Objetos inyectivos en álgebras de la lógica

Gluschankof, Daniel A.

1989

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Título

OBJETOS INYECTIVOS EN ALGEBRAS DE LA LOGICA

Autor: *Daniel A. Gluschankof*
Director: *Roberto L.O. Cignoli*
Lugar de Trabajo: *Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires*

Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Matemáticas

Marzo
1989

INDICE

1 INTRODUCCION

El álgebra de la lógica se puede considerar que comienza con el trabajo de Tarski de 1935 [56], donde se introduce, por primera vez el álgebra de las fórmulas la que, considerando el cociente por medio de la relación de equivalencia entre enunciados dará origen a la llamada álgebra de Lindenbaum o Lindenbaum-Tarski[1] del cálculo proposicional.

El mecanismo empleado por Tarski produce, para el caso del cálculo proposicional clásico, las álgebras de Boole. Se pueden determinar diversos tipos de lógicas que admiten una tal algebrización (ver [9] y [49]). Sin embargo, en este trabajo consideraremos tan sólo la lógica clásica, la intuicionista y ciertas lógicas polivalentes y, a partir de ellas, sus algebrizaciones: álgebras de Boole para el primer caso, álgebras de Heyting, Hilbert, Tarski, etc., para el segundo y álgebras de Lukasiewicz, Post, Wajsberg y MV (multivalentes) para el tercero.

En las álgebras de Boole, análogamente al caso de los anillos, se conoce un teorema de extensión de ideales (teorema del ideal primo - TIP) (ver [55]), así como la caracterización de los objetos inyectivos (ver [54]). Uno de los objetivos de este trabajo es el encontrar los teoremas análogos para las álgebras correspondientes a las lógicas no clásicas arriba mencionadas.

Por otra parte, es conocido que, en general, los teoremas de extensión son independientes de los axiomas (constructivos) de la teoría de conjuntos, por ejemplo la de Zermelo-Fraenkel (ZF) (ver [7]). Más específicamente, se conoce una jerarquía de teoremas de extensión: Axioma de elección (AE), Teorema de extensión de Sikorski (TES), TIP, Teorema de Hahn-Banach (HB). Considerando que TES y TIP se corresponden, en el caso de las álgebras de Boole con la caracterización de los objetos inyectivos y la extensión de ideales respectivamente, se consideró como fundamental, en este trabajo, determinar cuáles eran los teoremas análogos en las clases de álgebras de lógicas no clásicas estudiadas y su relación con los dos teoremas clásicos arriba mencionados. La respuesta, que es el núcleo de esta Tesis y aparece en § 3 es que, en el marco de ZF, ambas ternas de teoremas análogos son equivalentes.

En § 2 se enuncian los teoremas y se prueba una versión para grupos ordenados del teorema de Hahn-Banach, demostrada originalmente por Cotlar (ver [20]), pero dependiendo de AE. En nuestra versión se prueba que dicho teorema es estrictamente equivalente a HB. Por completitud, se incluye una demostración de TES de forma análoga a la de HB para grupos ordenados. Ambas demostraciones fueron elaboradas por el autor de este trabajo conjuntamente con M.Tilli (ver [26], [31] y [32])

En § 3, donde se encuentra el cuerpo principal de esta Tesis, además de los resultados arriba mencionados se incluyen -sin pretensión alguna de originalidad- todas las definiciones necesarias, así como reformulaciones de resultados conocidos sobre inyectividad en álgebras de Heyting y de Lukasiewicz aunque usando una axiomática estrictamente más débil que en las pruebas originales.

En la misma sección, se introducen los grupos abelianos reticulados con unidad de orden, categoría equivalente a la de las álgebras de Wajsberg a fin de, por medio de un procedimiento de "transferencia", obtener una primera caracterización de los objetos inyectivos para estas álgebras aunque usando el marco axiomático ZF+AE.

Para finalizar dicha sección, se presenta una caracterización de los objetos inyectivos para las álgebras de Wajsberg (en el marco axiomático ZF+TES) como una generalización posible de las álgebras de Post, discutiéndose las otras generalizaciones de dichas álgebras que aparecen en la literatura.

Durante el estudio de las álgebras de Wajsberg inyectivas se obtiene además una caracterización de las álgebras arquimedeanas inyectivas así como una caracterización "topológica" de la diferencia (y analogías) entre las álgebras de Wajsberg arquimedeanas y las semisimples.

Una parte de los resultados expuestos en este trabajo ya habían sido presentados, en forma parcial, en las reuniones de la Unión Matemática Argentina de los años 1985, 1986 y 1987. Quiero destacar aquí mi agradecimiento a Roberto Cignoli y a todos los integrantes del grupo de lógica de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA y, aunque relativamente independiente de dicho grupo, a Miguel Tilli con quienes pude intercambiar ideas fructíferamente y cuyas sugerencias y observaciones me ayudaron en la elaboración de esta Tesis.

2 DEL TEOREMA DE HAHN-BANACH AL AXIOMA DE ELECCION

En el transcurso de este trabajo los espacios vectoriales serán $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, los *grupos* serán *grupos abelianos ordenados con unidad de orden*, es decir, un sistema $G = \langle G, +, -, 0, u, \le \rangle$ donde $\langle G, +, -, 0 \rangle$ es un grupo abeliano, u un elemento de G (llamado unidad de orden) y $\le$ una relación de orden sobre G, tal que se cumple:

i) $\forall x, y, z\ (x \le y \rightarrow x+z \le y+z)$;
ii) $\forall x, y\ (x \le y \leftrightarrow y-x \ge 0)$ y
iii) $\forall x\ (\exists n \in \mathbb{N})(nu > x)$ donde ng significa sumar g n veces.

Notaremos G^+ y G^- a los conjuntos $\{g \in G \ / \ g \ge 0\}$ y $\{g \in G \ / \ g \le 0\}$ respectivamente. Se observa que G es totalmente ordenado si y solamente si $G = G^+ \cup G^-$

Un *cono* en un espacio vectorial o grupo ordenado es un conjunto convexo y cerrado por la multiplicación por cualquier entero positivo. El orden queda univocamente determinado por el cono (ver propiedad ii, arriba), el que resulta ser, exactamente el conjunto de elementos positivos del espacio vectorial o grupo ordenado.

Un *reticulado* es un sistema $\langle R, \vee, \wedge \rangle$ de tipo (2,2) que cumple las siguientes ecuaciones:

i)	$x \vee y = y \vee x$	i')	$x \wedge y = y \wedge x$
ii)	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	ii')	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
iii)	$(x \wedge y) \vee y = y$	iii')	$x \wedge (x \vee y) = x$

Un reticulado se dirá *distributivo* si cumple ademas cualquiera de las siguientes ecuaciones equivalentes:

iv) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ iv') $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Cualquiera de las dos operaciones determina univocamente un orden sobre R dado por $x \le y$ si y solamente si $x \vee y = y$ (o $x \wedge y = x$).

Un reticulado se dice *completo* si existe la menor cota superior (supremo) de todo subconjunto.

Un reticulado distributivo se dirá además, con primer (último) elemento, notado por el símbolo de constante 0 (1) si cumple:

v) $\forall x (0 \le x)$ $(\forall x (x \le 1))$.

Un reticulado distributivo con primer y último elemento se dirá *álgebra de De Morgan* (*álgebra cuasibooleana* según la denominación de [49] y [50]) si tiene además una operación unaria $\neg$ (la negación) tal que vale:

vi) $\neg\neg x = x$; vii) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$; vii') $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$.

Un *grupo (abeliano) reticulado* será un sistema $\langle G, +, -, \vee, \wedge, 0 \rangle$ donde $\langle G, +, -, 0 \rangle$ es un grupo y $\langle G, \vee, \wedge \rangle$ es un reticulado, vale que se le puede dar una estructura de grupo ordenado para el orden inducido por la estructura de reticulado y además se cumplen las siguientes leyes distributivas:

i) $x+(y \vee z) = (x+y) \vee (x+z)$;
ii) $x+(y \wedge z) = (x+y) \wedge (x+z)$.

En [8] se demuestra que todo tal grupo es, como reticulado, distributivo.

Un *álgebra de Boole* será un álgebra de De Morgan, tal que la negación de cada elemento es su negación, es decir que vale la fórmula

$\forall x(x \wedge \neg x = 0 \;\&\; x \vee \neg x = 1)$.

El álgebra de Boole 2 será el conjunto $2=\{0,1\}$ con su orden natural y la sa definición posible de sus operaciones compatible con tal orden.

Un *ideal* sobre un reticulado con cero B será un conjunto I tal que:

i) $0 \in I$;
ii) $x, y \in I \longrightarrow x \vee y \in I$;
iii) $x \leq y \;\&\; y \in I \rightarrow x \in I$.

El ideal se dirá *propio* si no coincide con toda el álgebra. *Primo* si es propio y además vale $x \wedge y \in I \rightarrow x \in I$ o $y \in I$. *Irreducible* si no es la intersección propia de dos ideales propios. *Maximal* si es propio y no está contenido propiamente más que en el ideal impropio (todo el reticulado) (se observa que en el caso particular de las algebras de Boole las tres últimas nociones coinciden). Dualmente (cambiando los $\wedge$ por $\vee$, los $\leq$ por $\geq$ y los 0 por los 1) se definen las nociones respectivas de *filtro* (propio, primo, irreducible y maximal).

En una categoria C, un objeto Q se dirá *inyectivo* si para cada monomorfismo $f\colon A \rightarrowtail B$ en C y cada flecha $g\colon A \longrightarrow Q$, existe una flecha $g'\colon B \longrightarrow Q$ tal que $g' \circ f = g$. De manera dual, se define la noción de *proyectivo*.

Si φ es un enunciado de cierta teoría, diremos que φ vale en ZF (o ZF+TIP o ZF+TES o ZF+AE) y lo notaremos $ZF \vdash \varphi$ (o con el prefijo que corresponda) cuando, trabajando con el lenguaje $\mathcal{L} = \langle \in \rangle$ de la teoría de conjuntos dicho enunciado φ es demostrable en el marco axiomático ZF (o ZF+TIP o ZF+TES o ZF+AE) más los axiomas específicos de la teoría de la que se trate. Si bien a lo largo de este trabajo usaremos un lenguaje informal para los enunciados y las demostraciones, siempre se puede traducir todo (con mucho tiempo, trabajo y papel) al lenguaje de la teoría de conjuntos.

2.1 Enunciados y fuerza relativa de los teoremas

Teorema 2.1: (Hahn-Banach) Sea V un espacio vectorial, S un subespacio, f una funcional lineal definida sobre S y p una funcional sublineal definida sobre todo V que acota a f. Existe una extensión de f, definida sobre todo V, acotada por p.

Teorema 2.2: (Ideal primo) Sea B un álgebra de Boole, I un ideal propio sobre B. Existe un ideal primo P tal que $I \subseteq P$.

Este teorema se puede enunciar, equivalentemente, como un teorema de extensión de homomorfismos (ver [55]):

Sea B un álgebra de Boole, $A \subseteq B$ una subálgebra, $f:A \longrightarrow 2$ un homomorfismo. Existe un homomorfismo $\bar{f}:B \longrightarrow 2$ que extiende a f.

Teorema 2.3: (Sikorski) Sea B un álgebra de Boole, $A \subseteq B$ una subalgebra, Q un algebra de Boole completa y $f:A \longrightarrow Q$ un homomorfismo. Existe un homomorfismo $\bar{f}:B \longrightarrow Q$ que extiende a f.

Teorema 2.4: (Axioma de elección) Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacia de conjuntos no vacios. Existe un conjunto E que contiene exactamente un elemento de cada uno de los miembros de $\mathcal{F}$.

Este teorema admite numerosas formulaciones equivalentes (ver [53]), de las cuales enunciaremos una debida a G.Klimovsky (ver [35] y [6]), ya que reresulta el análogo del teorema del ideal primo para reticulados distributivos:

Sea R un reticulado distributivo con primer elemento, I un ideal propio sobre R. Existe un ideal maximal M tal que $I \subseteq M$.

Según lo comentado en la Introducción, notaremos a los anteriores teorepor HB, TIP, TES y AE, respectivamente.

Los cuatro teoremas enunciados son esencialmente no constructivos y, por lo tanto, independientes de la teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF) (ver [7]). Se puede verificar, casi trivialmente y a partir de los enunciados, ZF + AE $\Rightarrow$ TES $\Rightarrow$ TIP $\Rightarrow$ HB. Respecto a las implicaciones reciprocas, se sabe que HB es estrictamente más débil que TIP (ver [46]), que TIP no implica AE (ver [33]) ni TES (ver [4]), pero no está todavia resuelto el problema de si ZF + TES $\Rightarrow$ AE o no.

2.2 El teorema de Hahn-Banach para grupos ordenados

En [39] W.A.J.Luxemburg probó, usando técnicas de análisis no standard, el teorema de Hahn-Banach sin usar el axioma de elección y mostrando un enunciado equivalente a HB en la teoría de la medida. En [26] probamos que el teorema de Hahn-Banach para espacios vectoriales ordenados (ver [21]) es estrictamente equivalente a HB y si bien la idea de la demostración era análoga a la de Luxemburg, no aparecían las técnicas de análisis no standard, reduciéndose a una demostración perfectamente al alcance de un alumno avanzado de la licenciatura de matemáticas.

En esta sección se enunciará y probará una versión más general, aunque equivalente, de dicho teorema, adaptada esencialmente a las necesidades de la teoría de los grupos abelianos ordenados. Para eso será necesario enunciar una cadena de teoremas equivalentes.

Teorema 2.5: (Krein) Sea K el cono de un espacio vectorial V, S un subespacio y f una funcional lineal definida sobre S tal que $f(y) \geq 0$ para todo $y \in K\cap S$. Si S contiene un punto interno de K (es decir un punto z tal que para todo $v \in V\setminus K$, el segmento abierto (z,v) interseca a K), existe entonces una funcional lineal $\bar{f}$ definida sobre V tal que extiende a f y cumple $\forall z \in K$ $(\bar{f}(z) \geq 0)$.

Teorema 2.6: Sea X un conjunto, $\mathcal{P}(X)$ su conjunto de partes e I un ideal propio sobre el álgebra de Boole $\mathcal{P}(X)$. Existe una medida finitamente aditiva μ definida sobre $\mathcal{P}(X)$ con valores en el intervalo $[0,1]$ que cumple $\mu(a)=0$ si $a \in I$.

Teorema 2.7: (Cotlar) Sea $G = \langle G,+,0,\leq\rangle$ un semigrupo abeliano ordenado, e un elemento de G, $G(e)$ el subsemigrupo definido por:

$G(e) = \{g \in G/ \exists n,m,r \in \mathbb{N},\ \exists z,w \in G\ (r>0\ \&\ ne \leq rg+z\ \&\ g \leq me+w)\}$.

Sean $S \subseteq G(e)$ tal que $e \in S$, $\mathbb{R}$ el grupo aditivo ordenado de los reales, $p:G \to \mathbb{R}$ monótona y subaditiva y $f:S \to \mathbb{R}$ monótona y aditiva tal que:

Para todo $\{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m\}\subset S$, $z \in G$, se cumple

$$\sum x_i \leq \sum y_j+z \longrightarrow \sum f(x_i) \leq \sum f(y_j)+p(z) \qquad (*)$$

Existe entonces una extensión $\bar{f}$ de f definida sobre todo $G(e)$ tal que satisface (*) para $\{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,z\} \subset G(e)$.

Observaciones: En [39] Luxemburg demostró, en ZF, la equivalencia de HB con el teorema 2.6. En lo que sigue, resultará esa equivalencia de la cadena de resultados a demostrar. El teorema 2.7 fue enunciado y demostrado por Cotlar en [20] aunque usando AE, por lo que presentaremos aquí en detalle la demostración de 2.6) → 2.7) en ZF.

Demostraciones:

HB → *2.5*: La prueba usual (ver, por ejemplo [21]) se realiza dentro de ZF (es decir sin usar AE), por lo que la omitiremos ■

2.5 → *2.6*: Sea A un conjunto. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^A$ consideramos el cono positivo

$$K = \{x \in \mathbb{R}^A/\ x_a \geq 0 \text{ para todo } a \in A\}$$

Identifiquemos los conjuntos $\mathcal{P}(A)$ y 2^A, este último contenido en $\mathbb{R}^A$, y llamemos χ_Y a la función característica de $Y \subseteq A$. Sea I un ideal propio de $\mathcal{P}(A)$; entonces χ_A no pertenece a $\langle I\rangle$ (el subespacio de $\mathbb{R}^A$ generado por I) pues, si x perteneciera a $\langle I\rangle$, resultaría $x = \sum c_i x^i$ con $c_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y $x^i \in I$ $(i=1,\dots,n)$.

Definiendo $\mathrm{sop}(x) = \{a \in A/\ x_a \neq 0\}$, tenemos que $\mathrm{sop}(\sum c_i x^i) \subseteq \bigcup \mathrm{sop}(x^i) \neq A$ (pues I es un ideal propio).

Definamos la funcional lineal f sobre el subespacio $S = \langle I\rangle \oplus \langle\chi_A\rangle$ según la fórmula:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \langle I\rangle \\ c & \text{si } x = c\cdot\chi_A \quad (c \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Como χ_A es un punto internal de K, del enunciado de 2.5 resulta que existe una extensión lineal $\bar{f}$ de f tal que $\bar{f}(\ ) \geq 0$ para todo $z \in$ K.

Definimos $\mu:\mathcal{P}(A) \longrightarrow [0,1]$ por $\mu(Y):=\bar{f}(\chi_Y)$. Veamos que μ es una medida finitamente aditiva:

- $\mu(\emptyset) = \bar{f}(\chi_\emptyset) = \bar{f}(0) = 0$ pues $0 \in \langle I \rangle$;
- $\mu(A) = \bar{f}(\chi_A) = \bar{f}(1\cdot\chi_A) = 1$;

  Si $X, Y \subseteq A$, $X \cap Y = \emptyset$, tenemos que

  $\mu(X \cup Y) = \bar{f}(\chi_{X\cup Y}) = \bar{f}(\chi_X + \chi_Y) = \bar{f}(\chi_X) + \bar{f}(\chi_Y) = \mu(X) + \mu(Y)$.
- Además, por definición de f y porque $\bar{f}$ extiende a f, que si $X \in I$, entonces $\mu(X) = 0$ ∎

2.6 → 2.7: Probaremos, al igual que en la demostración usual de HB, esta implicación en dos pasos. Primero, usando solamente ZF, para cada punto $g \in G(e)\setminus S$ construimos una extensión de f definida sobre $S\cup\{g\}$ que cumple con (*). Luego, utilizando el enunciado del teorema 2.6, construimos una extensión definida sobre todo $G(e)$. La demostración del primer paso está adaptada de [20] y la incluimos aquí por razones de completitud.

Sea $g \in G(e)\setminus S$, definimos:

$$f_g(g) := \sup \frac{\sum f(x_i) - \sum f(y_j) - sp(z)}{k}$$

donde el supremo se toma sobre todos los $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \in S$ (variando n y m sobre los naturales), $z \in G$, s y $k \in \mathbb{N}$ tal que

$\sum x_i \le \sum y_j + kg + sz$

Veamos que $f_g(g)$ es un número finito: Como $g \in G(e)$, tenemos que $ne \le rg+z'$ y $g \le me+w$, entonces, por definición de $f_g(g)$, resulta que $f_g(g) \ge (nf(e)-p(z'))/r > -\infty$, además cada vez que $\sum x_i \le \sum y_j + kg + sz$ se obtendrá la desigualdad $\sum x_i \le \sum y_j + sz + kme + kw$, la que implica, por las propiedades de la f que $\sum f(x_i) \le \sum f(y_j) + kmf(e) + sp(z) + kp(w)$ de lo que se deduce que

$$\frac{\sum f(x_i) - \sum f(y_j) - sp(z)}{k} \le mf(e) + p(w),$$

lo que implica que $f(g) \le mf(e) + p(w) < \infty$.

La definición de $f_g(g)$ nos garantiza que, poniendo $f_g(x) := f(x)$ para $x \in S$, $f_g : S\cup\{g\} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple con (*).

Repitiendo el procedimiento de arriba, podemos construir (en ZF), para cada sucesión finita $x = (g_1,\dots,g_n) \subseteq G(e)$, (ordenada por los subíndices) una extensión $f_x : S\cup x \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sea $X = \{x = (g_1,\dots,g_n) / g_1,\dots,g_n \in G(e)\}$.

Definimos una función $F: G(e) \longrightarrow \mathbb{R}^X$ poniendo:

$$F(g)(x):=\begin{cases} f_x(g) & \text{si } g \in Sux \\ 0 & \text{si } g \notin Sux \end{cases}$$

Para cada $g \in G(e)$, definimos $H(g)=\{x \in X/\ g \notin Sux\}$ (+).

Sea I el Ideal de $\mathcal{P}(X)$ generado por la familia $(H(g))_{g\in G(e)}$.

I no fuera propio, existiría un elemento de X, $x=(g_1,..g_n)$, tal que $\bigcup_i H(g_i)=X$ y por lo tanto tendríamos que $x \in H(g_i)$ para algún i, contradiciendo la definición de $H(g_i)$.

Podemos entonces aplicar el enunciado del teorema 2.6 y obtener una medida μ tal que $\mu(X)=1$ y $\mu(a)=0$ cada vez que $a \in I$.

Si g y $g' \in G(e)$, tenemos que $\{x \in X/\ F(g+g')(x) \neq F(g)(x)+F(g')(x)\} \subseteq$ $\subseteq H(g)\cup H(g')\cup H(g+g')$, cuya medida es cero. Entonces F es aditiva en casi todo punto (con respecto a μ).

Tambien sabemos que, dado $g \in G(e)$, como $g \leq 0+g$, enton. $f_g(g) \leq f(0)+p(g)$, de lo que resulta que vale $F(g)(x)=f_x(g) \leq p(g)$ si $g \in Sux$. Por otra parte, sabemos que existen $n,r \in \mathbb{N}$ y un $z \in G$ tal que $= rg+z$ con lo que tenemos $f_g(g) \geq \frac{nf(e)-p(z)}{r}$ s_g, lo que implica que $f_x(g)$ esta también acotada inferiormente si $g \in Sux$. Se observa que el conjunto $\{x \in X/\ F(g)(x) > p(g)\}\cup\{x \in X/\ F(g)(x) < s_g\}$ está contenido en $H(g)$. Entonces, para cada $g \in G(e)$, la desigualdad $s_g \leq F(g)(x) \leq p(g)$ vale todo punto.

manera análoga se verifica que la relación (*) también vale en casi todo punto.

Como $F(g)$ es, para cada $g \in G$, una función acotada, definida sobre X, se puede construir explicitamente (en ZF) una sucesión de funciones simples (funciones "escalera") $(g_i)_{i\in\mathbb{N}} : X \to \mathbb{R}$ que convergen uniformemente a $F(g)$.

Entonces, para cada $g \in G(e)$, podemos definir una integral tipo Lebesgue

$$\int_X F(g)(x)d\mu := \lim_{i\to\infty} \int_X g_i(x)d\mu$$

La integral de la derecha se debe interpretar, cuando g_i es la función $c.\chi_Y$, $Y \subseteq X$, $c \in \mathbb{R}$, como $\int_X c\cdot\chi_Y d\mu = c\cdot\mu(Y)$.

Tenemos entonces las funciones $G(e) \xrightarrow{F} \mathcal{L}^1(X,\mathcal{P}(X),\mu,\mathbb{R}) \xrightarrow{\int} \mathbb{R}$ y la composicion $\int\circ F = \int_X F(\ )(x)d\mu$ es una extensión de f a todo $G(e)$ que satisface (*):

Sea $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \subset G(e)$, $z \in G$ tal que $\sum x_i \leq \sum y_j+z$. que

$\int_X F(\Sigma x_i)(x)d\mu = \int_{X\setminus Y} F(\Sigma x_i)(x)d\mu + \int_Y F(\Sigma x_i)(x)d\mu = \int_{X\setminus Y} F(\Sigma x_i)(x)d\mu$ donde $\bigcup_i H(x_i) \cup \bigcup_j H(y_j) \cup H(\Sigma x_i) \cup H(\Sigma y_j)$, el que resulta, por (†), un conjunto de medida nula. Similarmente, probamos que $\int_X F(\Sigma y_j)(x)d\mu = \int_{X\setminus Y} F(\Sigma y_j)(x)d\mu$ y, como para cada x en $X\setminus Y$ vale la desigualdad $F(\Sigma x_i)(x) \le F(\Sigma y_j)(x)+p(z)$, obtenemos que tambien vale la desigualdad $\int_X F(\Sigma x_i)(x)d\mu \le \int_X F(\Sigma y_j)(x)d\mu+p(z)$ ■

2.7 → HB: Consideremos al (semi)grupo aditivo subyacente al espacio V con el orden trivial: $g \le g'$ si y sólo si $g = g'$. Obviamente $V(0) = V$. Estamos entonces bajo las hipótesis del teorema 2.7, por lo que podemos obtener una extensión de la funcional f que es un homomorfismo de grupos. La funcional subaditiva y lineal p, define una topologia localmente convexa sobre V, para la cual la extensión $\bar{f}$ de f es continua y, por lo tanto, lineal ■

<u>Observación</u>: Si $G(e)$ es un espacio vectorial, resulta que la función $\bar{f}$ definida en (**) es lineal, como además la integral construida preserva la acción de $\mathbb{R}$, entonces la extensión resultante también es lineal. Esto da una prueba directa de 2.6 → HB (en ZF) sin pasar por 2.7.

Con lo anterior, resulta que los cuatro teoremas son equivalentes (en ZF) por lo tanto, estrictamente más débiles que TIP.

El teorema 2.7 admite una generalización a los grupos reticulados divisibles y completos, aunque a costa de fortalecer las hipotesis. Para demostrarla necesitaremos un lema previo.

<u>Lema 2.8:</u> Si G es un grupo reticulado, divisible y completo. Se puede definir sobre él una estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Demostracion: Por ser un grupo abeliano, es un $\mathbb{Z}$-modulo, la divisibilidad implica que existe una acción de los racionales sobre G, es decir que admite una estructura de $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Para definir la acción de $\mathbb{R}$ sobre G, apelamos a la completitud. Sea $r \in \mathbb{R}$, r será limite de alguna sucesión de Cauchy $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ contenida en $\mathbb{Q}$, la que podemos elegir creciente y tal que $\varepsilon_n<1/n$. Definimos entonces, para $g \in G$, $rg = \sup\{r_i g\ (i \in \mathbb{N})\}$. Para la buena definición, sean $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones crecientes en las condiciones de arriba, que convergen a $r \in \mathbb{R}$. Tenemos que $|r_i g - s_i g|<1/n$ (donde $|h|$ vale h si $h\in G^+$ y $-h$ si $h\in G^-$), por lo que ambas sucesiones en G tienen el mismo limite ■

<u>Teorema 2.7':</u> (ZF+AE) Sea $<G,+,0,\le>$ un semigrupo abeliano ordenado, e un elemento de G, $G(e)$ el subsemigrupo definido por:

$G(e)=\{g \in G/\ \exists n,m,r \in \mathbb{N},\ \exists z,w \in G\ (r>0\ \&\ ne \le rg+z\ \&\ g \le me+w)\}$.

Sean $S \subseteq G(e)$ tal que $e \in S$, Q un grupo reticulado, divisible, completo y con unidad de orden u y las funciones, $p:G \longrightarrow Q$, monótona subaditiva y $f:S \longrightarrow Q$ aditiva y monótona tal que: Para todo $\{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m\} \subset S$, $z \in G$,

$$\sum x_i \le \sum y_j + z \Longrightarrow \sum f(x_i) \le \sum f(y_j) + p(z) \qquad (*)$$

Si $p(e) = f(e) = u$, entonces existe una extensión $\bar{f}$ de f definida sobre todo $G(e)$ tal que satisface $(*)$ para $\{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m\}$.

Demostración: La primera parte de la demostración del teorema 2.7, es decir la extensión de la función a un punto más se hace enteramente dentro de ZF y sólo se usa la divisibilidad y completitud de $\mathbb{R}$, propiedades compartidas por Q, por lo tanto podemos repetir aquí dicha demostración.

La segunda parte -la construcción de la integral- se puede repetir de manera análoga al caso real. Utilizando que Q admite una estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial ordenado y completo, se puede, para cada función $g:X \longrightarrow Q$, acotada por p, encontrar una familia de funciones "escalera" que tiendan uniformemente a g. Sin embargo, y a diferencia del caso real, al no ser Q, en general, totalmente ordenado, no existe una forma canónica de determinar esa familia de funciones, por lo que, para cada función g habría que elegir una sucesión de funciones tendiente a ella entre un conjunto de sucesiones, en general no numerable. Entonces vemos la necesidad de aplicar AE para probar este teorema en el caso general.

Teniendo en cuenta que no podemos evitar utilizar AE, una manera más sencilla (y tradicional) de probar la segunda parte del teorema es considerar el conjunto de todas las extensiones posibles de f, verificar que es inductivo superiormente y utilizar directamente el lema de Zorn (equivalente a AE) para encontrar una extensión maximal ∎

2.3 El teorema de extensión de Sikorski y la integral booleana

En [54], R.Sikorski expone este teorema de extensión de una manera análoga a la forma canónica de demostrar HB, es decir, extendiendo primero la función a un punto más y luego, usando el axioma de elección en su forma de Lema de Zorn para obtener una extensión maximal que cumpla con lo pedido. En [32] presentamos una demostración de TES análoga a la expuesta en § 2.2 para el teorema de Cotlar de extensión de morfismos de semigrupos.

Se define la noción de integral booleana que cumple un papel similar al de la medida con valores en el intervalo $[0,1]$ del teorema 2.6. Esta demostración, si bien no descansa directamente en el axioma de elección descansa en la existencia de una integral booleana lo que, si bien es implicado por AE no sabemos, hasta la fecha si es o no estrictamente más débil que dicho axioma.

Definición 2.9: Sea X un conjunto, B un álgebra de Boole, una *medida* B-*valuada* sobre X es un homomorfismo $\mu:\mathcal{P}(X) \longrightarrow B$.

Si tenemos un conjunto X y un álgebra de Boole B, todo homomorfismo $\varphi: B^X \longrightarrow B$ define una medida B-valuada sobre $\mathcal{P}(X)$, poniendo $\mu(a) := \varphi(\chi_a)$

Definición 2.10: Sean B un álgebra de Boole, X e Y conjuntos. Un homomorfismo $\varphi: B^X \to B^Y$ se denomina *B-homomorfismo* si y solamente $\varphi(b\wedge h) = b\wedge\varphi(h)$ ($b \in B$, $h \in B^X$) (identificando a b con la función constantemente igual a b).

Lema 2.11: Sea X un conjunto, B un álgebra de Boole completa, $\varphi: B^X \to B$ un B-homomorfismo, entonces $\varphi(h) \ge \bigvee_{b\in B}(b\wedge\mu(h^{-1}(b)))$ para toda $h \in B^X$ donde μ la medida inducida por φ. Además, si $h(X)$ es finito, vale la igualdad.

Demostración: Sea $h \in B^X$, podemos escribir $h(x) = \bigvee_{b\in B}(b\wedge\chi_{h^{-1}(b)}(x))$.

Entonces $\varphi(h)=\varphi(\bigvee_{b\in B}(b\wedge\chi_{h^{-1}(b)})) \ge \bigvee_{b\in B}\varphi(b\wedge\chi_{h^{-1}(b)}) = \bigvee_{b\in B}(b\wedge\mu(h^{-1}(b)))$

Definición 2.12: Con las notaciones de 2.11, diremos que un B-homomorfismo $\varphi: B^X \to B$ es una *B-integral* si $h_{|X\setminus a}=0$ y $\mu(a)=0$ implican que $\varphi(h)=0$. Notaremos dicho morfismo, si no hay ambigüedad sobre el mismo, con $\int_X d\mu$ y escribiremos $\int_X h d\mu$ por $\varphi(h)$.

2.13: Sea $\int_X d\mu: B^X \to B$ una B-integral. Si $X = X_1 \cup X_2$ y $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ entonces $\int_X h d\mu = \int_{X_1}(h_{|X_1})d\mu_1 \vee \int_{X_2}(h_{|X_2})d\mu_2$ donde $\int_{X_i} d\mu_i$ $(i=1,2)$ es la restricción de $\int_X d\mu$ a $\{h \in B^X / h_{|X_{3-i}} = 0\}$

Demostración: Escribimos $h_i = h\wedge\chi_{X_i}$ $(i=1,2)$. Entonces $h = h_1 \vee h_2$, lo que implica que $\int_X h d\mu = \int_X h_1 d\mu \vee \int_X h_2 d\mu$, y como $\int_X h_i d\mu$ coincide con $\int_{X_i}(h_{|X_i})d\mu_i$ $(i=1,2)$, resulta probado el enunciado ■

Lema 2.14: TES es equivalente a la conjunción de TIP y la afirmación "toda álgebra de Boole completa es retracto de sus ultrapotencias".

La demostración (hecha en ZF) puede encontrarse en [38].

El siguiente lema, adaptado de otro publicado en [15] por R.Cignoli será necesario para la demostración de la equivalencia entre TES y el teorema 2.16:

Lema 2.15: Sea $f: A \to B$ una función entre reticulados distributivos acotados tal que preserva el 0 y el 1. f será un morfismo si y solamente si

$\forall x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m \in A$,

$x_1\wedge..\wedge x_n \le y_1\vee..\vee y_m \Rightarrow f(x_1)\wedge..\wedge f(x_n) \le f(y_1)\vee..\vee f(y_m)$. Además, si A y B son álgebras de Boole, preservará también la negación.

Demostración: $\to$) Todo morfismo de reticulados preserva el orden.
$\leftarrow$) $x\wedge y \le (x\wedge y)\vee 0 \to f(x)\wedge f(y) \le f(x\wedge y)\vee f(0)=f(x\wedge y)$. Además $(x\wedge y)\wedge 1 \le x\vee 0 \Rightarrow f(x\wedge y) \le f(x)$, de la misma manera resulta que $f(x\wedge y) \le f(y)$, con lo que se obtiene la igualdad $f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$. Análogamente se obtiene que $f(x\vee y) = f(x)\vee f(y)$. La igualdad $f(\neg x)=\neg f(x)$ resulta de lo anterior y de que $f(0)=0$ y $f(1)=1$ ∎

A continuación probaremos (en ZF) la equivalencia de TES y el siguiente

Teorema 2.16: Sea X un conjunto, B un álgebra de Boole completa e I un ideal propio sobre $\mathcal{P}(X)$. Entonces existe una B-integral $\int_X d\mu$ definida sobre B^X tal que $\mu_{|I} = 0$.

TES $\to$ *2.16:* Sea B un álgebra de Boole completa, X un conjunto e I un ideal propio sobre $\mathcal{P}(X)$. Por TIP podemos extender I a un ideal primo P, cuyo complemento es un ultrafiltro U. Como $B^X/_U$ es un ultraproducto de B, por 2.14, existe una retracción $r:B^X/_U \to B$. Afirmamos que la función $r\circ\pi:B^X \to B^X/_U$, donde π es la proyección canónica $\pi:B^X \to B^X/_U$, es la integral requerida:
Para cualquier $a \subseteq X$, tenemos la medida inducida $\mu(a):=r\circ\pi(\chi_a)$. Como U es un ultrafiltro, para cada $a \subseteq X$, tenemos que $a \in U$ o $X\setminus a \in U$, por lo tanto $\pi(\chi_a)=$ 1 ó 0, respectivamente. Como r es un retracto, se tiene que $\mu(a) = 0$ implica $\pi(\chi_a) = 0$ y, equivalentemente, $\{x \in X/ \chi_a(x) = 1\} = a \in P$. Si, además, $h \in B^X$ y $h_{|X\setminus a} = 0$, vale que $\pi(h) = 0$ y de allí $r\circ\pi(h) = 0$. Que $\mu_{|I} = 0$ resulta de que $\pi(\chi_a) = 0$ para todo $a \in P \supseteq I$ ∎

2.16 $\to$ *TES:* Análogamente a la demostración de 2.6 $\to$ 2.7, primero, extenderemos (en ZF) el morfismo a un punto más (adaptando a este caso particular la demostración de Cignoli en [15]) y luego usaremos 2.16 para extender el morfismo a toda el álgebra B.
Sea $b \in B\setminus A$, definimos $\alpha:= \sup\{f(x_1)\wedge..\wedge f(x_n)\wedge f(\neg y_1)\wedge..\wedge f(\neg y_m)\}$ donde el supremo se toma sobre todos los $\{x_1,...,x_n,y_1,...,y_m\}$ tal que $x_1\wedge..\wedge x_n \le y_1\vee..\vee y_m\vee b$. Y definimos, análogamente,
$\beta:= \inf\{f(\neg x'_1)\vee..\vee f(\neg x'_{n'})\vee f(y'_1)\vee..f(y'_{m'})\}$ donde el ínfimo se toma sobre los $\{x'_1,...,x'_{n'},y'_1,..y'_{m'}\}$ tal que $x'_1\wedge..\wedge x'_{n'}\wedge b \le y'_1\vee..\vee y'_{m'}$.
Por lema 2.15 se puede ver que si definimos $f_b:A\cup\{b\} \to Q$ e

$$f_b(x):=\begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ c & \text{si } x = b \text{ (donde } c \in Q,\ \alpha \le c \le \beta) \end{cases} \qquad (*)$$

resultará ser un "homomorfismo" sobre su dominio de definición.
Sabemos que α y β existen ya que Q es completa. Veamos que $\alpha \le \beta$:

Sean $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,x'_1,\dots,x'_n,y'_1,\dots,y'_m$, tal que valga:

$$x_1\wedge..\wedge x_n \le y_1\vee..\vee y_m\vee b \qquad (1)$$

y $$x'_1\wedge..\wedge x'_n\wedge b \le y'_1\vee..\vee y'_m. \qquad (2)$$

A partir de (2) obtenemos $(x'_1\wedge..\wedge x'_n\wedge b)\vee y_1\vee..\vee y_m \le y'_1\vee..\vee y'_m$, (3)

y de (1) resulta $x_1\wedge..\wedge x_n\wedge x'_1\wedge..\wedge x'_n \le (y_1\vee..\vee y_m\vee b)\wedge x'_1\wedge..\wedge x'_n =$

$((y_1\vee..\vee y_m)\wedge x'_1\wedge..\wedge x'_n)\vee(b\wedge x'_1\wedge..\wedge x'_n) \le (x'_1\wedge..\wedge x'_n\wedge b)\vee y_1\vee..\vee y_m$.

Entonces (3) implica que $x_1\wedge..\wedge x_n\wedge x'_1\wedge..\wedge x'_n \le y_1\vee..\vee y_m\vee y'_1\vee..\vee y'_m$.

De esta desigualdad se obtiene que

$(x_1\wedge..\wedge x_n\wedge x'_1\wedge..\wedge x'_n)\vee\neg(x'_1\wedge..\wedge x'_n) \le y_1\vee..\vee y_n\vee y'_1\vee..\vee y'_m\vee\neg(x'_1\wedge..\wedge x'_n)$

decir que $x_1\wedge..\wedge x_n \le (x_1\wedge..\wedge x_n)\vee\neg(x'_1\wedge..\wedge x'_n) =$

$(x_1\wedge..\wedge x_n\wedge x'_1\wedge..\wedge x'_n)\vee\neg(x'_1\wedge..\wedge x'_n) \le y_1\vee..\vee y_m\vee y'_1\vee..\vee y'_m\vee\neg(x'_1\wedge..\wedge x'_n)$.

Esto implica que $(x_1\wedge..\wedge x_n)\wedge\neg(y_1\vee..\vee y_m) \le$

$(y_1\vee..\vee y_m\vee y'_1\vee..\vee y'_m\vee\neg(x'_1\wedge..\wedge x'_n))\wedge\neg(y_1\vee..\vee y_m) =$

$(y'_1\vee..\vee y'_m\vee\neg(x'_1\wedge..\wedge x'_n))\wedge\neg(y_1\vee..\vee y_m) \le y'_1\vee..\vee y'_m\vee\neg(x'_1\wedge..\wedge x'_n)$.

Con lo que obtenemos que $x_1\wedge..\wedge x_n\wedge\neg y_1\wedge..\wedge\neg y_m \le y'_1\vee..\vee y'_m\vee\neg x'_1\vee..\vee\neg x'_n$, lo que implica que $\alpha \le \beta$. Para asegurar la constructividad de esta parte de la demostración, elegimos el c de la definición (+) de f_b como α. Podemos entonces, al igual que en la demostración de 2.6 → 2.7, definir, para cada subconjunto finito totalmente ordenado $x \subseteq B\setminus A$, un homomorfismo $f_x: B\cup x \to Q$ que extiende a f. Definimos, entonces una aplicación $F: B \to Q^X$

$$\text{por } F(b)(x) = \begin{cases} f_x(b) & \text{si } b \in A\cup x \\ 0 & \text{si } b \notin A\cup x \end{cases}$$

y sobre $\mathcal{P}(X)$ el ideal propio I generado por los conjuntos $(H(b) = \{x \in X \,/\, b \notin A\cup x\})_{b \in B}$.

Aplicando ahora 2.16, sabemos que existe una Q-integral $\int_X d\mu$ definida sobre Q^X que se anula sobre I. Al igual que en la demostración de 2.6 → 2.7, se verifica que $\int_X d\mu\circ F: B \to Q$ es un morfismo y que extiende a f ∎

<u>Observación:</u> En [42] A.Monteiro prueba (usando AE) una generalización de TES para morfismos acotados y en [15] R.Cignoli hace lo propio para el caso en que B es un reticulado distributivo cualquiera y A un subreticulado. P.D.Bacsich probó en [1] que los teoremas de Monteiro y de Sikorski son equivalentes y en [31] mostramos que ambos son equivalentes al teorema de Cignoli. La prueba se puede hacer vía el circuito [15] ⟹ [42] ⟹ TES ⟹ 2.16 ⟹ [15] (donde la última implicación se demuestra de forma similar a 2.16 ⟹ TES).

Dichas demostraciones no se incluyen en este trabajo por no hacer parte esencial del tema del mismo.

3 INYECTIVIDAD Y EL TEOREMA DEL IDEAL PRIMO

Si se piensa a las álgebras de Boole como las contrapartidas algebraicas de las lógicas proposicionales clásicas, los filtros se corresponden con las teorías, los filtros maximales con las teorías maximales y los filtros primos con las teorías completas, es decir las teorías T tal que para toda fórmula φ del lenguaje con que trabajemos, vale $\vdash_T \varphi$ o $\vdash_T \neg\varphi$. Como para las álgebras de Boole filtros primos y filtros maximales son lo mismo, resulta que teorías completas y teorías maximales coinciden. Para el caso de otras lógicas no clásicas tenemos que en las álgebras correspondientes las nociones de primidad y maximalidad no coinciden para los filtros. La contrapartida lógica (en los casos de las lógicas intuicionista y polivalente) de la noción de filtro maximal sigue siendo la de teoría maximal, sin embargo la de filtro primo ya no puede ser la de teoría completa en el sentido clásico, ya que en general, como no para todo elemento a del álgebra vale $a \vee \neg a = 1$, no podemos afirmar que, si F es un filtro primo, valdrá, para cada elemento a que $a \in F$ o $\neg a \in F$. Sin embargo, veremos que todo filtro primo resulta irreducible (y recíprocamente) por lo que los filtros primos (irreducibles) se corresponderán con las irreducibles.

La existencia de filtros (o ideales) primos está, en las álgebras de Boole, íntimamente relacionada con una caracterización (parcial) de los objetos inyectivos de la categoría correspondiente (ver formulación equivalente del teorema 2.2). Por lo tanto, así como se busca generalizar el teorema del ideal primo a las otras clases de álgebras de la lógica, tiene sentido proceder análogamente con el teorema de extensión de Sikorski y la caracterización de los objetos inyectivos.

En esta sección consideraremos álgebras $\langle A, \to, \neg, 1\rangle$ de tipo $\langle 2,1,0\rangle$. Dichas álgebras serán la contrapartida algebraica de los cálculos implicativos con negación los que, dependiendo de los axiomas elegidos, se tratarán del cálculo clásico, del intuicionista o del infinito-valente de Łukasiewicz.

En el caso particular de la lógica clásica y teniendo en cuenta que las operaciones $\vee, \wedge$ y 0 de un álgebra de Boole se pueden definir a partir de $\to, \neg$ y 1, con un abuso de notación podremos considerar a las álgebras de Boole como álgebras de tipo (2,1,0) definidas por las siguientes:

<u>Ecuaciones 3.1:</u>

α) $x \to (y \to x) = 1$.

β) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$.

γ) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$.

δ) $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$.

ε) $(\neg x \to \neg y) \to (y \to x) = 1$.

θ) $(x \to \neg x) \to \neg x = 1$.

bien los axiomas no resultan independientes, resulta conveniente exponerlos de esta manera a fin de resaltar las similitudes y diferencias con las otras álgebras que aparecerán a lo largo de esta sección.

Como convención notaremos 0 por $\neg 1$.

Observación: Estas álgebras aparecen en [49] bajo el nombre de *álgebras de implicacion contraposicionalmente complementadas*.

Definición 3.2: Un subconjunto D de un álgebra A se llamará *sistema deductivo* o *filtro implicativo* si cumple:

SD1) $1 \in D$ y
SD2) Si x, $x \to y \in D$ entonces $y \in D$ (*modus ponens*).

Un sistema deductivo se dirá *propio* si no coincide con todo A y se dirá *irreducible* si no resulta ser la intersección de dos sistemas deductivos propios y distintos.

3.1 Logica clásica: el caso de las álgebras de Boole

Los resultados de esta sección son todos conocidos y se enuncian esencialmente para comparar con los otros dos casos a presentarse en los siguientes apartados. Como referencia y fuente de demostraciones, se puede consultar el trabajo clásico de R.Sikorski sobre el tema [55].

En [25], aunque refiriéndose al caso de las álgebras de Wajsberg, se prueba que si valen los axiomas 3.1 γ), δ), ε) y ι), entonces sobre el álgebra puede definirse una estructura de reticulado distributivo donde el supremo queda definido por $x \vee y := (x \to y) \to y$ mientras que el ínfimo resulta de aplicar la ley de De Morgan, $x \wedge y = \neg((\neg x \to \neg y) \to \neg y)$.

En tales casos se puede observar que todo sistema deductivo es un filtro que, por ser cerrado por *modus ponens* recibe el adjetivo de implicativo. En el caso particular de las álgebras de Boole los sistemas deductivos y los filtros coinciden.

Otra propiedad distintiva de los filtros de las álgebras de Boole, a diferencia del caso de los reticulados distributivos acotados en general, es que las nociones de primidad y maximalidad coinciden para los filtros. Lo mismo vale para la noción dual de ideal y resulta además que el complemento conjuntista de un filtro primo es un ideal primo y recíprocamente.

Traducido a la formulación implicativa, TIP afirma

En un álgebra de Boole todo sistema deductivo propio extender uno primo y

b) En un álgebra de Boole todo sistema deductivo propio se puede extender a uno maximal.

Respecto a inyectividad tenemos dos teore

c) (TIP) Las álgebras de Boole completas y atómicas son objetos inyectivos en la categoría de las álgebras de Boole (ver [55] y [1]).
(TES) Las álgebras de Boole completas son objetos inyectivos en la categoría de las álgebras de Boole.

Además, en [55] se prueba que si un álgebra de Boole es inyectiva, debe ser completa, por lo que una formulación más cerrada de TES sería:

Los objetos inyectivos en la categoría de las álgebras de Boole son las álgebras de Boole completas.

En lo que sigue, se expondrán los resultados obtenidos para los casos de dos lógicas no clásicas: la intuicionista y las polivalentes.

3.2 Lógica intuicionista: álgebras deductivas y de Hilbert

La lógica intuicionista, formulada originalmente por L.E.J.Brouwer y axiomatizada y formalizada posteriormente por A.Heyting, admite varias algebrizaciones, dependiendo de los axiomas y operaciones elegidos para la misma: álgebras de Heyting, de Hilbert, deductivas, de Tarski. En particular, tanto las de Hilbert como las deductivas son, en general, álgebras no reticulables, por lo que se ajustan exactamente al tipo de álgebra $\langle 2,1,0\rangle$ que pretendemos estudiar. En [41] y [42], A.Monteiro y en [22], A.Diego desarrollaron la teoría de dichas álgebras y de sus sistemas deductivos, aunque considerando el caso sin negación. Si bien este caso permite una buena teoría de sus sistemas deductivos, no permite obtener resultados sobre extensión y sobre inyectividad más que para casos particulares, por lo que preferimos trabajar considerando dichas álgebras con negación (y, en consecuencia, con primer elemento).

Si bien las álgebras de Heyting, tienen más estructura, ya que se las puede considerar como álgebras de Hilbert reticuladas, los resultados obtenidos para estas últimas se pueden particularizar directamente a las primeras y más todavía, los teoremas sobre extensión de sistemas deductivos y sobre inyectividad son exactamente equivalentes para ambas clases de álgebras.

3.2.1 Definiciones

<u>Definición 3.3:</u> Un álgebra $(A, \rightarrow, \neg, 1)$ se llamará *álgebra deductiva con cero* (que llamaremos de aquí en más álgebra deductiva) si satisface las ecuaciones 3.1.α), β), λ) y además la cuasiecuación:

i) Si $1 \rightarrow x = 1$ entonces $x = 1$.

Si satisface, además, la cuasiecuación:

ii) Si $x \rightarrow y = 1$ y $y \rightarrow x = 1$ entonces $x = y$

se la denominará *álgebra de Hilbert con cero* (que llamaremos de aquí en más álgebra de Hilbert).

Un *álgebra de Heyting* es un sistema $\langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, \neg, 1\rangle$ de tipo $\langle 2,2,2,1,0\rangle$ tal que $\langle A, \rightarrow, \neg, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert con cero, $\langle A, \vee, \wedge, 1, \neg 1\rangle$ es un reticulado distributivo con cero y uno, tal que para todo $x, y \in A$ vale $x \wedge y = x$ sii $x \vee y = y$ sii $x \rightarrow y = 1$. (En [49] y [50] se denomina a estas álgebras *álgebras pseudobooleanas*).

Una primera observación a hacer es que en estas álgebras al igual que en las otras clases con las que trabajemos la implicación define un orden sobre el conjunto subyacente por $x \leq y$ si y solamente si $x \to y = 1$.

En los próximos dos teoremas enunciamos, para referencia posterior, algunos resultados sobre álgebras deductivas y de Hilbert, cuyas demostraciones se pueden obtener con facilidad a partir de las propiedades determinadas en [43, § 2].

<u>Teorema 3.4:</u> En toda álgebra deductiva valen:

a) las siguientes ecuaciones:

i) $x \to \neg\neg x = 1$;

ii) $\neg x \to \neg\neg\neg x = 1$ y $\neg\neg\neg x \to \neg x = 1$;

iii) $(x \to y) \to ((z \to x) \to (z \to y)) = 1$;

iv) $(x \to (x \to y)) \to (x \to y) = 1$;

v) $(x \to (y \to z)) \to (y \to (x \to z)) = 1$;

vi) $x \to 1 = 1$;

vii) $(1 \to x) \to x = 1$;

viii) $((x \to y) \to z) \to (w \to (y \to z)) = 1$.

ix) $x \to x = 1$.

b) La ecuación 3.1.γ.

<u>Teorema 3.5:</u> En toda álgebra de Hilbert valen, además:

i) $\neg 0 = 1$ y

ii) $1 \to x = x$ (3.1.ε).

<u>Observación:</u> La clase de las álgebras deductivas no es ecuacional ya que no es cerrada por imágenes homomórficas. En cambio, Diego probó en [22] que las álgebras de Hilbert (en sentido estricto) sí forman una variedad, de lo que se sigue que las álgebras de Hilbert (con cero) también forman una variedad, ya que están definidas por una operación y una ecuación más.

<u>Lema 3.6:</u> Sea A un álgebra deductiva, D un sistema deductivo propio sobre A, la relación sobre A notada con $\sim_D$ y definida por $x \sim_D y$ si y solamente si $x \to y$, $y \to x \in D$, resulta ser una congruencia.

Demostración: Que $\sim_D$ es una relación de equivalencia resulta de aplicar la definición, 3.4.ix) y 3.1.γ) para probar, respectivamente, reflexividad, simetría y transitividad.

Veamos que preserva la implicación:

Sean $x, x', y, y' \in A$ tal que $x \sim_D x'$ y $y \sim_D y'$. Por 3.1.γ) tenemos que $(x' \to x) \to ((x \to y) \to (x' \to y)) = 1$ y que $(x \to x') \to ((x' \to y) \to (x \to y)) = 1$. Como tanto $(x' \to x)$, $(x \to x')$ como $1 \in D$, tenemos, por *modus ponens* que $(x' \to y) \to (x \to y)$ y también $(x \to y) \to (x' \to y)$ están en D. De manera análoga, y usando 3.4.iii), probamos que tanto $(x \to y) \to (x \to y')$ como $(x \to y') \to (x \to y)$ están en

Por lo tanto podemos concluir que vale $(x \to y) \sim_D (x' \to y')$.

Ahora, como 3.1.α), β), λ) son ecuaciones, valen en el álgebra cociente $_D$. Para 3.3.1) tenemos que $|1| \to |x|$ $|1|$ (donde con $|x|$ notamos la clase del x por la relación $\sim_D$) entonces, como $|1|$ coincide con D, por modus ponens, x debe ser un elemento de D y de allí $|x| = D = |1|$.

Mas aun, $A/\sim_D$ es un álgebra de Hilbert pues, si $|x| \to |y| = |1|$ y $|y| \to |x| = |1|$ resulta que $x \to y$ y $y \to x$ están en D, por lo que se obtiene que es decir que $|x| = |y|$ ∎

Para la recíproca de 3.6 formulamos el siguiente

<u>Lema 3.7:</u> Sea A un álgebra deductiva y $\sim$ una congruencia sobre ella. El conjunto $D_\sim := \{x \in A / x \sim 1\}$ es un sistema deductivo.

Demostración: SD1) vale ya que $x \sim x$ para todo x en A. Veamos SD2):

Sean x, $\to y \in D_\sim$ Entonces $|x|$ $|x \to y| = |1|$, pero

$|x \to y| = |x| \to |y|$ (por ser una congruencia) y entonces tenemos

$|1| \to |y| = |1|$ y, por 3.3.1) $|y| = |1|$, de lo que resulta que $y \in$ ∎

Pero en general no es cierto que $A/_D$ coincida En particular,

lema 3.6, sabemos que $A/_D$ es un álgebra de Hilbert, y $A/$ puede no se

Por ejemplo, si A es deductiva pero no de Hilbert y la relación $\sim$ es la identidad, tenemos entonces que $A/_{D_\sim} = A/_{\{1\}} \neq A = A/_\sim$. Lo que sí se puede afirmar es el siguiente resultado:

<u>Lema 3.8:</u> Sea A un álgebra deductiva y D un sistema deductivo sobre ella. El cojunto parcialmente ordenado de congruencias $\sim$ sobre A tal que $D_\sim = D$, tiene $\sim_D$ como su elemento máximo.

Demostración: Sea $\sim$ una congruencia tal que $D_\sim$ D. Si x tendremos que tanto $x \to y$ como $y \to x$ están en D, pero esto es lo mismo que decir que

(Aquí consideramos al álgebra de Boole 2 con su estructura subyacente de álgebra deductiva).

...ión: i) Resulta de aplicar lo observado en el ítem 3.6, poniendo $B = A/_{D}$.

ii) Sea D un sistema deductivo propio, definimos

$\{x \in A / \neg x \in D\}$. Si D es maximal tenemos que, para ... $\in A \setminus D$, el sistema deductivo $D(z)$, generado por $D \cup \{z\}$, coincide con A.

... [44, teorema 1.3.9] A. Monteiro probó que vale $D(z)$ ... $\{x \in$ ... $\to x \in D\}$

Como $0 \in A = D(z)$, resulta que $\neg z = z \to 0 \in D$. Entonces, si D es maximal, tenemos que $A = D \cup \neg D$. De lo anterior, resulta que el morfismo definido sobre A y con valores en 2 es

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in D \\ 0 \text{ si } x \in \neg D. \end{cases}$$

La recíproca resulta del hecho de que D y $\neg D$ son siempre disjuntos. Considerando la congruencia generada por $D = f^{-1}(1)$, se ve que $|0| = \neg D$, por ... $A/_{D} \cong 2$ si y solamente si existen sólo dos clases ... equivalencia en ... $_{D}$ ... solamente si ... $D \cup \neg D$ ■

...inición: Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $\mathcal{B}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$. Decimos que un funtor $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es *reflectivo* si cada vez que $A \in Ob(\mathcal{A})$, $B \in Ob(\mathcal{B})$ y $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$, existe una única flecha $\bar{f} \in Hom_{\mathcal{B}}(FA, B)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"'] & B \\ FA \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

...ce además que ... *preserva monomorfismos* si cada vez que tenemos $A, B \in Ob(\mathcal{A})$, $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$, monomorfismo, resulta que la flecha $Ff \in Hom_{\mathcal{B}}(FA, FB)$ es también un monomorfismo. (Para más detalle, ver [2, 1]).

Teorema 3.10: El funtor H de la categoría $\mathcal{D}$ de álgebras deductivas sobre la categoría $\mathcal{H}$ de álgebras de Hilbert dado por $HA = A/_{\{1\}}$ para los objetos y por $Ff(|a|) = |f(a)|$ para las flechas, es reflectivo y preserva monomorfismos.

Demostración: Sean D, D' sistemas deductivos sobre $A \in Ob(\mathcal{D})$ tal que $D \subseteq D'$, tenemos entonces una única factorización canónica

$$\searrow A/_D \nearrow$$

y sabemos, por la observación del lema 3.6 que $A/_D$ es siempre un álgebra de Hilbert. Entonces, dada $f: A \longrightarrow B$, con $B \in \mathrm{Ob}(H)$, si $D' = f^{-1}(1)$ y $D = \{1\}$, obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[rrrr, bend left, "f"] \arrow[dr] & & A/_{f^{-1}(1)} \arrow[rr] & & B \\ & A/_{\{1\}} \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

lo que da la reflectividad. Veamos que preserva monomorfismos:
Sean A y B álgebras deductivas y $f: A \longrightarrow B$ un monomorfismo.
guiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "H"'] & B \arrow[d, "H"] \\ HA \arrow[r, "Hf"'] & HB \end{tikzcd}$$

Si notamos con $h_C: C \longrightarrow HC$ al morfismo asociado con H (es decir que h_C es la proyección canónica al cociente $C/_{\{1\}}$), tenemos que si $Hf(h_A(a)) = Hf(h_A(b))$, entonces $h_B(f(a)) = h_B(f(b))$, o sea que $f(a) \longrightarrow f(b) = f(b) \longrightarrow f(a) = 1$, de lo que resulta que $f(a \longrightarrow b) = f(b \longrightarrow a) = 1$

Si suponemos que f es un monomorfismo, resulta entonces que $a \longrightarrow b = b \longrightarrow a = 1$, con lo que $h_A(a) = h_A(b)$ y, por lo tanto Hf también es un monomorfismo ■

<u>Definición:</u> En un álgebra deductiva A un elemento a se dice *regular* si vale la identidad $\neg\neg a = a$. El conjunto de los elementos regulares de A se notará RA.

El siguiente teorema fue enunciado, aunque sin demostración, por A. Monteiro en [41].

<u>Teorema 3.11:</u> (Monteiro-Glivenko) Sea A un álgebra de Hilbert, sobre RA puede darse una estructura de álgebra de Boole, definiendo las operaciones de reticulado por:

$$a \wedge b := \neg(a \longrightarrow \neg b)$$

$$a \vee b := \neg\neg(\neg a \longrightarrow b)$$

Demostración: Por regularidad y por 3.1.γ se puede ver que si $x, y \in RA$, entonces $x \longrightarrow \neg y = y \longrightarrow \neg x$, por lo que las operaciones definidas resultan conmucativas. Veamos ahora que efectivamente $x \vee y$ es el supremo de $\{x, y\}$ para el orden dado por la implicación:

Supongamos $x \rightarrow z = 1$. Usando que tanto x como z son regulares y la propiedad 3.1.γ obtenemos que $\neg z \rightarrow \neg x = 1$ y entonces, por 3.1.α-β, resulta que
$1 = (\neg z \rightarrow (\neg x \rightarrow 0)) \rightarrow ((\neg z \rightarrow \neg x) \rightarrow (\neg z \rightarrow 0)) = (\neg z$ [illegible] $\rightarrow z$ y,
aplicando dos veces 3.1.γ, eso implica $\neg\neg(\neg z \rightarrow x)$ [illegible] decir que
$x \vee z \rightarrow z = 1$.

Si $y \rightarrow z = 1$, usando las propiedades 3.4.iii) y 3.3.i), obtenemos
$1 = (y \rightarrow z) \rightarrow ((\neg x \rightarrow y) \rightarrow (\neg x \rightarrow z))$ y
$((\neg x \rightarrow y) \rightarrow (\neg x \rightarrow z)) \rightarrow (\neg\neg(\neg x \rightarrow y) \rightarrow \neg\neg(\neg x \rightarrow z))$ [illegible] de lo que
$(x \vee y) \rightarrow (x \vee z) = 1$. Entonces, si $x \le z$ y $y \le z$, resulta que
$(x \vee y) \le (x \vee z) \le z$.

Tenemos, por 3.1.α, que $y \rightarrow (\neg x \rightarrow y) = 1$ y, por 3.4.i
$(\neg x \rightarrow y) \rightarrow \neg\neg(\neg x \rightarrow y) = 1$ entonces, por 3.1.γ $y \rightarrow \neg\neg(\neg x \rightarrow y) = 1$, análogamente para x, entonces $x \vee y$ es el supremo del conjunto $\{x, y\}$.

Como $\neg$ es -en *RA*- un antiisomorfismo de orden, $x \wedge y$ debe ser $\neg\neg(x \vee \neg y)$ y esto es exactamente $\neg\neg\neg(\neg\neg x \rightarrow \neg y)$ lo que, por regularidad y 3.4.ii) coincide con $\neg(x \rightarrow \neg y)$.

Para ver que *RA* es un álgebra de Heyting basta ver que $x \wedge y \le z$ si y solo si $y \le x \rightarrow z$ o, escrito en notación implicativa $\neg(x \rightarrow \neg y) \rightarrow z = 1$ si y solo si $y \rightarrow (x \rightarrow z) = 1$. (Ver [22] y [50]).

Tenemos las siguientes identidades:

$$
\begin{aligned}
\neg(x \rightarrow \neg y) \rightarrow z &= \neg z \rightarrow (x \rightarrow \neg y) = && (3.1.\gamma \text{ y regularidad})\\
&= x \rightarrow (\neg z \rightarrow \neg y) = && (3.4.\text{v})\\
&= x \rightarrow (y \rightarrow z) = && (3.1.\gamma \text{ y regularidad})\\
&= y \rightarrow (x \rightarrow z) && (3.4.\text{v}).
\end{aligned}
$$

Entonces *RA* resulta ser un álgebra de Heyting, pero como además todos sus elementos son regulares, resulta un álgebra de Boole (ver [50]) ■

<u>Observación:</u> La doble negación en la definición de $x \vee y$ es necesaria ya que, en general, $\neg x \rightarrow y$ no es regular. Un buen ejemplo es el álgebra de Heyting $O(\mathbb{R})$ de los conjuntos abiertos de la recta real. En $PO(\mathbb{R})$ $\neg x \rightarrow y$ coincide con el supremo entre x e y del álgebra de Heyting que es diferente del supremo del álgebra de Boole de sus elementos regulares (abiertos regulares). Por ejemplo si $x = (0,1)$ e $y = (1,2)$, tenemos que $x \vee y = (0,2)$ (en el álgebra de Boole), pero $\neg x \rightarrow y = (0,1)\cup(1,2)$.

<u>Teorema 3.12:</u> La categoría de las álgebras de Boole es una subcategoría reflexiva de la categoría de las álgebras de Hilbert y el reflector R preserva monomorfismos.

Demostración: Como en el Teorema 3.10, debemos probar que cualesquiera sean A álgebra de Hilbert, B álgebra de Boole y $f: A \dashrightarrow B$ un homomorfismo (de álgebras de Hilbert), existe un único homomorfismo $\bar{f}: RA \dashrightarrow B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "R"'] & B \\ RA \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Notemos $r_A: A \dashrightarrow RA$ al morfismo inducido por R, es decir $r_A(a) = \neg\neg a$, y definamos $\bar{f}(r_A(a)) = f(a)$. Que $\bar{f}$ está bien definida resulta del hecho de que, si $r_A(a) = r_A(b)$ entonces $\neg\neg a = \neg\neg b$, lo que implica que $f(\neg\neg a) = f(\neg\neg b)$ que, por regularidad de los elementos del álgebra de Boole y por el hecho de que f es un morfismo de álgebras de Hilbert, es lo mismo que afirmar que $f(a) = f(b)$

Sean entonces A y B álgebras de Hilbert y $f: A \dashrightarrow B$ un monomorfismo, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "R"'] & B \arrow[d, dashed, "R"] \\ RA \arrow[r, "Rf"'] & RB \end{tikzcd}$$

$Rf(r_A(a)) = Rf(r_A(b))$ entonces $r_B(f(a)) = r_B(f(b))$, lo que implica que $\neg\neg f(a) = \neg\neg f(b)$, de lo que $f(\neg\neg a) = f(\neg\neg b)$. Como f es mono, de ellos se sigue $\neg\neg a = \neg\neg b$ lo que demuestra que $\bar{f}$ es también un monomorfismo ∎

<u>Corolario 3.13:</u> La categoría de las álgebras de Boole es una subcategoría reflectiva de la categoría de las álgebras deductivas cuyo reflector preserva monomorfismos.

Demostración: Todo lo que es necesario verificar es que la composición de reflectores que preservan monomorfismos es un reflector que preserva monomorfismos y luego utilizar los teoremas 3.10 y 3.12 ∎

<u>Teorema 3.14:</u> En ZF son equivalentes:

i) En cualquier álgebra de Boole todo filtro propio puede ser extendido a un ultrafiltro (I.P en formulación dual)

ii) En cualquier álgebra deductiva todo sistema deductivo propio puede extenderse a uno maximal

Demostración: i) ⇒ ii) De acuerdo con lo observado al comienzo del capítulo, TIP resulta equivalente a la afirmación "las álgebras de Boole completas y atómicas son objetos inyectivos en la categoría de las álgebras de Boole" (ver [55]). Usando el teorema 1.18.6 de [2] que afirma que "si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son categorías con un reflector $R: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ que preserva monomorfismos, entonces todo objeto inyectivo en $\mathscr{B}$ también lo es en $\mathscr{A}$", probaremos que las álgebras de Boole completas y atómicas (en particular el álgebra de Boole 2) son inyectivas en la categoría de las álgebras deductivas.

Sea ahora A un álgebra deductiva y D un sistema deductivo propio en A, existe entonces una función $p: A \longrightarrow A/_D$ y $2 \leq A/_D$ es una subálgebra. Sea B la subálgebra de A definida como $B = p^{-1}(2)$. Tenemos entonces un homomorfismo $j: B \longrightarrow 2$ que, por la inyectividad de 2 puede extenderse a un homomorfismo $\bar{j}: A \longrightarrow 2$. Entonces, por el teorema 3.9.ii), $\bar{j}^{-1}(1)$ resulta ser un sistema deductivo maximal que contiene a D.

II => I) Resulta del hecho de que en la categoría de las álgebras de boole, los filtros y los sistemas deductivos coinciden ■

En [22] A.Diego probó un teorema de representación para álgebras de Hilbert usando la existencia de sistemas deductivos maximales, aunque empleando, en la demostración, AE. Del teorema 3.14 resulta el siguiente:

<u>Corolario 3.15:</u> Los teoremas de representación, de Stone para álgebras de Boole y de Diego para álgebras de Hilbert son equivalentes.

En contraste con los resultados expuestos más arriba tenemos:

<u>Teorema 3.16:</u> En ZF el axioma de elección (AE) y la afirmación de la existencia de sistemas deductivos irreducibles minimales en álgebras de Hilbert son equivalentes:

Demostración: En [22] A.Diego probó, usando AE, la existencia de sistemas dedeductivos irreducibles minimales en toda álgebra de Hilbert.

Para la recíproca, observamos que primero G.Klimovsky (ver [35]) y luego J.L.Bell y D.Fremlin (ver [6]) demostraron que la existencia de filtros propios maximales en todo reticulado con cero implica AE. En ambos trabajos, a partir de una familia no vacía de conjuntos no vacíos se construye un reticulado que, en el caso de Bell y Fremlin es un álgebra de Brouwer. El resultado dual (y equivalente) afirma "la existencia de ideales maximales en álgebras de Heyting implica AE" pero, como el complemento de un ideal maximal propio es siempre un filtro irreducible minimal, podemos enunciar "la existencia de filtros minimales irreducibles en cualquier álgebra de Heyting implica al axioma de elección" y como las álgebras de Heyting son casos particulares de las álgebras de Hilbert y allí las nociones de filtro y de sistema deductivo coinciden, el resultado queda probado ■

<u>Observación:</u> Los resultados que mencionamos de A.Diego en 3.15 y 3.16 se refieren a las álgebras de Hilbert en el sentido estricto, es decir sin contener necesariamente un primer elemento. A.Monteiro trabajó también en la teoría general de las álgebras deductivas (sin presuponer la existencia de un primer elemento). Dada un álgebra de tal tipo sin mínimo elemento, se lo podemos agregar y convertirla en un álgebra deductiva con cero (álgebra de Hilbert con cero). Más aún, en [22] y en [44] se prueba que todo sistema deductivo completamente irreducible (y por lo tanto maximal) debe ser maximal en el conjunto de los sistemas deductivos que no contienen un punto fijo del álgebra. Entonces, para el trabajo consecuente, se puede rebautizar como cero a ese punto y olvidarse de todos los elementos del álgebra que no son mayores o iguales que él.

3.2.3 Objetos inyectivos

De la demostración del teorema 3.14 resulta que asumiendo TIP las álgebras de Boole completas y atómicas son objetos inyectivos en la categoría de las álgebras deductivas. En lo que sigue refinaremos este resultado. Una primera versión del mismo fue expuesta en [27].

<u>Observación:</u> Asumiendo el teorema de extensión de Sikorski (TES) y usando el teorema I.18.6 de [2] y el corolario 3.13, podemos concluir que las álgebras de Boole completas son objetos inyectivos en la categoría de las álgebras deductivas. De hecho, como las álgebras de Boole son casos particulares de las álgebras deductivas, esta última afirmación es equivalente a TES.

<u>Lema 3.17:</u> La categoría de las álgebras de Heyting es una subcategoria plena de la categoría de las álgebras de Hilbert.

Demostración: Sean A y B álgebras de Heyting y $f:A \longrightarrow B$ un morfismo de álge- álgebras de Hilbert. Sea D el núcleo de f, entonces f puede ser factorizada según el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & B \\ & A/_D \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

donde p es la proyección canónica y $\bar{f}$ es el morfismo inducido.

Como sistemas deductivos y filtros coinciden en las álgebras de Heyting, tenemos que $A/_D$ tiene una estructura natural de álgebra de tal clase y p resulta ser un homomorfismo de la categoría. La flecha $\bar{f}$ es una inclusión de un álgebra de Heyting en otra álgebra de la misma categoría y, como es un monomorfismo de álgebras de Hilbert, resulta ser un isomorfismo de orden (por respetar la implicación) y por lo tanto un monomorfismo de álgebras de Heyting. Entonces $f = \bar{f} \circ p$ es un homomorfismo de álgebras de Heyting ■

<u>Teorema 3.18:</u> Si A es un álgebra de Hilbert inyectiva, entonces es un álgebra de Boole completa.

Demostración: En [22] A. Diego probó que toda álgebra de Hilbert puede ser sumergida en un álgebra de Heyting completa, lo mismo vale para álgebras deductivas. La demostración está hecha enteramente en ZF.

Sea A un álgebra de Hilbert inyectiva, C un álgebra de Heyting completa y $f:A \longrightarrow C$ un monomorfismo. Entonces, por inyectividad, existe un morfismo $\bar{f}:C \longrightarrow A$ tal que $\bar{f} \circ f = Id_A$. De la observación hecha en la demostración del lema 3.17 y del hecho de que $\bar{f}$ es un epimorfismo resulta que A es un álgebra de Heyting y, por el lema 2.1 de [3], completa. Para probar que A es un álgebra de Boole basta con mostrar que el único elemento del conjunto de sus elementos densos $\mathcal{D}(A) = \{a \in A/ \neg a = 0\}$ es el 1.

Sea A' el conjunto $\mathcal{D}(A)\cup\{0\}$, veamos que A' es una subálgebra (deductiva) de A: Sean a y $b \in \mathcal{D}(A)$. Por 3.4.iii) tenemos que
$((a \to b) \to 0) \to ((b \to (a \to b)) \to (b \to 0)) = 1$, pero como
$b \to (a \to b) = 1$ por 3.1.α y $b \to 0 = 0$ por hipotesis, obtenemos
$(a \to b) \to 0 = 0$ y entonces $a \to b \in \mathcal{D}(A)$.

Sea ahora B el conjunto $A'\cup\{\alpha\}$, donde α es un elemento que no pertenece a A. Vamos a darle una estructura de álgebra de Hilbert que lo transforme en una extensión de A' definiendo $\alpha \to \alpha = 1$; $0 \to \alpha = 1$; $\alpha \to 0 = 0$; $a \to \alpha = \alpha$ y $\alpha \to a = 1$ para todo $a \in \mathcal{D}(A)$

Verifiquemos la validez, en B, de los axiomas para las álgebras de Hilbert:

Sean $a, b \in \mathcal{D}(A)$,

3.1.α) $\alpha \to (\alpha \to \alpha) = \alpha \to 1 = 1$;

$\alpha \to (a \to \alpha) = \alpha \to \alpha = 1$;

$a \to (\alpha \to a) = a \to 1 = 1$.

$0 \to (\alpha \to 0) = 0 \to 0 = 1$;

$\alpha \to (0 \to \alpha) = \alpha \to 1 = 1$;

3.1.β) $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to ((\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)) = 1 \to 1 = 1$;

$(\alpha \to (a \to \alpha)) \to ((\alpha \to a) \to (\alpha \to \alpha)) = 1 \to 1 = 1$;

$(\alpha \to (a \to b)) \to ((\alpha \to a) \to (\alpha \to b)) =$
$(a \to b) \to (a \to b) = 1 \to 1 = 1$;

$(\alpha \to (\alpha \to a)) \to ((\alpha \to a) \to (\alpha \to \alpha)) =$
$(\alpha \to 1) \to (1 \to 1) = 1 \to 1 = 1$;

$(a \to (\alpha \to \alpha)) \to ((a \to \alpha) \to (a \to \alpha)) =$
$(a \to 1) \to (\alpha \to \alpha) = 1 \to 1 = 1$;

$(a \to (\alpha \to b)) \to ((a \to \alpha) \to (a \to b)) =$
$(a \to 1) \to (\alpha \to (a \to b)) = 1 \to 1 = 1$;

$(a \to (b \to \alpha)) \to ((a \to b) \to (a \to \alpha)) =$
$(a \to \alpha) \to ((a \to b) \to \alpha) = \alpha \to \alpha = 1$;

$(\alpha \to (0 \to \alpha)) \to ((\alpha \to 0) \to (\alpha \to \alpha)) = 0 \to 1 = 1$;

$(\alpha \to (0 \to 0)) \to ((\alpha \to 0) \to (\alpha \to 0)) = 0 \to 0 = 1$;

$(\alpha \to (\alpha \to 0)) \to ((\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to 0)) =$
$(\alpha \to 0) \to (1 \to 0) = 0 \to 0 = 1$;

$$(0 \to (\alpha \to \alpha)) \to ((0 \to \alpha) \to (0 \to \alpha)) = 1 \to (1 \to 1) = 1 \to 1$$

$$(0 \to (\alpha \to 0)) \to ((0 \to \alpha) \to (0 \to 0)) \;\; 1 \to 1 = 1;$$

$$(0 \to (0 \to \alpha)) \to ((0 \to 0) \to (0 \to \alpha)) = 1 \to 1 = 1;$$

$$(\alpha \to (a \to 0)) \to ((\alpha \to a) \to (\alpha \to 0)) = (\alpha \to 0) \to (1 \to 0) = 0 \to 0 \;\; 1,$$

$$(\alpha \to (0 \to a)) \to ((\alpha \to 0) \to (\alpha \to a)) = (\alpha \to 1) \to (0 \to 1) = 1 \to 1$$

$$(a \to (\alpha \to 0)) \to ((a \to \alpha) \to (a \to 0)) = (a \to 0) \to (a \to 0) = 1;$$

$$(0 \to (\alpha \to a)) \to ((0 \to \alpha) \to (0 \to a)) = 1 \to (1 \to 1) = 1 \to 1 = 1;$$

$$(a \to (0 \quad)) \to ((a \to 0) \to (a \to \alpha)) = (a \to 1) \to (0 \to \alpha) = 1 \to 1 = 1;$$

$$(0 \to (a \to \alpha)) \to ((0 \to a) \to (0 \to \alpha)) = (0 \to \alpha) \to (1 \to 1) = 1 \to 1 = 1.$$

3.1.λ) $0 \to \alpha = 1$ vale pues así lo hemos pedido.

3.3.i) $1 \to \alpha = \alpha \neq 1$.

3.3.ii) Si $a \to \alpha = 1$ entonces $a = \alpha$ ó $a = 0$, pero en este último caso no puede valer $\alpha \to a = 1$.

Tenemos, entonces, que A' es subálgebra tanto de A como de B. Por la inyectividad de A, existe un homomorfismo $f: B \to A$ tal que $f_{|A'} = 1_{A'}$ (la inclusión de A' en A). Como $\neg\alpha = 0$, tenemos que $f(\neg\alpha) = \neg f(\alpha) = 0$, por lo que $f(\alpha) \in \mathcal{D}(A)$. Sea entonces $x \in \mathcal{D}(A)$ tal que $x = f(\alpha)$. De allí resulta que $x \to f(\alpha) = 1$, pero $x \to f(\alpha) = f(x \to \alpha) = f(\alpha)$, por lo que $f(\alpha) = 1$. Como $\alpha \to a = 1$ para todo $a \in \mathcal{D}(A)$, obtenemos que $f(\alpha) \to a = 1$. Esto implica que $1 \to a = 1$. Entonces, por 3.3.i), a debe ser 1, con lo que resulta que $\mathcal{D}(A) = \{1\}$ ∎

<u>Observación:</u> En [3] Balbes y Horn probaron que todo objeto inyectivo en la categoría de las álgebras de Heyting es un álgebra de Boole completa. Para la prueba utilizaron, de forma esencial, el lema de Zorn. Nuestra demostración del teorema 3.18 está hecha totalmente en ZF y generaliza el resultado a una superclase de la álgebras de Heyting.

<u>Corolario 3.19:</u> Las álgebras de Boole completas son (en ZF+TES) los objetos inyectivos en la categoría de las álgebras de Hilbert.

3.3 Lógica polivalente

La lógica polivalente, generalización de la lógica trivalente, variante de la lógica modal, ya motivada por Aristóteles, es formulada a comienzos de este siglo por Jan Łukasiewicz [37] y por E.L.Post [47]. Posteriormente M. Wajsberg (ver [59]) formula por primera vez una axiomatización de las lógicas infinito-valentes, las que se corresponden con el cálculo infinito-valente de Łukasiewicz. En 1958 C.C.Chang (ver [11] y [12]) presenta a las MV-álgebras como la contrapartida algebraica de dicha lógica, aunque de una manera poco natural, ya que las operaciones básicas no pueden asimilarse a los operadores lógicos. Este problema es solucionado a comienzos de esta década por los matemáticos españoles J.Font, A.Rodríguez y A.Torrens (ver [25] y [51]) quienes retoman el trabajo de M.Wajsberg y presentan las álgebras de Wajsberg donde los operadores básicos se corresponden a los conectivos lógicos de implicación y de negación.

3.3.1 Resultados para los casos finito-valentes: álgebras de Post y de Łukasiewicz

Para las demostraciones y mayor abundancia sobre el tema, ver [2], [14] y [49].

Para cada $n \geq 2$, un *álgebra de Łukasiewicz n-valente* es un sistema $\langle L, \vee, \wedge, \neg, D_1, \ldots, D_{n-1}, 1, 0\rangle$ tal que $\langle L, \vee, \wedge, \neg, 1, 0\rangle$ es un álgebra de De Morgan y los D_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ son conectivos unarios tal que valen las siguientes ecuaciones:

l_1 $D_i(x \vee y) = D_i(x) \vee D_i(y)$ $\quad (i = 1, \ldots, n-1)$;

l_2 $D_i(x) \vee \neg D_i(x) = 1$ $\quad (i = 1, \ldots, n-1)$;

l_3 $D_i D_j(x) = D_j(x)$ $\quad (i, j = 1, \ldots, n-1)$;

l_4 $D_i(\neg x) = \neg D_{n-i}(x)$ $\quad (i = 1, \ldots, n-1)$;

l_5 $D_i(x) \vee D_{i+1}(x) = D_i(x)$ $\quad (i = 1, \ldots, n-2)$;

l_6 $x \vee D_1(x) = D_1(x)$ y

l_7 $(x \wedge \neg D_{i+1}(x) \wedge D_i(y)) \vee y = y$ $\quad (i = 1, \ldots, n-2)$.

En lo que sigue si se hace referencia a las álgebras de Łukasiewicz sin hacer mención a la valencia se sobreentenderá que el resultado o la afirmación es válido para cualquier $n \geq 2$, la misma convención se aplicará para las otras álgebras a definir en este apartado.

En [14] se definen estas álgebras bajo el nombre de álgebras de Moisil. En trabajos posteriores se definen con una operación adicional (la implicación intuicionista), aunque se demuestra que esa operación no es independiente de las demás. Para esta implicación se verifica que todos los filtros son sistemas deductivos. Sin embargo no todos los filtros se corresponden con congruencias, por lo que se define la siguiente noción:

Un *D-filtro* F es un filtro tal que:

$$x \in F \leftrightarrow D_{n-1}(x) \in F$$

Se comprueba que las congruencias de las álgebras de Lukasiewicz coinciden con los D-filtros.

A. Rose probó que las álgebras de Lukasiewicz n-valentes, para $n \geq 5$ no son las contrapartidas algebraicas del cálculo de Lukasiewicz n-valente, en particular, a partir de las operaciones del lenguaje, no se puede definir con ellas la implicación de Lukasiewicz. En [18] y [19] R. Cignoli presenta las *álgebras de Lukasiewicz propias* como una subclase de las de Lukasiewicz, aplicándolas, en [19], a un enfoque del tipo de Rasiowa al estudio de las teorías elementales.

Un algebra A de tal clase (para $n \geq 5$) se define como un sistema $\langle L, \vee, \wedge, \neg, \{F^n_{ij}\}_{(i,j)\in S}, D_1, \ldots, D_{n-1}, 1, 0\rangle$ donde los F^n_{ij} son conectivos binarios, $S_n = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\colon 3 \leq i \leq n-2,\ 1 \leq j \leq n-4,\ j < i\}$, $\langle L, \vee, \wedge, \neg, D_1, \ldots, D_{n-1}, 1, 0\rangle$ es un álgebra de Lukasiewicz y valen las siguientes ecuaciones adicionales:

$$D_k(F^n_{ij}(x,y)) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq i-j \\ J_i(x) \wedge J_j(y) & \text{si } k > i-j. \end{cases} \qquad (k = 1, \ldots, n-1)$$

donde $J_i(x)$ es la abreviatura de $D_i(x) \wedge \neg D_{i+1}(x)$.

Para los casos $n = 2, 3, 4$, las álgebras de Lukasiewicz propias y las impropias n-valentes coinciden.

Un caso particular de dichas álgebras, aunque presentadas independientemente, son las álgebras de Post:

Para cada $n \geq 2$, un *álgebra de Post n-valente* es un sistema $\langle P, \vee, \wedge, \neg, D_1, \ldots, D_{n-1}, e_0, \ldots, e_{n-1}, 1, 0\rangle$ tal que los e_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ son constantes, $\langle P, \vee, \wedge, \neg, D_1, \ldots, D_{n-1}, 1, 0\rangle$ es un álgebra de Lukasiewicz n-valente y valen además las siguientes ecuaciones:

P_1 $\quad D_i(e_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \leq j \\ 0 \text{ si } i > j \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n-1;\ j = 0, \ldots, n-1)$ y

P_2 $\quad x = (D_1(x) \wedge e_1) \vee \ldots \vee (D_{n-1}(x) \wedge e_{n-1}).$

Se verifica que toda álgebra de Post n-valente P es el coproducto (en la categoría de los reticulados distributivos con 0 y 1) de un álgebra de Boole (el subconjunto de sus elementos complementados, notado $\mathcal{B}(P)$) con la cadena de n elementos, la que será notada, de ahora en más, como L_n.

La relación ente estas álgebras y las de Lukasiewicz fue establecida por R. Cignoli en [14].

Se comprueba que un álgebra de Post P será completa si y sólo si lo es el álgebra de Boole $\mathcal{B}(P)$.

Otra forma equivalente de definir un álgebra de Post n-valente P es decir que se trata de un álgebra de De Morgan que cumple:

Tiene un conjunto distinguido $C = \{0 = \ldots \le c_{n-1} = 1\}$ tal que todo elemento x del álgebra se escribe de una manera única $x = \bigvee_i (a_i \wedge c_i)$ donde los a_i son elementos de $B(P)$ y

(i) Si $x \in B(P)$ y $x \wedge c_i \le c_{i-1}$ para algún i, $1 \le i \le n-1$ entonces $= 0$.

En las álgebras de Lukasiewicz propias (y *a fortiori* en las de Post) la implicación de Lukasiewicz es definible y, para esta implicacion, las nociones de filtro implicativo y de D-filtro coinciden.

El siguiente teorema está extraído de [49]:

Teorema 3.20: Para cada D-filtro F de un algebra de Post n-valente P las si-siguientes condiciones son equivalentes:

i) F es maximal;

ii) F es irreducible;

iii) F es primo;

iv) Para cada elemento $x \in P$, exactamente uno de los elementos $D_{n-1}(x)$, $\neg D_{n-1}(x)$ está en F

Este teorema vale, más en general, para las álgebras de Lukasiewicz n-valentes.

En [14] R.Cignoli prueba los siguientes resultados para las algebras de Lukasiewicz:

Teorema 3.21: Si L es un álgebra de Lukasiewicz n-valente entonces cada filtro primo está contenido en exactamente una cadena maximal de a lo sumo $n-1$ fil-filtros primos de L. Si L es de Post entonces las cadenas tendrán exactamente $n-1$ elementos.

Lema 3.22: Sea A un álgebra de Lukasiewicz n-valente, $B(A)$ la subálgebra de sus elementos complementados, U un ultrafiltro sobre el álgebra de Boole $B(A)$, entonces, para cada uno de los conectivos D_i ($i = 1,\ldots,n-1$), el conjunto $U_i = D_i^{-1}(U)$ es un filtro primo de A.

El teorema 3.21 le permite al mismo autor en [16] representar a las álgebras de Lukasiewicz n-valentes como álgebras de secciones globales de haces de cadenas sobre espacios booleanos y, en el caso particular de las álgebras de Post, como las álgebras de todas las funciones definidas sobre espacios booleanos y valores en la cadena de n elementos. El lema 3.22 permitirá caracterizar la existencia de D-filtros maximales (y a *fortiori* primos).

Teorema 3.23: (TIP) Todo D-filtro en un álgebra de Lukasiewicz está contenido en un D-filtro primo.

Demostración: Sea F un D-filtro propio de A, notando con $D_i(F)$ a la imagen de F por D_i $(i = 1,\ldots,n-1)$, $D_{n-1}(F) \subseteq F$ será un filtro del álgebra de Boole $\mathcal{B}(A)$, el que por TIP se podrá extender a un ultrafiltro U. Tenemos entonces las relaciones de inclusión $D_{n-1}(F) \subseteq U \subseteq U_{n-1}$. El filtro primo U_{n-1} es D-filtro ya que si $x \in U_{n-1}$ vale que $D_{n-1}(x)$ y, en consecuencia $D_i(x)$ $(i = 1,\ldots,n-1)$ estarán en U, el que está contenido en U_{n-1}. Sea ahora F_{n-1} el D-filtro generado por F y U_{n-1}. Este filtro es propio pues, si no lo fuera existirían $x \in F$ e $y \in U_{n-1}$ tal que $x \wedge y = 0$. Podemos considerar $x \in D_{n-1}(F)$, $y \in D_{n-1}(U_{n-1}) = U$ de lo que resulta que $x, y \in U$, lo que contradice el que U sea propio ∎

<u>Corolario 3.24:</u> En ZF, para cada $n \geq 2$, TIP implica las siguientes afirmaciones:

i) En toda álgebra de Lukasiewicz n-valente todo filtro propio está contenido en uno maximal;

ii) En toda álgebra de Lukasiewicz propia n-valente todo filtro propio está contenido en uno maximal;

iii) En toda álgebra de Post n-valente todo filtro propio está contenido en uno maximal;

iv) En toda álgebra de Lukasiewicz n-valente todo D-filtro propio está contenido en uno maximal;

v) En toda álgebra de Lukasiewicz propia n-valente todo D-filtro propio está contenido en uno maximal;

vi) En toda álgebra de Post n-valente todo D-filtro propio está contenido en uno maximal;

Demostracion: Como TIP implica que en todo reticulado distributivo todo filtro propio está contenido en uno primo, tenemos que, por el teorema 3.23, dado un filtro F en un álgebra de Lukasiewicz A existe un filtro primo $P \supseteq F$.
Sea $\mathcal{F} = \{G : G \supseteq P$ y G es D-filtro$\}$, es fácil verificar que, $\bigcup\mathcal{F}$ es un D-filtro que contiene a F y maximal por construcción ∎

<u>Observación:</u> Teniendo en cuenta que toda álgebra de Boole puede pensarse como un álgebra de Lukasiewicz (propia) para todo $n \geq 2$, tenemos que las afirmaciones i), ii), iv) y v) de 3.24 implican TIP.

Los resultados sobre inyectividad para estas categorías de álgebras son también debidos a R.Cignoli (ver [16]) y se pueden enunciar de la siguiente manera:

<u>Teorema 3.25:</u> Un álgebra de Lukasiewicz (de Post, de Lukasiewicz propia) n-valente será inyectiva en la categoría respectiva si y solamente si es un álgebra de Post completa n-valente.

En la demostración original de dicho teorema el autor emplea, aunque sin mencionarlo explícitamente, el teorema de extensión de Sikorski. En 3.3.2.3

mostraremos explícitamente para el caso de las algebras de Wajsberg la equivalencia del resultado principal de inyectividad en la categoría con TES, el que resulta análogo al demostrado por Cignoli para el caso n-valente.

3.3.2 Caso infinito-valente: las álgebras de Wajsberg

Como contrapartida algebraica del cálculo infinito-valente de Lukasiewicz se han propuesto varios modelos algebraicos: varias versiones de álgebras de Post generalizadas (ver [13], [23], [24] y [58]), las álgebras de Lukasiewicz 0-valentes, las MV-álgebras (ver [11] y [12]) y las álgebras de Wajsberg (ver [25], [51] y [57]) siendo las últimas dos equivalentes -módulo lenguaje- y las únicas que resultan ser exactamente la contrapartida algebraica del mencionado cálculo.

3.3.2.1 Definiciones

Un *algebra de Wajsberg* es un sistema $\langle A, \rightarrow, \neg, 1\rangle$ que satisface las ecuaciones γ), δ), ε) y ι) de 3.1. Escribiendo (como en el caso de las otras álgebras del mismo tipo de similaridad vistas anteriormente) $0 := \neg 1$, resulta que un algebra de Wajsberg es un álgebra de De Morgan donde el supremo está definido por $x \vee y := (x \rightarrow y) \rightarrow y$ (ver [25]).

Entonces, por tener una estructura subyacente de reticulado, en una tal algebra la noción de filtro tiene sentido aunque, al igual que en el caso de las álgebras de Lukasiewicz, dichos subconjuntos no se corresponden con las congruencias (ver [11] y [25]). Análogamente al caso de las álgebras de Lukasiewicz, las congruencias de las álgebras de Wajsberg se corresponden con los sistemas deductivos o filtros implicativos.

En forma paralela a la noción de álgebras de Wajsberg se define una MV-*algebra* como un sistema $\langle A, \odot, \cdot, \neg, 0, 1\rangle$ de tipo de similaridad (2,2,1,0,0) tal que valen las ecuaciones:

m_1	$x\odot y = y\odot x$	m'_1	$x\cdot y = y\cdot x$
m_2	$x\odot(y\odot z) = (x\odot y)\odot z$	m'_2	$x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$
m_3	$x\odot\neg x = 1$	m'_3	$x\cdot\neg x = 0$
m_4	$x\odot 1 = 1$	m'_4	$x\cdot 0 = 0$
m_5	$x\odot 0 = x$	m'_5	$x\cdot 1 = x$
m_6	$\neg(x\odot y) = (\neg x)\cdot(\neg y)$	m'_6	$\neg(x\cdot y) = (\neg x)\odot(\neg y)$
m_7	$\neg\neg x = x$	m_8	$\neg 0 = 1$
m_9	$x\vee y = y\vee x$	m'_9	$x\wedge y = y\wedge x$
m_{10}	$x\vee(y\vee z) = x\vee(y\vee z)$	m'_{10}	$x\wedge(y\wedge z) = (x\wedge y)\wedge z$
m_{11}	$x\odot(y\wedge z) = (x\odot y)\wedge(x\odot z)$	m'_{11}	$x\cdot(y\vee z) = (x\cdot y)\vee(x\cdot z)$

(definiendo $x\wedge y := (x\odot\neg y)\cdot y$ y $x\vee y := (x\cdot\neg y)\odot y$)

En [25] se prueba que a toda álgebra de Wajsberg se le puede dar una estructura de MV-álgebra definiendo $x \oplus y := \neg x \rightarrow y$ (1, 0 y $\neg$ coinciden y $\cdot$ se puede escribir en función de $\oplus$ y de $\neg$: $x \cdot y := \neg(\neg x \oplus \neg y)$).

Análogamente a toda MV-álgebra se le puede dar una estructura de álgebra de Wajsberg definiendo $x \rightarrow y := \neg x \oplus y$.

Por lo tanto, si bien preferiremos la notación implicativa, en los casos que resulte conveniente, utilizaremos la notación aditiva.

Las afirmaciones sobre las álgebras de Wajsberg (o MV) no justificadas explícitamente, se pueden encontrar demostradas en [11], [12], [25], [51] y [57].

El ejemplo canónico de álgebras de Wajsberg (o MV-álgebras) es el que resulta de lo siguiente:

Definición: Un *grupo abeliano reticulado con unidad de orden* (*GARU*) G es un sistema $\langle G,+,-,0,\vee,\wedge,u\rangle$ donde $\langle G,+,-,0,\vee,\wedge\rangle$ es un grupo abeliano reticulado (GAR) y u es una constante, llamada *unidad de orden* tal que se cumple: $\forall x(\exists n \in \mathbb{N})(nu \geq x)$.

Observación: Dado un GAR G no trivial cualquiera, podemos obtener un GARU, declarando unidad de orden a cualquier $u \in G$ tal que $0 < u$ y tomando como nuevo grupo al generado por el intervalo $[0,u]$. De aquí resulta que por cada GAR se puede definir al menos una cantidad numerable de GARUs distintos.

En la clase de los GARUs las congruencias están dadas por los ℓ-ideales, es decir los subgrupos convexos cerrados por las operaciones del reticulado, es decir aquellos subgrupos-subreticulados $S \subseteq G$ tal que, si $x \in S$, $0 \leq y \leq x$ entonces $y \in S$. Se verifica que la congruencia será propia si y sólo si la unidad de orden no pertenece a S. (Para más detalles sobre la teoría de estos grupos, ver [8]).

Dado un GARU G, definimos en $G[0,u]=\{x \in G \ / \ 0 \leq x \leq u\}$ una estructura de MV-álgebra poniendo $x \oplus y := u \wedge (x+y)$; $\neg x := u-x$ y $x \cdot y := \neg(\neg x + \neg y)$.

Sobre el mismo conjunto se puede definir una estructura de álgebra de Wajsberg poniendo $x \rightarrow y := u \wedge (u+y-x)$ y $\neg x := u-x$. (Ver [25] y [45]). En lo que sigue, y abusando la notación, hablaremos de "el álgebra de Wajsberg $G[0,u]$" o de "la MV-álgebra $G[0,u]$" dando por sobreentendidas las operaciones inducidas en dicho conjunto. Es de hacer notar que la matriz de Łukasiewicz para el cálculo infinito-valente coincide con el álgebra $\mathbb{Q}[0,1]$.

En [36] (ver también [25]), como lo observamos al comienzo de la sección, se prueba (en ZF+AE) la equivalencia entre las categorías de las MV-álgebras y de las álgebras de Wajsberg. Si bien no lo demostraremos aquí, vale la pena observar que dicha equivalencia es válida en ZF+TIP. En el mismo trabajo arriba mencionado, se da una manera canónica de construir (en ZF) un GARU lineal G a partir de cualquier álgebra de Wajsberg lineal L tal que $L \cong G[0,u]$. Posteriormente se invoca AE para demostrar que en toda álgebra de Wajsberg A existen sistemas deductivos primos, lo que permitirá, utilizando implícitamente el teorema de representación de Birkhoff, encontrar un GARU G tal que $A \cong G[0,u]$. En el apartado 3.3.2.2 veremos que la afirmación de la existencia de sistemas deductivos primos en toda álgebra de Wajsberg es equivalente a TIP.

Un ejemplo que será muy utilizado en lo que sigue de este trabaj construye de la siguiente manera:

Sea G un grupo abeliano totalmente ordenado, $u \in G$, $u > 0$, X un espacio topológico. Es un resultado clásico que el espacio de funciones continuas $C(X,G)$ puede verse como un grupo con la estructura inducida por G. Por lo tanto, como la función constantemente igual a u (que notaremos igualmente u) es estrictamente mayor que cero, podemos considerar el álgebra de Wajsberg $C(X,G)[0,u]$, la que notaremos $\mathcal{C}(X,G[0,u])$ y coincide (como conjunto) exactamente con las funciones continuas de X en $G[0,u]$.

3.3.2.2 El teorema del sistema deductivo maximal

Como TIP es equivalente a la afirmación "en todo reticulado distributivo con elementos máximo y mínimo todo filtro propio puede ser extendido a uno primo" y considerando que no todos los filtros en un álgebra de Wajsberg son, en general, implicativos, una primera cuestión es determinar en qué condiciones se puede garantizar la existencia de sistemas deductivos primos. Tanto en [11] como en [25] se demuestra que todo sistema deductivo propio se puede extender a uno primo, aunque usando el axioma de elección. En [30] probamos que dicha afirmación es en realidad equivalente a TIP, lo que se sigue de los siguientes resultados:

<u>Lema 3.26:</u> (ZF + TIP) En las álgebras de Wajsberg no triviales existen sistemas deductivos primos (N.G.Martinez, [40]). En particular, todo filtro (de reticulado) primo contiene un sistema deductivo primo.

Demostración: Sea A un álgebra de Wajsberg no trivial. Por ser de De Morgan, TIP implica que existe un filtro primo $P \subset A$. Notemos con P^c a su complemento conjuntista en A y definamos

$$\hat{P} := \bigcap_{y \in P^c} \{x \quad x \to y \in P^c\}$$

Este conjunto resulta ser un sistema deductivo:

Si $y \in P^c$ entonces $1 \to y = y$ también está en P^c de lo que resulta que $1 \in \hat{P}$.

Si x, $x \to z \in \hat{P}$, sea un $y \in P^c$ Por definición de $\hat{P}$ tenemos que $x \to y \in P^c$ y, por lo tanto, también $(x \to z) \to (x \to y) \in P^c$

En [25] se prueba que $(x \to z) \to (x \to y) = (x \wedge z) \to y$, de lo que resulta que también $(x \wedge z) \to y$ está en P^c. Como la implicación es antitona (es decir un antiisomorfismo de orden) para la primera coordenada, se obtiene la desigualdad $z \to y \leq (x \wedge z) \to y$ y, como P^c es decreciente, resulta que $z \to y \in P^c$, lo que implica que $z \in \hat{P}$, con lo que tenemos que en $\hat{P}$ vale la regla del *modus ponens*, por lo que resulta ser un sistema deductivo.

Veamos que $\hat{P} \subseteq P$: Sea $y \in P^c$, como $y \to y = 1 \in P$, por la propia definición de $\hat{P}$ resulta que $y \notin \hat{P}$, lo que implica, además, que dicho sistema deductivo es propio.

Finalmente, para ver que es primo sea $x \vee z \in \hat{P}$, con x, $z \notin \hat{P}$, existirían entonces $y,\ w \in P^c$ tales que $(x \to y)$, $(z \to w) \in P$. Como la implicación es un morfismo monótono para la segunda coordenada, tenemos que $x \to y \leq x \to yvw$ de lo que, por ser P creciente, resulta que $x \to yvw$ y $z \to wvy$ están en P, de lo que se sigue que $(x \to yvw)\wedge(z \to wvy) \in P$. En todo álgebra de Wajsberg vale la igualdad $(x \to wvy)\wedge(z \to wvy) = xvz \to wvy$. Como además P es primo y tanto y como w están en P^c, wvy también pertenece a P^c, lo que implica, por definición de $\hat{P}$, que xvz no pertenece a $\hat{P}$, lo que contradice la hipótesis ■

<u>Lema 3.27:</u> Sea A un álgebra de Wajsberg, P un sistema deductivo primo de A y D un sistema deductivo propio de A. Si $P \subseteq D$ entonces D es primo.

Demostración: Sean $a,b \in A$ tales que $avb \in D$, como en toda álgebra de Wajsberg siempre vale $(a \to b)v(b \to a) = 1$, tenemos que $(a \to b)v(b \to a) \in P$. Como P es primo, por ejemplo $a \to b \in P \subseteq D$. Por otra parte $(a \to b) \to b = avb \in D$ y, por *modus ponens* se obtiene que $b \in D$, que resulta entonces primo ■

Una consecuencia directa del lema anterior es el resultado de A.Rodriguez (ver [51, III.6.13]) que el conjunto de los sistemas deductivos primos que contienen a un sistema deductivo primo forman una cadena para la inclusión.

Teniendo en cuenta que toda álgebra de Wajsberg es de De Morgan, el resultado anterior equivale a que los sistemas deductivos primos aparecen en cadenas disjuntas.

Vale la pena destacar el hecho de que si bien los sistemas deductivos primos aparecen en cadenas, existen álgebras de Wajsberg donde esto no se cumple para el conjunto de todos los filtros primos:

En [43] A.Monteiro demuestra que, para un reticulado distributivo son equivalentes las condiciones de que los filtros primos que contienen un filtro primo dado forman una cadena y que, dados elementos x, y, z tales que $x, y \leq z$ existen x', y' tales que $x' \wedge y = x \wedge y' = x \wedge y$ y $x' v y' = z$.

Veamos un ejemplo debido a N.G.Martinez donde estas condiciones no se cumplen: sea el álgebra $A = \mathcal{C}(\mathbb{R}[0,1],\mathbb{R}[0,1])$ $f, g \in A$, $f(x) =$ $g(x) = 1-x$ $(x \in \mathbb{R}[0,1])$. Sean $f', g' \in A$ tales que $f' \wedge g = f \wedge g' = f \wedge g$, entonces $f'(x) = x$ si $x \leq 1/2$ y $g'(x) = 1-x$ si $x \geq 1/2$, por lo tanto, como las funciones deben ser continuas, existe un $\varepsilon > 0$ tal que si $x \in (1/2-\varepsilon, 1/2+\varepsilon)$, $f'(x)vg'(x) < 3/4$, por lo tanto no se cumple que $f'vg' = 1$ y, en consecuencia, los filtros primos no aparecen en cadenas disjuntas.

<u>Teorema 3.28:</u> (ZF + TIP) En toda álgebra de Wajsberg cualquier sistema deductivo propio puede ser extendido a uno primo.

Demostración: Sea A un álgebra de Wajsberg y $F \subset A$ un sistema deductivo propio el que, usando TIP, puede ser extendido a un filtro (de reticulado) primo P. Por el lema 3.26 podemos construir un sistema deductivo primo $\hat{P}$ tal que $\hat{P} \subseteq P$.

Sea ahora F_p el filtro implicativo generado por F y $\hat{P}$. Veamos, que está contenido en P:

Supongamos que $a \in F_p$, (tenemos entonces que existen $x_1, \ldots, x_n \in F$ y $y_1, \ldots, y_m \in \hat{P}$ tal que $x_1 \to (\ldots \to (x_n \to (y_1 \to (\ldots \to (y_m \to a) \ldots) = 1)$. Si $a \in F$ o $a \in \hat{P}$ entonces $a \in P$. Supongamos $a \notin F$ y $a \notin \hat{P}$. Aplicando n veces *modus ponens* resulta que $y_1 \to (\ldots \to (y_m \to a) \ldots)$ está en F, a su vez contenido en P. Si $a \notin P$, como $y_m \in \hat{P}$, valdría que $y_m \to a \notin P$, y como $y_{m-1} \in \hat{P}$, también $y_{m-1} \to (y_m \to a) \notin P$. Así siguiendo, llegaríamos a que $y_1 \to (\ldots \to (y_m \to a) \ldots) \notin P$, absurdo.

Concluimos, entonces, que $F \subseteq F_p \subseteq P$. Como $\hat{P}$ es primo y $\hat{P} \subseteq F_p$ tenemos que, por el lema 3.27, F_p es primo, lo que prueba lo afirmado en el enunciado del teorema ∎

<u>Observación:</u> El teorema 3.23 se podría haber demostrado análogamente al 3.28 considerando la implicación débil definida por $x \to y := \neg D_{n-1}(x) \vee y$. En este caso tendríamos que $x \in \hat{P}'$ si y sólo si $\neg D_{n-1}(x) \vee y \notin P$ para todo $y \notin P$, si y solamente si $\neg D_{n-1}(x) \notin P$ si y solamente si $D_{n-1}(x) \in P$ si y solamente si $x \in D_{n-1}^{-1}(P) = D_{n-1}^{-1}(U)$ donde $U = B(A) \cap P$. Entonces tenemos que $D_{n-1}^{-1}(P) = U_{n-1}$ y por lo tanto estamos en la misma demostración que se obtiene de los resultados de Cignoli.

<u>Teorema 3.29:</u> (ZF + TIP) En toda álgebra de Wajsberg cualquier sistema deductivo propio puede ser extendido a uno maximal.

Demostración: Sea A un álgebra de Wajsberg y $F \subseteq A$ un sistema deductivo propio. Por el teorema 3.28, existe un sistema deductivo primo $P \supseteq F$ y, por el lema 3.27, el conjunto $\mathcal{F} = \{G : P \subseteq G \subseteq A$ y G es un sistema deductivo propio$\}$ está ordenado linealmente por la inclusión de conjuntos.

$\bigcup\mathcal{F}$ es un filtro implicativo ya que si x, $x \to y \in \bigcup\mathcal{F}$, existen entonces G_1 y G_2 en $\mathcal{F}$ tal que $x \in G_1$, $x \to y \in G_2$. Como $\mathcal{F}$ está linealmente ordenado, tenemos que $G_1 \subseteq G_2$ o $G_2 \subseteq G_1$ por lo que tanto x como $x \to y$ y, en consecuencia y, pertenecen al mayor de los dos y, por lo tanto, a $\bigcup\mathcal{F}$. De la forma análoga, si $x \vee y \in \bigcup\mathcal{F}$, existe un $G \in \mathcal{F}$ tal que $x \vee y \in G$ y, como G es primo, tenemos que x o y están en dicho filtro y, por lo tanto, en $\bigcup\mathcal{F}$, el que resulta entonces primo. $\bigcup\mathcal{F}$ es un filtro propio ya que 0 no pertenece a ninguno de los $G \in \mathcal{F}$. La maximalidad de $\bigcup\mathcal{F}$ resulta de la propia construcción ∎

Como las álgebras de Boole son casos particulares de las álgebras de Wajsberg y en aquéllas los filtros y los sistemas deductivos coinciden, tenemos que la existencia de distemas deductivos primos (maximales) en las álgebras de Wajsberg implica la existencia de filtros primos (maximales) en las álgebras de Boole. Podemos entonces concluir el apartado con el siguiente:

Corolario 3.30: En ZF los siguientes enunciados son equivalentes:

i) En toda álgebra de Boole cualquier filtro propio puede ser extendido a uno primo (TIP);

ii) En toda álgebra de Wajsberg cualquier filtro implicativo propio puede ser extendido a uno primo;

iii) En toda álgebra de Wajsberg cualquier filtro implicativo propio puede ser extendido a uno maximal;

iv) En toda álgebra de Boole cualquier filtro propio puede ser extendido a uno maximal (TIP).

3.3.2.3 Objetos inyectivos

Una primera formulación de los resultados de esta sección fue presentada en [28].

Teorema 3.31: (En ZF+TIP)

i) El algebra $\mathbb{R}[0,1]$ es inyectiva en la categoria de las algebras de Wajsberg

ii) Los retractos de productos de $\mathbb{R}[0,1]$ son inyectivos en la categoria de las algebras de Wajsberg.

Demostración: i) Si A es un álgebra de Wajsberg y $D \subset A$ es un sistema deductivo, entonces A/D será isomorfa a una subálgebra de $\mathbb{R}[0,1]$ si y solamente si D es maximal, lo que resulta inmediatamente de verificar que las únicas algebras de Wajsberg simples son las isomorfas a las subálgebras de $\mathbb{R}[0,1]$. Ver, por ejemplo, [11] y [25]. Sea A subálgebra de A' y $f: A \longrightarrow \mathbb{R}[0,1]$ un morfismo de álgebras de Wajsberg, el núcleo de f es un sistema deductivo maximal D de A. Teniendo en cuenta que en [51] se demuestra que el sistema deductivo inducido en un algebra por un sistema deductivo de una subálgebra es el filtro generado, se tiene que el sistema deductivo D' inducido por D en A' resulta propio, aplicando entonces el teorema 3.29, se lo puede extender a un sistema deductivo maximal M que cumple $M \cap A = D$ y, por lo tanto, induce un homomorfismo $\hat{f}: A' \longrightarrow \mathbb{R}[0,1]$ que extiende a f.

ii) Resulta de i) aplicando un resultado general de teoria de categorias ■

Observación: En la sección 3.3.3 veremos que los segmentos $[0,u]$ de los GARUs divisibles y completos con unidad de orden u son exactamente los retractos de productos del álgebra de Wajsberg $\mathbb{R}[0,1]$.

En lo que sigue del apartado demostraremos que no existen otros objetos inyectivos en la categoría.

Lema 3.32: Sea A un objeto inyectivo en la categoría de las álgebras de Wajsberg, entonces A contiene una subálgebra isomorfa a $\mathbb{R}[0,1]$.

Demostración: Consideremos al álgebra de Boole 2 como álgebra de Wajsberg y sea el diagrama

$$\begin{array}{c} 2 \\ \downarrow \\ \mathbb{R}[0,1] \end{array}$$

donde las dos flechas son las inclusiones naturales. Como, por hipótesis, A es inyectiva, existe un morfismo $f:\mathbb{R}[0,1] \to A$ y, como $\mathbb{R}[0,1]$ es simple (véase [25]), tenemos que f tiene que ser inyectiva y entonces $f(\mathbb{R}[0,1]) \subseteq A$ resulta la subálgebra buscada ■

Como, por lo mencionado más arriba, todas las álgebras de Wajsberg simples son isomorfas a subálgebras de $\mathbb{R}[0,1]$, podemos enunciar el siguiente:

Corolario 3.33: $\mathbb{R}[0,1]$ es la única álgebra de Wajsberg simple e inyectiva.

Otra consecuencia (trivial) del lema anterior es que no existen álgebras de Wajsberg inyectivas finitas.

Lema 3.34: Sea C un álgebra de Wajsberg lineal, $F \subseteq C$ un filtro implicativo. Notando $\sim F$ al conjunto $\{x \in C\colon \neg x \in F\}$, puede definirse sobre $\sim F$ una estructura de semigrupo abeliano, lineal y naturalmente ordenado, positivo y cancelativo.

Demostración: Sean x, $y \in \sim F$, definimos $x+y := \neg x \to y$.

- $x+y = \neg x \to y \in \sim F$ porque $\sim F$ es un ideal implicativo (ver [12]) ($\sim F$ es cerrado para la suma).

La conmutatividad y asociatividad así como la propiedad de que el 0 es el neutro para la suma resultan de las propiedades m_1, m_2 y m_5 de las MV-álgebras.

- Si $x \leq y$ entonces $y = y \vee x = (y \to x) \to x = \neg(y \to x)+x$ (está naturalmente ordenado).
- Si $x+y = x+z$, supongamos que $y \leq z$, entonces $z = (z \to y) \to y$, de lo que $\neg x \to y = \neg x \to z = \neg x \to ((z \to y) \to y) = (z \to y) \to (\neg x \to y)$ lo que implica que $(\neg x \to y) \to (\neg x \to y) = ((z \to y) \to (\neg x \to y)) \to (\neg x \to y)$. De allí $1 = (z \to y) \vee (\neg x \to y)$, de lo que resulta que $z \to y = 1$ porque $\neg x \to y \in \sim F$, entonces $z \leq y$, concluyéndose que $z = y$ (cancelatividad).
- $\sim F$ es positivo pues todos sus elementos son mayores o iguales que el cero ■

Mutatis mutandi, de la prueba del lema 3.34 se obtiene el resultado de que el filtro F puede ser equipado con una estructura de semigrupo abeliano lineal y naturalmente ordenado, cancelativo y negativo, donde 1 es el elemento neutro y la operación se define por $x \cdot y := \neg(\neg x + \neg y)$, donde $+$ es la adición definida para el semigrupo $\sim F$.

Este resultado y la cancelatividad de las operaciones $+$ y $\cdot$ dan como consecuencia inmediata el siguiente

Lema 3.35: En las condiciones del lema anterior, notemos por $G = F \oplus \sim F$ a la suma ordinal de F y $\sim F$ (es decir $F \oplus \sim F = (F \cup \sim F)/\approx$ donde $\approx$ identifica los elementos neutros de ambos semigrupos, con el orden dado por:

- si x e y están ambos en F ($\sim F$), $x \leq y$ si y solamente si $x \leq y$ en F (en $\sim F$), si $x \in F$, $y \in \sim F$, entonces $x \leq y$.

Sobre G se puede definir una estructura de grupo abeliano natural y linealmente ordenado.

Demostración: Definamos la operación del grupo $+_G$ por

$$x +_G y := \begin{cases} x \bullet y & \text{si } x,\ y \in F \\ x+y & \text{si } x,\ y \in \sim F \\ 0 & \text{si } x = \neg y \\ \neg(x \rightarrow \neg y) & \text{si } x \in \sim F,\ y \in F,\ x > \neg y \\ \neg x \rightarrow y & \text{si } x \in \sim F,\ y \in F,\ x < \neg y \end{cases}$$

Todo lo que hay que verificar es la compatibilidad de ambas operaciones, lo que resulta de la definición de $\bullet$ en función de $+$ y de la cancelatividad de las mismas ∎

Lema 3.36: Sea C un álgebra de Wajsberg lineal, G un grupo abeliano natural y linealmente ordenado, notando respectivamente con G^+ y G^- a sus semigrupos positivo y negativo, podemos darle a la suma ordinal $\bigoplus_{i \in C} G_i$ donde $G_0 = \{0\} \times G^+$, $G_1 = \{1\} \times G^-$ y $G_i = \{i\} \times G$ $(0 < i < 1)$, una estructura de álgebra de Wajsberg definiendo las operaciones como $0 := (0,0)$; $1 := (1,0)$ y

$$(i,x) \rightarrow (j,y) := \begin{cases} (1,0) & \text{si } i < j \quad (1) \\ (1, \min\{0, y-x\}) & \text{si } i = j \quad (2) \\ (i \rightarrow j, y-x) & \text{si } i > j \quad (3) \end{cases}$$

Demostración: Veamos primero que el orden de la suma ordinal coincide con el orden dado por la implicación definida:

Sea $(i,x) \leq (j,y)$, como el caso (3) no es posible, tenemos que verificar solo los casos (1) y (2) y resulta inmediato que en ambos vale $(i,x) \rightarrow (j,y) = (1,0)$.

Verifiquemos ahora que las ecuaciones γ), δ), ϵ) e ι) de la definición 3.1 se satisfacen en los tres casos posibles:

ι) Tenemos que son posibles sólo los casos (2) y (3):
$(1,0) \rightarrow (\ ,y) = (1, \min\{0, y-0\}) = (1,y)$ (pues $y \in G^-$) y si $j < i$
$(1,0) \rightarrow (j,y) = (1 \rightarrow j, y-0) = (j,y)$.

γ) Veamos primeramente que la implicación definida es antitónica para la primera coordenada: sea $(i,x) \leq (j,y)$, tenemos que probar entonces que $((j,y) \rightarrow (k,z)) \leq ((i,x) \rightarrow (k,z))$ para todo (k,z) en el álgebra.
- Si $(i,x) \leq (k,z)$, tenemos entonces $((j,y) \rightarrow (k,z)) \rightarrow ((i,x) \rightarrow (k,z)) =$ $= ((j,y) \rightarrow (k,z)) \rightarrow (1,0) = (1,0)$.
- Si $(k,z) < (i,x)$ entonces, en caso de que $k = i$, $(i,x) \rightarrow (k,z)$ $= (1, \min\{0, z-x\})$, que es mayor que $(j,y) \rightarrow (k,z) == (1, \min\{0, z-y\})$ (o $(j \rightarrow k, z-y)$). En caso de que $i > k$, tenemos que $(i,x) \rightarrow (k,z) =$ $= (i \rightarrow k, z-x) \geq (j \rightarrow k, z-y) = (j,y) \rightarrow (k,z)$

Análogamente, se puede probar la monotonía de la implicación con respecto al segundo lugar.

La observación de arriba nos da γ) para el caso en que $(i,x) \leq (j,y)$.

Veamos el caso cuando $(i,x) > (j,y)$:

Si $(j,y) \leq (k,z)$, tenemos que

$((i,x) \rightarrow (j,y)) \rightarrow ((j,y) \rightarrow (k,z)) \rightarrow ((i,x) \rightarrow (k,z))) =$

$= ((i,x) \to (j,y)) \to (((1,0) \to ((i,x) \to (k,z))) =$
$= ((i,x) \to (j,y)) \to ((i,x) \to (k,z))) = (1,0)$ pues la implicación es monotona en la segunda coordenada.
Si $(j,y) > (k,z)$ tenemos, $(((j,y) \to (k,z)) \to ((i,x) \to (k,z))) =$
$= (j \to k, z-y) \to (i \to k, z-x) \geq (i \to k, y-x) = (i,x) \to (j,y)$.
Si $(k,z) \geq (i,x)$, entonces $(i,x) \to (k,z) = (1,0)$ lo que implica que
$((i,x) \to (j,y)) \to (((j,y) \to (k,z)) \to ((i,x) \to (k,z))) = (1,0)$.
Si $(j,y) < (k,z) < (i,x)$ resulta que $(((j,y) \to (k,z)) \to ((i,x) \to (k,z)))$
$= (i,x) \to (k,z)$ y, por monotonía en la segunda coordenada, tenemos que
$((i,x) \to (j,y)) \to ((i,x) \to (k,z)) = (1,0)$, con lo que quedan verificados todos los casos posibles.

δ) Para este axioma lo único que tenemos que ver es que $\max\{(i,x),(j,y)\} =$
$= ((i,x) \to (j,y)) \to (j,y)$:
i) $(i,x) \leq (j,y)$, entonces $(i,x) \to (j,y) = (1,0)$ en los tres casos y, aplicando 3.1.ι), resulta que $((i,x) \to (j,y)) \to (j,y) = (j,y)$.
ii) $(i,x) > (j,y)$, entonces si $i=j$, $(i,x) \to (j,y) = (1,\min\{0,y-x\})$ y
$(1,\min\{0,y-x\}) \to (j,y) = (j,y-(y-x)) = (i,x)$ y, si $i>j$, $(i,x) \to (j,y) =$
$(i \to j, y-x)$ y $(i \to j, y-x) \to (j,y) = ((i \to j) \to j, y-(y-x)) = (i,x)$.

ε) Observemos primero que $\neg(i,x) = (i,x) \to (0,0)$ vale siempre $(\neg i,-x)$, entonces $(\neg(i,x) \to \neg(j,y)) = (\neg i,-x) \to (\neg j,-y)$ que vale $(1,0)$ si $\neg i<\neg j$ $(j<i)$; $(1,\min\{0,-y-(-x)\})$ si $i=j$ y $(\neg i \to \neg j,-y-(-x))$ si $\neg i>\neg j$ $(i<j)$, pero esto resulta ser exactamente $(j,y) \to (i,x)$ ■

La siguiente propiedad, es una generalización de un resultado presentado por A. Romanowska y T. Traczyk en [52]. La demostración de la misma, así como las de los lemas previos están basadas esencialmente en las exposiciones de R. Cignoli en un curso durante el primer cuatrimestre de 1987 en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA.

<u>Proposición 3.37:</u> Sea C un álgebra de Wajsberg lineal, $F \subseteq C$ un sistema deductivo. Notemos $G = G^{-} \oplus G^{+}$ al grupo abeliano construido como en el lema 3.35, donde $F = C^{-}$ y $\sim F = C^{+}$ (como conjuntos), entonces $C = \bigoplus_{i \in L} C_i$ con $L = C/F$.

<u>Lema 3.38:</u> En todo álgebra de Wajsberg valen las siguientes identidades:

1) $(x \to y) \to (x \to z) = x \wedge y \to z$
2) $x \bullet (x \to y) = x \wedge y$
3) $x \bullet y \to z = x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$
4) $x \to x \bullet y = \neg x \vee y$

donde, como siempre, $x \bullet y$ es una abreviatura de $\neg(x \to \neg y)$.

Demostración:

1) $(x \to y) \to (x \to z) = \neg((\neg y \to \neg x) \to \neg x) \to z = \neg z \to ((\neg y \to \neg x) \to \neg x)$
$= \neg z \to ((x \to y) \to \neg x) = (x \to y) \to (\neg z \to \neg x) = x \wedge y \to z$.

2) $x \bullet (x \to y) = \neg(x \to \neg(x \to y)) = \neg((x \to y) \to \neg x) = \neg(\neg y \to \neg x) \to \neg x =$
$= x \wedge y$.

3) $x \bullet y \to z = \neg(x \to \neg y) \to z = \neg z \to (x \to \neg y) = x \to (\neg z \to \neg y) =$
$= x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$.

4) $x \to x \bullet y = x \to \neg(x \to \neg y) = (x \to \neg y) \to \neg x = (y \to \neg x) \to \neg x = y \vee \neg x$ ■

<u>Lema 3.39:</u> Un álgebra $\langle A, \to, \neg, 1 \rangle$ será un álgebra de Wajsberg si y solo cumple

las siguientes igualdades:

$\iota)$ $1 \to x = x$
$\delta)$ $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$
$\varepsilon)$ $(\neg x \to \neg y) \to (y \to x) = 1$
$\varphi)$ $x \to x = 1$
$\psi)$ $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$.

Demostración: Si A es de Wajsberg entonces, por definición, verificará las tres primeras igualdades. Las otras dos están probadas, por ejemlo, en [25].

Sea ahora A un álgebra que verifica las cinco igualdades enunciadas, para ver que es de Wajsberg hay que verificar que cumple
$\gamma)$ $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$.
Como $(x \to 1) \to 1 = (1 \to x) \to x = x \to x = 1$, entonces $x \to 1 =$
$= x \to ((x \to 1) \to 1) = (x \to 1) \to (x \to 1) = 1$, con lo que $x \to 1 = 1$.
Por otra parte $x \to (y \to x) = y \to (x \to x) = y \to 1 = 1$, entonces
$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = (x \to y) \to (x \to ((y \to z) \to z)) =$
$x \to ((x \to y) \to ((y \to z) \to z)) = x \to ((x \to y) \to ((z \to y) \to y)) =$
$x \to ((z \to y) \to ((x \to y) \to y)) = x \to ((z \to y) \to ((y \to x) \to x)) =$
$(z \to y) \to (x \to ((y \to x) \to x)) = (z \to y) \to 1 = 1$, de lo que
resulta que $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$ ∎

En los lemas 3.40-3.43 se supondrá que se trabaja con elementos de un álgebra de Wajsberg lineal C y que F es un sistema deductivo de C.

Lema 3.40: Sea $s \in F$, $j \le i \notin F$, entonces $(s \to i) \to j = s \cdot (i \to j)$.
Demostración: $(i \to j) \to ((s \to i) \to j) = (s \to i) \to ((i \to j) \to j) =$
$= (s \to i) \to i \vee j = (s \to i) \to i = s \vee i = s$.
Además $((s \to i) \to j) \to (i \to j) = i \to (((s \to i) \to j) \to j) =$
$= i \to (s \to i) \vee j = (i \to (s \to i)) \vee (i \to j) = 1$.
Entonces tenemos que $(s \to i) \to j$ es equivalente con $(i \to j)$ módulo F.
Además vale que $(s \to i) \to j \le (i \to j)$. Se sabe que, cuando $a \equiv_F b$ y $a \le b$,
poniendo $t = b \to a$, resulta que $a = b \cdot t$, de lo que, si
$t = (i \to j) \to ((s \to i) \to j)$, se obtiene que $(s \to i) \to j = s \cdot (i \to j)$ ∎

Lema 3.41: Sean $t, u \in F$, $j \le i \notin F$, $u \le t$, entonces $(t \to i) \to (u \to j) =$
$= (t \to u) \to (i \to j)$.

Demostración: Como $u \le t$ entonces $u = u \wedge t = t \cdot (t \to u)$ (por 3.38, 2)). Sea $s = t \to u$. Entonces $(t \to i) \to (u \to j) = (t \to i) \to ((t \cdot s) \to j) =$
$= (t \to i) \to (t \to (s \to j))$ (por 3.38, 3)), lo que es igual (por 3.38, 1))
a $t \wedge i \to (s \to j) = i \to (s \to j) = s \to (i \to j) = (t \to u) \to (i \to j)$ ∎

Lema 3.42: Sean $t, u \in F$, $j \le i \notin F$, $u \ge t$, entonces $(t \to i) \to (u \to j) =$
$(u \to t) \cdot (i \to j)$.

Demostración: Por 3.38, 2) tenemos que $t = t \wedge u = u \cdot (u \to t)$. Sea $s = u \to t$, entonces vale que $(t \to i) \to (u \to j) = (u \cdot s \to i) \to (u \to j)$ (por 3.38, 3))
$(u \to (s \to i)) \to (u \to j) = (u \wedge (s \to i)) \to j$ (por 3.38, 1)).
Sabemos que $s \to i \notin F$ pues $s \in F$ pero $i \notin F$, entonces $u \wedge (s \to i) = s \to i$.
Por lo tanto $(u \wedge (s \to i)) \to j = (s \to i) \to j = s \cdot (i \to j)$ (por el lema 3.40)

que, por definición de s, vale lo pedido ∎

Lema 3.43: Sean $t, u \in F$, $0 < j \leq i \notin F$, $j \notin \sim F$, entonces $(t \longrightarrow i) \longrightarrow u \bullet j =$
$= (i \longrightarrow j) \bullet t \bullet u$.

Demostración: Como $j \leq i$ entonces $t \longrightarrow j \leq t \longrightarrow i$, de lo que
$(t \longrightarrow i) \bullet ((t \longrightarrow i) \longrightarrow (t \longrightarrow j)) = t \longrightarrow j$ (por 3.38, 2)).
Por otra parte $(t \longrightarrow i) \longrightarrow (t \longrightarrow j) = t \wedge i \longrightarrow j$ (por 3.38 1)) lo que es igual a $i \longrightarrow j$, de lo que resulta que $t \longrightarrow j = (t \longrightarrow i) \bullet (i \longrightarrow j)$. Entonces $j = t \wedge j =$
$= t \bullet (t \longrightarrow j)$ (por 3.38, 2)) es igual a $t \bullet (t \longrightarrow i) \bullet (i \longrightarrow j)$. Por lo tanto vale
$(t \longrightarrow i) \longrightarrow u \bullet j = (t \longrightarrow i) \longrightarrow ((t \longrightarrow i) \bullet (i \longrightarrow j) \bullet t \bullet u) =$
$\neg(t \longrightarrow i) \vee ((i \longrightarrow j) \bullet t \bullet u)$ (†) (por 3.38, 4)). Notemos $s = u \bullet t$. Como $\neg s \in \sim F$
y $j \notin \sim F$, vale que $(i \longrightarrow j) \longrightarrow \neg s \leq (i \longrightarrow j) \longrightarrow j = i \vee j = i$. De lo que
$(i \longrightarrow j) \bullet u \bullet t = \neg((i \longrightarrow j) \longrightarrow \neg s) \geq \neg i$. Además $\neg i \geq \neg(t \longrightarrow i)$, de lo que resulta $\neg(t \longrightarrow i) \leq ((i \longrightarrow j) \bullet t \bullet u)$, con lo que (†) es igual a $(i \longrightarrow j) \bullet t \bullet u$, lo que prueba el lema ∎

Demostración de la proposición 3.37 : Para cada $i \in L - \{0, 1\}$, elijamos (usando AE) un x_i en C tal que $\pi(x_i) = i$, donde π es la proyección canónica $\pi : C \longrightarrow C/F$ y definamos $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$. Llamemos A_i a $\pi^{-1}(i)$ para cada $i \in L$, $A_i^+ = \{x \in A_i : x \geq x\}$ y $A_i^- = \{x \in A_i : x \leq x\}$. Veamos que, para cada $x \in C$, si $x \in A_i$ existe un único $t \in F$ tal que $x = x_i \bullet t$ (donde $\bullet$ es la operación definida en el comentario siguiente al lema 3.34) si $x \in A_i^-$ y $t \longrightarrow x_i$ si $x \in A_i^+$:

Para el caso $x < x_i$ definimos $t := x_i \longrightarrow x$; t estará en el filtro F por definición de equivalencia módulo F; Además $x_i \bullet t = x$ por el lema 3.38, 2). La unicidad resulta de que si tenemos t definido más arriba y otro t' tal que $x = x_i \bullet t'$, se sigue que $t = x_i \longrightarrow x = x_i \longrightarrow x_i \bullet t' = x_i \longrightarrow \neg(x_i \longrightarrow \neg t')$
$= x_i \longrightarrow \neg(t' \longrightarrow \neg x_i) = (t' \longrightarrow \neg x_i) \longrightarrow \neg x_i = t' \vee \neg x_i = t'$ ya que $t' \in F$ y $x_i \notin F$ (y el álgebra es lineal).

Si $x > x_i$ definimos $t := x \longrightarrow x_i$; $t \longrightarrow x_i = (x \longrightarrow x_i) \longrightarrow x_i = x \vee x_i = x$. La demostración de la unicidad es análoga a la del caso anterior.

Además tenemos que, $x = t \longrightarrow i$ si y solamente si $\neg x = \neg i \bullet t$. Que $x \in A_i^+$ si y solo si $\neg x \in A_{\neg i}^-$ es inmediato y $\neg(t \longrightarrow i) = \neg i \bullet t$ resulta de la definición de la operación $\bullet$.

Definamos ahora una función $f : C \longrightarrow \bigoplus_{i \in L} G_i$

$$x \longmapsto \begin{cases} (i, -t) & \text{si } x > x_i \\ (i, t) & \text{si } x \leq x_i \end{cases}$$

y veamos que es un isomorfismo de álgebras de Wajsberg.

Preserva la negación ya que si $x \in A_i^+$, entonces $f(x) = f(t \longrightarrow i) = (i, -t)$ y, por otro lado, $f(\neg x) = f(\neg i \bullet t) = (\neg i, t) = \neg(i, t) = \neg f(x)$. Si $x \in A_i^-$, definimos

$y = \neg x$ y repetimos, en sentido inverso la demostración del caso anterior.

Veamos ahora que f preserva la implicación:

Sean $x, y \in A$. Si $x \le y$ entonces $x \to y = 1$, por lo que $f(x \to y) = f(1) = (1,0)$. Como f preserva el orden tenemos que $f(x) \le f(y)$ lo que $f(x) \to f(y) = (1,0)$.

Sean ahora $x>y$.

Caso 1) $i = j$, es decir que $x,y \in A_i$

Caso 1.1) $x,y \in A_i^+$, $x = t \to i$, $y = u \to i$, entonces $u > t$ e $i < 1$. Podemos aplicar entonces el lema 3.41, de ahí resulta que $f(x \to y) = f((t \to i) \to (u \to i)) = f((u \to t)\cdot(i \to i)) = f(u \to t) = (1, u \to t) = (1, \min\{0, t-u\})$. Por otro lado $f(x) \to f(y) = (i,-t) \to (i,-u) = (1, \min\{0, t-u\})$, de lo que resulta $f(x \to y) = f(x) \to f(y)$.

Caso 1.2) $x \in A_i^+$, $y \in A_i^-$, entonces $x = t \to i$, $y = u \cdot i$, como $0 < i < 1$ podemos usar el lema 3.43 y tenemos $f(x \to y) = f((t \to i) \to u \cdot i) = f(1 \cdot t \cdot u) = (1, t \cdot u) = (1, t+u)$.

Por el otro lado $f(x) \to f(y) = (i,-t) \to (i,u)$ $(1, \min\{0, u+t\})$, con lo que, para este caso se preserva también la implicación.

Caso 1.3) $x,y \in A_i^-$. Como sabemos que f preserva la negación, lo reducimos al caso 1.1, con $\neg x, \neg y \in A_i^+$.

Caso 2) $i>j$.

Caso 2.1) $x \in A_i^+$, $y \in A_j^+$, $x = t \to i$, $y = u \to j$, $1>i>j$.

Caso 2.1.1) $u \le t$. Por el lema 3.41 $f(x \to y) = f((t \to i) \to (u \to j)) = f((t \to u) \to (i \to j)) = (i \to j, -(t \to u)) = (i \to j, -\min\{0, u-t\})$. Por otro lado $f(x) \to f(y) = (i \to j, -u+t)$ y como $u \le t$, resulta que $-\min\{0, u-t\} = t-u$, con lo que se cumple lo pedido.

Caso 2.1.2) $u > t$. Aplicando el lema 3.42, tenemos que $f(x \to y) = f((t \to i) \to (u \to j)) = f((u \to t)\cdot(i \to j)) = (i \to j, u \to t) = (i \to j, \min\{0, t-u\}) = (i \to j\ t-u)$. Por otra parte $f(x \to y) = (i \to j, t-u)$.

Caso 2.2) $x \in A_i^+$, $y \in A_j^-$, $1>i>j>0$, $x = t \to i$, $y = j \cdot u$.

Por el lema 3.43 tenemos $f(x \to y) = f((t \to i) \to j \cdot u) = f((i \to j)\cdot t \cdot u) = (i \to j, t \cdot u) = (i \to j, t+u)$. Por el otro lado $f(x) \to f(y) = (i,-t) \to (j,u) = (i \to j, u+t)$.

Caso 2.3) $x \in A_i^-$, $y \in A_j^+$, $x = t \cdot i$, $y = u \to j$, entonces, aplicando dos veces el lema 3.42, tenemos que $f(x \to y) = f(t \cdot i \to (u \to j)) =$

$= f(t \to (i \to (u \to j))) = f(t \to (u \to (i \to j))) = f(t \cdot u \to (i \to j)) =$
$= (i \to j, -(t \cdot u)) = (i \to j, -t-u)$. Por el otro lado $f(x) \to f(y) =$
$= f(i,t) \to f(j,-u) = (i \to j,\ u\ t)$.

Caso 2.4) $x \in A^-_i$, $y \in A^-_j$, entonces $\neg x \in A^+_{\neg i}$ $\neg y \in A^+_{\neg j}$ y estamos en el caso 2.1.

Por construcción se ve inmediatamente que f es biyectiva, por lo que resulta ser un isomorfismo de álgebras de Wajsberg ∎

<u>Lema 3.44:</u> Sean G y H grupos abelianos lineal y naturalmente ordenados tales que G es subgrupo de H. Sea L un álgebra de Wajsberg lineal, entonces $A = \bigoplus_{i \in L} G_i$ será isomorfa a una subálgebra de $B = \bigoplus_{i \in L} H_i$ donde los G_i y los H_i se entienden en el sentido dado en el lema 3.36.

Demostración: La contención de A en B resulta inmediatamente de la contención de G en H. De la misma manera, de acuerdo con la definición de las operaciones de las nuevas álgebras definidas (ver el enunciado del lema 3.36), resulta que las operaciones de B restringidas a A coinciden con las de A ∎

<u>Lema 3.45:</u> Sea A un álgebra de Wajsberg, $a \in A$, son equivalentes:

i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \cdot a \le \neg a$ (donde con $n \cdot x$ notamos $x \oplus \ldots \oplus x$ n veces);

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a \le (\neg a)^n$ (donde con x^n notamos $x \cdot \ldots \cdot x$ n veces);

iii) Para todo producto ΠL_i de álgebras lineales tal que existe una inmersión $f: A \hookrightarrow \Pi L_i$, $\forall\ i \in I$ y todo $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \le n \cdot (f(a))_i < 1$.

Demostración: De las definiciones de las operaciones de las MV-álgebras tiene que $\neg(n \cdot a) = (\neg a)^n$ de lo que resulta la equivalencia i) $\leftrightarrow$ ii).

Sea ahora A isomorfa a una subálgebra de un producto ΠL_i y $a \in A$ que cumple i), entonces, para todo $i \in I$ se cumple $0 \le n \cdot (f(a))_i \le 1-(f(a))_i < 1$. Si $(f(a))_i > 0$ entonces $0 \le n \cdot (f(a))_i < 1$, si $(f(a))_i = 0$ las desigualdades se cumplen trivialmente. Para la recíproca observemos que, si para $i \in I$ se cumple $0 \le n \cdot (f(a))_i < 1$ entonces $n \cdot (f(a))_i + (f(a))_i = (n+1) \cdot (f(a))_i < 1$, de lo que $0 \le n \cdot (f(a))_i \le 1 - (f(a))_i$, con lo que se concluye que si la desigualdad vale en todas las coordenadas se cumple que $n \cdot a \le \neg a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ∎

<u>Definición 3.46:</u> Sea A un álgebra de Wajsberg. Se dice que $x \in A$, es *infinitesimal* o *infinitésimo* si cumple cualquiera de las condiciones equivalentes del lema 3.45 y escribiremos $x \approx 0$. Dualmente, x es *casi-máximo*, *unidad* o *peirceano* si $\neg x \approx 0$ y lo escribiremos $x \approx 1$.

Ambas definiciones son debidas a A. Rodríguez (ver [51]) así como las caracterizaciones 3.45 i) y ii), la tercera caracterización es nuestra.

La siguiente definición es una adaptación de la que da Torrens en [57].

modificada a fin de que la noción de elemento arquimedeano coincida en grupos linealmente ordenados y en álgebras de Wajsberg lineales. La noción de álgebra de Wajsberg arquimedeana coincide para la definición de Torrens y la nuestra.

Definicion 3.47: Sea A un álgebra de Wajsberg. Se dice que $x \in A$, es *arquimedeano* si existe un número natural n tal que $\neg x \vee (\neg x^n \to 0) = 1$, donde se define $x^0 \to y := y$ y $x^{n+1} \to y := x \to (x^n \to y)$ $(n \geq 1)$. Un álgebra de Wajsberg se dirá *arquimedeana* si todos sus elementos lo son.

Para el caso en que A es un álgebra lineal, se verifica que los elementos infinitesimales son exactamente los no arquimedeanos distintos del cero, ya que estos últimos pueden caracterizarse como aquellos x tales que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n{\cdot}x = 1$. Si A no es lineal puede tener elementos que no son ni arquimedeanos ni infinitesimales: Sea $A = \mathbb{R}[0,1]^{\mathbb{N}}$, el elemento $x = (1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ entra en esa categoría.

Si G es un grupo abeliano linealmente ordenado con unidad de orden u, diremos que $x \in G$ es *infinitesimal* si $|x|$ 0 como elemento del álgebra de Wajsberg $G[0,u]$ (con $|x|$ notamos el elemento positivo $x \vee x$), en tal caso notaremos, al igual que en el caso de las álgebras de Wajsberg x 0 ($x \gtrsim 0$ si x es positivo y $x \lesssim 0$ si x es negativo). Como en el caso de las algebras de Wajsberg lineales, tendremos que G será *arquimedeano* si y solamente si no contiene elementos infinitesimales distintos del cero. Tenemos entonces que un álgebra de Wajsberg lineal será arquimedeana si y solamente si es el segmento $[0,u]$ de un grupo abeliano linealmente ordenado con unidad de orden u arquimedeano, si y solamente si es isomorfa a una subálgebra de $\mathbb{R}[0,1]$.

Se observa, además, que para un álgebra lineal, el subconjunto $\{x : x \approx 1\}$ es un sistema deductivo.

Observación: Teniendo en cuenta lo demostrado en [25] en el sentido que un álgebra de Wajsberg es simple si y solamente es una subálgebra del álgebra lineal $\mathbb{R}[0,1]$, resulta que un álgebra es *semisimple* si y solamente si es isomorfa a una subálgebra de un producto de álgebras arquimedeanas lineales.

Proposicion 3.48: Toda álgebra de Wajsberg lineal inyectiva es arquimedeana.

Demostración: Sea A es un álgebra de Wajsberg. Definamos los conjuntos $\sim F = \{x \in A\colon x \approx 0\}$ y $F = \{x \in A\colon x \approx 1\}$. F es un sistema deductivo y $\sim F$ es un ideal implicativo (contiene al 0 y es cerrado para +), además F es maximal como sistema deductivo, ya que si $y \in A\setminus F$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(\neg y) = 1$ o, lo que es lo mismo $y \to (y \to (\ldots \to \neg y)..) = 1 \in F$, entonces, aplicando *modus ponens* n-1 veces, tenemos que $\neg y$ pertenece al sistema deductivo generado por F

y, con lo que resulta que ese sistema deductivo no es propio.

Siguiendo la construcción de la proposición 3.37, podemos identificar a A con $\oplus_{i\in L} G_i$ donde $L = A/F$ es arquimedeana (no tiene ningún sistema deductivo no trivial). Definamos $H = \oplus_{z\in Z} G_z$ (suma ordinal), donde $G_z = \{z\}\times G$.

A H se le puede dar una estructura canónica de grupo abeliano natural y linealmente ordenado definiendo $(z,x)+(w,y)$ $(z+w,x+y)$ (haciendo abuso de notación con el símbolo de la suma). Más aún, se puede ver que $G_0 \simeq G$ es un subgrupo propio de H.

Por los lemas 3.36 y 3.44, tenemos que $B = \oplus_{i\in L} H_i$ es una extensión propia de A. A se identifica con la subálgebra de B cuyos elementos tienen la forma $(0,(1,x))$. Consideremos el elemento $(0,(1,0))$ de B. Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $n(0,(1,0)) = (0,(n,0)) < (1,(0,0))$ entonces, para cualquier morfismo $f:B \longrightarrow A$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $nf(0,(1,0)) = f(0,(n,0)) < (1,0)$, con lo que $f(0,(1,0)) = (0,x)$ para algún $x \in G$ ya que, como L es arquimedeana, si $i \in L$, $i > 0$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $ni = 1$ y. Entonces, si $f(0,(1,0)) = (i,x)$, resultaría que $nf(0,(1,0))$ $(1,(0,0))$.

Si suponemos que f es una retracción, tendremos que $f(0,(0,x)) = (0,x) = f(0,(1,0))$. Entonces resulta que $(0,(1,0))$ $\rightarrow (0,(0,x))$ pertenece al núcleo de f, que es un filtro implicativo. Por la definición de la implicación en B, tenemos que $(0,(1,0)) \rightarrow (0,(0,x)) = (1,\min\{0,((0,x)-(1,0))\}) = (1,(-1,x))$. Entonces, para todo a en B tal que $a \leq \neg(1,(-1,x))$, tenemos que $f(a) = 0$. Pero $\neg(1,(-1,x)) = (0,(1,-x)) > (0,(0,x))$, con lo que, como f preserva el orden vale que $f(0,(1,0)) = 0$. Pero, como para todo $b \in G_0$, $b < (0,(1,0))$, tenemos que $f(G_0) = \{0\}$. Como G_0 coincidía con $\sim F$, resulta que el único infinitesimal en A es el 0, con lo que se concluye la arquimedeanidad de A ■

<u>Corolario 3.49:</u> La única álgebra de Wajsberg inyectiva y lineal es $\mathbb{R}[0,1]$.

Teniendo en cuenta que la proposición 3.48 y el corolario 3.49 dependen ambos de la proposición 3.37, a su vez dependiente del Axioma de elección, es interesante encontrar una demostración alternativa que no dependa de dicho axioma. El siguiente lema permitirá tal demostración.

<u>Lema 3.50:</u> Sea G un grupo abeliano linealmente ordenado con unidad de orden u. Puede entonces ser sumergido en un grupo abeliano linealmente ordenado $H(G)$ con la misma unidad de orden u tal que existe un elemento infinitesimal $\varepsilon(G)$ en $H(G)$ mayor que todos los infinitesimales de G. Más aún, H es un endofuntor de la categoría de los GARUs totalmente ordenados.

Demostración: Consideremos el grupo $H(G) = G\times\mathbb{Z}$ y sea el conjunto $K \subseteq H(G)$ definido por $K = \{(a,0)\colon a \geq 0\}\cup\{(a,z)\colon a \not\leq 0 \text{ y } z > 0\}\cup\{(a,z)\colon a \not\geq 0 \text{ y } z \geq 0\}\cup$

$\cup\{(a,z):\ a>0,\ a$ arquimedeano y $z \in \mathbb{Z}\}\cup\{(0,z):\ z \geq 0\}$.
Veamos que K es un cono: Sea $n \in \mathbb{N}$, es claro que si (a,z) cumple alguna de las condiciones que definen K, entonces $n(a,z) = (na,nz)$ también la cumple. Sean ahora $(a,0),(-b,z),(c,w),(d,x) \in K$ tal que $a \geq 0$, $b \geq 0$, $z > 0$, $c \approx 0$, $w > 0$, $a > 0$ (arquimedeano).

i) $(a,0)+(-b,z) = (a-b,z)$, resultando $a-b>0$ y arquimedeano por lo que cumple la cuarta condición o $a-b \approx 0$ y $z>0$ cumpliéndose la tercera o $(a-b) \not\approx 0$ por lo que se cumple la segunda.

ii) $(a,0)+(c,w) = (a+c,w)$, cumpliéndose nuevamente la tercera o la cuarta condición.

iii) $(a,0)+(d,x) = (a+d,x)$, cumple la cuarta condición.

iv) $(-b,z)+(c,w) = (-b+c,z+w)$, $-b+c\approx 0$ ó $-b+c<0$ y $z+w>0$, por lo que se cumple o la tercera o la segunda condición.

$(-b,z)+(d,x) = (-b+d,z+x)$, $-b+d>0$ y es arquimedeano, cumpliéndose la cuarta condición.

vi) $(c,w)+(d,x) = (c+d,w+x)$, $c+d>0$ y es arquimedeano, por lo que también en este caso se cumple la cuarta condición.

Con lo anterior hemos probado que K es efectivamente un cono. Entonces el orden de $H(G)$ estará dado por $(a,z) \leq (b,w)$ si y solamente si la diferencia $(b,w)-(a,z) \in K$.

Veamos que se trata de un orden lineal: Si tenemos que (a,z) y (b,w) están en $H(G)$, sea $h = (a,z)-(b,w) = (a-b,z-w)$ con los posibles casos

1) $a-b > 0$ y arquimedeano, entonces $h \in K$ y de allí $(a,z) \geq (b,w)$
2) $a-b \approx 0$ entonces son posibles los siguientes subcasos:
   2.1) $z-w \geq 0$, entonces $h \in K$ y $(a,z) \geq (b,w)$.
   2.2) $z-w < 0$, entonces $-h \in K$ y $(a,z) \leq (b,w)$.

Los siguientes casos son los duales de 1) y 2) respectivamente:

3) $a-b < 0$ y $-(a-b)$ es arquimedeano.
4) $a-b \approx 0$.

Consideremos ahora la inmersión

$$f:\ G \dashrightarrow H(G)$$
$$a \longmapsto (a,0)$$

e identifiquemos a G con su imagen $G\times\{0\}$ en $H(G)$. Por otro lado, en $H(G)$ $(u,0)$ es una unidad de orden ya que, si $(a,z) \in K$, como u es una unidad de orden de G, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $nu>a$, por lo que $(n+1)u > a+u$ con lo que $(n+1)u-a > u$, es decir que no es infinitesimal, entonces $(n+1)(u,0) = ((n+1)u,0) > (a,z)$. Además el elemento $\varepsilon(G) = (0,1)$ es un infinitesimal en $H(G)$ tal que, para todo infinitesimal $a \in G$ vale $(a,0) < (0,1)$ ya que $(-a,1) \in K$, con lo que queda probado el enunciado. Vale la pena observar que, en el caso de que G es arquimedeano, el grupo $H(G)$ construido coincide con el producto lexicográfico de G y $\mathbb{Z}$.

Para verificar que es un funtor, si tenemos $f:\ G \dashrightarrow G'$, definimos el morfismo $H(f):\ H(G) \dashrightarrow H(G')$ dado por $H(f)(a,z) = (f(a),z)$ ∎

Del lema anterior resulta inmediatamente el siguiente

Corolario 3.51: Para toda álgebra de Wajsberg lineal L existe un álgebra lireal $H(L)$ tal que L es subálgebra de $H(L)$ y existe un elemento infinitesimal en $H(L)$ mayor que todos los infinitesimales de L.

<u>Proposición 3.52:</u> Sean $(L_i)_{i\in I}$ una familia de álgebras lineales y A una subálgebra del producto $\prod L_i$. Si A es inyectiva, entonces es semisimple.

Demostración: Sea A como en la hipótesis. Para cada $i \in I$ tenemos la inmersión canónica $L_i \hookrightarrow H(L_i)$ construida en el corolario 3.51. Llamemos B al álgebra $\prod_I H(L_i)$ y φ a la inmersión $\varphi: A \hookrightarrow B$. Por ser A inyectiva existe una retracción $f: B \longrightarrow A$. Si notamos con F_i $(i \in I)$ al sistema deductivo de las unidades de B, veremos que $\prod_I F_i$ está contenido en el núcleo de f.

Sea el elemento $x \in B$ dado por $x_i = \varepsilon(L_i)$, según la construcción del lema 3.50 y consideremos el elemento $f(x) \in A$. Si $f(x)$ fuera no nulo, existiría un $j \in I$ tal que $(f(x))_j > 0$. Si dicho elemento fuera arquimedeano tendríamos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\cdot(f(x))_j = (f(n\cdot x))_j = 1$, lo que implica que $1-(f(n\cdot x))_j = (f(\neg(n\cdot x)))_j = 0$. Notemos con x^j al elemento de B dado por:

$x^j_i = \begin{cases} \neg(n\cdot x_i) & \text{si } i \neq j \\ x_j & \text{si } i = j \end{cases}$, como x_j es infinitesimal, tenemos

$0 < x^j \quad \neg(n\cdot x)$ por lo que $(f(x^j))_j = 0$, pero como, por otra parte $x \le x^j$, concluimos que $(f(x))_j = 0$, lo que contradice nuestra hipótesis. Tenemos, entonces que, para cada $i \in I$, $(f(x))_i = 0$. Por ser f retracción sabemos que $f(f(x)) = f(x)$. Por las propiedades del funtor H y por construcción sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $n\cdot f(x) < x$, por lo que, $f(x) = f(f(x)) \le f(2\cdot f(x)) = 2\cdot f(x) \le f(x)$, lo que implica que $f(x) = 0$, ya que f preserva el orden.

Tenemos entonces que $\prod_I H(F_i)$ está contenido en el núcleo de f, por lo que f factoriza por $(\prod_I H(L_i))/\prod_I F_i \cong \prod_I H(L_i)/F_i$. Por lo tanto la composición $A \xhookrightarrow{\varphi} \prod_I H(L_i) \xrightarrow{\pi} (\prod_I H(L_i))/\prod_I F_i \xrightarrow{\bar{f}} A$ resulta la identidad de A, donde π es la proyección canónica y $f = \bar{f}\circ\pi$. Esto implica que la función $\pi\circ\varphi$ es un monomorfismo y por lo tanto induce una inmersión de A en el producto $\prod_I H(L_i)/F_i$ de álgebras lineales arquimedeanas, es decir que A resulta semisimple ■

Usando el teorema de representación de Birkhoff (equivalente a TIP para el caso de las álgebras de Wajsberg) que dice que toda álgebra es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras linealmente ordenadas, la proposición anterior nos da directamente el

<u>Corolario 3.53:</u> (... TIP) Toda álgebra de Wajsberg inyectiva es semisimple.

Observamos que un corolario es la proposición 3.48. Es de hacer notar que no sólo no se hace uso del axioma de elección sino que, teniendo en cuenta que se trata de un álgebra lineal, tampoco hace falta utilizar el teorema del ideal primo (utilizado en la prueba de 3.53 para representar a un álgebra cualquiera como producto subdirecto de lineales). Por lo tanto la caracterización de las álgebras de Wajsberg lineales inyectivas vale en ZF, es decir, es puramente constructiva.

<u>Corolario 3.54:</u> (ZF + TIP) Un álgebra de Wajsberg es inyectiva si y solamente si es un retracto de una potencia de $\mathbb{R}[0,1]$.

Demostración: Una dirección es el teorema 3.31, ii). Para la otra, recordemos el hecho de que toda álgebra de Wajsberg es producto subdirecto de álgebras lineales. Por la proposición 3.52 toda álgebra inyectiva puede ser sumergida en un producto de álgebras lineales arquimedeanas. Sea entonces A inyectiva y $A \subseteq \prod_{i \in I} L_i$ donde las L_i son arquimedeanas y no triviales y por lo tanto isomorfas a subalgebras de $\mathbb{R}[0,1]$, tenemos entonces la inmersión

$$h: A \longrightarrow \prod_{i \in I} L_i \dashrightarrow \mathbb{R}\,[0,1]^I$$

que, por ser A inyectiva, induce una retracción $f: \mathbb{R}[0,1]^I \longrightarrow A$ ∎

Teniendo en cuenta el hecho de que las categorías de álgebras de Wajsberg y de grupos abelianos reticulados con unidad de orden son equivalentes (en ZF+TIP), y que los GARUs inyectivos son divisibles podemos definir la noción de álgebra de Wajsberg divisible.

<u>Definición 3.55:</u> Un álgebra de Wajsberg se dice *divisible* si para cada elemento x en el álgebra y cada $n \in \mathbb{N}$ ($n>0$) existe un elemento $x_n \in A$ tal que:

i) $x_n = \min\{y \in \quad n \cdot y = x\}$. (Donde $n \cdot y$ está definida inductivamente por $0 \cdot y := 0$, $(n+1) \cdot y := \neg y \to n \cdot y$).

ii) $\neg 1_2 = \quad _2$.

iii) Si $x \leq y$ entonces $x_n \leq y_n$ (para todo $n>0$).

iv) Si $n < m$ entonces $x_m < x_n$ ($0<x<1$).

<u>Proposición 3.56:</u> (TIP) Un álgebra de Wajsberg A es divisible si y solamente si $A \cong G[0,u]$ donde G es un GARU divisible con unidad de orden u.

Demostración: Sea G un GARU divisible, en el álgebra de Wajsberg $A = G[0,u]$ tenemos que, para cada $x \in A$ y cada $n>0$, si definimos $x_n := x/n$ (en el sentido de la divisibilidad de G), se cumplen las cuatro condiciones de la definición 3.55.

Recíprocamente, sea A un álgebra de Wajsberg divisible. Por lo observado al comienzo de la sección anterior existe un GARU G tal que $A \cong G[0,u]$, veamos que G es divisible:

Sea $y \in G$, existen $y_1, y_2 \in G^+$ tales que $y = y_1 - y_2$. Por ser u unidad de orden existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ y $z_1, z_2 \in G[0,u] = A$ tales que $y_i = m_i u + z_i$ $(i = 1,2)$. Para ver que y es divisible basta con ver que u, z_1 y z_2 lo son. Mostraremos, entonces que, para cada $x \in A$, $nx_n = n\cdot x_n$ (como elementos del grupo). Sabemos que $x - n\cdot x_n = u\wedge(nx_n)$, entonces $nx_n - n\cdot x_n = nx_n - u\wedge(nx_n) = (nx_n - u)\vee(nx_n - nx_n) =$ $= (nx_n - u)\vee 0$. Entonces, si $nx_n \leq u$, tenemos que $nx_n - n\cdot x_n = 0$ por lo que x es divisible en el sentido del grupo.

Si nx_n no es menor o igual que u, podemos suponer que $(n-1)x_{n-1} \leq u$ y que $n > 2$, ya que por 3.55 ii) y iii), por ser $x \leq u$, resulta que $x_2 \leq u_2$ y por lo tanto $2x_2 \leq 2u_2 = u$.

Como $nx_n = x_n + (n-1)x_n \leq 2u$, se obtiene que $u \geq nx_n - u$, con lo que vale $0 < nx_n - n\cdot x_n \leq u$ por lo que $nx_n - n\cdot x_n \in A$. Llamemos a a ese elemento. Tenemos entonces que $nx_n - a = n\cdot x_n = x$. Por divisibilidad de a sabemos que existe a_n. Como $nx_n = x_n + (n-1)x_n = x_n + (n-1)\cdot x_n$ entonces $x_n - a = x_n - (nx_n - n\cdot x_n) =$ $x_n - (x_n + (n-1)\cdot x_n - n\cdot x_n) = x - (n-1)\cdot x_n > 0$, lo que implica que $a < x_n < x$ por lo que $na_n = a_n + (n-1)a_n \leq a_n + a \leq a_n + x_n \leq 2x_n \leq (n-1)x_n < x - u$, de lo que resulta que $n\cdot a_n = na_n = a$.

Consideremos el elemento $(x_n - a_n) \in A$. Tenemos que $n\cdot(x_n - a_n) =$ $n(x_n - a_n)\wedge u = (nx_n - na_n)\wedge u = (nx_n - a)\wedge u = x\wedge u = x$.
En consecuencia existe un elemento en A $y = (x_n - a_n)$ tal que $y < x_n$ y además $n\cdot y = x$, contradiciendo la condición i) de 3.55 ∎

<u>Lema 3.57:</u> La divisibilidad se preserva por imágenes homomórficas y productos.
Demostración: Resulta de la proposición 3.56 y el resultado análogo para la teoría de los grupos abelianos ∎

<u>Teorema 3.58:</u> Toda álgebra de Wajsberg inyectiva es divisible y completa.
Demostración: Resulta del corolario 3.54 ya que si A es inyectiva es un retracto de una potencia de $\mathbb{R}[0,1]$. Sea entonces $x \in A \leq \mathbb{R}[0,1]^I$ para algún conjunto de índices I. Para cada $n \in \mathbb{N}$ $(n>0)$ tenemos que x/n (con la división considerada punto a punto) cumple $n(x/n) = n\cdot(x/n) = x$ y es el menor elemento con esa propiedad. Si $f:\mathbb{R}[0,1]^I \longrightarrow A$ es la retracción, tenemos que $f(x/n)$ tiene la misma propiedad en A, por lo que A resulta también divisible. La completitud resulta del hecho de ser retracto de un álgebra completa ∎

<u>Observación:</u> Vale la pena notar que, en cierto sentido, las álgebras de Wajsberg, son la *intersección* de las categorías de los grupos abelianos y de las estructuras ordenadas y, que los objetos inyectivos para las algebras de Wajsberg son los inyectivos a la vez para les grupos abelianos (grupos divisibles) y estructuras ordenadas (órdenes completos).

3.3.3 Algebras de Post generalizadas

Si fijamos un $n \geq 2$, resulta que la categoría de las álgebras de Lukasiewicz propias n-valentes es equivalente a una subcategoría propia de las álgebras de Wajsberg, las que podrían ser llamadas *álgebras de Wajsberg n-valentes*. Es un resultado de R.Cignoli que los objetos inyectivos en dichas categorías son las álgebras de Post completas n-valentes (ver [16]). Es interesante, entonces, explorar las generalizaciones posibles de este resultado al caso infinito-valente (ver exposición preliminar en [29]). El desarrollo de este tema nos permitirá dar una nueva caracterización de las álgebras de Wajsberg inyectivas con el interés adicional de realizarse en el marco axiomático ZF+SET (análogamente a los caso booleano y de Hilbert).

Entre las varias generalizaciones de las álgebras de Post, vamos a considerar aquéllas introducidas por T.Traczyk (ver [58]) y C.C.Chang y A.Horn (ver [13]). Para nuestro propósito éstas son las generalizaciones más adecuadas de las álgebras de Post finito-valentes ya que el "reticulado de constantes" está totalmente ordenado mientras que en otras generalizaciones este reticulado es arbitrario y creemos que, en el caso de buscarse una generalización de las lógicas finito-valentes, como interpretación posible de las modales, es conveniente considerar al conjunto de los valores de verdad (el "reticulado de constantes") como totalmente ordenado.

En [13] un álgebra de Post generalizada se define como el reticulado de todas las funciones continuas desde un espacio booleano X en una cadena arbitraria C con la topología discreta y se nota $\mathcal{C}(X,C_d)$. En este caso el álgebra $\mathcal{C}(X,C_d)$ resulta el coproducto (en $\mathcal{D}_{01}$) del álgebra de Boole $\mathcal{D}_{01}(X)$ con la cadena C, generalizando dicha propiedad de las álgebras de Post.

En [58] un álgebra de Post generalizada se define como el conjunto de todas las funciones antitónicas desde una cadena C sobre un álgebra de Boole B y se nota $[B]^C$. En este caso, el álgebra $[B]^C$ coincide con el álgebra de todas las "series formales" $\bigcup b_i \wedge c_i$ donde los c_i recorren toda la cadena C y vale que $b_i \leq b_j$ si y solamente si $c_j \leq c_i$. Estas álgebras generalizan a las de Post en el sentido de tener esta última propiedad.

En el caso de que C sea una cadena finita de n elementos, y si $X = \mathcal{S}p(B)$ (el espacio de Stone de B), resulta que $\mathcal{C}(X,C_d) \cong [B]^C \cong C \amalg B$ (el coproducto en la categoría de reticulados distributivos acotados entre C y B), lo que es un álgebra de Post n-valente. Sin embargo, en el caso de que C sea infinita, ambas nociones en general no coinciden.

Lo que sigue, si bien se sigue del resultado general expuesto en [10, Lema IV.5.2 p.141], vale la pena explicitarlo para nuestro caso particular.

Consideremos primero el caso $\mathcal{C}(X,C_d)$. Es obvio que podremos definir sobre un tal retículado una estructura de álgebra de Wajsberg si y sólo si la cadena de constantes C admite una estructura de álgebra de Wajsberg lineal. En tal caso, si $f, g \in \mathcal{C}(X, C_d)$, definimos $(f \to g)(x) := f(x) \to g(x)$ para todo X. Tenemos que verificar que $f \to g$ es una función continua:

Sea $a \in C$, queremos que mostrar que el conjunto $(f \to g)^{-1}(a)$ es abierto en X.

Si $a = 1$, tenemos que $(f \to g)^{-1}(1) = \{x \in X\colon f(x) \to g(x) = 1\} =$
$\{x \in X\colon f(x) \leq g(x)\} = \bigcup_{c \in C} (g^{-1}(c) \cap (\bigvee_{d \leq c} f^{-1}(d)))$ que es abierto ya que $g^{-1}(c)$ y $f^{-1}(d)$ lo son.

Si $a < 1$, tenemos que $(f \to g)^{-1}(a) = \{x \in X\colon f(x) \to g(x) = a\} =$
$= \bigcup_{c \leq a} (g^{-1}(c) \cap f^{-1}(a \to c))$. Como g y f son continuas, concluimos que $(f \to g)^{-1}(a)$ es abierto.

Como X es compacto y C tiene la topología discreta, tenemos que, si $f \in C(X, C_d)$, el conjunto $f(X)$ es finito. Entonces de esta manera no podemos caracterizar las álgebras inyectivas. Por ejemplo $\mathbb{R}[0,1]^{\mathbb{N}}$ no puede ser representada de esta forma. Sin embargo, para la clase de las álgebras de Wajsberg arquimedeanas, las álgebras de la forma $\mathcal{C}(X, C_d)$ son inyectivas en el caso en que X sea un espacio extremadamente disconexo, lo que resultará de la siguiente serie de resultados, antes de los que daremos una definición de álgebra universal que será útil para el tratamiento de cierta clase de álgebras de Wajsberg (ver [10, IV.8.1]).

Definición 3.59: Un *producto booleano* de una familia indexada $(A_x)_{x \in X}$, $(X \neq \emptyset)$ de álgebras del mismo tipo de similaridad es un álgebra notada $\Gamma_d(X, (A_x)_{x \in X})$, producto subdirecto de dicha familia donde X puede ser dotado de una topología de espacio de Boole o booleano (esto es, un espacio compacto de Hausdorff totalmente disconexo) que cumple:

i) $[a = b] = \{x \in X : \pi_x(a) = \pi_x(b)\}$ es abierto y cerrado para todos los $a, b \in \Gamma_d(X, (A_x)_{x \in X})$ y

ii) Si $a, b \in \Gamma_d(X, (A_x)_{x \in X})$ y N es un abierto-cerrado de X entonces $a_{|N} \cup b_{|X \setminus N}$ es también elemento de $\Gamma_d(X, (A_x)_{x \in X})$ (con $a_{|N}$ notamos la proyección de a en la subálgebra $\Pi_N A_x$ de $\Pi_X A_x$).

Proposición 3.60: Para un álgebra de Wajsberg A son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) A es arquimedeana;

ii) A es isomorfa a un producto booleano de una familia de álgebras lineales arquimedeanas;

A es es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d)$ donde X es un espacio booleano.

Demostración: La equivalencia entre i) e ii) fue demostrada por A.T. [56].

iii) $\Rightarrow$ i) Se verifica haciendo las cuentas.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea A producto booleano de $(L_x)_{x\in X}$ donde cada L_x es una cadena arquimedeana y por lo tanto subálgebra de $\mathbb{R}[0,1]$. Entonces tenemos, canónicamente una inmersión $A \hookrightarrow \mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d)$ ∎

Resulta entonces que, si A es producto subdirecto de álgebras lineales finitas, resultará arquimedeana, por lo tanto, para cualquier $n \geq 2$, las álgebras de Lukasiewicz propias n-valentes son álgebras de Wajsberg arquimedeanas.

Vale la pena mencionar el resultado de A.Rodríguez (ver [51]) de que las álgebras de Wajsberg arquimedeanas no forman una variedad ya que no son cerradas por el producto, siendo $\mathbb{R}[0,1]^{\mathbb{N}}$ el contraejemplo canónico.

<u>Lema 3.61:</u> Sea A un álgebra de Wajsberg inyectiva, entonces el álgebra de Boole de sus elementos complementados, $\mathcal{B}(A)$ es inyectiva en la categoría de las álgebras de Boole y, por lo tanto, completa.

Demostración: Sea el diagrama

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & A \\ B_2 & \end{tikzcd}$$

donde B_1 y B_2 son álgebras de Boole, i es un monomorfismo y f e i son morfismos de álgebras de Wajsberg. Por inyectividad de A, existe una extensión $\bar{f}$ de f definida sobre B_2 tal que hace conmutativo al diagrama. Pero como las imágenes de los elementos complementados son complementadas, tenemos que podemos repetir el diagrama como

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, dashed, "f'"] \arrow[d, "i"'] & \mathcal{B}(A) \\ B_2 \arrow[ur, "\bar{f}'"'] & \end{tikzcd}$$

donde f' y $\bar{f}'$ son, respectivamente las corestricciones de f y $\bar{f}$ a $\mathcal{B}(A)$.

Se concluye, entonces, que $\mathcal{B}(A)$ resulta inyectiva y, por lo tanto, completa ∎

<u>Observación:</u> Teniendo en cuenta que las álgebras de Boole son, como álgebras de Wajsberg, arquimedeanas, el lema precedente vale igual restringiéndose a la categoría de las álgebras de Wajsberg arquimedeanas.

<u>Proposición 3.62:</u> El álgebra $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d)$ con X espacio booleano será un reticulado completo y *a fortiori* un álgebra de Wajsberg completa si y solamente si X es un espacio finito, es decir $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d) \simeq \mathbb{R}[0,1]^n$ para algún n natural, mayor que cero.

Demostración: La parte "si" es el teorema 3.31 ii).
Para la parte "sólo si", supongamos a X infinito, por definición espacio booleano cada punto tiene una base de entornos abiertos-cerrados y existe algún punto $a \in X$ cuya base resulta una sucesión estrictamente decreciente $X = X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ de abiertos-cerrados.
Sea ahora la sucesión $(f_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d)$ dada por $f_n(x) = \bigvee_{i=1}^{n}((1-1/n)\chi_{X_i})$.

$f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d)$ una función cualquiera tal que $f \geq f_n$ para todo n. Sean $r = \max\{f(X)\setminus 1\}$ (que existe ya que la imagen de f es finita) y $U = f^{-1}(1)$. Se ve sin dificultad que si $n > 1/(1-r)$ entonces $X_n \subseteq U$.
Sea $m = \min\{n \ / \ n > 1/(1-r)\}$. Definamos entonces una nueva función f' por

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \notin X_m \setminus X_{m+1} \\ 1-(1/m) \text{ si } x \in X_m \setminus X_{m+1} \end{cases}$$

observamos que es continua, menor estricta que f y mayora a la sucesión, de lo que resulta que $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d)$ no es completa como reticulado y, por lo tanto, tampoco como álgebra de Wajsberg ∎

De esta última proposición y del teorema 3.58 se concluye el siguiente:

<u>Corolario 3.63:</u> El álgebra $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d)$ con X espacio booleano será inyectiva si y solamente si X es un espacio finito.

<u>Proposición 3.64:</u> Sea A un conjunto cualquiera. El álgebra de Wajsberg $\mathbb{R}[0,1]^A$ es isomorfa a $\mathcal{C}(\mathcal{S}p(2^A),\mathbb{R}[0,1])$ (donde a $\mathbb{R}[0,1]$ se le da la topología usual).
Demostración: La igualdad conjuntista es un resultado clásico de M. Stone. Por lo observado al comienzo de la sección 3.3.2.1 sabemos que $\mathcal{C}(\mathcal{S}p(2^A),\mathbb{R}[0,1])$ admite una estructura de álgebra de Wajsberg, mientras que la correspondiente estructura en $\mathbb{R}[0,1]^A$ se define punto a punto. Todo lo que hay que probar, entonces, es que la biyección conjuntista es, en realidad, un homomorfismo de álgebras de Wajsberg:

Sea φ: $\mathcal{C}(\mathcal{S}p(2^A),\mathbb{R}[0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}[0,1]^A$ dada por la restricción (es la biyección canónica). No existe ninguna dificultad en verificar que φ preserva la implicación, la negación y el 1 y, en consecuencia, es un homomorfismo ∎

<u>Lema 3.65:</u> (ZF + TIP) Sea $A \simeq \mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1])$ o $A \simeq \mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d)$ con X un espacio booleano, entonces X es homeomorfo a $\mathcal{S}p(\mathcal{B}(A))$.
Demostración: Resulta de las identidades $\mathcal{B}(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d)) \simeq \mathcal{B}(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1])) =$ $= \mathcal{B}(\mathcal{C}(X,2)) = \mathcal{C}(X,2)$ y del teorema de representación de Stone (equivalente a

TIP) que afirma que para X booleano vale el homeomorfismo $X \approx \mathcal{S}p(\mathcal{C}(X,2))$ ∎

<u>Corolario 3.66:</u> Un álgebra de Wajsberg A es semisimple si y solamente si existe un espacio booleano X tal que A es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1])$.

Demostración: Si A es semisimple existe un conjunto de índices I tal que A es isomorfa a una subálgebra de $\mathbb{R}[0,1]^I = \mathcal{C}(\mathcal{S}p(2^I),\mathbb{R}[0,1])$.

Recíprocamente, si A es subálgebra de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1])$ tenemos las inyecciones $A \hookrightarrow \mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1]) \hookrightarrow \mathbb{R}[0,1]^{|X|}$ ∎

El corolario anterior contrasta con el resultado de A. Torrens (ver [57] y proposición 3.60) que dice que un álgebra de Wajsberg es arquimedeana si y solamente si existe un espacio booleano X tal que A es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d)$. Queda claro entonces que, si bien tanto las álgebras arquimedeanas como las semisimples se pueden representar como álgebras de funciones reales, la diferencia entre ambas clases de álgebras reside en la topología que se da a los reales.

<u>Proposición 3.67:</u> Un álgebra de Wajsberg arquimedeana A será inyectiva si y solamente si es de la forma $\mathbb{R}[0,1]^n$ ($n>0$).

Demostración: La parte "si" es la primera parte de 3.63.

Para la parte "sólo si", tenemos que por la proposición 3.60 A es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{C}(\mathcal{S}p(A),\mathbb{R}[0,1]_d)$ y, por ser inyectiva existe una retracción $f:\mathcal{C}(\mathcal{S}p(A),\mathbb{R}[0,1]_d) \to A$. Por otra parte sabemos que $\mathcal{B}(A) \approx \mathcal{C}(\mathcal{S}p(A),2) \approx \approx \mathcal{B}(\mathcal{C}(\mathcal{S}p(A),\mathbb{R}[0,1]_d))$ y, como los morfismos entre álgebras arquimedeanas quedan determinados por su restricción a los elementos booleanos, se concluye que el núcleo de f es $\{1\}$, por lo tanto A es isomorfa a $\mathcal{C}(\mathcal{S}p(A),\mathbb{R}[0,1]_d)$ que, por ser inyectiva y el corolario 3.63 resulta de la forma $\mathbb{R}[0,1]^n$ para algún n finito ∎

Veremos ahora que, restringiéndonos a la categoría de las álgebras de Wajsberg arquimedeanas, obtenemos un resultado de inyectividad en un todo análogo al correspondiente para álgebras de Lukasiewicz.

<u>Proposición 3.68:</u> (ZF + TES) Si Y es un espacio extremadamente disconexo enentonces el álgebra $\mathcal{C}(Y,\mathbb{R}[0,1]_d)$ es inyectiva en la categoría de las álgebras de Wajsberg arquimedeanas.

Demostración: Sean A y A' álgebras arquimedeanas y el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathscr{C}(Y,\mathbb{R}[0,1]_d) \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \\ A' & & \end{array}$$

donde g es un monomorfismo. Por la proposición 3.60 tenemos que existen espacios booleanos X y X' y familias de álgebras arquimedeanas lineales $(L_x)_{x\in X}$ y $(L'_x)_{x\in X'}$ tal que $A \simeq \Gamma(X,((L_x)_{x\in X})$ y $A' \simeq \Gamma(X',((L'_x)_{x\in X'})$. Tenemos entonces que f y g inducen funciones $\mathscr{Sp}(f)$ y $\mathscr{Sp}(g)$ según el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\mathscr{Sp}(f)} & Y \\ {\scriptstyle \mathscr{Sp}(g)}\uparrow & & \\ X' & & \end{array} \qquad \text{donde } \mathscr{Sp}(g) \text{ es suryectiva}$$

Por el teorema de extensión de Sikorski en su formulación dual ("en la categoría de los espacios de Boole son proyectivos los espacios extremadamente disconexos (los espacios booleanos correspondientes a álgebras de Boole completas)", (ver, por ejemplo [5], [34, p.103] y [48]) tenemos que existe $\varphi: Y \longrightarrow X'$ que hace conmutativo el diagrama.

Definimos entonces $\bar{f}:\Gamma(X',((L'_x)_{x\in X'}) \longrightarrow \mathscr{C}(Y,\mathbb{R}[0,1]_d)$

$$\sigma \longmapsto (x \longmapsto \sigma(\varphi(x)))$$ la que extiende a f y hace, por lo tanto, conmutativo al primer diagrama ■

<u>Proposición 3.69:</u> Sea A un álgebra inyectiva en la categoría de las álgebras de Wajsberg arquimedeanas. Existe entonces un espacio extremadamente disconexo X tal que $A \simeq \mathscr{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d)$.

Demostración: Primero, por la observación que sigue al lema 3.61 tenemos que $\mathscr{B}(A)$ es completa y por lo tanto $X = \mathscr{Sp}(\mathscr{B}(A))$ es extremadamente disconexo. Por lo tanto, existe una familia de álgebras arquimedeanas lineales $(L_x)_{x\in X}$ tal que $A \simeq \Gamma(X,((L_x)_{x\in X}) \hookrightarrow \mathscr{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d)$. Por ser A inyectiva, existe una retracción $f:\mathscr{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d) \longrightarrow \Gamma(X,((L_x)_{x\in X})$. Como $\mathscr{B}(f) = \mathrm{id}_B$ (donde $B = \mathscr{B}(\mathscr{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d)))$ tenemos que $\mathrm{Ker}(f) = \{1\}$, por lo que dicha retracción resulta un isomorfismo ■

<u>Corolario 3.70:</u> (ZF + TES) Los objetos inyectivos en la categoría de las álgebras de Wajsberg arquimedeanas son las álgebras de la forma $\mathscr{C}(X,\mathbb{R}[0,1]_d)$ donde X es extremadamente disconexo.

<u>Corolario 3.71:</u> (ZF + TES) La categoría de las álgebras arquimedeanas tiene suficientes inyectivos.

Demostración: Resulta inmediatamente de la proposición 3.60 ■

De los resultados anteriores podemos concluir que la generalización de Chang y Horn de las álgebras de Post finito-valentes es adecuada para la categoría de las álgebras arquimedeanas ya que se obtiene la siguiente serie de propiedades análogas:

α) Las álgebras de Post n-valentes (generalizadas) son el coproducto en $\mathcal{D}_{01}$ de un álgebra de Boole y una cadena de n elementos (arquimedeana);

β) Los objetos inyectivos en la categoría de las álgebras de Lukasiewicz n-valentes (de Wajsberg arquimedeanas) son las álgebras de Post n-valentes (generalizadas) tales que el conjunto de sus elementos complementados forman un álgebra de Boole completa (en el caso de las arquimedeanas se agrega que la cadena sea $\mathbb{R}[0,1]_d$);

γ) Las imágenes homomórficas de un álgebra de Lukasiewicz n-valente (de Wajsberg arquimedeana) quedan determinadas por las imágenes homomórficas de su conjunto de elementos complementados;

δ) Toda álgebra A de Lukasiewicz n-valente (de Wajsberg arquimedeana) tiene su cápsula inyectiva, a saber $\mathcal{C}(\mathcal{S}p(A),L_n)$ $(\mathcal{C}(\mathcal{S}p(A),\mathbb{R}[0,1]_d))$;

ε) La categoría de las álgebras de Lukasiewicz n-valentes (de Wajsberg arquimedeanas) tiene suficientes objetos inyectivos.

Esta última propiedad vale también para las álgebras semisimples según resulta de la siguiente

<u>Proposición 3.72:</u> La subcategoría de las álgebras de Wajsberg semisimples tiene suficientes inyectivos.

Demostración: Lo único que hay que observar es que las álgebras de Wajsberg inyectivas son siempre semisimples y que cualquier álgebra de Wajsberg semisemisimple (producto subdirecto de subálgebras de $\mathbb{R}[0,1]$) se puede sumergir en una potencia adecuada de copias de $\mathbb{R}[0,1]$, que es inyectiva ∎

Ahora, volviendo a las generalizaciones de las álgebras de Post, tenemos que en el caso finito-valente las topologías discreta y de los intervalos para la cadena L_n coinciden, por lo tanto, si C es una cadena infinita, habría dos maneras naturales de pensar el álgebra $\mathcal{C}(X,C)$ como generalización de $\mathcal{C}(X,L_n)$: la primera es la de Chang y Horn, quienes consideran la topología discreta sobre C, la otra es considerar la topología de los intervalos. Veremos que se puede llegar a esta generalización mediante una leve modificación de la construcción de Traczyk.

Sea C un álgebra de Wajsberg lineal, B un álgebra de Boole y sea $A = [B]^C$. Como C es un álgebra de De Morgan, tenemos que $[B]^C$ es isomorfa a $\mathcal{D}_{01}[C,B]$ (el conjunto de morfismos de reticulados distributivos acotados de C en B), conjunto isomorfo, por dualidad de Priestley a $\mathcal{C}(\mathcal{P}n(B),\mathcal{P}n(C))$ donde $\mathcal{P}n(D)$ es el espacio de Priestley del reticulado D.

Si notamos L_n al álgebra de Lukasiewicz lineal de n elementos tenemos que

$\mathcal{P}a(L_n)$ (L_{n-1},disc) (la cadena L_{n-1} dotada de la topología discreta). Entonces $\mathcal{P}a(L_n)$ puede ser dotada de una estructura de álgebra de Post (en particular la de L_{n-1}). Sin embargo, cuando C es un álgebra lineal infinita, la topología de $\mathcal{P}a(C)$ no es discreta, por lo que $[B]^C$ $\mathcal{C}(\mathcal{P}a(B),\mathcal{P}a(C))$ no es de la forma $\mathcal{C}(X,L_d)$. Entonces la generalización de Traczyk no sólo no coincide con la de Chang y Horn, sino que en general no admite una estructura de álgebra de Wajsberg. Sin embargo, restringiéndonos a cadenas arquimedeanas, podemos, modificando levemente la construcción de Traczyk, obtener álgebras de Wajsberg que, al igual que en los casos finito-valuados serán, cuando completas, exactamente las álgebras inyectivas.

<u>Observación:</u> Sea el álgebra de Wajsberg lineal $\mathbb{R}[0,1]$. Sobre su espacio de Priestley $\mathcal{P}a(\mathbb{R}[0,1])$ podemos definir una relación de equivalencia $\sim$ generada por la familia de pares de intervalos $\{([a,1],[a,1])\ a\in\mathbb{R}[0,1]\}$. La biyección conjuntista $\mathcal{P}a(\mathbb{R}[0,1])/_{\sim}\longrightarrow\mathbb{R}[0,1]$ se verifica inmediatamente ya que el conconjunto subyacente a $\mathcal{P}a(\mathbb{R}[0,1])$ es $\{(a,1],[a,1]:\ a\in\mathbb{R}[0,1]\}$. Como la topología de los intervalos sobre $\mathbb{R}[0,1]$ es más debil que la topología cociente $\mathcal{P}a(\mathbb{R}[0,1])/_{\sim}$ (una base de abiertos de esta ultima son los intervalos de la forma (a,b) y $(a,b]$ con $a<b\in\mathbb{R}[0,1]$), tenemos entonces que la composición las aplicaciones $\mathcal{P}a(\mathbb{R}[0,1])\xrightarrow{\pi}\mathcal{P}a(\mathbb{R}[0,1])/_{\sim}\xrightarrow{p}\mathbb{R}[0,1]$ es continua. (Esta composición puede pensarse como la forma canónica de mapear $\mathcal{P}a(\mathbb{R}[0,1])$ en $\mathbb{R}[0,1]$).

Podemos entonces considerar al conjunto $\mathcal{C}(\mathcal{P}a(B),\mathbb{R}[0,1])$ (donde $\mathbb{R}[0,1]$ está dotado de la topología de los intervalos y las operaciones definidas punto a punto) como el álgebra de Wajsberg obtenida a partir del conjunto $[B]^{\mathbb{R}[0,1]}=$ $\mathcal{C}(\mathcal{P}a(B),\mathcal{P}a(\mathbb{R}[0,1]))$ por la aplicación $p\circ\pi$. Es de hacer notar que el álgebra $\mathcal{C}(\mathcal{P}a(B),\mathbb{R}[0,1])$ resulta distinta del álgebra $\mathcal{C}(\mathcal{P}a(B),\mathbb{R}[0,1]_d)$ debido a que las topologías consideradas sobre $\mathbb{R}[0,1]$ son esencialmente distintas.

<u>Proposición 3.73:</u> El álgebra de Wajsberg $\mathcal{C}(\mathcal{P}a(B),\mathbb{R}[0,1])$, con B un álgebra de Boole completa, es el coproducto de los reticulados B y $\mathbb{R}[0,1]$ en la categoría cuyos objetos son los reticulados distributivos completos y cuyos morfismos son los morfismos de reticulados que respetan supremos arbitrarios.

Demostración: De forma análoga a la demostración de que el álgebra de Post $\mathcal{C}(\mathcal{P}a(B),L_n)$ es el coproducto de B y L_n (ver por ejemplo [2]) se observa que B y $\mathbb{R}[0,1]$ son subálgebras de $\mathcal{C}(\mathcal{P}a(B),\mathbb{R}[0,1])$. Como todo elemento de $\mathcal{C}(\mathcal{P}a(B),\mathbb{R}[0,1])$ se puede escribir como límite de funciones de rango finito, es decir de la forma $\bigvee_n b_i\wedge c_i$ $(n<\omega)$, con $b_i\in B$ y $c_i\in\mathbb{R}[0,1]$. Entonces, si existe un reticulado A y morfismos completos f y g de B y $\mathbb{R}[0,1]$ respectivamente en A, definimos $h: \mathcal{C}(\mathcal{P}\mathcal{n}(B),\mathbb{R}[0,1]) \longrightarrow A$ por $h(\lim_n \vee b_i \wedge c_i) = \lim_n \vee f(b_i) \wedge g(c_i)$. De lo que resulta que $\mathcal{C}(\mathcal{P}\mathcal{n}(B),\mathbb{R}[0,1])$ es el coproducto en la categoria ∎

De la proposición anterior rescatamos para esta generalización de las álgebras de Post una de las propiedades que tenian en el caso finito-valente.

La siguiente proposición permitirá caracterizar, en el marco axiomático ZF + TES las álgebras inyectivas en la categoria de las álgebras de Wajsberg.

<u>Proposición 3.74:</u> (ZF + TES) Si X es un espacio extremadamente disconexo, enentonces el álgebra de Wajsberg $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1])$ es inyectiva.

Demostración: Sea cual fuere X tenemos la inmersión canónica $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1]) \hookrightarrow \mathbb{R}[0,1]^X$, lo que induce un monomorfismo de álgebras de Boole $\varphi: \mathcal{D}_{01}(X) \rightarrowtail 2^X$. Como TES implica que $\mathcal{D}_{01}(X)$ es inyectiva en la categoria de las álgebras de Boole, existe entonces una retracción φ' de 2^X en $\mathcal{D}_{01}(X)$ de lo que tenemos, por dualidad, la siguiente sucesión exacta corta:

$$X \xrightarrow{\mathcal{S}p(\varphi')} \mathcal{S}p(2^X) \xrightarrow{\mathcal{S}p(\varphi)} X \quad \text{que define la sucesión}$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1]) \rightarrowtail \mathcal{C}(\mathcal{S}p(2^X),\mathbb{R}[0,1]) \twoheadrightarrow \mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1]) \\ f \longmapsto (x \longmapsto f(\mathcal{S}p(\varphi)(x))) \\ \qquad\qquad\qquad g \longmapsto (x \longmapsto g(\mathcal{S}p(\varphi')(x))). \end{array}$$

De lo que resulta que $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1])$ es retracto de $\mathcal{C}(\mathcal{S}p(2^X),\mathbb{R}[0,1])$, a su vez isomorfa a $\mathbb{R}[0,1]^X$ por la proposición 3.64. Entonces, por 3.31, ii) que vale en ZF + TIP (implicado por ZF + TES), resulta que $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}[0,1])$ es inyectiva ∎

<u>Lema 3.75:</u> Sean X un espacio topológico y C un álgebra de Wajsberg lineal. El algebra $\mathcal{C}(X,C)$, donde la topologia de C es la discreta o la de los intervalos, es divisible si y solamente si C lo es.

Demostración: Sea C divisible, definiendo para cada función $f \in \mathcal{C}(X,C)$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = (f(x))_n = (f(x))/n$ (enel sentido de la división del grupo linealmente ordenado cuyo segmento unitario coincide con C) se observa sin dificultad que las f_n cumplen las propiedades de la definición 3.55. Tenemos, además, que $f(x) = n \cdot f_n(x) = nf_n(x)$. Veamos que cada f_n es continua:

Si la topologia de C es la discreta la demostración es inmediata.

Supongamos entonces a C dotada de la topologia de los intervalos, una subbase de abiertos será $\{[0,a),(a,1]\}_{0<a<1}$, veamos sus imágenes inversas: $f_n^{-1}([0,a)) = \{x \in X \ / \ 0 \leq f_n(x) < a\} = \{x \in X \ / \ 0 \leq (f(x))/n < a\}$, resultando dos casos posibles: i) $n \cdot a < 1$, entonces $f_n^{-1}([0,a)) = f^{-1}([0,n \cdot a))$ y

ii) $n \cdot a = 1$, entonces $f_n^{-1}([0,a)) = f^{-1}([0,1]) = X$, siendo, en ambos casos, tal imagen inversa, un abierto de X.

$f_n^{-1}((a,1]) = \{x \in X \ / \ a < f_n(x) \leq 1\} = \{x \in X \ / \ a < (f(x))/n \leq 1\}$, resultando nuevamente dos casos posibles: i) $n\cdot a < 1$, entonces $f_n^{-1}((a,1]) = f_n^{-1}((n\cdot a,1])$

ii) $n\cdot a = 1$, entonces $f_n^{-1}((a,1]) = \emptyset$, con lo que concluimos que la imagen inversa de cualquier abierto de la subbase es un abierto lo que implica que f_n es continua y, por lo tanto, pertenece a $\mathscr{C}(X,C)$.

Para la recíproca, como C es isomorfa a la subálgebra de las contantes de $\mathscr{C}(X,C)$ y para cada $f \in \mathscr{C}(X,C)$ y $n \in \mathbb{N}$, si f es constante, entonces f_n también lo es, se concluye que C es una subálgebra divisible ■

En [25, Teo.23, Cor.1] A.Rodríguez demuestra que un álgebra de Wajsberg es semisimple si y sólo si su único infinitesimal es el cero. Este resultado permitirá demostrar el siguiente lema debido a R.Cignoli:

Lema 3.76: Toda álgebra de Wajsberg completa es semisimple.

Demostración: Sea A completa, $a \in A$, $a \neq 0$ y sea $b = \bigvee_{\omega}(na)$, como por 3.45 vale que $na \leq \neg a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $b \leq \neg a \leq 1$. Como $(n+1)a \leq b$, se tiene que $b \longrightarrow a \leq (n+1)a \longrightarrow a = (\neg(na) \longrightarrow a) \longrightarrow a = \neg(na) \vee a = \neg(na \wedge \neg a) = \neg na$. Por lo tanto $na \leq \neg(b \longrightarrow a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, $\neg b = b \longrightarrow 0 \leq b \longrightarrow a$ o, lo que es lo mismo, $\neg(b \longrightarrow a) \leq b$. Por ser b el supremo del conjunto $\{na \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ se cumple entonces que $\neg(b \longrightarrow a) = b$ y, en particular $b \leq \neg(b \longrightarrow a)$ o, lo que es lo mismo $b \longrightarrow \neg(b \longrightarrow a) = 1$. Pero $b \longrightarrow \neg(b \longrightarrow a) = (b \longrightarrow a) \longrightarrow \neg b = (\neg a \longrightarrow \neg b) \longrightarrow \neg b = \neg a \vee \neg b = \neg(a \wedge b) = \neg a$. Con lo que concluimos que $\neg a = 1$ o sea $a = 0$ y por lo tanto A no tiene elementos infinitesimales no nulos, por lo que resulta semisimple ■

Como corolarios inmediato del lema anterior resulta que toda álgebra subdirectamente irreducible y completa es simple y que toda álgebra completa es isomorfa a una subálgebra de un álgebra de funciones con valores en $\mathbb{R}[0,1]$.

La siguiente serie de resultados llevará a la demostración de un teorema análogo al de Stone-Weierstrass para álgebras de Wajsberg:

Lema 3.77: Sean A una subálgebra de $\mathscr{C}(X,\mathbb{R}[0,1])$ para X un espacio extremadamente disconexo, $B \subseteq A$ un álgebra de Boole completa que es subálgebra (de Wajsberg) de A. Si A es completa y contiene a todas las constantes, entonces $\mathscr{C}(\mathscr{S}p(B),\mathbb{R}[0,1])$ es isomorfa a una subálgebra de A.

Demostración: Tenemos que $\mathscr{C}(\mathscr{S}p(B),2) \simeq B \subseteq A$, lo que induce una inyección φ de $\mathscr{C}(\mathscr{S}p(B),2)$ en A. Sea $f \in \mathscr{C}(\mathscr{S}p(B),\mathbb{R}[0,1]_d)$, como $\mathrm{Im}(f) = \{r_1,\dots,r_n\} \subseteq [0,1]$, tenemos $f = \bigvee_{i=1}^{n} r_i \wedge \varphi(f_i)$ donde definiendo $X_i = f^{-1}(r_i)$, cada $f_i = \chi_{X_i}$ pertenece a B, y cada r_i (pensada como función constante) pertenece a A, lo que induce una inyección de $\mathscr{C}(\mathscr{S}p(B),\mathbb{R}[0,1]_d)$ en A.

Sea ahora $f \in \mathscr{C}(\mathscr{S}p(B),\mathbb{R}[0,1])$. Observemos que si $[a,b] \subseteq \mathbb{R}[0,1]$, $f^{-1}([a,b])$ es abierto-cerrado y $c \in (a,b)$, entonces, notando $X_1 = (f^{-1}([a,c)))^-$ $X_2 = (f^{-1}((c,b]))^-$ y $X_3 = (f^{-1}([a,b]))\setminus(X_1 \cup X_2)$, como $\mathscr{S}p(B)$ es extremadamente disconexo, tenemos que podemos escribir a $(f^{-1}([a,b]))$ como la unión disjunta de los conjuntos X_1, X_2 y X_3 (el último de ellos, eventualmente vacío). (*)

Construyamos ahora inductivamente la sucesión de particiones $(P_i)_{i\in\omega}$ de $\mathscr{S}p(B)$ con las siguientes propiedades:

i) Si $C^i_j \in P_i$ entonces es un abierto-cerrado no vacío;

ii) Dados C^i_j, $C^i_k \in P_i$, si $j \neq k$, entonces los intervalos $I^i_j = [\text{mín } C^i_j, \text{máx } C^i_j]$ y $I^i_k = [\text{mín } C^i_k, \text{máx } C^i_k]$ coinciden a lo sumo en un extremo.

- $P_1 = \{\mathscr{S}p(B)\}$ $(C^1_1 = \mathscr{S}p(B))$;
- Sea P_i una partición que cumple con las hipótesis, dado $C^i_j \in P_i$ tal que el intervalo I^i_j tiene más de un elemento, sea c_j el punto medio de I^i_j. Partimos entonces a C^i_j en dos o tres abiertos-cerrados disjuntos según lo visto en (*). P_{i+1} estará formada por todos los nuevos abiertos-cerrados así definidos más los eventuales $C^i_j \in P_i$ tales que I^i_j tiene un solo elemento.

Definamos ahora dos sucesiones $(f_i)_{i\in\omega}, (f'_i)_{i\in\omega} \subseteq \mathscr{C}(\mathscr{S}p(B),\mathbb{R}[0,1]_d)$ dadas por $f_i(x) = \text{mín}\{I^i_j \ / \ x \in C^i_j\}$ y $f'_i(x) = \text{máx}\{I^i_j \ / \ x \in C^i_j\}$. Se verifica sin dificultad que $f_i(x) \leq f(x) \leq f'_i(x)$ $(x \in \mathscr{S}p(B))$ y que para cada $x \in \mathscr{S}p(B)$, $\inf_\omega\{f'_i(x) - f_i(x)\} = 0$, lo que implica, por completitud, que $\vee f_i = \wedge f'_i = f \in A$. Concluimos entonces que existe una inmersión $\mathscr{C}(\mathscr{S}p(B),\mathbb{R}[0,1]) \hookrightarrow A$ ∎

<u>Corolario 3.78:</u> Sean A un álgebra completa y divisible, $B \subseteq A$ un álgebra de Boole completa que es subálgebra (de Wajsberg) de A. Si A es completa y divisible, entonces $\mathscr{C}(\mathscr{S}p(B),\mathbb{R}[0,1])$ es isomorfa a una subálgebra de A.

Demostración: Por ser A completa tenemos que, del lema 3.76 y sin perder generalidad, A se puede considerar como subálgebra de $\mathscr{C}(X,\mathbb{R}[0,1])$, para un X extremadamente disconexo. Por divisibilidad de A sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen en el álgebra funciones 1_n que cumplen con las condiciones de la definición 3.55. Es sencillo verificar que valen las identidades $n\cdot 1_n = n1_n = 1$ (donde el segundo producto se considera en el sentido del grupo $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$). Tenemos entonces que 1_n coincide con la función constantemente igual a $1/n$. De aquí podemos concluir que, para cada número $r \in \mathbb{Q}[0,1]$, la función constantemente igual a r pertenece a A. Usando ahora que toda función constante a un real puede pensarse como el supremo y el ínfimo de sucesiones monótonas de funciones constantes a racionales, vale por completitud de A, que todas las constantes están en dicha álgebra, por lo que cabe aplicar el teorema 3.77 ∎

Lema 3.79: Sean A un álgebra completa, subálgebra de $\mathbb{R}[0,1]^I$ que contiene a todas las constantes, $B \subseteq A$ un álgebra de Boole que es subálgebra de A y $f \in A$ tal que $f \notin \mathscr{C}(\mathscr{S}p(B),\mathbb{R}[0,1])$, entonces $B \neq \mathscr{B}(A)$.

Demostración: Como $B \subseteq \mathscr{B}(A) \subseteq 2^I$, por el teorema 3.77 vale la contención $\mathscr{C}(\mathscr{S}p(B),\mathbb{R}[0,1]) \subseteq A \subseteq \mathscr{C}(\mathscr{S}p(2^I),\mathbb{R}[0,1]) \simeq \mathbb{R}[0,1]^I$ y, por dualidad, existe una suryección continua $\varphi: \mathscr{S}p(2^I) \longrightarrow \mathscr{S}p(B)$.

Sea entonces $f \in A \setminus \mathscr{C}(\mathscr{S}p(B),\mathbb{R}[0,1])$, existen por lo tanto un $x \in \mathscr{S}p(B)$ y elementos $y_1, y_2 \in \varphi^{-1}(x)$ tal que $f(y_1) \neq f(y_2)$. Veamos que existe $f' \in A$ tal que $f'(y_1) = 0$ y $f'(y_2) > 0$ (o $f'(y_2) = 0$ y $f'(y_1) > 0$): podemos suponer entonces que $0 < f(y_1) < f(y_2) < 1$. Construyamos ahora las sucesiones $(a_i)_{i\in\omega}$, $(b_i)_{i\in\omega}$ definidas recursivamente por:
- $a_0 = f(y_1)$; $b_0 = f(y_2)$;
- Dados a_i y b_i, si $a_i > 0$ sean $n_i = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} \,/\, na_i < 1\}$, $a_{i+1} = \text{máx}\{0, 1-n_i b_i\}$ y $b_{i+1} = \text{máx}\{0, 1-n_i a_i\}$ y si $a_i = 0$, entonces $a_{i+1} = 0$ y $b_{i+1} = b_i$.

Es fácil verificar que $a_i < b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Además, si $a_i > 0$ tenemos que $a_{i+1} < a_i$, ya que, si $a_{i+1} \geq a_i$, como $n_i a_i < n_i b_i$ y $a_i \leq a_{i+1} = 1-n_i b_i$ se tiene que $n_i a_i + a_i = (n_i+1)a_i < 1$, contradiciendo la maximalidad de n_i. Además, si $a_i > 0$ entonces $b_{i+1}-a_{i+1} \geq b_i - a_i$ ya que $b_{i+1}-a_{i+1} = 1-n_i a_i - 1 + n_i b_i = n_i(b_i - a_i)$. Por último, sabemos que la sucesión $(a_i)_{i\in\omega}$, tiene punto de acumulación $\varepsilon \geq 0$. Si $\varepsilon > 0$, sean $n_\varepsilon = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} \,/\, n\varepsilon < 1\}$ y sea j el mínimo i tal que $n_i = n_\varepsilon$ (el que existe por ser ε punto de acumulación). Sabemos que $\varepsilon < a_{j+1} = 1-n_j b_j$ y además $n_j\varepsilon < n_j b_j$, por lo que $(n_j+1)\varepsilon < 1$, lo que contradice la maximalidad de $n_\varepsilon = n_j$. Por lo tanto el límite de la sucesión $(a_i)_{i\in\omega}$ es el cero. Más aún, existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $a_i = 0$: sea $0 < r = b_0 - a_0$ y sea n_j el primer n_i mayor que $1/r$, entonces $n_j b_j \geq n_j(a_j + r) = n_j a_j + n_j r > (n_j + 1)a_j \geq 1$, lo que implica que $a_{j+1} = \text{máx}\{0, 1-n_j b_j\} = 0$. Definiendo la sucesión finita $(f_i)_{0\leq i\leq j} \subseteq A$ dada por $f_0 = f$ y $f_{i+1} = 1 - f_i$, y llamando $f' = \wedge\{f_i \,/\, 0 \leq i \leq j$ e i es par$\}$, tenemos que $0 = f'(y_1) < f'(y_2)$. Sea la sucesión $(g_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq A$ donde $g_i = i\cdot f'$. Por completitud de A existe un supremo h. Veamos que h debe ser un elemento booleano (es decir que $h(\mathscr{S}p(2^I)) \subseteq 2$). Sabemos que si $f'(y) > 0$ entonces $h(y) \doteq 1$ y, evidentemente, si $f'(y) = 0$ entonces $h(y) \geq 0$. De esto resulta que $g_i \leq h{*}h \leq h$ $(i \in \mathbb{N})$, lo que implica que $h = h{*}h$, ya que h era la mínima cota superior de las g_i, de lo que se sigue que h es booleano. Observemos que el elemento $n_0 \cdot f$ es mayor que todos los g_i, por lo que $h(y) \leq n_0 \cdot f(y)$ para todo $y \in \mathscr{S}p(2^I)$, por lo que $h(y_1) = 0$. Como, por otro lado $h(y_2) = 1$, vale que h no puede considerarse un elemento de $\mathscr{C}(\mathscr{S}p(B),\mathbb{R}[0,1])$, con lo que concluimos que $h \in \mathscr{B}(A) \setminus B$ ∎

El siguiente lema resulta de reformular, en terminología de álgebras de Wajsberg, el resultado expuesto en [16] para álgebras de Post.

Lema 3.80: Sean X un espacio booleano y C un álgebra de Wajsberg lineal y finita. El álgebra $\mathscr{C}(X,C)$ será completa si y solamente si X es extremadamente disconexo.

El resultado análogo para el caso infinito se obtiene de los lemas anteriores y del siguiente resultado clásico.

Lema 3.81: Sean X un espacio booleano extremadamente disconexo, entonces el álgebra $\mathscr{C}(X,\mathbb{R}[0,1])$ es completa.

La siguiente proposición es el análogo al teorema de Stone-Weierstrass:

Proposición 3.82: Sea A un álgebra divisible o una subálgebra de $\mathscr{C}(X,\mathbb{R}[0,1])$ con X extremadamente disconexo que contiene todas las constantes. Si A es completa, entonces es isomorfa a $\mathscr{C}(\mathscr{S}p(\mathscr{B}(A)),\mathbb{R}[0,1])$.

Demostración: Por el corolario 3.78 sabemos que $\mathscr{C}(\mathscr{S}p(\mathscr{B}(A)),\mathbb{R}[0,1]) \leq A$.
Para la otra contención, por el lema 3.79 tenemos que la mayor álgebra divisible (o que contiene las constantes) y completa cuyo álgebra de elementos complementados es isomorfa a $\mathscr{B}(A)$ es $\mathscr{C}(\mathscr{S}p(\mathscr{B}(A)),\mathbb{R}[0,1])$ que por lo tanto coincide con A ∎

Corolario 3.83: Sean X un espacio booleano y C un álgebra de Wajsberg lineal. El álgebra $\mathscr{C}(X,C)$ es divisible y completa si y solamente si $C \simeq \mathbb{R}[0,1]$ y X es extremadamente disconexo.

Corolario 3.84: Un álgebra de Wajsberg A es divisible y completa si y solamente si es isomorfa a $\mathscr{C}(X,\mathbb{R}[0,1])$ donde X es extremadamente disconexo.

Tenemos entonces que esta segunda generalización de las álgebras de Post cumple, para el caso semisimple las propiedades análogas a las α), β) y ε) de la observación posterior al corolario 3.71 del caso arquimedeano. Sin embargo para el caso semisimple no arquimedeano no se cumplen las propiedades γ) y δ). En consecuencia podemos concluir que ambas generalizaciones de las álgebras de Post finito-valentes resultan adecuadas para el estudio de las propiedades de inyectividad en las álgebras de Wajsberg.

De los resultados anteriores se obtiene el siguiente

Corolario 3.85: (ZF + TES) Sea A un álgebra de Wajsberg, son equivalentes

i) A es inyectiva;

ii) A es divisible y completa;

iii) $A \simeq \mathscr{C}(X,\mathbb{R}[0,1])$ con X extremadamente disc.

Corolario 3.86: El teorema de extensión de Sikorski es equivalente a la afirmación de que las álgebras de Wajsberg completas y divisibles son inyectivas.

Demostración: Acabamos de ver en 3.85 que TES implica que las álgebras $\mathscr{C}(X,\mathbb{R}[0,1])$, con X extremadamente disconexo, son las divisibles y completas.

Para la recíproca, sean B, B', D álgebras de Boole, tal que B es subálgebra de B', D es completa y existe un morfismo $f: B \longrightarrow D$. Tenemos el álgebra de Wajsberg inducida $A = \mathcal{C}(\mathcal{S}p(D), \mathbb{R}[0,1])$. Por la proposición 3.65 $\mathcal{B}(A) \simeq D$, por lo que podemos considerar que el codominio de f es A. Como A es divisible y completa, resulta inyectiva por hipótesis, por lo que existe un morfismo $\bar{f}: B' \longrightarrow D$ que extiende a f. Como la imagen de un elemento complementado es complementada, podemos pensar a $\bar{f}$ como su correstricción a D, con lo que probamos que el álgebra de Boole completa D es inyectiva, es decir que vale TES ∎

3.4 Resumen y conclusiones

De lo visto a lo largo de este capítulo se puede concluir que, si bien fuera del caso de las álgebras de Boole, es decir tanto para las álgebras de Hilbert como las de Wajsberg (incluyendo las de Lukasiewicz propias n-valentes), no todo sistema deductivo irreducible es maximal, las afirmaciones de la existencia de sistemas deductivos irreducibles y maximales son equivalentes (en ZF) para las varias clases de álgebras tratadas, lo que se puede enunciar de la siguiente manera:

Teorema 3.87: En ZF son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) En toda álgebra de Boole todo filtro propio se puede extender a un filtro primo;

ii) En toda álgebra de Boole todo filtro propio se puede extender a un ultrafiltro;

iii) En toda álgebra de Boole todo ideal propio se puede extender a un ideal primo;

iv) En toda álgebra de Boole todo ideal propio se puede extender a un ideal máximal;

v) En toda álgebra deductiva con cero todo sistema deductivo propio puede extender a uno maximal;

vi) En toda álgebra deductiva con cero todo sistema deductivo propio se puede extender a uno irreducible;

vii) En toda álgebra de Hilbert con cero todo sistema deductivo propio se puede extender a uno maximal;

viii) En toda álgebra de Hilbert con cero todo sistema deductivo propio se puede extender a uno irreducible;

xi) En toda álgebra de Heyting todo sistema deductivo propio se puede extender a uno maximal;

x) En toda álgebra de Heyting todo sistema deductivo propio se puede extender a uno irreducible;

xi) En toda álgebra de Wajsberg todo filtro propio se puede extender a un filtro primo;

xii) En toda álgebra de Wajsberg todo filtro propio se puede extender a un ultrafiltro;

En toda álgebra de Wajsberg todo ideal propio se puede extender a un ideal primo;

En toda álgebra de Wajsberg todo ideal propio se puede extender a un ideal maximal;

xv) En toda álgebra de Wajsberg todo sistema deductivo propio se puede extender a uno maximal;

En toda álgebra de Wajsberg todo sistema deductivo propio se puede extender a uno irreducible;

xvii) En toda álgebra de Lukasiewicz propia n-valente todo filtro propio se puede extender a un filtro primo;

xviii) En toda álgebra de Lukasiewicz propia n-valente todo filtro propio se puede extender a un ultrafiltro;

xix) En toda álgebra de Lukasiewicz propia n-valente todo ideal propio se puede extender a un ideal primo;

xx) En toda álgebra de Lukasiewicz propia n-valente todo ideal propio se puede extender a un ideal maximal;

xxi) En toda álgebra de Lukasiewicz propia n-valente todo sistema deductivo propio se puede extender a uno maximal;

xxii) En toda álgebra de Lukasiewicz propia n-valente todo sistema deductivo propio se puede extender a uno irreducible;

xxiii) Las álgebras de Boole completas y atómicas son inyectivas en las categorías de

a) álgebras de Boole;
b) álgebras de Heyting;
c) álgebras de Hilbert con cero;
d) álgebras deductivas con cero

Mientras que los análogos de los enunciados xvii),...,xxii), para las álgebras de Post n-valentes resultan implicados (en ZF) por TIP.

De la misma manera se pueden caracterizar con precisión los objetos inyectivos en las categorías estudiadas, comprobándose que el teorema que la dicha caracterización (TES en el caso de las álgebras de Boole) es equivalente en cada una de las categorías y puede enunciarse de la siguiente manera:

<u>Teorema 3.88:</u> En ZF son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) Las álgebras de Boole completas son los objetos inyectivos en la categorías de

a) álgebras de Boole (TES);
b) álgebras de Heyting;
c) álgebras de Hilbert con cero;
d) álgebras deductivas con cero;

ii) Los objetos inyectivos en la categoría de las álgebras de Lukasiewicz n-valentes (para todo $n > 2$) son las álgebras de Post n-valentes completas;

iii) Los objetos inyectivos en la categoría de las álgebras de Lukasiewicz propias n-valentes (para todo $n > 2$) son las álgebras de Post n-valentes completas;

iv) Los objetos inyectivos en la categoría de las álgebras de Wajsberg son las álgebras de Post generalizadas completas.

Mientras que el enunciado análogo a ii) para las álgebras de Post n-valentes (para todo $n \geq 3$) es implicado por TES.

De lo anterior podemos concluir que para las lógicas implicativas con negacion vale:

1) Para las lógicas (de orden cero) intuicionista y multivalente (finito-valente o infinito-valente), la afirmación de la existencia (en ZF) de teorías irreducibles y/o maximales para cualquiera de ellas es equivalente a la afirmación análoga para cualquier otra.

2) La inyectividad de las lógicas (de orden cero) infinitarias es equivalente entre los casos clásico, intuicionista e infinito-valente. Con la propiedad adicional que las lógicas inyectivas intuicionistas resultan ser clásicas infinitarias y que las inyectivas infinito-valentes tienen siempre una sublógica clásica infinitaria.

4 REFERENCIAS

[1] Baesiek,P.D., *Extension of Boolean homomorphisms with bounding semimorphisms*, Journal für Mathematik, Band 253 (1971), 24-27.

[2] Balbes,R. y Dwinger,P., *Distributive lattices*, University of Missouri Press, Columbia, Mo., 1974.

[3] Balbes,R. y Horn,A., *Injective and projective Heyting algebras*, Trans. A.M.S., 148 (1970), 549-559.

[4] Bell,J.L., *On the strength of the Sikorski Extension Theorem for Boolean algebras*, The Journal for Symbolic Logic, 48 3 (1983), 841-845.

[5] Bell,J.L., *Some propositions equivalent to the Sikorski Extension Theorem for Boolean algebras*, por aparecer en Fund. Math.

[6] Bell,J.L. y Fremlin,D.H., *The maximal ideal theorem for lattices of sets*, Bull. London Math. Soc., 4 (1972), 1-2

[7] Bernays,P. y Fraenkel,A.A., *Axiomatic set theory*, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1958

[8] Bigard,A., Keimel,K. y Wolfenstein,S., *Groupes et anneaux reticulés*, Lecture Notes on Mathematics, vol. 608, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[9] Blok,W.J. y Pigozzi,D., *A characterization of algebraizable logics*, preprint (1985).

[10] Burris,S. y Sankappanavar,H.P., *A course in universal algebra*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1981.

[11] Chang,C.C., *Algebraic analysis of many-valued logics*, Trans. A.M.S., 88 (1958), 467-490.

[12] Chang,C.C., *A new proof of the completeness of the Lukasiewicz axioms*, Trans. A.M.S., 93 (1959), 74-80.

[13] Chang,C.C. y Horn,A., *Prime ideal characterization of generalized Post algebras*, Proc. Symp. in Pure Math., vol II (1961), 43-48.

[14] Cignoli,R., *Moisil algebras*, Notas de Lógica Matemática, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 27 (1970).

[15] Cignoli,R., *A Hahn-Banach theorem for distributive lattices*, Revista U.M.A., 25 (1971), 335-342.

[16] Cignoli,R., *Representation of Lukasiewicz and Post algebras by continuous functions*, Col.Math., XXIV (1972), 127-138

[17] Cignoli,R., *The lattice of global sections of sheaves of chains over Boolean spaces*, Algebra Universalis, 8 (1978), 357-373.

[18] Cignoli,R., *Some algebraic aspects of MV-logics*, Proc. of the third Braz. Conf. on Math. logic, 1980, 49-69.

[19] Cignoli,R., *Proper n-valued Lukasiewicz algebras as S-algebras of Lukasiewicz n-valued propositional calculi*, Studia Logica, XLI (1982), 3-16.

[20] Cotlar,M., *Sobre la teoría algebraica de la medida y el teorema de Hahn-Banach*, Revista U.M.A., XXVII (1955), 9-24.

[21] Cotlar,M. y Cignoli,R., *An Introduction to Functional Analysis*, North Holland Publish.Co., 1974.

Diego,A., *Sobre álgebras de Hilbert* (tesis), Notas de Lógica Matemática, 12 (1965), Instituto de Matemática, UNS, Bahía Blanca.

[23] Dwinger,P., *Generalized Post algebras*, Bull. Acad. Pol. Sc., vol. XVII 7 (1968), 559-565.

[24] Dwinger,P., *Ideals in generalized Post algebras*, Bull. Acad. Pol. Sc., vol. XVII 8 (1968), 483-486.

[25] Font,J., Rodríguez,A. y Torrens,A., *Wajsberg algebras*, Stochastica, vol. VIII 1 (1984), 5-31.

[26] Gluschankof,D., *Sobre el axioma de elección y algunos resultados del análisis funcional*, (trabajo de seminario), Buenos Aires, julio 1985.

[27] Gluschankof,D., *Objetos inyectivos y sistemas deductivos en álgebras deductivas*, comunicación presentada en la XXXVI reunión anual UMA, 1986.

[28] Gluschankof,D., *Objetos inyectivos en la categoría de las álgebras de Wajsberg*, comunicación presentada en la XXXVII reunión anual UMA, 1987.

[29] Gluschankof,D., *Sobre las generalizaciones de las álgebras de Post*, comunicación presentada en la XXXVII reunión anual UMA, 1987.

[30] Gluschankof,D. y Martinez,N.G., *El teorema del filtro implicativo maximal en álgebras de Wajsberg*, comunicación presentada en la XXXVII reunión anual UMA, 1987.

[31] Gluschankof,D. y Tilli,M., *Un método heurístico de extensión de morfismos sin usar el axioma de elección*, comunicación presentada en la XXXV reunión anual UMA, 1985.

[32] Gluschankof,D.y Tilli,M., *El teorema de extensión de Sikorski y la integral booleana*, comunicación presentada en la XXXVI reunión anual UMA, 1986.

[33] Halpern,J.D. y Levy,A., *The Boolean Prime Ideal Theorem does not imply the Axiom of Choice*, A.M.S. Proc. in Axiomatic Set Theory (1971), 83-134.

[34] Johnstone,P.T., *Stone Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[35] Klimovsky,G., *El teorema de Zorn y la existencia de filtros e ideales maximales en los reticulados distributivos*, Revista U.M.A., 18 (1958), 160-164.

[36] Lacava,F., *Alcune proprieta delle L-algebre e delle L-algebre esistenzialmente chiuse*, Boll.Unione Mat.Italiana, (5) 16A (1979), 360-366

[37] Lukasiewicz,J., *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalkuls*, C.R. Soc. Sc. et Let., Varsovie, 23 (193), 153-178.

[38] Luxemburg,W.A.J., *A remark on Sikorski's extension theorem for homomorphisms in the theory of Boolean algebras*, Fund. Math., LV (1964), 239-247.

[39] Luxemburg,W.A.J., *Reduced powers of the real number system and equivalents of the Hahn-Banach extension theorem*, Int. Symp. of the Appl. of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability, 123-137.

[40] Martinez,N.G., *Priestley duality for Wajsberg algebras*, (Enviado para su publicación).

[41] Monteiro,A., *Algebra de la lógica*, Notas inéditas de cursos dictados en la UNS, 1960-1961.

[42] Monteiro,A., *Genéralization d'un théorème de R.Sikorski sur les algèbres de Boole*, Bull. Sc. Math., 2da. serie, 89 (1965), 65-74.

[43] Monteiro,A., *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques, I-II*, Notas de Lógica Matemática, 29-30 (1974) UNS, Bahía Blanca.

[44] Monteiro,A., *Sur les algèbres de Heyting symétriques*, Portugaliae Mathematica, vol. 39, fasc. 1-4 (1980).

[45] Mundici,D., *Interpretation of AF C*-algebras in Lukasiewicz sentential calculus*, J. Func.An., 65 (1986), 15-63.

[46] Pincus,D., *Independence of the Prime Ideal Theorem from the Hahn-Banach theorem*, Bull. A.M.S., 78 (1972), 766-770.

[47] Post,E.L., *Introduction to a general theory of elementary propositions*, Am. J. of Math., 43 (1921), 165-185.

[48] Priestley,H., *Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices*, Proc.London Math.Soc. (3) 24 (1972), 507-530.

[49] Rasiowa,H., *An algebraic approach to non-classical logics*, North Holland, Amsterdam-London, 1974.

[50] Rasiowa,H. y Sikorski,R., *The Mathematics of Metamathematics*, Monografie Matematyczne, vol. 41, Varsovia, 1963.

[51] Rodriguez,A., *Un estudio algebraico de los cálculos proposicionales de Lukasiewicz* (tesis), Universidad de Barcelona, 1980.

[52] Romanowska,A. y Traczyk,T., *Commutative BCK-algebras. Subdirectly irreducible algebras and varieties*, Math.Japonica, 27 1 (1982), 35-48.

[53] Rubin,H. y Rubin,J.E., *Equivalents of the Axiom of Choice II*, North Holland, Amsterdam, 1985.

[54] Sikorski,R., *A theorem on extension of homomorphisms*, Ann. Soc. Pol. Math., 21 (1948), 332-335.

[55] Sikorski,R., *Boolean algebras*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Naeva York, 1964.

[56] Tarski,A., *Grundzüge des Systemenkalkulus, Erster Teil*, Fund. Math., 25 (1935), 503-526.

[57] Torrens,A., *W-algebras which are Boolean products of members of SR[1] and CW-algebras*, Studia Logica, XLVI, 3 (1987), 263-272.

[58] Traczyk,T., *On Post algebras with uncountable chain of constants*. Algebras of homomorphisms, Bull. Acad. Pol. Sc., XV (1967), 673-680.

[59] Wajsberg,M., *Beiträge zum Metaaussagenkalkül I*, Monat.Math.Phys., 42 (1935), 240.

Indice de nombres