Propiedades topológicas y geométricas de las órbitas de similaridad

Stojanoff, Demetrio

1989

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD de BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROPIEDADES TOPOLOGICAS Y GEOMETRICAS DE LAS ORBITAS DE SIMILARIDAD

POR

DEMETRIO STOJANOFF

DIRECTOR DE TESIS

DR. GUSTAVO CORACH

LUGAR DE TRABAJO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TITULO DE

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

1989

INTRODUCCION.

El propósito principal de este trabajo es caracterizar los operadores en $L(H)$, para H un espacio de Hilbert complejo separable, tales que su órbita de similaridad, $S(T)$, es subvariedad analítica (que son aquellos cuya órbita tiene una estructura diferenciable de cualquier tipo). Esto ocurre siempre, cuando $H = \mathbf{C}^n$, pero otro es el caso cuando $\dim H = \infty$. En el Teorema 8.11 se demuestra que tales operadores son exactamente los que son similares a un operador de tipo "nice Jordan"(ver definiciones 2.1). Esta clase fue estudiada por Fialkow y Herrero en [6], [14] y [15], y están caracterizados como la clase de operadores $T \in L(H)$ tales que la aplicación

$$\pi_T : G(H) \to S(T) \quad ; \quad \pi_T(U) = UTU^{-1} \ , \ U \in G(H)$$

tiene secciones locales continuas ([6, Teorema 16.1]).
Otro problema tratado en el presente trabajo es el de averiguar los puntos de continuidad de la aplicación φ, definida asignando a cada operador nilpotente de orden n en $L(H)$, el sistema de proyectores asociado a su descomposición canónica (ver 1.12 y 4.1):

$$\varphi : N_n(H) \to P_(H) \quad ;$$

$$\varphi(T) = (P_{\ker T}, P_{\ker T^2 \ominus \ker T}, \dots, P_{(\ker T^{n-1})^{\perp}}).$$

En el teorema 5.5 se demuestra que el conjunto de puntos de continuidad de φ es la unión de las órbitas de similaridad de los operadores $q_j \oplus q_n^{(\infty)}$, para $0 \leq j \leq n-1$, que es un subconjunto abierto y denso de $N_n(H)$.
La aplicación φ se utiliza más adelante para obtener, en forma explícita, secciones locales $\mathbf{C}^\infty$ para π_T, cuando T es un nilpotente nice Jordan (Proposición 9.8).
El método de pasar de una órbita (unitaria o de similaridad) de uno o varios operadores a los sistemas de proyectores, mediante una aplicación similar a φ, ha demostrdo su utilidad, sobre todo para el cálculo explícito de secciones locales, levantadas de curvas y funciones en general, que permiten obtener mayor información acerca de la órbita en cuestión (ver, por ejemplo, los resultados de [1] para órbitas de varios operadores o [3] y [4] para órbitas unitarias).
Los trabajos de Corach, Porta y Recht sobre geometría en los conjuntos de ceros de un polinomio de raíces simples en un álgebra de Banach, a través de la identificación con los sistemas de idempotentes y de proyectores, y, particularmente, sobre la geometría de estos

sistemas, sugiere el estudio, al menos en $L(H)$, de los operadores algebraicos cuyo polinomio minimal tiene raíces múltiples. Este estudio se reduce, esencialmente, a los operadores nilpotentes, que se relacionan con los sistemas de proyectores a través de la aplicación φ.
Por otra parte, los resultados de Fialkow y Herrero sobre propiedades topológicas de las órbias de similaridad de operadores nilpotentes, dan el contexto natural para el estudio de las propiedades geométricas de dichos operadores.

El presente trabajo está dividido en nueve secciones. En la segunda y la séptima aparecen, en su mayoría con demostración, resultados conocidos anteriormente. Muchos de ellos tienen cambios, en los enunciados o las demostraciones, para adecuarlos a su utilización posterior. La gran excepción es el Teorema 7.12, ya que una demostración completa ocuparía la misma extensión que el resto del trabajo.
En la sección 2. se incluyen resultados sobre las propiedades de los operadores nilpotentes de tipo "Jordan" y "nice Jordan", necesarios para las tres secciones siguientes.
En la seccion 3. se define una forma de ortogonalización de sistemas de idempotentes (la función de Gram-Schmidt , GS_n) que permite definir una acción de $G(H)$ sobre los sistemas se proyectores.
En la sección 4. se introduce la aplicación φ y se la relaciona con la acción anterior mediante el diagrama conmutativo 4.7 .
En la sección 5. se enfoca el problema de la continuidad de φ, tanto desde el conjunto de nilpotentes de orden n , $N_n(H)$, como desde la órbita de similaridad de un nilpotente dado.
En la sección 6. se estudia el problema análogo, en el álgebra de Calkin. Se define una aplicación $\widetilde{\varphi}$ desde una clase restringida de nilpotentes (con buenas propiedades especrtales), ya que no puede definirse, en forma consistente, desde $N_n(A(H))$. Se calculan, además, los puntos de continuidad de $\widetilde{\varphi}$.
En la sección 7. se incluyen una serie de resultados (en su mayoría de Fialkow y Herrero) que conducen al Teorema 7.14, necesario en la sección siguiente.
En la sección 8. se llega a la caracterización de los operadores cuya órbita de similaridad es subvariedad de $L(H)$. Se considera, en principio, el caso nilpotente y luego se generaliza al caso general.
En la sección 9. se estudia la diferenciabilidad de la aplicación φ (cuando es continua es C^∞). Con la ayuda de ella se exhiben expresiones explícitas de secciones para π_T cuando T es un nilpotente nice Jordan. Estas generalizan la fórmula obtenida por Fialkow en [12] para $T = q_n^{(\infty)}$. Se estudia, también, el problema de la continuidad de φ desde las órbitas

de similaridad de nilpotentes en general y, finalmente, se construyen levantadas explícitas para curvas $\mathbf{C}^{\infty}$ con valores en $S(T)$, para T similar a $q_n^{(\infty)}$.

Es mi deseo agradecer especialmente a mi director de tesis, Gustavo Corach, por haberme guiado en estos años, por la ayuda y todas las gauchadas recibidas.
Tambien deseo agradecer a los matemáticos que aportaron ideas, sugerencias y largas conversaciones en este tiempo, en especial a Domingo Herrero, L. Fialkow, L. Recht y, muy especialmente a Esteban Andruchow, sin cuya presencia, muy poco de esto podría haberse hecho. Un agradecimiento final para mi esposa Inés.

1. Preliminares y Notaciones.

(1.1) Sea H un espacio de Hilbert complejo separable y sea $L(H)$ el álgebra de operadores lineales acotados que actúan en H.
Sean $G(H)$, el grupo de operadores inversibles de $L(H)$ y $U(H) = \{U \in G(H) : U^{-1} = U^*\}$ el grupo unitario. Es bien sabido que si $U \in U(H)$, entonces $\forall x \in H$ se verifica que $\|U(x)\| = \|x\|$.

Dada una partición del espacio H en suma directa (no necesariamente ortogonal) de subespacios cerrados $H = M_1 \oplus M_2$ y dados $A \in L(M_1)$ y $B \in L(M_2)$, se llamará $A \oplus B \in L(H)$ al siguiente operador: Dado $x \in H$, sea $x = x_1 + x_2$ con $x_i \in M_i$, $i = 1,2$, entonces

$$A \oplus B(x) = A(x_1) + B(x_2)\,. \tag{1.2}$$

Se definen análogamente sumas directas de varios operadores.
Si M es un subespacio cerrado de H, llamaremos P_M al proyector sobre M, es decir que $P_M^2 = P_M = P_M^*$ y

$$P_M/_M = Id_M \qquad\qquad P_M/_{M^\perp} \equiv 0\,. \tag{1.3}$$

Dados $A, B \in L(H)$, diremos que A es similar a B, y notaremos :

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, U \in G(H) \;:\; A = UBU^{-1} \tag{1.4}$$

y que A es unitariamente equivalente a B : $A \simeq B$, si existe $U \in U(H)$ tal que $A = UBU^*$.

Dado $T \in L(H)$, llamaremos órbita de similaridad de T a

$$S(T) = \{UTU^{-1} : U \in G(H)\} \tag{1.5}$$

y órbita unitaria de T a

$$U(T) = \{UTU^* : U \in U(H)\}\,. \tag{1.6}$$

Llamaremos q_n al operador de $L(\mathbb{C}^n)$ que actúa sobre la base canónica $e_1, \ldots, e_n$ por

$$q_n(e_i) = \begin{cases} 0 & si \quad i = 1 \\ e_{i-1} & si \quad 2 \le i \le n\,, \end{cases} \tag{1.7}$$

usualmente conocido por "celda de Jordan" en $L(\mathbf{C}^n)$.
En el presente trabajo jugará un importante papel, dado $n \in \mathbf{N}$, el operador $q_n^{(\infty)}$ que definiremos a continuación (en realidad, la definición se hará "módulo" equivalencia unitaria): Sea $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una base ortonormal de H. Entonces

$$(1.8) \qquad q_n^{(\infty)}(e_m) = \begin{cases} 0 & si \quad m \equiv 1\,(n) \\ e_{m-1} & si \quad m \not\equiv 1\,(n) \end{cases}$$

donde $m \equiv k\,(n)$ si existe $h \in \mathbf{Z}$ tal que $m - k = n.h$.
Una definición equivalente para $q_n^{(\infty)}$ podría ser :
Sea K un subespacio cerrado de H tal que $H = K^{(n)}$, es decir que existe una isometría suryectiva $V : K^{(n)} \to H$ que pensaremos como una identificación. Es claro, entonces, que las n copias de K en H son ortogonales 2 a 2. Dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in H$, definimos

$$(1.9) \qquad q_n^{(\infty)}(x) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)\ .$$

Dados subespacios cerrados $M, N \subset H$ tales que $N = M^{\perp} = \{x \in H : < x, y >= 0\ \forall y \in M\}$, entonces se sabe que $H = M \oplus M$, pero en este caso escribiremos $H = M \perp N$ (suma directa ortogonal). Análogamente para particiones en varios subespacios ortogonales 2 a 2.
Dada una partición ortogonal de H :

$$H = H_1 \perp H_2 \perp \ldots \perp H_n\ ,$$

se puede representar a los operadores de $L(H)$ como matrices de $n \times n$ de la siguiente manera:
Dado $T \in L(H)$

$$T = (\sum_{i=1}^{n} P_{H_i})T(\sum_{j=1}^{n} P_{H_j}) = \sum_{i,j=1}^{n} P_{H_i} T P_{H_j}\ ,$$

entonces la matriz de T será :

$$(1.10) \qquad T = \begin{pmatrix} T_{11} & & T_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & & T_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{array} \quad ; \quad T_{ij} = P_{H_i} T P_{H_j}\ .$$

Es fácil ver que esta representación es compatible con el producto usual de matrices, es decir, dados $T_1, T_2 \in L(H)$, la matriz de $T_1.T_2$ se consigue "multiplicando", en la forma usual, las matrices de ambos. También se obtienen representaciones matriciales con particiones no

ortogonales, definiendo adecuadamente los idempotentes asociados a la partición.
La descomposición matricial de $q_n^{(\infty)}$ en la partición $H = K^{(n)}$ dada en (1.9) es :

$$(1.11) \qquad q_n^{(\infty)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & I & & & 0 \\ & 0 & I & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & & I \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} K \\ K \\ \vdots \\ \vdots \\ K \end{array}$$

donde $I = Id_K$.
Dado $T \in L(H)$ nilpotente de orden n, es decir, $T^n = 0$, $T^{n-1} \neq 0$, se define la "descomposición canónica"(que abreviaremos DC), como la partición de H :

$$(1.12) \qquad H = H_1 \perp \ldots \perp H_n \quad , \quad H_j = \ker T^j \ominus \ker T^{j-1} \ , \ 1 \leq j \leq n$$

donde, para M, N subespacios de H , $M \ominus N = M \cap N^\perp$. En (1.12) se puede observar que $H_1 = \ker T \ominus \ker T^0 = \ker T$ ya que $T^0 = I$ y $H_n = \ker T^n \ominus \ker T^{n-1} = (\ker T^{n-1})^\perp$ ya que $T^n = 0$.
(1.13) Es fácil ver que, en su DC, la matriz de T es estrictamente triangular superior, ya que, $i \geq j \Rightarrow P_{H_i} T P_{H_j} = 0$. Por ejemplo, la descomposición $H = K^{(n)}$ de (1.9) es la DC de $q_n^{(\infty)}$.
Dado $T \in L(H)$, es bien conocida la descomposición "polar" de T :

$$(1.14) \qquad T = U|T| \quad ; \quad |T| = (T^*T)^{1/2}$$

donde U es una isometría parcial unívocamente definida, si se pone la condición de que $U/_{\ker T} \equiv 0$. (Ver [24], Teorema 12.35).

Proposición 1.15 : Sean $T \in L(H)$, $n \in \mathbf{N}$ y supongamos que $\dim H = \infty$. En tal caso son equivalentes :

1) $T \sim q_n^{(\infty)}$.
2) Existe una partición (no necesariamente ortogonal) $H = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ tal que $\dim M_i = \infty$, $1 \leq i \leq n$, $T(M_1) = \{0\}$ y $TM_j \to M_{j-1}$ es un isomorfismo (es decir, $T(M_j) = (M_{j-1}$), para $j > 1$.

Demostración : 1) $\rightarrow$ 2) Dado $U \in G(H)$ tal que $T = Uq_n^{(\infty)}U^{-1}$, basta tomar $M_j = U(K_j)$, donde K_j es la j-ésima copia de K en la DC de $q_n^{(\infty)}$. Es fácil ver esta partición verifica 2).
2) $\rightarrow$ 1) Sea $H = K^{(n)}$ la DC de $q_n^{(\infty)}$ como en (1.11), entonces $\dim K = \infty$ y, para $1 \leq i \leq n$, existen isomorfismos $U_i : K \rightarrow M_i$ (K y los M_i son espacios de Hilbert de la misma dimensión).
Sea $U \in G(H)$ dado por : $U(x) = U(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n U_i(x_i)$ y sea $Q = U^{-1}TU$. Entonces la matriz de Q en $H = K^{(n)}$ es :

$$Q = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & Q_1 & & 0 & \\ & 0 & Q_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & & Q_{n-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} K \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ K \end{array} \end{array} \quad ; \quad Q_i \in G(K) \, , \, 1 \leq i \leq n-1$$

Sea $V \in G(H)$, dado por su matriz en la misma descomposición :

$$V = \begin{pmatrix} Q_1 \ldots Q_{n-1} & & & \\ & Q_2 \ldots Q_{n-1} & 0 & \\ & & & \\ & 0 & Q_{n-1} & \\ & & & I \end{pmatrix}$$

Por simple cálculo matricial se concluye, usando (1.11), que $V^{-1}QV = q_n^{(\infty)}$ y, por lo tanto,

$$T = (UV)q_n^{(\infty)}(UV)^{-1} \sim q_n^{(\infty)} \quad \bullet$$

2. Nilpotentes Jordan y Nice Jordan.

En esta sección se demostrarán algunas propiedades de ciertos operadores nilpotentes, más precisamente los de tipo "Jordan" y "nice Jordan" que definiremos a continuación :

Definición 2.1 :

1) Llamaremos $N_k(H) = \{Q \in L(H) : Q^k = 0,\ Q^{k-1} \neq 0\}$, al conjunto de los operadores nilpotentes de orden k.
2) Dado $J \in N_k(H)$ diremos que J es "Jordan", si J es unitariamente equivalente a algo de la forma $\bigoplus_{k=1}^{m} q_k^{(\alpha_k)}$, donde $1 \leq m < \infty$, $0 \leq \alpha_k \leq \infty$ y q_k es la celda de Jordan en $L(\mathbb{C}^n)$. (1.8)
3) Dado $J \in L(H)$ diremos que J es "Jordan" (no necesariamente nilpotente), si J es unitariamente equivalente a algo de la forma $\bigoplus_{j=1}^{n}(\lambda_j + Q_j)$, donde $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ son números complejos distintos, $1 \leq n < \infty$ y los Q_i son nilpotentes de Jordan, $1 \leq i \leq n$.
4) Llamaremos $JN_k(H) = \{Q \in N_k(H) : Q$ es similar a un Jordan $\}$ al conjunto de los nilpotentes de orden k similares a nilpotentes Jordan.
5) Diremos que un operador $J \in JN_k(H)$ es "nice Jordan" si en la fórmula $J \simeq \bigoplus_{j=1}^{k} q_j^{(\alpha_j)}$ se verifica que $\alpha_j < \infty$ para todo j, salvo, a lo sumo, para uno solo.
6) Llamaremos $NJN_k(H) = \{T \in JN_k(H) : T \sim J$ con J nice Jordan $\}$.
7) Dado $J \in L(H)$ diremos que J es "nice Jordan" (no necesariamente nilpotente) si es Jordan y en la fórmula $J \simeq \bigoplus_{j=1}^{n}(\lambda_j + Q_j)$, se verifica que los Q_j son nilpotentes nice Jordan.

Lema 2.2 : Sea $Q \in N_k(H)$. Supongamos que $M \subset H$ es un subespacio cerrado estable por Q tal que $Q/M \sim q_k^{(\alpha)}$ para $1 \leq \alpha \leq \infty$, entonces existe un suplemento N de M , cerrado y estable por Q , es decir $N \oplus M = H$ y $Q(N) \subset N$.

Demostración: Sea $M_j = M \cap \ker Q^j$. Construiremos inductivamente subespacios N_j con las siguientes propiedades:

1) $N_j \cap M_j = \{0\}$.
2) $N_j + M_j = \ker Q^j$.
3) $Q(N_j) \subset N_j$.

4) $N_j \subset M_1^\perp$.

Para $j = 1$ tomamos $N_1 = \ker Q \ominus M_1$, claramente N_1 verifica 1, 2, 3 y 4. Supongamos ahora que tenemos definido N_j para cierto $j < k$, entonces

$$Q^{-1}(N_j) \cap M = M \cap \ker Q = M_1$$

ya que si $x \in Q^{-1}(N_j) \cap M$, $Q(x) \in N_j$, pero como $Q^{-1}(N_j) \subset \ker Q^{j+1}$ y $x \in M$, $Q(x) \in \ker Q^j \cap M = M_j$ luego $Q(x) = 0$ y $x \in M \cap \ker Q$. Definamos entonces

$$N_{j+1} = [Q^{-1}(N_j) \ominus (N_j + M_1)] \oplus N_j.$$

En principio , como $Q^{-1}(N_j) \ominus (N_j + M_1) \subset N_j^\perp$ y es cerrado, es claro que N_{j+1} es un subespacio (cerrado). Como $Q(N_{j+1}) \subset N_j \subset N_{j+1}$, se verifica 3). Por construcción $N_{j+1} \subset M_1^\perp$ (ambos sumandos lo están) y por lo tanto $N_{j+1} \cap M = \{0\}$ ya que, como $N_{j+1} \subset Q^{-1}(N_j)$ se tiene que $N_{j+1} \cap M \subset M_1 \cap M_1^\perp = \{0\}$ (1 y 4).
Falta ver que $N_{j+1} + M_{j+1} = \ker Q^{j+1}$. Sea $x \in \ker Q^{j+1}, Q(x) = y_j + z_j$ con $y_j \in N_j$, $z_j \in M_j$. Como $Q/_M \sim q_k^{(\alpha)}$ es fácil ver que $Q(M_{j+1}) = M_j$, por lo tanto sea $y_{j+1} \in M_{j+1}$ tal que $Q(y_{j+1}) = y_j$. Entonces $x - y_{j+1} \in Q^{-1}(N_j) \subset N_{j+1} + M_1$ y finalmente tenemos que $x \in M_{j+1} + N_{j+1} + M_1 = M_{j+1} + N_{j+1}$ (2).
Para terminar la demostración basta tomar $N = N_k$ que verifica lo pedido •

Lema 2.3 : Sea $Q \in N_k(H)$ y sea $(Q_{ij})_{1 \le i,j \le k}$ su representación canónica. Si $R(Q^{k-1})$ es cerrado, entonces existe un subespacio cerrado R (dim $R = k \dim R(Q^{k-1})$) tal que :

i) R es estable por Q .
ii) $Q/_R \sim q_k^{(\alpha)}$ $(\alpha = \dim R(Q^{k-1}))$.
iii) Si N es un suplemento de R , la compresión de Q a N es nilpotente de orden menor o igual que $k - 1$.

Demostración: Sea $R_{k-1} = \ker(Q^{k-1})^\perp$. Como $R(Q^{k-1})$ es cerrado, $Q^{k-1} : R_{k-1} \longrightarrow R(Q^{k-1})$ es un isomorfismo. Si pensamos al operador

$$Q_{j,j+1} : \ker Q^{j+1} \ominus \ker Q^j \to \ker Q^j \ominus \ker Q^{j-1} \quad 1 \le j \le k-1,$$

es fácil ver que $Q^{k-1} = Q_{1,2}Q_{2,3} \dots Q_{k-1,k}$ y que cada $Q_{j,j+1}$ es inyectivo, pero más aún, como Q^{k-1} es isomorfismo (desde R_{k-1}) es acotado inferiormente y, por lo tanto, también

lo son los operadores $Q_{j,j+1}Q_{j+1,j+2}\dots Q_{k-1,k}$.
Es fácil ver entonces que $Q^j/_{R_{k-1}}$ es acotado inferiormente, con lo que $Q^j(R_{k-1})$ es cerrado para $0 \leq j \leq k-1$.
Sean $S_j = Q_{j+1,j+2}\dots Q_{k-1,k}(R_{k-1})$ $0 \leq j \leq k-2, S_{k-1} = R_{k-1}$ y $R_j = Q^{k-1-j}(R_{k-1})$ $0 \leq j \leq k-1$.
Es claro que S_j y R_j son cerrados $0 \leq j \leq k-1$, pero además si $i \neq j$, entonces $S_i \perp S_j$, ya que $S_j \subset \ker Q^j \ominus \ker Q^{j-1} = H_j$. Entonces $S = S_0 \perp \dots \perp S_{k-1}$ es cerrado.
Si llamamos $R = \bigvee_{j=0}^{k-1} R_j$ se puede exhibir un operador $\gamma \in L(S,H)$ tal que γ es acotado inferiormente y $\gamma(S_i) = R_i$, $0 \leq i \leq k-1$. Por lo tanto $R = \bigoplus_{j=0}^{k-1} R_j$ es un subespacio cerrado. En efecto, si $x \in S$, $x = x_0 + \dots + x_{k-1}$ con $x_i \in S_i$, sean $y_0, \dots, y_{k-1}$ los elementos de R_{k-1} de los que provienen y definimos entonces $\gamma(x) = \sum_{\ell=0}^{k-1} Q^{k-1-\ell}(y_\ell)$. Es fácil ver que γ verifica lo pedido.
Es claro que R es estable por Q y que la acción de Q en R está dada por $Q : R^j \to R^{j-1}$, que es un isomorfismo, $j = k-1, k-2, \dots, 1$ y $Q(R_0) = \{0\}$, por la proposición 1.5, $Q/_R \sim q_k^{(\alpha)}$ $(\alpha = \dim R(Q^{k-1}) = \dim R_j \quad 0 \leq j \leq k-1)$.
Sea N un suplemento de R y sea

$$Q = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} Q_1 & * \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} R \\ N \end{array}$$

donde $q_1 = Q/_R$ y Q_2 es la compresión de Q a N,

$$Q^{k-1} = \begin{bmatrix} Q_1^{k-1} & * \\ 0 & Q_2^{k-1} \end{bmatrix}$$

pero como $R(Q^{k-1}) = R_0 = R(Q_1^{k-1})$, resulta $R(Q_2^{k-1}) = \{0\}$ y entonces $Q_2^{k-1} = 0$ •

Teorema 2.4 : Sea $Q \in N_k(H)$. Entonces Q es similar a un Jordan (es decir $Q \in JN_k(H)$) si y sólo si $R(Q^j)$ es cerrado para $1 \leq j \leq k-1$.

Demostración : Si Q es un nilpotente Jordan, es claro por la definición que $R(Q^j)$ es cerrado para $1 \leq j \leq k-1$. Si $T = WQW^{-1}$ con $W \in G(H)$, entonces $R(T^j) = WR(Q^j)$ que también es cerrado.
Si $Q \in N_k(H)$ y $R(Q^j)$ es cerrado, $1 \leq j \leq k-1$, entonces, en particular, $R(Q^{k-1})$ es cerrado. Aplicando el Lema 2.3, tenemos un subespacio cerrado R_k, invariante por Q tal que $Q/_{R_k} \sim q_k^{(\infty)}$. Pero entonces, por el Lema 2.2 obtenemos N_k, un suplemento cerrado

de R_k tal que $Q(N_k) \subset N_k$. Por el Lema 2.3, $Q/_{N_k}$ tiene orden menor o igual que $k-1$. Razonando inductivamente se llega a que

$$Q \sim J = \bigoplus_{j=1}^{k} q_j^{(\alpha_j)} \qquad \bullet$$

Observación : Se puede probar fácilmente que $R(Q^j) = R_k \cap R(Q^j) \oplus N_k \cap R(Q^j)$, luego $R([Q/_{N_k}]^j) = N_k \cap R(Q^j)$ resulta cerrado .

Corolario 2.5 : Dado $T \in L(H)$, algebraico, entonces $T \sim J$ con J Jordan sii $R(q(T))$ es cerrado para todo $q|p$, donde p es el polinomio minimal de T.

El próximo paso es probar que los nilpotentes Jordan son densos en los nilpotentes (también fijando el orden).Usando el Teorema 2.4, bastará con aproximar a un nilpotente con operadores tales que los rangos de sus potencias sean cerrados. Para ello necesitamos el siguiente Lema:

Lema 2.6 : Sea $Q \in N_k(H)$ y $(Q_{ij})_{1\le i,j\le k}$ su reprecentación canónica (1.10). Entonces $R(Q^j)$ es cerrado para $1 \le j \le k-1$ sii $R(Q_{j,j+1})$ es cerrado, $1 \le j \le k-1$.

Demostración : Sea $Q_{m,m+j} = Q_{m,m+1} \dots Q_{m+j-1,m+j}$. Si $Q_{i,i+1}$ es acotado inferiormente en su dominio con la misma cota inferior δ para $1 \le i \le k-1$, luego $Q_{m,m+j}$ es acotado inferiormente en su dominio por δ^j. Veamos entonces que en $\ker(Q^j)^\perp$, Q^j es acotado inferiormente. En efecto, pongamos

$$\ker(Q^j)^\perp = \ker Q^{j+1} \ominus \ker Q^j \perp \ker Q^{j+2} \ominus \ker Q^{j+1} \perp \dots \perp \ker(Q^{k-1})^\perp .$$

Sean $x^n \in \ker(Q^j)^\perp$, $x^n = x^n_{j+1} + x^n_{j+2} + \dots + x^n_k$ con $x^n_i \in \ker Q^i \ominus \ker Q^{i-1}$, $i = j+1, \dots, k$

tales que $\|x^n\| = 1$, $n \in \mathbf{N}$ y además $Q^j(x^n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Si observamos que

$$
(2.7) \quad Q^j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_{1,j+1} & & & & \\ & & 0 & Q_{2,j+2} & & * & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & Q_{k-j-1,k-1} & & \\ & & & & 0 & Q_{k-j,k} & \\ & 0 & & & & 0 & \\ & & & & & \vdots & \\ & & & & & 0 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x^n_{j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x^n_k \end{pmatrix} = x^n
$$

y llamamos $P_i = P_{H_i}$, entonces es fácil ver que $P_{k-j}(Q^j(x^n)) = Q_{k-j,k}(x^n_k) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Pero como $\|x^n_k\| \leq (\delta^{-1})\|Q_{k-j,k}(x^n_k)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, tenemos que $x^n_k \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Razonando en forma similar, usando la fórmula (2.7), se obtiene que $x^n_i \xrightarrow{n\to\infty} 0$, para $j+1 \leq i \leq k$ lo que contradice que $\|x^n\| = 1$, $n \in \mathbf{N}$. Luego $R(Q^j)$ es cerrado.
Recíprocamente, si $Q^j/_{\ker(Q^j)^\perp}$ es acotado inferiormente, entonces $Q^j/_{[\ker Q^{j+1} \ominus \ker Q^j]}$ también lo es, pero $Q^j/_{[\ker Q^{j+1} \ominus \ker Q^j]} = Q_{1,j+1} = Q_{1,2}Q_{2,3}\ldots Q_{j,j+1}$ (ver (2.7)). En particular $Q_{j,j+1}$ es acotado inferiormente en su dominio, con lo que $R(Q_{j,j+1})$ es cerrado, para $1 \leq j \leq k-1$ •

Teorema 2.8 : $JN_k(H)$ es denso en $N_k(H)$.

<u>Demostración</u> : Sea $Q \in N_k(H)$, construiremos una sucesión $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset JN_k(H)$ tal que $\|Q - Q_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Para ello, sea $(Q_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ la descomposición canónica de Q y sea $Q_{j-1,j} = V_j \mid Q_{j-1,j} \mid$ la descomposición polar de $Q_{j-1,j}$, $j = 2,\ldots,k$. Como $Q_{j-1,j}$ es inyectivo (desde su dominio $H_j = \ker Q^j \ominus \ker Q^{j-1}$), tenemos que $\ker \mid Q_{j-1,j} \mid = \ker Q_{j-1,j} = H_j^\perp$. Definamos Q_n en su descomposición canónica, igual que Q, pero reemplazando $Q_{j-1,j}$ por

$$Q^{(n)}_{j-1,j} = V_j(\mid Q_{j-1,j} \mid + 1/nP_j).$$

Donde $P_j = P_{H_j}$ de la descomposición canónica. Es fácil ver que $Q^{(n)}_{j-1,j}$ es acotado inferiormente en H_j. Aplicando, ahora, el Lema 2.6, vemos que $R(Q^j_n)$ es cerrado, $1 \leq j \leq k-1$. Pero entonces, por el Teorema 2.4, tenemos que $Q_n \in JN_k(H)$, $n \in \mathbf{N}$. Finalmente, mirando la construcción de los Q_n, es claro que $\|Q_n - Q\| \to 0$ $(n \to \infty)$ •

A continuación probaremos algunos resultados de operadores en dimensión finita :

Definición 2.9 : Dados $A,\ B \in L(H)$ notaremos $A \underset{sim}{\rightarrow} B$ si se verifica que $B \in S(A)^-$

Lema 2.10 : Sea $T \in L(\mathbf{C}^d)$ un operador nilpotente de orden k. Entonces para $A \in L(\mathbf{C}^d)$, $T \underset{sim}{\rightarrow} A$ sii $\dim R(A^j) \leq \dim R(T^j)$, para $1 \leq j \leq k$.

Demostración : Ver [16, Lema 2.5].

Corolario 2.11 : Si $k \in \mathbf{N}$ se verifican :

i) $q_k^{(k-1)} \underset{sim}{\rightarrow} q_{k-1}^k$ (en $L(\mathbf{C}^{k(k-1)})$).

ii) Si $k > 1$, $q_1 \oplus q_k^{(k-2)} \underset{sim}{\rightarrow} q_{k-1}^{(k-1)}$ (en $L(\mathbf{C}^{(k-1)^2})$).

Demostración : Para probar (i) basta observar que

$$\dim R[q_{k-1}^{(k)}]^j = k(k-1-j) = k^2 - k - kj \leq$$

$$\leq k^2 - k - kj + j = (k-1)(k-j) = \dim R[q_k^{(k-1)}]^j ,$$

para $1 \leq j \leq k-1$. Para $j = k$ la desigualdad es evidente. Con una cuenta análoga se demuestra (ii). •

Observación 2.12 : Por la unicidad de la forma de Jordan en $L(\mathbf{C}^d)$, dado $T \in L(\mathbf{C}^d)$ nilpotente, entonces $0 = q_1^{(d)} \in S(T)^-$ $(T \sim \epsilon T)$.

A continuación aplicaremos estos resultados a problemas de aproximación de operadores de tipo "nice Jordan" (definidos en 2.1).

Proposición 2.13 : Sean $Q_j = q_j \oplus q_k^{(\infty)}$ $0 \leq j \leq k-1$ y $Q_\infty = q_1^{(\infty)} \oplus q_k^{(\infty)}$. Entonces se verifican :

i) $Q_j \underset{sim}{\rightarrow} Q_\infty$, $0 \leq j \leq k-1$.

ii) Si $T \in JN_k(H)$ pero $T \notin NJN_k(H)$, entonces $Q_\infty \underset{sim}{\rightarrow} T$.

Demostración : De la observación 2.12 deducimos que para todo $j \in \mathbf{N}$, $0 = q_1^{(j)} \in S(q_j)^- \subset L(\mathbf{C}^j)$, por lo tanto, como

$$Q_j = q_j \oplus q_k^{(\infty)} = q_j \oplus q_k^{(\infty)} \oplus q_k^{(\infty)}$$

y $q_1^{(\infty)} = q_1^{(j)} \oplus q_1^{(\infty)} \in S(q_j \oplus q_k^{(\infty)})^-$ tenemos probado (i).
Para probar (ii) haremos algunos pasos intermedios. De 2.11 (i) uno deduce que si $r < k$, entonces $q_k^{(\infty)} \underset{sim}{\rightarrow} q_r^{(\infty)}$. En efecto, $q_{k-1}^{(\infty)} = [q_{k-1}^k]^{(\infty)}$ y $q_k^{(\infty)} = [q_k^{(k-1)}]^{(\infty)}$. Aplicando 2.11 (i), se verifica lo anterior para $r = k-1$. Para valores menores de r, se aplica un argumento inductivo. Con esto es fácil ver que

$$R = q_1^{(\infty)} \oplus q_2^{(\infty)} \oplus \ldots \oplus q_k^{(\infty)} \in S(Q_\infty)^-.$$

Sea $J = \bigoplus_{j=1}^k q_j^{(\alpha_j)}$ tal que existen al menos dos índices $j_1 < j_2$ tales que $\alpha_{j_1} = \alpha_{j_2} = \infty$. Como $q_j^{(\infty)} \oplus q_{j+1}^{(\alpha_{j+1})} \in S(q_{j+1}^{(\infty)})^-$ para $1 \leq j \leq k-1$, es fácil deducir que

$$q_1^{(\infty)} \oplus \bigoplus_{j=2}^{k} q_j^{(\alpha_j)} \in S(R)^- .$$

Pero si $r < s$, $r, s \in \mathbf{N}$, por 2.11 (ii) es fácil ver que $q_r^{(\infty)} \in S(q_1^{(\infty)} \oplus q_s^{(\infty)})^-$ (se usa que $q_1^{(\infty)} \oplus q_s^{(\infty)} = (q_1 \oplus q_s^{(s-2)})^{(\infty)}$, entonces $q_{s-1}^{(\infty)} \in S(q_1^{(\infty)} \oplus q_s^{(\infty)})^-$, y luego se baja hasta $q_r^{(\infty)}$ como antes).
Para terminar, como $j_1 < j_2$,

$$q_1^{(\alpha_1)} \oplus q_{j_1}^{(\infty)} \oplus q_{j_2}^{(\infty)} \in S(q_1^{(\infty)} \oplus q_{j_1}^{(\infty)} \oplus q_{j_2}^{(\infty)})^-$$

y, por lo tanto, si $T \sim J$, como $J \in S(R)^- \subset S(Q_\infty)^-$, entonces $T \in S(Q_\infty)^-$ •

Observación 2.14 : Análogamente se puede probar que $Q_\infty \in S(T)^-$, por lo tanto, si dos nilpotentes T_1, T_2 son similares a un Jordan no nice Jordan, entonces

$$T_1 \underset{sim}{\rightarrow} T_2 \quad , \quad T_2 \underset{sim}{\rightarrow} T_1.$$

Observar que esto puede ocurrir aunque T_1 y T_2 no sean similares entre sí.

Lema 2.15 : Sea $Q \in N_k(H)$. Son equivalentes :

i) $Q \sim q_k^{(\infty)}$

ii) $Q^j + Q^{*\, k-j} \in G(H)$ para $1 \leq j \leq k-1$

iii) $Q^{k-1} + Q^* \in G(H)$.

Demostración : i) $\to$ ii) Es fácil ver que $R([q_k^{(\infty)}]^j) = \ker([q_k^{(\infty)}]^{k-j})$, por lo tanto, si $Q \sim q_k^{(\infty)}$ tenemos que $R(Q^j) = \ker(Q^{k-j})$ y $R(Q^{*\,j}) = \ker(Q^{*\,k-j})$.
Entonces, como $\ker Q^j = [R(Q^{*\,j})]^\perp = [\ker Q^{*\,k-j}]^\perp$ y $R(Q^j) = [\ker Q^{*\,j})]^\perp =$
$= [R(Q^{*\,k-j})]^\perp$, se deduce en forma directa que $Q^j + Q^{*\,k-j}$ es inversible.
ii) $\to$ iii) Es trivial.
iii) $\to$ *i)* Como $R(Q^*)^- = [\ker Q]^\perp$, $R(Q^{k-1}) \subset \ker Q$ y $Q^{k-1} + Q^*$ es suryectivo, podemos deducir que $R(Q^{k-1}) = \ker Q$. Luego $R(Q^{k-1})$ es cerrado, y por los lemas 2.2 y 2.3 (como en 2.4) podemos obtener subespacios cerrados N y M, estables por Q, tales que $H = N \oplus M$ (no ortogonal), $Q_1 = Q/_N \sim q_k^{(\infty)}$ y $Q_2 = Q/_M$ verifica $Q_2^{k-1} = 0$.
Pero $\ker Q = R(Q^{k-1}) = R(Q_1^{k-1}) \subset N$, luego $\ker Q \cap M = \ker Q_2 = \{0\}$. Entonces, como Q_2 es nilpotente, resulta que $M = \{0\}$, $N = H$ y $Q \sim q_k^{(\infty)}$ •

Recordemos que $p : L(H) \to A(H)$ es la proyección sobre el álgebra de Calkin y escribamos, para $B \in L(H)$, $\widetilde{B} = p(B)$.

Corolario 2.16 : Sea $Q \in L(H)$ tal que $\widetilde{Q}^k = 0$. entonces son equivalentes :

i) $\widetilde{Q}^{k-1} + \widetilde{Q}^* \in G(A(H))$.

ii) $\widetilde{Q}^j + \widetilde{Q}^{*\,k-j} \in G(A(H))$ para todo j, $1 \le j \le k-1$.

Demostración : i)$\to$ii) Sea $\rho : A(H) \to L(\mathcal{K})$ una representación de $A(H)$, donde $\mathcal{K}$ es un espacio de Hilbert separable.
Sea $T = \rho(\widetilde{Q})$. Por hipótesis $T^k = 0$ y $T^{k-1} + T^* \in G(\mathcal{K})$, luego, por (2.14), $T \sim q_k^{(\infty)}$, $T^j + T^{*\,k-j} \in G(\mathcal{K})$ y como $\rho(A(H))$ es una C^*- subálgebra de $L(\mathcal{K})$, entonces $(T^j + T^{*\,k-j})^{-1} \in \rho(A(H))$. Por lo tanto

$$\widetilde{Q}^j + \widetilde{Q}^{*\,k-j} \in G(A(H)),\ 1 \le j \le k-1 \qquad \bullet$$

Proposición 2.17 : Sea $Q \in N_m(H)$ y supongamos que $\widetilde{Q}^k = 0$ y $\widetilde{Q}^{k-1} + \widetilde{Q}^*$ es inversible para cierto $k \le m$. Entonces Q es similar a un nice Jordan si y sólo si $\dim R(Q^k) < \infty$. En tal caso $Q \sim \bigoplus_{j=1}^m q_j^{(\alpha_j)}$, con $\alpha_k = \infty$.

Demostración : Es claro que si Q es similar a un nice Jordan, entonces $R(Q^k)$ es cerrado, y como $\widetilde{Q}^k = 0$ debe ser $\dim R(Q^k) < \infty$.
Supongamos que $\dim R(Q^k) < \infty$, luego $\dim R(Q^j) < \infty$ $k \le j$ y, por lo tanto, $R(Q^j)$ es cerrado para $k \le j$.

Aplicando (2.2) y (2.3) como en (2.4) obtenemos que Q se descompone como $Q = Q_1 \oplus Q_2$ (suma no ortogonal) tales que $Q_1 \sim \bigoplus_{j=k+1}^{m} q_j^{(\alpha_j)}$ con $\Sigma_{j=k+1}^{m} j\alpha_j < \infty$ y $Q_2^k = 0$. Si pensamos a los Q_i extendidos en forma natural a $L(H)$, entonces $Q = Q_1 + Q_2$, $Q^{k-1} =$ $= Q_1^{k-1} + Q_2^{k-1}$ y $\widetilde{Q}^{k-1} + \widetilde{Q}^* = \widetilde{Q}_1^{k-1} + \widetilde{Q}_1^* + \widetilde{Q}_2^{k-1} + \widetilde{Q}_2^* = \widetilde{Q}_2^{k-1} + \widetilde{Q}_2^*$ que es inversible. Se puede suponer entonces que $Q^k = 0$. Como $\widetilde{Q}^{k-1} + \widetilde{Q}^*$ es inversible, por el corolario 2.16, $\widetilde{Q}^j + \widetilde{Q}^{*\ k-j}$ es inversible.

Analizando cada caso es fácil ver que $R(Q^j)$ debe ser cerrado para $1 \leq j \leq k-1$ ($Q^j : [\ker Q^j]^\perp \to R(Q^j)^-$ es de Fredholm, $1 \leq j \leq k-1$) y por lo tanto $Q \sim J$ para cierto J de Jordan. Luego $\widetilde{Q} \sim \widetilde{J}$ en $A(H)$. Como $\widetilde{Q}^{k-1} + \widetilde{Q}^*$ es inversible, si $\rho : A(H) \to L(K)$ es una representación de $A(H)$ con K Hilbert, resulta que $\rho(\widetilde{Q}) \sim q_k^{(\infty)}$ en $L(K)$ y $\rho(\widetilde{Q}) \sim \rho(\widetilde{J})$ en $L(K)$, por lo tanto,$\rho(\widetilde{J})^{k-1} + \rho(\widetilde{J})^*$ es inversible en $L(K)$. Entonces $\widetilde{J}^{k-1} + \widetilde{J} \in G(A(H))$. Como J es Jordan y verifica lo anterior, es fácil ver que debe ser nice Jordan •

Sea $N_k^+ = \{Q \in L(H) : \widetilde{Q}^{k-1} + \widetilde{Q}^* \in G(A(H))\}$.

Corolario 2.18 : Sea T un nilpotente nice Jordan, $T \in N_k^+$ y sea $A \in S(T)^- \cap N_k^+(H)$. Entonces A es similar a un nice Jordan.

Demostración : Sea $(T_m)_{m\in\mathbf{N}} \subset S(T)$ tal que $T_m \to A$ $(m \to \infty)$.
Como T es nice Jordan y $T \in N_k^+(H)$ es fácil ver que $\widetilde{T}^k = 0$ (los α_j de su descomposición son finitos si $j \geq k+1$). Por lo tanto, $\widetilde{T}_n^k \sim \widetilde{T}^k = 0$ y $\widetilde{A}^k = \lim_{m\to\infty} \widetilde{T}_m^k = 0$.
Por otro lado, A es nilpotente. Como $\widetilde{T}^k = 0$ y T es nice Jordan, se tiene que $d = \dim(R(T^k)) < \infty$ y $\dim(R(T_m^k)) = d$ para todo $m \in \mathbf{N}$. Luego, $\dim(R(A^k)) \leq$ $\leq \liminf_{m\to\infty} \dim(R(T_m^k)) = d < \infty$. Entonces, por la proposición 2.17, A es similar a un nice Jordan. •

Lema 2.19 : Sea $A \in L(H)$ y $H = H_1 \oplus H_2$, descomposición no ortogonal tal que

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix}, \quad \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_1^\perp \end{matrix}$$

entonces $A_2 \sim C$, es decir que existe $W : H_2 \to H_1^\perp$ tal que $C = WA_2W^{-1}$.

Demostración : La verificación es directa.

Lema 2.20 : Sean $Q_n, Q \in L(H)$ nilpotentes nice Jordan tales que $Q_n \simeq q_k^{(\infty)} \oplus F_n$ y $Q = q_k^{(\infty)} \oplus F$, donde $F_n \in L(\mathbf{C}^{r_n})$ y $F \in L(\mathbf{C}^r)$ son nilpotentes en su forma de Jordan.

Entonces son equivalentes :

i) Existen operadores $W_n \in G(H)$ tales que $\|W_n Q_n W_n^{-1} - Q\| \to 0$ $(n \to \infty)$.

ii) Existe un natural p, y para $n \geq p$, α_n, $\beta_n \in \mathbb{N}_0$ tales que $k\beta_n + r = k\alpha_n + r_n$ y $q_k^{(\beta_n)} \oplus F \in S(q_k^{(\alpha_n)} \oplus F_n)^-$ para $n \geq p$.

Demostración : Es claro que ii) $\to$ i) .
i) $\to$ ii) Sea $Q_n = q_k^{(\infty)} \oplus F_n$, $H_1^{(n)}$ el subespacio asociado a $q_k^{(\infty)}$, $H_2^{(n)}$ el asociado a F_n y $P_j^{(n)} = P_{H_j}^{(n)}$ $j = 1,2$.
Se define análogamente H_j , P_j $j = 1,2$ para $Q = q_k^{(\infty)} \oplus F$.
(2.21) Sean : a) $Q_n' = W_n Q_n W_n^{-1}$,

b) $X = H_1 \ominus Q(H_1) = H_1 \ominus \ker[(Q/_{H_1})^{k-1}]$,

c) $X_n = \{x \in X : P_2^{(n)} W_n^{-1}(x) = 0\}$,

d) $Y_n = X_n + Q(X_n) + \ldots + Q_n^{k-1}(X_n)$ y

e) $Z_n = X_n + Q_n'(X_n) + \ldots + Q_n'^{k-1}(X_n)$.

Como los espacios $Q^j(X_n)$, $0 \leq j \leq k-1$ son ortogonales dos a dos y $Q^j/_{X_n}$ es una isometría, Y_n es cerrado y las sumas que lo definen son directas. Lo mismo ocurre con Z_n, ya que si definimos $V_n : Y_n \to Z_n$ dada por : para $x \in Y_n$ sean $x_0, \ldots x_{k-1} \in X_n$ tales que $x = x_0 + Q(x_1) + \ldots + Q^{k-1}(x_{k-1})$, entonces

$$V_n(x) = x_0 + Q_n'(x_1) + \ldots + Q_n'^{k-1}(x_{k-1}) \in Z_n .$$

Es fácil ver que $V_n \in L(Y_n, X_n)$, que es sobre y acotada inferiormente, para valores grandes de n. Luego Z_n es cerrado y las sumas son directas.
Más aún, se tiene que $\|P_{Y_n} - P_{Z_n}\| \to 0$ $(n \to \infty)$, ya que si extendemos V_n a $L(H)$ por $V_n/_{Y_n^\perp} \equiv 0$, podemos ver que $\|(1 - V_n)P_{Y_n}\| \to 0$ $(n \to \infty)$ puesto que si $x \in Y_n$, $\|x\| = 1$ y $x = x_0 + Q(x_1) + \ldots + Q^{k-1}(x_{k-1})$ con $x_i \in X_n$, tenemos que $\|x_i\| \leq 1$ $0 \leq i \leq k-1$ y

$$\|1 - V_n(x)\| \leq \sum_{i=1}^{k-1} (Q^i - Q_n'^i)(x_i)\| \leq \sum_{i=1}^{k-1} \|Q^i - Q_n'^i\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

Análogamente si a $V_n^{-1} : Z_n \to Y_n$ la extendemos como 0 a $Z_n^\perp$, se verifica que $\|(1 - V_n^{-1})P_{Z_n}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Es fácil ver además que $V_n P_{Y_n} = P_{Z_n} V_n$, luego

$$\begin{aligned} \|P_{Z_n} P_{Y_n} - P_{Y_n}\| &\leq \|P_{Z_n}(1 - V_n)P_{Y_n}\| + \|P_{Z_n} V_n P_{Y_n} - P_{Y_n}\| \\ &\leq \|(1 - V_n)P_{Y_n}\| + \|(V_n - 1)P_{Y_n}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

y análogamente $\|P_{Y_n}P_{Z_n} - P_{Z_n}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Luego

$$\|(P_{Y_n}P_{Z_n} - P_{Z_n})^*\| = \|P_{Z_n}P_{Y_n} - P_{Z_n}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \,.$$

Por lo tanto es claro que $\|P_{Y_n} - P_{Z_n}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (2.22).

Como $W_nP_2^{(n)}W_n^{-1}(X_n) = \{0\}$ y $W_n^{-1}(X_n) \subset H_1^{(n)}$, luego $Q_n'^k(X_n) = \{0\}$ y entonces Z_n es invariante bajo Q_n' y, para n grande, $Q_n'/_{Z_n} \sim q_k^{(\infty)}$. Más aún, como $R(P_2^{(n)}) = H_2^{(n)}$ tiene dimensión finita, es fácil ver que $\dim(X \ominus X_n) < \infty$, $n \in \mathbf{N}$ y, por lo tanto $\dim(H_1 \ominus Y_n) < \infty$, $n \in \mathbf{N} \Rightarrow \dim(H \ominus Y_n) < \infty$, luego, por (2.22), $\dim(H \ominus Z_n) < \infty$, $n \in \mathbf{N}$.

Como Q_n' y Q_n son similares vía W_n, y $W_n^{-1}(Y_n) \subset H_1^{(n)}$, podemos aplicar los lemas 2.2 y 2.3 para encontrar espacios $R_n \subset H_1^{(n)}$, estables por Q_n tales que $H_1^{(n)} = R_n \oplus W_n^{-1}(Z_n)$. Entonces

$$q_k^{(\infty)} \sim Q_n/_{H_1^{(n)}} = Q_n/_{W^{-1}(Z_n)} \oplus Q_n/_{R_n} \sim q_k^{(\infty)} \oplus Q_n/_{R_n}.$$

Como $R[(Q_n/_{R_n})^{k-1}] = \ker(Q_n/_{R_n})$, es fácil ver que existe $\alpha_n \in \mathbf{N}_0$ tal que $Q_n/_{R_n} \sim q_k^{(\alpha_n)}$. Por otro lado Y_n e $Y_n^{\perp}$ son estables por Q, luego existe $\beta_n \in \mathbf{N}_0$ tal que $Q/_{Y_n^\perp} = P_{Y_n^\perp}QP_{Y_n^\perp} = q_k^{(\beta_n)} \oplus F$.
Como $\|P_{Z_n} - P_{Y_n}\| \to 0$ $(n \to \infty)$, para n grande se pueden encontrar operadores *unitarios* U_n que verifican : $\|U_n - I\| \to 0$ $(n \to \infty)$ y $P_{Z_n} = U_nP_{Y_n}U_n^*$.
Entonces $\|U_nP_{Y_n^\perp}QP_{Y_n^\perp}U_n^* - P_{Z_n^\perp}Q_n'P_{Z_n^\perp}\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Por el lema 2.19 , tenemos que

$$P_{Z_n^\perp}Q_n'P_{Z_n^\perp} \sim Q_n/_{R_n \oplus H_2^{(n)}} \sim q_k^{(\alpha_n)} \oplus F_n.$$

Podemos deducir entonces que, para n grande existen operadores $S_n \in L(\mathbf{C}^{k\alpha_n + r_n})$ tales que

$$\|S_n(q_k^{(\alpha_n)} \oplus F_n)S_n^{-1} - q_k^{(\beta_n)} \oplus F\| \to 0 \ (n \to \infty).$$

Por ello, para j fijo, se puede encontrar $n_0(j)$ tal que si $n \geq n_0(j)$,

$$(*) \qquad \dim[R((q_k^{(\beta_n)} \oplus F)^j)] \leq \dim[R((q_k^{(\alpha_n)} \oplus F_n)^j)]$$

Pero como $(q_k^{(\beta_n)} \oplus F)^m = 0$, para cierto $m \geq 0$ y para n grande, entonces existe $p \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq p$, se cumple $(*)$ para todo $j \in \mathbf{N}$. Usando nuevamente el lema 2.9, tenemos finalmente que $k\alpha_n + r_n = k\beta_n + r$ y

$$q_k^{(\beta_n)} \oplus F \in S(q_k^{(\alpha_n)} \oplus F_n)^- \ \ \forall n \geq p \quad \bullet$$

Observación 2.23 : Como la aplicación $T \mapsto \widetilde{T}^{k-1} + \widetilde{T}^*$ es continua y $G(A(H))$ es abierto, es claro que $N_k^+(H)$ es abierto y por lo tanto $N_k^+(H) \cap N_m(H)$ es abierta en $N_m(H)$ para todo $M \geq k$ (si $m < k$ es vac ía) .

Proposición 2.24 : Sea $T \in N_m(H) \cap N_k^+(H)$ similar a un nice Jordan

$$J_1 = q_k^{(\infty)} \oplus \bigoplus_{j=1, j\neq k}^{m} q_j^{(\tau_j)} \quad con \quad d_{J_1} = \sum_{j=1,j\neq k}^{m} j\tau_j < \infty .$$

Entonces $A \in S(T)^- \cap N_k^+(H)$ si y sólo si A es similar a un nice Jordan

$$J_2 = q_k^{(\infty)} \oplus \bigoplus_{j=1,j\neq k}^{m} q_j^{(\alpha_j)}, \quad con \quad d_{J_2} = \sum_{j=1,j\neq k}^{m} j\alpha_j < \infty$$

que verifica i) $d_{J_1} \equiv d_{J_2}$ (k)

ii) Dados τ_k , $\alpha_k \in \mathbf{N}_0$ tales que $d = k\tau_k + d_{J_1} = k\alpha_k + d_{J_2}$, entonces

$$\oplus_{j=1}^{m} q_j^{(\alpha_j)} \in S(\oplus_{j=1}^{m} q_j^{(\tau_j)})^- \subset L(\mathbf{C}^d)$$

Observación 2.25 : Es fácil ver que la condición (ii) es equivalente a la existencia de un par τ_k , $\alpha_k \in \mathbf{N}_0$ con las mismas propiedades .

Demostración de (2.24) : Es directo que si $A \sim J_2$ con tales características, entonces $A \in S(T)^-$.

Recíprocamente, si $A \in S(T)^- \Rightarrow A \in S(J_1)^-$. Como $A \in N_k^+(H) \cap S(J_1)^-$, por el corolario 2.18, A es similar a un nice Jordan

$$J_2 = q_k^{(\infty)} \oplus \bigoplus_{j=1,j\neq k}^{m} q_j^{(\alpha_j)}$$

con $d_{J_2} < \infty$ y $J_2 \in S(J_1)^-$. Podemos aplicar el lema 2.20 (para $Q_n = J_1$ $\forall n$ y $Q = J_2$) y deducir la existencia de enteros no negativos τ_k y α_k que verifican las condiciones de (ii). Por la observación 2.25 concluimos que (ii) es cierta •

Corolario 2.26 : Sea $Q_j = q_j \oplus q_k^{(\infty)}$, para cierto $0 \leq j \leq k-1$. Sea T similar a un nice Jordan

$$J = q_k^{(\infty)} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k-1} q_i^{(\alpha_i)} \quad con \quad d_J = \sum_{i=1}^{k-1} i\alpha_i < \infty.$$

Entonces $T \in S(Q_j)^- \Leftrightarrow d_J \equiv j\ (k)$ (es decir, existe un entero no negativo s tal que $d_J = ks + j$).

<u>Demostración</u> $(\Rightarrow)$ Es claro por la proposición 2.24 .
$(\Leftarrow)$ Bastará con probar que $\bigoplus_{i=1}^{k-1} q_i^{(a_i)} \in S(q_j \oplus q_k^{(s)})^-$ o lo que es equivalente, por el lema 2.9 ,

$$\dim[R((\oplus_{i=1}^{k-1} q_i^{(a_i)})^h)] \leq \dim[R((q_j \oplus q_k^{(s)})^h)]$$

para $1 \leq h \leq k-1$, lo que se puede verificar sin dificultad •

Teorema 2.27 : Sea $T \in N_m(H)$ similar a un nice Jordan, entonces $S(T)$ es abierta en $S(T)^-$.

<u>Demostración</u> : Como $T \sim J$ es claro que $S(T) = S(J)$ y $S(T)^- = S(J)^-$, por lo tanto se puede suponer que $T = J$. Más aún, es suficiente probar que si $(B_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset S(J)^-$ tal que $\|B_n - J\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, entonces existe $p \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq p$, $B_n \in S(J)$. En efecto, si $S(J)$ no es abierta en $S(J)^-$, se podría encontrar $(B_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset S(J)^- - S(J)$ tal que $\|B_n - WJW^{-1}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ para cierto $W \in G(H)$, entonces $\|W^{-1}B_nW - J\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y $W^{-1}B_nW \in S(J)^- - S(J)$, lo que contradice lo anterior.

Sea entonces $(B_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset S(J)^-$ tales que $\|B_n - J\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Sea

$$J = q_k^{(\infty)} \oplus \bigoplus_{j=1, j\neq k}^{m} q_j^{(r_j)}$$

entonces $J \in N_k^+(H) \cap N_m(H)$ que es abierto en $N_m(H)$ (por 2.23).
Como $B_n \in S(J)^-$, $B_n \in N_m(H)$, $n \in \mathbf{N}$ y por lo tanto existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tal que, para $n \geq n_1$, $B_n \in N_m(H) \cap N_k^+(H)$, luego $B_n \in N_k^+(H) \cap S(J)^-$. Por el corolario 2.18, $B_n \sim J_n$ con J_n nice Jordan y

$$J_n = q_k^{(\infty)} \oplus \bigoplus_{j=1, j\neq k}^{m} q_j^{(\beta_{n_j})}$$

Aplicando el lema 2.20 para $Q_n = J_n$ y $Q = J$, podemos encontrar $p \geq n_1$ tal que si $n \geq p$ existen β_{n_k} , r_{n_k}, enteros no negativos tales que $\sum_{j=1}^{m} j\beta_{n_j} = kr_{n_k} + \sum_{j=1, j\neq k}^{m} jr_j$ y

$$\dim R[(q_k^{(r_{n_k})} \oplus \bigoplus_{j=1, j\neq k}^{m} q_j^{(r_j)})^r] \leq \dim R[(\oplus_{j=1}^{m} q_j^{(\beta_{n_j})})^r] \tag{2.28}$$

para $r \geq 1$ y $n \geq p$. Por otro lado, como $J_n \in S(J)^- \cap N_k^+(H)$, por la proposición 2.24 las desigualdades de (2.28) valen en el sentido inverso y son, por lo tanto, igualdades. Es fácil ver, entonces, que si $n \geq p$, $\beta_{n_j} = \tau_j$ para todo $j \neq k$, luego $B_n \in S(J)$ •

Corolario 2.29 : Si $Q_j = q_j \oplus q_k^{(\infty)}$ $0 \leq j \leq k-1$ y $U = \cup_{j=0}^{k-1} S(Q_j)$, entonces $S(Q_j)$ es abierta en $N_k(H)$ y U es abierta y densa en $N_k(H)$.

Demostración :Del corolario 2.26 deducimos que todo operador T nilpotente nice Jordan pertenece a $S(Q_j)^-$, para cierto $0 \leq j \leq k-1$. Combinando esto con la proposición 2.13, obtenemos que si $T \in JN_k(H)$ (es decir T es similar a un Jordan), entonces $T \in \cup_{j=0}^{k-1} S(Q_j)^- = U^-$, luego $JN_k(H) \subset U^-$. Por el teorema 2.8 sabemos que $JN_k(H)$ es denso en $N_k(H)$ y por lo tanto U es densa en $N_k(H)$.
En otras palabras $N_k(H) = \cup_{j=0}^{k-1} S(Q_j)^-$.

Para ver que $S(Q_j)$ es abierta, sea $T \in S(Q_j)$. Por el corolario 2.26, $T \notin S(Q_i)$ para $i \neq j$ luego existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que si $N \in N_k(H)$ y $\|N - T\| < \varepsilon_1$ entonces $N \in S(Q_j)^-$ y como por el teorema 2.27, $S(Q_j)$ es abierta en $S(Q_j)^-$, existe $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ tal que $B(T, \varepsilon) \cap N_k(H) \subset S(Q_j)$. Es claro que U es también abierta •

Definición :Diremos que $X \subset L(H)$ es localmente cerrado (en $L(H)$) si para todo $T \in X$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(T, \varepsilon)^- \cap X = \{L \in X : \|L - T\| \leq \varepsilon\}$$

es cerrada en $L(H)$.

Teorema 2.30 : Sea $T \in N_m(H)$ tal que T es similar a un nice Jordan, entonces $S(T)$ es localmente cerrada.

Demostración : Por el teorema 2.27, $S(T)$ es abierta en $S(T)^-$. Dado $A \in S(T)$, sea $\varepsilon > 0$ tal que $S(T)^- \cap B(A, \varepsilon) \subset S(T)$, luego

$$S(T)^- \cap B(A, \varepsilon/2)^- \subset S(T) \cap B(A, \varepsilon/2)^-.$$

Veamos que $S(T) \cap B(A, \varepsilon/2)^-$ es cerrada en $L(H)$. En efecto

$$[S(T) \cap B(A, \varepsilon/2)^-]^- \subset S(T)^- \cap B(A, \varepsilon/2)^- \subset S(T) \cap \cap B(A, \varepsilon/2)^-$$

y por lo tanto $S(T)$ es localmente cerrada en $L(H)$ •

Observación :No es muy difícil extender este resultado al caso de los nice Jordan no nilpotentes. Sin embargo omitiremos una demostración, ya que se obtendrá como corolario de resultados de más adelante (ver teorema 8.11).

3. Ortogonalización de Idempotentes.

Sea $I(H) = \{P \in L(H) : P^2 = P\}$ el conjunto de todos los idempotentes de $L(H)$ y sea $P(H) = \{P \in I(H) : P^* = P\}$, los proyectores, es decir, los idempotentes autoadjuntos. Dado $P \in I(H)$, se tiene una fórmula para calcular el proyector cuyo rango es el mismo que el de P, que llamaremos $P_{R(P)}$:

$$P_{R(P)} = PP^*(I - (P - P^*)^2)^{-1}. \tag{3.1}$$

En efecto, si descomponemos $H = R(P) \perp R(P)^{\perp}$, en las representaciones matriciales con respecto a esta descomposición, tenemos que

$$P = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad P^* = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$PP^* = \begin{pmatrix} I + AA^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; P - P^* = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^* & 0 \end{pmatrix} \;\; y \;\; (P - P^*)^2 = \begin{pmatrix} -AA^* & 0 \\ 0 & -A^*A \end{pmatrix}$$

finalmente

$$I - (P - P^*)^2 = \begin{pmatrix} I + AA^* & 0 \\ 0 & I + A^*A \end{pmatrix} \;,$$

luego es claro que $I - (P - P^*)^2$ es inversible. La validez de (3.1) se sigue inmediatamente de las representaciones matriciales anteriores.

Con esto podemos definir la aplicación (suryectiva y continua) :
$GS_2 : I(H) \to P(H)$ dada por $GS_2(P) = P_{R(P)} = PP^*(I - (P - P^*)^2)^{-1}$ para $P \in I(H)$.

Más generalmente definamos, para $n \in \mathbf{N}$:

i) $I_n(H) = \{P = (P_1, \ldots, P_n) \in I(H)^{(n)} : P_iP_j = 0$ si $i \neq j$ y $\sum_{i=1}^{n} P_i = I\}$. los sistemas de idempotentes,

ii) $P_n(H) = \{P = (P_1, \ldots, P_n) \in I_n(H) : P_i^* = P_i\}$ los sistemas de proyectores y la aplicación, que llamaremos de "Gram-Schmidt" :

$$GS_n : I_n(H) \to P_n(H) \tag{3.2}$$

dada por : si $P = (P_1, \ldots, P_n) \in I_n(H)$, entonces

1) $GS_n(P)_1 = GS_2(P_1)$

2) $GS_n(P)_j = GS_2(\sum_{i=1}^{j} P_i) - GS_2(\sum_{i=1}^{j-1} P_i)$, para $1 < j \leq n$.

Observación 3.3 : i) Se sigue de las definiciones que $GS_n(P) \in P_n(H)$ si $P \in I_n(H)$ y además que

$$R(P_1 + \ldots + P_j) = R(GS_n(P)_1 + \ldots + GS_n(P)_j) \quad 1 \leq j \leq n.$$

ii) Usando la continuidad de GS_2 dada por la fórmula (3.1) es claro que GS_n es continua .
iii) Usando (3.1) también se deduce que, para $1 \leq i \leq n$, $GS_n(P)_i \in C^*(P_1, \ldots, P_i)$.

Proposición 3.4 : Sean $P = (P_1, \ldots, P_n)$ y $Q = (Q_1, \ldots, Q_n) \in I_n(H)$ tales que $R(P_1 + \ldots + P_i) = R(Q_1 + \ldots + Q_i) \quad 1 \leq i \leq n$. Entonces

$$U = \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i \in G(H)$$

y además $P_j = UQ_jU^{-1} \quad 1 \leq j \leq n$. Más aún, si $N = \sum_{i<j} P_i Q_i$, entonces $N^n = 0$, $U = I - N$ y $U^{-1} = (I + N + N^2 + \ldots + N^{n-1})$.

Demostración : Primero probaremos que si $i < j$, entonces

$$P_j Q_i = Q_j P_i = 0 \,. \tag{3.5}$$

En efecto, si $i = 1$, $P_j Q_1 = P_j P_1 Q_1 = 0 \quad (R(P_1) = R(Q_1) \Rightarrow P_1 Q_1 = Q_1$). Si $j > i > 1$ entonces, aplicando inducción en i , se tiene

$$P_j Q_i = P_j Q_i + P_j \sum_{h=1}^{i-1} Q_h = P_j \sum_{h=1}^{i} Q_h = P_j (\sum_{h=1}^{i} P_h)(\sum_{h=1}^{i} Q_h) = 0 \,.$$

Análogamente $Q_j P_i = 0$ si $i < j$. Pero como

$$I = (\sum_{i=1}^{n} P_i)(\sum_{i=1}^{n} Q_i) = \sum_{h=1}^{n} P_h Q_h + \sum_{i<j} P_i Q_j$$

tenemos que $I = U + N$ y $U = I - N$. Para ver que $N^n = 0$ se aplica (3.5) reiteradas veces. Es fácil ver, de tal manera que

$$N^{n-1} = P_1 Q_2 P_2 Q_3 P_3 \ldots P_{n-2} Q_{n-1} P_{n-1} Q_n = \prod_{i=1}^{n-1} P_i Q_{i+1}$$

y por lo tanto $N^n = N^{n-1}N = 0$. Es claro entonces que tomando $V = I + N + N^2 + \ldots + N^{n-1}$, se verifica $VU = UV = I$ y luego $V = U^{-1}$ •

Corolario 3.6 : Sea $P = (P_1, \ldots, P_n) \in I_n(H)$ y sea $GS_n(P) = Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$, entonces

$$U = \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i \in G(H) \qquad y \qquad P_j = UQ_jU^{-1} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Demostración : Es consecuencia de la observación 3.3 y la proposición 3.4 •

Corolario 3.7 : La aplicación $GS_n : I_n(H) \to P_n(H)$ es una equivalencia homotópica .

Demostración : Sea $P = (P_1, \ldots, P_n) \in I_n(H)$, $GS_n(P) = Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$.

Sea $\gamma : [0,1] \to I_n(H)$ dada por :

$$\gamma_1(t) = tP_1 + (1-t)Q_1 \quad t \in [0,1].$$

$$\gamma_j(t) = [t(\textstyle\sum_{i=1}^{j} P_i) + (1-t)\sum_{i=1}^{j} Q_i)] - [t(\sum_{i=1}^{j-1} P_i) + (1-t)(\sum_{i=1}^{j-1} Q_i)].$$

Es fácil ver que $\gamma(t) \in I_n(H)$ y que $R(\sum_{i=1}^{j} \gamma_i(t)) = R(\sum_{i=1}^{j} P_i)$, por ejemplo

$$\begin{aligned}(tP_1 + (1-t)Q_1)^2 &= (t^2 + t(1-t))P_1 + ((1-t)^2 + t(1-t))Q_1 \\ &= (tP_1 + (1-t)Q_1) ;\end{aligned}$$

$P_1(tP_1 + (1-t)Q_1) = tP_1 + (1-t)Q_1$ y $(tP_1 + (1-t)Q_1)P_1 = tP_1 + (1-t)P_1 = P_1$. Luego, por la proposición 3.4

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t)P_i \in G(H) \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

y si definimos $F(t, P) = (\psi(t)P_1\psi(t)^{-1}, \ldots, \psi(t)P_n\psi(t)^{-1})$
es claro que F da la homotopía requerida •

Corolario 3.8 : El inversible $U = \sum_{i=1}^{n} P_iQ_i$ que conjuga P con $GS_n(P)$ pertenece a la C^*-álgebra generada por los P_i $1 \leq i \leq n$ •

Definamos ahora acciones del grupo $G(H)$ sobre $I_n(H)$ y $P_n(H)$. Fijado $P = (P_1, \ldots, P_n) \in I_n(H)$, se define la aplicación

$$\pi_P : G(H) \to I_n(H) \quad , \quad \pi_P(V) = (VP_1V^{-1}, \ldots, VP_nV^{-1}) \quad , \quad V \in G(H) .$$

Claramente π_P es continua. Es sabido que la órbita de similaridad de P , $S(P) = \pi_P(G(H))$ es la componente conexa de P en $I_n(H)$ (ver [9] y [10]). Más aún, dado $P' \in S(P)$, se puede encontrar un entorno $\mathcal{U}_{P'}$ de P' en $I_n(H)$ tal que si $Q = (Q_1, \ldots, Q_n) \in \mathcal{U}_{P'}$, entonces $\sum_{i=1}^n Q_i P_i' \in G(H)$ (porque está cerca de I).

Proposición 3.9 : Sea $P \in I_n(H)$, entonces para todo $P' \in S(P)$ existe un entorno $\mathcal{U}_{P'} \subset I_n(H)$ y una sección local $s_{P'} : \mathcal{U}_{P'} \to G(H)$ de π_P, es decir que $\pi_P \circ s_{P'} = Id_{\mathcal{U}_{P'}}$.

Demostración : Si $P' = P$, definimos, para un $\mathcal{U}_P$ conveniente :

$$s_P : \mathcal{U}_P \to G(H) \quad , \quad s_P(Q) = \sum_{i=1}^n Q_i P_i \, .$$

Si $P' \neq P$, sea $U \in G(H)$ tal que $P' = \pi_P(U)$. Tomemos $\mathcal{U}_{P'} = U \mathcal{U}_P U^{-1}$ y $s_{P'}(Q) = U s_P(Q) U^{-1}$. Es directa la verificación de que es sección local, bien definida y continua $\bullet$

Si $P \in P_n(H)$ y $U \in G(H)$ entonces $\pi_P(U) \in I_n(H)$ pero no necesariamente a $P_n(H)$. Sin embargo, vía la aplicación GS_n podemos definir $S_P : G(H) \to P_n(H)$, por

(3.10) $$S_P(V) = GS_n \circ \pi_P(V) \quad , \quad V \in G(H).$$

Es fácil ver que S_P está bien definida, es continua y es una acción (es decir $S_P(VW) = S_{S_P(W)}(V)$) y además

(3.11) $s_{P'} : \mathcal{U}_{P'} \cap P_n(H) \to G(H)$ es una sección local de S_P para todo $P' \in S_P(G(H))$. Además se prueba sin dificultad que

$$S_P(G(H)) = U(P) = \{UPU^* : U \in \mathcal{U}(H)\}$$

la órbita unitaria de P, que es también la componente conexa de P en $P_n(H)$.

4. La Descomposicion canonica.

Dado $T \in N_n(H)$, la descomposición canónica (DC) de T es una partición del espacio H en subespacios ortogonales $H = H_1 \perp \ldots \perp H_n$ con la propiedad de que la matriz de T en dicha descomposición es estrictamente triangular superior. La DC está dada por :

$$(4.0) \qquad H_1 = \ker T \quad ; \quad H_{i+1} = \ker T^{i+1} \ominus \ker T^i \quad 1 \le i \le n-1 .$$

Esto motiva la definición de la aplicación :

$$(4.1) \qquad \begin{aligned} \varphi : N_n(H) \to P_n(H) \; ; \; \varphi(T) &= (P_{\ker T}, P_{\ker T^2 \ominus \ker T}, \ldots, P_{(\ker T^{n-1})^\perp}) \\ &= (P_{H_1}, \ldots, P_{H_n}) \end{aligned}$$

Observación 4.2 i) Aplicando teoría espectral, se obtiene que si $A \in L(H)$, entonces

$$P_{\ker A} = \aleph_{\{0\}}(A^* A)$$

(por el cálculo Boreliano para operadores autoadjuntos, ver [24, 12.29]).
ii) Si $P = (P_1, \ldots, P_n) \in P_n(H)$ y $T \in N_n(H)$ es tal que $\varphi(T) = P$, entonces

$$\dim R(P_1) \ge \dim R(P_2) \ge \ldots \ge \dim R(P_n) \ne 0 .$$

En efecto, si $T_{j,j+1} = P_j T P_{j+1}$ se piensa como operador en $L(H_{j+1}, H_j)$ para $1 \le j \le n$, entonces $T_{j,j+1}$ es inyectivo y por lo tanto

$$\dim R(P_{j+1}) = \dim H_{j+1} \ge \dim H_j = \dim P_j \quad , \quad 1 \le j \le n-1$$

y como $T^{n-1} \ne 0$, $P_n \ne 0$.

Definamos entonces

$$P_n^+(H) = \{(P_1, \ldots, P_n) \in P_n(H) : \dim R(P_{i+1}) \le \dim R(P_i) \, , \; 1 \le i \le n-1 \, ; \; P_n \ne 0\} .$$

Con las observaciones anteriores no es difícil probar que :

Proposición 4.3 : La imagen de φ es igual a $P_n^+(H)$ •

Dado $T \in N_n(H)$ fijo, podemos definir :

$$(4.3) \qquad \pi_T : G(H) \to N_n(H) \quad ; \quad \pi_T(V) = VTV^{-1} \, , \; V \in G(H) .$$

Combinando esta aplicación con φ obtenemos, para T fijo y $\varphi(T) = P \in P_n^+(H)$, la aplicación

$$(4.5) \qquad S_{T,P} : G(H) \to P_n^+(H) \quad ; \quad S_{T,P}(V) = \varphi \circ \pi_T(V)\ ,\ V \in G(H)\ .$$

En principio esta aplicación depende sólo de T y la mención de P es redundante, sin embargo:

Proposición 4.6 : La aplicación $S_{T,P}$ coincide con S_P de (3.10), por lo tanto es continua y no depende de T, sino solamente de $\varphi(T) = P$, es decir que el siguiente diagrama es conmutativo :

$$(4.7) \qquad \begin{tikzcd} & N_n(H) \arrow[dr, "\varphi"] & \\ G(H) \arrow[ur, "\pi_T"] \arrow[rr, "S_P = S_{T,P}"] \arrow[dr, "\pi_P"'] & & P_n^+(H) \\ & I_n(H) \arrow[ur, "GS_n"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Demostración</u> : Fijemos, en principio, $V \in G(H)$. Dado $A \in L(H)$ es fácil ver que, para $U \in G(H)$, se verifica $R(UAU^{-1}) = U(R(A))$ y $\ker(UAU^{-1}) = U(\ker A)$.
Por otro lado, si $P, Q \in P_n(H)$ y $R(P_1 + \ldots + P_i) = R(Q_1 + \ldots + Q_i) \quad \forall\, 1 \le i \le n$, entonces $P = Q$. Por lo tanto, si observamos que

$$R(S_{T,P}(V)_1 + \ldots + S_{T,P}(V)_i) = \ker(VTV^{-1})^i = V \ker T^i = V[R(P_1 + \ldots + P_i)]$$

para $1 \le i \le n$ y además, por (3.3) i)

$$\begin{aligned} R(S_P(V)_1 + \ldots + S_P(V)_i) &= R(\pi_P(V)_1 + \ldots + \pi_P(V)_i) \\ &= R[V(P_1 + \ldots + P_i)V^{-1}] \\ &= V[R(P_1 + \ldots + P_i)] \quad , \quad 1 \le i \le n, \end{aligned}$$

podemos concluir que $S_{T,P}(V) = S_P(V)\ \forall\, V \in G(H)$.
La continuidad de $S_{T,P}$ se deduce de la de S_P •

Corolario 4.8 : Dado $P \in P_n^+(H)$ y $T \in N_n(H)$ tales que $\varphi(T) = P$, entonces existe un entorno $\mathcal{V}_P$ de P en $P_n^+(H)$ y una sección local $t_P : \mathcal{V}_P \to N_n(H)$ de φ (es decir que $\varphi \circ t_P = Id_{\mathcal{V}_P}$) tal que $t_P(P) = T$ y $t_P(\mathcal{V}_P) \subset S(T)$.

<u>Demostración</u> : Basta definir $t_P = \pi_T \circ s_P$, donde $s_P : \mathcal{V}_P \to G(H)$ es la sección local definida en (3.11). Es claro que t_P es continua y $\varphi \circ \pi_T \circ s_P = \mathcal{S}_{T,P} \circ s_P = \mathcal{S}_P \circ s_P = Id_{\mathcal{V}_P}$. Por último, se sigue de las definiciones que $t_P(P) = T$ y $t_P(\mathcal{V}_P) \subset S(T)$ •

5. PUNTOS DE CONTINUIDAD DE φ.

La aplicación φ definida en el párrafo 4 tiene una desventaja lamentable: no es continua. En efecto, sea $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert separable $\dim \mathcal{K} = \infty$. Sea $K \in L(\mathcal{K})$ un operador compacto e inyectivo (por ejemplo, $K(e_n) = e_n/n$ para cierta base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{K}$) y sean $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset L(\mathcal{K})$ operadores de rango finito tales que $\|F_n - K\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Si tomamos $H = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ y

$$T(x,y) = (K(y),0) \quad , \quad T_n(x,y) = (F_n(y),0) \qquad x,y \in \mathcal{K} \,,$$

es claro que T y T_n , $n \in \mathbf{N}$ están en $N_2(H)$ y que $\|T_n - T\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, pero como $\ker F_n \neq \{0\}$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$ y

$$\ker T = \mathcal{K} \oplus \{0\} \subset \mathcal{K} \oplus \ker F_n = \ker T_n \quad \forall\, n \in \mathbf{N},$$

tenemos que $\|\varphi_1(T_n) - \varphi_1(T)\| = \|P_{\{0\}\oplus\ker F_n}\| = 1$ $\forall n \in \mathbf{N}$ y por lo tanto φ no es continua en el punto $T \in N_2(H)$.
Esto plantea el problema de caracterizar los puntos de continuidad de φ en $N_n(H)$.
El primer paso es observar que ser punto de continuidad de φ es invariante por similaridad.

Proposición 5.1 : Sea $T \in N_n(H)$ tal que φ es continua en T . Entonces si $S \sim T$, φ es también continua en S.

<u>Demostración</u> : Sea $(S_k)_{k\leq 1} \subset N_n(H)$ tal que $\|S_k - S\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$.
Si $S = UTU^{-1}$ con $U \in G(H)$, entonces es claro que $\|U^{-1}S_kU - T\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$ y por lo tanto $\varphi(U^{-1}S_kU) \xrightarrow{k\to\infty} \varphi(T)$. Por otra parte, usando que

$$\varphi(S_k) = GS_n(U\varphi(U^{-1}S_kU)U^{-1}) \,,$$
$$\varphi(S) = GS_n(U\varphi(T)U^{-1})$$

y el hecho de que GS_n es continua, concluimos que $\varphi(S_k) \xrightarrow{k\to\infty} \varphi(S)$ y por lo tanto φ es continua en S •

De esto deducimos que los puntos de continuidad de φ serán una unión de órbitas de similaridad y se plantea naturalmente la pregunta: ¿ Cuáles son los $T \in N_n(H)$ tales que $\varphi/_{S(T)}$ es continua?

Por una cuenta análoga a la anterior basta ver que $\varphi/_{S(T)}$ es continua en T.

Proposición 5.2 : Sea $T \in N_n(H)$ tal que $\pi_T : G(H) \to S(T)$ es abierta. Entonces $\varphi/_{S(T)}$ es continua.

Demostración : Usando el diagrama (4.7) sabemos que $\varphi \circ \pi_T$ es continua. Si $\mathcal{U}$ es un abierto en $P_n^+(H)$, como π_T es abierta

$$[\varphi/_{S(T)}]^{-1}(\mathcal{U}) = \pi_T([\varphi \circ \pi_T]^{-1})(\mathcal{U})$$

es un abierto con lo cual $\varphi/_{S(T)}$ es continua •

Corolario 5.3 : Si $T \in N_n(H)$, π_T es abierta y $S(T)$ es abierta en $N_n(H)$, entonces φ es continua en T y por lo tanto en toda $S(T)$.

Demostración : Es claro por lo anterior •

En los párrafos posteriores (8 y 9) se demostrará que para $T \in N_n(H)$, π_T es abierta si y sólo si T es similar a un nice Jordan. Más adelante volveremos al problema de caracterizar los $T \in N_n(H)$ tales que $\varphi/_{S(T)}$ (9.17) .

Corolario 5.4 : Si $T \in N_n(H)$ y T es similar a un nice Jordan, entonces $\varphi/_{S(T)}$ es continua.

Demostración : Ver las proposiciones 8.4 y 5.2 •

El teorema siguiente caracteriza los puntos de continuidad de $\varphi : N_n(H) \to P_n^+(H)$:

Teorema 5.5 : Sea $T \in N_n(H)$. Entonces φ es continua en T si y sólo si

$$T \sim q_j \oplus q_n^{(\infty)} \quad ; \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Por lo tanto, los puntos de continuidad de φ forman el conjunto

$$U = \bigcup_{j=0}^{n-1} S(q_j \oplus q_n^{(\infty)})$$

que es abierto y denso en $N_n(H)$.

Demostración : Notaremos $Q_j = q_j \oplus q_n^{(\infty)}$. Si $T \sim Q_j$ para cierto $0 \leq j \leq n-1$, por el corolario 2.29, se tiene que $S(T)$ es abierta y, por el corolario 5.4, $\varphi/_{S(T)}$ es continua, luego φ es continua en T.

Para probar la recíproca consideraremos tres casos:

Caso 1 : Supongamos que $T \in N_n(H)$ y $T \notin JN_n(H)$ (es decir que T no es similar a un Jordan). Por el teorema 2.4 existe $1 \leq j \leq n-1$ tal que $R(Q^j)$ no es cerrado, y por el lema 2.6 existe $1 \leq h \leq n-1$ tal que si $(T_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ es la representación matricial de T en la DC, entonces $R(T_{h,h+1})$ no es cerrado. Sea $H_j = R(\varphi(T)_j) = \ker T^j \ominus \ker T^{j-1}$
$1 \leq j \leq n$ y $T_{h,h+1} = V_h F_h$ la descomposición polar de $T_{h,h+1}$, con V_h isometría parcial y $F_h = (T^*_{h,h+1} T_{h,h+1})^{1/2}$, pensado como operador en $L(H_{h+1})$.
Como$R(T_{h,h+1})$ no es cerrado, entonces 0 es punto de acumulación de $\sigma(F_h) - \{0\}$. Por otra parte, como $F_h^* = F_h$ podemos definir $f(F_h)$ para $f \in B(\mathbf{R})$ una función Boreliana. Sea, entonces, $P_k = \aleph_{[1/k,\infty)}(F_h)$, $k \in \mathbf{N}$, pensado en $L(H_{h+1})$ y extendido luego a $L(H)$ anulándose en $H_{h+1}^{\perp}$.
Entonces P_k es un proyector y $\ker P_k \cap H_{h+1} \neq \{0\}$ $\forall\, k \in \mathbf{N}$. Definamos $T^{(k)}_{h,h+1} = V_h F_h P_k$ y T_k reemplazando, en la representación matricial de T, a $T_{h,h+1}$ por $T^{(k)}_{h,h+1}$.
Es fácil ver que si $x \in \ker P_k \cap H_{h+1}$, entonces $T_k^h(x) = 0$. En efecto, si $y \in H_{h+1} = \ker T^{h+1} \ominus \ker T^h$, se tiene que

$$T_k^h(y) = T_{1,2} T_{2,3} \dots T^{(k)}_{h,h+1}(y)$$

y si $x \in \ker P_k \cap H_{h+1}$ luego $T_k^h(x) = 0$.
Tenemos entonces que

$$\ker T^h \subseteq \ker T^h \perp (\ker P_k \cap H_{h+1}) \subset \ker T_k^h$$

y por lo tanto $\|P_{\ker T^h} - P_{\ker T_k^h}\| = 1 \quad \forall\, k \in \mathbf{N}$. Entonces $\varphi(T_k) \xrightarrow{k \to \infty} \varphi(T)$ en $L(H)^n$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|t - t_k\| &= \|T_{h,h+1} - T^{(k)}_{h,h+1}\| \\ &= \|V_h F_h (I - P_k)\| \\ &\leq \|F_h \aleph_{[0,\frac{1}{k})}(F_h)\| \leq 1/k \xrightarrow{k \to \infty} 0 \end{aligned}$$

y tenemos que φ no es continua en T.

Caso2 : Supongamos que $T \in N_n(H)$ y $T \sim J$ con J nilpotente de Jordan pero no nice Jordan. Recordemos que si llamamos $Q_\infty = q_1^{(\infty)} \oplus q_n^{(\infty)}$, por la proposición 2.13 ii), se

tiene que $J \in S(Q_\infty)^-$. Por la proposición 5.1, para ver que φ no es continua en T basta probarlo para J.
Sean $(W_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset G(H)$ tales que $W_k Q_\infty W_k^{-1} \xrightarrow{k\to\infty} J$. Sea H_1 el subespacio de H asociado a $q_1^{(\infty)}$ y H_2 el asociado a $q_n^{(\infty)}$ en Q_∞.
Definamos, entonces, los operadores $R_m = \frac{1}{m} q_2^{(\infty)} \oplus q_n^{(\infty)}$ donde $\frac{1}{m} q_2^{(\infty)}$ actúa en H_1 y $q_n^{(\infty)}$ en H_2. Si fijamos $k \in \mathbf{N}$, es claro que

$$W_k R_m W_k^{-1} \xrightarrow{m\to\infty} W_k Q_\infty W_k^{-1} .$$

Sean $J_k = W_k R_{m_k} W_k^{-1}$ para m_k tal que $\|J_k - W_k Q_\infty W_k^{-1}\| < \frac{1}{k}$.
Es fácil ver que $J_k \xrightarrow{k\to\infty} J$. Pero $\ker J_k \subset \ker(W_k Q_\infty W_k^{-1})$ con codimensión infinita $\forall\, k \in \mathbf{N}$.
Entonces

$$\|P_{\ker(W_k Q_\infty W_k^{-1})} - P_{\ker J_k}\| = 1 \quad \forall\, k \in \mathbf{N}.$$

Ahora, como $W_k Q_\infty W_k^{-1} \xrightarrow{k\to\infty} J$, pueden pasar dos cosas :

a) Si $\|P_{\ker(W_k Q_\infty W_k^{-1})} - P_{\ker J}\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$, entonces $\|P_{\ker J_k} - P_{\ker J}\| \xrightarrow{k\to\infty} 1$ y φ no sería continua en J (ya que $J_k \xrightarrow{k\to\infty} J$).

b) Si $P_{\ker(W_k Q_\infty W_k^{-1})}$ no tiende a $P_{\ker J}$ entonces φ tampoco puede ser continua en J.

Concluimos que φ no puede ser continua en J .

Si $T \in NJN_n(H)$ es tal que $\dim R(J^{n-1}) < \infty$ es fácil ver (en forma análoga a la demostración de 2.13 ii)) que $J \in S(Q_\infty)^-$ y en este caso se repite la demostración anterior para ver que φ no es continua en T.

Caso 3 : Supongamos que $T \in NJN_n(H)$ y sea $T \sim J$ con

$$J = q_n^{(\infty)} \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} q_j^{(\alpha_j)} \quad , \quad d_J = \sum_{i=1}^{n-1} j\alpha_j < \infty.$$

Supongamos, además, que J no es similar a ningún $Q_r \quad 0 \le r \le n-1$. Tendremos, entonces, que $\alpha_j > 1$ para cierto $1 \le j \le n-1$ o que hay dos o más $\alpha_i > 0$.
Por 5.1 basta probar que φ no es continua en J en este caso. Sea $d_J = nk + r$ para $0 \le k$ y $0 \le r < n$. Por el corolario 2.26 $J \in S(Q_r)^-$ y más aún, si llamamos $J_1 = \oplus_{j=1}^{n-1} q_j^{(\alpha_j)}$, entonces $J_1 \in S(q_r \oplus q_n^{(k)})^- \subset L(\mathbf{C}^{d_J})$.

Supongamos que $k \neq 0$:
Sea $(R_m)_{m\in\mathbf{N}} \subset S(q_r \oplus q_n^{(k)})$ una sucesión tal que $R_m \xrightarrow{m\to\infty} J_1$. Como $J_1^{n-1} = 0$ y

$\dim\ker[R_m^{n-1}] = d_J - k$, tenemos que

$$[R_m \oplus q_n^{(\infty)}] \xrightarrow{m\to\infty} J \quad y \quad \ker[(R_m \oplus q_n^{(\infty)})^{n-1}] \subset \ker J^{n-1}$$

con codimensión k , $\forall\, m \in \mathbf{N}$ y por lo tanto

$$\|P_{\ker[(R_m \oplus q_n^{(\infty)})^{n-1}]} - P_{\ker J^{n-1}}\| = 1 \quad , \quad \forall\, m \in \mathbf{N}.$$

Entonces φ no puede ser continua en J.

Si $k = 0$, $J_1 \in S(q_r)^-$ y $\alpha_j = 0$ para $j \geq r - 1$. Una repetición del argumento anterior demuestra que

$$\|P_{\ker[(R_m \oplus q_n^{(\infty)})^{r-1}]} - P_{\ker J^{r-1}}\| = 1 \quad , \quad \forall\, m \in \mathbf{N}$$

y nuevamemte φ no puede ser continua en J.

Con todos estos casos probamos que si φ es continua en T, entonces $T \sim Q_j = q_j \oplus q_n^{(\infty)}$ para cierto $0 \leq j \leq n-1$.
Para terminar la demostración, si aplicamos el corolario 2.29, obtenemos que

$$U = \bigcup_{j=0}^{n-1} S(Q_j)$$

es abierta y densa en $N_n(H)$ $\bullet$.

6. La Descomposición Canonica en el Algebra de Calkin..

Sea $A(H)$ el álgebra de Calkin de H y $p : L(H) \to A(H)$ la proyección. Usaremos indistintamente, para $T \in L(H)$, la notación $p(T) = \widetilde{T}$. La intención de esta sección es asignar una n-úpla de idempotentes autoadjuntos y "ortogonales" a los nilpotentes de orden n de $A(H)$. Se definen, en forma análoga que en $L(H)$, los conjuntos $N_n(A(H))$ y $P_n(A(H))$.

El problema es que dicha asignación no se puede definir en la forma "natural". Enunciemos, en principio, el siguiente resultado de Catherine Olsen (ver [20]) :

Teorema 6.0 : Sean $t \in A(H)$, $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ tales que $P(t) = 0$ y P es el polinomio minimal de t (si $Q(t) = 0 \Rightarrow Q = PR$ con $R \in \mathbb{C}[X]$), entonces existe $T \in L(H)$ tal que $\widetilde{T} = t$, $P(T) = 0$ y P es el polinomio minimal de T.

Con este resultado uno querría, dado $t \in N_n(A(H))$ y $T \in N_n(H)$ tal que $\widetilde{T} = t$, definir

$$\hat{\varphi}(t) = \widetilde{\varphi(T)} \in P_n(A(H)) \tag{6.1}$$

El problema es que la definición no es buena. Sea, por ejemplo, $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert separable y $H = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K} \oplus \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$. Sea $K \in L(\mathcal{K})$ un operador compacto e inyectivo,

$$\begin{array}{lll} T_1 \in L(H) & , & T_1(x,y,z,w) = (K(y),0,w,0) \quad y \\ T_2 \in L(H) & , & T_2(x,y,z,w) = \ (0,0,w,0)\,. \end{array} \tag{6.2}$$

Claramente $T_i \in N_2(H)$, $i = 1,2$ y $\widetilde{T_1} = \widetilde{T_2} = t \in N_2(A(H))$ pero

$$\ker T_1 = \{0\} \oplus \mathcal{K} \oplus \{0\} \oplus \mathcal{K} \quad y \quad \ker T_2 = \{0\} \oplus \{0\} \oplus \{0\} \oplus \mathcal{K},$$

por lo tanto $\hat{\varphi}(T_1) \neq \hat{\varphi}(T_2)$ en $A(H)^2$. Si aplicamos 6.1 tendríamos 2 definiciones para $\hat{\varphi}(t)$. Sin embargo, si nos restringimos a ciertos nilpotentes con buenas propiedades espectrales, podremos dar un definición consistente. Necesitamos, antes, un resultado de L.Fialkow y D.A.Herrero :

Proposición 6.3 : Sea $t \in N_n(A(H))$ tal que, para $1 \leq k \leq n-1$, se verifica que 0 es punto aislado de $\sigma(t^{*k}t^k)$ sii se puede encontrar $T \in N_n(H)$ tal que $\widetilde{T} = t$ y, para $1 \leq k \leq n-1$, 0 es punto aislado de $\sigma(T^{*k}T^k)$, es decir, existe $T \in JN_n(H)$ tal que $\widetilde{T} = t$.

Por el cálculo boreliano para operadores autoadjuntos se tiene, como en 4.2 i), que si $T \in N_n(H)$ entonces

$$P_{\ker T^k} = \aleph_{\{0\}}(T^{*k}T^k) \quad ; \quad 1 \leq k \leq n-1. \tag{6.4}$$

Si además suponemos que 0 es punto aislado en $\sigma(T^{*k}T^k)$ para $1 \leq k \leq n-1$, entonces si $\varepsilon > 0$ es tal que $B(0,\varepsilon) \cap \sigma(T^{*k}T^k) = \{0\}$, $1 \leq k \leq n-1$ se tiene que

$$P_{\ker T^k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (\lambda - T^{*k}T^k)^{-1}\, d\lambda \tag{6.5}$$

Sea $\quad JN_n(A(H)) = \{t \in N_n(A(H)) : 0 \text{ es aislado en } \sigma(t^{*k}t^k)\ ,\ 1 \leq k \leq n-1\}$.
La proposición 6.3 dice que $JN_n(A(H)) = P(JN_n(H))$. Entonces si nos restringimos a $JN_n(A(H))$ podemos definir

$$\gamma_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (\lambda - t^{*k}t^k)^{-1}\, d\lambda \quad ; \quad 1 \leq k \leq n-1 \tag{6.6}$$

para $t \in JN_n(A(H))$ y $\varepsilon > 0$ tal que $B(0,\varepsilon) \cap \sigma(t^{*k}t^k) = \{0\}$, $1 \leq k \leq n-1$ y finalmente

$$\tilde{\varphi} : JN_n(A(H)) \to P_n(A(H)) \quad ; \tag{6.7}$$

$$\tilde{\varphi}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t) - \gamma_1(t), \ldots, \gamma_{n-1}(t) - \gamma_{n-2}(t), 1 - \gamma_{n-1}(t)\,).$$

Si observamos que en el ejemplo 6.2 tenemos que $t = p(T_1) = p(T_2)$ y $t \in JN_n(A(H))$, en ese caso se verifica que $\tilde{\varphi}(t) = \widetilde{\varphi(T_2)}$ y más en general :

Proposición 6.8 : Sea $t \in JN_n(A(H))$ y sea (por 6.3) $T \in JN_n(H)$ tal que $\tilde{T} = t$, entonces $\tilde{\varphi}(t) = \widetilde{\varphi(T)}$.

<u>Demostración</u> : Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(0,\varepsilon) \cap \sigma(t^{*k}t^k) = \{0\} = B(0,\varepsilon) \cap \sigma(T^{*k}T^k)$ para todo $1 \leq k \leq n-1$ entonces, por las fómulas (6.5) y (6.6), tenemos que $p(P_{\ker T^k}) = \gamma_k(t)$ (como p es continua se mete en la integral) y por la definición de $\tilde{\varphi}$ en (6.7), se deduce que $\tilde{\varphi}(t) = \widetilde{\varphi(T)}$ •

En otras palabras, la proposición 6.8 dice que $\tilde{\varphi}$ coincide con la definición dada en (6.1), siempre que se elija un nilpotente similar a un Jordan en $p^{-1}(\{t\}) \cap N_n(H)$.

Observación 6.9 : i) De las fórmulas (6.5) y (6.6) se deduce que si $T \in JN_n(H)$ entonces $\varphi_i(T) \in \mathbf{C}^*(T)$ para $1 \leq i \leq n$ y, análogamente, para $t \in JN_n(A(H))$, $\tilde{\varphi}_i(t) \in \mathbf{C}^*(t)$ para $1 \leq i \leq n$.

2) En el caso de $A(H)$, es indispensable usar métodos viables en una C^*-álgebra, ya que $A(H)$ misma no es álgebra de Von Newman y no se puede dar un definición similar a (6.4) en $N_n(A(H))$. Además si $t \in N_n(A(H))$ y 0 no es aislado en $\sigma(t^{*k}t^k)$ para cierto $1 \leq k \leq n$,

entonces para cualquier $T \in N_n(H)$ tal que $\widetilde{T} = t$, existe $1 \leq j \leq n$ tal que 0 no es aislado en $\sigma(T^{*k}T^k)$ (proposición 6.3) y en tal caso no se verifica, en general, que $P_{\ker T^h} \in C^*(T)$ para $1 \leq h \leq n-1$. Por ejemplo, dado un tal $T \in N_n(H)$, no es difícil encontrar idempotentes ortogonales 2 a 2, P_1 , P_2 , P_3 con $\dim R(P_i) = \infty, i = 1,2,3$, tales que, para cierto $1 \leq k \leq n-1$, $P_1 + P_2 + P_3 = P_{\ker T^{n-k}}$, $P_j P_{\ker T^{n-k}} = P_{\ker T^{n-k}} P_j$ $(j = 1,2,3)$ y $P_j T^{*k}T^k$ y $T^{*k}T^k P_j$ son operadores compactos para $j = 1,2$. Claramente no hay forma de definir $\widetilde{\varphi}$ en este caso.

Abordaremos ahora el problema de caracterizar las puntos de continuidad de $\widetilde{\varphi}$. Primeramente :

Proposición 6.10 : Sea $t \in JN_n(A(H))$, tal que $t^{n-1} + t^* \notin G(A(H))$. Entonces $\widetilde{\varphi}$ no es continua en t.

Demostración : Sea $T \in JN_n(H)$ tal que $\widetilde{T} = t$. Sabemos que $\widetilde{\varphi}(t) = p(\varphi(T))$ y además que $\widetilde{T}^{k-1} + \widetilde{T}^* \notin G(A(H))$. Es fácil, entonces, ver que $T \notin NJN_n(H)$ (por el mismo tipo de argumento que en la proposición 2.17 y el corolario 2.18). Entonces por la proposición 2.13 ii), si $Q_\infty = q_1^{(\infty)} \oplus q_n^{(\infty)}$, tenemos que $T \in S(Q_\infty)^-$. Aplicando el mismo razonamiento que en la demostración del teorema 5.5 Caso 2 y luego proyectando a $A(H)$, vemos que $\widetilde{\varphi}$ no es continua en t, ya que se obtiene $(J_k)_{k\in \mathbb{N}} \subset JN_n(H)$ y $(W_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset G(H)$ tales que $W_k Q_\infty W_k^{-1} \xrightarrow{k\to\infty} T$ y $J_k \xrightarrow{k\to\infty} T$ pero $\ker J_k \subset \ker(W_k Q_\infty W_k^{-1})$ con codimensión infinita, luego

$$\|p(P_{\ker(W_k Q_\infty W_k^{-1})}) - p(P_{\ker J_k})\|_{A(H)} = 1 \quad \forall\, k \in \mathbf{N}$$

y la demostración sigue igual que la de (5.5) Caso 2 , teniendo en cuenta que

$$\widetilde{\varphi}(p(J_k)) = \widetilde{\varphi(J_k)} \quad y \quad \widetilde{\varphi}(p(W_k Q_\infty W_k^{-1})) = p(\varphi(W_k Q_\infty W_k^{-1}))$$

por la proposición 6.8 •

Proposición 6.11 : Sea $T \in JN_n(H)$, entonces $R(T^j)$ es cerrado $1 \leq j \leq n$ y

$$P_{R(T^{n-k})} = T^{n-k}T^{*n-k}[(T^{n-k} + T^{*k})(T^{*n-k} + T^k) + P]^{-1}$$

donde $P = P_{\ker T^k \ominus R(T^{n-k})}$.

Demostración : Sea $A = (T^{n-k} + T^{*k})(T^{*n-k} + T^k)$. Es claro que A es autoadjunto y que $R(A)$ es cerrado. En efecto $A = T^{n-k}T^{*n-k} + T^{*k}T^k$ cuyos rangos son ortogonales y cerrados ya que $T \in JN_n(H)$ y también $T^* \in JN_n(H)$ $(\sigma(T^kT^{*k}) = \sigma(T^{*k}T^k))$ y es fácil ver que $R(A) = R(T^{n-k}T^{*n-k}) \perp R(T^{*k}T^k)$ es cerrado. Además podemos ver que

$$\ker A = \ker T^k \cap \ker(T^{*n-k}) = \ker T^k \ominus R(T^{n-k})$$

y que $A + P_{\ker A} \in G(H)$. Entonces $P = P_{\ker A}$ y

$$I = (A+P)(A+P)^{-1} = T^{n-k}T^{*n-k}(A+P)^{-1} + T^{*k}T^k(A+P)^{-1} + P(A+P)^{-1}.$$

Es fácil ver que $T^{n-k}T^{*n-k}P = PT^{n-k}T^{*n-k} = 0$, $T^{*k}T^kP = PT^{*k}T^k = 0$ y que $T^{n-k}T^{*n-k}$ y $T^{*k}T^k$ conmutan con A. Tenemos entonces que

$$T^{n-k}T^{*n-k}(A+P)^{-1} + T^{*k}T^k(A+P)^{-1} + P = I$$

donde los tres sumandos son ortogonales y el producto de dos diferentes da cero.
Se concluye que $T^{n-k}T^{*n-k}(A+P)^{-1}$ es el proyector sobre $R(T^{n-k})$ •

Corolario 6.12 : Si $T \in N_n(H)$ y $T \sim q_n^{(\infty)}$, entonces, para $1 \leq k \leq n-1$,

$$P_{\ker T^k} = T^{n-k}T^{*n-k}(T^{*n-k} + T^k)^{-1}(T^{n-k} + T^{*k})^{-1} ,$$

y por lo tanto se tienen fórmulas explícitas para $\varphi/_{S(q_n^{(\infty)})}$

Demostración : Si $T \sim q_n^{(\infty)}$, entonces para $1 \leq k \leq n-1$, $\ker T^k = R(T^{n-k})$ y se aplica la proposición 6.11 •

Recordemos (2.18) que $N_n^+ = \{Q \in L(H) : \widetilde{Q}^{n-1} + \widetilde{Q}^* \in G(A(H))\}$. Llamaremos $NJN_n^+ = NJN_n(H) \cap N_n^+$. Es fácil ver que NJN_n^+ consiste de aquellos operadores que son similares a nilpotentes nice Jordan de la forma :

$$J = q_n^{(\infty)} \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} q_j^{(\alpha_j)} \quad con \quad \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j < \infty .$$

Lema 6.13 : Sea $Q = q_n^{(\infty)}$, entonces

$$\mathcal{A} = \{t \in N_n(A(H)) : t^{n-1} + t^* \in G(A(H))\} = p(NJN_n^+) = S(\widetilde{Q}) ,$$

donde $S(\widetilde{Q})$ es la órbita de similaridad de $\widetilde{Q}$ en $A(H)$. Más aún, $p^{-1}(\mathcal{A})\cap N_n(H) = NJN_n^+$.

Demostración : Sea $t \in \mathcal{A}$, por el teorema 6.1 existe $T \in N_n(H)$ tal que $\widetilde{T} = t$. Como $T^n = 0$, por la proposición 2.17, $T \in NJN_n^+$ y tenemos que $\mathcal{A} \subset p(NJN_n^+)$. Por otra parte es fácil ver que si $T \in NJN_n^+$, entonces $\widetilde{T} \in \mathcal{A}$, con lo cual tenemos una igualdad.
Si $t \in S(\widetilde{Q})$, entonces si $w \in G(A(H))$ es tal que $t = w\widetilde{Q}w^{-1}$ y $\rho : A(H) \to L(\mathcal{K})$ es una re- presentación fiel unital para cierto espacio de Hilbert separable $\mathcal{K}$, tenemos que $\rho(t) \sim \rho(\widetilde{Q})$ en $L(\mathcal{K})$ y, como $Q^{n-1} + Q^* \in G(H)$, $\rho(\widetilde{Q})^{n-1} + \rho(\widetilde{Q})^* \in G(\mathcal{K})$ y por el lema 2.15, $\rho(t) \sim \rho(\widetilde{Q}) \sim q_n^{(\infty)}$ en $L(\mathcal{K})$ y por lo tanto, usando nuevamente el lema 2.15, tenemos que $t \in \mathcal{A}$.
Por último, sea $t = \widetilde{T}$ con $T \in NJN_n^+$, $T \sim J$ con $J = q_n^{(\infty)} \oplus F$ con $F \in L(\mathbb{C}^d)$ para cierto $d < \infty$ y F en su forma de Jordan. Luego $t \sim \widetilde{J}$ en $A(H)$; veamos que $\widetilde{J} \in S(\widetilde{Q})$.
Sea H_1 donde actúa $q_n^{(\infty)}$ de J y H_2 donde actúa F. Sea $U : H_1 \to H$ una isometría suryectiva y $V : H_1 \hookrightarrow H$ la inclusión. Es claro que $UV^*JVU^* \simeq Q$, pero $p(UV^*) \in U(A(H))$ ya que $\dim H_2 = d < \infty$, luego $p(J) \simeq p(Q)$ y $\widetilde{J} \in S(\widetilde{Q})$.
El hecho de que $p^{-1}(\mathcal{A}) \cap N_n(H) = NJN_n^+$ es consecuencia directa de la proposición 2.17 •

De la proposición 6.10 y el lema 6.13 deducimos que si $t \in JN_n(A(H))$ y $t \notin S(p(q_n^{(\infty)}))$ entonces $\widetilde{\varphi}$ no es continua en t. Probaremos a continuación que $S(p(q_n^{(\infty)}))$ es exactamente el conjunto de puntos de continuidad de $\widetilde{\varphi}$:

Lema 6.14 : Si $t \in S(p(q_n^{(\infty)}))$, entonces si recordamos las aplicaciones γ_k de 6.6, se tiene que
$$\gamma_k(t) = t^{n-k}t^{*n-k}(t^{*n-k} + t^k)^{-1}(t^{n-k} + t^*)^{-1} \quad ; \quad 1 \le k \le n-1 .$$

Demostración : En principio, por el lema 2.15 y representando al álgebra de Calkin en un álgebra de operadores en un espacio de Hilbert como en la demostración del lema 6.13, se tiene que, para $1 \le k \le n-1$, $t^{*n-k} + t^k$ es inversible en $A(H)$. Por otra parte, por el lema 6.13, podemos tomar $T \in NJN_n^+$ tal que $\widetilde{T} = t$. Mirando la demostración de la proposición 6.11, como $T^{n-k} + T^{*k}$ es de Fredholm, lo mismo ocurre con $A = (T^{n-k} + T^{*k})(T^{*n-k} + T^k)$ y por lo tanto $P = P_{\ker A} = P_{\ker T^k \ominus R(T^{n-k})}$ tiene rango finito, para $1 \le k \le n-1$. Entonces
$$\begin{aligned}\gamma_k(t) &= p(P_{\ker T^k}) \\ &= p(P) + t^{n-k}t^{*n-k}p(A)^{-1} \\ &= t^{n-k}t^{*n-k}(t^{*n-k} + t^k)^{-1}(t^{n-k} + t^{*k})^{-1} \quad \bullet\end{aligned}$$

Teorema 6.15 : El conjunto de puntos de continuidad de $\tilde{\varphi} : JN_n(A(H)) \to P_n(A(H))$ es igual a la órbita de similaridad de $p(q_n^{(\infty)})$ en $A(H)$, que es un subconjunto abierto y denso de $N_n(A(H))$. Además, si $t \in S(p(q_n^{(\infty)}))$, entonces $\tilde{\varphi}(t) = p(\varphi(T))$ para cualquier $T \in N_n(H) \cap p^{-1}(\{t\})$.

<u>Demostración</u> : Sea $q = p(q_n^{(\infty)})$ y $t \in S(q)$, por el lema 6.13, $t^{n-1} + t^* \in G(A(H))$ y además $p^{-1}(\{t\}) \cap N_n(H) \subset NJN_n^+ \subset JN_n(H)$. Luego, por la proposición 6.8, si $T \in p^{-1}(\{t\}) \cap N_n(H)$, entonces $\tilde{\varphi} = p(\varphi(T))$.

Como por (6.13) $S(q) = \{t \in N_n(A(H)) : t^{n-1} + t^* \in G(A(H))\}$ que es abierto en $N_n(A(H))$ y, por lo tanto, también en $JN_n(A(H))$, si $t \in S(q)$, se puede encontrar un entorno de t en $JN_n(A(H))$ tal que la fórmula de γ_k , $1 \leq k \leq n-1$ es como en el lema 6.14 para s en dicho entorno, y por lo tanto, γ_k es continua en t , $1 \leq k \leq n-1$. Finalmente, por la fórmula (6.7), $\tilde{\varphi}$ es continua en t. Por la proposición 6.10, se tiene que los puntos de continuidad de φ son exactamente los $t \in S(q)$.

Ya vimos que $S(q)$ es abierta en $N_n(A(H))$, para ver que es densa, basta aplicar el lema 6.13 y el hecho de que NJN_n^+ es denso en $N_n(H)$ •

7. Propiedades Geometricas y Topologicas de las orbitas de Similaridad.

En esta sección aparecerán algunos resultados previos necesarios para el teorema de caracterización de las órbitas de similaridad que son subvariedades de $L(H)$.
Primeramente, resultados y definiciones de geometría diferencial en dimensión infinita. Para definiciones más precisas y demostraciones, se refiere al lector a [17],[23],[18].

Dados E y F espacios de Banach complejos, $\mathcal{U}$ abierto en E y $f : \mathcal{U} \to F$ continua, entonces f es analítica si para cada $x \in \mathcal{U}$ y $V \in E$ existe el límite

$$df_x(V) = \lim_{z \to 0} \frac{f(x + zV) - f(x)}{t} \quad y \quad df_x \in L(E, F) .$$

Dado $X \subset E$ diremos que X es subvariedad analítica de E si para cada $x_0 \in X$, existen abiertos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de E, con $0 \in \mathcal{U}$, $x_0 \in \mathcal{V}$, un difeomorfismo analítico $\varphi_{\mathcal{U}\mathcal{V}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ tal que $\varphi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(0) = x_0$ y subespacios cerrados complementarios S y T de E , $S \oplus T = E$ tales que $\varphi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}/_{\mathcal{U}\cap T} : \mathcal{U} \cap T \to \mathcal{V} \cap X$ es un homeomorfismo, considerando en X la topología inducida por E. El espacio tangente a X en x_0 , TX_{x_0} se define por

$$TX_{x_0} = \{ \frac{d\alpha(t)}{dt}|_{t=0} / \ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X \ , \ \alpha \in C^{\infty} \ , \ \alpha(0) = x_0 \}$$

que se identifica naturalmente, con las notaciones anteriores, con $d(\varphi_{\mathcal{U}\mathcal{V}})_{x_0}(T)$. De lo anterior se deduce que TX_{x_0} es un subespacio cerrado y complementado de E , $\forall\, x_0 \in X$.
En forma análoga al caso de dimensión finita se definen funciones analíticas entre subvariedades, el teorema de la función inversa sigue siendo válido en estos casos y, en la definición de sumersión, además de que el rango de la diferencial sea sobre en todo punto, se pide que el núcleo de la diferencial sea *complementado* :

Definición : Si E y F espacios de Banach y X e Y subvariedades analíticas, entonces una función analítica $f : X \to Y$ es una sumersión si $\forall\, x \in X$ se verifican :

i) $\ker df_x$ es complementado en TX_x

ii) df_x es sobreyectiva.

Un Grupo de Lie-Banach es un grupo topológico G, contenido en un espacio de Banach E, quei G es subvariedad analítica de E tal que las aplicaciones

$G \times G \to G \quad ; \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1.x_2$

$G \to G \quad ; \quad x \mapsto x^{-1}$

son analíticas. El ejemplo principal de grupo de Lie-Banach que utilizaremos aquí es el grupo de elementos inversibles de un álgebra de Banach y, más específicamente, $G(H) \subset L(H)$.

Dado un grupo de Lie-Banach G y una subvariedad X de un espacio de Banach E, una acción

$$* : G \times X \to X \quad ; \quad (g, x) \mapsto g * x \quad , \quad g \in G \, , \, x \in X$$

(que verifica $g_1 * (g_2 * x) = (g_1 * g_2) * x$ y $1 * x = x$) es analítica si lo es como función entre dichas variedades. Se llamará transitiva si, dados x e y en X, existe $g \in G$ tal que $x = g * y$.

<u>Definición</u> : Dados G y X como antes, diremos que X es un espacio homogéneo bajo la acción de G, si existe una acción analítica y transitiva $* : G \times X \to X$ y existe $x_0 \in X$ tal que la aplicación

$$\pi_{x_0} : G \to X \quad ; \quad g \mapsto g * x_0$$

es una sumersión.

Es bien conocido que si X es un espacio homogéneo bajo G, entonces $\pi_{x_0} : G \to X$ tiene secciones locales analíticas y, por lo tanto, es abierta. Por las definiciones de subvariedad y de sumersión deducimos que $\ker d(\pi_{x_0})_1$ y $R(d(\pi_{x_0})_1) = TX_{x_0}$ son subespacios complementados de los espacios ambientes. Usando el teorema de la función implícita se puede obtener la recíproca, que enunciaremos sólo en el contexto que nos interesa :

Sean A un álgebra de Banach compleja, A^{-1} el grupo de Lie-Banach analítico de elementos inversibles de A y $a \in A$. Dada una acción analítica de A^{-1} sobre A definimos

$S(a) = \{g * a : g \in A^{-1}\}$, la órbita de a,

$\pi_a : A^{-1} \to S(a)$, dada por $\pi_a(g) = g * a$

y llamemos $\delta_a = d(\pi_a)_1$, $\delta_a \in L(A)$. Entonces

Teorema 7.1 : $S(a)$ es subvariedad analítica de A y además es un espacio homogéneo bajo la acción de A^{-1} si y solo si se verifican :

i) π_a es una aplicación abierta

ii) $\ker \delta_a$ es complementado en A

iii) $R(\delta_a)$ es complementado en A.

<u>Demostración</u> : En los párrafos anteriores vimos que las condiciones i),ii) y iii) son necesarias. Para una demostración completa de la suficiencia ver [23] •

Agregaremos, a continuación, otra condición equivalente al hecho de ser $S(a)$ espacio homogéneo bajo la acción de A^{-1} :

Proposición 7.2 : Dado $a \in A$, álgebra de Banach y una acción $*$ de A^{-1} sobre A, son equivalentes :

1) $S(a)$ es subvariedad analítica de A y espacio homogéneo bajo la acción de A^{-1}
2) existe un entorno $\mathcal{U}_a$ de a y una aplicación analítica $w_a : \mathcal{U}_a \to A^{-1}$ tal que $w_a(a) = 1$ y $w_a/_{\mathcal{U}_a \cap S(a)}$ es una sección local para π_a.

Demostración : 1)$\to$2) Por el teorema 7.1 podemos tomar E_1 suplemento de $\ker \delta_a$ y E_2 de $R(\delta_a)$ ambos en A. Sea $\mu : E_1 \oplus E_2 \to A$ dada por

$$\mu(e_1, e_2) = \pi_a(\exp e_1) + e_2 .$$

Es fácil ver que $d\mu_0(e_1, e_2) = \delta_a(e_1) + e_2$, y como $\delta_a : E_1 \to R(\delta)$ es un isomorfismo, por el teorema de la función inversa, existen abiertos $\mathcal{U} \subset E_1 \oplus E_2$, con $0 \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{V} \subset A$, con $a \in \mathcal{V}$ tales que $\mu : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ es un difeomorfismo y $\mu(\mathcal{U} \cap E_1) = \mathcal{V} \cap S(a)$.
Por otra parte, si $c \in \mathcal{U} \cap E_1$, entonces $\mu(c) = \pi_a(\exp c)$. Sea $w : \mathcal{U} \to A^{-1}$, $w(e_1, e_2) = \exp e_1$ y

$$w_a : \mathcal{V} \to A^{-1} \quad ; \quad w_a(b) = w(\mu^{-1}(b)) \text{ , } b \in \mathcal{V} .$$

Es claro que w_a verifica las condiciones de 2).
2)$\to$1) Probaremos las condiciones i), ii) y iii) del teorema 7.1. La condición i) es clara por la existencia de secciones locales.
Verifiquemos que $\delta_a \circ d(w_a)_a \circ \delta_a = \delta_a$ o, equivalentemente, (recordemos que $\delta_a = d(\pi_a)_a$)

$$d(\pi_a \circ w_a)_a/_{R(\delta_a)} = I_{R(\delta_a)}.$$

Fijado $b \in A$, sea $\alpha(t) = \pi_a(1 + tb)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, para $\varepsilon > 0$ tal que $1 + tb \in A^{-1}$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Entonces $\alpha'(0) = \delta_a(b)$, $\alpha(0) = a$ y $\alpha(t) \in S(a)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Por lo tanto

$$d(\pi_a \circ w_a)_a(\delta_a(b)) = \frac{d}{dt}(\pi_a \circ w_a \circ \alpha(t))|_{t=0} = \alpha'(0) = \delta_a(b).$$

Luego $\delta_a \circ d(w_a)_a$ y $d(w_a)_a \circ \delta_a$ son operadores idempotentes en $L(A)$ que verifican

$$\ker \delta_a = \ker[d(w_a)_a \circ \delta_a] \quad ; \quad R(\delta_a) = R[\delta_a \circ d(w_a)_a]$$

que, por lo tanto, resultan ser cerrados y complementados •

Estos resultados se aplicarán para la acción de A^{-1} sobre A dada por $g * a = gag^{-1}$ y la órbita $S(a)$ coincidirá con la órbita de similaridad de a en A.

A continuación una serie de resultados que conciernen más espcíficamente a la topología de $S(a)$ y más explícitamente a la propiedad de que π_a sea abierta.

Proposición 7.3 : Sea A un álgebra de Banach, $a \in A$, $\delta_a \in L(A)$ dada por $\delta_a(b) = ab - ba$. Si la aplicación $\pi_a : A^{-1} \to S(a)$ (dada por $\pi_a(u) = uau^{-1}$, $u \in A^{-1}$) es abierta, entonces $R(\delta_a)$ es cerrado en A.

<u>Demostración</u> : Llamemos $E(a) = \ker \delta_a = \{b \in A : ba = ab\}$. $E(a)$ es un subespacio cerrado, sea por lo tanto $p : A \to A/_{E(a)}$ la proyección canónica, notaremos $\bar{b} = p(b)$ y $\|\bar{b}\| = \inf\{\|b - c\| : c \in E(a)\}$, la norma en $A/_{E(a)}$. Definamos

$$\bar{\delta}_a : A/_{E(a)} \to A \quad ; \quad \bar{\delta}_a(\bar{c}) = \delta_a(c) = ac - ca \quad , \quad c \in A/_{E(a)}.$$

Es claro que la definición es buena y que $R(\bar{\delta}_a) = R(\delta_a)$. Por lo tanto basta probar que $\bar{\delta}_a$ es acotada inferiormente.

Sea $(c_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset A$ tal que $\|\bar{c}_n\| = 1$ y $\bar{\delta}_a(\bar{c}_n) = \delta_a(c_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Sea $(b_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset A$ tal que $\bar{b}_n = \bar{c}_n$ y $\|b_n\| < 2$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Sea $\lambda \in \mathbf{C}$ tal que $|\lambda| > 2$. Entonces $b_n - \lambda \in A^{-1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$ y

$$\begin{aligned}
\|(b_n - \lambda)^{-1}\| &= |\lambda|\, \|(1 - \frac{b_n}{\lambda})^{-1}\| \\
&\leq |\lambda|\, (1 - \frac{\|b_n\|}{|\lambda|})^{-1} \\
&= (|\lambda| - \|b_n\|)^{-1} \\
&< (|\lambda| - 2)^{-1} .
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|t - (b_n - \lambda)t(b_n - \lambda)^{-1}\| \leq \|\delta_a(b_n - \lambda)\|\|(b_n - \lambda)^{-1}\| \leq [(|\lambda| - 2)^{-1}]\|\delta_a(c_n)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

Como suponemos que π_a es abierta, podemos encontrar una sucesión $(w_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset A^{-1}$ tal que $\pi_a(b_n - \lambda) = \pi_a(w_n)$ y además $\|w_n - 1\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. entonces $w_n^{-1}(b_n - \lambda) \in E(a)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
1 = \|\bar{b}_n\| &= \|\bar{b}_n - \bar{\lambda}\| \\
&\leq \|(b_n - \lambda) - w_n^{-1}(b_n - \lambda)\| \\
&\leq \|b_n - \lambda\|\|w_n^{-1} - 1\| \\
&\leq (2 + |\lambda|)\|w_n^{-1} - 1\| \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

lo que es absurdo. Luego $\bar{\delta}_a$ es acotado inferiormente y $R(\delta_a)$ es cerrado •

Introduciremos, ahora, el módulo mínimo reducido de C. Apostol:
Sea X espacio de Banach, $T \in L(X)$. Definimos

$$\gamma(T) = \begin{cases} \inf\{\|T(x)\| : d(x, \ker T) = 1\} & T \neq 0 \\ 0 & T = 0. \end{cases}$$

Observación 7.5 : $\gamma(T) > 0 \Leftrightarrow R(T)$ es cerrado .

Demostración : $\gamma(T) > 0$ sii $\inf_{\|\bar{x}\|=1} \|\tilde{T}(\bar{x})\| > 0$, donde $\tilde{T} : X/_{\ker T} \to X$ está definida por $\tilde{T}(\bar{x}) = T(x)$ para cierto $x \in X$ tal que $[x]_{\ker T} = \bar{x}$. Por lo tanto $\gamma(T) > 0$ sii $\tilde{T}$ es acotado inferiormente sii $R(\tilde{T}) = R(T)$ es cerrado •

Lema 7.6 : i) $\Gamma_\varepsilon = \{A \in L(X) : \gamma(A) \geq \varepsilon\}$ es cerrado en $L(X)$
ii) Si $U \in G(H)$, $A \in L(H)$ entonces $\gamma(UAU^{-1}) \geq \|U\|^{-1}\|U^{-1}\|^{-1}\gamma(T)$.

Demostración : Para probar i), dado $A \in L(H)$, consideremos $A^* \in L(X^*)$, donde X^* es el dual de X y A^* el operador adjunto de A, $A^*(\varphi)(x) = \varphi(A(x))$, para $x \in X$, $\varphi \in X^*$.
Es fácil ver que $\gamma(A) = \gamma(A^*)$. Por lo tanto, dada una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \Gamma_\varepsilon(X)$ tal que $\|A - A_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, probaremos que $\gamma(A^*) \geq \varepsilon$.
Sea $\varphi \in X^*$ y $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset X^*$ tales que $\varphi - \varphi_n \in \ker A_n^*$ y $\|\varphi\| \leq \frac{n+1}{n} d(\varphi, \ker A_n^*)$. Tenemos entonces que

$$\|A_n^*(\varphi)\| \geq \varepsilon d(\varphi, \ker A_n^*) \geq \frac{\varepsilon n}{n+1}\|\varphi_n\|.$$

Como $\forall\ n \in \mathbf{N}$ $\|\varphi_n\| \leq 2\|\varphi\|$, usando que la bola en X^* es débilmente compacta, existe $\psi \in X^*$ y una subsucesión $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ tal que $\varphi_{n_k}(z) \xrightarrow{k\to\infty} \psi(z)$, $\forall\ z \in X$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|A^*(\varphi)\| &= \lim_{k\to\infty} \|A_{n_k}^*(\varphi)\| \\ &= \lim_{k\to\infty} \|A_{n_k}^*(\varphi_{n_k})\| \\ &\geq \lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon n_k}{n_k+1}\|\varphi_{n_k}\| \\ &= \varepsilon\|\psi\|. \end{aligned}$$

Además, una simple cuenta prueba que $\varphi - \psi \in \ker A^*$ y entonces

$$\|A^*(\varphi)\| \geq \varepsilon\|\psi\| = \varepsilon d(\psi, \ker A^*) = \varepsilon d(\varphi, \ker A^*).$$

Esto pasa para toda $\varphi \in X^*$, luego $\gamma(A^*) \geq \varepsilon$.
Para probar ii), dado $U \in G(H)$, veremos que $\gamma(UT) \geq \|U^{-1}\|^{-1}\gamma(T)$ $\forall\ T \in L(H)$. En

efecto, $\ker UT = \ker T$, si $d(x, \ker T) = d(x, \ker UT) = 1$, entonces

$$\|UTx\| \geq \|U^{-1}\|^{-1}\|U^{-1}Tx\|.$$

Por otra parte $\forall\, V \in G(H)$, $\gamma(TV) \geq \|V^{-1}\|^{-1}\gamma(T)$ ya que como $\ker TV = V^{-1}(\ker T)$, si $d(x, V^{-1}\ker T) = 1$, entonces $d(Vx, \ker T) \geq \|V^{-1}\|^{-1}$ y por lo tanto $\|TVx\| \geq \|V^{-1}\|^{-1}\gamma(T)$. Con ambas desigualdades obtenemos ii) •

Definición 7.7 : Dados $r \in \mathbf{R}_{\geq 1}$ y $T \in L(H)$, llamaremos :

i) $G_r(H) = \{U \in G(H) : \|U\|\|U^{-1}\| < r\}$

ii) $S_r(T) = \pi_T(G_r(H)) = \{UTU^{-1} : U \in G_r(H)\ \}$

iii) $S_{ap}(T) = \cup_{r \in \mathbf{R}_{\geq 1}} S_r(T)^-$

iv) $[T] = \{A \in L(H) : A \underset{sim}{\longrightarrow} T \text{ y } T \underset{sim}{\longrightarrow} A\ \}$.

Lema 7.8 : Sea $T \in L(H)$ y $L \in S_{ap}(T)$, entonces si $R(\delta_T)$ es cerrado, $R(\delta_L)$ es también cerrado.

Demostración : Supongamos que $L \in S_r(T)^-$ para cierto $r > 1$ y sea $(W_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset G_r(H)$ tal que $\|L - W_nTW_n^{-1}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Definamos, para $W \in G(H)$ $ad_W : L(H) \to L(H)$ dada por $ad_W(A) = WAW^{-1}$. Se tiene que $ad_W \in G(L(H))$, $\delta_{W_nTW_n^{-1}} = ad_{W_n} \circ \delta_T \circ ad_{W_n^{-1}}$ y $\|ad_W\| = \|W\|\|W^{-1}\|$. Por el lema 7.6 ii),

$$\gamma(\delta_{W_nTW_n^{-1}}) \geq \frac{\gamma(\delta_T)}{\|ad_{W_n}\|\|ad_{W_n^{-1}}\|} \geq \frac{\gamma(\delta_T)}{r^2}$$

ya que $W_n \in G_r(H)$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Si $R(\delta_T)$ es cerrado, por la observación 7.5, $\gamma(\delta_T) > 0$. Pongamos $\gamma(\delta_T) = \varepsilon$, entonces $\delta_{W_nTW_n^{-1}} \in \Gamma_{\frac{\varepsilon}{r^2}}(L(H))$ y por el lema 7.6 i), resulta que $\delta_L \in \Gamma_{\frac{\varepsilon}{r^2}}(L(H))$, luego $R(\delta_L)$ es cerrado •

Lema 7.9: Sea $T \in L(H)$ y $T \oplus T \in L(H \oplus H)$, entences $\gamma(\delta_T) > 0 \Rightarrow \gamma(\delta_{T\oplus T}) > 0$.

Demostración : El resultado se obtiene fácilmente teniendo en cuenta la observación 7.5 y que, si representamos matricialmente los operadores de $L(H \oplus H)$, tenemos qur

$$\delta_{T\oplus T}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_T(A) & \delta_T(B) \\ \delta_T(C) & \delta_T(D) \end{pmatrix} \begin{matrix} H \\ H \end{matrix} \qquad \bullet$$

Proposición 7.10 : Sea $T \in L(H)$. Si $R(\delta_T)$ es cerrado, entonces $\forall\ r \geq 1\,,\ \varepsilon > 0$ se verifica que $S_r(T)^- \subset S_{r+\varepsilon}(T)$.

<u>Demostración</u> : Sea $r \geq 1$ fijo, $L \in S_r(T)^-$ y $(W_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset G_r(H)$ tales que $\|L - W_nTW_n^{-1}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y además $\|W_n\| \leq \sqrt{r}$, $\|W_n^{-1}\| \leq \sqrt{r}$ (esto se otiene multiplicando a W_n por escalares complejos) . Sea $\varepsilon > 0$.
Como $T \oplus L \in S_{ap}(T \oplus T)$, por los lemas 7.8 y 7.9, sabemos que como $\gamma(T) > 0$ entonces $\gamma(T \oplus L) > 0$. Sea $(M_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset L(H \oplus H)$ dada por

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & W_n^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \delta_{T\oplus L}(M_n) = \begin{pmatrix} 0 & TW_n^{-1} - W_n^{-1}L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\lim_{n\to\infty} \|\delta_{T\oplus L}(M_n)\| \leq \sqrt{r}\lim_{n\to\infty} \|W_nTW_n^{-1} - L\| = 0$.
Como $\gamma(\delta_{T\oplus L}) > 0$, tenemos que $d(M_n, E(T \oplus L)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y podemos tomar $R_n \in E(T \oplus L)$ tales que $\|M_n - R_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Si $R_n = \begin{pmatrix} * & B_n \\ * & * \end{pmatrix}$, como $R_n \in E(T \oplus L)$, se tiene que $TB_n - B_nL = 0$ y además $\|B_n - W_n^{-1}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Por lo tanto, para n suficientemente grande, $B_n \in G(H)$ y más aún, como $\|B_n - W_n^{-1}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y $\|W_n\| \leq \sqrt{r}\ \forall n \in \mathbf{N}$ se tiene que $\|B_n^{-1} - W_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y se puede obtener $n_1 \in \mathbf{N}$ tal que, si $n \geq n_1$, $B_{n_1} \in G_{r+\varepsilon}(H)$. Luego $L \in S_{r+\varepsilon}(T)$ •

Teorema 7.11 : Sea $T \in L(H)$ tal que $\pi_T : G(H) \to S(T)$ es abierta, enonces $[T] = S(T)$.

<u>Demostración</u> : Supongamos que existe $B \in [T] - S(T)$. Sea $(B_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset S(B)$ tal que $\|T - B_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Sea $(T_{n,k})_{k\in\mathbf{N},n\in\mathbf{N}} \subset S(T)$ tal que $\|B_n - T_{n,k}\| \xrightarrow{k\to\infty} 0\ \forall n \in \mathbf{N}$ y sea $(W_{n,k})_{n\in\mathbf{N},k\in\mathbf{N}} \subset G(H)$ tal que $T_{n,k} = W_{n,k}TW_{n,k}^{-1}$.
Como $B_n \sim B$, $B_n \notin S(T)$, por las proposiciones 7.3 y 7.10, tenemos que $B_n \notin S_r(T)^-$ para ningún $r \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$.
En particular $B_n \notin S_n(T)^-$. Por lo tanto podemos encontrar $k_n \in \mathbf{N}$ tal que $k \geq k_n \Rightarrow T_{n,k} \notin S_n(T)$. Sean $h_n \geq k_n$ tales que $\|B_n - T_{n,h}\| < \frac{1}{n}$ si $h \geq h_n$, entonces

$$\|T - T_{n,h_n}\| \leq \|T - B_n\| + \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Pero $G_2(H)$ es un entorno de I en $G(H)$ y $T_{n,h_n} \notin \pi_T(G_2(H))$ para $n \geq 2$. En tal caso π_T no sería abierta •

El teorema que sigue, del que se omite demostración, es el que permite restringirse a los operadores similares a nice Jordans para el estudio de las propiedades geométricas de la órbita de similaridad.

Teorema 7.12 : Sea $T \in L(H)$ tal que $[T] = S(T)$, entonces T es similar a un nice Jordan.

Remitimos a [6, Corolario 9.37] para ver una demostración. El camino utilizado es el de aplicar los teoremas centrales de caracterización de las clausuras de órbitas de similaridad de operadores en base a propiedades espectrales, de índice y algebráicas o espaciales y la construcción sistemática de contraejemplos a la igualdad $[T] = S(T)$ en todos los casos desfavorables. Primero para operadores no esencialmente algebráicos y luego los distintos tipos de operadores esencialmente nilpotentes ([6, Apéndice 2.19). Por ejemplo, en la observación 2.14 se observa que este es el caso para los nilpotentes de Jordan, pero no nice Jordan.

Este resultado fue obtenido por L.Fialkow y D.A.Herrero y solamente está publicado en el libro mencionado. Omitiremos la demostración por ser ésta demasiado extensa para este trabajo.

Proposición 7.13 : Sea $T \in L(H)$, si $S(T)$ es localmente cerrada, entonces $[T] = S(T)$.

Demostración : Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(T,\varepsilon)^- \cap S(T)^- \subset S(T)$. Sean $A \in S(T)^-$ y $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset S(A)$ tales que $\|A_n - T\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Como $\forall n \in \mathbf{N}$, $A_n \in S(T)^-$; para n suficientemente grande, $A_n \in S(T)$, luego $A \in S(T)$ y $[T] \subset S(T)$. La otra inclusión es clara •

Teorema 7.14 : Dado $T \in L(H)$ y $\pi_T : G(H) \to S(T)$ dada por $\pi_T(U) = UTU^{-1}$, $U \in G(H)$, entonces cada una de las propiedades :

SV) $S(T)$ es subvariedad analítica de $L(H)$ y π_T define un espacio homogéneo.

SL) π_T tiene secciones locales continuas.

AB) π_T es abierta.

LC) $S(T)$ es localmente cerrada.

[P]) $[T] = S(T)$.

Implica :

BJ) T es similar a un operador nice Jordan.

Además SV) implica todas las demás.

<u>Demostración</u> : Es claro que SV $\to$ SL $\to$ AB.
El teorema 7.11 dice que AB $\to$ [P] y la proposición 7.13 dice que LC $\to$ [P] . Aplicando el teorema 7.12 vemos que todas implican NJ.
Lo único que falta ver entonces, es que SV $\to$ LC, lo que es claro •

En la sección siguiente se probará que NJ $\to$ SV, con lo que quedará establecido el teorema principal de este trabajo, que es la equivalencia entre todas las propiedades que aparecen en (7.14).

8. OPERADORES NICE JORDAN.

El propósito de esta sección es probar que si $T \in L(H)$ es similar a un nice Jordan, entonces $S(T)$ es subvariedad analítica de $L(H)$ y $\pi_T : G(H) \to S(T)$ define un espacio homogéneo. Para ello se utilzarán las proposiciones 7.1 y 7.2 ; la primera para el caso T nilpotente y la segunda para el caso general.

Proposición 8.1 : Sea $J \in L(H)$ un nilpotente Jordan de orden n, entonces si $\delta_J : L(H) \to L(H)$, dada por $\delta_J(X) = XJ - JX$, $X \in L(H)$, se verifica que $\ker \delta_J$ y $R\delta_J$ son subespacios cerrados y complementados.

Demostración : Sea $J = q_1^{(\alpha_1)} \oplus q_1^{(\alpha_2)} \oplus \ldots \oplus q_n^{(\alpha_n)}$, $0 \leq \alpha_j \leq \infty$. Lamaremos $J_i = q_i^{(\alpha_i)}$ y H_i al subespacio de H asociado a J_i , $1 \leq i \leq n$. Sea $H_{ij} = \ker J_i^j \ominus \ker J_i^{j-1}$, $1 \leq j \leq i$. Es claro que fijado $1 \leq i \leq n$, para cada j se tiene $\dim H_{ij} = \alpha_i$. Podemos suponer entonces que todos los H_{ij} son iguales a un espacio K_i con $\dim K_i = \alpha_i$ y $H_i = K_i^{(i)}$. Sea $P_{i,j} = P_{H_{ij}}$ y $P_i = P_{H_i}$. Entonces $P_{i,j}JP_{i,j-1} = P_{i,j}J_iP_{i,j-1} = Id_{K_i}$, $2 \leq j \leq i$, $1 \leq i \leq n$ y $P_{i,j}JP_{h,k} = 0$ si $i \neq$ o $i = h$ y $k \neq j-1$.

Con estas descomposiciones podemos representar a los elementos de $L(H)$ como matrices de dos tipos :

Usando que $H = \oplus_{i=1}^n H_i$ obtenemos, dado $A \in L(H)$, la representación

$$A = (A_{r,s})_{r,s=1}^n \qquad con \quad A_{r,s} \in L(H_s, H_r)$$

y usado que $H = \oplus_{i=1}^n K_i^{(i)}$, obtenemos

$$A = \left(A_{r,k;s,h}\right)\begin{matrix} n & r & s \\ r,s=1 & k=1 & h=1 \end{matrix} \quad con \quad A_{r,k;s,h} \in L(K_s, K_r).$$

Por cálculo matricial directo se observa que, dado $B \in L(H)$ y si $C = \delta_J(B)$, entonces cada entrada $C_{r,s}$ depende sólo de las entradas del bloque $B_{r,s}$. Entonces bastará estudiar cada bloque (r,s) de $R(\delta_J)$ y probar que $P_r[R(\delta_J)]P_s$ es complementado en $L(H_s, H_r)$

Para ilustrar la situación, mostraremos como ejemplo el caso $n = 3$.

Si $J = q_1^{(\alpha_1)} \oplus q_2^{(\alpha_2)} \oplus q_3^{(\alpha_3)}$ y $B \in L(H)$, entonces la matriz de $\delta_J(B)$ es de la forma :

$$\delta_J(B) = \left[\begin{array}{c|cc|ccc} 0 & 0 & -B_{11;21} & 0 & -B_{11;31} & -B_{11;32} \\ \hline B_{22;11} & B_{22;21} & B_{22;22} - B_{21;21} & B_{22;31} & B_{22;32} - B_{21;31} & B_{22;33} - B_{21;32} \\ 0 & 0 & -B_{22;21} & 0 & -B_{22;31} & -B_{22;32} \\ \hline B_{32;11} & B_{32;21} & B_{32;22} - B_{31;21} & B_{32;31} & B_{32;32} - B_{31;31} & B_{32;33} - B_{31;32} \\ B_{33;11} & B_{33;21} & B_{33;22}B_{32;21} & B_{33;31} & B_{33;22} - B_{32;31} & B_{33;33} - B_{32;32} \\ 0 & 0 & -B_{33;21} & 0 & -B_{33;31} & -B_{33;32} \end{array}\right]$$

Fijemos r, s , $1 \leq r, s \leq n$ y sea $m = \min r, s$. Los operadores $C_{r,s} \in P_r[R(\delta_J)]P_s$ se pueden caracterizar por las siguientes "ecuaciones lineales" :

$$\begin{aligned} C_{r,r;s,1} &= 0 \\ C_{r,r-1;s,1} + C_{r,r;s,2} &= 0 \\ C_{r,r-2;s,1} + C_{r,r-1;s,2} + C_{r,r;s,3} &= 0 \\ \\ C_{r,r-m+1;s,1} + C_{r,r-m+2;s,2} + \ldots + C_{r,r;s,m} &= 0 \end{aligned}$$

y las entradas $C_{r,k;s,h}$ pueden elegirse libremente si $k < h + r - m$ o sea $k - h < r - m$. Estas m ecuaciones significan que las m primeras diagonales de $C_{r,s}$, empezando desde abajo, tienen traza nula. Se puede, por lo tanto, exhibir un suplemento M_J para $R(\delta_J)$: $D = (D_{r,k;s,h}) \in M_J$ si y sólo si, para cada r, s se tiene que

a) $D_{r,k;s,h} = 0$ si $k - h < r - m$ y

b) $D_{r,r-i;s,1} = D_{r,r-i+1;s,2} = \ldots = D_{r,r;s,i+1}$ para todo $0 \leq i \leq m - 1$.

Por otra parte, no es difícil verificar que si $* : L(H) \to L(H)$ está dada por $*(A) = A^*$ (si bien $*$ no es **C**-lineal, es un isomorfismo **R**-lineal y continuo y además manda **C**-subespacios en **C**-subespacios), entonces $*(M_J) = \ker \delta_J$ y por lo tanto $*(R(\delta_J))$ es el suplemento buscado para $\ker \delta_J$ •

Corolario 8.2 : Dado $T \in JN_n(H)$, entonces $R(\delta_T)$ es cerrado.

<u>Demostración</u> : Si $T \sim J$ con J de Jordan, por la proposición 8.1 se tiene que $R(\delta_J)$ es cerrado y por lo tanto $\gamma(\delta_J) > 0$ (por la observación 7.5). Si $T = UJU^{-1}$ para cierto $U \in G(H)$, entonces, como en la demostración de (7.8), sabemos que$\gamma(\delta_T) \geq \frac{\gamma(\delta_J)}{\|U\|^2\|U^{-1}\|^2} > 0$, luego $R(\delta_T)$ es cerrado •

Lema 8.3 : Sea $T \in NJN_n(H)$, entonces $S_r(T) = \{UTU^{-1} : \|U\|\|U^{-1}\| \leq r\,,\ U \in G(H)\}$ es un entorno de T en $S(T)$, para $r \in \mathbf{R}$ suficientemente grande.

Demostración : Aplicando el teorema 2.30, como T es similar a un operador nilpotente nice Jordan, entonces $S(T)$ es localmente cerrada. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B = S(T) \cap B(0,\varepsilon)^-$ es cerrado en $L(H)$. Entonces B es un espacio métrico completo. Sea $B_0 = S(T) \cap B(0,\varepsilon) = \{A \in S(T) : \|A - T\| < \varepsilon\}$. Definamos, para $A, C \in B_0$

$$f(A) = [d(A, S(T) - B_0)]^{-1} \quad y \quad \mu(A,C) = \|A - C\| + |f(A) - f(C)|\,.$$

Por el teorema de Alexandroff, μ es una métrica completa en B_0 (si A_n se acerca al ∂B_0, entonces $f(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ y luego A_n no puede ser de Cauchy ; es fácil ver que μ define una métrica) y la identidad es un homeomorfismo con las topologías de las dos métricas.
Como $S(T) = \cup_{n\in\mathbf{N}} S_n(T)$, tenemos que

$$B_0 = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} (B_0 \cap S_n(T)).$$

Siendo B_0 μ-completo, podemos aplicar el teorema de Baire y entonces existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $[B_0 \cap S_{m-1}(T)]_\mu^-$ tiene interior no vacío (y por lo tanto contiene una bola con la norma de $L(H)$, pues las topologías coinciden). Sea $L_0 \in B_0$ y $r_0 > 0$ tales que $B(L_0, r_0) \subset B(T,\varepsilon)$ y

$$\mathcal{U} = \{L \in B_0 : \|L - L_0\| < r_0\} \subset [B_0 \cap S_{m-1}(T)]_\mu^-\,.$$

Por otra parte $[B_0 \cap S_{m-1}(T)]_\mu^- \subset B_0 \cap S_{m-1}(T)^-$ (clausura en $L(H)$ con la norma). Como T es similar a un nice Jordan, aplicando el corolario 8.2 y la proposición 7.10, sabemos que $S_{m-1}(T)^- \subset S_m(T)$ y por lo tanto, $\mathcal{U} \subset B_0 \cap S_m(T)$. Como, en particular, $L_0 \in S_m(T)$, sea $W_0 \in G_m(H)$ tal que $L_0 = W_0 T W_0^{-1}$ y sea $\mathcal{V} = \{L \in S(T) : \|L - T\| < \frac{r_0}{m}\}$. Es fácil ver que $W_0 \mathcal{V} W_0^{-1} \subset \mathcal{U}$ y por ende $\mathcal{V} \subset S_{m^2}(T)$, luego $\mathcal{V} \subset S_r(T) \quad \forall r > m^2$ •

Proposición 8.4 : Sea $T \in NJN_n(H)$, entonces la aplicación $\pi_T : G(H) \to S(T)$ es abierta.

Demostración : Se probará que dada una sucesión $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en $G(H)$ tal que $\pi_T(W_n) \xrightarrow{n\to\infty} T$, entonces se puede encontrar otra sucesión $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en $G(H)$ tal que $\pi_T(U_n) = \pi_T(W_n)$ y $U_n \xrightarrow{n\to\infty} I$. Claramente, esto implica que π_T es abierta.
Dada la sucesión $(W_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset G(H)$, por el lema 8.3, existe $m \in \mathbf{N}$ y una sucesión $(V_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset$

$G(H)_{m^2}$ tal que, para cierto $n_0 \in \mathbf{N}$, $\pi_T(W_n) = \pi_T(V_n)$ si $n \geq n_0$. Podemos suponer además que $\|V_n\| \leq m$ y $\|V_n^{-1}\| \leq m$, $\forall m \in \mathbf{N}$, luego si $n \geq n_0$,

$$\|TV_n - V_nT\| \leq m\|T - V_nTV_n^{-1}\| = m\|T - \pi_T(W_n)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

Como por el corolario 8.2, $\gamma(\delta_T) > 0$ y $\delta_T(V_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, se puede encontrar otra sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset L(H)$ tal que $Y_nT = TY_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$ y $\|Y_n - V_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y, por lo tanto

$$\|Y_nV_n^{-1} - I\| \leq m\|Y_n - V_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad Y_nV_n^{-1} \in G(H)$$

para n grande. Si llamamos $U_n = (Y_nV_n^{-1})^{-1}$ es claro que $U_n \xrightarrow{n\to\infty} I$ y que $\pi_T(U_n) = \pi_T(W_n)$. (Para formalizar, se puede definir $U_n = W_n$ para los valores de n tales que $Y_n \notin G(H)$) •

Este resultado es el que se utilizó en la sección 5 (corolario 5.4) y es el que faltaba para dotar a $S(T)$ de una estructura de subvariedad analítica de $L(H)$ cuando $T \in NJN_n(H)$:

Teorema 8.5 : Dado $T \in NJN_n(H)$, se verifica que $S(T)$ es subvariedad analítica de $L(H)$ y $\pi_T : G(H) \to S(T)$ es una sumersión.

Demostración : Es consecuencia del teorema 7.1 y las proposiciones 8.1 y 8.4 •

Observación 8.6: 1) Del hecho de que π_T sea una sumersión podemos deducir que el espacio tangente a $S(T)$ en T es

$$T[S(T)]_T = R[d(\pi_T)_I] = R(\delta_T) = \{XT - TX : X \in L(H)\}$$

con la identificación natural que hace que $T[S(T)]_T \subset L(H)$.
2) Si fijamos $n \in \mathbf{N}$ y tomamos $N_n(H) = \{T \in L(H) : T^n = 0;\ T^{n-1} \neq 0\}$ y

$$V_n(H) = \bigcup_{j=0}^{n-1} S(q_j \oplus q_n^{(\infty)}) \quad ,$$

entonces, por el corolario 2.29 y el teorema 8.5, tenemos que $V_n(H)$ es subvariedad anlítica de $L(H)$ y es además, abierto y denso en $N_n(H)$ • .

Sea ahora J un operador nice Jordan no necesariamente nilpotente. Sea $\sigma(J) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, $\varepsilon > 0$ tal que $B(\lambda_i, \varepsilon) \cap B(\lambda_j, \varepsilon) = \phi$ si $i \neq j$ y

$$\mathcal{U} = \{T \in L(H) : \sigma(T) \subset \bigcup_{j=1}^{r} B(\lambda_j, \varepsilon)\}.$$

Es claro que $\mathcal{U}$ es abierto. Para $T \in \mathcal{U}$ podemos definir

$$(8.7.1) \qquad P_i(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(\lambda_i, \varepsilon)} (\lambda - T)^{-1} d\lambda \quad ; \quad 1 \leq i \leq r ,$$

el proyector epectral de T en $B(\lambda_i, \varepsilon)$. Es claro que las aplicaciones $P_i : \mathcal{U} \to L(H)$ son analíticas. Como $\sum_{i=1}^{r} P_i(J) = I$, si definimos

$$(8.7.2) \qquad \Gamma(T) = \sum_{i=1}^{r} P_i(J) P_i(T) \quad , \quad T \in \mathcal{U} ,$$

podemos encontrar un abierto $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ tal que $J \in \mathcal{V}$ y $\Gamma(\mathcal{V}) \subset G(H)$. Luego $\Gamma : \mathcal{V} \to G(H)$ está nice definida y es analítica.

Lema 8.8 : Con las notaciones anteriores se tiene que si $T \in \mathcal{V}$, entonces

$$P_i(\Gamma(T) T \Gamma(T)^{-1}) = P_i(J) \quad , \quad 1 \leq i \leq r .$$

<u>Demostración</u> : Por la definición de Γ deducimos que

$$\Gamma(T) P_i(T) = P_i(J) \Gamma(T) \quad , \quad 1 \leq i \leq r .$$

Si observamos que dado $W \in G(H)$ y $T \in \mathcal{U}$, $P_i(WTW^{-1}) = WP_i(T)W^{-1}$, obtenemos la igualdad buscada •

Observación 8.9 : Con las notaciones anteriores, dado $T \in S(J)$ tal que $P_i(T) = P_i(J)$ y dado $U \in G(H)$ tal que $T = UJU^{-1}$, entonces U es "diagonal" respecto a los $P_i(J)$, es decir,

$$P_i(J) = P_i(T) = P_i(UJU^{-1}) = UP_i(J)U^{-1} \quad , \quad 1 \leq i \leq r ,$$

y por lo tanto $UP_i(J) = P_i(J)U$, $1 \leq i \leq r$ •

Teorema 8.10 : Sea J un operador nice Jordan, entonces $S(J)$ es subvariedad analítica de $L(H)$ y π_T define un espacio homogéneo sobre $S(J)$.

Demostración : Sea

$$J = \bigoplus_{i=1}^{r} (\lambda_i + Q_i)$$

donde $Q_i = \oplus_{j=1}^{n_i} q_j^{(\alpha_j)}$ y, para cada i , $1 \leq i \leq r$ se tiene que $0 \leq \alpha_j < \infty$ para todo j salvo, a lo sumo, para uno sólo.

Sea, con las notaciones anteriores, $P_i = P_i(J)$, $H_i = R(P_i)$, el abierto $\mathcal{V}$ y la función Γ de (8.7.2). Pomgamos $\psi(T) = \Gamma(T)T\Gamma(T)^{-1}$, para $T \in \mathcal{V}$. Por el lema 8.8, $P_i(\psi(T)) = P_i(J)$, $1 \leq i \leq r$.

Como cada Q_i es nice Jordan y nilpotente en $L(H_i)$, por el teorema 8.5 y la proposición 7.2 , se pueden encontrar abiertos $\mathcal{U}_i$ en $L(H_i)$ con $Q_i \in \mathcal{U}_i$ y funciones analíticas $\tau_i : \mathcal{U}_i \to G(H_i)$, tales que la restricción de τ_i a $S(Q_i) \cap \mathcal{U}_i$ resulta ser una sección local para π_{Q_i}. Achicando algo el abierto $\mathcal{V}$ podemos definir las funciones analíticas

$$\theta_i : \mathcal{V} \to \mathcal{U}_i \quad ; \quad \theta_i(T) = P_i\psi(T)P_i - \lambda_i P_i \, , \; 1 \leq i \leq r \, , \; T \in \mathcal{V} \, ,$$

donde se identifica $L(H_i)$ con $P_i L(H) P_i$.

Consideremos $\omega_i : \mathcal{V} \to L(H)$ la composición

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{V} & \stackrel{\theta_i}{\longrightarrow} & \mathcal{U}_i & \stackrel{\tau_i}{\longrightarrow} & G(H_i) & \stackrel{i}{\hookrightarrow} & L(H) \\ \cap & & \cap & & & & \\ L(H) & & L(H_i) & & & & \end{array} .$$

Es claro que las aplicaciones ω_i son analíticas y, por lo tanto, lo será

$$\tilde{\omega} : \mathcal{V} \longrightarrow L(H) \quad ; \quad \tilde{\omega}(T) = \sum_{i=1}^{r} \omega_i(T) \quad , \quad T \in \mathcal{V} \, .$$

Como $\forall T \in \mathcal{V}$, $\tilde{\omega}(T)$ es "diagonal" respecto de $P_1, \ldots, P_r$ y cada entrada de la diagonal $\tilde{\omega}_i(T) \in G(H_i)$, tenemos que $\tilde{\omega}(\mathcal{V}) \subset G(H)$.

Dado $C \in \mathcal{V} \cap S(J)$, entonces J , $\psi(C)$ y $\tilde{\omega}(C)$ son diagonales respecto de los P_i, con lo que las operaciones entre ellos pueden hacerse cordenada a cordenada. Entonces

$$\begin{aligned}
\pi_J \circ \widetilde{\omega}(C) &= \widetilde{\omega}(C) J \widetilde{\omega}(C)^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \omega_i(C)(Q_i + \lambda_i P_i)\omega_i(C)^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^{r} (\omega_i(C) Q_i \omega_i(C)^{-1}) + \lambda_i P_i \\
&= \sum_{i=1}^{r} \theta_i(C) + \lambda_i P_i \\
&= \psi(C).
\end{aligned}$$

Si recordamos que $\psi(C) = \Gamma(C)C\Gamma(C)^{-1}$ y definimos

$$\omega : \mathcal{V} \to G(H) \quad ; \quad \omega(C) = \Gamma(C)^{-1}\widetilde{\omega}(C) \, , \; C \in \mathcal{V} \, ,$$

obtenemos que es analítica y que $\omega/_{\mathcal{V} \cap S(J)}$ es sección local para π_J. Aplicando la proposición 7.2 se tiene lo buscado •

Con este teorema tenemos finalmente demostrado el resultado principal de este trabajo :

Teorema 8.11 : Dado $T \in L(H)$, son equivalentes :

SV) $S(T)$ es subvariedad analítica de $L(H)$ y π_T define un espacio homogéneo.

SL) π_T tiene secciones locales continuas.

AB) π_T es abierta.

LC) $S(T)$ es localmente cerrada.

[P]) $[T] = S(T)$.

BJ) T es similar a un operador nice Jordan.

Demostración : Utilizar los teoremas 7.14 y 8.10 . Lo único que habría que observar es que sabemos que si J es nice Jordan, enteonces J verifica SV, y por lo tanto es claro que si $T = VJV^{-1}$ para $V \in G(H)$, entonces T también verifica SV •

Observación 8.12 : Sea $A(H)$ el álgebra de Calkin de H. En [6, Cap. 16] se demuestra que si $t \in A(H)$, entonces $\pi_t : G(A(H)) \to S(t)$, dada por $\pi_t(u) = utu^{-1}$, $u \in G(A(H))$ tiene secciones locales sii t es similar a $\widetilde{T}$ con $T \in L(H)$ nice Jordan. Razonando análogamente a como hicimos en $L(H)$, se puede demostrar que $S(t)$ es subvariedad analítica de $A(H)$ sii $t \sim \widetilde{T}$ con T nice Jordan y, más aún, es equivalente a cada una de las condiciones del teorema 8.11, traducidas a $A(H)$.

9. ALGUNAS CONSTRUCCIONES EXPLICITAS.

Estudiaremos, en principio, la diferenciabilidad de la aplicación φ introducida en la sección 4.
Recordamos las definiciomes de $N_n(H)$, $NJN_n(H)$ (2.1), φ (4.1), $P_n^+(H)$ (4.3) y el módulo mínimo de Apostol, γ (7.4).
Sabemos ahora que si $T \in NJN_n(H)$, entonces $S(T)$ es un espacio homogéneo bajo la acción de $G(H)$. Por otro lado, $P_n^+(H)$ es una unión disjunta de componentes conexas abiertas de $P_n(H)$, que tiene una rica estructura geométrica estudiada en [9] y [10]. Enunciemos, ahora, el siguiente resultado de C.Apóstol :

Lema 9.1 : Si $B, C \in L(H)$, entonces

$$|\gamma(B) - \gamma(C)| \leq \|P_{\ker B} - P_{\ker C}\|.\max\{\gamma(B), \gamma(C)\} + \|B - C\|$$

<u>Demostración</u> : Ver [5, Prop 1.1 (iii)] .

Proposición 9.2 : Sea $T \in NJN_n(H)$, entonces

$$\varphi/_{S(T)} : S(T) \to P_n^+(H)$$

es una función $\mathbf{C}^\infty$.

<u>Demostración</u> : Sea $A \in S(T)$. Por el teorema 8.5 existe un entorno abierto $\mathcal{U}_A$ de A en $S(T)$ y una sección local analítica $s_A : \mathcal{U}_A \to G(H)$ para π_A. Recordando la proposición 4.6, si $P = \varphi(A)$, vemos que

$$\pi_A \circ \varphi = S_A = GS_n \circ \pi_P : G(H) \to P_n^+(H) ,$$

que es $\mathbf{C}^\infty$ por las fórmulas que la definen (3.2). Entonces, desde $\mathcal{U}_A$, como

$$\varphi = s_A \circ \pi_A \circ \varphi = s_A \circ S_A ,$$

tenemos que φ es $\mathbf{C}^\infty$ •

Observación 9.3 : La aplicación φ está definida por una cuestión espacial. La demostración de que es $\mathbf{C}^\infty$ invoca a una sección local s_A *no* explícita. Como utilizaremos a φ, justamente, para construir secciones locales explícitas definidas, en realidad, en un entorno global (en $L(H)$) de cada punto, haremos la siguiente construcción :

Se busca construir, dados $T \in NJN_n(H)$ y $Q \in S(T)$, un abierto de $L(H)$, $\mathcal{U}_Q$ tal que $Q \in \mathcal{U}_Q$ y una función $\mathbf{C}^\infty$:

$$\Phi_Q : \mathcal{U}_Q \to L(H)^n$$

que satisfaga que

$$\Phi_Q/_{S(T)\cap\mathcal{U}_Q} = \varphi/_{S(T)\cap\mathcal{U}_Q} \, .$$

Es claro que $\gamma(Q) > 0$. Sea $\rho(Q^*Q)$ el radio espectral de Q^*Q y pongamos

$$\mathcal{U}_{1,Q} = \{N \in L(H) : \sigma(N^*N) \subset \{z \in \mathbf{C} : |z| < \frac{\gamma^2(Q)}{3}\} \cup$$

$$\cup \{z \in \mathbf{C} : \frac{2}{3}\gamma^2(Q) < |z| < 2\rho(Q^*Q)\}\}.$$

$\mathcal{U}_{1,Q}$ es abierto en $L(H)$ y $Q \in \mathcal{U}_{1,Q}$. Tomemos $\mathcal{U}_{i,Q} = \mathcal{U}_{1,Q^i}$ $1 \le i \le n-1$ y

$$\mathcal{V}_Q = \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathcal{U}_{i,Q} \, .$$

Usando el lema 9.1 y la continuidad de $\varphi/_{S(T)}$ podemos ver que existe un abierto $\mathcal{U}_Q \subset \mathcal{V}_Q$ tal que si $N \in \mathcal{U}_Q \cap S(T)$, entonces $\gamma^2(N^i) > \frac{\gamma^2(Q^i)}{3}$, para $1 \le i \le n-1$. Sea, para $A \in \mathcal{U}_Q$ y $1 \le i \le n-1$:

$$(9.4) \qquad \eta_Q^i(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z \in \mathbf{C}: |z| = \gamma^2(Q^i)/3\}} (\lambda - A^{*i}A^i)^{-1} d\lambda \, .$$

η_Q^i está bien definida y es $\mathbf{C}^\infty$ en $\mathcal{U}_Q$. Además, si $N \in S(T) \cap \mathcal{U}_Q$, entonces

$$\eta_Q^i(N) = \aleph_{\{0\}}(N^{*i}N^i) = P_{\ker N^i} \quad , \quad 1 \le i \le n-1$$

ya que $\sigma(N^{*i}N^i) \cap \{z \in \mathbf{C} : |z| < \frac{\gamma^2(Q^i)}{3}\} = \{0\}$.
Podemos, entonces, definir :

$$(9.5) \qquad \Phi_Q = (\eta_Q^1, \eta_Q^2 - \eta_Q^1, \ldots, \eta_Q^{n-1} - \eta_Q^{n-2}, I - \eta_Q^{n-1}) \, .$$

Claramente, Φ_Q es $\mathbf{C}^\infty$ en $\mathcal{U}_Q$ y

$$\Phi_Q/_{S(T)\cap\mathcal{U}_Q} = \varphi/_{S(T)\cap\mathcal{U}_Q} \quad \bullet$$

Esto brinda otra demostración de que φ es $\mathbf{C}^\infty$ en $S(T)$ si $T \in NJN_n(H)$, pero, además, las fórmulas (9.4) y (9.5) dan una expresión más explícita que la definición (4.1).

A continuación construiremos una expresión "explícita" de una sección local $\mathbf{C}^\infty$ para $\pi_T : G(H) \to S(T)$, siempre que $T \in NJN_n(H)$ (no es analítica por no serlo φ, ya que en su definición aprece la aplicación $A \mapsto A^*$, y además $P_n(H)$ es subvariedad $\mathbf{C}^\infty$ y no analítica). Teniendo en cuenta la demostración del teorema 8.10, esto brindará expresiones explícitas para operadores nice Jordan no nilpotentes.

Sea $J \in JN_n(H)$, más aún, J de Jordan:

$$J = q_1^{(\alpha_1)} \oplus q_2^{(\alpha_2)} \oplus \ldots \oplus q_n^{(\alpha_n)} \quad ; \quad 0 \leq \alpha_i \leq \infty .$$

Usaremos las mismas notaciones que en la demostración de la peoposición 8.1 : J_i , H_i , $H_{i,j}$, $P_{i,j}$, P_i .
Se tiene que $J(H_{i,j}) = H_{i,j-1}$, $1 \leq i \leq n$, $1 < j \leq i$. Dado $T \in L(H)$, sea

$$\begin{aligned} U(T) = & P_{1,1} + P_{2,2} + TP_{2,2}J^* + \\ & + P_{3,3} + TP_{3,3}J^* + T^2P_{3,3}J^{*2} + \\ & \\ & + P_{n-1,n-1} + \ldots + T^{n-2}P_{n-1,n-1}J^{*n-1} + \\ & + P_{n,n} + \ldots + T^{n-1}P_{n,n}J^{*n-1} = \\ = & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} T^j P_{i,i} J^{*i} . \end{aligned} \tag{9.6}$$

Esta fórmula puede reescribirse en forma algo más corta :

$$\begin{aligned} U(T) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} T^j P_{i,i} J^{*i} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} T^j P_{i,i} J^{*i} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} T^j (\sum_{i=1}^{n} P_{i,i}) J^{*j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} T^j (P_{R(J)^\perp}) J^{*j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} T^j (I - JJ^*) J^{*j} . \end{aligned} \tag{9.7}$$

En efecto, $R(J) = H_{2,1} \oplus H_{3,1} \oplus H_{3,2} \oplus \ldots \oplus H_{n,1} \oplus \ldots \oplus H_{n,n-1}$ luego $R(J)^{\perp} = R(\sum_{i=1}^{n} P_{i,i})$. Por otra parte, $R(J^{*j}) = (\ker J^j)^{\perp}$ y entonces, si $i \leq j$, $P_{i,i}J^{*j} = 0$. Por último, como J es de Jordan, entonces $JJ^* = P_{R(J)}$ y por lo tanto, $P_{R(J)^{\perp}} = I - JJ^*$.

Proposición 9.8 : Con las notaciones anteriores, si $J \in JN_n(H)$ es de Jordan, $T \in S(J)$ y $\varphi(T) = \varphi(J)$, entonces

$$U(T).J = T.U(T).$$

Además $U(J) = I$ y por lo tanto, si T está cerca de J, se tiene que $U(T) \in G(H)$.

Demostración : Calculemos $T.U(T)$:

$$T.U(T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} T^j P_{i,i} J^{*j-1} \tag{9.9}$$

ya que $R(P_{i,i}) \subset H_i \subset \ker J^i = \ker T^i \Rightarrow T^i P_{i,i} = 0$; $1 \leq i \leq n$. Por otro lado,

$$U(T).J = [\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} T^j P_{i,i} J^{*j-1}] J^* J \tag{9.10}$$

ya que $R(P_{i,i}) \subset R(J)^{\perp} \Rightarrow P_{i,i}J = 0$, $1 \leq i \leq n$. Por otra parte

$$J^*J = P_{R(J^*)} = I - P_{\ker J} = I - \sum_{i=1}^{n} P_{i,1} \ ,$$

entonces

$$j > 1 \Rightarrow P_{i,j} J^* J = P_{i,j} \ , \ 1 \leq i \leq n \, . \tag{9.11}$$

Veamos que $P_{i,i}J^{*h} = P_{i,i}J^{*h}P_{i,i-h}$ para $0 \leq h \leq i-1$. En efecto :

$$J^h(H_{i,j}) = \begin{cases} 0 & si \quad j \leq h \\ H_{i,j-h} & si \quad h < j \leq i-1 \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$J^{*h}(H_{i,j}) = \begin{cases} H_{i,j+h} & si \quad h \leq i-j \\ 0 & si \quad h > i-j \, . \end{cases}$$

Luego $J^{*h}(H_{i,i-h}) = H_{i,i}$ y $J^{*h}(H_{r,k}) \subset H_{i,i}^{\perp}$ en cualquier otro caso. Deducimos que

$$P_{i,i}J^{*h} = P_{i,i}J^{*h}(\sum_{r,k} P_{r,k}) = P_{i,i}J^{*h}P_{i,i-h}$$

si $0 \leq h \leq i-1$, o sea, si $i-h \geq 1$. Usando (9.11), si $i-h \geq 2$, entonces

$$P_{i,i}J^{*h} = P_{i,i}J^{*h}P_{i,i-h} = P_{i,i}J^{*h}P_{i,i-h}J^{*}J = P_{i,i}J^{*h}J^{*}J \ .$$

Si observamos que en la igualdad (9.10), los exponentes de J^* no son, en ningún sumando, mayores que $i-2$, llegamos a que (9.9) es igual que (9.10) y por lo tanto, $T.U(T) = U(T).J$. El hecho de que $U(J) = I$ es de verificación directa $\bullet$

Observaciones 9.11 : 1) En el caso de que $J = q_n^{(\infty)}$, entonces

$$U(T) = \sum_{j=0}^{n-1} T^j \varphi_n(J) J^{*j} \ .$$

Mirando la demostración de la proposición 9.8, es claro que, en este caso, la hipótesis $\varphi(T) = \varphi(J)$ no es necesaria para que $T.U(T) = U(T).J$. Luego, en este caso, U define una sección local polinómica para π_J, muy similar a la obtenida por L.Fialkow en [13].
2) Si seguimos suponiendo que $J = q_n^{(\infty)}$, se puede demostrar por simple cálculo que si $\varphi(T) = \varphi(J) = (P_1, \dots, P_n) = P$, entonces $U(T) \in G(H)$.
Pongamos $G_P = \{V \in G(H) : V(\ker J^k) = \ker J^k \ , \ k = 1, \dots, n-1\}$. Es claro que $U(T) \in G_P$.
G_P es un grupo de Lie-Banach y actúa sobre $\varphi^{-1}(P)$, que es una subvariedad $\mathbf{C}^\infty$. Luego el fibrado (y espacio homogéneo $\mathbf{C}^\infty$)

$$\pi_J/_{G_P} : G_P \to \varphi^{-1}(P)$$

tiene una sección global $\mathbf{C}^\infty$.

Volviendo al caso de J nice Jordan nilpotente de orden n, sabemos que $\varphi : S(J) \to P_n^+(H)$ es $\mathbf{C}^\infty$ y podemos definir, para $T \in S(J)$:

$$\alpha(T) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(T)\varphi_i(J) \quad ,$$

de tal forma que si T está cerca de J, entonces $\alpha(T) \in G(H)$.

Lema 9.12 : Si $J \in N_n$ y es nice Jordan, $T \in S(J)$ y $\alpha(T) \in G(H)$, entonces

$$\varphi(\alpha(T)^{-1}T\alpha(T)) = \varphi(J) .$$

<u>Demostración</u> : Considerando el diagrama conmutativo (4.6), podemos ver que

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha(T)^{-1}T\alpha(T)) &= \varphi(\pi_T(\alpha(T)^{-1})) \\ &= GS_n(\pi_P(\alpha(T)^{-1})) \\ &= GS_n(\alpha(T)^{-1}\varphi_1(T)\alpha(T), \ldots, \alpha(T)^{-1}\varphi_n(T)\alpha(T)) \\ &= GS_n(\varphi_1(J), \ldots, \varphi_n(J)) \\ &= \varphi(J) \quad \bullet\end{aligned}$$

Ahora podemos computar secciones locales para π_J cuando J es un nilpotente nice Jordan de orden n :
Sea $\mathcal{V}$ un abierto en $L(H)$, con $J \in \mathcal{V}$, tal que Φ_J (de (9.5)) está bien definida y es $\mathbf{C}^\infty$ en $\mathcal{V}$, y tal que si $T \in \mathcal{V}$, entonces

$$\tilde{\alpha}(T) = \sum_{i=1}^{n}(\Phi_J)_i(T)(\Phi_J)_i(J) \in G(H) \tag{9.13}$$

y si U es la aplicación definida en (9.6),

$$U(\tilde{\alpha}(T)^{-1}.T.\tilde{\alpha}(T)) \in G(H) .$$

Teorema 9.14 : Sea $J \in N_n(H)$ y más aún, J nice Jordan, entonces, con las definiciones anteriores, la función $\omega : \mathcal{V} \to G(H)$ dada por : dado $T \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}\omega(T) &= \tilde{\alpha}(T).U[\tilde{\alpha}(T)^{-1}.T.\tilde{\alpha}(T)] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} T^j[\sum_{i=1}^{n}(\Phi_J)_i(T)\varphi_i(J)](I - JJ^*)J^{*j}\end{aligned}$$

es $\mathbf{C}^\infty$ y verifica que

$$\omega/_{\mathcal{V}\cap S(J)} : \mathcal{V} \cap S(J) \to G(H)$$

es sección local para $\pi_J : G(H) \to S(J)$, $\pi_J(V) = VJV^{-1}$.

Demostración : Que la definición es buena surge de la elección del abierto $\mathcal{V}$. Que ω es $\mathbf{C}^\infty$ resulta de que en (9.3) vimos que Φ_J lo es, luego también $\widetilde{\alpha}$, por (9.13) y el hecho de que U es polinómica. La verificación de que si $T \in \mathcal{V} \cap S(J)$, entonces

$$\pi_J(\omega(T)) = T$$

se reduce a tener en cuenta el lema 9.12, la proposición 9.8 y el hecho de que en $\mathcal{V} \cap S(J)$,

$$\omega(T) = \alpha(T).U[\alpha(T)^{-1}.T.\alpha(T)]$$

por la observación 9.3 •

Observación 9.15 : En la observación 8.12 vimos que en el álgebra de Calkin $A(H)$, dado $t \in A(H)$, existe $T \in L(H)$ nice Jordan con $\widetilde{T} = t$ si y sólo si $\pi_t : G(A(H)) \to S(t)$ define un espacio homogéneo analítico, y en tal caso tiene secciones polinómicas. Si t es también nilpotente, en (6.7) se definió

$$\widetilde{\varphi} : S(t) \to P_n(A(H))$$

la análoga a φ en $A(H)$ y podemos definir también, si $\widetilde{\varphi}(t) = P$,

$$\widetilde{GS_n} : I_n(A(H)) \to P_n(A(H)) \qquad y$$

$$\widetilde{S_P} : G(A(H)) \to P_n(A(H))$$

en forma natural ($\widetilde{GS_n}$ se puede definir con las mismas fórmulas que en (3.2)). Se obtiene el siguiente diagrama conmutativo, análogo a (4.7), entre espacios homogéneos :

$$\begin{tikzcd}
 & S(t) \arrow[dr, "\widetilde{\varphi}"] & \\
G(A(H)) \arrow[ur, "\pi_t"] \arrow[rr, "\widetilde{S_P}"] \arrow[dr, "\pi_P"'] & & P_n(A(H)) \\
 & I_n(A(H)) \arrow[ur, "\widetilde{GS_n}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde π_t y π_P son analíticos y $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{GS_n}$ y $\widetilde{S_P}$ son $\mathbf{C}^\infty$ (el hecho de que $\widetilde{\varphi}$ sea $\mathbf{C}^\infty$ se deduce de las fórmulas (6.14) y (6.7)).

Corolario 9.16 : Sea $J \in N_n(H)$ tal que J es Jordan pero no es similar a un nice Jordan, entonces

$$\varphi : S(J) \to P_n^+(H)$$

no es continua.

Demostración : En la construcción de la sección local ω del teorema 9.14, solo se usó que J fuese Jordan (proposición 9.8) y que $\varphi : S(J) \to P_n^+(H)$ es continua. Por lo tanto, si suponemos esto último, se podría construir una sección local, al menos continua, para J no similar a un nice Jordan, lo que contradice el teorema 8.11 •

En la sección 5. se planteó el problema de caracterizar los $T \in N_n(H)$ tales que $\varphi/_{S(T)}$ es continua. El resultado anterior y el corolario 5.4 ($T \in NJN_n(H) \Rightarrow \varphi/_{S(T)}$ es continua) sugieren la siguiente :

Conjetura 9.17 : Dado $T \in N_n(H)$, son equivalentes :

i) $\varphi : S(T) \to P_n^+(H)$ es continua .

ii) $T \in NJN_n(H)$.

El problema es el caso $T \in N_n(H) - JN_n(H)$ donde no he conseguido contraejemplos salvo en el caso $n = 2$:

Proposición 9.18 : Sea $T \in N_2(H) - JN_2(H)$. Entonces $\varphi/_{S(T)}$ no es continua.

Demostración : Por el teorema 2.4, se tiene que $T \notin JN_2(H) \Leftrightarrow R(T)$ no es cerrado.
Sea, entonces, $T \in N_2(H)$ tal que $R(T)$ no es cerrdo. Sean $\varphi(T) = P = (P_1, P_2)$, $H_1 = \ker T = R(P_1)$ y $H_2 = \ker T^\perp = R(P_2)$.
Como $R(T)$ no es cerrado, se tiene que cero es punto de acumulación de $\sigma(|T|) - \{0\}$ ($|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$). Sean, para $n \in \mathbf{N}$, $Q_n = \aleph_{(0,1/n)}(|T|)$. Es fácil ver que $\dim H_1 = \dim H_2 = \infty$ y además, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\dim R(Q_n) = \infty$.

Sean, entonces, V_n , W_n subespacios cerrados tales que $\dim V_n = \dim W_n = \infty$ y $V_n \perp W_n = R(Q_n)$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Como $|T|$ es acotado inferiormente en $H_2 \ominus R(Q_n)$, deducimos que $T(H_2 \ominus R(Q_n))$ es cerrado y es fácil ver que $\dim[H_1 \ominus T(H_2 \ominus R(Q_n))] = \infty$.

Sean, finalmente, $U_n \in U(H)$ (es decir, unitarios) tales que

i) $U_n/_{T(H_2 \ominus R(Q_n))} = Id \quad (\Rightarrow U_n^*/_{T(H_2 \ominus R(Q_n))} = Id\ )$.

ii) $U_n[H_1 \ominus T(H_2 \ominus R(Q_n))] = [H_1 \ominus T(H_2 \ominus R(Q_n))] \oplus V_n$
$(\ \Rightarrow U_n^*([H_1 \ominus T(H_2 \ominus R(Q_n))] \oplus V_n) = H_1 \ominus T(H_2 \ominus R(Q_n))\ )$.

iii) $U_n(R(Q_n)) = W_n \quad (\Rightarrow U_n^*(W_n) = W_n \perp V_n = R(Q_n)\ )$.

iv) $U_n/_{H_2 \ominus R(Q_n)} = Id \quad (\Rightarrow U_n^*/_{H_2 \ominus R(Q_n)} = Id\ )$.

Veremos que

a) $U_n.T.U_n^* \xrightarrow{n\to\infty} T$.

b) $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\ker T \subset \ker(U_n.T.U_n^*)$, pero no son iguales.

En efecto, dado $x \in H$ con $\|x\| = 1$, sea $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ con $x_1 \in H_1$, $x_2 \in V_n$, $x_3 \in W_n$ y $x_4 \in H_2 \ominus R(Q_n)$.

Es claro que $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $T(x_1) = U_n T U_n^*(x_1) = 0$ ya que $U_n^*(H_1) \subset H_1$.

Sea $T = U|T|$ la descomposición polar, entonces $\|T(y)\| = \|\,|T|(y)\|$ $\forall y \in H$. Luego si $y \in R(Q_n)$ y $\|y\| \le 1$, se tiene que

$$\|T(y)\| = \|U|T|Q_n(y)\| \le \|\,|T|Q_n(y)\| \le \|\,|T|Q_n\| = \|f_n(|T|)\|$$

donde $f_n : \sigma(|T|) \to \mathbf{R}$ esta dada por $f_n(a) = a.\aleph_{(0,1/n)}(a)$. Entonces

$$\|T(y)\| \le \sup\{|f_n(a)| : a \in \sigma(|T|)\} \le \frac{1}{n}\,.$$

Ahora, como $U_n^*(V_n) \subset H_1$ y $\|x_2\| \le 1$, tenemos que

$$\|(U_n T U_n^* - T)(x_2)\| = \|T(x_2)\| \le \frac{1}{n}\,.$$

Además $\|x_3\| \le 1$ y, como $U_n^*(W_n) \subset R(Q_n)$, tenemos

$$\|(U_n T U_n^* - T)(x_3)\| \le \|T(U_n^*(x_3))\| + \|T(x_3)\| \le \frac{2}{n}\,.$$

Finalmente, como $U_n^*/_{H_2 \ominus R(Q_n)} = Id$ y $x_4 \in H_2 \ominus R(Q_n)$,

$$\|(U_n T U_n^* - T)(x_4)\| = \|U_n T(x_4) - T(x_4)\| = \|(U_n - I)T(x_4)\| = 0$$

ya que $T(x_4) \in T(H_2 \ominus R(Q_n))$ y la condición (i).
Resumiendo, si $x \in H$ y $\|x\| = 1$, entonces

$$\|(U_n T U_n^* - T)(x)\| \leq \frac{3}{n} \quad \Rightarrow \quad \|U_n T U_n^* - T\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

y tenemos (a). Para terminar, por la definición de los U_n,

$$\ker U_n T U_n^* = U_n(\ker T) = U_n(H_1) = H_1 \oplus V_n$$

y por lo tanto,

$$\|P_{\ker U_n T U_n^*} - P_{\ker T}\| = \|P_{V_n}\| = 1 \quad , \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

y entonces $\varphi : S(T) \to P_2^+(H)$ no puede ser continua •

Para finalizar este trabajo, enfocaremos el problema del levantamiento "explícito" de curvas $\mathbf{C}^\infty$

(9.19) $$\rho : [0,1] \to S(T) \quad ; \quad \rho(0) = T$$

para $T \sim J = q_n^{(\infty)}$, en el sentido de encontrar $\Gamma : [0,1] \to G(H)$ $\mathbf{C}^\infty$ tal que $\pi_T \circ \Gamma = \rho$, es decir, $\Gamma(t) T \Gamma(t)^{-1} = \rho(t)$, $t \in [0,1]$ y $\Gamma(0) = I$.
La existencia de levantamiento está garantizada por ser

$$\pi_T : G(H) \to S(T)$$

un espacio homogéneo analítico. Lo que se hará es tratar de computar una levantada a curvas de tipo (9.19), aplicando los resultados de Corach-Porta-Recht sobre conexiones en el fibrado

$$\pi_P : U(H) \to P_n(H)$$

donde $P \in P_n(H)$ y $\pi_P(U) = UPU^* = (UP_1U^*, \ldots, UP_nU^*)$.
Sea, entonces, $\rho : [0,1] \to S(T)$ como en (9.19). Sea

(9.20) $$\alpha : [0,1] \to P_n(H) \quad , \quad \alpha(t) = \varphi(\rho(t)) \, , \; t \in [0,1] \, .$$

Es claro que α es también $\mathbf{C}^\infty$. Sea Γ la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

(9.21) $$\begin{cases} \dot{\Gamma} = (\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}_i \alpha_i)\Gamma \\ \Gamma(0) = I \, . \end{cases}$$

Entonces Γ verifica (ver [9] o [10])

1) $\Gamma(t)\alpha_k(0)\Gamma(t)^{-1} = \alpha_k(t) \quad , \quad 1 \le k \le n$.

2) Para todo $t \in [0,1]$, $\Gamma(t)^* = \Gamma(t)^{-1}$, es decir, $\Gamma(t) \in U(H)$.

Sea $Q \in U(J) = \{UJU^* : U \in U(H)\}$, o sea $Q \simeq q_n^{(\infty)}$ tal que $\varphi(Q) = \varphi(T)$ (es fácil ver que un tal Q se puede encontrar) y sea $\widetilde{\rho} : [0,1] \to S(J)$ dada por

$$\widetilde{\rho}(t) = \Gamma(t) Q \Gamma(t)^* = \pi_Q(\Gamma(t)) \quad ; \quad t \in [0,1]. \tag{9.22}$$

Entonces $\widetilde{\rho}([0,1]) \subset U(J)$, es decir, $\widetilde{\rho}(t) \simeq q_n^{(\infty)}$ $\forall t \in [0,1]$. Luego

$$\varphi(\widetilde{\rho}(t)) = \varphi(\pi_Q(\Gamma(t))) = S_P(\Gamma(t)) = \Gamma(t)\alpha(0)\Gamma(t)^{-1} = \alpha(t) = \varphi(\rho(t))$$

y, aplicando la observación 9.11 (2), se tiene que

$$U_{\rho,Q}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho(t)^k \alpha_n(t) \widetilde{\rho}(t)^{*k} \in G(H) \quad \forall t \in [0,1] \quad y$$

$$U_{\rho,Q}(t)\widetilde{\rho}(t)U_{\rho,Q}(t)^{-1} = \rho(t).$$

Es claro, además, que $U_{\rho,Q} : [0,1] \to G(H)$ es $\mathbf{C}^\infty$. Definamos $\mathcal{R} : [0,1] \to G(H)$ dada por

$$\mathcal{R}(t) = U_{\rho,Q}(t)\Gamma(t)U_{\rho,Q}(0)^{-1} \quad , \quad t \in [0,1]. \tag{9.23}$$

Claramente $\mathcal{R}$ es $\mathbf{C}^\infty$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t)T\mathcal{R}(t)^{-1} &= U_{\rho,Q}(t)\Gamma(t)Q\Gamma(t)^{-1}U_{\rho,Q}(t)^{-1} \\ &= U_{\rho,Q}(t)\widetilde{\rho}(t)U_{\rho,Q}(t)^{-1} \\ &= \rho(t). \end{aligned}$$

Es decir que $\mathcal{R}$ es una levantada $\mathbf{C}^\infty$ de ρ hacia $G(H)$ y

$$\mathcal{R}(0) = U_{\rho,Q}(0)\Gamma(0)U_{\rho,Q}(0)^{-1} = I.$$

El problema es que $\mathcal{R}$ depende de la elección de $Q \simeq q_n^{(\infty)}$ tal que $\varphi(Q) = \varphi(T) = \alpha(0)$.

Veremos a continuación que, en realidad, $\mathcal{R}$ no depende de la elección de Q. Lo haremos viendo que en cada término de la fórmula (9.23), las cosas que dependen de Q desaparecen, con lo cual $\mathcal{R}$ solo dependerá de los valores de ρ . En efecto, $\widetilde{\rho}(t) = \Gamma(t)Q\Gamma(t)^* \Rightarrow \widetilde{\rho}(t)^* = \Gamma(t)Q^*\Gamma(t)^* \Rightarrow \widetilde{\rho}(t)^{*i} = \Gamma(t)Q^{*i}\Gamma(t)^*$, $i \in \mathbf{N}$, $t \in [0,1]$. Luego

$$\begin{aligned} U_{\rho,Q}(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \rho(t)^i \alpha_n(t) \widetilde{\rho}(t)^{*i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \rho(t)^i \alpha_n(t) \Gamma(t) Q^{*i} \Gamma(t)^* . \end{aligned}$$

Entonces

$$U_{\rho,Q}(t)\Gamma(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(t)^i \alpha_n(t)\Gamma(t)Q^{*i} \quad , \quad t \in [0,1] .$$

Por otro lado, por la definición de Γ , $\alpha_n(t)\Gamma(t) = \Gamma(t)\alpha_n(0)$, entonces

$$U_{\rho,Q}(t)\Gamma(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(t)^i \Gamma(t)\alpha_n(0)Q^{*i} ,$$

y por lo tanto,

$$\mathcal{R}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(t)^i \Gamma(t)\alpha_n(0)Q^{*i}U_{\rho,Q}(0)^{-1} . \tag{9.24}$$

Llamemos $P_i = \alpha_i(0)$. Para ver que $\mathcal{R}$ no depende de Q bastaría ver que cada término $P_nQ^{*i}U_{\rho,Q}(0)^{-1}$, $0 \leq i \leq n-1$ (que no depende de t) es independiente del Q elegido.

Sea $U_{Q,T} = \sum_{i=0}^{n-1} Q^i P_n T^{*i} = \sum_{i=0}^{n-1} (T^i P_n Q^{*i})^* = U_{\rho,Q}(0)^*$. Luego $U_{Q,T} \in G(H)$. Por un razonamiento similar a varios anteriores se llega a que $P_nQ^{*i}Q^j \neq 0 \Leftrightarrow i = j$ y en tal caso $Q^{*i}Q^i = P_{(\ker Q^i)^\perp} \Rightarrow P_nQ^{*i}Q^i = P_n$ para $0 \leq i \leq n-1$. Entonces

$$\begin{aligned} U_{\rho,Q}(0).U_{Q,T} &= \sum_{i=0}^{n-1} T^i P_n Q^{*i} . \sum_{j=0}^{n-1} Q^j P_n T^{*j} \\ &= \sum_{i,j=0}^{n-1} T^i P_n Q^{*i} Q^j P_n T^{*j} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} T^i P_n T^{*i} \quad \in G(H) \end{aligned}$$

y, claramente, no depende de Q. Sea, entonces $V_T = [\sum_{i=0}^{n-1} T^i P_n T^{*i}]^{-1}$. Tenemos que

$$(U_{\rho,Q}(0))^{-1} = U_{Q,T}.V_T .$$

Volviendo a lo anterior, $P_nQ^{*i}U_{\rho,Q}(0)^{-1} = P_nQ^{*i}U_{Q,T}V_T$ y bastaría ver que $P_nQ^{*i}U_{Q,T}$ no depende de Q (V_T depende solo de $T = \rho(0)$). En efecto,

$$P_nQ^{*i}U_{Q,T} = P_nQ^{*i}\sum_{j=0}^{n-1} Q^j P_n T^{*j} = P_nQ^{*i}Q^iP_nT^{*i} = P_nT^{*i}$$

y, finalmente, podemos decir que la levantada

$$\begin{aligned} R(t) &= U_{\rho,Q}(t)\Gamma(t)U_{\rho,Q}(0)^{-1} \\ &= [\sum_{i=0}^{n-1} \rho(t)^i\Gamma(t)P_nT^{*i}].(\sum_{j=0}^{n-1} T^jP_nT^{*j})^{-1} \end{aligned}$$

es $\mathbf{C}^\infty$ y no depende del Q elegido •

BIBLIOGRFIA.

[1] Andrucow, E.; Fialkow, L.A.; Herrero, D.A.; Pecuch de Herrero, M.; Stojanoff, D., Joint similarity orbits with local cross sections (Preprint).

[2] Andruchow,E.; Stojanoff, D., Nilpotent operators and sistems of projectors, J. Operator Theory (to appear).

[3] Andruchow,E.; Stojanoff, D., Differentiable structure of similarity orbits, J. Operator Theory (to appear).

[4] Andruchow,E.; Stojanoff, D., Geometry of unitary orbits (Preprint).

[5] Apostol, C., The reduced minimum modulus, Michigan Math. J. 32(1985) 279-293.

[6] Apostol, C.; L.,Fialkow, L.A.; Herrero, D.A.; Voiculescu, D.V., Approximation of Hilbert space operators, Vol. 2, Pitman, Boston, 1984.

[7] D.,Barría, J.; Herrero, D.A., Closure of similarity orbits of nilpotents operators I. Finite rank operators, J. Operator Theory 1 (1979) 177- 185.

[8] D.,Barría, J.; Herrero, D.A., Closure of similarity orbits of nilpotents operators II (Preprint) 1977.

[9] Corach, G.; Porta, H.; Recht, L., Differential geometry of projectors in Banach algebras (Preprint).

[10] Corach, G.; Porta, H.; Recht, L., The stucture of projectors in Banach algebras (Preprint).

[11] Dalekii, Ju.L.; Krein, M.G., Stability of solutions of differential equations in Banach spaces, Trans Math. Monografs 43, AMS, Providence, 1974.

[12] Deckard, D.;Fialkow, L.A., Characterization of Hilbert space operators with unitary cross sectons, J. Operator Theory, 2 (1979), 153-158.

[13] Fialkow, L.A., Similary cross sections for operators, Indiana Univ. Math. J. 28, No. 1(1979).

[14] L.,Fialkow, L.A.; Herrero, D.A., Caracterization of Hilbert space operators with local cross sectios (Preprint) 1978.

[15] L.,Fialkow, L.A.; Herrero, D.A., Inner derivations with closed range and local similarity cross sections in the Calkin algebra, Abstracts Amer. Math. Soc. 1(1980).

[16] Herrero, D.A., Approximation of Hilbert space operators, Vol. 1, Pitman, Boston, 1982.

[17] Lang, S., Differential manifolds, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1972.

[18] Larotonda, A.R., Notas sobre variedades diferenciables, Notas de Geometría y Topología 1,INMABB-CONICET, B.B., 1980.

[19] Nomizu, K., Lie groups and differential geometry, Publ. of the Math. Soc. of Japan, 2, Tokyo, 1956.

[20] Olsen, C.L., A structure theorem for polynomially compact operators, Amer. J. Math. 93(1971), 686-698.

[21] Pecuch de Herrero, M., Global cross sections of unitary and similarity orbits of Hilbert space operators, J. Operators Theory, 12 (1984) 265-283.

[22] Porta, H.; Recht, L., Minimality of geodesics in Grassman manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 100 No 3 (1897).

[23] Raeburn, I., The relation between a commutative Banach algebra and its maximal ideal space, J. Functional Analysis 25 (1977) 366-390.

[24] Rudin, W., Functional analysis, Mc Graw-Hill, New York, (1966).

[25] Voiculescu, D.V., A non commutative Weyl-Von Neumann theorem, Rev. Roumanie Math. Pures et Appl., 21 (1976), 97-113.

DEMETRIO
STOJANOFF

G CORACH