$, entonces:

$$A'^{\alpha}_{i} = (Ad^\alpha_\beta \circ \psi^{-1})A^\beta_i + (\ell^\alpha_\beta \circ \psi)\, \frac{\partial \psi^\beta}{\partial x^i} \quad \text{en } U \cap U'$$

donde $\psi^{-1} = I \circ \psi$, o sea que $\psi^{-1}(p) = (\psi(p))^{-1}$.

Si $\mathbb{V} = T^\alpha_\beta(LG) = \{T: \underbrace{LG^* \times \ldots \times LG^*}_{\alpha} \times \underbrace{LG \times \ldots \times LG}_{\beta} \to R,$

R-multilineales$\}$

se define $\rho:G \to GL(V)$ como:

$$\rho(a) = \underbrace{\widetilde{Ad}(a^{-1}) \otimes \ldots \otimes \widetilde{Ad}(a^{-1})}_{\alpha} \otimes \underbrace{Ad(a) \otimes \ldots \otimes Ad(a)}_{\beta}$$

O sea:

$$\rho(a)(T)(\omega^1, \ldots, \omega^\alpha, X_1, \ldots, X_\beta) =$$

$$= T\Big(\widetilde{Ad}(a^{-1})(\omega^1), \ldots, \widetilde{Ad}(a^{-1})(\omega^\alpha), Ad(a)(X_1), \ldots, Ad(a)(X_\beta)\Big)$$

si $\omega^j \in LG^*$ $(1 \leq j \leq \alpha)$, $X_i \in LG$ $(1 \leq i \leq \beta)$

Un *campo tensorial de gauge de tipo* $(\mathbb{V}; r, s, w)$ es la asignación que a cada gauge (U, σ) le hace corresponder un campo tensorial relativo T_σ de tipo (r,s) y peso W definido en U y a valores en $\mathbb{V}$. Vale decir que si T es un tal campo, para cada gauge (U,σ), cada carta local (x,V) en M tal que $U \cap V \neq \emptyset$ y cada base $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de LG se tienen las funciones

$$T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} : U \cap V \to \mathbb{V} \text{ dadas por}$$

$$T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r} = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}{}^{\mu_1 \ldots \mu_\alpha}_{\nu_1 \ldots \nu_\beta} \, e_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes e_{\mu_\alpha} \otimes \gamma^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \gamma^{\nu_\beta}$$

que resultan ser densidades tensoriales de tipo (r,s) y peso w.

Un *campo tensorial de gauge de tipo* $(\rho; r, s, w)$ es un campo tensorial de gauge de tipo $(\mathbb{V}; r,s,w)$ tal que si (U,σ) y (U',σ') son gauges, con $U \cap U' \neq \emptyset$,

$$T_{\sigma'} = \rho \circ \psi^{-1}(T_\sigma)$$

Vale decir que si T es un campo tensorial de gauge de tipo $(\rho;r,s,w)$ se tiene que:

$$T'^{i_1\ldots i_r\,\mu_1\ldots\mu_\alpha}_{j_1\ldots j_s\,\nu_1\ldots\nu_\beta} = (Ad^{\mu_1}_{\varepsilon_1}\circ\psi^{-1})\ldots(Ad^{\mu_\alpha}_{\varepsilon_\alpha}\circ\psi^{-1})(Ad^{\theta_1}_{\nu_1}\circ\psi)$$

$$\ldots(Ad^{\theta_\beta}_{\nu_\beta}\circ\psi)\;T^{i_1\ldots i_r\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\alpha}_{j_1\ldots j_s\,\theta_1\ldots\theta_\beta},$$

donde se tuvo en cuenta que

$$\widetilde{Ad}(a)\gamma^\alpha = Ad^\alpha_\beta(a^{-1})\gamma^\beta$$

Dado el gauge (U,σ) se define *la forma de curvatura* F_σ como la 2-forma a valores en LG que localmente se expresa como

$$F_\sigma = (F^\alpha_{ij}\;dx^i \otimes dx^j)e_\alpha$$

donde (x,V) es una carta local en M tal que $U \cap V \neq \emptyset$ y las funciones $F^\alpha_{ij}: U \cap V \to R$ están definidas por

$$F^\alpha_{ij} = A^\alpha_{j,i} - A^\alpha_{i,j} + C^\alpha_{\beta\gamma}\,A^\beta_i\,A^\gamma_j \quad (1 \leqslant i,j \leqslant n,\; 1 \leqslant \alpha,\beta,\gamma \leqslant r)$$

$(A^\alpha_{j,i}$ indica la derivada $\dfrac{\partial A^\alpha_j}{\partial x^i})$

La forma de curvatura resulta ser un campo tensorial de gauge de tipo $(Ad;0,2,0)$.

Si se tiene una métrica Lorentziana g_{ij} definida en M, la *derivada covariante de gauge* de F^α_{ij} es:

$$F^{\alpha}_{ij\|h} = F^{\alpha}_{ij,h} - F^{\alpha}_{kj}\,\Gamma^{k}_{ih} - F^{\alpha}_{ik}\,\Gamma^{k}_{jh} + F^{\gamma}_{ij}\,C^{\alpha}_{\beta\gamma}\,A^{\beta}_{h}$$

$$= F^{\alpha}_{ij|h} + F^{\gamma}_{ij}\,C^{\alpha}_{\beta\gamma}\,A^{\beta}_{h}$$

donde la barra vertical indica la derivada covariante usual y los Γ^{k}_{ij} son los símbolos de Christoffel de primera especie. $F^{\alpha}_{ij\|h}$ son las componentes de un tensor de gauge de tipo (Ad;0,3,0).

2. ESCALARES Y TENSORES INVARIANTES POR CAMBIOS DE GAUGE

Sea G un grupo de Lie de dimensión r.

2.1. Definición:

$L:R^{n\times r}\times R^{n^2\times r} \to R$ es un *escalar invariante por cambios de gauge* si para todo abierto U de G tal que $e \in U$ y $\exp^{-1}|_U$ es difeomorfismo se tiene que:

$$L(Ad^{\alpha}_{\beta}(a^{-1})H^{\beta}_{i} + \ell^{\alpha}_{\beta}(a)\psi^{\beta}_{i};\ D_{\gamma}(Ad^{\alpha}_{\beta}\circ I\circ z^{-1})(z(a))\psi^{\gamma}_{j}\ H^{\beta}_{i} +$$

$$Ad^{\alpha}_{\beta}(a^{-1})\ H^{\beta}_{ij} + D_{\gamma}(\ell^{\alpha}_{\beta}\circ z^{-1})(z(a))\psi^{\gamma}_{j}\ \psi^{\beta}_{i} + \ell^{\alpha}_{\beta}(a)\psi^{\beta}_{ij}) =$$

$$= L(H^{\alpha}_{i};\ H^{\alpha}_{ij}),\qquad \text{para todo } a \in U,\ \psi^{\beta}_{i} \in R^{n\times r} \text{ y}$$

$\psi^{\beta}_{ij} \in R^{n^2\times r}$. Donde z, I, $\ell^{\alpha}_{\beta}(a)$ y $Ad^{\alpha}_{\beta}(a)$ son los definidos en el capítulo anterior.

2.2. Definición:

Las $(n^2\times r)$ funciones $L^{\alpha}_{ij}:R^{n\times r}\times R^{n^2\times r} \to R$ son las *componentes de un tensor de gauge* si satisfacen las siguientes condiciones:

a) Para todo abierto U de G tal que $e \in U$ y $\exp^{-1}|_U$ es difeomorfismo

$$L^{\alpha}_{ij}(Ad^{\theta}_{\beta}(a^{-1})H^{\beta}_{h} + \ell^{\theta}_{\beta}(a)\psi^{\beta}_{h};\ D_{\gamma}(Ad^{\theta}_{\beta}\circ I\circ z^{-1})(z(a))\psi^{\gamma}_{k}\ H^{\beta}_{h} +$$

$$+ Ad^{\theta}_{\beta}(a^{-1})H^{\beta}_{hk} + D_{\gamma}(\ell^{\theta}_{\beta}\circ z^{-1})(z(a))\psi^{\gamma}_{k}\ \psi^{\beta}_{h} + \ell^{\theta}_{\beta}(a)\psi^{\beta}_{hk}) =$$

$$= Ad^{\alpha}_{\beta}(a^{-1})L^{\beta}_{ij}(H^{\theta}_{h};\ H^{\theta}_{hk}),\quad \text{cualquiera sea } a \in U,$$

$\psi^{\beta}_{i} \in R^{n\times r}$ y $\psi^{\beta}_{ij} \in R^{n^2\times r}$

b) Para toda matriz inversible B^{a}_{b} y para B^{a}_{bc} arbitrario, salvo por la simetría en b,c, se tiene que:

$$L^{\alpha}_{rs}(B^{h}_{i}\ H^{\beta}_{h};\ B^{h}_{ij}\ H^{\beta}_{h} + B^{h}_{i}\ B^{k}_{j}\ H^{\beta}_{hk}) =$$

$$= B^{\ell}_{r}\ B^{m}_{s}\ L^{\alpha}_{m\ell}(H^{\beta}_{i};\ H^{\beta}_{ij})$$

2.3. A fin de ejemplificar el uso de las definiciones anteriores, demostraremos que si $L^{\alpha}_{ij} = L^{\alpha}_{ij}(H^{\beta}_{h};\ H^{\beta}_{hk})$ es un tensor de gauge, entonces

$$L^{\alpha}_{ij} = b^{\alpha}_{\beta}(H^{\beta}_{ji} - H^{\beta}_{ij} + C^{\alpha}_{\theta\varepsilon}\ H^{\theta}_{i}\ H^{\varepsilon}_{j}),$$

donde b^{α}_{β} son números reales y $C^{\alpha}_{\theta\varepsilon}$ son las constantes de estructura del grupo. En efecto, como L^{α}_{ij} satisface la definición 2.2. a),

$$L^{\alpha}_{ij}((Ad^{\beta}_{\theta}\circ I)H^{\theta}_{h} + \ell^{\beta}_{\theta}\ \psi^{\theta}_{h};\ \frac{\partial(Ad^{\beta}_{\theta}\circ I)}{\partial z^{\gamma}}\ \psi^{\gamma}_{k}\ H^{\theta}_{h} +$$

$$+ (Ad^{\beta}_{\theta}\circ I)H^{\theta}_{hk} + \frac{\partial \ell^{\beta}_{\theta}}{\partial z^{\gamma}}\ \psi^{\beta}_{k}\ \psi^{\theta}_{h} + \ell^{\beta}_{\theta}\ \psi^{\theta}_{hk}) =$$

$$= (Ad^{\alpha}_{\gamma}\circ I)L^{\gamma}_{ij}\ (H^{\beta}_{h};\ H^{\beta}_{hk}) \qquad (2.3.1)$$

Derivando (2.3.1) respecto de $H^{\delta}_{\ell m}$ y notando

$L^{\alpha\ ;hk}_{ij\ \beta} = \dfrac{\partial L^{\alpha}_{ij}}{\partial H^{\beta}_{hk}}$ obtenemos:

$$L^{\alpha\ ;\ell m}_{ij\ \varepsilon}((Ad^{\beta}_{\theta}\circ I)H^{\theta}_{h} + \ell^{\beta}_{\theta}\ \psi^{\theta}_{h};\ \frac{\partial(Ad^{\beta}_{\theta}\circ I)}{\partial z^{\gamma}}\ \psi^{\gamma}_{k}\ H^{\theta}_{h} +$$

$$+ (Ad^{\beta}_{\theta}\circ I)H^{\theta}_{hk} + \frac{\partial \ell^{\beta}_{\theta}}{\partial z^{\gamma}}\ \psi^{\gamma}_{k}\ \psi^{\theta}_{h} + \ell^{\beta}_{\theta}\ \psi^{\theta}_{hk})(Ad^{\varepsilon}_{\delta}\circ I) =$$

$$= (Ad^{\alpha}_{\gamma}\circ I)L^{\gamma\ ;\ell m}_{ij\ \delta}\ (H^{\beta}_{h};\ H^{\beta}_{hk})$$

Teniendo en cuenta que:

$$(Ad^{\beta}_{\theta}\circ I)(Ad^{\theta}_{\lambda}\circ I^{-1}) = Ad^{\beta}_{\lambda}(e) = \delta^{\beta}_{\lambda}$$

demostramos que $L^{\alpha\ ;hk}_{ij\ \lambda}$ satisface 2.2. a), vale decir que

$$L'^{\alpha\ ;hk}_{ij\ \lambda} = (Ad^{\alpha}_{\gamma}\circ I)(Ad^{\theta}_{\lambda}\circ I^{-1})L^{\gamma\ ;hk}_{ij\ \theta} \qquad (2.3.2)$$

Del hecho de que L^{α}_{ij} satisface 2.2. b), fácilmente se concluye que

$$L^{\alpha}_{ij}{}^{;hk}_{\gamma}(B^t_r\ H^{\beta}_t;\ B^t_{rs}\ H^{\beta}_t + B^t_r\ B^u_s\ H^{\beta}_{tu}) =$$

$$= B^t_i\ B^{\ell}_j\ (B^{-1})^h_m\ (B^{-1})^k_v\ L^{\alpha}_{t\ell}{}^{;mv}_{\gamma}(H^{\beta}_r;\ H^{\beta}_{rs}) \qquad (2.3.3)$$

Por lo tanto, (2.3.2) y (2.3.3) nos permiten asegurar que $L^{\alpha}_{ij}{}^{;hk}_{\gamma}$ es un tensor de gauge.

Si tomamos $B^a_b = \lambda\delta^a_b$ ($\lambda \neq 0$) y $B^a_{bc} = 0$, de (2.3.3), obtenemos que, para cada α,γ fijos, es:

$$L^{\alpha}_{ij}{}^{;hk}_{\gamma}(\lambda\ H^{\beta}_r;\ \lambda^2\ H^{\beta}_{rs}) = L^{\alpha}_{ij}{}^{;hk}_{\gamma}(H^{\beta}_r;\ H^{\beta}_{rs})$$

y haciendo tender λ a cero:

$$L^{\alpha}_{ij}{}^{;hk}_{\gamma}(H^{\beta}_r;\ H^{\beta}_{rs}) = L^{\alpha}_{ij}{}^{;hk}_{\gamma}(0,0)$$

Esto prueba que, para cada α,γ fijos, $L^{\alpha}_{ij}{}^{;hk}_{\gamma}$ es un tensor isotrópico constante. Luego ([1]) existen números a^{α}_{γ}, b^{α}_{γ} tales que:

$$L^{\alpha}_{ij}{}^{;hk}_{\gamma}(H^{\beta}_r;\ H^{\beta}_{rs}) = a^{\alpha}_{\gamma}\ \delta^h_i\ \delta^k_j + b^{\alpha}_{\gamma}\ \delta^k_i\ \delta^h_j \qquad (2.3.4)$$

Integrando (2.3.4) obtenemos:

$$L^{\alpha}_{ij} = a^{\alpha}_{\beta}\ H^{\beta}_{ij} + b^{\alpha}_{\beta}\ H^{\beta}_{ji} + M^{\alpha}_{ij}(H^{\beta}_h) \qquad (2.3.5)$$

Si ahora tenemos en cuenta que L^{α}_{ij} satisface 2.2 b) y (2.3.5), deducimos que:

$$B^h_i\ B^k_j(a^\alpha_\beta\ H^\beta_{hk} + b^\alpha_\beta\ H^\beta_{kh} + M^\alpha_{hk}(H^\beta_r)) =$$

$$= a^\alpha_\beta\ H^\beta_{hk}\ B^k_j\ B^h_i + a^\alpha_\beta\ H^\beta_h\ B^h_{ij} + b^\alpha_\beta\ H^\beta_{hk}\ B^k_i\ B^h_j$$

$$+ b^\alpha_\beta\ H^\beta_h\ B^h_{ji} + M^\alpha_{ij}(B^r_h\ H^\beta_r) \qquad (2.3.6)$$

Derivando (2.3.6) respecto de B^a_{bc} es:

$$\frac{1}{2}\ H^\beta_a(\delta^b_i\ \delta^c_j + \delta^c_i\ \delta^b_j)(a^\alpha_\beta + b^\alpha_\beta) = 0$$

y, como los H^β_a son arbitrarios, obtenemos que:

$$a^\alpha_\beta + b^\alpha_\beta = 0 \qquad (2.3.7)$$

Reemplazando (2.3.7) en (2.3.5) resulta

$$L^\alpha_{ij} = b^\alpha_\beta(H^\beta_{ji} - H^\beta_{ij}) + M^\alpha_{ij}(H^\beta_h) \qquad (2.3.8)$$

Como L^α_{ij} y $b^\alpha_\beta(H^\beta_{ji} - H^\beta_{ij})$ son concomitantes tensoriales, (2.3.8) muestra que M^α_{ij} es concomitante tensorial, para cada α fijo. Luego, si tomamos $B^a_b = \lambda\ \delta^a_b$ ($\lambda \neq 0$), $B^a_{bc} = 0$ y hacemos tender λ a cero, se ve que existen números $d^\alpha_{\beta\gamma}$ tales que:

$$L^\alpha_{ij} = b^\alpha_\beta(H^\beta_{ji} - H^\beta_{ij}) + d^\alpha_{\beta\gamma}\ H^\beta_i\ H^\gamma_j \qquad (2.3.9)$$

Si tenemos en cuenta que se verifica (2.3.1) y usamos que $\left(\dfrac{\partial\, Ad^\alpha_\beta \circ I)}{\partial z^\gamma}\right)_a = C^\alpha_{\upsilon\theta}\ \ell^\theta_\gamma(a)\ Ad^\upsilon_\beta(a^{-1})$, de (2.3.9) obtenemos:

$$b^{\alpha}_{\theta}\,[C^{\theta}_{\upsilon\varepsilon}\;\ell^{\varepsilon}_{\gamma}(Ad^{\upsilon}_{\beta}\circ I)\psi^{\gamma}_{i}\;H^{\beta}_{j} + (Ad^{\theta}_{\beta}\circ I)H^{\beta}_{ji} + \frac{\partial \ell^{\theta}_{\beta}}{\partial z^{\gamma}}\,\psi^{\gamma}_{i}\;\psi^{\beta}_{j} +$$

$$- C^{\theta}_{\upsilon\varepsilon}\;\ell^{\varepsilon}_{\gamma}(Ad^{\upsilon}_{\beta}\circ I)\psi^{\gamma}_{j}\;H^{\beta}_{i} - (Ad^{\theta}_{\beta}\circ I)H^{\beta}_{ij} - \frac{\partial \ell^{\theta}_{\beta}}{\partial z^{\gamma}}\,\psi^{\gamma}_{j}\;\psi^{\beta}_{i}] +$$

$$+ d^{\alpha}_{\beta\gamma}[\,(Ad^{\beta}_{\theta}\circ I)H^{\theta}_{i} + \ell^{\beta}_{\theta}\;\psi^{\theta}_{i}]\;.\;[\,(Ad^{\gamma}_{\varepsilon}\circ I)H^{\varepsilon}_{j} + \ell^{\gamma}_{\varepsilon}\;\psi^{\varepsilon}_{j}$$

$$= (Ad^{\alpha}_{\beta}\circ I)(H^{\theta}_{ji} - H^{\theta}_{ij})b^{\beta}_{\theta} + (Ad^{\alpha}_{\beta}\circ I)\,d^{\beta}_{\theta\gamma}\;H^{\theta}_{i}\;H^{\gamma}_{j} \qquad (2.3.10)$$

Si derivamos (2.3.10) respecto de H^{δ}_{hk} y luego tomamos $h = i$ y $k = j$, para $n \neq 1$, resulta:

$$b^{\alpha}_{\theta}(Ad^{\theta}_{\delta}\circ I) = b^{\beta}_{\delta}(Ad^{\alpha}_{\beta}\circ I) \qquad (2.3.11)$$

Y si por otra parte derivamos sucesivamente (2.3.10) respecto de H^{δ}_{ℓ} y H^{ε}_{s}; es:

$$d^{\alpha}_{\theta\gamma} = (Ad^{\alpha}_{\varepsilon}\circ I)(Ad^{\beta}_{\theta}\circ I^{-1})(Ad^{\mu}_{\gamma}\circ I^{-1})\,d^{\varepsilon}_{\beta\mu} \qquad (2.3.12)$$

Reemplazamos (2.3.11) y (2.3.12) en (2.3.10) y luego derivamos respecto de H^{θ}_{h} y ψ^{γ}_{k}, para $h \neq k$. Obtenemos entonces:

$$d^{\alpha}_{\beta\gamma} = b^{\alpha}_{\theta}\;C^{\theta}_{\beta\gamma} \qquad (2.3.13)$$

Esta última identidad, junto con (2.3.9), nos permite concluir que:

$$L^{\alpha}_{ij} = b^{\alpha}_{\beta}(H^{\beta}_{ji} - H^{\beta}_{ij} + C^{\beta}_{\theta\varepsilon}\, H^{\theta}_{i}\, H^{\varepsilon}_{j})$$

Observación:

Si P y M son variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente, G es un grupo de Lie de dimensión r y P(M,G) es el fibrado principal sobre M con espacio total P, grupo estructural G y proyección π, el ejemplo anterior demuestra el resultado que afirma que la forma de curvatura es tal que sus coeficientes son, esencialmente, los únicos concomitantes de los potenciales de gauge y sus primeras derivadas parciales ([2]), teniendo en cuenta que del Teorema 2.1 del capítulo 2 de la referencia [3] y de su demostración se deduce que los potenciales de gauge son arbitrarios y que lo mismo ocurre para las primeras derivadas parciales, con lo cual, en particular, $A^{\alpha}_{i} = 0$ y $A^{\alpha}_{i,j} = 0$ están en el dominio de concomitancia.

3. INVARIANCIA POR CAMBIOS DE GAUGE DE LAS EXPRESIONES DE EULER-LAGRANGE EN LA TEORIA DE CAMPO DE EINSTEIN-YANG-MILLS

3.1. Introducción

En la teoría de campo de Einstein-Yang-Mills, el Lagrangiano que, a través de un principio variacional, da lugar a las ecuaciones de campo es:

$$L = -\sqrt{g}\, R + L_1(g_{ij};\ A_i^{\alpha};\ A_{i,j}^{\alpha}) \qquad (3.1.1)$$

donde:

$$L_1(g_{ij};\ A_i^{\alpha};\ A_{i,j}^{\alpha}) = \sqrt{g}\, B_{\alpha\beta}\, F_{ij}^{\alpha}\, F^{\beta ij},$$

$B_{\alpha\beta}$ son las componentes de una forma bilineal simétrica Ad G-invariante (esto es: $B_{\alpha\beta} = Ad_{\alpha}^{\theta}(a)\, Ad_{\beta}^{\gamma}(a)\, B_{\gamma\theta}$, $\forall\, a \in G$) sobre el álgebra de Lie LG del grupo estructural G, $g = |\det(g_{ij})|$, (g^{ij}) es la inversa de la matriz (g_{ij}), $F^{\alpha ij} = g^{ih}\, g^{jk}\, F_{hk}^{\alpha}$ y R es el escalar de curvatura.

Las expresiones de Euler-Lagrange correspondientes a L son:

$$E^{ij}(L) = \frac{\partial L}{\partial g_{ij}} - \frac{\partial}{\partial x^h}\left(\frac{\partial L}{\partial g_{ij,h}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^h\, \partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial g_{ij,hk}}\right)$$

(3.1.2)

y

$$E_{\alpha}^{i}(L) = \frac{\partial L}{\partial A_i^{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial A_{i,j}^{\alpha}}\right) \qquad (3.1.3)$$

Las ecuaciones $E^{ij}(L) = 0$ y $E^{i}_{\alpha}(L) = 0$ son las ecuaciones de campo de Einstein-Yang-Mills, o sea:

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = 2B_{\alpha\beta}(F^{\alpha ih} F^{\beta j}{}_{h} - \frac{1}{4} g^{ij} F^{\alpha hk} F^{\beta}_{hk}) \tag{3.1.4}$$

y

$$B_{\alpha\beta} F^{\beta ij}{}_{\| j} = 0 \tag{3.1.5}$$

(la doble barra vertical indica derivada covariante de gauge).

Se observa que L, $E^{ij}(L)$ y $E^{i}_{\alpha}(L)$ son invariantes por cambios de gauge. En la sección 3.3 probaremos que, cuando la dimensión de la variedad subyacente es par y se trabaja con el Lagrangiano de la forma general $\mathcal{L} = -\sqrt{g}\, R + L(g_{ij};\, A^{\alpha}_{i};\, A^{\alpha}_{i,j})$, la hipótesis de invariancia por cambios de gauge para $E^{ij}(\mathcal{L})$ y $E^{i}_{\alpha}(\mathcal{L})$ implica la existencia de un Lagrangiano invariante por gauges que da lugar a las mismas ecuaciones de campo que $\mathcal{L}$. (Esto es una forma del problema equivariante inverso en el Cálculo de Variaciones ([4]).)

También mostraremos que el resultado no es válido si la dimensión de la variedad es impar.

3.2. Caracterización de algunas densidades escalares

3.2.1. Densidades escalares concomitantes de A^{α}_{i} y $A^{\alpha}_{i,j}$:

Si $L = L(A^{\alpha}_{i};\, A^{\alpha}_{i,j})$, $(1 \leq \alpha \leq r;\ 1 \leq i,j \leq n)$, es una densidad escalar, tomando el cambio de coordenadas $x^i = \lambda \bar{x}^i$ $(\lambda > 0)$ obtenemos

$$L(\lambda A^\alpha_i;\ \lambda^2 A^\alpha_{i,j}) = \lambda^n L(A^\alpha_i;\ A^\alpha_{i,j}) \qquad (3.2.1.1)$$

Derivando (3.2.1.1) n-veces respecto de λ y luego tomando límite para λ teniendo a cero por la derecha, deducimos que:

$$L = \sum_{h=0}^{k} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_h \beta_{h+1} \gamma_{h+1} \ldots \beta_k \gamma_k}\ \varepsilon^{i_1 j_1 \ldots i_k j_k}\ A^{\alpha_1}_{i_1, j_1} \ldots A^{\alpha_h}_{i_h, j_h} \qquad (3.2.1.2)$$

$$.\ A^{\beta_{h+1}}_{i_{h+1}}\ A^{\gamma_{h+1}}_{j_{h+1}} \ldots A^{\beta_k}_{i_k}\ A^{\gamma_k}_{j_k}, \qquad \text{si } n = 2k$$

y

$$L = \sum_{h=0}^{k} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_h \beta_{h+1} \gamma_{h+1} \ldots \beta_k \gamma_k \theta}\ \varepsilon^{i_1 j_1 \ldots i_k j_k r}\ A^{\alpha_1}_{i_1, j_1} \ldots A^{\alpha_h}_{i_h, j_h}. \qquad (3.2.1.3)$$

$$.\ A^{\beta_{h+1}}_{i_{h+1}}\ A^{\gamma_{h+1}}_{j_{h+1}} \ldots A^{\beta_k}_{i_k}\ A^{\gamma_k}_{j_k}\ A^{\theta}_{r}, \qquad \text{si } n = 2k+1$$

donde $\varepsilon^{\cdots}$ son los símbolos de permutación de Levi-Civita.

Tanto para n = 2k como para n = 2k+1, para demostrar lo afirmado, usamos la caracterización de las densidades tensoriales isotrópicas ([1]).

3.2.2. Densidades escalares concomitantes de F^{α}_{ij}.

Si partimos de la densidad escalar $L = L(F^{\alpha}_{ij})$ y consideramos el cambio de coordenadas $x^i = \lambda \bar{x}^i$ $(\lambda > 0)$ para cada $\lambda > 0$ obtenemos:

$$L(\lambda^2 F^{\alpha}_{ij}) = \lambda^n L(F^{\alpha}_{ij}) \tag{3.2.2.1}$$

Derivando (3.2.2.1) n-veces respecto de λ y luego haciendo tender λ a cero por la derecha, probamos que:

$$L = \text{constante, si } n = 2k+1 \tag{3.2.2.2}$$

y

$$L = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \varepsilon^{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} F^{\alpha_1}_{i_1 j_1} \ldots F^{\alpha_k}_{i_k j_k}, \text{ si}$$

$$n = 2k$$

3.3. Invariancia por cambios de gauge de las expresiones de Euler-Lagrange

3.3.1. Teorema 1:

Si $L = -\sqrt{g}\, R + L_1(g_{ij}\,; A^{\alpha}_i\,; A^{\alpha}_{i,j})$, $(1 \leq \alpha \leq r;$ $1 \leq i,j \leq n)$ *es una densidad escalar tal que* $E^{ij}(L)$ *es invariante por cambios de gauge y* n *es par, entonces:*

$$L = -\sqrt{g}\, R + \Lambda_1 + L_3$$

donde $\Lambda_1 = \Lambda_1(g_{ij};\, F_{ij})$ *es invariante por gauges y* $L_3 = L_3(A_i\,; A_{i,j})$

Demostración:

Como $\sqrt{g}\, R$ no depende de los potenciales de gauge, suponer que $E^{ij}(L)$ es invariante por gauges es equivalente a decir que $E^{ij}(L_1) = \frac{\partial L_1}{\partial g_{ij}} = L_1^{ij}$ es invariante por cambios de gauge. Luego, por el Teorema de reemplazo ([5]):

$$L_1^{ij}(g_{ij};A_i^\alpha;A_{i,j}^\alpha) = L_1^{ij}(g_{ij};0;-\tfrac{1}{2}\,F_{ij}^\alpha) \tag{3.3.1.1}$$

(3.3.1.1) nos permite afirmar que $L_1(g_{ij};A_i^\alpha;A_{i,j}^\alpha) - L_1(g_{ij};0;-\frac{1}{2}\,F_{ij}^\alpha)$ no depende de g_{ij}, con lo cual existe $L_2 = L_2(A_i^\alpha;A_{i,j}^\alpha)$ tal que:

$$L_1(g_{ij};A_i^\alpha;A_{i,j}^\alpha) = L_1(g_{ij};0;-\tfrac{1}{2}\,F_{ij}^\alpha) + L_2(A_i^\alpha;A_{i,j}^\alpha) \tag{3.3.1.2}$$

Si $\Lambda(g_{ij};F_{ij}^\alpha) = L_1(g_{ij};0;-\frac{1}{2}\,F_{ij}^\alpha)$, Λ resulta una densidad escalar y $\Lambda^{ij} = \frac{\partial \Lambda}{\partial g_{ij}}$ es invariante por cambios de gauge. Vamos a probar que Λ se descompone como suma de un Lagrangiano invariante por gauges y de un Lagrangiano que sólo depende de las F_{ij}^α. En efecto, sea, para cada $a \in G$, $\lambda_\beta^\alpha(a) = Ad_\beta^\alpha(a)$. Como Λ^{ij} es invariante por cambios de gauge:

$$\Lambda^{ij}(g_{hk};\lambda_\beta^\alpha(a)F_{hk}^\beta) = \Lambda^{ij}(g_{hk};F_{hk}^\alpha),$$

con lo cual $\Lambda(g_{ij};\ \lambda_\beta^\alpha(a)F_{hk}^\beta) - \Lambda(g_{ij};\ F_{ij}^\alpha)$ es concomitante sólo de F_{ij}^α para cada $a \in G$ y, si $n = 2k$, por (3.2.2.2), resulta:

$$\Lambda(g_{ij};\ \lambda^{\alpha}_{\beta}(a)F^{\beta}_{ij}) - \Lambda(g_{ij};\ F^{\alpha}_{ij}) =$$

$$= b_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(a)\ \varepsilon^{i_1j_1\ldots i_kj_k}\ F^{\alpha_1}_{i_1j_1} \ldots F^{\alpha_k}_{i_kj_k} \qquad (3.3.1.3)$$

Si derivamos (3.3.1.3) sucesivamente respecto de $F^{\alpha_1}_{i_1j_1},\ldots,F^{\alpha_k}_{i_kj_k}$, obtenemos:

$$b_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(a)\ \varepsilon^{i_1j_1\ldots i_kj_k} = \frac{1}{k!}[\Lambda^{i_1j_1;\ldots;i_kj_k}_{\beta_1 \qquad \beta_k}(g_{ij};\lambda^{\alpha}_{\beta}(a)F^{\beta}_{ij})$$

$$.\ \lambda^{\beta_1}_{\alpha_1}(a)\lambda^{\beta_k}_{\alpha_k}(a) - \Lambda^{i_1j_1;\ldots;i_kj_k}_{\alpha_1 \qquad \alpha_k}(g_{ij};A^{\alpha}_{ij})] \qquad (3.3.1.4)$$

Como el primer miembro de (3.3.1.4) no depende de las F^{α}_{ij}, el derecho tampoco.

Luego, tomando $F^{\alpha}_{ij} = 0$, es:

$$b_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(a)\ \varepsilon^{i_1j_1\ldots i_kj_k} = \frac{1}{k!}[\Lambda^{i_1j_1;\ldots;i_kj_k}_{\beta_1 \qquad \beta_k}(g_{ij};0)\lambda^{\beta_1}_{\alpha_1}(a)\ldots\lambda^{\beta_k}_{\alpha_k}(a)$$

$$- \Lambda^{i_1j_1;\ldots;i_kj_k}_{\alpha_1 \qquad \alpha_k}(g_{ij};0)] \qquad (3.3.1.5)$$

y multiplicando (3.3.1.5) por $\varepsilon_{i_1j_1\ldots i_kj_k}$:

$$(2k)!\ b_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(a) = \frac{1}{k!}[\varepsilon_{i_1j_1\ldots i_kj_k}\ \Lambda^{i_1j_1;\ldots;i_kj_k}_{\beta_1 \qquad \beta_k}(g_{ij};0)\ .$$

$$.\ \lambda^{\beta_1}_{\alpha_1}(a)\ldots\lambda^{\beta_k}_{\alpha_k}(a) - \varepsilon_{i_1j_1\ldots i_kj_k}\ \Lambda^{i_1j_1;\ldots;i_kj_k}_{\alpha_1 \qquad \alpha_k}(g_{ij};0)] \quad (3.3.1.6)$$

Si $C_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = \varepsilon_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} \Lambda^{i_1 j_1 ; \ldots ; i_k j_k}_{\alpha_1 \quad \alpha_k}(g_{ij};0)$, para cada elecci6n de $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $C_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ es un escalar concomitante de g_{ij}, luego $C_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ es constante ([6]).

Si $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = \frac{1}{k!(2k)!} C_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ y

$$\Lambda_1 = \Lambda(g_{ij};F^{\alpha}_{ij}) - a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \varepsilon^{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} F^{\alpha_1}_{i_1 j_1} \ldots F^{\alpha_k}_{i_k j_k}, \tag{3.3.1.7}$$

Veamos que Λ_1 es invariante por cambios de gauge. Usando (3.3.1.3) y (3.3.1.6):

$$\Lambda_1(g_{ij};\lambda^{\alpha}_{\beta}(a)F^{\beta}_{ij}) = \Lambda(g_{ij};\lambda^{\alpha}_{\beta}(a)F^{\beta}_{ij}) -$$

$$- a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \varepsilon^{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} F^{\beta_1}_{i_1 j_1} \ldots F^{\beta_k}_{i_k j_k} \lambda^{\alpha_1}_{\beta_1}(a) \ldots \lambda^{\alpha_k}_{\beta_k}(a) =$$

$$= \Lambda(g_{ij}; F^{\alpha}_{ij}) + b_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(a) \varepsilon^{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} F^{\alpha_1}_{i_1 j_1} \ldots F^{\alpha_k}_{i_k j_k} -$$

$$- a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \varepsilon^{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} F^{\beta_1}_{i_1 j_1} \ldots F^{\beta_k}_{i_k j_k} \lambda^{\alpha_1}_{\beta_1}(a) \ldots \lambda^{\alpha_k}_{\beta_k}(a) =$$

$$= \Lambda(g_{ij}; F^{\alpha}_{ij}) + a_{\beta_1 \ldots \beta_k} \varepsilon^{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} F^{\alpha_1}_{i_1 j_1} \ldots F^{\alpha_k}_{i_k j_k} \lambda^{\beta_1}_{\alpha_1}(a) \ldots \lambda^{\beta_k}_{\alpha_k}(a)$$

$$- a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \varepsilon^{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} F^{\alpha_1}_{i_1 j_1} \ldots F^{\alpha_k}_{i_k j_k} -$$

$$- a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \varepsilon^{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} F^{\beta_1}_{i_1 j_1} \ldots F^{\beta_k}_{i_k j_k} . \lambda^{\alpha_1}_{\beta_1}(a) \ldots \lambda^{\alpha_k}_{\beta_k}(a) =$$

$$= \Lambda(g_{ij};F^{\alpha}_{ij}) - a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\ \varepsilon^{i_1j_1\ldots i_kj_k}\ F^{\alpha_1}_{i_1j_1}\ldots F^{\alpha_k}_{i_kj_k}$$

$$= \Lambda_1(g_{ij};F^{\alpha}_{ij})$$

Luego, de (3.3.1.7) deducimos que:

$$\Lambda(g_{ij};\ F^{\alpha}_{ij}) = \Lambda_1(g_{ij};\ F^{\alpha}_{ij}) + a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\ \varepsilon^{i_1j_1\ldots i_kj_k}\ F^{\alpha_1}_{i_1j_1}\ldots F^{\alpha_k}_{i_kj_k}$$

con Λ_1 invariante por cambios de gauge.

Reemplazando en (3.3.1.2) obtenemos que:

$$L_1(g_{ij};A^{\alpha}_{i};A^{\alpha}_{i,j}) = \Lambda_1(g_{ij};\ F^{\alpha}_{ij}) + a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\ \varepsilon^{i_1j_1\ldots i_kj_k}\ F^{\alpha_1}_{i_1j_1}\ldots F^{\alpha_k}_{i_kj_k}$$

$$+ L_2(A^{\alpha}_{i};\ A^{\alpha}_{i,j})$$

y tomando

$$L_3(A^{\alpha}_{i};A^{\alpha}_{i,j}) = a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\ \varepsilon^{i_1j_1\ldots i_kj_k}\ F^{\alpha_1}_{i_1j_1}\ldots F^{\alpha_k}_{i_kj_k} + L_2(A^{\alpha}_{i};A^{\alpha}_{i,j})$$

resulta $\quad L = -\sqrt{g}\ R + \Lambda_a + L_3$

con Λ_1 invariante por gauges y

$$L_3 = L_3(A^{\alpha}_{i};A^{\alpha}_{i,j})$$

3.3.2. <u>Teorema 2</u>:

Si el Lagrangiano $L = -\sqrt{g}\,R + L_1(g_{ij};A^{\alpha}_{i};A^{\alpha}_{i,j})$ es tal que $E^{ij}(L)$ y $E^{i}_{\alpha}(L)$ son invariantes por cambios de gauge y n es par, entonces L es equivalente (en el sentido que tiene las mismas expresiones de Euler-Lagrange) a un Lagrangiano invariante por gauges mínimamente acoplado.

Vale decir que:

$$L \sim -\sqrt{g}\, R + \Lambda_1(g_{ij}; A^\alpha_i; A^\alpha_{i,j})$$

y Λ_1 *es invariante por cambios de gauge.*

Demostración:

Por el Teorema 1:

$$L = -\sqrt{g}\ R + \Lambda_1 + L_3 \tag{3.3.2.1}$$

donde Λ_1 es una densidad escalar invariante por cambios de gauge y $L_3 = L_3(A^\alpha_i; A^\alpha_{i,j})$

Como L y Λ_1 son densidades escalares, L_3 resulta ser una densidad escalar y por lo tanto, usando (3.2.1.2) de la sección anterior

$$L_3 = \sum_{h=0}^{k} \tilde{\Lambda}_h \qquad \text{si } n = 2k \tag{3.3.2.2}$$

donde

$$\tilde{\Lambda}_h = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_h \beta_{h+1} \gamma_{h+1} \ldots \beta_k \gamma_k}\ \varepsilon^{i_1 j_1 \ldots i_k j_k}$$

$$.\ A^{\alpha_1}_{i_1, j_1} \ldots A^{\alpha_h}_{i_k, j_k}\ A^{\beta_{h+1}}_{i_{h+1}}\ A^{\gamma_{h+1}}_{j_{h+1}} \ldots A^{\beta_k}_{i_k}\ A^{\gamma_k}_{j_k} \tag{3.3.2.3}$$

Es fácil probar que $E^i_\alpha(\tilde{\Lambda}_k) = 0$, en efecto:

$$\tilde{\Lambda}_k = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}\ \varepsilon^{i_1 j_1 \ldots i_k j_k}\ A^{\alpha_1}_{i_1, j_1} \ldots A^{\alpha_k}_{i_k, j_k},$$

luego:

$$- E^{i}_{\alpha}(\tilde{\Lambda}_k) = - \frac{\partial \tilde{\Lambda}_k}{\partial A^{\alpha}_{i}} + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \tilde{\Lambda}_k}{\partial A^{\alpha}_{i,j}} \right) =$$

$$= a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \varepsilon^{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} \frac{\partial}{\partial x^j} [\delta^{\alpha_1}_{\alpha} \delta^{i}_{i_1} \delta^{j}_{j_1} A^{\alpha_2}_{i_2, j_2} \ldots A^{\alpha_k}_{i_k, j_k} +$$

$$+ A^{\alpha_1}_{i_1, j_1} \delta^{\alpha_2}_{\alpha} \delta^{i}_{i_2} \delta^{j}_{j_2} A^{\alpha_3}_{i_3, j_3} \ldots A^{\alpha_k}_{i_k, j_k} +$$

$$+ \ldots + A^{\alpha_1}_{i_1, j_1} \ldots A^{\alpha_{k-1}}_{i_{k-1}, j_{k-1}} \delta^{\alpha_k}_{\alpha} \delta^{i}_{i_k} \delta^{j}_{j_k}]$$

$$= a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \varepsilon^{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} [\delta^{\alpha_1}_{\alpha} \delta^{i}_{i_1} \delta^{j}_{j_1} (A^{\alpha_2}_{i_2, j_2 j} A^{\alpha_3}_{i_3, j_3} \ldots A^{\alpha_k}_{i_k, j_k} +$$

$$+ A^{\alpha_2}_{i_2, j_2} A^{\alpha_3}_{i_3, j_3 j} A^{\alpha_4}_{i_4, j_4} \ldots A^{\alpha_k}_{i_k, j_k} +$$

$$+ \ldots + A^{\alpha_2}_{i_2, j_2} \ldots A^{\alpha_{k-1}}_{i_{k-1}, j_{k-1}} A^{\alpha_k}_{i_k, j_k j}) +$$

$$+ \delta^{\alpha_2}_{\alpha} \delta^{i}_{i_2} \delta^{j}_{j_2} (A^{\alpha_1}_{i_1, j_1 j} A^{\alpha_3}_{i_3, j_3} \ldots A^{\alpha_k}_{i_k, j_k} +$$

$$+ A^{\alpha_1}_{i_1, j_1} A^{\alpha_3}_{i_3, j_3 j} A^{\alpha_4}_{i_4, j_4} \ldots A^{\alpha_k}_{i_k, j_k} +$$

$$+\ldots+ A^{\alpha_1}_{i_1,j_1} A^{\alpha_3}_{i_3,j_3} \ldots A^{\alpha_{k-1}}_{i_{k-1},j_{k-1}} A^{\alpha_k}_{i_k,j_k j}) +\ldots+$$

$$+ \delta^{\alpha_k}_{\alpha} \delta^{i}_{i_k} \delta^{j}_{j_k} (A^{\alpha_1}_{i_1,j_1 j} A^{\alpha_2}_{i_2,j_2} \ldots A^{\alpha_{k-1}}_{i_{k-1},j_{k-1}} +\ldots+$$

$$+ A^{\alpha_1}_{i_1,j_1} \ldots A^{\alpha_{k-2}}_{i_{k-2},j_{k-2}} A^{\alpha_{k-1}}_{i_{k-1},j_{k-1} j})] =$$

$$= a_{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_k} \varepsilon^{iji_2j_2\ldots i_kj_k} (A^{\alpha_2}_{i_2,j_2 j} A^{\alpha_3}_{i_3,j_3} \ldots A^{\alpha_k}_{i_k,j_k} +$$

$$+\ldots+ A^{\alpha_2}_{i_2,j_2} \ldots A^{\alpha_{k-1}}_{i_{k-1},j_{k-1}} A^{\alpha_k}_{i_k,j_k j}) +\ldots+$$

$$+ a_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha} \varepsilon^{i_1j_1\ldots i_{j-1}j_{k-1}ij} (A^{\alpha_1}_{i_1,j_1 j} A^{\alpha_2}_{i_2,j_2} \ldots A^{\alpha_{k-1}}_{i_{k-1},j_{k-1}} +$$

$$+\ldots+ A^{\alpha_1}_{i_1,j_1} \ldots A^{\alpha_{k-2}}_{i_{k-2},j_{k-2}} A^{\alpha_{k-1}}_{i_{k-1},j_{k-1} j})$$

Usando que $A^{\alpha}_{i,jk}$ es simétrico en j,k y $\varepsilon^{\cdots}$ es antisimétrico en cada par de índices, concluímos que $E^{i}_{\alpha}(\tilde{\Lambda}_k) = 0$. Estamos suponiendo que $E^{i}_{\alpha}(L)$ es invariante por cambios de gauge, entonces, como $E^{i}_{\alpha}(\Lambda_1)$ es invariante por gauges por serlo Λ_1, $E^{i}_{\alpha}(L_3)$ resulta invariante por cambios de gauge.

$$E^i_\alpha(L_3) = E^i_\alpha(\sum_{h=0}^{k} \tilde{\Lambda}_h) = \sum_{h=0}^{k-1} E^i_\alpha(\tilde{\Lambda}_h)$$

$E^i_\alpha(\tilde{\Lambda}_h)$ $(0 \leq h \leq k-1)$ es nulo cuando $A^\alpha_i = 0$, teniendo en cuenta (3.3.2.3), y, por el teorema de reemplazo ([5]), $E^i_\alpha(L_3)(A^\beta_h; A^\beta_{h,k}) = E^i_\alpha(L_3)(0; -\frac{1}{2} F^\beta_{hk})$. Por lo tanto:

$$E^i_\alpha(\sum_{h=0}^{k} \tilde{\Lambda}_h) = E^i_\alpha(L_3) = 0,$$

con lo cual

$$E^i_\alpha(L) = E^i_\alpha(\Lambda_1) \quad \text{y} \quad E^{ij}(L) = E^{ij}(-\sqrt{g}\, R) + E^{ij}(\Lambda_1)$$

siendo Λ_1 una densidad escalar invariante por cambios de gauge.

3.3.3. Mostraremos, en esta sección, que el Teorema 2 no es válido si la dimensión de la variedad subyacente es impar.

Sea $n = 3$ y consideremos el Lagrangiano

$$L = a_{\alpha\beta}\, \varepsilon^{ijh}\, A^\alpha_{i,j}\, A^\beta_h$$

donde $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ y $a_{\alpha\gamma}\, C^\gamma_{\beta\theta} = 0$ para todo α,β,θ.

Las expresiones de Euler-Lagrange correspondientes a L son:

$$E^{ij}(L) = 0 \quad \text{y} \quad E^i_\alpha(L) = -a_{\alpha\beta}\, \varepsilon^{ijk}\, F^\beta_{jk} \qquad (3.3.3.1)$$

y resultan ser invariantes por gauges.

Si valiera el Teorema 2, existiría una densidad escalar $\Lambda_1(A^{\beta}_{h};\ A^{\beta}_{h,k})$ invariante por cambios de gauge tal que

$$E^{ij}(\Lambda_1) = E^{ij}(L) \quad \text{y} \quad E^{i}_{\alpha}(\Lambda_1) = E^{i}_{\alpha}(L)$$

Por el teorema de reemplazo, ([5]),

$$\Lambda_1(A^{\beta}_{h};\ A^{\beta}_{h,k}) = \Lambda_1(0;\ -\tfrac{1}{2}\ F^{\beta}_{hk})$$

y por (3.2.2.2) de la sección (3.2.2)

$$\Lambda_1 = \text{cte} \ (n = 3)$$

Por lo tanto $E^{i}_{\alpha}(L) = E^{i}_{\alpha}(\Lambda_1) = 0$ que contradice (3.3.3.1).

4. PROBLEMA EQUIVARIANTE INVERSO EN TEORIA DE GAUGE

Probaremos que si la variedad subyacente tiene dimensión 4, el grupo estructural dimensión $r \geqslant 3$ y L es una función del tipo $L = L(g_{ij}; F^{\alpha}_{ij})$ tal que $E^{i}_{\alpha}(L)$ y $E^{ij}(L)$ son densidades tensoriales invariantes por cambios de gauge, existe una densidad escalar $\hat{L}$, invariante por gauges, tal que:

$$E^{ij}(L) = E^{ij}(\hat{L}) \qquad \text{y} \qquad E^{i}_{\alpha}(L) = E^{i}_{\alpha}(\hat{L})$$

(Todos los índices griegos varían de 1 a r y los latinos de 1 a 4).

4.1. Preliminares

Antes de encarar la resolución del problema equivariante inverso daremos algunas definiciones y propiedades que se desprenden de ellas.

Usaremos la siguiente notación:

$$*F^{\alpha ij} = \eta^{ijhk} F^{\alpha}_{hk}$$

donde $\eta^{ijhk} = \frac{1}{2} (\sqrt{g})^{-1} \varepsilon^{ijhk}$, $g = |\det(g_{ij})|$ y ε^{ijhk} son los símbolos de permutación de Levi-Civita.

Un cálculo directo permite afirmar que:

$$F^{\alpha j}{}_{k} *F^{\beta ik} + F^{\beta j}{}_{k} *F^{\alpha ik} = \frac{1}{2} g^{ij} \psi^{\alpha\beta} \tag{4.1.1}$$

donde $F^{\alpha j}{}_{k} = g^{jh} F^{\alpha}_{hk}$, (g^{ij}) es la inversa de (g_{ij}) y $\psi^{\alpha\beta} = F^{\alpha ij} *F^{\beta}_{ij}$

Definimos

$$\phi^{\alpha\beta\mu\nu\gamma} = F^{\alpha i}{}_{s} F^{\beta s}{}_{j} F^{\mu j}{}_{r} F^{\nu r}{}_{k} F^{\gamma k}{}_{i} \qquad (4.1.2)$$

que satisface las propiedades:

$$\phi^{\alpha\beta\gamma\mu\nu} = \phi^{\beta\gamma\mu\nu\alpha} = \phi^{\gamma\mu\nu\alpha\beta} = \phi^{\nu\alpha\beta\gamma\mu} \qquad (4.1.3)$$

$$\phi^{\alpha\beta\gamma\mu\nu} = -\phi^{\nu\mu\gamma\beta\alpha} = -\phi^{\mu\gamma\beta\alpha\nu} \qquad (4.1.4)$$

y además, ([7])

$$\psi^{\mu\gamma}\,\psi^{\alpha\beta\nu} = 4\{\phi^{\alpha\beta\gamma}\,\phi^{\nu\mu} + \phi^{\alpha\beta\mu}\,\phi^{\nu\gamma} + 2\phi^{\alpha\beta\mu\nu\gamma}$$

$$+ 2\phi^{\alpha\beta\gamma\nu\mu}\} \qquad (4.1.5)$$

donde $\phi^{\alpha\beta} = F^{\alpha ij}\,F^{\beta}{}_{ij}$, $\phi^{\alpha\beta\mu} = F^{\alpha i}{}_{s}\,F^{\beta s}{}_{h}\,F^{\mu h}{}_{i}$ y $\psi^{\alpha\beta\gamma} = F^{\alpha i}{}_{s}\,F^{\beta s}{}_{j}\,{*F}^{\gamma j}{}_{i}$

Si

$$\psi^{\alpha\beta\mu\nu\gamma} = F^{\alpha i}{}_{s} F^{\beta s}{}_{j} F^{\mu j}{}_{t} F^{\nu t}{}_{k}\, {*F}^{\gamma k}{}_{i} \qquad (4.1.6)$$

Obtenemos que

$$\psi^{\alpha\beta\mu\nu\gamma} = -\psi^{\nu\mu\beta\alpha\gamma} \qquad (4.1.7)$$

y, por la referencia [7], resulta

$$\phi^{\alpha\nu} \psi^{\beta\mu\gamma} = -4\{\psi^{\beta\mu\nu} \phi^{\gamma\alpha} + \phi^{\beta\mu\alpha} \psi^{\gamma\nu}$$

$$+ 2\psi^{\beta\mu\gamma\nu\alpha} + 2\psi^{\gamma\alpha\beta\mu\nu}\} \qquad (4.1.8)$$

Por otra parte:

$$\psi^{\nu\mu\gamma\alpha\beta} = F^{\nu i}{}_{k} F^{\mu k}{}_{h} F^{\gamma h}{}_{s} F^{\alpha s}{}_{t} *F^{\beta t}{}_{i}$$

$$= F^{\nu}{}_{ik} F^{\mu k}{}_{h} F^{\gamma h}{}_{s} F^{\alpha s}{}_{t} *F^{\beta ti}$$

$$= F^{\nu}{}_{ik} F^{\mu k}{}_{h} F^{\gamma h}{}_{s} (-\tfrac{1}{2} g^{si} \psi^{\alpha\beta} - F^{\beta s}{}_{j} *F^{\alpha ji}) \quad (\text{por } (4.1.1))$$

$$= -\frac{1}{2} \phi^{\nu\mu\gamma} \psi^{\alpha\beta} - \psi^{\nu\mu\gamma\beta\alpha}$$

Luego:

$$\psi^{\nu\mu\gamma\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \phi^{\nu\mu\gamma} \psi^{\alpha\beta} - \psi^{\nu\mu\gamma\beta\alpha} \qquad (4.1.9)$$

De (4.1.1) obtenemos que:

$$F^{\nu k}{}_{i} *F^{\beta i\ell} + F^{\beta k}{}_{i} *F^{\nu i\ell} = -\frac{1}{2} g^{k\ell} \psi^{\nu\beta} .$$

Multiplicando la identidad anterior por g_{kt} y al resultado por $F^{\mu t}{}_{h} F^{\gamma h}{}_{s} F^{\alpha s}{}_{\ell}$ concluímos que:

$$\psi^{\nu\mu\gamma\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \phi^{\mu\gamma\alpha} \psi^{\nu\beta} - \psi^{\beta\mu\gamma\alpha\nu} \qquad (4.1.10)$$

Si multiplicamos por $F^{\gamma}{}_{hk} F^{\mu\ell}{}_{i} F^{\nu}{}_{\ell j}$ la identidad

$$*F^{\alpha ij}\ F^{\beta hk} = \frac{1}{2}\ \{\psi^{\alpha\beta}(g^{ih}\ g^{jk} - g^{ik}\ g^{jh})$$

$$+ 2F^{\alpha mk}\ *F^{\beta j}{}_{m}\ g^{ih} - 2F^{\alpha mh}\ *F^{\beta j}{}_{m}\ g^{ik}$$

$$+ 2F^{\alpha km}\ *F^{\beta i}{}_{m}\ g^{jh} - 2F^{\alpha hm}\ *F^{\beta i}{}_{m}\ g^{jk}$$

$$+ 2F^{\alpha hk}\ *F^{\beta ij}\}$$

resulta:

$$\psi^{\nu\mu\gamma\alpha\beta} = \psi^{\mu\nu\gamma\alpha\beta} - \frac{1}{2}\ \psi^{\nu\mu\alpha}\ \phi^{\beta\gamma} - \frac{1}{2}\ \phi^{\nu\mu\gamma}\ \psi^{\alpha\beta}$$

$$- \frac{1}{2}\ \psi^{\nu\mu\beta}\ \phi^{\alpha\gamma} \qquad (4.1.11)$$

De (4.1.8) deducimos que

$$\psi^{\gamma\alpha\beta\mu\nu} = -\psi^{\beta\mu\gamma\nu\alpha} - \frac{1}{8}\ \psi^{\beta\mu\gamma}\ \phi^{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\ \psi^{\beta\mu\nu}\ \phi^{\gamma\alpha}$$

$$- \frac{1}{2}\ \phi^{\beta\mu\alpha}\ \psi^{\gamma\nu}$$

y aplicando (4.1.9):

$$\psi^{\gamma\alpha\beta\mu\nu} = \psi^{\beta\mu\gamma\alpha\nu} + \frac{1}{2}\ \phi^{\beta\mu\gamma}\ \psi^{\nu\alpha} - \frac{1}{8}\ \psi^{\beta\mu\gamma}\ \phi^{\alpha\nu}$$

$$- \frac{1}{2}\psi^{\beta\mu\nu}\ \phi^{\gamma\alpha} - \frac{1}{2}\ \phi^{\beta\mu\alpha}\ \psi^{\gamma\nu} \qquad (4.1.12)$$

Por último:

$$\psi^{\mu\nu\gamma\alpha\beta} = -\psi^{\beta\nu\gamma\alpha\mu} - \frac{1}{2}\,\phi^{\nu\gamma\alpha}\;\psi^{\mu\beta} \qquad \text{(por (4.1.10))}$$

$$= \psi^{\alpha\gamma\nu\beta\mu} - \frac{1}{2}\,\phi^{\nu\gamma\alpha}\;\psi^{\mu\beta} \qquad \text{(por (4.1.7))}$$

$$= -\psi^{\mu\gamma\nu\beta\alpha} - \frac{1}{2}\,\phi^{\gamma\nu\beta}\;\psi^{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\,\phi^{\nu\gamma\alpha}\;\psi^{\mu\beta} \qquad \text{(por (4.1.10))}$$

$$= -\psi^{\gamma\mu\nu\beta\alpha} + \frac{1}{2}\,\psi^{\mu\gamma\beta}\;\phi^{\alpha\nu} + \frac{1}{2}\,\phi^{\mu\gamma\nu}\;\psi^{\beta\alpha}$$

$$+ \frac{1}{2}\,\psi^{\mu\gamma\alpha}\;\phi^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\,\phi^{\gamma\nu\beta}\;\phi^{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\,\phi^{\nu\gamma\alpha}\;\psi^{\mu\beta}$$

donde en esta última igualdad se hizo uso de (4.1.11)

O sea que obtuvimos:

$$\psi^{\mu\nu\gamma\alpha\beta} = -\psi^{\gamma\mu\nu\beta\alpha} + \frac{1}{2}\,\psi^{\mu\gamma\beta}\;\phi^{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\,\phi^{\mu\gamma\nu}\;\psi^{\beta\alpha}$$

$$+ \frac{1}{2}\,\psi^{\mu\gamma\alpha}\;\phi^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\,\phi^{\gamma\nu\beta}\;\psi^{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\,\phi^{\nu\gamma\alpha}\;\psi^{\mu\beta} \qquad (4.1.13)$$

4.2. ***Teorema 1***:

Si la variedad subyacente tiene dimensión 4, el grupo estructural dimensión $r \geq 3$ y $L = L(g_{ij};F^{\alpha}_{ij})$ es una función tal que $E^{ij}(L)$ es una densidad tensorial, entonces

$$L = L_1(g_{ij};F^{\alpha}_{ij}) + (\ln g)\ell_{\alpha\beta}\;\tilde{\psi}^{\alpha\beta} + T(F^{\alpha}_{ij}) \qquad (4.2.1)$$

donde L_1 es una densidad escalar, $\ell_{\alpha\beta}$ $(1 \leq \alpha,\beta \leq r)$ son números reales y

$$\tilde{\psi}^{\alpha\beta} = \sqrt{g}\;\psi^{\alpha\beta}$$

Demostración:

$$E^{ij}(L) = \frac{\partial L}{\partial g_{ij}} = L^{ij}$$

Si H^{ihjk} está definido por:

$$\sqrt{g}\ H^{ihjk} = L^{ij}g^{hk} - L^{ik}g^{hj} - L^{hj}g^{ki} + L^{hk}g^{ij}, \qquad (4.2.2)$$

resulta que H^{ihjk} es antisimétrico en i, h y en j,k.

Esto nos permite afirmar, ([7]), que:

$$\begin{aligned} H^{ihjk} &= a'_{\alpha\beta}\ F^{\alpha ih}\ F^{\beta jk} + b'_{\alpha\beta}\ F^{\alpha ih}\ {*F}^{\beta jk} \\ &+ c_{\alpha\beta}\ {*F}^{\alpha ih}\ F^{\beta jk} + d_{\alpha\beta}\ {*F}^{\alpha ih}\ {*F}^{\beta jk} \end{aligned} \qquad (4.2.3)$$

donde los coeficientes son escalares (e invariantes por cambios de gauge, en caso de serlo H^{ihjk}) y $1 \leq \alpha,\beta \leq 3$.

Teniendo en cuenta que $H^{ihjk} = H^{jkih}$ (por (4.2.2)) de (4.2.3), obtenemos:

$$\begin{aligned} & a'_{\alpha\beta}\ F^{\alpha ih}\ F^{\beta jk} + b'_{\alpha\beta}\ F^{\alpha ih}\ {*F}^{\beta jk} + c_{\alpha\beta}\ {*F}^{\alpha ih}\ F^{\beta jk} + \\ & + d_{\alpha\beta}\ {*F}^{\alpha ih}\ {*F}^{\beta jk} = a'_{\alpha\beta}\ F^{\alpha jk}\ F^{\beta ih} + b'_{\alpha\beta}\ F^{\alpha jk}\ {*F}^{\beta ih} \\ & + c_{\alpha\beta}\ {*F}^{\alpha jk}\ F^{\beta ih} + d_{\alpha\beta}\ {*F}^{\alpha jk}\ {*F}^{\beta ih} \end{aligned}$$

Cambiando α por β en el segundo miembro de la igualdad anterior y teniendo en cuenta la independencia lineal de

F^1_{ij}, F^2_{ij}, F^3_{ij}, $*F^1_{ij}$, $*F^2_{ij}$, $*F^3_{ij}$, ([7]), (y que los productos tensoriales de tensores linealmente independientes son linealmente independientes), obtenemos:

$$a'_{\alpha\beta} = a'_{\beta\alpha},\ d_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha} \text{ y } b'_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha} \tag{4.2.4}$$

Reemplazando (4.2.4) en (4.2.3) y haciendo uso de (4.2.2), resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}(L^{ij}g^{hk} - L^{ik}g^{hj} - L^{hj}g^{ik} + L^{hk}g^{ij}) = a'_{\alpha\beta}\ F^{\alpha ih}\ F^{\beta jk}$$

$$+ b'_{\alpha\beta}(F^{\alpha ih}\ *F^{\beta jk} + F^{\alpha jk}\ *F^{\beta ih})$$

$$+ d_{\alpha\beta}\ *F^{\alpha ih}\ *F^{\beta jk} \tag{4.2.5}$$

Multiplicando ahora (4.2.5) por g_{hk} es:

$$- \frac{L^{ij}}{\sqrt{g}} = - \frac{L^{hk}\ g_{hk}\ g^{ij}}{\sqrt{g}} + a'_{\alpha\beta}\ F^{\alpha i}{}_{k}\ F^{\beta jk} + b'_{\alpha\beta}(F^{\alpha i}{}_{k}\ *F^{\beta jk}$$

$$+ F^{\alpha j}{}_{k}\ *F^{\beta ik}) + d_{\alpha\beta}\ *F^{\alpha i}{}_{k}\ *F^{\beta jk} \tag{4.2.6}$$

Si en (4.2.6) hacemos uso de la identidad

$$*F^{\alpha i}{}_{k}\ *F^{\beta jk} = - \frac{1}{2}\ g^{ij}\ \phi^{\alpha\beta} + F^{\alpha j}{}_{k}\ F^{\beta ik} \tag{4.2.7}$$

donde $\phi^{\alpha\beta} = F^{\alpha ij}\ F^{\beta}{}_{ij}$, podemos escribir

$$- \frac{L^{ij}}{\sqrt{g}} = a'\ g^{ij} + 2a_{\alpha\beta}\ F^{\alpha i}{}_{k}\ F^{\beta kj}$$

$$+ b'_{\alpha\beta}(F^{\alpha i}{}_{k}\ *F^{\beta jk} + F^{\alpha j}{}_{k}\ *F^{\beta ik}) \tag{4.2.8}$$

con $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$

Si llamamos $S_{\alpha\beta}$ y $A_{\alpha\beta}$ a las partes simétrica y anti-simétrica (respectivamente) de $b'_{\alpha\beta}$:

$$b'_{\alpha\beta}(F^{\alpha i}{}_k\,{}^*F^{\beta jk} + F^{\alpha j}{}_k\,{}^*F^{\beta ik}) = S_{\alpha\beta}(F^{\alpha i}{}_k\,{}^*F^{\beta jk} + F^{\alpha j}{}_k\,{}^*F^{\beta ik})$$

$$+ A_{\alpha\beta}(F^{\alpha i}{}_k\,{}^*F^{\beta jk} + F^{\alpha j}{}_k\,{}^*F^{\beta ik})$$

Por la simetría en i,j del segundo miembro de la identidad (4.1.1) resulta

$$F^{\alpha i}{}_k\,{}^*F^{\beta jk} + F^{\beta i}{}_k\,{}^*F^{\alpha jk} = \frac{1}{2}\,g^{ij}\,\psi^{\alpha\beta}$$

con lo cual, teniendo en cuenta que $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$, obtenemos que

$$S_{\alpha\beta}(F^{\alpha i}{}_k\,{}^*F^{\beta jk} + F^{\alpha j}{}_k\,{}^*F^{\beta ik}) = \frac{1}{2}\,g^{ij}\,\psi^{\alpha\beta}\,S_{\alpha\beta}$$

y entonces

$$b'_{\alpha\beta}(F^{\alpha i}{}_k\,{}^*F^{\beta jk} + F^{\alpha j}{}_k\,{}^*F^{\beta ik}) = \frac{1}{2}\,g^{ij}\,\psi^{\alpha\beta}\,S_{\alpha\beta} +$$

$$+ A_{\alpha\beta}(F^{\alpha i}{}_k\,{}^*F^{\beta jk} + F^{\alpha j}{}_k\,{}^*F^{\beta ik}) \qquad (4.2.9)$$

Reemplazando (4.2.9) en (4.2.8) es

$$L^{ij} = \sqrt{g}\{a\,g^{ij} + 2a_{\alpha\beta}\,F^{\alpha i}{}_s\,F^{\beta sj}$$

$$+ \tilde{b}_{\alpha\beta}(F^{\alpha i}{}_k\,{}^*F^{\beta kj} + F^{\alpha j}{}_k\,{}^*F^{\beta ki})\}$$

donde $a, a_{\alpha\beta}$ y $\tilde{b}_{\alpha\beta}$ son escalares tales que $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ y $\tilde{b}_{\alpha\beta} = -\tilde{b}_{\beta\alpha}$

En definitiva resulta que:

$$L^{ij} = \sqrt{g}\{a g^{ij} + a_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta ij} + \tilde{b}_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta ij}\}$$

donde a, $a_{\alpha\beta}$ y $\tilde{b}_{\alpha\beta}$ son escalares (invariantes por cambios de gauge bajo la hipótesis de que $E^{ij}(L) = L^{ij}$ es invariante por gauges) tales que $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $\tilde{b}_{\alpha\beta} = -\tilde{b}_{\beta\alpha}$ y $T^{\alpha\beta ij}$, $S^{\alpha\beta ij}$ están definidos por:

$$T^{\alpha\beta ij} = F^{\alpha i}{}_{s} F^{\beta sj} + F^{\alpha j}{}_{s} F^{\beta si}$$

$$(1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 3)$$

$$S^{\alpha\beta ij} = F^{\alpha i}{}_{s} {}^{*}F^{\beta sj} + F^{\alpha j}{}_{s} {}^{*}F^{\beta si}$$

de donde se deduce que $T^{\alpha\beta ij}$ es simétrico en α,β y en i,j, mientras que $S^{\alpha\beta ij}$ lo es solamente en i,j. Si descomponemos $S^{\alpha\beta ij}$ es sus partes simétrica y antisimétrica (respecto de α,β); esto es, escribimos:

$$S^{\alpha\beta ij} = \frac{1}{2}(S^{\alpha\beta ij} + S^{\beta\alpha ij}) + \frac{1}{2}(S^{\alpha\beta ij} - S^{\beta\alpha ij})$$

y usamos la antisimétria de $\tilde{b}_{\alpha\beta}$, llegamos a

$$\tilde{b}_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta ij} = \frac{1}{2} \tilde{b}_{\alpha\beta}(S^{\alpha\beta ij} - S^{\beta\alpha ij}) = b_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta ij}$$

y por lo tanto podemos escribir:

$$L^{ij} = \sqrt{g}\{a g^{ij} + a_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta ij} + b_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta ij}\} \tag{4.2.10}$$

donde a, $a_{\alpha\beta}$ y $b_{\alpha\beta}$ son escalares (invariantes por gauges si $E^{ij}(L) = L^{ij}$ lo es) con la propiedad de que $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha}$ y

$$T^{\alpha\beta ij} = F^{\alpha i}{}_{s}\, F^{\beta sj} + F^{\alpha j}{}_{s}\, F^{\beta si} \tag{4.2.11}$$

$$R^{\alpha\beta ij} = F^{\alpha i}{}_{s}\, {*F}^{\beta sj} + F^{\alpha j}{}_{s}\, {*F}^{\beta si} - F^{\beta i}{}_{s}\, {*F}^{\alpha sj} - F^{\beta j}{}_{s}\, {*F}^{\alpha si} \qquad (1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 3) \tag{4.2.12}$$

La identidad (4.2.10) (que es válida para todo tensor simétrico L^{ij}) muestra que los diez tensores g^{ij}, $T^{\alpha\beta ij}$, $R^{\alpha\beta ij}$ $(1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 3$, i,j fijos) generan el espacio de las matrices simétricas que, por ser n = 4, tiene dimensión diez. Por lo tanto, g^{ij}, $T^{\alpha\beta ij}$, $R^{\alpha\beta ij}$ $(1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 3)$ son linealmente independientes para cada par (i,j) fijo.

Es sabido (ver referencia [8]) que los coeficientes a, $a_{\alpha\beta}$ y $b_{\alpha\beta}$, que en principio dependen de la métrica y de la forma de curvatura, se pueden pensar como funciones de $\phi^{\mu\nu}$ y $\psi^{\mu\nu}$, o sea:

$$a = a(\phi^{\mu\nu};\psi^{\mu\nu}) : a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(\phi^{\mu\nu};\psi^{\mu\nu})$$

$$b_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}(\phi^{\mu\nu};\psi^{\mu\nu}) \qquad (1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 3) \tag{4.2.13}$$

en un subconjunto denso del conjunto de las variables de concomitancia (vale decir, mientras F^1, F^2, F^3, $*F^1$, $*F^2$, $*F^3$ son linealmente independientes, ([7] y [8])). Entonces, derivando (4.2.10) respecto de g_{hk}:

$$L^{ij:hk} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\, g\, g^{hk}(a\, g^{ij} + a_{\alpha\beta}\, T^{\alpha\beta ij} + b_{\alpha\beta}\, R^{\alpha\beta ij}$$

$$+ \sqrt{g}\, \{ (\frac{\partial a}{\partial \phi^{\alpha\beta}} \frac{\partial \phi^{\alpha\beta}}{\partial g_{hk}} + \frac{\partial a}{\partial \psi^{\alpha\beta}} \frac{\partial \psi^{\alpha\beta}}{\partial g_{hk}}) g^{ij} +$$

$$+ a \frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{hk}} + (\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \phi^{\mu\nu}} \frac{\partial \phi^{\mu\nu}}{\partial g_{hk}} + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \psi^{\mu\nu}} \frac{\partial \psi^{\mu\nu}}{\partial g_{hk}}) T^{\alpha\beta ij} +$$

$$+ a_{\alpha\beta} \frac{\partial T^{\alpha\beta ij}}{\partial g_{hk}} + (\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial \phi^{\mu\nu}} \frac{\partial \phi^{\mu\nu}}{\partial g_{hk}} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial \psi^{\mu\nu}} \frac{\partial \psi^{\mu\nu}}{\partial g_{hk}}) R^{\alpha\beta}$$

$$+ b_{\alpha\beta} \frac{\partial R^{\alpha\beta ij}}{\partial g_{hk}} \}$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{hk}} = -\frac{1}{2}(g^{hi}\, g^{kj} + g^{ki}\, g^{hj})$$

$$\frac{\partial \phi^{\alpha\beta}}{\partial g_{hk}} = T^{\alpha\beta hk}$$

$$\frac{\partial \psi^{\alpha\beta}}{\partial g_{hk}} = -\frac{1}{2}\, g^{hk}\, \psi^{\alpha\beta}$$

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta ij}}{\partial g_{hk}} = -\frac{1}{2} g^{ih} T^{\alpha\beta jk} - \frac{1}{2} g^{ik} T^{\alpha\beta jh} - \frac{1}{2} g^{jh} T^{\alpha\beta ki}$$

$$- \frac{1}{2} g^{jk} T^{\alpha\beta hi} - \frac{1}{2}(F^{\alpha jh} F^{\beta ki} + F^{\alpha jk} F^{\beta hi}$$

$$+ F^{\alpha ih} F^{\beta kj} + F^{\alpha ik} F^{\beta hj})$$

y teniendo en cuenta que $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$:

$$a_{\alpha\beta} \frac{\partial T^{\alpha\beta ij}}{\partial g_{hk}} = -\frac{1}{2} a_{\alpha\beta} g^{ih} T^{\alpha\beta jk} - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} g^{ik} T^{\alpha\beta jh}$$

$$- \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} g^{jh} T^{\alpha\beta ki} - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} g^{jk} T^{\alpha\beta hi}$$

$$- a_{\alpha\beta}(F^{\alpha jh} F^{\beta ki} - F^{\alpha jk} F^{\beta hi}) \qquad (4.2.18)$$

$$\frac{\partial R^{\alpha\beta ij}}{\partial g_{hk}} = -\frac{1}{2} g^{hk} R^{\alpha\beta ij} - \frac{1}{2} [g^{ih}(F^{\alpha k}{}_{s} \,{}^{*}F^{\beta sj}$$

$$- F^{\beta k}{}_{s} \,{}^{*}F^{\alpha sj}) + g^{ik}(F^{\alpha h}{}_{s} \,{}^{*}F^{\beta sj} - F^{\beta h}{}_{s} \,{}^{*}F^{\alpha sj})$$

$$- g^{jh}(F^{\alpha k}{}_{s} \,{}^{*}F^{\beta si} - F^{\beta k}{}_{s} \,{}^{*}F^{\alpha si}) + g^{jk}(F^{\alpha h}{}_{s} \,{}^{*}F^{\beta si}$$

$$- F^{\beta h}{}_{s} \,{}^{*}F^{\alpha si})] \qquad (4.2.19)$$

Reemplazando (4.2.15) hasta (4.2.19) en (4.2.14) se obtiene:

$$L^{ij;hk} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\; g^{hk}(a\; g^{ij} + a_{\alpha\beta}\; T^{\alpha\beta ij} + b_{\alpha\beta}\; R^{\alpha\beta ij})$$

$$+ \sqrt{g}\;\{\frac{\partial a}{\partial\phi^{\alpha\beta}}\; T^{\alpha\beta hk}\; g^{ij} + \frac{\partial a}{\partial\psi^{\alpha\beta}}\;(-\frac{1}{2}\; g^{hk}\;\psi^{\alpha\beta})\, g^{ij}$$

$$- \frac{1}{2}\; a(g^{hi}\; g^{kj} + g^{ki}\; g^{hj}) + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\phi^{\mu\nu}}\; T^{\mu\nu hk}\; T^{\alpha\beta ij}$$

$$- \frac{1}{2}\;\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\psi^{\mu\nu}}\; g^{hk}\;\psi^{\mu\nu}\; T^{\alpha\beta ij} - \frac{1}{2}\; a_{\alpha\beta}\; g^{ih}\; T^{\alpha\beta jk}$$

$$- \frac{1}{2}\; a_{\alpha\beta}\; g^{ik}\; T^{\alpha\beta jh} - \frac{1}{2}\; a_{\alpha\beta}\; g^{jh}\; T^{\alpha\beta ki}$$

$$- \frac{1}{2}\; a_{\alpha\beta}\; g^{jk}\; T^{\alpha\beta hi} - a_{\alpha\beta}(F^{\alpha jh}\; F^{\beta ki} - F^{\alpha jk}\; F^{\beta hi})$$

$$+ \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial\phi^{\mu\nu}}\; T^{\mu\nu hk}\; R^{\alpha\beta ij}$$

$$- \frac{1}{2}\;\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial\psi^{\mu\nu}}\; g^{hk}\;\psi^{\mu\nu}\; R^{\alpha\beta ij} - \frac{1}{2}\; b_{\alpha\beta}\; g^{hk}\; R^{\alpha\beta ij}$$

$$- \frac{1}{2}\; b_{\alpha\beta}[\, g^{ih}(F^{\alpha k}{}_{s}\; {*F}^{\beta sj} - F^{\beta k}{}_{s}\; {*F}^{\alpha sj})$$

$$+ g^{ik}(F^{\alpha h}{}_{s} \, {}^{*}F^{\beta sj} - F^{\beta h}{}_{s} \, {}^{*}F^{\alpha sj})$$

$$+ g^{jh}(F^{\alpha k}{}_{s} \, {}^{*}F^{\beta si} - F^{\beta k}{}_{s} \, {}^{*}F^{\alpha si})$$

$$+ g^{jk}(F^{\alpha h}{}_{s} \, {}^{*}F^{\beta si} - F^{\beta h}{}_{s} \, {}^{*}F^{\alpha si})]\}$$

y como $L^{ij;hk} = L^{hk;ij}$, resulta:

$$(a_{\alpha\beta} - 2 \frac{\partial a}{\partial \phi^{\alpha\beta}} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \psi^{\mu\nu}} \psi^{\mu\nu}) \, T^{\alpha\beta ij} \, g^{hk} +$$

$$+ (-a_{\alpha\beta} + 2 \frac{\partial a}{\partial \phi^{\alpha\beta}} + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \psi^{\mu\nu}} \psi^{\mu\nu}) \, T^{\alpha\beta hk} \, g^{ij} +$$

$$+ 2 \, (\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \phi^{\mu\nu}} - \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial \phi^{\alpha\beta}}) \, T^{\alpha\beta ij} \, T^{\mu\nu hk} +$$

$$+ 2 \, \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial \phi^{\mu\nu}} \, T^{\mu\nu hk} \, R^{\alpha\beta ij} - \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial \psi^{\mu\nu}} \psi^{\mu\nu} \, R^{\alpha\beta ij} \, g^{hk} +$$

$$- 2 \, \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial \phi^{\mu\nu}} \, T^{\mu\nu ij} \, R^{\alpha\beta hk} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial \psi^{\mu\nu}} \psi^{\mu\nu} \, R^{\alpha\beta hk} \, g^{ij} +$$

$$+ 2 \, b_{\alpha\beta} \, g^{ih} \, (F^{\alpha j}{}_{s} \, {}^{*}F^{\beta sk} - F^{\alpha k}{}_{s} \, {}^{*}F^{\beta sj}) +$$

$$+ 2\, b_{\alpha\beta}\, g^{jh}(F^{\alpha i}{}_{s}\, {}^{*}F^{\beta sk} - F^{\alpha k}{}_{s}\, {}^{*}F^{\beta si}) +$$

$$+ 2\, b_{\alpha\beta}\, g^{ik}(F^{\alpha j}{}_{s}\, {}^{*}F^{\beta sh} - F^{\alpha h}{}_{s}\, {}^{*}F^{\beta sj}) +$$

$$+ 2\, b_{\alpha\beta}\, g^{jk}(F^{\alpha i}{}_{s}\, {}^{*}F^{\beta sh} - F^{\alpha h}{}_{s}\, {}^{*}F^{\beta si}) = 0 \qquad (4.2.20)$$

Multiplicando (4.2.20) por $g_{ij}\ F^{\gamma}_{ih}$ y teniendo en cuenta la simetría de $T^{\alpha\beta ij}$, $R^{\alpha\beta ij}$ y la antisimetría de F^{γ}_{ij} en (i,j) obtenemos:

$$\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\phi^{\mu\nu}} - \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial\phi^{\alpha\beta}}\right) T^{\alpha\beta ij}\, T^{\mu\nu hk}\, g_{jk}\, F^{\gamma}_{ih} +$$

$$+ \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial\phi^{\mu\nu}} (T^{\mu\nu hk}\, R^{\alpha\beta ij} - T^{\mu\nu ij}\, R^{\alpha\beta hk}) g_{jk}\, F^{\gamma}_{ih} +$$

$$+ 6\, b_{\alpha\beta}(F^{\alpha i}{}_{s}\, {}^{*}F^{\beta sh} - F^{\alpha h}{}_{s}\, {}^{*}F^{\beta si}) F^{\gamma}_{ih} = 0 \qquad (4.2.21)$$

A fin de expresar el primer término de (4.2.21) en función de $\phi^{\alpha\beta\gamma\mu\nu}$ usaremos la siguiente notación

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\phi^{\mu\nu}} - \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial\phi^{\alpha\beta}} \qquad (4.2.22)$$

Apelando a la definición de $T^{\alpha\beta ij}$ es:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\, T^{\alpha\beta ij}\, T^{\mu\nu hk}\, g_{jk}\, F^{\gamma}_{\ ih} = -\, C_{\alpha\beta\mu\nu}\, F^{\alpha i}_{\ \ s}\, F^{\beta s}_{\ \ k}\, F^{\nu k}_{\ \ r}\, F^{\mu r}_{\ \ t}\, F^{\gamma t}_{\ \ i}$$

$$-\, C_{\alpha\beta\mu\nu}\, F^{\alpha i}_{\ \ s}\, F^{\beta s}_{\ \ k}\, F^{\mu k}_{\ \ r}\, F^{\nu r}_{\ \ t}\, F^{\gamma t}_{\ \ i}$$

$$+\, C_{\alpha\beta\mu\nu}\, F^{\mu h}_{\ \ r}\, F^{\nu r}_{\ \ j}\, F^{\alpha j}_{\ \ s}\, F^{\beta s}_{\ \ t}\, F^{\gamma t}_{\ \ h}$$

$$+\, C_{\alpha\beta\mu\nu}\, F^{\nu h}_{\ \ t}\, F^{\mu t}_{\ \ j}\, F^{\alpha j}_{\ \ s}\, F^{\beta s}_{\ \ k}\, F^{\gamma k}_{\ \ h}$$

$$= -\, C_{\alpha\beta\mu\nu}\, \phi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} - C_{\alpha\beta\mu\nu}\, \phi^{\alpha\beta\mu\nu\gamma}$$

$$+\, C_{\alpha\beta\mu\nu}\, \phi^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} + C_{\alpha\beta\mu\nu}\, \phi^{\nu\mu\alpha\beta\gamma}$$

Si usamos (4.1.4) y el hecho de que $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ es simétrico en α,β y en μ,ν obtenemos:

$$\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\phi^{\mu\nu}} - \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial\phi^{\alpha\beta}}\right) T^{\alpha\beta ij}\, T^{\mu\nu hk}\, g_{jk}\, F^{\gamma}_{\ ih} = -\, 4C_{\alpha\beta\mu\nu}\, \phi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} \tag{4.2.23}$$

Con respecto al segundo término, si llamamos

$$b_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial\phi^{\mu\nu}} ,$$

como $b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha}$, $b_{\alpha\beta\mu\nu}$ resulta antisimétrico en α,β siendo, además, simétrico en μ,ν.

Luego, teniendo en cuenta (4.2.11), (4.2.12), (4.1.6) y (4.1.7) es:

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial \phi^{\mu\nu}} (T^{\mu\nu hk} R^{\alpha\beta ij} - T^{\mu\nu ij} R^{\alpha\beta hk}) g_{jk} F^{\gamma}_{ih} =$$

$$= 8 b_{\alpha\beta\mu\nu} (\psi^{\gamma\mu\nu\alpha\beta} - \psi^{\nu\mu\gamma\alpha\beta}) \qquad (4.2.24)$$

Ahora bien,

$$b_{\alpha\beta\mu\nu} (\psi^{\gamma\mu\nu\alpha\beta} - \psi^{\nu\mu\gamma\alpha\beta}) = b_{\alpha\beta\mu\nu} (\psi^{\gamma\mu\nu\alpha\beta} - \psi^{\mu\nu\gamma\alpha\beta}$$

$$+ \frac{1}{2} \psi^{\nu\mu\alpha} \phi^{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \phi^{\nu\mu\gamma} \psi^{\alpha\beta}$$

$$+ \frac{1}{2} \psi^{\nu\mu\beta} \phi^{\alpha\gamma}) \qquad \text{(por (4.1.11))}$$

$$= b_{\alpha\beta\mu\nu} (\psi^{\gamma\mu\nu\alpha\beta} - \psi^{\mu\nu\gamma\alpha\beta})$$

$$= b_{\alpha\beta\mu\nu} (\psi^{\gamma\mu\nu\alpha\beta} + \psi^{\gamma\mu\nu\beta\alpha}$$

$$- \frac{1}{2} \psi^{\mu\gamma\beta} \phi^{\nu\alpha} - \frac{1}{2} \phi^{\mu\gamma\nu} \psi^{\beta\alpha}$$

$$- \frac{1}{2} \psi^{\mu\gamma\alpha} \phi^{\nu\beta} + \frac{1}{2} \phi^{\gamma\nu\beta} \psi^{\alpha\mu}$$

$$+ \frac{1}{2} \phi^{\nu\gamma\alpha} \psi^{\mu\beta}) \qquad \text{(por (4.1.13))}$$

$$= b_{\alpha\beta\mu\nu} \psi^{\gamma\mu\nu\alpha\beta} - b_{\beta\alpha\mu\nu} \psi^{\gamma\mu\nu\beta\alpha}$$

$$+ \frac{1}{2} b_{\beta\alpha\mu\nu} \psi^{\mu\gamma\beta} \phi^{\nu\alpha} - \frac{1}{2} b_{\alpha\beta\mu\nu} \psi^{\mu\gamma\alpha} \phi^{\nu\beta}$$

$$+ \frac{1}{2} b_{\alpha\beta\mu\nu} \phi^{\gamma\nu\beta} \psi^{\alpha\mu} - \frac{1}{2} b_{\beta\alpha\mu\nu} \phi^{\nu\gamma\alpha} \psi^{\mu\beta}$$

$$= b_{\alpha\beta\mu\nu} \phi^{\gamma\nu\beta} \psi^{\alpha\mu}$$

y por lo tanto:

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial\phi^{\mu\nu}} (T^{\mu\nu hk} R^{\alpha\beta ij} - T^{\mu\nu ij} R^{\alpha\beta hk}) g_{jk} F^{\gamma}_{ih} = 8 b_{\alpha\beta\mu\nu} \phi^{\gamma\nu\beta} \psi^{\alpha\mu} \quad (4.2.25)$$

Suponemos que $r = \dim G = 3$

Para que $b_{\alpha\beta\mu\nu} \phi^{\gamma\nu\beta}$ sea distinto de cero deben ser $\gamma \neq \nu \neq \beta \neq \gamma$, $\gamma \neq \nu \neq \alpha \neq \gamma$, $\gamma \neq \mu \neq \beta \neq \gamma$ y $\gamma \neq \mu \neq \alpha \neq \gamma$. Siendo que $r = 3$, de las dos primeras condiciones para garantizar que $b_{\alpha\beta\mu\nu} \phi^{\gamma\nu\beta} \neq 0$ se desprende que $\alpha = \beta$. En tal caso:

$$b_{\alpha\beta\mu\nu} \phi^{\gamma\nu\beta} = b_{\alpha\alpha\mu\nu} \phi^{\gamma\nu\beta}$$

Pero como $b_{\alpha\alpha\mu\nu} = 0$ resulta que si $r = 3$ siempre es

$b_{\alpha\beta\mu\nu} \phi^{\gamma\nu\beta} = 0$

Concluimos entonces que

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial_{\phi}^{\mu\nu}} (T^{\mu\nu hk} R^{\alpha\beta ij} - T^{\mu\nu ij} R^{\alpha\beta hk}) g_{jk} F^{\gamma}_{ih} = 0 \quad \text{si} \quad r = 3 \quad (4.2.26)$$

Analizamos, a continuación, el último término de (4.2.21):

$$6b_{\alpha\beta}(F^{\alpha i}{}_{s}\ {}^{*}F^{\beta sh} - F^{\alpha h}{}_{s}\ {}^{*}F^{\beta si})F^{\gamma}_{ih} =$$

$$= 6b_{\alpha\beta}(-F^{\gamma h}{}_{i}\ F^{\alpha i}{}_{s}\ {}^{*}F^{\beta s}{}_{h} - F^{\gamma i}{}_{h}\ F^{\alpha h}{}_{s}\ {}^{*}F^{\beta s}{}_{i})$$

$$= -12b_{\alpha\beta}\ \psi^{\gamma\alpha\beta} \qquad (4.2.27)$$

Reemplazando (4.2.23), (4.2.26) y (4.2.27) en (4.2.21) obtenemos:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \phi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} + 3b_{\alpha\beta}\ \psi^{\gamma\alpha\beta} = 0 \qquad (4.2.28)$$

Multiplicando (4.2.20) por $g_{jk}\ {}^{*}F^{\gamma}_{ih}$ resulta

$$\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\phi^{\mu\nu}} - \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial\phi^{\alpha\beta}}\right)T^{\alpha\beta ij}\ T^{\mu\nu hk}\ g_{jk}\ {}^{*}F^{\gamma}_{ih} +$$

$$+ \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial\phi^{\mu\nu}}\ (T^{\mu\nu hk}\ R^{\alpha\beta ij} - T^{\mu\nu ij}\ R^{\alpha\beta hk})g_{jk}\ {}^{*}F^{\gamma}_{ih} +$$

$$+ 6b_{\alpha\beta}\ {}^{*}F^{\gamma}_{ih}\ (F^{\alpha i}{}_{s}\ {}^{*}F^{\beta sh} - F^{\alpha h}{}_{s}\ {}^{*}F^{\beta si}) = 0 \qquad (4.2.29)$$

Vale decir:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\ T^{\alpha\beta ij}\ T^{\mu\nu hk}\ g_{jk}\ {}^{*}F^{\gamma}_{ih} + b_{\alpha\beta\mu\nu}(T^{\mu\nu hk}\ R^{\alpha\beta ij}$$

$$- T^{\mu\nu ij}\ R^{\alpha\beta hk}\ g_{jk}\ {}^{*}F^{\gamma}_{ih} + 6b_{\alpha\beta}(F^{\alpha i}{}_{s}\ {}^{*}F^{\beta sh}$$

$$- F^{\alpha h}{}_{s}\ {}^{*}F^{\beta si})\,{}^{*}F^{\gamma}_{ih} = 0 \qquad (4.2.30)$$

A continuación trabajaremos con cada término de (4.2.30):

Teniendo en cuenta (4.2.11) y (4.1.6)

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\ T^{\alpha\beta ij}\ T^{\mu\nu hk}\ g_{jk}\ {}^*F^{\gamma}_{ih} = -C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \psi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} - C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \psi^{\alpha\beta\mu\nu\gamma}$$

$$+ C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \psi^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} - C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \psi^{\nu\mu\alpha\beta\gamma}$$

y usando en el tercero y cuarto término, de la igualdad anterior, la identidad (4.1.7) y las simetrías de $C_{\alpha\beta\mu\nu}$, obtenemos:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\ T^{\alpha\beta ij}\ T^{\mu\nu hk}\ g_{jk}\ {}^*F^{\gamma}_{ih} = -4C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \psi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} \qquad (4.2.31)$$

Por (4.2.11), (4.2.12), la simetría de $b_{\alpha\beta\mu\nu}$ en μ,ν y la antisimetría en α,β

$$b_{\alpha\beta\mu\nu}(T^{\mu\nu hk}\ R^{\alpha\beta ij} - T^{\mu\nu ij}\ R^{\alpha\beta hk})g_{jk}\ {}^*F^{\gamma}_{ij} =$$

$$= 2b_{\alpha\beta\mu\nu}\ g_{jk}({}^*F^{\gamma}_{ih}\ F^{\alpha i}{}_{s}\ {}^*F^{\beta sj}\ F^{\mu h}{}_{r}\ F^{\nu rk}$$

$$+ {}^*F^{\gamma}_{ih}\ F^{\alpha i}{}_{s}\ {}^*F^{\beta sj}\ F^{\mu k}{}_{r}\ F^{\nu rh} + {}^*F^{\gamma}_{ih}\ F^{\alpha j}{}_{s}\ {}^*F^{\beta si}\ F^{\mu h}{}_{r}\ F^{\nu rk}$$

$$+ {}^*F^{\gamma}_{ih}\ F^{\alpha j}{}_{s}\ {}^*F^{\beta si}\ F^{\mu k}{}_{r}\ F^{\nu rh} - {}^*F^{\gamma}_{ih}\ F^{\alpha h}{}_{s}\ {}^*F^{\beta sk}\ F^{\mu i}{}_{r}\ F^{\nu rj}$$

$$- *F^{\gamma}_{ih}\ F^{\alpha h}{}_{s}\ *F^{\beta sk}\ F^{\mu j}{}_{r}\ F^{\nu ri} - *F^{\gamma}_{ih}\ F^{\alpha k}{}_{s}\ *F^{\beta sh}\ F^{\mu i}{}_{r}\ F^{\nu rj}$$

$$- *F^{\gamma}_{ih}\ F^{\alpha k}{}_{s}\ *F^{\beta sh}\ F^{\mu j}{}_{r}\ F^{\nu ri}) \qquad (4.2.32)$$

De la identidad

$$*F^{\alpha ij}\ *F^{\gamma hk} = -\frac{1}{2}\{\phi^{\alpha\gamma}(g^{ih}\ g^{jk} - g^{ik}\ g^{jh})$$

$$+ 2F^{\alpha sk}\ F^{\gamma j}{}_{s}\ g^{ih} + 2F^{\alpha hs}\ F^{\gamma j}{}_{s}\ g^{ik}$$

$$+ 2F^{\alpha hk}\ F^{\gamma ij} + 2F^{\alpha ks}\ F^{\gamma i}{}_{s}\ g^{jh}$$

$$+ 2F^{\alpha sh}\ F^{\gamma i}{}_{s}\ g^{jk}\}$$

deducimos

$$*F^{\gamma}_{ih}\ *F^{\beta sj} = -\frac{1}{2}\ \phi^{\gamma\beta}(\delta^{s}_{i}\ \delta^{j}_{h} - \delta^{j}_{i}\ \delta^{s}_{h})$$

$$- F^{\gamma mj}\ F^{\beta p}{}_{m}\ \delta^{s}_{i}\ g_{hp} - F^{\gamma sm}\ F^{\beta p}{}_{m}\ \delta^{j}_{i}\ g_{hp}$$

$$- F^{\gamma sj}\ F^{\beta tp}\ g_{it}\ g_{hp} - F^{\gamma jm}\ F^{\beta t}{}_{m}\ \delta^{s}_{h}\ g_{it}$$

$$- F^{\gamma ms}\ F^{\beta t}{}_{m}\ \delta^{j}_{h}\ g_{it} \qquad (4.2.33)$$

y además

$$*F^{\gamma}_{\ ih}\ *F^{\beta si} = g_{ht}(\frac{1}{2}\ g^{st}\ \phi^{\gamma\beta} - F^{\gamma s}_{\ \ k}\ F^{\beta tk}) \tag{4.2.34}$$

Reemplazando (4.2.33) y (4.2.34) en (4.2.32) se llega a que

$$b_{\alpha\beta\mu\nu}(T^{\mu\nu hk}\ R^{\alpha\beta ij} - T^{\mu\nu ij}\ R^{\alpha\beta hk})g_{jk}\ *F^{\gamma}_{\ ih} =$$

$$= 4b_{\alpha\beta\mu\nu}\ \phi^{\gamma\beta}\ \phi^{\alpha\mu\nu} + 2b_{\alpha\beta\mu\nu}(\phi^{\alpha\gamma\beta\mu\nu} - \phi^{\beta\mu\nu\gamma\alpha} +$$

$$+ \phi^{\alpha\mu\nu\gamma\beta} + \phi^{\alpha\gamma\beta\nu\mu} - \phi^{\beta\nu\mu\gamma\alpha} + \phi^{\mu\gamma\beta\alpha\nu} + \phi^{\nu\alpha\gamma\beta\mu} +$$

$$+ \phi^{\nu\alpha\gamma\beta\mu} + \phi^{\mu\alpha\gamma\beta\nu} + \phi^{\gamma\beta\alpha\mu\nu} + \phi^{\mu\nu\alpha\gamma\beta} + \phi^{\mu\nu\beta\alpha\gamma} -$$

$$- \phi^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} + \phi^{\beta\gamma\alpha\mu\nu} + \phi^{\alpha\gamma\beta\mu\nu} + \phi^{\alpha\gamma\beta\nu\mu}) +$$

$$+ b_{\alpha\beta\mu\nu}\ \phi^{\gamma\beta}\ \phi^{\nu\alpha\mu} + b_{\alpha\beta\mu\nu}(\phi^{\gamma\beta}\ \phi^{\alpha\nu\mu} + \phi^{\gamma\beta}\ \phi^{\alpha\mu\nu} -$$

$$- \phi^{\gamma\beta}\ \phi^{\nu\alpha\mu}) + 4b_{\alpha\beta\mu\nu}(-\phi^{\mu\nu}\ \phi^{\alpha\gamma\beta} + \phi^{\mu\nu}\ \phi^{\gamma\beta\alpha})$$

y usando propiedades de simetría y antisimetría junto con (4.1.3) y (4.1.4) resulta:

$$b_{\alpha\beta\mu\nu}(T^{\mu\nu hk}\ R^{\alpha\beta ij} - T^{\mu\nu ij}\ R^{\alpha\beta hk})g_{jk}\ *F^{\gamma}_{\ ih} =$$

$$= -12\ b_{\alpha\beta\mu\nu}(\phi^{\mu\nu\gamma\alpha\beta} + \phi^{\gamma\mu\nu\beta\alpha}) \tag{4.2.35}$$

De (4.1.5) se deduce

$$\phi^{\mu\nu\gamma\alpha\beta} + \phi^{\gamma\mu\nu\beta\alpha} = \frac{1}{8}\,\psi^{\mu\nu\alpha}\,\psi^{\gamma\beta} - \frac{1}{2}\,\phi^{\mu\nu\beta}\,\phi^{\gamma\alpha}$$

$$- \frac{1}{2}\,\phi^{\mu\nu\gamma}\,\phi^{\alpha\beta}$$

que junto con (4.2.35) nos permite concluir que

$$b_{\alpha\beta\mu\nu}(T^{\mu\nu hk}\,R^{\alpha\beta ij} - T^{\mu\nu ij}\,R^{\alpha\beta hk})g_{jk}\,{}^{*}F^{\gamma}_{ih} = 0 \qquad (4.2.36)$$

Por otra parte, usando (4.2.34),

$$6b_{\alpha\beta}\,{}^{*}F_{ih}(F^{\alpha i}{}_{s}\,{}^{*}F^{\beta sh} - F^{\alpha h}{}_{s}\,{}^{*}F^{\beta si}) =$$

$$= 6b_{\alpha\beta}(-F^{\alpha i}{}_{s}\,F^{\gamma s}{}_{k}\,F^{\beta k}{}_{i} - F^{\alpha h}{}_{s}\,F^{\gamma s}{}_{k}\,F^{\beta k}{}_{h})$$

$$= -12b_{\alpha\beta}\,\phi^{\alpha\gamma\beta}$$

$$= 12b_{\alpha\beta}\,\phi^{\gamma\alpha\beta} \qquad (4.2.37)$$

Reemplazando (4.2.31), (4.2.36) y (4.2.37) en (4.2.30) deducimos que:

$$-C_{\alpha\beta\mu\nu}\,\psi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} + 3b_{\alpha\beta}\,\phi^{\gamma\alpha\beta} = 0 \qquad (4.2.38)$$

Con (4.2.28) y (4.2.38) obtuvimos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu}\,\phi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} + 3b_{\alpha\beta}\,\psi^{\gamma\alpha\beta} &= 0 \\ -C_{\alpha\beta\mu\nu}\,\psi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} + 3b_{\alpha\beta}\,\phi^{\gamma\alpha\beta} &= 0 \end{aligned} \qquad (4.2.39)$$

Si usamos (4.1.12), (4.1.9), (4.1.10), nuevamente (4.1.9) y (4.1.11) resulta

$$\psi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} = -\psi^{\nu\beta\alpha\nu\gamma} + \frac{1}{2}\psi^{\beta\mu\nu}\phi^{\alpha\gamma} + \frac{1}{2}\phi^{\beta\mu\alpha}\psi^{\gamma\nu}$$

$$+ \frac{1}{2}\psi^{\beta\mu\gamma}\phi^{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\phi^{\beta\mu\alpha}\psi^{\gamma\nu} + \frac{1}{2}\phi^{\mu\alpha\gamma}\psi^{\nu\beta}$$

$$- \frac{1}{2}\phi^{\nu\mu\alpha}\psi^{\beta\gamma} + \frac{1}{2}\phi^{\nu\mu\alpha}\psi^{\beta\gamma} - \frac{1}{8}\psi^{\nu\mu\alpha}\phi^{\beta\gamma}$$

$$- \frac{1}{2}\psi^{\nu\mu\gamma}\phi^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\phi^{\nu\mu\beta}\psi^{\gamma\alpha}$$

y por lo tanto:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\psi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} = -C_{\alpha\beta\mu\nu}\psi^{\mu\beta\alpha\nu\gamma} + \frac{1}{2}C_{\alpha\beta\mu\nu}\psi^{\beta\mu\gamma}\phi^{\alpha\nu}$$

$$+ \frac{1}{2}C_{\alpha\beta\mu\nu}\phi^{\mu\alpha\gamma}\psi^{\nu\beta}$$

Pero:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\psi^{\mu\beta\alpha\nu\gamma} = -C_{\alpha\beta\mu\nu}\psi^{\nu\alpha\beta\mu\gamma} \qquad \text{(por 4.1.7)}$$

$$= -C_{\alpha\beta\mu\nu}\psi^{\nu\beta\alpha\mu\gamma}$$

$$= -C_{\alpha\beta\mu\nu}\psi^{\mu\beta\alpha\nu\gamma},$$

luego

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\psi^{\mu\beta\alpha\nu\gamma} = 0$$

y reemplazando en (4.2.40) resulta:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \psi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} = \frac{1}{2}\ C_{\alpha\beta\mu\nu}\ (\psi^{\beta\mu\gamma}\ \phi^{\alpha\nu} + \phi^{\mu\alpha\gamma}\ \psi^{\nu\beta})$$

que puede escribirse, usando la simetría de $C_{\alpha\beta\mu\nu}$, como:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \psi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} = \frac{1}{2}\ C_{\alpha\beta\mu\nu}(\psi^{\beta\mu\gamma}\ \phi^{\alpha\nu} + \phi^{\mu\beta\gamma}\ \psi^{\nu\alpha}) \qquad (4.2.41)$$

Por otra parte

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \phi^{\alpha\nu\mu\beta\gamma} = -C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \phi^{\beta\mu\nu\alpha\gamma} \quad \text{(debido a (4.1.4))}$$

$$= -C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \phi^{\alpha\mu\nu\beta\gamma}$$

$$= -C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \phi^{\alpha\nu\mu\beta\gamma},$$

lo cual nos permite afirmar que

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \phi^{\alpha\nu\mu\beta\gamma} = 0$$

y entonces

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \phi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} = C_{\alpha\beta\mu\nu}(\phi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} + \phi^{\alpha\nu\mu\beta\gamma})$$

$$= C_{\alpha\beta\mu\nu}(\phi^{\gamma\alpha\beta\nu\mu} + \phi^{\gamma\alpha\nu\mu\beta}) \quad \text{(por (4.1.3))}$$

$$= C_{\alpha\beta\mu\nu}(\phi^{\gamma\alpha\beta\nu\mu} + \phi^{\gamma\alpha\mu\nu\beta})$$

$$= C_{\alpha\beta\mu\nu}(\frac{1}{8}\ \psi^{\gamma\alpha\nu}\ \psi^{\beta\mu} - \frac{1}{2}\ \phi^{\gamma\alpha\mu}\ \phi^{\beta\nu}$$

$$- \frac{1}{2}\ \phi^{\gamma\alpha\beta}\ \phi^{\mu\nu}) \quad \text{(habiéndose usado (4.1.5))}$$

O sea que

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \phi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} = \frac{1}{8}\ C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \psi^{\gamma\alpha\nu}\ \psi^{\beta\mu} - \frac{1}{2}\ C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \phi^{\gamma\alpha\nu}\ \phi^{\beta\mu} \tag{4.2.42}$$

Para que $C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \phi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma}$ sea distinto de cero (teniendo en cuenta el segundo miembro de (4.2.42)) deben ser $\gamma \neq \alpha \neq \nu \neq \gamma$, $\gamma \neq \beta \neq \nu \neq \gamma$, $\gamma \neq \alpha \neq \mu \neq \gamma$ y $\gamma \neq \beta \neq \mu \neq \gamma$. Como estamos suponiendo que $r = 3$, de las dos primeras condiciones para garantizar que $C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \phi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} \neq 0$ se desprende que $\alpha = \beta$ y de la segunda y de la cuarte que $\nu = \mu$. En tal caso:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \phi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} &= C_{\alpha\alpha\mu\mu}\ \phi^{\alpha\alpha\mu\mu\gamma} \\ &= 2\{C_{1122}\ \phi^{1122\gamma} + C_{1133}\ \phi^{1133\gamma} \\ &\quad + C_{2233}\ \phi^{2233\gamma}\} \end{aligned} \tag{4.2.43}$$

Razonando de la misma forma con (4.2.41) obtenemos que para que $C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \psi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma}$ sea distinto de cero, siendo $r = 3$, debe ser $\alpha = \beta$ y $\mu = \nu$ y en tal caso:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \psi^{\alpha\beta\nu\mu\gamma} &= 2\{C_{1122}\ \psi^{1122\gamma} + C_{1133}\ \psi^{1133\gamma} \\ &\quad + C_{2233}\ \psi^{2233\gamma}\} \end{aligned} \tag{4.2.44}$$

Tomando $\gamma = 3$ en (4.2.43) y (4.2.44), las ecuaciones (4.2.39) son:

$$C_{1122}\,\phi^{11223} + 3b_{12}\,\psi^{312} = 0$$

$$-C_{1122}\,\psi^{11223} + 3b_{12}\,\phi^{312} = 0 \qquad (4.2.45)$$

Consideremos un sistema de coordenadas tal que, en un punto,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$(F_{ij}^{\;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F_{ij}^{\;2}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(F_{ij}^{\;3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$(F^{1i}{}_{j}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{2i}{}_{j}) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(F^{3i}{}_{j}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(*F^{1ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (*F^{2ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(*F^{3ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(*F^{1i}{}_{j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (*F^{2i}{}_{j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$(*F^{3i}{}_{j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\phi^{312} = \phi^{123} = \text{traza} \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$\psi^{312} = \psi^{123} = \text{traza} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -6$$

$$\phi^{11223} = \text{traza}\begin{pmatrix} 6 & -50 & 0 & 0 \\ 15 & -12 & 0 & 0 \\ -10 & -24 & 0 & 0 \\ 12 & -20 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -6$$

$$\psi^{11223} = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -30 \\ 0 & 0 & 9 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{pmatrix} = -18$$

y reemplazando en (4.2.45) concluímos que $C_{1122} = 0$ y $b_{12} = 0$.

Análogamente, tomando $\gamma = 2$, y $\gamma = 1$ en (4.2.43) y (4.2.44), obtenemos $b_{13} = b_{23} = 0$.

Luego $b_{\alpha\beta} = 0$ $(1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 3)$ en un subconjunto denso del conjunto de las variables de concomitancia y por continuidad es

$$b_{\alpha\beta} \equiv 0 \qquad (1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 3)$$

Si reemplazamos en (4.2.20) resulta:

$$(a_{\alpha\beta} - 2\frac{\partial a}{\partial\phi^{\alpha\beta}} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\psi^{\mu\nu}}\psi^{\mu\nu})\, T^{\alpha\beta ij}\, g^{hk} +$$

$$+ (-a_{\alpha\beta} + 2\frac{\partial a}{\partial\phi^{\alpha\beta}} + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\psi^{\mu\nu}}\psi^{\mu\nu})\, T^{\alpha\beta hk}\, g^{ij} +$$

$$+ 2(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\phi^{\mu\nu}} - \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial\phi^{\alpha\beta}})\, T^{\alpha\beta ij}\, T^{\mu\nu hk} = 0$$

y teniendo en cuenta la independencia lineal, deducimos que:

$$a_{\alpha\beta} - 2\frac{\partial a}{\partial \phi^{\alpha\beta}} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \psi^{\mu\nu}}\psi^{\mu\nu} = 0 \tag{4.2.46}$$

y

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \phi^{\mu\nu}} - \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial \phi^{\alpha\beta}} = 0 \tag{4.2.47}$$

La identidad (4.2.47) nos permite afirmar que existe $f = f(\phi^{\alpha\beta}; \psi^{\alpha\beta})$ tal que

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial f}{\partial \phi^{\alpha\beta}} \tag{4.2.48}$$

con lo cual reescribimos (4.2.46) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha\beta}}\left(f - 2a - \frac{\partial f}{\partial \psi^{\mu\nu}} \cdot \psi^{\mu\nu}\right) = 0$$

Por lo tanto, existe una función $h = h(\psi^{\alpha\beta})$ que satisface:

$$h(\psi^{\alpha\beta}) = f - 2a - \frac{\partial f}{\partial \psi^{\mu\nu}}\psi^{\mu\nu}$$

lo que implica que

$$a = \frac{1}{2}\left(f - \frac{\partial f}{\partial \psi^{\mu\nu}}\psi^{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}h(\psi^{\alpha\beta})$$

$$= \frac{1}{2}\left(f - \frac{\partial f}{\partial \psi^{\mu\nu}}\psi^{\mu\nu}\right) + \tilde{h}(\psi^{\alpha\beta}) \tag{4.2.49}$$

Reemplazando (4.2.48), (4.2.49) y $b_{\alpha\beta} = 0$ en (4.2.10) obtenemos:

$$L^{ij} = \sqrt{g}\{\frac{1}{2}\,(f - \frac{\partial f}{\partial \psi^{\mu\nu}}\,\psi^{\mu\nu})\; g^{ij} + \tilde{h}(\psi^{\alpha\beta})$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \phi^{\alpha\beta}}\; T^{\alpha\beta ij}\} \qquad (4.2.50)$$

La identidad (4.2.48) y el hecho de que $a_{\alpha\beta}$ es un escalar concomitante hacen posible elegir f de modo tal que

$$L_0 = \sqrt{g}\; f$$

sea una densidad escalar. En tal caso

$$L_0^{ij} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\; g^{ij}\; f + \sqrt{g}\;(\frac{\partial f}{\partial \phi^{\alpha\beta}}\; T^{\alpha\beta ij} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial \psi^{\alpha\beta}}\;.\;\psi^{\alpha\beta}\; g^{ij})$$

nos permite reescribir (4.2.50) en la forma

$$L^{ij} = L_0^{ij} + \sqrt{g}\;\tilde{h}(\psi^{\alpha\beta})\; g^{ij} \qquad (4.2.51)$$

Es importante notar que el dominio donde se mueven las variables $(\phi^{\alpha\beta}\,;\,\psi^{\alpha\beta})$ incluye a las de la forma $(\phi^{\alpha\beta}\,;\,0)$ para todo α, β a consecuencia de la hipótesis de independencia lineal de F^1, F^2, F^3, $*F^1$, $*F^2$, $*F^3$. En efecto, consideremos un sistema de coordenadas tal que, en un punto, $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$F^1_{ij} = \delta^1_i\,\delta^2_j - \delta^2_i\,\delta^1_j$, $\quad F^2_{ij} = \delta^1_i\,\delta^3_j - \delta^3_i\,\delta^1_j \quad$ y

$F^3_{ij} = \delta^1_i\,\delta^4_j - \delta^4_i\,\delta^1_j$

Entonces:

$$(*F^{1}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (*F^{2}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(*F^{3}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$\psi^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijhk}\,F^{\alpha}_{ij}\,F^{\beta}_{hk} = 0 \qquad (1 \leq \alpha,\beta \leq 3)$$

Consideremos ahora la función $k(\psi^{\alpha\beta})$ dada por:

$$k(\psi^{\alpha\beta}) = \tilde{h}(\psi^{\alpha\beta}) - \tilde{h}(0) - \frac{\partial\tilde{h}}{\partial\psi^{\alpha\beta}}(0)\ \psi^{\alpha\beta} \tag{4.2.52}$$

De la definición se deduce que

$$k(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial k}{\partial\psi^{\alpha\beta}}(0) = 0$$

y esto implica (ver referencia [9])

$$k(\psi^{\alpha\beta}) = a_{\mu\nu\varepsilon\theta}(\psi^{\alpha\beta})\ \psi^{\mu\nu}\ \psi^{\varepsilon\theta}$$

Consecuentemente:

$$\frac{1}{\lambda^2}\,k(\lambda\psi^{\alpha\beta}) = a_{\mu\nu\varepsilon\theta}(\lambda\psi^{\alpha\beta})\ \psi^{\mu\nu}\ \psi^{\varepsilon\theta} \tag{4.2.53}$$

Sea

$$v = v(\psi^{\alpha\beta}) = -\int_0^1 \frac{1}{\lambda^2}\, k(\lambda\psi^{\alpha\beta})\,d\lambda$$

Se tiene entonces:

$$k = v - \frac{\partial v}{\partial\psi^{\alpha\beta}}\,\psi^{\alpha\beta} \tag{4.2.54}$$

En efecto:

$$v - \frac{\partial v}{\partial\psi^{\alpha\beta}}\,\psi^{\alpha\beta} = -\int_0^1 \frac{1}{\lambda^2}\, k(\lambda\psi^{\alpha\beta})\,d\lambda + \int_0^1 \frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial k}{\partial\psi^{\alpha\beta}}(\lambda\psi^{\mu\nu})\;\psi^{\alpha\beta}\,d\lambda$$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{\lambda^2}\, k(\lambda\psi^{\alpha\beta})\,d\lambda + \frac{1}{\lambda}\,k(\lambda\psi^{\mu\nu})\Big|_0^1$$

$$+ \int_0^1 \frac{1}{\lambda^2}\, k(\lambda\psi^{\alpha\beta})\,d\lambda$$

$$= k(\psi^{\mu\nu}) \qquad \text{(teniendo en cuenta (4.2.53))}$$

(4.2.52) y (4.2.54) implican que

$$\tilde{h}(\psi^{\alpha\beta}) = v(\psi^{\alpha\beta}) - \frac{\partial v}{\partial\psi^{\alpha\beta}}\,\psi^{\alpha\beta} + \tilde{h}(0) + \frac{\partial\tilde{h}}{\partial\psi^{\alpha\beta}}(0)\;.\;\psi^{\alpha\beta}$$

Reemplazando en (4.2.51):

$$L^{ij} = L_0^{ij} + \sqrt{g}\, g^{ij}(v - \frac{\partial v}{\partial \psi^{\alpha\beta}} \cdot \psi^{\alpha\beta} + \tilde{h}(0) + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \psi^{\alpha\beta}}(0)\ \psi^{\alpha\beta})$$

$$= L_0^{ij} + (2\sqrt{g}\, v)^{ij} + (2\sqrt{g}\, \tilde{h}(0))^{ij} + \sqrt{g}\, \lambda_{\alpha\beta}\ \psi^{\alpha\beta}\ g^{ij}$$

donde $\lambda_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial \tilde{h}}{\partial \psi^{\alpha\beta}}(0)$

O sea que obtuvimos:

$$L^{ij} = L_1^{ij} + \sqrt{g}\, g^{ij}\ \lambda_{\alpha\beta}\ \psi^{\alpha\beta}$$

$$= L_1^{ij} + [(\ln g)\lambda_{\alpha\beta}\ \mathfrak{\psi}^{\alpha\beta}]^{ij} \qquad (4.2.55)$$

Siendo L_1 una densidad escalar, los $\lambda_{\alpha\beta}$ números reales y $\mathfrak{\psi}^{\alpha\beta} = \sqrt{g}\ \psi^{\alpha\beta}$.

Hemos probado (4.2.55) para dim $G = r = 3$.

Veremos que también es válido cuando $r > 3$.

Supongamos, entonces, $r > 3$ y consideremos el conjunto:

$$AS(4) = \{A \in R^{4\times 4} : A = -A^t\}$$

Sea (g_{ij}) una matriz simétrica de $R^{4\times 4}$ con signatura $(1,3)$ y sean F^1, F^2, F^3 elementos de $AS(4)$ tales que $F^1, F^2, F^3, *F^1, *F^2$ y $*F^3$ son linealmente independientes.

Definimos:

$$A' = \{a_\alpha(g_{ij}; F^1_{ij}; F^2_{ij}; F^3_{ij})\, F^\alpha_{hk} + b_\alpha(g_{ij}; F^1_{ij}; F^2_{ij}; F^3_{ij})\, *F^\alpha_{hk} /$$

$$1 \leqslant \alpha \leqslant 3;\ a_\alpha \text{ y } b_\alpha \text{ escalares concomitantes}\}$$

Como dim AS(4) = 6, $\{F^1, F^2, F^3, *F^1, *F^2, *F^3\}$ es una base de AS(4) y como los números reales son escalares concomitantes, resulta AS(4) $\subset$ A'. Claramente A' $\subset$ AS(4), con lo cual queda probado que A' = AS(4). Por lo tanto, si F^4_{ij} es una matriz antisimétrica de $R^{4\times 4}$, arbitraria pero fija, existen escalares concomitantes $a_\alpha(g_{ij};F^1_{ij};F^2_{ij};F^3_{ij})$ y $b_\alpha(g_{ij};F^1_{ij};F^2_{ij};F^3_{ij})$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant 3)$ tales que:

$$F^4_{ij} = a_\alpha\ F^\alpha_{ij} + b_\alpha\ *F^\alpha_{ij}$$

Entonces:

$$\phi^{\beta 4} = F^{\beta ij}\ F^4_{ij} = a_\alpha\ F^{\beta ij}\ F^\alpha_{ij} + b_\alpha\ F^{\beta ij}\ *F^\alpha_{ij}$$

$$= a_\alpha\ \phi^{\beta\alpha} + b_\alpha\ \psi^{\beta\alpha},(1 \leqslant \beta \leqslant 3) \qquad (4.2.56)$$

$$\phi^{44} = F^{4ij}\ F^4_{ij}$$

$$= (a_\alpha\ F^{\alpha ij} + b_\alpha\ *F^{\alpha ij})(a_\beta\ F^\beta_{ij} + b_\beta\ *F^\beta_{ij})$$

$$= (a_\alpha\ a_\beta + \frac{1}{2}\ b_\alpha\ b_\beta)\phi^{\alpha\beta} + 2\ a_\alpha\ b_\beta\ \psi^{\alpha\beta}\ (\text{por } (4.3.34)) \qquad (4.2.57)$$

$$\psi^{\beta 4} = F^{\beta ij}\, {}^{*}F^{4}_{ij}$$

$$= a_{\alpha}\, F^{\beta ij}\, {}^{*}F^{\alpha}_{ij} + b_{\alpha}\, F^{\beta ij}\, F^{\alpha}_{ij}$$

$$= a_{\alpha}\, \psi^{\alpha\beta} + b_{\alpha}\, \phi^{\alpha\beta} \qquad (1 \leqslant \beta \leqslant 3) \tag{4.2.58}$$

$$\psi^{44} = F^{4ij}\, {}^{*}F^{4}_{ij}$$

$$= a_{\alpha}\, F^{\alpha ij} + b_{\alpha}\, {}^{*}F^{\alpha ij})(a_{\beta}\, {}^{*}F^{\beta}_{ij} + b_{\beta}\, F^{\beta}_{ij})$$

$$= (a_{\alpha}\, a_{\beta} + b_{\alpha}\, b_{\beta})\psi^{\alpha\beta} + 2\, a_{\alpha}\, b_{\beta}\, \phi^{\alpha\beta} \tag{4.2.59}$$

Como consecuencia de las identidades (4.2.56) hasta (4.2.59) y de la referencia [8], si $a = a(g_{ij}; F^{1}_{ij}; F^{2}_{ij}; F^{3}_{ij}; F^{4}_{ij})$ es un escalar concomitante, para F^{4} fija, en un subconjunto denso de las variables de concomitancia se cumple que:

$$a = a_{F^4}(\phi^{\alpha\beta}; \psi^{\alpha\beta}) \qquad (1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 3)$$

Además:

$$a_{F^4}(\phi^{\alpha\beta}; \psi^{\alpha\beta}) = a_{\overline{F}^4}(\phi^{\alpha\beta}; \psi^{\alpha\beta}) \tag{4.2.60}$$

siendo $\overline{F}^4$ el transformado de F^4 por un cambio de coordenadas.

Los coeficientes a, $a_{\alpha\beta}$ y $b_{\alpha\beta}$ de (4.2.10) satisfacen la relación (4.2.60), por lo tanto podemos repetir la demostración que nos permite afirmar (4.2.51) y así llegar a probar que (4.2.55) es válida para todo $r \geq 3$.

Integrando (4.2.55) obtenemos que:

$$L = L_1 + (\ell n\, g)\lambda_{\alpha\beta}\, \tilde{\psi}^{\alpha\beta} + T(F^{\alpha}_{ij}) \qquad (1 \leq \alpha,\beta \leq 3)$$

siendo $L_1 = \sqrt{g}(f + 2\,v + 2\,\tilde{h}(0))$ una densidad escalar.

O sea:

$$L = L_1 + (\ell n\, g)\,t(\tilde{\psi}^{\alpha\beta}) + T(F^{\alpha}_{ij})$$

$$= \sqrt{g}\;\tilde{f}(\phi^{\alpha\beta};\psi^{\alpha\beta}) + (\ell n\, g)\,t(\tilde{\psi}^{\alpha\beta}) + T(F^{\alpha}_{ij}) \qquad (1 \leq \alpha,\beta \leq 3) \tag{4.2.61}$$

donde $\tilde{f} = f + 2(v + \tilde{h}(0))$

Si variamos F^4, de (4.2.61), deducimos que:

$$L(g_{ij};F^1_{ij};F^2_{ij};F^3_{ij};F^4_{ij}) = \sqrt{g}\;\tilde{f}_{F^4}(\phi^{\alpha\beta};\psi^{\alpha\beta}) + (\ell n\, g)\,t_{F^4}(\tilde{\psi}^{\alpha\beta})$$

$$+ T_{F^4}(F^{\alpha}_{ij}) \qquad (1 \leq \alpha,\beta \leq 3) \tag{4.2.62}$$

A continuación vamos a mostrar que

$$\tilde{f}_{F^4}(\phi^{\alpha\beta};\psi^{\alpha\beta}) = \tilde{f}_{\overline{F}^4}(\phi^{\alpha\beta};\psi^{\alpha\beta})$$

donde, como antes, $\overline{F}^4$ es el transformado de F^4 por un cambio de coordenadas.

En efecto:

$$\tilde{h} = a - \frac{1}{2}(f - \frac{\partial f}{\partial \psi^{\mu\nu}} \psi^{\mu\nu}),$$

luego $\tilde{h}_{\overset{4}{F}} = \tilde{h}_{\overset{4}{\bar{F}}}$ (recordando que f es tal que $\sqrt{g}$ f es densidad escalar) o sea que $\tilde{h}$ define un escalar concomitante de $g_{ij};\overset{1}{F}_{ij};\overset{2}{F}_{ij};\overset{3}{F}_{ij};\overset{4}{F}_{ij}$.

Si

$$u_{\overset{4}{F}}(\psi^{\alpha\beta}) = \frac{\partial \tilde{h}}{\alpha \psi^{\alpha\beta}} (0) \; \psi^{\alpha\beta},$$

entonces

$$u_{\overset{4}{\bar{F}}}(\bar{\psi}^{\alpha\beta}) = u_{\overset{4}{F}}(\psi^{\alpha\beta})$$

y resulta que $u = u(\overset{1}{F}_{ij};\overset{2}{F}_{ij};\overset{3}{F}_{ij};\overset{4}{F}_{ij})$ es un escalar concomitante.

De las consideraciones anteriores se deduce que

$$k = \tilde{h} - \tilde{h}(0) - u$$

define un escalar concomitante de $g_{ij};\overset{1}{F}_{ij};\overset{2}{F}_{ij};\overset{3}{F}_{ij};\overset{4}{F}_{ij}$

y por lo tanto

$$v = -\int_0^1 \frac{1}{\lambda^2} k(\lambda \; \psi^{\alpha\beta})\, d\lambda$$

también. Queda probado entonces que $\sqrt{g}\; \tilde{f}_{\overset{4}{F}} \; (\phi^{\alpha\beta}, \psi^{\alpha\beta})$ es una densidad escalar concomitante de $g_{ij};\overset{1}{F};\overset{2}{F};\overset{3}{F};\overset{4}{F}$.

Si

$$t_{\overset{4}{F}}(\tilde{\psi}^{\alpha\beta}) = \frac{\partial \tilde{h}}{\psi^{\alpha\beta}} (0) \; \psi^{\alpha\beta}$$

resulta que

$$t_{\bar{F}^4}(\bar{\psi}^{\alpha\beta}) = B t_{F^4}(\tilde{\psi}^{\alpha\beta})$$

donde $B = \det(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j})$.

Luego $t = t(F^1_{ij};F^2_{ij};F^3_{ij};F^4_{ij})$ es una densidad escalar de la que interesa conocer su forma.

De las identidades de invariancia, ([10]), obtenemos que

$$t_\alpha^{ij;hk}{}_\beta(\lambda\ F^1_{ij};\lambda\ F^2_{ij};\lambda\ F^3_{ij};\lambda\ F^4_{ij}) =$$

$$= t_\alpha^{ij;hk}{}_\beta(F^1_{ij};F^2_{ij};F^3_{ij};F^4_{ij})$$

Tomando límite para λ tendiendo a cero por la derecha y usando, luego, la caracterización de los tensores isotrópicos, ([1]), resulta que existen números reales $\ell_{\alpha\beta}$ tales que

$$t_\alpha^{ij;hk}{}_\beta(F^1_{ij};F^2_{ij};F^3_{ij};F^4_{ij}) = \ell_{\alpha\beta}\ \varepsilon^{ijhk} \tag{4.2.63}$$

Integrando (4.2.63) obtenemos que:

$$t = \ell_{\alpha\beta}\ \varepsilon^{ijhk}\ F^\alpha_{ij}\ F^\beta_{hk} = \ell_{\alpha\beta}\ \tilde{\psi}^{\alpha\beta} \qquad (1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 4)$$

(4.2.62) y todas las consideraciones hechas nos permiten deducir que

$$L(g_{ij};F^1_{ij};F^2_{ij};F^3_{ij};F^4_{ij}) = L_1(g_{ij};F^1_{ij};F^2_{ij};F^3_{ij};F^4_{ij})$$

$$+ (\ell n\ g)\ \ell_{\alpha\beta}\ \tilde{\psi}^{\alpha\beta}$$

$$+ T(F^{\alpha}_{ij}) \quad (1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 4) \quad (4.2.64)$$

donde L_1 es densidad escalar y $\ell_{\alpha\beta}$ son números reales. Un razonamiento similar permite probar este resultado para $1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant r)$ $(r > 4)$.

Esto concluye la demostración del Teorema 1.

4.3. Observación

No existe una densidad escalar cuyas expresiones de Euler-Lagrange coincidan con las de

$$L = (\ell n\ g)\ \ell_{\alpha\beta}\ \tilde{\psi}^{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{2}\ (\ell n\ g)\ \ell_{\alpha\beta}\,\epsilon^{ijhk}\ F^{\alpha}_{ij}\ F^{\beta}_{hk} \qquad (1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 3)$$

donde los $\ell_{\alpha\beta}$ *son números reales.*

En efecto, supongamos que existe una densidad escalar $\tilde{L}$ tal que $E^{ij}(L) = E^{ij}(\tilde{L})$. En tal caso podemos encontrar una función $f = f(\phi^{\alpha\beta};\psi^{\alpha\beta})$ tal que

$$\tilde{L} = \sqrt{g}\ f(\phi^{\alpha\beta};\psi^{\alpha\beta}) \qquad (1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 3)$$

y resulta entonces que:

$$E^{ij}(\tilde{L}) = \sqrt{g}\ \{\frac{1}{2}\ (f - \frac{\partial f}{\partial\psi^{\alpha\beta}}\ \psi^{\alpha\beta})\ g^{ij} + \frac{\partial f}{\partial\phi^{\alpha\beta}}\ T^{\alpha\beta ij}\}$$

(por (4.2.16) y (4.2.17))

Ahora bien,

$$E^{ij}(L) = \frac{\sqrt{g}}{4} \ell_{\alpha\beta} \; g^{ij} \; \psi^{\alpha\beta}{}_{,,}$$

luego, al ser $E^{ij}(L) = E^{ij}(\tilde{L})$, se deduce que

$$\sqrt{g} \; \{\frac{1}{2} \; (f - \frac{\partial f}{\partial\psi^{\alpha\beta}} \psi^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \ell_{\alpha\beta} \; \psi^{\alpha\beta}) g^{ij} + \frac{\partial f}{\partial\phi^{\alpha\beta}} T^{\alpha\beta ij}\} = 0$$

La independencia lineal de g^{ij} y $T^{\alpha\beta ij}$ nos permite afirmar que

$$\frac{\partial f}{\partial\phi^{\alpha\beta}} = 0$$

y

$$f - \frac{\partial f}{\partial\psi^{\alpha\beta}} \psi^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \ell_{\alpha\beta} \; \psi^{\alpha\beta} \tag{4.3.1}$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda \; f(\frac{1}{\lambda} \; \psi^{\alpha\beta})) = f(\frac{1}{\lambda} \; \psi^{\alpha\beta}) + \lambda \; \frac{\partial f}{\partial\psi^{\alpha\beta}} \; (\frac{1}{\lambda} \; \psi^{\mu\nu})(- \frac{\psi^{\alpha\beta}}{\lambda^2})$$

$$= f(\frac{1}{\lambda} \; \psi^{\alpha\beta}) - \frac{\partial f}{\partial\psi^{\alpha\beta}} \; (\frac{1}{\lambda} \; \psi^{\mu\nu})(\frac{1}{\lambda} \; \psi^{\alpha\beta})$$

$$= \frac{1}{2} \ell_{\alpha\beta} \; \frac{\psi^{\alpha\beta}}{\lambda} \qquad \text{(por (4.3.1))}$$

O sea:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \; (\lambda \; f(\frac{1}{\lambda} \; \psi^{\alpha\beta})) = \frac{1}{2} \ell_{\alpha\beta} \; \frac{\psi^{\alpha\beta}}{\lambda} \tag{4.3.2}$$

Por lo tanto, integrando (4.3.2) entre 1 y μ respecto de λ, es

$$\mu \; f(\frac{1}{\mu} \; \psi^{\alpha\beta}) - f(\psi^{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \ell_{\alpha\beta} \; \psi^{\alpha\beta} \; \ell n \; \mu$$

Cambiando, en esta última igualdad, $\psi^{\alpha\beta}$ por $\mu\,\psi^{\alpha\beta}$ resulta que

$$\mu\, f(\psi^{\alpha\beta}) - f(\mu\,\psi^{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}\,\ell_{\alpha\beta}\,\mu\,\psi^{\alpha\beta}\,\ell n\,\mu \qquad (4.3.3.)$$

Derivando sucesivamente (4.3.3) respecto de $\psi^{\gamma\nu}$ y de $\psi^{\theta\varepsilon}$ se llega a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^{\gamma\nu}\,\partial\psi^{\theta\varepsilon}}(\psi^{\alpha\beta}) - \mu\,\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^{\gamma\nu}\,\partial\psi^{\theta\varepsilon}}(\mu\,\psi^{\alpha\beta}) = 0$$

Tomando límite para μ tendiendo a cero por la derecha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^{\gamma\nu}\,\partial\psi^{\theta\varepsilon}}(\psi^{\alpha\beta}) = 0,$$

lo cual nos lleva a deducir que existen números reales b y $b_{\alpha\beta}$ tales que:

$$f = b + b_{\alpha\beta}\,\psi^{\alpha\beta}$$

Entonces

$$f - \frac{\partial f}{\partial\psi^{\alpha\beta}}\,.\,\psi^{\alpha\beta} = b \qquad (4.3.4)$$

Reemplazando (4.3.4) en (4.3.1):

$$b = \frac{1}{2}\,\ell_{\alpha\beta}\,\psi^{\alpha\beta}, \qquad (4.3.5)$$

para toda $\psi^{\alpha\beta}$.

Por lo tanto, tomando $\psi^{\alpha\beta} = 0$, es

$$b = 0,$$

luego, por (4.3.5),

$$\frac{1}{2}\,\ell_{\alpha\beta}\,\psi^{\alpha\beta} = 0$$

para toda $\psi^{\alpha\beta}$.

Esto muestra que $L = (\ln g)\,\ell_{\alpha\beta}\,\tilde{\psi}^{\alpha\beta}$ no es equivalente a una densidad escalar.

4.4. Teorema 2

Si la variedad subyacente tiene dimensión 4, el grupo estructural tiene dimensión $r \geq 3$ y $L = L(g_{ij};F^{\alpha}_{ij})$ es una función tal que $E^{ij}(L)$ y $E^{i}_{\alpha}(L)$ son densidades tensoriales invariantes por cambios de gauge, entonces existe una densidad escalar $\tilde{L}$ invariante por gauges tal que

$$E^{ij}(L) = E^{ij}(\tilde{L}) \quad y \quad E^{i}_{\alpha}(L) = E^{i}_{\alpha}(\tilde{L})$$

Demostración:

$E^{ij}(L)$ es densidad tensorial, por lo tanto el Teorema 1 de la sección 4.2 nos permite afirmar que

$$L(g_{ij};F^{\alpha}_{ij}) = L_1(g_{ij};F^{\alpha}_{ij})+(\ln g)\ell_{\alpha\beta}\,\tilde{\psi}^{\alpha\beta} + T(F^{\alpha}_{ij})\,(1 \leq \alpha,\beta \leq r) \tag{4,4,1}$$

donde L_1 es una densidad escalar, $\ell_{\alpha\beta}$ son número reales y $\tilde{\psi}^{\alpha\beta} = \sqrt{g}\,\psi^{\alpha\beta}$. Un largo cálculo muestra que, al ser $E^{i}_{\alpha}(L)$ densidad escalar invariante por cambios de gauge,

$$E^{i}_{\alpha}(L) = L^{ij;hk}_{\alpha\ \ \beta}\,F^{\beta}_{hk\|j} \tag{4.4.2}$$

(la doble barra vertical indica derivada covariante de gauge).

Si

$$L_2 = (\ell n\ g)\ell_{\alpha\beta}\ \overset{\gamma}{\psi}{}^{\alpha\beta},$$

entonces

$$L_{2\,\gamma}^{\ ij} = \frac{\partial L_2}{\partial F^{\gamma}_{ij}} = 2\ \sqrt{g}\ (\ell n\ g)\ell_{\gamma\beta}\ {}^{*}F^{\beta ij}$$

y por lo tanto

$$L_{2\,\gamma\ \ \beta}^{\ ij;hk} = 2\ \sqrt{g}\ (\ell n\ g)\ell_{\gamma\beta}\ \eta^{ijhk}$$

Luego:

$$L_{2\,\gamma\ \ \beta}^{\ ik;hj} = 2\ \sqrt{g}\ (\ell n\ g)\ell_{\gamma\beta}\ \eta^{ikhj}$$

$$= -2\ \sqrt{g}\ (\ell n\ g)\ell_{\gamma\beta}\ \eta^{ijhk}$$

$$= -L_{2\,\gamma\ \ \beta}^{\ ij;hk},$$

la cual implica que

$$L_{2\,\alpha\ \ \beta}^{\ ij;hk} + L_{2\,\alpha\ \ \beta}^{\ ik;hj} = 0 \qquad (4.4.3)$$

Desarrollando (4.4.2) obtenemos:

$$E^{i}_{\alpha}(L) = L^{ij;hk}_{\alpha\ \ \beta}\ (F^{\beta}_{hk,j} - F^{\beta}_{tk}\ \Gamma^{t}_{hj} - F^{\beta}_{ht}\ \Gamma^{t}_{kj} + F^{\gamma}_{hk}\ C^{\beta}_{\alpha\gamma}\ A^{\alpha}_{j})$$

y deducimos que

$$\frac{\partial E^i_\alpha(L)}{\partial A^\beta_{h,kj}} = -L^{ij;hk}_{\alpha\ \ \beta} - L^{ik;hj}_{\alpha\ \ \beta}$$

Esta última igualdad prueba que

$$L^{ij;hk}_{\alpha\ \ \beta} + L^{ik;hj}_{\alpha\ \ \beta}$$

es densidad tensorial.

A partir de (4.4.1) y (4.4.3) se obtiene la relación:

$$L^{ij;hk}_{\alpha\ \ \beta} + L^{ik;hj}_{\alpha\ \ \beta} = L_1{}^{ij;hk}_{\alpha\ \ \beta} + L_1{}^{ik;hj}_{\alpha\ \ \beta} + T^{ij;hk}_{\alpha\ \ \beta} + T^{ik;hj}_{\alpha\ \ \beta} \tag{4.4.4}$$

la que a su vez permite afirmar que la expresión

$$T^{ij;hk}_{\alpha\ \ \beta} + T^{ik;hj}_{\alpha\ \ \beta}$$

es densidad tensorial ya que $L_1{}^{ij;hk}_{\alpha\ \ \beta} + L_1{}^{ik;hj}_{\alpha\ \ \beta}$ lo es por ser L_1 una densidad escalar.

Para cada par (α,β) consideremos la densidad escalar

$$C_{\alpha\beta} = (T^{ij;hk}_{\alpha\ \ \beta} + T^{ik;hj}_{\alpha\ \ \beta})\, F^{r+1}_{ij}\ \ F^{r+1}_{hk} \tag{4.4.5}$$

donde F^{r+1} y F^{r+2} son tensores antisimétricos linealmente independientes y arbitrarios.

En el Apéndice de este Capítulo probaremos que:

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta}\ \mathfrak{Y}^{\gamma\delta} \tag{4.4.6}$$

siendo $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ números reales $(1 \leq \alpha,\beta \leq r,\ 1 \leq \gamma,\delta \leq r+2)$

Derivando (4.4.6) sucesivamente respecto de F^{r+1}_{ts} y $F^{r+2}_{\ell m}$ y teniendo en cuenta (4.4.5) obtenemos:

$$4\, T^{ts;\ell m}_{\alpha\ \beta} + T^{tm;\ell s}_{\alpha\ \beta} - T^{sm;\ell t}_{\alpha\ \beta} - T^{t\ell ;ms}_{\alpha\ \beta}$$

$$+ T^{s\ell ;mt}_{\alpha\ \beta} = 8\, C_{\alpha\beta\, r+1\ r+2}\, \varepsilon^{ts\ell m} \tag{4.4.7}$$

Intercambiando m y t en (4.4.7) resulta:

$$4\, T^{ms;\ell t}_{\alpha\ \beta} + T^{mt;\ell s}_{\alpha\ \beta} - T^{st;\ell m}_{\alpha\ \beta} - T^{m\ell ;ts}_{\alpha\ \beta}$$

$$+ T^{s\ell ;tm}_{\alpha\ \beta} = 8\, C_{\alpha\beta\, r+1\ r+2}\, \varepsilon^{ms\ell t} \tag{4.4.8}$$

Sumando (4.4.7) con (4.4.8) y teniendo en cuenta las antisimetrías correspondientes

$$5\, T^{ms;\ell t}_{\alpha\ \beta} + 5\, T^{ts;\ell m}_{\alpha\ \beta} - T^{t\ell ;ms}_{\alpha\ \beta} - T^{m\ell ;ts}_{\alpha\ \beta} = 0 \tag{4.4.9}$$

Intercambiando ℓ y s en (4.4.9) obtenemos:

$$5\, T^{m\ell ;st}_{\alpha\ \beta} + 5\, T^{t\ell ;sm}_{\alpha\ \beta} - T^{ts;m\ell}_{\alpha\ \beta} - T^{ms;t\ell}_{\alpha\ \beta} = 0 \tag{4.4.10}$$

El sistema formado por las ecuaciones (4.4.9) y (4.4.10) se puede escribir en la forma:

$$5A - B = 0$$

$$A - 5B = 0$$

Siendo $A = T^{ms;\ell t}_{\alpha\ \beta} + T^{ts;\ell m}_{\alpha\ \beta}$

y $B = T^{m\ell ;ts}_{\alpha\ \beta} + T^{t\ell ;ms}_{\alpha\ \beta}$.

Por lo tanto

$$T^{ts;\ell m}_{\alpha\ \beta} + T^{ms;\ell t}_{\alpha\ \beta} = 0 \tag{4.4.11}$$

De lo que se deduce que la contribución de T a la identidad (4.4.4) es nula.
Por su parte (4.4.11) muestra que $T^{ij;hk}_{\alpha\ \beta}$ es antisimétrico en todos los índices latinos, luego existen funciones

$$d_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}(F^{\gamma}_{ij})$$

tales que

$$T^{ij;hk}_{\alpha\ \beta} = d_{\alpha\beta}\ \varepsilon^{ijhk} \tag{4.4.12}$$

Derivando (4.3.12) respecto de F^{γ}_{rs} obtenemos

$$T^{ij;hk;rs}_{\alpha\ \beta\ \gamma} = \frac{\partial d_{\alpha\beta}}{\partial F^{\gamma}_{rs}}\ \varepsilon^{ijhk} \tag{4.4.13}$$

Ahora bien, $T^{ij;hk;rs}_{\alpha\ \beta\ \gamma}$ es antisimétrico en todos los índices latinos y siendo que estamos trabajando en un espacio de dimensión 4, resulta que

$$T^{ij;hk;rs}_{\alpha\ \beta\ \gamma} = 0$$

Se deduce entonces de (4.4.13) que los $d_{\alpha\beta}$ son números reales.
Integrando (4.4.12) es

$$T = d_{\alpha\beta}\ \mathcal{V}^{\alpha\beta} + K^{ij}_{\alpha}\ F^{\alpha}_{ij} + C \tag{4.4.14}$$

donde tanto los K^{ij}_{α} como C son números reales.
Reemplazando (4.4.14) en (4.4.1) se obtiene:

$$L = \hat{L} + L_3 + C \tag{4.4.15}$$

siendo:

$$\hat{L} = L_1 + d_{\alpha\beta}\ \tilde{\psi}^{\alpha\beta} \quad \text{una densidad escalar}$$

y

$$L_3 = (\ell n\ g)\ell_{\alpha\beta}\ \tilde{\psi}^{\alpha\beta} + K_{\alpha}^{ij}\ F_{ij}^{\alpha}$$

Entonces

$$E_{\alpha}^{i}(L) = E_{\alpha}^{i}(\hat{L}) + E_{\alpha}^{i}(L_3)$$

Aplicando el teorema de reemplazo ([5]) y recordando que $L_3 = L_2 + K_{\alpha}^{ij}\ F_{ij}^{\alpha}$

$$E_{\alpha}^{i}(\hat{L})(g_{hk};A_h^{\gamma};A_{h;k}^{\gamma}) + E_{\alpha}^{i}(L_3)(g_{hk};A_h^{\gamma};A_{h,k}^{\gamma}) =$$

$$= E_{\alpha}^{i}(\hat{L})(g_{hk};0;-\tfrac{1}{2}\ F_{hk}^{\gamma}) + E_{\alpha}^{i}(L_3)(g_{hk};0;-\tfrac{1}{2}\ F_{hk}^{\gamma})$$

$$= E_{\alpha}^{i}(\hat{L})(g_{hk};0;-\tfrac{1}{2}\ F_{gk}^{\gamma}) + E_{\alpha}^{i}(L_2)(g_{hk};0;-\tfrac{1}{2}\ F_{hk}^{\gamma})$$

ya que el hecho de ser

$$E_{\alpha}^{i}(L_3-L_2) = E_{\alpha}^{i}(K_{\beta}^{hj}\ F_{hj}^{\beta}) = 2\ K_{\beta}^{ih}\ C_{\theta\alpha}^{\beta}\ A_h^{\theta}$$

obliga a concluir que $E_{\alpha}^{i}(L_3-L_2)(g_{hk};0;-\frac{1}{2}\ F_{hk}^{\gamma}) = 0$.
Luego, obtuvimos que:

$$E_{\alpha}^{i}(L)(g_{hk};0;-\tfrac{1}{2}\ F_{hk}^{\gamma}) = E_{\alpha}^{i}(\hat{L})(g_{hk};0;-\tfrac{1}{2}\ F_{hk}^{\gamma})$$

$$+ E_{\alpha}^{i}(L_2)(g_{hk};0;-\tfrac{1}{2}\ F_{hk}^{\gamma}) \qquad (4.4.16)$$

De lo que se deduce que $E^i_\alpha((\ell n\ g)\ell_{\gamma\beta}\ \tilde{\psi}^{\gamma\beta})$ es densi dad tensorial.

Como

$$E^i_\alpha((\ell n\ g)\ell_{\gamma\beta}\ \tilde{\psi}^{\gamma\beta}) = (\ell n\ g)\ E^i_\alpha(\ell_{\gamma\beta}\ \tilde{\psi}^{\gamma\beta}) + \ell_{\gamma\beta}\ \frac{\partial\tilde{\psi}^{\gamma\beta}}{\partial A^\alpha_{i,j}}\ g^{hk}\ g_{hk,j} \tag{4.4.17}$$

tomando un sistema de coordenadas tal que, en un punto,

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \det(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}) = 1 \quad y \quad g_{ij,h} = 0,$$

se obtiene que

$$E^i_\alpha((\ell n\ g)\ell_{\gamma\beta}\ \tilde{\psi}^{\gamma\beta}) = 0$$

en dicho sistema, y siendo que es densidad tensorial resulta

$$(\ell n\ g)E^i_\alpha(\ell_{\gamma\beta}\ \tilde{\psi}^{\gamma\beta}) + \ell_{\gamma\beta}\ \frac{\partial\tilde{\psi}^{\gamma\beta}}{\partial A^\alpha_{i,j}}\ g^{hk}\ g_{hk,j} = 0 \tag{4.4.18}$$

en todo sistema de coordenadas.

Si ahora consideramos un sistema de coordenadas tal que, en un punto,

$$g = 1 \quad y \quad g^{hk}\ g_{hk,j} \neq 0,$$

reemplazando en (4.4.18) obtenemos

$$\ell_{\gamma\beta} \frac{\partial \tilde{\psi}^{\gamma\beta}}{\partial A^{\alpha}_{i,j}} = 0 \qquad (4.4.19)$$

Derivando (4.4.19) respecto de $A^{\theta}_{h,k}$ es:

$$\ell_{\gamma\beta} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}^{\gamma\beta}}{\partial A^{\alpha}_{i,j} \; \partial A^{\theta}_{h,k}} = 0 \qquad (4.4.20)$$

Reemplazando

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}^{\gamma\beta}}{\partial A^{\alpha}_{i,j} \; \partial A^{\theta}_{h,k}} = -4 \sqrt{g}\, \eta^{ijhk} (\delta^{\gamma}_{\alpha} \delta^{\beta}_{\theta} + \delta^{\beta}_{\alpha} \delta^{\gamma}_{\theta})$$

en (4.4.20) se llega a que

$$\varepsilon^{ijhk} (\ell_{\alpha\theta} + \ell_{\theta\alpha}) = 0$$

Entonces, teniendo en cuenta la simetría de $\ell_{\alpha\theta}$((4.4.1)),

$$\varepsilon^{ijhk} \ell_{\alpha\theta} = 0$$

y por lo tanto

$$\ell_{\alpha\beta} = 0,$$

con lo cual

$$L_2 = (\ell n \; g) \ell_{\alpha\beta} \tilde{\psi}^{\alpha\beta} = 0$$

Luego, reemplazando en (4.4.15),

$$L = \hat{L} + K^{ij}_{\alpha} F^{\alpha}_{ij} + C \qquad (4.4.21)$$

donde $\hat{L}$ es una densidad escalar con el mismo dominio que L ya que al satisfacer las identidades de invariancia en un subconjunto denso de las variables de concomitancia, las satisface en todo el conjunto.
En virtud de (4.4.21),

$$E_\alpha^i(K_\beta^{hj} F_{hj}^\beta) = 2 K_\beta^{ij} C_{\theta\alpha}^\beta A_j^\theta$$

es densidad tensorial. Por lo tanto, considerando el cambio de coordenadas $x^i = \lambda \bar{x}^i$ $(\lambda > 0)$ resulta

$$2K_\beta^{ij} C_{\theta\alpha}^\beta A_j^\theta = 2\lambda^4 K_\beta^{ij} C_{\theta\alpha}^\beta A_j^\theta$$

y tomando límite para λ tendiendo a cero por la derecha es

$$E_\alpha^i(K_\beta^{hj} F_{hj}^\beta) = 2K_\beta^{ij} C_{\theta\alpha}^\beta A_j^\theta = 0$$

Se deduce entonces que

$$L = \hat{L} + \hat{K} \tag{4.4.22}$$

donde $E_\alpha^i(\hat{K}) = 0$.
Como $\hat{K} = K_\alpha^{ij} F_{ij}^\alpha + C$, $E^{ij}(\hat{K}) = 0$ y resulta

$$E_\alpha^i(L) = E_\alpha^i(\hat{L}),\ E^{ij}(L) = E^{ij}(\hat{L})$$

Entonces, $\hat{L}$ es una densidad escalar cuyas expresiones de Euler-Lagrange son invariantes por cambios de gauge. El Teorema 2 del Capítulo 3 garantiza la existencia de una densidad escalar $\tilde{L}$ invariante por cambios de gauge tal que

$$E^i_\alpha(\tilde{L}) = E^i_\alpha(\hat{L}) \quad \text{y} \quad E^{ij}(\tilde{L}) = E^{ij}(\hat{L}),$$

lo cual concluye la demostración del teorema.

Apéndice

Si $C_{\alpha\beta}(F^\gamma_{ij})$ *(1* $\leq \alpha, \beta \leq r$*) es densidad escalar, entonces existen números reales* $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ *(1* $\leq \mu, \nu \leq r+2$*) tales que*

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\mu\nu}\, \psi^{\mu\nu}$$

En efecto, razonando en forma análoga a la que nos permitió deducir (4.2.64) a partir de (4.2.55) en el Teorema 1 de este capítulo, llegamos a que

$$C_{\alpha\beta} = \sqrt{g}\; G_{\alpha\beta}(\phi^{\mu\nu};\psi^{\mu\nu}) \quad (r \leq \mu,\nu \leq r+2) \tag{A.1}$$

(Ahora suponemos que F^r, F^{r+1}, F^{r+2}, $*F^r$, $*F^{r+1}$ y $*F^{r+2}$ son linealmente independientes).

Derivando (A.1) respecto de g_{ij}:

$$\frac{1}{2}\sqrt{g}\, g^{ij}\, G_{\alpha\beta} + \sqrt{g}\left(\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial\phi^{\mu\nu}}\, T^{\mu\nu ij} - \frac{1}{2}\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial\psi^{\mu\nu}}\, g^{ij}\, \psi^{\mu\nu}\right) = 0$$

o sea

$$\frac{1}{2} g^{ij}\left(G_{\alpha\beta} - \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial\psi^{\mu\nu}}\psi^{\mu\nu}\right) + \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial\phi^{\mu\nu}}\, T^{\mu\nu ij} = 0$$

Entonces, por la independencia lineal de g^{ij} y $T^{\mu\nu ij}$ para cada par (i,j), en un subconjunto denso del conjunto de las variables de concomitancia se tiene:

$$\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial \phi^{\mu\nu}} = 0 \qquad y \qquad G_{\alpha\beta} = \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial \psi^{\mu\nu}} \psi^{\mu\nu} \tag{A.2}$$

De (A.2) se deduce que

$$C_{\alpha\beta} = \sqrt{g}\; G_{\alpha\beta}(\psi^{\mu\nu}) \tag{A.3}$$

y

$$G_{\alpha\beta}(\lambda\psi^{\mu\nu}) = \lambda\; G_{\alpha\beta}(\psi^{\mu\nu}) \tag{A.4}$$

Derivando (A.4) respecto de λ obtenemos

$$G_{\alpha\beta}(\psi^{\mu\nu}) = \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial \psi^{\mu\nu}} (\lambda\psi^{\varepsilon\theta}) . \psi^{\mu\nu}$$

y tomando $\lambda = 0$

$$G_{\alpha\beta}(\psi^{\mu\nu}) = \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial \psi^{\mu\nu}} (0)\; \psi^{\mu\nu}$$

En virtud de (A.3) basta entonces definir

$$C_{\alpha\beta\,\mu\nu} = \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial \psi^{\mu\nu}} (0)$$

para completar la demostración.

5. UNICIDAD DE LAS ECUACIONES DE YANG-MILLS

5.1. Intoducción

Si se considera el Lagrangiano

$$L = \sqrt{g}\; B_{\alpha\beta}\; F^{\alpha ij}\; F^{\beta}_{ij} \tag{5.1.1}$$

donde $B_{\alpha\beta}$ son los coeficientes de una forma bilineal simétrica AdG-invariante sobre el álgebra de Lie LG, las expresiones de Euler-Lagrange asociadas a L son:

$$E^{i}_{\alpha}(L) = 2\sqrt{g}\; B_{\alpha\beta}\; F^{\alpha ij}{}_{\|j}$$

y

$$E^{ij}(L) = -2\sqrt{g}\; B_{\alpha\beta}\,(F^{\alpha i}{}_{k}\; F^{\beta jk} - \frac{1}{4}\, g^{ij}\; F^{\alpha hk}\; F^{\beta}_{hk})$$

Las ecuaciones $E^{i}_{\alpha}(L) = 0$, siendo L el Lagrangiano dado por (5.1.1), son las ecuaciones de Yang-Mills, esto es:

$$B_{\alpha\beta}\; F^{\alpha ij}{}_{\|j} = 0$$

Se observa que L, $E^{i}_{\alpha}(L)$ y $E^{ij}(L)$ son invariantes por cambios de gauge. Pero aunque las expresiones de Euler-Lagrange sean invariantes por gauges, esto no tiene por qué pasarle al Lagrangiano que les dio origen.

5.2. Unicidad de las ecuaciones de Yang-Mills

Si la dimensión de la variedad subyacente es cuatro, la dimensión del grupo estructural es $r \geq 3$ y

$L = L(g_{ij};F^{\alpha}_{ij})$ es una función tal que $E^i_{\alpha}(L)$ y $E^{ij}(L)$ son densidades tensoriales invariantes por cambios de gauge, el Teorema 2 del capítulo 4 garantiza la existencia de una densidad escalar $\hat{L}$ invariante por cambios de gauge tal que $E^i_{\alpha}(\hat{L}) = E^i_{\alpha}(L)$ y $E^{ij}(\hat{L}) = E^{ij}(L)$.

Si se supone además que

$$*\hat{L}^{ij}_{\alpha \,\Vert j} = 0 \qquad (5.2.1)$$

resulta entonces

$$E^i_{\alpha}(L) = 2\sqrt{g}\,\mu_{\alpha\beta}\,F^{\alpha ij}{}_{\Vert j}$$

dónde $\mu_{\alpha\beta}$ son los coeficientes de una forma bilineal simétrica Ad G-invariante sobre LG. Vale decir que $E^i_{\alpha}(L) = 0$ proporciona las ecuaciones de Yang-Mills.

En efecto:

Llamemos

$$H^{ij}_{\alpha} = *\hat{L}^{ij}_{\alpha}$$

sabemos entonces que H^{ij}_{α} es una densidad tensorial invariante por cambios de gauge que verifica

$H^{ij}_{\alpha \,\Vert j} = 0$

Luego, tomando un sistema de coordenadas tal que, en un punto, $g_{ij,h} = 0$ $(1 \leq i,j,h \leq 4)$ y un cambio de gauge tal que:

$$A'^{\alpha}_{i} = 0; \quad A'^{\alpha}_{i,j} = -\frac{1}{2} F^{\alpha}_{ij} \quad \text{y} \quad A'^{\alpha}_{i,jh} = -\frac{1}{3}(F^{\alpha}_{ij\|h} + F^{\alpha}_{ih\|j})$$

(siendo A'^{α}_{i} el transformado de A^{α}_{i} por el cambio del gauge), deducimos que

$$\frac{\partial H^{ij}_{\alpha}}{\partial F^{\beta}_{hk}} F^{\beta}_{hk\|j} = 0 \tag{5.2.2.}$$

Derivando (5.2.2) respecto de $A^{\gamma}_{r,st}$ obtenemos

$$H^{it;sr}_{\alpha\ \gamma} + H^{is;tr}_{\alpha\ \gamma} - (H^{it;rs}_{\alpha\ \gamma} + H^{is;rt}_{\alpha\ \gamma}) = 0$$

y teniendo en cuenta la antisimetría en s,r y en t,r:

$$H^{ij;hk}_{\alpha\ \beta} + H^{ih;jk}_{\alpha\ \beta} = 0 \tag{5.2.3}$$

De (5.2.3) se sigue que $H^{ij;hk}_{\alpha\ \beta}$ es antisimétrico en todos los índices latinos, por lo tanto

$$H^{ij;hk}_{\alpha\ \beta} = b_{\alpha\beta}(g_{rs};F^{\gamma}_{rs})\eta^{ijhk} \tag{5.2.4}$$

con $b_{\alpha\beta}$ una densidad escalar concomitante del tensor métrico y la forma de curvatura.

Derivando (5.2.4) respecto de F^{γ}_{rs} es:

$$H^{ij;hk;rs}_{\alpha\ \beta\ \gamma} = \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial F^{\gamma}_{rs}} \eta^{ijhk} \tag{5.2.5}$$

Pero

$$H^{ij;hk;rs}_{\alpha\ \beta\ \gamma} = H^{ij;rs;hk}_{\alpha\ \gamma\ \beta} = -H^{ir;js;hk}_{\alpha\ \gamma\ \beta} \quad \text{(por (5.2.3))}$$

entonces $H^{ij;hk;rs}_{\alpha\ \beta\ \gamma}$ es antisimétrico en todos los índices latinos, con lo cual

$$H_{\alpha\ \ \beta\ \ \gamma}^{ij;hk;rs} = 0$$

ya que estamos trabajando en un espacio de dimensión 4.

Reemplazando en (5.2.5) deducimos que

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial F^{\gamma}_{rs}} = 0$$

Luego $b_{\alpha\beta}$ es una densidad escalar concomitante de g_{ij}, entonces

$$b_{\alpha\beta}(g_{ij}) = \mu_{\alpha\beta} \sqrt{g}$$

con $\mu_{\alpha\beta}$ constante para cada par (α,β), y por lo tanto:

$$H_{\alpha\ \ \beta}^{ij;hk} = \sqrt{g}\ \mu_{\alpha\beta}\ \eta^{ijhk} \tag{5.2.6}$$

Al ser $H_{\alpha\ \ \beta}^{ij;hk} = H_{\beta\ \ \alpha}^{hk;ij}$, de (5.2.6) se deduce que $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha}$.

Integrando (5.2.6) resulta

$$H_{\alpha}^{ij} = \sqrt{g}\ \mu_{\alpha\beta}\ \eta^{ijhk}\ F^{\beta}_{hk} + \lambda_{\alpha}^{ij}(g_{hk})$$

$$= \sqrt{g}\ \mu_{\alpha\beta}\ {}^{*}F^{\beta ij} + \lambda_{\alpha}^{ij}(g_{hk})$$

Esto muestra que $\lambda_{\alpha}^{ij}(g_{hk})$ es una densidad tensorial antisimétrica.

Luego

$$\lambda_{\alpha}^{ij}(g_{hk}) = 0$$

por un resultado de la referencia [6].

Entonces

$$H_\alpha^{ij} = \sqrt{g}\ \mu_{\alpha\beta}\ {}^*F^{\beta ij} \qquad (5.2.7)$$

Esta relación y el hecho de que H_α^{ij} es invariante por cambios de gauge permiten deducir que

$$\mu_{\alpha\beta} = (Ad_\alpha^\theta \circ I^{-1})(Ad_\beta^\gamma \circ I^{-1})\mu_{\gamma\theta},$$

esto es que $\mu_{\alpha\beta}$ son los coeficientes de una forma bilineal Ad-G invariante sobre LG.

Multiplicando (5.2.7) por η_{ijhk} y recordando que $H_\alpha^{ij} = {}^*\hat{L}_\alpha^{ij}$ obtenemos:

$$\eta_{ijhk}\ {}^*\hat{L}_\alpha^{ij} = \sqrt{g}\ \mu_{\alpha\beta}\ \eta_{ijhk}\ {}^*F^{\beta ij}$$

O sea:

$$\eta_{ijhk}\ \eta^{ijrs}\ g_{r\ell}\ g_{sm}\ \hat{L}_\alpha^{\ell m} = \sqrt{g}\ \mu_{\alpha\beta}\ \eta_{ijhk}\ \eta^{ijrs}\ g_{r\ell}\ g_{sm}\ F^{\beta \ell m} \qquad (5.2.8)$$

Reemplazando la siguiente identidad

$$g_{r\ell}\ g_{sm}\ \eta_{ijhk}\ \eta^{ijrs} = -\frac{1}{2}(g_{h\ell}\ g_{km} - g_{k\ell}\ g_{hm})$$

en (5.2.8), resulta

$$(g_{h\ell}\ g_{km} - g_{k\ell}\ g_{hm})\hat{L}_\alpha^{\ell m} = \sqrt{g}\ \mu_{\alpha\beta}(g_{h\ell}\ g_{km} - g_{k\ell}\ g_{hm})F^{\beta\ell m}$$

Multiplicando la identidad anterior por $g^{hr}\ g^{ks}$ es:

$$\hat{L}_\alpha^{rs} - \hat{L}_\alpha^{sr} = \sqrt{g}\ \mu_{\alpha\beta}(F^{\beta rs} - F^{\beta sr})$$

o sea

$$\hat{L}_{\alpha}^{rs} = \sqrt{g}\,\mu_{\alpha\beta}\, F^{\beta rs} \tag{5.2.9}$$

Integrando (5.2.9) se llega a

$$\hat{L} = \sqrt{g}\,\mu_{\alpha\beta}\,\phi^{\alpha\beta} + c\,\sqrt{g} \tag{5.2.10}$$

en cuyo caso

$$\hat{L}_{\alpha}^{ij}{}_{\|j} = 2\,\sqrt{g}\,\mu_{\alpha\beta}\, F^{\beta ij}{}_{\|j} \tag{5.2.11}$$

Entonces

$$E_{\alpha}^{i}(\hat{L}) = 2\,\sqrt{g}\,\mu_{\alpha\beta}\, F^{\beta ij}{}_{\|j} \qquad \text{(ver [11])}$$

$$= \hat{L}_{\alpha}^{ij}{}_{\|j} \qquad \text{(por (5.2.11))}$$

y concluímos que

$$E_{\alpha}^{i}(L) = 2\,\sqrt{g}\,\mu_{\alpha\beta}\, F^{\beta ij}{}_{\|j}$$

vale decir que, al plantear $E_{\alpha}^{i}(L) = 0$, recuperamos las ecuaciones usuales de Yang-Mills.

BIBLIOGRAFIA

[1]: Noriega, R.J.: The general form of isotropic tensors (1984). Rev. UMA, Vol. 31, 149-154.

[2]: Noriega, R.J. - Schifini, C.G.: On the curvature form and the gauge potentials in gauge field theories (Mathematicae Notae, en prensa).

[3]: Kobayashi, S. - Nomizu, K.: Foundations of Differential Geometry (1963), Vol. I, Wiley Interscience, New York.

[4]: Anderson, I.M.: Natural Variational Principles on Riemannian Manifolds (1984). Ann. of Math., 120, 329-370.

[5]: Horndeski, G.M.: Replacement theorems for concomitants of gauge fields (1981). Utilitas Math., 19, 215-246.

[6]: Lovelock, D.: The uniqueness of the Einstein Field Equations in a four dimensional space (1969). Arch. Rat. Mech. Anal., 33, 54-70.

[7]: Noriega, R.J. - Prélat, D. - Schifini, C.G.: Scalar concomitants of a metric and a curvature form (1988). Gen. Rel. Grav., Vol. 20, N° 4.

[8]: Noriega, R.J. - Schifini, C.G.: Scalar concomitants of a metric and a curvature form II (1988). J. Math. Phys., (en prensa).

[9]: Spivak, M.: Calculus on Manifolds (1965). Benjamin, New York.

[10]: Rund, H.: Variational problems involving combined tensor fields (1966). Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 29, 243.

[11]: Mc Kellar, R.J.: Some results on Concomitants of Several Field (1987) Second Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics, Toronto, Canada.