Formas hermitianas sobre anillos locales

Chávez Vega, Carlos

1987

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Tema de Tesis:

Formas Hermitianas sobre Anillos Locales

Autor: Carlos Chávez Vega

Director de Tesis:
Ing. Orlando E. Villamayor

Lugar de Trabajo:
Departamento de Ciencias Matemáticas

Tesis presentada para Optar el Título de:
Doctor en Ciencias Matemáticas

1987

P R E S E N T A C I O N

Expongo aquí algunos aspectos de las Formas Hermitianas sobre anillos semilocales. Entre lo logros pueden nombrarse la prueba de la existencia de una base ortogonal de un espacio hermitiano regular (Proposición 2.1.4) y, de la relación entre una forma hermitiana regular y su forma cuadrática asociada (Proposición 2.2.1).

En el Capítulo I se desarrollan didácticamente las relaciones que existen entre una forma hermitiana sobre un módulo libre y su matriz asociada, así como las principales propiedades de módulos hermitianos, con el objeto de definir el anillo de Witt hermitiano de un anillo. Se prueba además que una forma hermitiana regular admite una base ortogonal independientemente de la característica del cuerpo y se describen algunos ejemplos de anillos de Witt hermitiano. En el Capítulo II se prueban las proposiciones citadas al inicio de esta presentación y se hace notar, mediante un ejemplo, que estas proposiciones no valen en anillos mas generales.

Esta ocasión es propicia para expresar mi mas sincero reconocimiento a mi asesor, el Ing. Orlando E. Villamayor, quién con su paciente y atinada dirección hizo posible la realización del presente trabajo. Reitero a él mi imperecedera gratitud.

El período de estudios del Doctorado, así como la elaboración de esta Tesis fué posible gracias a una beca de CONICET y a la Licencia otorgada por la Universidad Nacional Mayor de San Marcos de Lima, desde Agosto de 1984 hasta Octubre de 1986.

Setiembre 1987.

C. Chávez V.

CAPITULO 0

INTRODUCCION

0.1 ANILLOS CON INVOLUCION

Con A se denotará a un anillo conmutativo con unidad.

Una <u>involución</u> sobre A, es un homomorfismo $J: A \to A$ tal que $J \circ J = 1$. En este caso diremos que A es un anillo con involución y denotaremòs con (A,J), por comodidad, usaremos también la notación $J(a) = \bar{a} \quad \forall\, a \in A$.

Los elementos de A, invariantes por J, al que denotaremos con A_0, esto es:

$$A_0 = \{a \in A \;/\; \bar{a} = a\}$$

constituyen un subanillo de A.

Abundan los anillos con involución, entre los que podemos citar:

Ejemplo 0.1.1.

$$A = Z[\sqrt{m}],\ m \in Z - Z^2 \quad y \quad \overline{a + b\sqrt{m}} = a - b\sqrt{m}$$

$$a, b \in Z$$

Ejemplo 0.1.2.

$A = C \times C$, donde C es un anillo conmutativo con unidad e involución $J(c,d) = (d,c)$, $c,d \in C$.

Existe una aplicación natural llamada "norma" de A en A_0, definida por $N(a) = a\bar{a}$, $\forall\, a \in A$

Esta aplicación tiene las siguientes propiedades:

i) Es multiplicativa

ii) $u \in A$ es unidad si y sólo si $N(u)$ es unidad en A_o.

0.2 MODULOS

En lo que sigue de este trabajo (A,J) se mantendrá fijo y todo A_ módulo P, se considerará proyectivo y de tipo finito. Además a $P^* = \mathrm{Hom}_A(P,A)$ daremos la estructura de módulo con la operación externa

$$(af)(x) = \bar{a}.f(x) \quad \forall\, a \in A,\ f \in P^*,\ x \in P\ .$$

Lema 0.2.1.

Sea P proyectivo y de tipo finito, $x \neq 0$, $x \in P$, entonces existe $f \in P^*$ tal que $f(x) \neq 0$.

Demostración.

Existe L libre de tipo finito tal que $P \oplus P' = L$, para algún módulo P'. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de L y $f_j\colon L \to A$, $j = 1, \ldots, n$, los elementos de la base dual $(f_j(e_i) = \delta_{ij})$.

Como $x = \sum a_j e_j \neq 0$, existe $a_i \neq 0$, entonces $f_i(x) = a_i \neq 0$.

$f = f_{i|P}$, verifica el lema.//

Lema 0.2.2.

Sea P proyectivo y de tipo finito, entonces existen funciones $f_j \in P^*$, $j = 1,\dots, n$ y elementos $x_j \in P$, $j = 1,\dots, n$ tal que todo $x \in P$ puede escribirse en la forma

$$x = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)x_j .$$

Demostración.

Sea L libre de tipo finito tal que $L = P \oplus P'$, donde P' es algún A- módulo.

Sea $\{e_1,\dots, e_n\}$ una base de L y $\{f_1,\dots, f_n\}$, su correspondiente base dual. Entonces $e_i = x_i + x_i' \in P \oplus P'$.

Por otro lado, todo $x \in P$ se escribe en la forma

$$\begin{aligned} x &= \sum_j a_j e_j \\ &= \sum_j a_j x_j + \sum_j a_j x_j' . \end{aligned}$$

Como $\sum a_j x_j \in P$ y la escritura de $x = x + 0$, es única resulta $\sum a_j x_j' = 0$. Luego $x = \sum_j a_j x_j$.

Por otro lado, $f_i(x) = f_i(\sum a_j e_j) = a_i$, $i = 1,\dots, n$.

En consecuencia $x = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)x_j$. //

Dado un A- módulo U, sea $\alpha_U : U \to U^{**}$ la aplicación natural definida por $[\alpha_U(x)](f) = f(x)$ $\forall\, x \in U$, $f \in U^*$

Definición.

Un A- módulo U es <u>reflexivo</u> si α_U es un isomorfismo.

Proposición 0.2.3

Todo A- módulo U, proyectivo y de tipo finito es reflexivo.

Demostración.

Sea U libre y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base. Entonces $\{\alpha_U(e_1), \ldots, \alpha_U(e_n)\}$, es una base de U^{**}. En efecto:

Sea $\{f_1, \ldots, f_n\}$ la base dual de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ entonces

$$\sum a_j\, \alpha_U(e_j) = 0 \rightarrow \left(\sum a_j\, \alpha_U(e_j)\right)(f_k) = 0$$

Luego, $a_k = 0 \ \forall\, k = 1, \ldots, n.$ (1)

Por otro lado, sea $g \in U^{**}$ y $a_k = g(f_k)$, entonces $g = \sum a_j\, \alpha_U(e_j).$ (2)

(1) y (2) prueban la afirmación.

El caso general; como U es proyectivo, existe U_1 tal que $U \oplus U_1 = L$ es libre de tipo finito. Entonces

$$\alpha_L : U \oplus U_1 \longrightarrow U^{**} \oplus U_1^{**}$$, es de la forma

$\alpha_L = \alpha_U + \alpha_{U_1}$. Como α_L es un isomorfismo, lo es también α_U //.

Proposición 0.2.4.

Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de A, P un A- módulo, entonces $A/\mathfrak{a} \otimes_A P^* \simeq (A/\mathfrak{a} \otimes_A P)^*$, (isomorfismo de $A/\mathfrak{a}$ - módulos) //.

C A P I T U L O I

MODULOS HERMITIANOS

1.1 DEFINICIONES:

Este capítulo está dedicado a exponer los conceptos básicos de módulos hermitianos y definir el <u>anillo de Witt hermitiano</u>.

Fijemos un anillo con involución (A,J).

Definición.

Un <u>módulo hermitiano</u> sobre (A,J) es un par (P,ϕ), donde P es un A- módulo proyectivo y de tipo finito y, $\phi: P \times P \rightarrow A$, es una aplicación que verifica:

i) $\phi(\ ,y): P \rightarrow A$ es A- lineal, para cada $y \in P$.

ii) $\overline{\phi(x,y)} = \phi(y.x) \ \forall \ x,y \in P$.

ϕ se llama forma hermitiana sobre P. Por comodidad, se usará indistintamente (P,ϕ), ϕ o P, para denotar un módulo hermitiano o una forma hermitiana.

Ejemplo i.

$\phi: A \times A \rightarrow A$, $\phi(a,b) = a\bar{b}$, $\forall$ a, $b \in A$, es una forma hermitiana.

Ejemplo ii.

entonces

$$\phi(x,y) = {}^{t}x.D.\bar{y} = (x_1 \ , \ x_2)\begin{bmatrix} r & \bar{c} \\ c & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix}$$

define una forma hermitiana sobre A^2. //.

Dado (P,ϕ), $d_\phi : P \rightarrow P^*$ definida por $[d_\phi(y)](x) = \phi(x,y) \ \forall \ x,y \in P$, es un homomorfismo. En efecto:

$$[d_\phi(ay)](x) = \phi(x,ay) = \bar{a}\phi(x,y)$$
$$= [a.d_\phi(y)](x)$$

Luego $d_\phi(ay) = a.d_\phi(y) \ \forall \ a \in A \ , \ y \in P$

Definición.

Un módulo hermitiano (P,ϕ) es <u>regular</u> (o <u>no singular</u>) si d_ϕ es un isomorfismo.

El concepto de isometría (o isomorfismo) en módulos hermitianos es idéntico al de formas cuadráticas y, en ese sentido diremos que (P,ϕ) es <u>isométrico</u> a (P',ϕ') si existe un isomorfismo $\sigma: P \rightarrow P'$ tal que $\phi'(\sigma(x),\sigma(y)) = \phi(x,y)$, $\forall \ x,y \in P$.

En este caso se denotará $\phi \simeq \phi'$, o $P \cong P'$

1.2 MATRIZ ASOCIADA A UNA FORMA HERMITIANA

Sea (L, ϕ) un módulo hermitiano, donde L es un A- módulo libre de rango n.

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de L, entonces los elementos $\phi(e_i, e_j) = a_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, determinan una matriz $D_\phi = [a_{ij}]$, llamada Matriz Asociada a ϕ.

Observación 1.2.1.

La matriz D_ϕ verifica $D^*_\phi = {}^t[\bar{a}_{ij}] = D_\phi$, es decir D_ϕ es una matriz hermitiana //.

Observación 1.2.2.

La matriz D_ϕ caracteriza a la forma ϕ. En efecto:

Si $u = \sum_i x_i e_i$, $v = \sum_j y_j e_j \in L$ y

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

entonces

$${}^t x \, A_\phi \bar{y} = \sum_{i,j} x_i a_{ij} \bar{y}_j = \phi(u,v)$$

Luego, la forma ϕ puede obtenerse a partir de la matriz D_ϕ //.

Si $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ es otra base de L, entonces los elementos $a'_{ij} = \phi(e'_i, e'_j)$ determinan una nueva matriz $D'_\phi = [a'_{ij}]$ asociada a ϕ.

Observación 1.2.3

Las matrices D_ϕ y D'_ϕ son semejantes.

En efecto:

Sean $e'_i = \sum_k c_{ki} e_k$ y $C = [c_{ki}]$, entonces

$$a'_{ij} = \phi(e'_i, e'_j) = \sum_{k,r} c_{ki}\bar{c}_{rj}\ \phi(e_k, e_r)\ ,\quad \text{de donde}$$

$D'_\phi = {}^tCD_\phi\bar{C}$.

Denotando con $U = {}^tC'$ se tiene $D'_\phi = UD_\phi U^*$ //.

Proposición 1.2.4.

Dos formas hermitianas ϕ y ϕ' son isométricas, si y sólo si sus correspondientes matrices asociadas son semejantes.

Demostración.

$\rightarrow$) Sean $\sigma: L' \rightarrow L$ la isometría entre ϕ' y ϕ , y $\{e'_1,\ldots,e'_n\}$ y $\{e_1,\ldots,e_n\}$, bases de L' y L, respectivamente. Entonces $\sigma(e'_i) = \sum_k c_{ki}e_k$ define la matríz $C = [c_{ki}]$, luego

$$a'_{ij} = \phi'(e'_i, e'_j) = \phi(\sigma(e'_i)\ ,\ \sigma(e'_j)) = \sum_{k,r} c_{ki}a_{kr}\bar{c}_{rj}$$

de donde $D_{\phi'} = {}^tCD_\phi\bar{C} = UD_\phi U^*$, tomando $U = {}^tC$.

Además, U es una matriz inversible, puesto que C es matriz de cambio de base.

$\leftarrow$) Si $A_{\phi'} = U\ A_\phi U^*$, pongamos $C = [\ c_{ki}\ ] = {}^tU$.

Ahora definimos $\sigma: L' \rightarrow L$, tal que sobre la base $\{e'_1,\ldots,e'_n\}$, está dada por la fórmula

$$\sigma(e'_i) = \sum_k c_{ki}e_k\ ,\ i = 1,\ldots, n\ .$$

σ es un isomorfismo desde que $[c_{ki}]$ es una matriz inversible. De la relación $a'_{ij} = \sum_{k,r} c_{ki} a_{kr} \bar{c}_{rj}$ se tiene:

$$\begin{aligned}\phi(\sigma(e'_i), \sigma(e'_j)) &= \sum_{k,r} c_{ri}\bar{c}_{rj}\, \phi(e_k, e_r) \\ &= a'_{ij} \\ &= \phi'(e'_i, e'_j) \quad \forall\ i,j\end{aligned}$$

y por linealidad de σ,

$$\phi(\sigma(x'), \sigma(y')) = \phi'(x', y') \quad \forall\ x', y' \in L'$$

Luego σ es una isometría entre ϕ' y ϕ //.

Proposición 1.2.5.

Dado (L,ϕ), con L libre. Entonces ϕ es regular $\Longleftrightarrow$ D_ϕ es inversible.

Demostración.

Si $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es una base de L, entonces las aplicaciones lineales $f_j: L \to A$, $j = 1,\ldots, n$, que sobre elementos de la base tienen el valor $f_j(e_i) = \delta_{ij}$, $i = 1,\ldots, n$, forman una base de L^*. Para verificar esta afirmación basta notar que si $f \in L^*$ y $f(e_i) = a_i$, entonces $f = \sum_i \bar{a}_i . f_i$.

$\to$) Si (L,ϕ) es regular, entonces para cada $f_j \in L^*$ existe $e'_j \in L$ tal que $d_\phi(e'_j) = f_j$. (Nótese que $\{e'_1,\ldots,e'_n\}$ es una base de L, llamada base dual de $\{e_1,\ldots,e_n\}$. Estas bases están caracterizadas por la relación $\phi(e_j, e'_i) = \delta_{ij}$, $\forall\ i,j$).

La ecuación

$$e_i' = \sum_k c_{ki} e_k \ , \ i = 1,\dots, n, \ c_{ki} \in A$$

define una matríz inversible $C = [c_{ki}]$, además,

$$\delta_{ji} = \phi(e_j, e_i') = \sum_k c_{ki}\ \phi(e_j, e_k) = \sum_k a_{jk} c_{ki} \ .$$

Luego $D_\phi C = I$. Y aplicando $*$, se tiene $C^* D_\phi = I$, pues $D_\phi^* = D_\phi$.

En consecuencia D_ϕ es inversible.

$\leftarrow$) Recíprocamente. Si $C = [c_{ki}]$ es la inversa de

$$D_\phi = [a_{ij}], \quad \text{entonces} \quad \sum_k a_{jk} c_{ki} = \delta_{ji} \ \forall\ i,j$$

Sea ahora $e_i' = \sum_k c_{ki} e_k$, $i = 1,\dots, n$. Entonces $\{e_1',\dots, e_n'\}$ es base de L, pues C s inversible y además $\phi(e_j, e_i') = \delta_{ij}\ \forall\ i,j$. Por tanto $\{e_1',\dots\ e_n'\}$ es la base dual de $\{e_1,\dots,e_n\}$

Los $f_i = d_\phi(e_i')$, $i = 1,\dots, n$, conforman una base de L^*, Luego la asignación $e_i' \to f_i$ define un isomorfismo entre L y L^* (vía d_ϕ). Por tanto ϕ es regular. //.

Ejemplo:

Sea $L = Ae$ un A- módulo libre de rango 1. ϕ una forma hermitiana. $\bar{u} = \phi(e,e) \in A_\circ$. Entonces ϕ es regular si sólo si u es una unidad en $A_\circ$.

La forma ϕ se denota con $< u >$. Si $\{e'\}$ es otra base de L, entonces $e' = t\, e$, con t unidad en A.

Luego $\quad u' = \phi(e',e') = t\bar{t}\phi(e,e) = N(t)u.$

En consecuencia

$$< u > = < u' > = < u\, N(t) > \quad \forall \; t \text{ unidad en A.}$$

1.3 PROPIEDADES BASICAS

Se expone en esta sección las principales propiedades de módulos hermitianos con el propósito de definir el anillo de Witt hermitiano.

La suma ortogonal de dos módulos hermitianos (P_1,ϕ_1) y (P_2,ϕ_2), es por definición:

$$(P_1,\ \phi_1) \perp (P_2,\ \phi_2) = (P_1 \oplus P_2,\ \phi_1 + \phi_2)$$

donde

$$(\phi_1 + \phi_2)(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) = \phi_1(x_1,y_1) + \phi(x_2,y_2)$$

$$x_1,y_1 \in P_1,\ x_2,y_2 \in P_2$$

Dado (U,φ) arbitrario, $M(U) = (U \oplus U^*,\ \psi)$,

$$\psi(x + f,\ y + g) = \varphi(x,y) + g(x) + \overline{f(y)}\ ,$$

es un módulo hermitiano.

Lema 1.3.1.

Para todo (U,φ), M(U) es regular.

Demostración.

M(U) será regular si logramos probar que

$$d_\psi : U \oplus U^* \Longrightarrow (U \oplus U^*)^* \simeq U^* \oplus U^{**}$$

es un isomorfismo.

$$[d_\psi(u + f)](v + g) = \psi(v + g, u + f)$$
$$= \varphi(v,u) + f(v) + \overline{g(u)}$$

Por otro lado

$$[d_\varphi(u) + f + \alpha_U(u)](v + g) = \varphi(v,u) + f(v) + \overline{g(u)}$$

Luego

$$d_\psi(u + f) = d_\varphi(u) + f + \alpha_U(u) .$$

Fórmula que permite verificar que d_ψ es un isomorfismo //.

Definición.

Un módulo hermitiano (P,ϕ) se llama metabólico si es isométrico a algún $M(U)$.

Si $\varphi = 0$, $M(U)$ se llama módulo hiperbólico. En este caso, $\psi(x + f, y + g) = g(x) + \overline{f(y)}, \ \forall\, x,y \in U,\ f,g \in U^*$.

Los módulos metabólicos en formas hermitianas desempeñan el mismo rol que los mósulos hiperbólicos en formas cuadráticas.

Un submódulo $P_1 \subset P$ es un submódulo de (P,ϕ) si P_1 es sumando directo de P.

La siguiente proposición es una caracterización de los módulos metabólicos.

Lema 1.3.2.

Un espacio regular (P, ϕ) es metabólico si sólo si existe un subespacio $V \subset P$ tal que $V^\perp = V$

$$(V^\perp = \{ x \in P \ / \ \phi(x,y) = 0 \ \ \forall\, y \in V \})$$

Demostración.

($\Rightarrow$) supongamos $(P,\phi) = M(U) = (U \oplus U^*, \psi)$

Entonces $V = U^*$ verifica:

$$V^{\perp} = \{ (x,f) \in P \ / \ \psi((x,f), U^*) = 0 \}$$

$$= \{ (x,f) \in P \ / \ \varphi(x,0) + g(x) + f(0) = 0 \ \forall g \in U^* \}$$

$$= \{ (x,f) \in P \ / \ g(x) = 0 \ \ \forall g \in U^* \}$$

$$= \{ (0,f) \ / \ f \in P \} \ , \quad \text{por } 0.2.1$$

$$= U^* = V \ .$$

($\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que $P = U \oplus V$ y

$V^{\perp} = V$.

Sea $\theta : V \to U^*$, donde, $\theta(v) = d_{\phi}(v)/U$.

θ es un isomorfismo. En efecto:

La inyectividad es inmediata. Para ver que es sobreyectiva, tomemos un $f \in U^*$ y sea $\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{en } U \\ 0 & \text{en } V \end{cases}$, entonces $\tilde{f} \in P^*$. Como d_{ϕ} es regular, existe $u + v \in P$ tal que $d_{\phi}(u + v) = \tilde{f}$. Se ve en seguida que $u = 0$. Luego $\theta(v) = d_{\phi}(v)/U = f$.

El isomorfismo θ permite definir la aplicación

$$\varphi : U \oplus V \to M(U) , \qquad \varphi(u + v) = u + d_{\phi}(v)/U ,$$

que es una isometría. Esto prueba que (P,ϕ) es metabólico//.

Proposición 1.3.3.

Si (U,ϕ) es regular, entonces $M(U) \simeq U \perp - U$

Demostración.

Como d_ϕ es un isomorfismo (por hipótesis) todo $x \in M(U)$ se escribe en forma única como $x = u + d_\phi(v)$, $u,v \in U$.

Esto permite definir $\theta: M(U) \longrightarrow U \perp - U$

$$u + d_\phi(v) \longrightarrow (u + v, v)$$

que es una isometría. En efecto:

$$(\phi \perp - \phi)\left[(u + v,v), (u' + v',v')\right] = \phi(u + v,u' + v') - \phi(v,v')$$

$$= \phi(u,u') + \phi(u,v') + \phi(v,u')$$

Por otro lado

$$\psi(u + d_\phi(v), u' + d_\phi(v')) = \phi(u,u') + \phi(u,v') + \phi(v,u') .$$

Luego $\psi \simeq \phi \perp - \phi$ //.

Proposición 1.3.4.

Si $U = U_1 \oplus U_2$, entonces $M(U_1 \oplus U_2) \simeq M(U_1) \perp M(U_2)$.

Demostración.

Por el isomorfismo natural $(U_1 \oplus U_2)^* \simeq U_1^* \oplus U_2^*$. Puede escribirse:

$M(U) = (U_1 + U_2 + U_1^* + U_2^*, \psi)$, donde

$$\psi(u_1 + u_2 + f_1 + f_2, v_1 + v_2 + g_1 + g_2) =$$

$$\phi(u_1 + u_2, v_1 + v_2) + g_1(u_1) + g_2(u_2) + \overline{f_1(v_1)} + \overline{f_2(v_2)} .$$

Por otro lado, sea

$$\theta: U_2 \to U_1^* \ , \ (\theta(u_2))(u_1) = \phi(u_1, u_2) \ .$$

Entonces

$$M(U_1) \perp M(U_2) \xrightarrow{\varphi} M(U), \text{ definida por:}$$

$$(u_1 + f_1) \perp (u_2 + f_2) \xrightarrow{\varphi} u_1 + u_2 + (f_1 - \theta(u_2)) + f_2$$

es una isometría, como se comprueba inmediatamente.//

El producto tensorial de dos módulos hermitianos (P_1,ϕ_1) y (P_2, ϕ_2) se define como:

$$(P_1,\phi_1) \otimes (P_2,\phi_2) = (P_1 \otimes P_2, \ \phi_1 \otimes \phi_2)$$

$$[\phi_1 \otimes \phi_2](x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = \phi_1(x_1,y_1)\cdot\phi_2(x_2,y_2)$$

$$y_1, x_1 \in P_1 \ , \ x_2, y_2 \in P_2 \ .$$

El producto tensorial es compatible con la relación de i-sometrías de módulos hermitianos. Además el isomorfismo $(P_1 \otimes P_2)^* \simeq P_1^* \otimes P_2^*$, permite afirmar que $d_{\phi_1 \otimes \phi_2} = d_{\phi_1} \otimes d_{\phi_2}$. Luego $P_1 \otimes P_2$ es regular si sólo si cada P_i es regular.

Proposición 1.3.5.

Sea (P,ϕ), regular y (U, φ) cualquiera, entonces

$$P \otimes M(U) \simeq M(P \otimes U)$$

Demostración.

$V = P \otimes U^* \subset P \otimes U \oplus P \otimes U^*$, verifica $V^{\perp} = V$.

Luego por 1.3.2, $P \otimes M(U)$ es metabólico. Más aún por el proceso de prueba de 1.3.2, tomando en consideración

$V = P \otimes U^* \simeq P^* \otimes U^*$ (pues P es regular).

Se tiene:

$$P \otimes M(U) \simeq P \otimes U \oplus (P \otimes U)^* = M(P \otimes U) \;//.$$

1.4 EL ANILLO DE WITT HERMITIANO

Consideremos en esta sección solamente formas hermitianas regulares. Notamos en primer lugar que la isometría ($\simeq$), definida en formas hermitianas es una relación de equivalencia, compatible con la suma ortogonal,y el producto tensorial. Sea $\mathcal{H}(A,J)$ el conjunto total de clases de isometría de formas hermitianas. $\mathcal{H}(A,J)$ con la operación $\perp$ (suma ortogonal), es un semigrupo.

Por otro lado diremos que dos módulos hermitianos (P_1,ϕ_1) y (P_2,ϕ_2) son <u>equivalentes</u> ($\sim$) si existen módulos metabólicos $M(U_1)$ y $M(U_2)$ tal que

$$P_1 \perp M(U_1) \simeq P_2 \perp M(U_2)$$

En este caso denotaremos también con $P_1 \sim P_2$ o $\phi_1 \sim \phi_2$.

La relación "$\sim$" es de equivalencia en virtud de 1.3.4. y además compatible con la isometría ($\simeq$). Lo que permite considerar a "$\sim$" como una relación sobre $\mathcal{H}(A,J)$.

El conjunto $W(A,J) = \dfrac{\mathcal{H}(A,J)}{\sim}$ es un grupo, pues el "cero" lo forma la clase de equivalencia de los espacios metabólicos y el opuesto de (P,ϕ) es $(P,-\phi)$ en virtud de 1.3.3. Además el producto tensorial es compatible con la relación de equivalencia "$\sim$", en virtud de 1.3.5. Luego el producto tenso -

rial induce un producto sobre $W(A,J)$, compatible con la suma ($\perp$), de modo que $W(A,J)$ en un anillo conmutativo con unidad ($1 = (A,\varphi)$, $\varphi(a,b) = a\bar{b}$), llamado el <u>anillo de Witt hermitiano</u>. Hemos probado así el teorema.

Teorema 1.4.1.

Con las hipótesis y operaciones precedentes, $W(A,J)$ es un anillo conmutativo con unidad. //

Antes de exponer algunos ejemplos conviene tratar la diagonalización de módulos hermitianos.

1.5 BASE ORTOGONAL SOBRE UN CUERPO

En esta sección se probará que un espacio hermitiano sobre un cuerpo, admite una base ortogonal independiente de la característica de este.

Lema 1.5

Sea (P,ϕ) un módulo hermitiano y P_1 un submódulo de P tal que $(P_1,\phi/P_1)$ es regular, entonces P_1 es un submódulo de (P,ϕ) y $P = P_1 \perp P_1^{\perp}$.

Demostración

Sean $P_1^{\perp} = \{ x \in P \,/\, \phi(x,P_1) = 0 \}$ y $\phi_1 = \phi/P_1$

Si $y \in P_1 \cap P_1^{\perp}$, entonces $\phi_1(y,P_1) = 0$

Como $y \in P_1$ y ϕ_1 es regular, entonces $y = 0$

Luego $P_1 \cap P_1^{\perp} = 0$.

Por otro lado, para cada $x \in P$, definimos

$$\phi_x : P_1 \to A \text{ , por: } \phi_x(y) = \phi(y,x) \ \forall\ y \in P_1$$

$\phi_x \in P_1^*$, y como (P_1, ϕ_1) es regular, existe $z \in P_1$, tal que $d_\phi(z) = \phi_x$. De donde, $\phi(y,z) = \phi(y,x) \ \forall\ y \in P_1$.

Entonces $x - z \in P_1^\perp$.

Así, $x = z + x - z \in P_1 \perp P_1^\perp$

Además, como $\phi = \phi_1 + \phi_1'$, $(\phi_1' = \phi/P_1^\perp)$, se tiene

$$P = P_1 \perp P_1^\perp \quad //$$

Dado (L,ϕ), donde L es libre; se dice que una base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es ortogonal para (L,ϕ) si $\phi(e_i,e_j) = 0$ $\forall\ i \neq j$.

Proposición 1.5

Si A es un cuerpo, entonces toda forma hermitiana regular admite una base ortogonal.

Demostración.

La demostración se hará en varios pasos.

i) Existe $c \in A$, tal que $c + \bar{c} \neq 0$. En efecto:

Si $C(A) \neq 2$, (característica), $c = 1$, verifica lo pedido

Si $C(A) = 2$, $c \in A - A_0$ verifica $c + \bar{c} \neq 0$

ii) Sea (P,ϕ) una forma regular. Entonces existe $x_1 \in P$ tal $\phi(x_1,x_1) \neq 0$

En efecto: Dado $x_o \in P$, $x_o \neq 0$, existe $f \in P^*$ tal que $f(x_o) = c$

Como $d_\phi : P \to P^*$ es un isomorfismo, existe $y_o \in P$ tal que $d_\phi(y_o) = f$, Luego $\phi(x_o, y_o) = [d_\phi(y_o)](x_o) = f(x_o) = c$ y por tanto: $\phi(x_o, y_o) + \phi(y_o, x_o) = c + \bar{c} \neq 0$

Ahora bien, si suponemos que $\phi(x,x) = 0 \ \forall\, x \in P$, en - tonces $\phi(x + y, x + y) = 0 \ \forall\, x, y \in P$

De donde $\phi(x,y) + \phi(y,x) = 0 \ \forall\, x, y \in P$ y en particu- lar $\phi(x_o, y_o) + \phi(y_o, x_o) = 0$

Lo cual es falso. Luego existe $x_1 \in P$ tal que $\phi(x_1, x_1) \neq 0$

iii) Por 1.5.1, se tiene $P = (Ax_1) \oplus (Ax_1)^\perp$

Como $(Ax_1)^\perp$ es regular, aplicando inducción sobre la dimensión de P se tiene la proposición.//

Si $x_1, \ldots, x_n$ es una base ortogonal de una forma regular (P,ϕ); la descomposición $P = Ax_1 \perp \ldots \perp Ax_n$, usualmente se denota con:

$\phi = < u_1, \ldots, u_n > = < u_1 > \perp \ldots \perp < u_n >$, donde

$u_i = \phi(x_i, x_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Un módulo hermitiano posee base ortogonal en situaciones mas generales, como se verá en el próximo capítulo.

1.6 EJEMPLOS

Si un representante ϕ de un elemento de $W(A,J)$, tiene una base que la diagonaliza, entonces

$$\phi = < u_1, \ldots, u_n >$$

$$= < u_1 > \perp \ldots \perp < u_n > , \; u_j \in A_o \text{ unidad}, \; j = 1, \ldots, n.$$

Conviene por tanto, estudiar una forma de dimensión uno, digamos (Ae,ϕ), $\phi(e,e) = u$, u unid l de A_o.

Si e' es otra base de Ae, entonces e' = te, con t una unidad en A y $\phi(e',e') = u'$. Luego $u' = t\bar{t}u$. Pero como $< u > = < u' >$ resulta $< u > = < N(t)u >$

Lo que significa que las normas N(t) puedan suprimirse en la representación diagonal de las formas hermitianas (en formas cuadráticas se suprimen los cuadrados:

$< u > = < a^2u >$, $a \neq 0)$.

Ejemplo 1.6.1.

Sea $A = \mathbb{C}$, $A_o = R$ y la involución es el conjugado complejo, si $a \in R$, $a \neq 0 \longrightarrow N(a) = a^2$

$$\text{Como} \quad a = \begin{cases} N(\sqrt{a}) & \text{si} \quad a > 0 \\ -N(\sqrt{-a}) & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad < a > = \begin{cases} < 1 > & \text{si} \quad a > 0 \\ < -1 > & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

Como toda forma hermitiana regular ϕ tiene la forma

$$\phi = < a_1, \ldots, a_n > , \; a_j \in R - \{0\}$$

resulta $\phi = < \pm 1 > \perp , \ldots , \perp < \pm 1 >$

Cancelando los planos hiperbólicos se tiene

$$\phi \sim r < 1 > 0 \; r < -1 > \quad \text{con} \quad r \leqslant n \; .$$

Aplicando los mismos argumentos que para formas cuadráticas sobre R, se tiene $W(C\ J) \simeq Z$.

Ejemplo 1.6.2.

Sea K un cuerpo finito de característica $p \neq 2$, $F \subset K$ el subcuerpo invariante por la involución.

Como $\overset{\circ}{F} = \overset{\circ}{F}{}^2 \cup s\overset{\circ}{F}{}^2$ con $s \notin \overset{\circ}{F}{}^2$, entonces podemos tomar $K = F(\sqrt{s})$.

Como los cuadrados de F son normas, es suficiente examinar las formas cuadráticas no isótropas.

$0 \; , < 1 > \; , < s > \; , < 1,s >$ Si $P \equiv 1(4)$
(ver [P], pág. 19)
$0 \; , < 1 > \; , <-1 > \; , <1,1 >$ Si $P \equiv 3(4)$

(que son no equivalentes y conforman el anillo de Witt(F)).

Pero $< s > = < N(\sqrt{s})\; s > = < - s^2 > = < - 1 >$.

Como en F todo elemento es suma de dos cuadrados, existen $a,b \in \overset{\circ}{F} \;/\; s = a^2 + b^2$.

Entonces $t = a + \sqrt{s}$, verifica $N(t) = - b^2$

$\Longrightarrow \quad < -1 > = < - b^2 > = < N(t) > = < 1 >$

Luego las únicas formas no equivalentes son: 0 y $< 1 >$

$\Longrightarrow \quad W(K,J) \simeq Z_2$.

Ejemplo 1.6.3.

([K - R - W], pág. 1.6) .

Sea $A = A_0 \times A_0$, donde A_0 es un anillo conmutativo con unidad y $J(a,b) = (b,a)$.

Sea (P,ϕ) un A- módulo hermitiano regular, entonces

$$P = e_1P \oplus e_2P \ , \text{ donde } \ e_1 = (1,0)\,,\ e_2 = (0,1)\ .$$

Como $\phi(e_1x,e_1y) = e_1e_2\phi(x,y) = 0 \quad \forall\ x,y \in P$ resulta $e_1P \subset (e_1P)^{\perp}$. Sea $e_1x + e_2y \in (e_1P)^{\perp}$

$\Longrightarrow \quad \phi(e_1z,e_1x + e_2y) = 0 \quad \forall \quad z \in P$.

$\Longrightarrow \quad \phi(e_1z,\ e_2y) = 0$

O sea $\phi(z,e_2y) = 0 \quad \forall\ z \in P$

$\Longrightarrow$ $e_2y = 0$, pues ϕ es regular

Luego $(e_1P)^{\perp} = e_1P$.

Esto prueba que (P,ϕ) es metabólico, por 1.3.2. En conclusión, todo módulo hermitiano regular es metabólico. Por tanto $W(A,J) = 0$.

C A P I T U L O II

RELACION ENTRE FORMAS HERMITIANAS Y FORMAS CUADRATICAS

Este capítulo está dedicado a establecer las relaciones que existen entre el anillo de Witt hermitiano y el anillo de Witt de formas cuadráticas sobre un anillo semilocal. Como esta relación depende fuertemente de la existencia de elementos $x \in P$ tales que $\phi(x,x) \in A_0$ es una unidad, para ϕ regular, probaremos un caso más general e importante y que es todo módulo hermitiano regular (P,ϕ), sobre un anillo semi - local, admite una base ortogonal.

2.1 BASE ORTOGONAL SOBRE UN ANILLO

Proposición 2.1.1.

Sea $A = A_0 \times A_0$ y $\overline{(a,b)} = (a,b)$. Si (P,ϕ), es regular, entonces $P \simeq (e_1P) \oplus (e_1P)^*$, (donde $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1) \in A$, es decir P es metabólico). Si además e_1P es A_0-libre, entonces (P,ϕ) admite una base ortogonal.

Demostración.

Es claro que $P = e_1P \oplus e_2P$ (suma directa de A_0- módulos).

Como P es A_0- proyectivo, lo son también e_iP, $i = 1,2$.

Sea $d: e_2P \to (e_1P)^*$, $((e_1P)^* = \mathrm{Hom}_{A_0}(e_1P,A_0))$, definida por $[d(e_2y)](e_1x) = \phi(e_1x,e_2y) = e_1\phi(x,y)$, entonces d es un isomorfismo; en efecto:

$d(e_2y) = 0$, implica $\phi(e_1x, e_2y) = 0$, o sea $\phi(x, e_2y) = 0 \;\; \forall\, x \in P$. Como ϕ es regular, se tiene $e_2y = 0$. Esto prueba que d es inyectiva.

Por otro lado, si $f \in (e_1P)^*$, entonces

$$\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{en } e_1P \\ 0 & \text{en } e_2P \end{cases}$$

es un elemento de P^*.

Nuevamente por regularidad de ϕ, existe $y \in P$ tal que

$$\phi(x,y) = f(x) \quad \forall \quad x \in P$$

En particular $\phi(e_1x,y) = f(e_1x) \quad \forall \quad x \in P$

Pero $\phi(e_1x,\, e_1y + e_2y) = \phi(e_1x,\, e_2y)$,

entonces $\phi(e_1x,\, e_2y) = f(e_1x) \;\; \forall\, x \in P$.

Luego $d(e_2y) = f$. Esto prueba que d es sobreyectivo, y por lo dicho lineas arriba, d es un isomorfismo de A_o- módulos.

Por otro lado, $e_1P \times (e_1P)^*$ es un A- módulo con la operación producto definida por:

$$(a,b)(e_1x,f) = (ae_1x,bf), \quad \forall\, , \; x \in P,\; f \in (e_1P)^*,\; a,b \in A_o$$

La aplicación $\sigma\colon P \to e_1P \times (e_1P)^*$ dada por

$$\sigma(e_1x + e_2y) = (e_1x,\, d(e_2y))$$

es una isometría entre ϕ y ψ. En efecto: σ es un isomorfismo en virtud de su definición.

Además:

$$\psi(\sigma(e_1x + e_2y), \sigma(e_1u + e_2\sigma)) = \psi((e_1x, d(e_2y)), (e_1u, d(e_2v))$$

$$= \phi(e_1x, e_2v) + \phi(e_1u, e_2y)$$

$$= \phi(e_1x + e_2y, e_1u + e_2v)$$

Queda así probada que ϕ es metabólico.

Por otra parte, si $x_1, \dots, x_r$ es una A_o- base de e_1P, y si $f_1, \dots, f_r \varepsilon (e_1P)^*$ son tales que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, entonces $\{f_1, \dots, f_r\}$ es una base de $(e_1P)^*$.

Como $A = A_o \times A_o$ opera coordenada a coordenada sobre $e_1P \times (e_1P)^*$, la relación $\sum_{i=1}^{r} (a_i, b_i)(x_i, f_i) = 0$ implica $(\sum_i a_ix_i, \sum_i b_if_i) = 0$, de donde

$a_1 = \dots = a_r = 0$ y $b_1 = \dots = b_r = 0$.

Es decir, los (x_i, f_i) son linealmente independientes. Ahora bién si $(e_1x, f) \varepsilon e_1P \times (e_1P)^*$, entonces

$$(e_1x, f) = (\sum_i a_ix_i, \sum_i b_if_i) = \sum_i (a_i, b_i)(x_i, f_i)$$

finalmente $\psi((x_i, f_i), (x_j, f_j)) = f_j(x_i) + f_i(x_j)$

$$= 0 \quad \forall \quad i \neq j$$

Lo que prueba que $\{(x_i, f_i), \ 1 < i < r\}$ es una base ortogonal de $e_1P \times (e_1P)^*$ //.

Proposición 2.1.2.

Dado (A,J), sea $r(A)$ el Radical de Jacobsonde A. Enton - ces $J(a + r(A)) = \bar{a} + r(A)$, define una involución de $\frac{A}{r(A)}$.

Demostración.

Solamente haca falta probar la buena definición de J .

En primer término es verdadero que $a \in r(A) \Longleftrightarrow \bar{a} \in r(A)$

En efecto:

$$\begin{aligned} a \in r(A) &\Longleftrightarrow 1 - ab \text{ es unidad } \forall\, b \in A \\ &\Longleftrightarrow 1 - \bar{a}c \text{ es unidad } \forall\, c \in A\,(c = \bar{b}) \\ &\Longleftrightarrow \bar{a} \in r(A)\,. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $a + r(A) = b + r(A)$, entonces $a - b \in r(A)$, de donde $\bar{a} - \bar{b} \in r(A)$.

Luego, $\bar{a} + r(A) = \bar{b} + r(A)$ //.

Sea $\pi\colon A \to \frac{A}{r(A)}$ la aplicación canónica, y si (P,ϕ) es una (A,J)- forma, entonces denotamos también con $\pi\colon P \longrightarrow \frac{P}{r(A)P}$, la aplicación canónica correspondiente. En estas condiciones

$\phi\colon \frac{P}{r(A)P} \times \frac{P}{r(A)P} \longrightarrow \frac{A}{r(A)}$, definida por

$\phi(\pi(x); \pi(y)) = \pi\phi(x,y)\ \forall\, x,y \in P$, es una

$(\frac{A}{r(A)}, J)$- forma hermitiana.

Definición.

Un morfismo f entre (A,J) y (A',J'), es un homomorfismo $f: A \to A'$ tal que $J' \circ f = f \circ J$.

Proposición 2.1.3.

([K - R - W] , Lema 1.11). Con las notaciones precedentes, sea ϕ una forma hermitiana regular, entonces:

i) ϕ es regular

ii) Si $\{z_1, \ldots, z_n\}$ es una base ortogonal de $(\pi(P), \phi)$, entonces existe una base ortogonal $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de (P, ϕ) tal que $\pi(x_i) = z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración.

i) Resulta del isomorfismo $\frac{A}{r(A)} \otimes_A P^* \simeq \left(\frac{A}{r(A)} \otimes_A P\right)^*$ (proposición 0.2.4) y de la regularidad de (P, ϕ).

ii) Sea $x_1 \in P$ tal que $\pi(x_1) = z_1$, entonces

$\pi\phi(x_1, x_1) = \phi(\pi(x_1), \phi(x_1)) = \phi(z_1, z_1)$, es una unidad, por tanto $\phi(x_1, x_1)$ es una unidad. Como cada $x \in P$, puede escribirse en la forma

$$x = \frac{\phi(x, x_1)}{\phi(x_1, x_1)} x_1 + x - \frac{\phi(x, x_1)}{\phi(x_1, x_1)} x_1 \in Ax_1 \oplus (Ax_1)^{\perp}$$

Se tiene $P = Ax_1 \oplus (Ax_1)^{\perp}$

Aplicando π, $\pi(P) = \frac{A}{r(A)} z_1 \oplus \pi\left[(Ax_1)^{\perp}\right]$

Pero $\pi((Ax_1)^{\perp}) = \frac{A}{r(A)} z_2 \perp \ldots\ldots \perp \frac{A}{r(A)} z_n$, Luego razonando por inducción sobre n, se tiene la proposición //.

Proposición 2.1.4.

(Comparar con Lema 1.12, [K - R - W]) .

Dado (A J), donde A es semi-local. Todo módulo hermitiano regular (P,ϕ) posee base ortogonal. En particular P es libre.

Demostración.

Por 2.1.3, es suficiente realizar la prueba cuando $r(A) = 0$.

Sean $M_1,\ldots,M_r$, todos los ideales maximales de A. Por un corolario del Teorema Chino del Resto, se tiene

$$A \cong \frac{A}{M_1} \times \ldots\ldots \times \frac{A}{M_r}$$

Ahora bien $J(M_i)$ es un ideal maximal de A y por tanto se presentan dos alternativas:

$$J(M_i) = M_i \quad ó \quad J(M_i) = M_j,\ i \neq j$$

Si $J(M_i) = M_i$, $\frac{A}{M_i}$ es un cuerpo con involución inducida por J.

Si $J(M_i) = M_j$, $i \neq j$. $\tilde{J} : \frac{A}{M_i} \to \frac{A}{M_j}$,

$\tilde{J}(a + M_i) = \bar{a} + M_j$ es un isomorfismo que permite

identificar $\frac{A}{M_i} = \frac{A}{M_j} = K$ (K = un cuerpo).

J induce sobre K x K la involución: $\bar{J}(u,v) = (v,u)$ $\forall\, u,v \in K$. Lo que se ve del siguiente modo:

Dado $(a + M_i, b + M_j)$, sea $c \in A$ tal que $c - a \in M_i$ y $c - b \in M_j$, entonces $\bar{c} - \bar{a} \in M_j$ y $\bar{c} - \bar{b} \in M_i$

Luego $\bar{J}(a + M_i, b + M_j) = (\bar{b} + M_i, \bar{a} + M_j)$. Pero por la identificación de $\frac{A}{M_i}$ con $\frac{A}{M_j}$, se tiene

$\bar{J}(a + M_i, b + M_j) = (b + M_j, a + M_i)$

Agrupando convenientemente se p ede escribir

$(A,J) \cong (A_1,J_1)x\ldots\ldots x(A_s,J_s)x,\ldots,x(A_t,J_t)$, $t < r$

donde A_i, $i = 1,\ldots, s$ es un cuerpo con involución

A_{s+j}, $j = 1,\ldots, t - s$, es de la forma K x K, donde K es un cuerpo y su involución $\overline{(a,b)} = (b,a)$.

Si (P,ϕ) es una (A,J)- forma hermitiana regular y e_i la identidad de A_i, $i = 1,\ldots, t$. $(1 = e_1 + \ldots + e_t)$, denotando $P_i = e_iP$ y $\phi_i = \phi/P_i$, se tiene

$$(P,\phi) \cong (P_1,\phi_1) \perp,\ldots, \perp (P_t, \phi_t)$$

En donde (P_i,ϕ_i) es una (A_i,J_i)- forma hermitiana regular, el isomorfismo es de A- módulos (pues $A \cong A_1x,\ldots x A_t$ opera componente a componente sobre $P \cong P_1x,\ldots,x P_t)$.

Por (1.5.2), (P_i, ϕ_i), $i = 1,\dots, s$, admite una base ortogonal, pues A_i es un cuerpo y, por (2.1.1), (P_{s+j},ϕ_{s+j}), $j = 1,\dots, t-s$ posee una base ortogonal, pues A_{s+j} es de la forma $K \times K$, donde K es un cuerpo.

La colección de todas estas bases es una base ortogonal de (P,ϕ). //

2.2 RELACION ENTRE FORMAS HERMITIANAS Y FORMAS CUADRATICAS

Dado un (A.J)- módulo (P,ϕ), existe asociado a este, una A_0- forma cuadrática $q_\phi(x) = \phi(x,x)$ $\forall$ $x \in P$, cuya bilineal es $B_\phi(x,y) = \phi(x,y) + \phi(y,x)$ $\forall$ $x,y \in P$

(B_ϕ es A_0- bilineal).

Cuando A es un cuerpo con involución, un resultado de Jacobson ([M - J], pág. 115) establece que dos formas hermitianas regulares ϕ y ϕ' son isométricas si y sólo si sus correspondientes formas cuadráticas q_ϕ y q_{ϕ}, son isométricas. Establecemos en seguida un resultado similar para anillos semi-locales.

Proposición 2.2.1.

Sea A un anillo semi local. (P,ϕ) y (P',ϕ') dos (A,J)- formas hermitianas regulares, entonces

$$\phi \cong \phi' \iff q_\phi \cong q_{\phi'}$$

Demostración.

Si $\phi \overset{\sim}{=} \phi'$, entonces es obvio que $q_\phi \overset{\sim}{=} q_{\phi'}$.

Recíprocamente.

Sea $\sigma: P \to P'$ una A_o- isometría entre q_ϕ y $q_{\phi'}$, es decir $q_{\phi'}(\sigma(x)) = q_\phi(x) \quad \forall\, x \in P$

Existe $x_1 \in P$ tal que $\phi(x_1,x_1) = q_\phi(x_1) = u_1$ es una unidad de A_o (por 2.1.4, P posee base ortogonal).

Sea $y_1 = \sigma(x_1) \in P'$, entonces

$$\phi'(y_1,y_1) = \phi(x_1,x_1) = u_1$$

Por 4.1, $P = Ax_1 \perp (Ax_1)^\perp$ y $P' = Ay_1 \perp (Ay_1)^\perp$

Se ve en seguida que σ restringido a $(Ax_1)^\perp$ induce una isometría entre $(Ax_1)^\perp$ y $(Ay_1)^\perp$ como formas cuadráticas. Razonando por inducción sobre el rango de P (P es libre y de tipo finito por 2.1.4) podemos asumir que $(Ax_1)^\perp \overset{\sim}{=} (Ay_1)^\perp$ como espacios hermitianos, además, $(Ax_1)^\perp$ y $(Ay_1)^\perp$ son regulares.

Por otro lado $\phi: Ax_1 \to Ay_1$, $\phi(ax_1) = ay_1 \;\forall\, a \in A$, es una isometría de espacios hermitianas. En consecuencia

$$Ax_1 \perp (Ax_1)^\perp \overset{\sim}{=} Ay_1 \perp (Ay_1)^\perp$$

Como espacios hermitianos.

Luego $\phi \overset{\sim}{=} \phi'$ //.

La asignación $\phi \rightarrow q_\phi$ que hace corresponder a cada forma hermitiana ϕ su forma cuadrática asociada, es una función definida en las (A,J)- formas hermitianas,y con valores en las A_o- formas cuadráticas. Cuando A es semi-local (mas aún si es un cuerpo o un anillo local) esta asignación precerva las clases de isometría (Proposición 2.?.1). Luego también respeta la equivalencia "$\sim$". Esto significa que existe una función $\varepsilon: W(A,J) \rightarrow W_q(A_o)$ del anillo de Witt hermitiano de (A,J), en el anillo de Witt cuadrático de A_o. ε es aditiva e inyectiva (2.2.1) y no es un homomorfismo de anillos, pues el "1" ($= < 1 >$) de $W(A,J)$, es enviado en el "2" ($= < 1,1 >$) de $W_q(A_o)$. Pero en cambio ε es un homomorfismo de $W(A_o)$- módulos, donde $W(A_o)$ es el anillo de Witt de las A_o- formas bilineales simétricas. Esta última afirmación requiere algo mas de explicación.

Si (V,B) es un A_o- módulo bilineal simétrico y (P,ϕ) es un (A,J)- módulo hermitiano, entonces $(V \otimes_{A_o} P)$ es un A- módulo, con el producto

$$a(v \otimes x) = v \otimes ax \quad \forall\, a \in A,\ v \in V\ ,\ x \in P\ .$$

Además $(V \otimes_{A_o} P,\ B \otimes \phi)$ es un (A,J)- módulo hermitiano, donde

$(B \otimes \phi)\left[(v \otimes x,\ v' \otimes x')\right] = B(v,v')\phi(x,x')$, que es regular cuando B y ϕ son regulares.

Luego, la operación

$$(V,B).(P,\phi) = (V \otimes_{A_0} P \ , \ B \otimes \phi)$$

define una estructura de $W(A_0)$- módulo sobre el grupo aditivo $W(A,J)$.

Análogamente, si (Q,q) es un A_0- espacio cuadrático, el producto

$$(V,B).(Q,q) = (V \otimes_{A_0} Q, \ B \otimes q)$$

$$(B \otimes q)(v \otimes x) = B(v,v)q(x), \ v \in V \ , \ x \in P$$

define una estructura de $W(A_0)$- módulo sobre $W_q(A_0)$. Hemos probado así la

Proposición 2.2.2.

Cuando A es semi-local, la aplicación natural,

$$W(A,J) \xrightarrow{\varepsilon} W_q(A_0)$$

es un monomorfismo de $W(A)$- módulos.//

Es interesante observar que la inyectividad de ε, más aún, su existencia, no puede garantizarse si A no es un anillo semi-local. Veamos el siguiente

Ejemplo 2.2.3.

Sea d un entero libre de cuadrados y de la forma $d = u^2 + 1$, $u \in Z$.

$Z[\sqrt{d}]$ es un anillo con involución

$\overline{a + b\sqrt{d}} = a - b\sqrt{d}$, $a,b \in Z$

Si suponemos que existe ε:

$$W(Z[\sqrt{d}], J) \xrightarrow{\varepsilon} W_q(Z) \simeq Z$$

$$[\phi] \rightarrow [q_\phi]$$

Tomemos $t = u + \sqrt{d} \in Z[\sqrt{d}]$, t es una unidad y verifica $N(t) = u^2 - d = -1$

Luego $< 1 > = < N(t) > = < -1 >$.

Es decir $< 1 > + < 1 > = 0$ en $W(Z,[\sqrt{d}],J)$

Pero la imagen mediante ε sería:

$$\varepsilon(< 1,1 >) \simeq < 1,1,1,1 > \neq 0 \quad \text{en} \quad W_q(z)$$

Lo que significa que en este caso la función ε no existe.

B I B L I O G R A F I A

[B]. R. Baeza. "Quadratic Forms Over semi-local Rings" Lecture Notes in Mathematics, No. 655.

[Ba]. H. Bass. "Lectures on Topics in Algebraic K-theory" Tata Institute of Fundamental Resoorch, Bombay, 1967.

[Bo]. M. Bourbaki. Algebra, Chapitre IX. "Formes Sesquili - neaires et Formes Quadratiques", Hermann, 1959.

[F]. A. Frolliech. "Hermitian and Quadratic Forms over ring with involution". Quart. J. Math Oxford sec (2), 20 (1969), 297 - 317.

[K - R - W]. K - Knebusch, A. Rosenberg y R. Ware. "Hermitian Forms Over semi-local rings". 1973. Notas mimeografiadas.

[L]. T. Y. Lam. "The Algebraic Theory of. Quadratic Forms". Benjamin, N. Y., 1973.

[M - H]. J. Milnor, D. Husemoller. "Symmatric Bilinear Forms". Springer, Berlin- Heidelberg, N., Y. (1973).

[P]. M. Piscoya. Estructuras Algebraicas VI, (Formas cuadráticas). Monografía No. 23, Serie de Matemática. OEA. W. D.C (1981).