

Tesis de Posgrado

Aproximaciones newtonianas y post-newtonianas de teorías con torsión

Levinas, Marcelo Leonardo

1988

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Levinas, Marcelo Leonardo. (1988). Aproximaciones newtonianas y post-newtonianas de teorías con torsión. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2173_Levinas.pdf

Cita tipo Chicago:

Levinas, Marcelo Leonardo. "Aproximaciones newtonianas y post-newtonianas de teorías con torsión". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1988. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2173_Levinas.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

APROXIMACIONES NEWTONIANAS Y POST-NEWTONIANAS

DE TEORIAS CON TORSION

Autor: MARCELO LEONARDO LEVINAS

Director: MARIO A. CASTAGNINO

Tesis para Acceder al Doctorado en Ciencias Físicas

Noviembre de 1988

2 173
Ej. 2

Esta Tesis fue realizada como parte del plan de trabajo de una beca de Perfeccionamiento de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC).

INDICE

	página
RESUMEN.....	1
INTRODUCCION.....	5
<u>Ideas Generales.....</u>	5
<u>Reseña Histórica.....</u>	9
<u>Motivaciones del Trabajo.....</u>	12
<u>Estructura del Trabajo.....</u>	16
CAPITULO I: GEOMETRIA DEL ESPACIO-TIEMPO CON TORSION.....	20
1.1. <u>Sistemas de Referencia Holónomos.....</u>	20
1.1.1. <u>Introducción.....</u>	20
1.1.2. <u>Transporte Paralelo.....</u>	21
1.1.3. <u>Diferenciación Covariante.....</u>	22
1.1.4. <u>Torsión y Curvatura.....</u>	24
1.1.5. <u>Espacio-Tiempo con Métrica.....</u>	25
1.1.6. <u>Autoparalelas y Geodésicas.....</u>	28
1.2. <u>Sistemas de Referencia Anholónomos.....</u>	31
1.2.1. <u>Introducción.....</u>	31
1.2.2. <u>Derivada de Lie.....</u>	32
1.2.3. <u>Derivada de Lie Para Bases Anholónomas. Un Ejemplo.....</u>	34
1.2.4. <u>Tétradas Ortonormales Como Sistemas de Referencia Anholónomos.....</u>	36
1.2.5. <u>Derivadas Covariantes.....</u>	38
1.3. <u>Significado Geométrico de la Torsión.....</u>	41
1.3.1. <u>Relación entre la Torsión y las Derivadas Covariantes de las Bases.....</u>	41
1.3.2. <u>Interpretación Geométrica de la Torsión.....</u>	43
CAPITULO II: TEORIAS GRAVITATORIAS CON TORSION.....	44
PRIMERA PARTE: LA TEORIA ECSK.....	45
2.1. <u>Introducción.....</u>	45
2.2. <u>El Principio de Equivalencia.....</u>	50
2.2.1. <u>El Principio de Equivalencia en R.G.....</u>	50
2.2.2. <u>El Principio de Equivalencia en U_4. El Acople Mínimo ...</u>	55
2.3. <u>Simetrías en M_4.....</u>	60
2.3.1. <u>Transformaciones de Poincaré en M_4</u>	60
2.3.2. <u>Leyes de Conservación en M_4</u>	63
2.4. <u>Simetrías en U_4.....</u>	66
2.4.1. <u>Transformaciones Locales de Poincaré.....</u>	66
2.4.2. <u>Leyes de Conservación en U_4.....</u>	69
2.4.3. <u>Las Ecuaciones de Campo de la Teoría ECSK.....</u>	73
2.4.4. <u>Las Ecuaciones de la Teoría ECSK en Componentes Holónomas. Coincidencias entre las Teorías ECSK y R.G.....</u>	76
SEGUNDA PARTE: LA SUPERGRAVEDAD $N=1$.....	82
2.5. <u>Supersimetrías.....</u>	82
2.5.1. <u>Transformaciones Supersimétricas Globales.....</u>	82
2.5.2. <u>Simetrías Locales y Supergravedad.....</u>	85
2.5.3. <u>Supergrupo de Poincaré.....</u>	88
2.6. <u>La Supergravedad $N=1$ Libre.....</u>	91
2.6.1. <u>La Acción de Gauge.....</u>	91
2.6.2. <u>Las Ecuaciones de Campo de la SG $N=1$ Libre.....</u>	94
2.7. <u>Acople de Materia en Supergravedad $N=1$.....</u>	96
2.7.1. <u>El Modelo de Wess-Zumino con Supersimetría Local.....</u>	96

	página
CAPITULO III: APROXIMACION POST-NEWTONIANA DE LA TEORIA ECSK...	98
3.1. <u>La Aproximación Post-Newtoniana</u>	100
3.1.1. Hipótesis que Conducen a una APN.....	100
3.1.2. Trayectorias para Materia Escalar y para Cuerpos Exteriores a las Fuentes.....	106
3.1.3. Expansiones de la Métrica y de los Símbolos de Christoffel.....	109
3.1.4. Las Ecuaciones de Campo y los Potenciales Gravitatorios.....	111
3.1.5. La Expresión de la Geodésica de la Partícula No Relativista.....	116
3.1.6. Trayectorias de Partículas Relativistas.....	117
3.1.7. APN de la Ley de Conservación.....	119
3.2. <u>APN Para un Fluido Ideal Con Espín</u>	122
3.2.1. Modelo de Fluido Ideal. La Conexión Afín y la Torsión...	122
3.2.2. Las Componentes de las Fuentes Hasta Orden \bar{M}^2/\bar{r}^3	127
3.2.3. La Ley de Conservación Para el Fluido Ideal Con Espín. La Forma Explícita de los Potenciales Gravitatorios.....	130
3.3. <u>Resultados Relevantes de la APN</u>	137
3.3.1. Densidades de las Fuentes.....	137
3.3.2. Desarrollo Multipolar. Solución con Simetría Esférica...	140
3.3.3. Ordenes de Magnitud para la Aceleración de Partículas de Prueba.....	145
3.3.4. Soluciones para Espines Alineados.....	147
CAPITULO IV: APROXIMACION NEWTONIANA DE LA SG N=1.....	149
4.1. <u>La Aproximación Newtoniana de la SG Libre</u>	150
4.1.1. La AN y las Características de la Métrica y la Torsión en la SG N=1 Libre.....	150
4.1.2. La Ecuación de Campo de la SG N=1 Libre en el Límite Newtoniano.....	154
4.2. <u>Consecuencias Experimentales de la AN de la Ecuación de Campo</u>	157
4.2.1. Una Solución No Trivial para el Gravitino.....	157
4.2.2. El Corrimiento al Rojo Gravitatorio. Cotas Máximas para la Torsión.....	160
4.3. <u>Acoples Supersimétricos de Materia. Trayectorias en Supergravedad N=1</u>	166
4.3.1. La Aproximación WKB.....	166
4.3.2. Movimiento de la Partícula de Espín 1/2 en un Fondo de Supergravedad.....	173
4.3.3. El Límite Newtoniano.....	175
CONCLUSIONES.....	182
FIGURAS.....	184
REFERENCIAS.....	186
AGRADECIMIENTOS.....	189

Esta Tesis está referida al estudio de Teorías Gravitatorias con torsión. El fundamento físico para la incorporación de esta variable geométrica debe buscarse, fundamentalmente, en la existencia de grados de libertad en la materia, que la Relatividad General en su formulación no tiene en cuenta. A su vez la torsión aparece como una variable necesaria toda vez que se pretendan encontrar simetrías locales de los lagrangianos frente al Grupo de Poincaré (extensión de las simetrías externas globales de la Relatividad Especial), como así también supersimetrías entre bosones y fermiones respecto del Supergrupo de Poincaré.

En este trabajo analizamos el comportamiento de dos de las teorías más importantes que incorporan la torsión a su formalismo: la Teoría de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble y la Supergravedad $N=1$. Nuestro principal interés reside en establecer en qué medida estas teorías se apartan de las predicciones de la Relatividad General, teniendo esta última un límite de bajas energías bien preciso: la Mecánica de Newton. Nuestro análisis se realiza para el caso de sistemas cuyos componentes poseen un movimiento no relativista. En el primer caso debe realizarse una aproximación post-newtoniana, dado que a los órdenes más bajos de aproximación existen coincidencias con los resultados de la Relatividad General. Otro es el caso de la Supergravedad $N=1$ libre, donde hemos establecido diferencias con la Relatividad General ya a orden newtoniano.

En el caso de la Teoría de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble se realiza la aproximación post-newtoniana completa para una partícula de prueba no relativista, hasta cuarto orden en potencias de la velocidad característica (pequeña) del sistema físico; y hasta tercer orden para una partícula relativista sometida a los mismos

campos gravitatorios. Dado que es necesario conocer la evolución de las fuentes con vistas a establecer los potenciales gravitatorios, también se desarrollan las leyes de conservación que rigen su evolución. Que el espacio-tiempo de los fenómenos físicos posea torsión, trae como consecuencia la necesidad de redefinir las trayectorias clásicas correspondientes a los constituyentes de las fuentes. Existe aquí, por lo tanto, un interés adicional en establecer las características de su movimiento. Para el caso de un fluido ideal con espín se establecen todas las magnitudes, tanto físicas como geométricas; quedando explicitadas, en su forma más general, las ecuaciones diferenciales necesarias para resolver situaciones físicas con propiedades particulares: determinadas polarizaciones de espín, simetrías, etc.

Obtenidas las relaciones fundamentales, es posible dar una estimación de la densidad de fuentes que pueden provocar correcciones relevantes a la métrica del espacio-tiempo; analizar el caso de espines alineados y también estudiar, por medio de un segundo desarrollo, esta vez en multipolos, el comportamiento de la geometría lejos de las fuentes.

En esta Tesis también se estudian consecuencias clásicas de la Supergravedad. En la aproximación newtoniana de esta teoría se desarrolla, para el caso más general, su ecuación de campo del tipo de la de Einstein. Se encuentra una solución no trivial para el gravitino, la cual puede servir de fuente para determinados campos gravitatorios. Esto da como resultado que ya en este nivel de aproximación, sean posibles dispersiones entre la Supergravedad y la Mecánica de Newton. El corrimiento al rojo gravitatorio nos permite establecer una cota superior para una torsión con origen en supersimetrías.

También se estudia la incorporación de campos de materia. Se analiza el caso de un multiplete acoplado supersimétricamente a la gravedad, estableciéndose las ecuaciones de campo correspondientes y hallándose su comportamiento clásico vía un desarrollo WKB. Las trayectorias newtonianas indican dispersiones respecto de la Relatividad General para el caso de partículas con espín $1/2$. Haciendo uso de un background conformado por gravitones y gravitinos, nos es posible encontrar condiciones que hagan factible un comportamiento no geodésico de la materia. Los resultados obtenidos también permiten el estudio del caso de partículas relativistas.

Los aspectos y resultados originales más importantes incluidos en esta Tesis, se hallan contenidos en los siguientes artículos:

- "On the Post-Newtonian Approximation of the Einstein-Cartan-Sciama-Kibble Theory". General Relativity and Gravitation Journal, Plenum Press, New York, Vol. 17, No. 7 (1985), p. 683. En colaboración con M. Castagnino y N. Umeréz. REFERENCIA (23)

- "On Torsion Detection Using Post-Newtonian Approximation". En "Relativity, Supersymmetry and Cosmology", Proceedings del Quinto Simposio Latinoamericano de Relatividad y Gravitación (SILARG V), Bariloche, 1985. Editores: Bressan, Castagnino y Hamity, World Scientific Publishing Co., Singapore, p. 286, 1985. En colaboración con M. Castagnino. REFERENCIA (24)

- "Newtonian N=1 Supergravity". Physics Letters B, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 179, No. 1-2 (1986), 83. (190, 1-2 (1987), 237). En colaboración con M. Castagnino, G. Domenech y N. Umeréz. REFERENCIA (27)

- "On the Post-Newtonian Approximation of the ECSK Theory II". General Relativity and Gravitation Journal, Plenum Press, New York, Vol. 19, No. 6, (1987), p. 545. En colaboración con M. Castagnino. REFERENCIA (25)

- "Low Energy Effects in Supergravity". Proceedings of the 6th Symposium on Latin-American Relativity and Gravity, Rio de Janeiro, Brasil. Editor: M. Novello (CBPF), World Scientific Pub. Co., p.349, 1988. En colaboración con G. Domenech y N. Umeréz. REFERENCIA (29)

- "Photon Motion in the ECSK Theory". General Relativity and Gravitation Journal, Plenum Press, New York, Vol. 20, No. 7 (1988), p. 715. En colaboración con M. Castagnino. REFERENCIA (26)

- "Gravitational Theories with Torsion: Newtonian Trajectories in Supergravity". MENCIÓN DE HONOR en el Concurso Internacional de la Gravity Research Foundation. Mayo de 1987. En colaboración con G. Domenech y N. Umeréz. REFERENCIA (28)

- "Supersymmetric Coupling and Trajectories in N=1 Supergravity". Classical and Quantum Gravity Journal. En colaboración con M. Castagnino, G. Domenech y N. Umeréz. (En prensa) REFERENCIA (30)

INTRODUCCION

IDEAS GENERALES

La Teoría de la Relatividad General (R.G.) enunciada por Einstein en 1916 es una teoría de la gravitación, muchas de cuyas hipótesis fundamentales se basan en su Teoría de la Relatividad Especial (R.E.) de 1905. Esta última teoría entra en el contexto de la R.G. como válida, en regiones lejanas respecto de las fuentes que producen los campos gravitatorios y en sistemas de referencia libremente gravitantes.

Einstein postuló el Principio de la Relatividad General (PRG) que afirma que las ecuaciones que expresan las leyes de la naturaleza deben ser covariantes con respecto a todas las transformaciones continuas de coordenadas (1). Introdujo además el postulado fundamental que permite el pasaje de la Relatividad Especial a la General: el Principio de Equivalencia (PE), el cual se refiere, fundamentalmente, a la indistinguibilidad entre sistemas inerciales y sistemas en caída libre. El postular covariancia para todas las ecuaciones de la física, implica incorporar el PRG en su forma de Principio General de Covariancia (PGC), que íntimamente asociado al PE, da las prescripciones necesarias para escribir las ecuaciones de la R.G., conocidas las correspondientes de R.E.

La R.G. necesita formularse de forma tal que, localmente, se corresponda con la R.E. Esto es así, debido al hecho de que la R.E. es la teoría que verdaderamente conocemos a nivel experimental. Dado que la R.E. posee, a su vez, como límite la mecánica de Newton, la R.G. fue elaborada de forma tal de coincidir, para el caso de velocidades no relativista y de campos gravitatorios débiles, con los resultados de la mecánica de Newton. Sin embargo, aún en este límite, ambas teorías son conceptualmente diferentes: mientras que en la mecánica de Newton se

trabaja en un espacio plano en donde las fuerzas gravitatorias son entendidas como manifestaciones de una interacción más, en R.G. la acción de la gravedad se traduce en una modificación del espacio-tiempo mismo, mientras que la fuerza gravitatoria queda diluída como tal, afectando a todas la partículas por igual, a través de un fondo geométrico común a todas ellas.

Dado que el formalismo de la R.G. exige la utilización de coordenadas curvilíneas con vistas a describir sistemas de referencia globales, surge la necesidad de definir el paralelismo entre vectores y, en consecuencia, se vuelve imprescindible la incorporación de una conexión afín que de cuenta de cómo las diferentes magnitudes de tipo tensorial, se transportan paralelamente. La definición de paralelismo es fundamental en la comparación de los valores que asumen las componentes de los tensores, ya que en puntos diferentes del espacio-tiempo, parte de la variación de estas componentes se debe a su nueva orientación con respecto a los versores que representan las líneas coordenadas en el punto hacia donde éstos han sido transportados.

En la Relatividad General de Einstein los transportes paralelos se definen a través de una conexión simétrica. Esta constituye la elección natural para determinada enunciación del Principio de Equivalencia y conduce al hecho de que la única variable geométrica independiente, es la métrica. Ello es así, debido a que una conexión simétrica y una métrica cuya derivada covariante sea nula, conducen necesariamente a una expresión de la conexión, de la que participan exclusivamente las distintas componentes del tensor métrico. En consecuencia, la única variable geométrica independiente es la métrica.

Otra consecuencia importante de los postulados empleados en R.G. es la existencia de un tensor energía-impulso simétrico. Este tensor representa a las fuentes del campo gravitatorio, determinando a partir de

una ecuación de campo no lineal, la geometría del espacio-tiempo. Pero a su vez la materia al "vivir" en un espacio-tiempo curvo, "padece" la geometría de forma tal que su comportamiento debe ser compatible con el fondo geométrico que ella misma crea. La ley de conservación del tensor energía-impulso es la que establece la evolución de las fuentes.

Sin embargo, la existencia de un mayor número de grados de libertad en la materia, debidas fundamentalmente a su parte espinorial, indujo a suponer que la descripción propia de la R.G., resultaba insuficiente. A partir de la Teoría de Campos la descripción de la materia asume una forma cualitativamente diferente de aquella que la supone como compuesta, simplemente, de partículas puntuales. El intento de dar cuenta de todos los grados de libertad de la materia y de hallar simetrías, de forma tal de llegar a una formulación invariante de la física, está relacionado, en muchas teorías, con una incorporación natural de la torsión: parte antisimétrica de la conexión. Ella, entonces, se constituye en un elemento independiente del espacio-tiempo, ligado a nuevas partículas o a grados de libertad espinoriales. En todos los casos será necesaria una reformulación del Principio de Equivalencia en donde el concepto de localidad sea más restrictivo y el mecanismo de acople mínimo se refiera, esencialmente, a los lagrangianos de materia.

La teoría ECSK constituye un caso particular de una teoría con torsión en la que se da cuenta de mayores grados de libertad en la materia. Constituye la extensión más natural de la R.G., dado que sus ecuaciones de campo se deducen, como allí, a partir de un lagrangiano lineal en la curvatura escalar (esta vez función también de la torsión). La consecuencia más importante de esta elección, lo constituye el hecho de que la torsión no se propaga, quedando limitada a aquellos puntos del espacio-tiempo donde existen partículas con espín. Esta teoría puede ser presentada como un caso particular de una teoría de gauge de la gravitación más general. Este hecho le otorga una gran confiabilidad,

dado que la base de la teoría lo constituye la exigencia de invariancias frente al Grupo Generalizado de Poincaré, extensión natural de las transformaciones globales de R.E.

La importancia actual del estudio de este tipo de teorías está muy relacionada con posibles extensiones del Grupo de Poincaré al Supergrupo de Poincaré. La Supergravedad (SG) es una teoría gravitatoria cuántica, cuyo resultado más relevante ha sido el de incorporar simetrías de gauge entre bosones y fermiones. Estas simetrías sólo pueden ser implementadas en el marco de un espacio-tiempo curvo, esto es, si la gravedad está presente. Dada la existencia de simetrías entre bosones y fermiones, debe existir un compañero fermiónico para el campo bosónico gravitacional: el gravitino; el cual constituye un campo de espín $3/2$ que puede adquirir masa por medio de una ruptura espontánea de la simetría. La SG más sencilla es aquella en la que el gravitón posee un único compañero supersimétrico, esto es, un solo gravitino y se la denomina Supergravedad N=1 (SG N=1).

La teoría de la Supergravedad ofrece buenas perspectivas para cuantificar el campo gravitatorio, dando como resultado una teoría que hasta los primeros órdenes en sus correcciones cuánticas, resulta finita. Una especial atención debe ofrecerse a la SG N=1, dado que ella constituye el límite de bajas energías de la teoría de Supercuerdas (2), que hoy parece ser la más promisoría teoría de campo unificado.

En Supergravedad, la incorporación de la torsión se vuelve necesaria, apareciendo la misma cuando determinadas invariancias son exigidas. En SG N=1, ella depende cuadráticamente del gravitino y esto trae aparejado el hecho de que, a nivel clásico, una eventual existencia de este campo implicaría, automáticamente, una geometría del espacio-tiempo con conexión no simétrica.

Tanto la teoría ECSK como la Supergravedad clásica pueden ser estudiadas en el límite de bajas velocidades de las fuentes de campo y para el caso de que ellas satisfagan determinadas condiciones. A cada orden de desarrollo, la geometría del espacio-tiempo posee una estructura bien determinada. Así la aproximación más baja corresponde a un espacio-tiempo plano de Minkowski, lo que implica que en coordenadas cartesianas globales, la conexión es nula, y, por ende, también lo es la torsión. El orden de aproximación siguiente es el denominado newtoniano. La Aproximación Newtoniana (AN) es la más baja en un espacio-tiempo curvo y, para el caso de la R.G. coincide, de acuerdo con lo ya expresado, con los resultados conocidos de la mecánica de Newton. La Aproximación Post-Newtoniana (AFN) se dirige a establecer el comportamiento de los sistemas físicos más allá de un segundo orden en las velocidades de los constituyentes de las fuentes.

La existencia de torsión en la geometría propia de las teorías a ser estudiadas, trae aparejadas importantes discrepancias con respecto a aquellas teorías que se desarrollan en una geometría de tipo riemanniana. La significación, el alcance y el peso de estas discrepancias, puede ser interpretada y evaluada, en consecuencia, en relación con las diferencias cualitativas y en función del grado de dispersión de cada teoría respecto de la mecánica de Newton.

RESEÑA HISTORICA

A continuación hacemos una breve reseña histórica a propósito de los orígenes de muchas de las ideas que han sido tenidas en cuenta en este trabajo, e indicamos las referencias de aquellos textos que hemos consultado.

Ya en 1922 Eddington mencionó la posibilidad de utilizar conexiones asimétricas al discutir probables extensiones de la R.G. (3) e incluso insinuó que ello podría tener aplicaciones en microfísica. Fue Cartan en 1922 quien introdujo la torsión como la parte antisimétrica de la conexión, también en el contexto de estudio de la R.G. Reconoció su carácter tensorial y supuso que la misma podía estar relacionada con el impulso angular intrínseco de la materia, anulándose, en consecuencia, en el vacío.

En los años cuarenta, a partir de artículos debidos a Costa de Beauregard, Weyssenhoff, y Papapetrou, se vuelve paulatinamente claro el hecho de que el tensor energía-impulso de partículas masivas con espín debe ser asimétrico. Esto mostraba que la ecuación de Einstein resultaba inadecuada para los campos con espín. La primera teoría gravitatoria propiamente dicha, en el marco de un espacio-tiempo con torsión, U_4 , es introducida casi simultáneamente por Kibble (4) y Sciama (5). Ambos llegaron al mismo conjunto de ecuaciones de campo en el contexto de una teoría de gauge.

A partir de 1965 hubo avances importantes en el desarrollo e interpretación de esta teoría: Hehl y Kroner lograron partir el tensor energía-impulso total y llegaron a una ecuación combinada que facilitó la comparación de la teoría U_4 con la R.G. Kopczynski en 1972 trabajó en un modelo cosmológico sencillo con torsión (6) y Trautman en 1973 sugiere que el comportamiento de U_4 en la singularidad difiere de aquel de R.G. (7). Posteriores desarrollos fueron hechos también por Hehl en colaboración con von der Heyde y Kerlick (8). Estos autores junto a Nester exponen y discuten todo lo conocido para esta teoría hasta 1976 (9).

La teoría ECSK como teoría de gauge del Grupo de Poincaré fue presentada en su forma completa por Hehl (10). Recién en 1983 Ray y Smalley

(11) logran establecer en una geometría con torsión, la forma de un lagrangiano correspondiente a un fluido ideal con espín.

Las supersimetrías fueron descubiertas en 1971 por Golfand y Likhtman (12). El primer modelo cuadri-dimensional de supersimetrías fue introducido por Wess y Zumino en 1974 (13). En 1976 Freedman, van Nieuwenhuizen y Ferrara construyen el modelo más sencillo de Supergravedad con invariancia local de Poincaré y supersimetrías locales, introduciendo un gravitón de espín 2 y un gravitino de espín 3/2 (14). Ese mismo año se desarrolla la primera de las supergravedades extendidas, la $N=2$, que unifica gravedad con electromagnetismo (15) y se obtienen los primeros resultados finitos para algunas de las correcciones cuánticas de la teoría (16). En 1981 Nieuwenhuizen expone los aspectos más importantes de la Supergravedad en sus versiones clásica y cuántica (17).

Las primeras parametrizaciones de la Aproximación Post-Newtoniana, esto es, la elaboración de un formalismo común a distintas teorías gravitatorias conteniendo un conjunto de parámetros arbitrarios, fueron realizadas por Eddington en 1922 y muy posteriormente por Robertson y Schiff en 1962. Sin embargo ellas sólo se referían al campo gravitatorio exterior al sol, tomado éste como una fuente con simetría esférica. Chandrasekhar en 1965 (18) (19) realiza la APN para un fluido ideal y para cuerpos rotantes. En 1968 Nordtvedt desarrolla el primer formalismo de Parametrización Post-Newtoniana (PPN) capaz de tratar todos los aspectos del sistema solar (20) mientras que Will expone el formalismo más completo para teorías sin torsión en 1981 (21).

MOTIVACIONES DEL TRABAJO

Nuestro trabajo está esencialmente dirigido al empleo del formalismo post-newtoniano para el estudio de determinadas teorías con torsión. La Aproximación Post-Newtoniana (APN) fue introducida en el marco de la R.G. y constituye un mecanismo poderoso para resolver, cuando se dan determinadas condiciones en el sistema físico que así lo permitan, el problema de la no linealidad de las ecuaciones de campo. Las hipótesis centrales que hacen factible una APN están en correspondencia con los datos que poseemos de nuestro sistema solar, y, en general, son adecuadas para todos aquellos sistemas en donde las velocidades de las fuentes no sean relativistas.

Una teoría con torsión como la ECSK, elaborada a partir de la R.G., posee, como es lógico, su misma estructura conceptual. Sin embargo, la geometría y el rol que juegan las fuentes de los campos gravitatorios son distintos. Resulta interesante, entonces, comparar el comportamiento de ambas teorías en aquellos casos en que podamos determinar sus evoluciones con un grado de aproximación tal que puedan manifestarse diferencias.

Una de las motivaciones principales de este trabajo lo constituyó el intento por responder a la pregunta: ¿cómo se ve afectado el movimiento de una partícula de prueba en una geometría con torsión? Ello trajo aparejado, entonces, la necesidad de especificar qué se entiende por partícula de prueba. La gran dificultad en este punto consiste en la imposibilidad de determinar a priori cuál es la forma de la trayectoria de una partícula en un fondo geométrico con torsión. A diferencia de R.G., aquí no disponemos de una prescripción para saber, en general, qué curva sigue una partícula en una región en la que los efectos de la curvatura del espacio se hagan despreciables. Ello es así debido al hecho de que la noción de recta es diferente en una geometría con

torsión respecto de una sin torsión. El problema no se resuelve si la partícula de prueba no se acopla a la torsión, como sería el caso de la materia escalar, dado que la métrica que sí la afecta, posee vínculos con esta magnitud a través de las ecuaciones de campo. Por otro lado las fuentes, por hipótesis, deben acoplarse con la torsión atendiendo al hecho de que ellas mismas la producen, con lo que su evolución sólo puede ser determinada una vez integradas las leyes de conservación que las rigen. En consecuencia, la torsión influye decisivamente tanto en la evolución de las fuentes, como así también, en el comportamiento de cualquier partícula considerada de prueba. La cuestión más importante es establecer hasta qué punto estas modificaciones se apartan de las predicciones de la R.G.

Un modelo sumamente completo de fuente con espín lo constituye el del fluido ideal con espín, el cual resulta interesante desarrollar y comparar con el correspondiente de R.G. También la posibilidad de estudiar aquellos casos en que las fuentes cumplen con determinadas condiciones -como ser la de poseer espines alineados- o el estudio del comportamiento de la geometría lejos de las fuentes, ofrece buenas perspectivas para obtener ciertas predicciones.

Estas fueron las motivaciones principales para que abordemos la AFN de la teoría ECSK. La "virtud" de esta teoría consiste en su extraordinario parecido formal con la R.G., debido principalmente al hecho de que en ella, la torsión no se propaga. Hemos intentado aprovechar al máximo esto último, apuntando nuestro estudio a aquella parte de la teoría que es descripta por los símbolos de Christoffel y que corrige el tensor energía-impulso incorporando el espín de las fuentes. El atractivo de esta posible "reducción" de la teoría ECSK, proviene de que todo el formalismo AFN de la R.G. le puede ser adaptado; obviamente toda vez que se tengan en cuenta, en cada paso, las diferencias entre ambas teorías. Estas diferencias aparecen, entonces, en forma muy

transparente y era de preveer posibles comparaciones, algunas de ellas inmediatas, entre los comportamientos de las dos teorías.

En un comienzo, hemos tratado de establecer si existían dispersiones ya a orden newtoniano. Estas dispersiones no aparecieron, lo que condujo a estudiar el problema a órdenes mayores en las ecuaciones de la teoría. Una hipótesis fundamental fue incorporada al conjunto de suposiciones que hemos usado: la expansión de las componentes de la métrica en ECSK es similar a la que se realiza en R.G., lo cual se establece a partir de la estructura de las fuentes. Esto constituye, por lo demás, un requisito altamente razonable toda vez que trabajemos con fuentes que a nivel macroscópico se desarrollen en potencias de magnitudes tales como la densidad, la presión, la energía interna o la velocidad. El caso más claro de esto lo constituye, precisamente, el fluido ideal, tema de estudio en una de las partes del trabajo.

Sin embargo, otro es el caso de SG. Si nos atenemos a la SG libre vemos que la torsión es dinámica; esto es, se propaga. Si los gravitinos son nulos, claro está, ella es simultáneamente nula. Pero el precio que hay que pagar para esto último es la trivialización de las supersimetrías que constituyen la base de la teoría. Esto sería análogo a suponer, en la teoría ECSK, partículas sin espín.

Para el caso de la Supergravedad no se han hecho hipótesis acerca del desarrollo de la métrica. Ello responde a dos hechos. En primer lugar no nos es posible, como sí lo es en el caso de la teoría ECSK, suponer "a priori" una determinada forma para los potenciales gravitatorios dependientes del gravitino, como funciones de densidades, velocidades, etc, y por ende, tampoco una particular expansión de las componentes de la métrica al orden más bajo. Por otro lado, una aproximación newtoniana de la SG, como se verá, conduce a resultados que de hecho, difieren de los predichos por la mecánica de Newton, y hace innecesario para

nuestros objetivos, calcular componentes de la métrica que no sea la $O-O$ a segundo orden. Es de destacar que ambas teorías se encuentran muy relacionadas: la SG $N=1$ libre posee importantes parecidos con la teoría ECKS con fuentes, y la ecuación de campo de la SG $N=1$ puede llevarse a una forma particularmente parecida a la ecuación unificada de ECKS.

El estudio de la Supergravedad clásica es, de por sí, relevante. A pesar de la consistente descripción clásica del fenómeno gravitatorio por parte de la R.G. y de su correspondencia con los resultados experimentales, existen importantes problemas cuando se intenta su cuantificación. Estos problemas se vuelven críticos en el caso de acoples de materia, dado que aparecen divergencias aún a primer orden en el desarrollo en la constante de Planck \hbar (65). Precisamente, la Supergravedad, teoría gravitatoria con un mejor comportamiento cuántico, finita en los primeros órdenes de \hbar , no ha sido lo suficientemente estudiada en su límite clásico. Por otro lado, no existe ninguna prueba experimental de la existencia de una partícula correspondiente al gravitino (campo que conjuntamente con la métrica describe la gravedad), dado que su scattering requiere de enormes energías. Estos hechos, en sí mismos le dan interés a una aproximación clásica de la SG $N=1$ con vistas a encontrar efectos de bajas energías que puedan distinguirla de otras teorías de la gravitación.

Es en virtud de todos estos aspectos que hemos elegido estudiar la Supergravedad, adaptando en lo posible todo el formalismo y tratando de establecer algunas diferencias importantes entre esta teoría, la ECKS y R.G. La eventual dispersión de la SG $N=1$ de la mecánica de Newton depende de las características de las fuentes y, obviamente, de la validez de la teoría. Creemos que dar predicciones para un comportamiento no coincidente ya a este nivel, representa un aspecto importante en el estudio del comportamiento clásico de una teoría, cuyo origen está tan íntimamente ligado con la física de partículas.

ESTRUCTURA DEL TRABAJO

El Trabajo está dividido en cuatro Capítulos.

En el Capítulo I titulado "Geometría del Espacio-Tiempo con Torsión" se incorporan los elementos geométricos necesarios para el desarrollo de los temas centrales de la Tesis. Si bien en algunos casos se trabaja con conceptos que son conocidos en el marco de la R.G., hemos considerado necesario detenernos un tanto en su análisis con el fin de establecer las novedades e implicancias que trae consigo aparejadas la incorporación de la torsión. Para este capítulo hemos tomado algunos elementos de un trabajo anterior (22).

En la sección 1.1. se estudia el formalismo holónomo. Nos detenemos en el análisis del concepto de transporte paralelo (1.1.2.) y luego introducimos la derivación covariante (1.1.3.), y los tensores de la torsión y curvatura (1.1.4.). En (1.1.5.) se define la métrica y el tensor de no metricidad, se establecen los distintos espacios métricos que pueden considerarse y se definen tensores que han de utilizarse posteriormente en el trabajo. En (1.1.6) se establece la no coincidencia entre curvas autoparalelas y geodésicas.

En la segunda sección 1.2. introducimos sistemas de referencia anholónomos; esto permite, replantear y redefinir lo visto en la primera sección con vistas a su utilización en el estudio del comportamiento de materia espinorial. En 1.2.2. se estudia la derivada de Lie, discutiéndose en 1.2.3. un ejemplo para versores anholónomos que será de utilidad, más adelante, en la interpretación geométrica de la torsión. En 1.2.4. se introducen las tétradas como sistemas de referencia anholónomos, estableciéndose el carácter del campo que ellas producen y el significado de sus orientaciones relativas. En 1.2.5. incorporamos una nueva derivada covariante que opera sobre las componentes anholónomas de los tensores.

La tercera sección (1.3.) está dedicada a dar un significado geométrico a la torsión. Para ello resulta necesario establecer el significado de las distintas derivadas covariantes de la tétrada, e incorporar el objeto de anholomía como aquel que mide su no conmutatividad (1.3.1). En (1.3.2.) se da una interpretación geométrica de la magnitud.

El Capítulo II se titula "Teorías Gravitatorias con Torsión" y está dividido en dos partes.

La Primera Parte se titula "La Teoría ECSK" y para su elaboración hemos seguido, en muchos de sus puntos, el contenido de los artículos (9) y (10). En la sección 2.2. discutimos las características del Principio de Equivalencia en R.G. (2.2.1.) y en U_4 (2.2.2.). Allí vemos que es necesario una redefinición de este principio que sea acorde con la caracterización que se hace de la materia en la Teoría de Campos. El "nuevo" P.E. da prescripciones sobre los lagrangianos de materia, pero no sobre las trayectorias de partículas que componen fuentes o partículas de prueba, lo que traerá aparejado dificultades en el posterior tratamiento de este problema.

En la sección 2.3. se estudian las simetrías propias de M_4 asociadas con transformaciones globales del Grupo de Poincaré (2.3.1.), las que conducen a conocidas leyes de conservación (2.3.2.). Se discute las razones por las que la R.E. no es una teoría de gauge local.

Es así que en la sección 2.4. vemos que las simetrías frente al grupo local de Poincaré deben ser, en su forma más general, simetrías en un espacio-tiempo curvo y con torsión U_4 (2.4.1.). Esto conduce a nuevas leyes de conservación, las cuales sólo en algunos límites coinciden con

aquellas de R.G. (2.4.2.). Las ecuaciones de campo de la Teoría ECSK surgen de una particular elección del lagrangiano de los campos de gauge (2.4.3.) y ellas nos muestran que la torsión no constituye un campo que se propague. Estas ecuaciones pueden llevarse a una forma holónoma, resultando sumamente interesante su comparación con la correspondiente ecuación de campo de R.G. (2.4.4.), y en general, de ambas teorías en su conjunto. En este último párrafo exponemos gran parte de las relaciones y ecuaciones que habrán de desarrollarse más adelante en el trabajo.

La Segunda Parte se titula "La Supergravedad N=1" y para su exposición hemos tomado muchos aspectos contenidos en (17) y (22). A lo largo de su desarrollo incorporamos lo que consideramos lo más relevante de esta teoría en relación con los objetivos de nuestro trabajo.

En la sección 2.5. discutimos el carácter de las supersimetrías globales (2.5.1) y las locales (2.5.2.). En el primero de estos párrafos se describen, con algo de detenimiento, las características que debe poseer el parámetro de la supersimetría; mientras que en el segundo estudiamos las sucesivas correcciones que deben operarse sobre la acción, con el fin de mantener determinadas invariancias y establecer las supersimetrías para el gravitón y el gravitino. En 2.5.3. se presentan los conmutadores y anticonmutadores que dan lugar al supergrupo de Poincaré, grupo éste que contiene las traslaciones, las rotaciones y las supersimetrías.

En la sección 2.6. nos centramos en el estudio de la Supergravedad N=1. En 2.6.1. se establece cuál debe ser la acción de gauge y, luego de estudiar sus variaciones respecto del gravitón y del gravitino, se obtienen, en 2.6.2., las ecuaciones de campo para la SG N=1 libre. La torsión aparece como una variable geométrica íntimamente ligada con el gravitino, y su incorporación al espacio-tiempo trae aparejadas muchas de las consecuencias discutidas en la Primera Parte de este mismo capítulo.

En la sección 2.7. se realiza un análisis de la incorporación de campos de materia no masivos a partir de multipletes conteniendo campos escalares y espinoriales, de forma tal de preservar la supersimetría local. En la sección 2.7.1. se introducen los campos auxiliares para el caso más sencillo de supersimetría global sin gravedad. Se discute la clausura del superálgebra de Poincaré y las nuevas reglas de transformaciones supersimétricas. Finalmente se expone un lagrangiano supersimétrico del orden de la constante gravitatoria G.

El Capítulo III se titula "La Aproximación Post-Newtoniana de la Teoría ECSK". Es original y para su redacción hemos tenido en cuenta, en muchos de sus puntos, nuestros trabajos (23) (24) (25) y (26).

En la sección 3.1. se estudian las características de una APN. En 3.1.1. ellas se discuten para el caso del sistema solar fijándose las hipótesis más relevantes dirigidas a establecer cuál debe ser la expansión de la métrica y cuáles los órdenes de magnitud de las derivadas parciales temporales y espaciales. Nuestro interés es el de fundamentar la incorporación de determinadas hipótesis en el caso de trabajar con fuentes que producen torsión. En 3.1.2. se establece el movimiento geodésico para la materia escalar y para cuerpos exteriores a las fuentes. Se hace una exhaustiva discusión acerca del carácter de los cuerpos de prueba y de las causas que hacen imposible establecer a priori la forma de las trayectorias de partículas dotadas de espín. En 3.1.3. se encuentra la ecuación de la geodésica, estableciéndose entonces, qué componentes de los símbolos de Christoffel y a qué orden son necesarios para la APN de una partícula no relativista. En 3.1.4. se plantean las ecuaciones de campo orden a orden, cuya resolución

permite establecer el valor de las diferentes incógnitas geométricas. Haciendo uso de determinada libertad para fijar un gauge respecto de la métrica, elegimos coordenadas armónicas, de manera de simplificar la forma de las ecuaciones de campo. En 3.1.5. nos es posible determinar la geodésica de una partícula no relativista hasta cuarto orden en la velocidad típica del sistema, y en 3.1.6. hasta tercer orden para el caso de una partícula relativista. En 3.1.7. se establecen los diferentes órdenes para la ley de conservación del tensor energía-impulso combinado, para el caso más general de materia dotada con espín.

En la sección 3.2. se realiza la APN para el caso de un fluido ideal con espín. Primero se establecen las características del modelo (3.2.1.) y luego se fijan condiciones, y vínculos para diferentes componentes del tensor energía-impulso métrico (3.2.2.). En 3.2.3. se explicita la ley de conservación a distintos órdenes, lo que permite calcular los potenciales gravitatorios. Se discute cómo resolver el problema más complicado que corresponde a un fluido donde la temperatura es una variable independiente, para lo cual hace falta, en primer término, desarrollar la ley de conservación hasta un orden mayor con el objeto de obtener una nueva ecuación. En segundo término y con el fin de hallar todas las incógnitas, debe desarrollarse una ley termodinámica.

En la sección 3.3. se exponen resultados relevantes de nuestra aproximación. En 3.3.1. se calculan densidades de fuentes con espín de origen cuántico, pudiéndose establecer valores más realistas para estrellas neutronicas, que aquellas provistas por la literatura. En 3.3.2. se realiza un desarrollo multipolar y se estudia el caso de fuentes con simetría esférica, llegándose a una solución que posee su correspondiente en la de Schwarzschild de R.G. En el párrafo 3.3.3. se establecen órdenes de magnitud para partículas de prueba cuando las velocidades típicas del sistema físico son del orden de aquellas de nuestro sistema solar. En 3.3.4. se hallan soluciones para el caso de fuentes con espines alineados y se establece que sólo el potencial de cuarto orden difiere en su forma, del correspondiente a R.G.

El Capítulo IV se titula: "Aproximación Newtoniana de la Supergravedad $N=1$ ". Es original y en su redacción se han tenido en cuenta aspectos contenidos en nuestros trabajos (27) (28) (29) y (30).

En la sección 4.1. realizamos la AN de la Supergravedad libre. En primer lugar se discuten las características de la torsión en el marco de esta teoría (4.1.1.) y luego se establecen las ecuaciones de campo en este orden de aproximación, en su expresión más general (4.1.2.). La expansión de la métrica posee, en principio, características diferentes a la considerada en la teoría ECKS.

En la sección 4.2. se estudian las consecuencias experimentales de la AN. En 4.2.1. se encuentra una solución para el gravitino que es la que más se acerca a la simetría esférica. En esta deducción se tiene en cuenta los efectos del back-reaction en la ecuación de Rarita-Schwinger, lo cual en nuestro caso posee analogías con la resolución de esta ecuación en el plano. Se prueba que la solución hallada no es trivial, lo que significa que no existe ninguna transformación supersimétrica que nos conduzca a R.G. Los datos experimentales del corrimiento al rojo gravitatorio para diferentes fuentes estelares, nos permite en 4.2.2. establecer cotas máximas para los órdenes de magnitud de una torsión, cuyo origen es gravitínico. Esto es aún posible sin integrar la solución para la componente g_{00} de la métrica, debido a que estamos en condiciones de establecer hipótesis respecto de la estructura de las fuentes incorporando condiciones de contorno altamente razonables.

En la sección 4.3. se estudia el acople supersimétrico de materia con vistas a determinar la forma que asumen las trayectorias de partículas en la SG $N=1$. En el párrafo 4.3.1. se realiza un desarrollo WKB de los campos de materia de un multiplete de Wess-Zumino. Se hallan las ecuaciones de campo y se encuentra su límite clásico; esto conduce a un movimiento geodésico para la materia escalar con masa. En 4.3.2. se estudia el movimiento de partículas de espín $1/2$, estableciéndose la presencia de una fuerza debido al acople de los campos escalares con el gravitino, lo que implica trayectorias no geodésicas. Finalmente, en 4.3.3. se realiza una AN de estas trayectorias, lo que resulta compatible con el lagrangiano que caracteriza al multiplete empleado para hallar las ecuaciones de campo. Se fijan relaciones numéricas entre los campos, se discute la forma de darles masa y se indica la aplicación de los resultados al caso de campos no masivos.

CAPITULO I

GEOMETRIA DEL ESPACIO-TIEMPO CON TORSION

En este capítulo introduciremos algunos elementos de Geometría Diferencial, fijaremos la notación y estableceremos gran parte del formalismo que servirá de base para el desarrollo del trabajo.

Hemos dividido el capítulo en tres secciones. En la primera y en la segunda, trabajaremos en sistemas de referencia holónomos y anholónomos respectivamente. En la tercera sección discutiremos el significado geométrico de la torsión.

1.1. SISTEMAS DE REFERENCIA HOLONOMOS

1.1.1. Introducción

Una base $\{\vec{e}_\mu(P)\}$ en el punto P de un espacio tangente es holónoma si y sólo si se anula el conmutador $[\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu]$ entre dos vectores cualesquiera que la componen (31). ($\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$ = dimensión del espacio). A tal conmutador se lo denomina derivada de Lie y se lo representa

$\mathcal{L}_{\vec{e}_\mu} \vec{e}_\nu$ For lo tanto los elementos de una base holónoma verifican:

$$\mathcal{L}_{\vec{e}_\mu} \vec{e}_\nu = [\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu] = 0 \quad (1.1)$$

En la sección 1.2.2. se explicará esta notación y en 1.2.3 se dará una interpretación de esta derivada, tanto para el caso holónomo como para el anholónomo.

Si la condición (1.1) se cumple entonces:

$$\vec{e}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.2)$$

Se pasa a otra base holónoma en el punto, de acuerdo con:

$$\vec{e}_{\mu'} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \vec{e}_\nu \quad (1.3)$$

Las bases holónomas, se denominan frecuentemente bases coordenadas (ver parágrafo 1.2.3.). Existen otras bases que se dicen anholónomas.

1.1.2. Transporte Paralelo

Sea un espacio euclideo tridimensional y transportemos paralelamente un vector \vec{V} desde el punto P de coordenadas x , a un punto vecino Q de coordenadas $x+\Delta x$. Si $\vec{V}'_{\parallel}(x+\Delta x)$ es el vector resultante de esta operación, y teniendo en cuenta que en un espacio euclideo lo natural es elegir el transportado paralelamente de un vector a aquel que mantiene las mismas componentes cartesianas, tenemos que:

$$V'^{\mu}_{\parallel}(x+\Delta x) = V^{\mu}(x) \quad \mu, \nu, \dots = 1, 2, 3 \quad (1.4)$$

Lo cual es cierto si el sistema de coordenadas es cartesiano. Pero para representar los puntos de un espacio euclideo también es posible utilizar otro tipo de coordenadas. Si tomamos coordenadas curvilíneas, entonces para el mismo vector $\vec{V}'_{\parallel}(x+\Delta x)$ tenemos (32):

$$V'^{\mu}_{\parallel}(x+\Delta x) = (R)^{\mu}_{\nu} V^{\nu}(x) \quad (1.5)$$

donde la matriz R de 3×3 corresponde a la rotación necesaria para orientar los vectores que componen la base en el punto $x+\Delta x$, de forma tal que sus direcciones coincidan con aquellos en el punto x . El transporte paralelo puede ser infinitesimal, en consecuencia:

$$R - I = \Delta x^{\lambda} A_{\lambda} \quad (1.6)$$

donde I es la matriz unitaria. La matriz A_{λ} , llamada matriz del campo de gauge, es función del punto y depende del particular sistema de coordenadas elegido. Podemos escribir

$$\begin{aligned} V'^{\mu}_{\parallel}(x+\Delta x) &= (I + \Delta x^{\lambda} A_{\lambda})^{\mu}_{\nu} V^{\nu}(x) \\ &= V^{\mu}(x) - \Delta x^{\lambda} \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}(x) V^{\nu}(x) \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde las $\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}(x)$ son las componentes de la llamada conexión afín.

Debido a que la forma funcional de los A_{λ} está dada, en este caso, exclusivamente por la elección del sistema de coordenadas a ser empleado, los A_{λ} no nulos en cierta región del espacio no implican,

necesariamente, la existencia de un genuino campo de gauge en dicha región. De hecho en un espacio plano todos los A_μ se pueden anular en todos los puntos tomando coordenadas cartesianas. Es por lo dicho, que un campo de gauge genuino debe corresponder a un espacio no plano. Si el espacio es no euclideo los A_μ deben ser determinados no sólo en relación con el sistema de coordenadas empleado, sino también a partir de una particular definición de "paralelismo". Ello es debido al hecho de que la natural definición de paralelismo (entre vectores) se pierde en un tal espacio. En este caso no se puede tomar, en forma global, un sistema de coordenadas cartesianas; en otras palabras, no existe una transformación (1.3) que para todos los puntos del espacio conduzca a un sistema cartesiano global (ver parágrafo 1.1.4.), y siempre

$$V^\mu_{||}(x+\Delta x) = V^\mu(x) - \Delta x^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu}(x) V^\nu(x) \tag{1.8}$$

En Relatividad se trabaja con puntos pertenecientes a un espacio cuadridimensional llamado espacio-tiempo. Toda vez que en las expresiones relativistas nos refiramos a sistemas de coordenadas curvilíneas utilizaremos los índices holónomos:

$$\mu, \nu, \lambda, \dots = 0, 1, 2, 3$$

Denotaremos δV^μ a la variación producida en las componentes de un vector \vec{V} al ser este transportado paralelamente. Por extensión de (1.8) tenemos:

$$\delta V^\mu = V^\mu_{||}(x+\Delta x) - V^\mu(x) = - \Delta x^\nu \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x) V^\lambda(x) \tag{1.9}$$

1.1.3. Diferenciación Covariante

En un espacio-tiempo plano nos es posible trabajar globalmente con coordenadas cartesianas (tal es el caso del espacio de Minkowski de la Relatividad Especial). Las componentes cartesianas del diferencial de un vector \vec{V} son las componentes de un vector, mientras que las

derivadas $\partial v^\mu / \partial x^\nu$ forman un tensor.

Sin embargo cuando trabajamos en coordenadas curvilíneas, las dv^μ no son las componentes de un vector y las $\partial v^\mu / \partial x^\nu$ no son las componentes de un tensor. Al pasar de unas coordenadas curvilíneas a otras, en la ley de transformación para vectores

$$V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} V'^\nu \quad (1.10)$$

los coeficientes $\partial x^\mu / \partial x'^\nu$ dependen del punto. Para obtener la diferencial de un vector es necesario que los dos vectores que hay que restar estén aplicados al mismo punto del espacio. O sea, debemos transportar paralelamente uno de los dos vectores al punto infinitamente cercano en donde está localizado el otro, hecho lo cual determinaremos la diferencia de ambos. Cuando trabajamos con componentes cartesianas un vector transportado paralelamente conserva el valor de sus componentes, lo que no sucede con sus componentes curvilíneas.

Por lo tanto definiremos la derivada covariante de la componente v^μ de un vector en la dirección del vector \vec{e}_ν como:

$$\nabla_\nu V^\mu = \frac{dx^\mu}{dx^\nu} - \frac{\delta x^\mu}{\delta x^\nu} = \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x+\Delta x) - V^\mu(x)}{\Delta x^\nu} \quad (1.11)$$

En consecuencia:

$$\nabla_\nu V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} V^\lambda \quad (1.12)$$

que se transforma como un tensor ante Cambios Generales de Coordenadas (CGC) y por lo tanto adopta la misma forma en todos los sistemas de coordenadas. Por lo tanto la diferenciación covariante implica tener en cuenta no sólo las variaciones punto a punto del campo vectorial, sino también las variaciones de las componentes de los vectores al ser transportados paralelamente. En general, tratándose de tensores,

tendremos:

$$\nabla_{\nu} = \partial_{\nu} + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} f_{\lambda}^{\mu} \quad (1.13)$$

con f_{λ}^{μ} el generador del grupo de las rotaciones para la correspondiente representación del campo tensorial. Si el espacio-tiempo es de Minkowski, entonces resulta siempre posible obtener globalmente, utilizando las coordenadas adecuadas:

$$\nabla_{\nu} V^{\mu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \quad (1.14)$$

1.1.4. Torsión y Curvatura

De la exigencia de que $\nabla_{\nu} v^{\mu}$ sea un tensor, obtenemos la ley de transformación de la conexión afín:

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\theta}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma^{\sigma}_{\rho\theta} - \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\theta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\theta}}{\partial x'^{\mu}} \quad (1.15)$$

El segundo sumando nos muestra que la conexión afín no es un tensor. Utilizando esta ley de transformación se puede probar que la torsión, definida por

$$S_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}) = \Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda} \quad (1.16)$$

es un tensor. (El símbolo $[]$ define la parte antisimétrica).

Otro tensor importante, cuyas componentes se obtienen a partir de la conexión afín y sus derivadas, es el tensor de curvatura:

$$R_{\mu\nu\lambda}^{\sigma} = 2 \partial_{[\mu} \Gamma_{\nu]\lambda}^{\sigma} + 2 \Gamma_{[\mu\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\nu]}^{\delta} \quad (1.17)$$

Al ser las $R_{\mu\nu\lambda}^{\sigma}$ las componentes de un tensor, su dependencia de muestra que en un espacio-tiempo plano todas ellas son nulas en todos

los puntos. (Esto es así porque en coordenadas cartesianas $\Gamma = 0$ en todo el espacio).

Si se quiere transportar paralelamente un vector \vec{v} desde un punto A a otro B, se necesita conocer la curva γ a lo largo de la cual se ha de realizar el desplazamiento. El resultado final, en general, dependerá del camino. Es posible demostrar que la condición necesaria y suficiente para que el paralelismo sea independiente del camino es que sea nulo el tensor de curvatura (33). A un espacio-tiempo que cumpla con esto se lo denomina con Teleparalelismo.

Por otro lado si la torsión es nula se cumple:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \quad (1.18)$$

En tal caso la conexión afín es simétrica. Siendo la torsión un tensor, si (1.18) se satisface en algún sistema de coordenadas, se satisface en todos. Un teorema prueba que para cada punto de un espacio-tiempo de conexión afín simétrica, existe un sistema de coordenadas tal que todas las componentes de Γ se anulan en dicho punto (33). Por lo tanto si en el punto P_0 se cumple (1.18), existe un sistema de coordenadas tal que en él:

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} \Big|_{P_0} = 0 \quad (1.19)$$

Este sistema de coordenadas se denomina geodésico, y al punto P_0 , su origen. En tal sistema, las derivadas covariantes tomadas en su origen, coinciden con las derivadas ordinarias.

1.1.5. Espacio-Tiempo Con Métrica

Si en el espacio-tiempo definimos una distancia y, por lo tanto, por integración, la longitud de una curva cualquiera, obtenemos un espacio-tiempo con métrica. La distancia ds elemental entre dos puntos se define a partir de :

$$ds^2 = (\vec{e}_\mu dx^\mu) \cdot (\vec{e}_\nu dx^\nu) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.20)$$

Las $g_{\mu\nu}$ son simétricas y funciones de las coordenadas, siendo las componentes del tensor métrico g .

Se define el tensor de no metricidad Q como aquel cuyas componentes valen:

$$Q_{\mu\nu\lambda} = -\nabla_\mu g_{\lambda\nu} \quad (1.21)$$

Partiendo de (1.21) nos es posible llegar a la siguiente identidad:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = g^{\lambda\sigma} \Delta_{\nu\mu\sigma}^{\rho\epsilon\theta} \left(\frac{1}{2} \partial_\rho g_{\epsilon\theta} - g_{\theta\epsilon} S_{\rho\epsilon}^\zeta + \frac{1}{2} Q_{\rho\epsilon\theta} \right) \quad (1.22)$$

donde el tensor Δ vale:

$$\Delta_{\nu\mu\sigma}^{\rho\epsilon\theta} = \delta_\nu^\rho \delta_\mu^\epsilon \delta_\sigma^\theta + \delta_\mu^\rho \delta_\sigma^\epsilon \delta_\nu^\theta - \delta_\sigma^\rho \delta_\nu^\epsilon \delta_\mu^\theta \quad (1.23)$$

Si ahora requerimos que todas las $Q_{\mu\nu\lambda}$ sean nulas, lo que significa que las componentes $g_{\mu\nu}$ sean "covariantemente constantes", estaremos preservando las longitudes y los ángulos ante transportes paralelos (9). Esto implica dar algún vínculo entre la métrica y la conexión. Bajo estas condiciones la conexión afín vale:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} - K_{\mu\nu}^\lambda \quad (1.24)$$

donde

$$K_{\mu\nu}^\lambda = -S_{\mu\nu}^\lambda + S_{\nu\mu}^\lambda - S_{\mu\nu}^\lambda \quad (1.25)$$

es el llamado tensor de contorsión, el cual depende de la torsión y de la métrica. A los $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ se los denomina símbolos de Christoffel de segunda especie. De acuerdo con (1.22), exista o no torsión, ellos dependen sólo de la métrica y valen:

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) \quad (1.26)$$

Resultan simétricos y son las únicas componentes de la conexión afín en el caso de que ella sea totalmente simétrica. En consecuencia para los símbolos de Christoffel, en algún sistema de coordenadas, se cumple (1.19). Notemos que de acuerdo con (1.24) y (1.25), existe una parte simétrica de la conexión que también depende de la contorsión.

Diremos que un vector es covariante cuando su ley de transformación ante cambios generales de coordenadas es:

$$V'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} V_\alpha \quad (1.27)$$

Contravariante si:

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \quad (1.28)$$

En un espacio-tiempo dotado de métrica, dado un vector cuyas componentes contravariantes son V^μ , se pueden obtener sus componentes covariantes como sigue:

$$V_\nu = g_{\mu\nu} V^\mu \quad (1.29)$$

Para un tensor con componentes covariantes y contravariantes, como por ejemplo el $T_{\mu\nu}^\lambda$, se cumplirá:

$$T_{\mu\nu}^\lambda = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} g^{\lambda\phi} T^{\rho\sigma}_\phi \quad (1.30)$$

donde las componentes contravariantes $g^{\mu\rho}$ del tensor métrico verifican

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\rho} = \delta_\nu^\rho \quad (1.31)$$

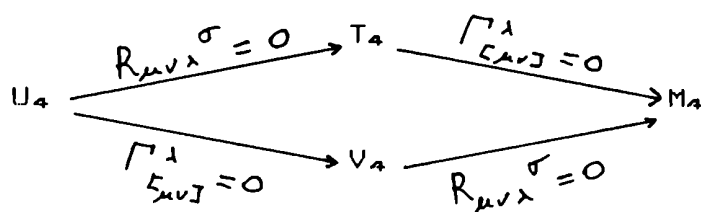
.A un espacio-tiempo con torsión y curvatura y $\Theta = 0$ se lo llama de Riemann - Cartan y lo denominamos U_4 .

.Si el espacio-tiempo posee tensor de curvatura nula, estamos en presencia de un I_4 (espacio-tiempo con teleparalelismo).

.Si el espacio-tiempo posee torsión nula, se trata de un V_4 o espacio-tiempo de Riemann. (La teoría de la Relatividad General de Einstein (R.G.) se desarrolla en una geometría de este tipo).

.Si el espacio-tiempo tiene torsión y curvatura nulas se llama de Minkowski y se denomina M_4 .

$$Q = 0$$



Finalmente definiremos el tensor de Ricci, el cual resulta ser la única contracción del tensor de curvatura (9)

$$R_{\mu\nu} = R_{\lambda\mu\nu}{}^\lambda \tag{1.32}$$

Este tensor es en general no simétrico, pero simétrico en V_4 . Definiremos también el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{1.33}$$

El escalar R que figura en la definición de $G_{\mu\nu}$ se denomina escalar de curvatura o curvatura escalar y vale $R_{\lambda}{}^\lambda$

Los tensores de curvatura, de Ricci y de Einstein y la curvatura escalar son definidos en forma similar en V_4 . En U_4 , la parte de estos tensores y del escalar de curvatura dependientes sólo de los símbolos de Christoffel, se denotan $R_{\mu\nu\lambda}{}^\sigma(\{\})$, $R_{\mu\nu}(\{\})$, $G_{\mu\nu}(\{\})$ y $R(\{\})$ respectivamente. Los tensores $R_{\mu\nu}(\{\})$ y $G_{\mu\nu}(\{\})$ resultan simétricos.

1.1.6. Autoparalelas y Geodésicas

Sea una curva del espacio-tiempo que denotamos por $P(\lambda)$ donde λ es un parámetro. Su vector tangente \vec{u} en el punto $P_0 = P(\lambda = \lambda_0)$ viene dado por:

$$\vec{U} = \left. \frac{dP}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{P(\lambda_0 + \Delta\lambda) - P(\lambda_0)}{\Delta\lambda} \quad (1.34)$$

(Ver Figura 1.1.). Se puede representar al vector \vec{U} como un operador derivada direccional a lo largo de la curva (31):

$$\vec{U} = \partial_{\mathcal{J}} = \frac{d}{d\lambda} \quad (1.35)$$

Podemos escribir \vec{U} como función de sus componentes y de los vectores de una base correspondientes a un sistema de coordenadas $\vec{e}_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu}$

$$\vec{U} = U^{\mu} \vec{e}_{\mu} \quad (1.36)$$

Además, como \vec{e}_{μ} representa a un sistema de referencia holónomo, tenemos

$$\vec{U} = U^{\mu} \partial_{\mu} = \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \quad (1.37)$$

por lo que

$$U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \quad (1.38)$$

Se define como autoparalela a aquella curva a lo largo de la cual un vector es transportado paralelamente a si mismo, de acuerdo con la conexión afín $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ definida en la variedad. Tomando como base la definición (1.35) podemos, a su vez, definir el operador derivada covariante a lo largo de la curva $P(\lambda)$ que denotamos $\nabla_{\mathcal{J}}$.

Precisamente $\nabla_{\mathcal{J}} T(P(0)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1} [T(P(\epsilon)) \text{ transp. par. a } P(0) - T(P(0))]$

Por lo tanto una autoparalela cumple:

$$\nabla_{\mathcal{J}} \vec{U} = 0 \quad (1.39)$$

Escrita en componentes, esta última ecuación se expresa

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0 \quad (1.40)$$

Vemos que sólo la parte simétrica de la conexión afín, dependiente también de la torsión

$$\Gamma^{\mu}_{(\nu\sigma)} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} + 2 S^{\mu}_{(\nu\sigma)} \quad (1.41)$$

entra en la ecuación de la autoparalela. (El símbolo () define la parte simétrica).

Se definen como geodésicas a las líneas extremales de la longitud. Por lo tanto, la ecuación diferencial de la geodésica que pasa por los puntos A y B puede ser derivada de la condición:

$$\delta \int_A^B ds = \delta \int_A^B (g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu})^{1/2} = 0 \quad (1.42)$$

con λ un parámetro. Llamando

$$F = \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \right)^{1/2} \quad (1.43)$$

y

$$\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = \dot{x}^{\mu} \quad (1.44)$$

vemos que la condición (1.42) implica que se cumplen las ecuaciones de Euler:

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\mu}} - \frac{\partial F}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad (1.45)$$

Esto nos lleva a la ecuación diferencial que define las geodésicas en U_4 :

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0 \quad (1.46)$$

que es idéntica a su expresión en V_4 ya que solamente incluye los símbolos de Christoffel. Por lo tanto las geodésicas no dependen de la torsión. Geodésicas y autoparalelas coincidirán si la torsión es totalmente antisimétrica, esto es, si se cumple

$$S_{\mu\nu\lambda} = S_{[\mu\nu\lambda]}$$

dado que entonces en (1.41) $S^{\mu}_{(\nu\sigma)} = 1/2(S^{\mu}_{\nu\sigma} + S^{\mu}_{\sigma\nu}) = 0$.

1.2. SISTEMAS DE REFERENCIA ANHOLONOMOS

1.2.1. Introducción

Para describir el espacio-tiempo podemos introducir bases ortonormales de vectores en cada punto como sistemas de referencias anholónomos. Varias razones justifican el uso de estos sistemas de referencia en teorías de la gravitación.

En primer lugar si existe torsión, dado su carácter tensorial y debido al hecho de que ella constituye toda la parte antisimétrica de la conexión, no existe ningún sistema de coordenadas holónomo donde la conexión afín se anule. Esto dificulta la incorporación de un Principio de Equivalencia al modo de la Relatividad General, dado que el mismo se inspira, básicamente, en la posibilidad de tomar localmente un sistema de coordenadas geodésico en donde la conexión afín se anule (ver parág. 1.1.4.). La condición para que ello sea posible es que la conexión sea totalmente simétrica e implica que, localmente, es posible adoptar un sistema de referencia holónomo cartesiano en el que los transportes paralelos no modifiquen las componentes de los tensores. En consecuencia en un tal sistema, la física viene regida por las leyes de la Relatividad Especial. (En el Capítulo II estudiaremos todo ésto con mayor detenimiento).

En segundo lugar, los sistemas de referencia holónomos son adecuados para describir el comportamiento de tensores; fundamentalmente en lo que hace a la covariancia frente a cambios generales de coordenadas de las ecuaciones que los incluyen. Un Principio de Equivalencia adecuado permitiría, en principio, establecer la forma de las leyes de la física en un espacio-tiempo curvo, conocida la física en el espacio-tiempo plano. El problema se plantea en términos de cómo incorporar espinores cuando se trabaja en un espacio-tiempo curvo, dado que los mismos no son directamente "sensibles" a cambios generales de coordenadas o, en general, a transformaciones que se realicen sobre coordenadas ho-

lónomas. El comportamiento de los espinores es conocido en el marco de la geometría M_4 , esto es, teniendo como "fondo" sistemas de referencia ortonormales. En consecuencia, toda vez que sea necesario incorporar en el formalismo, campos de materia con características espinoriales e imponer simetrías, deberá establecerse un nexo entre sus espacios de representación y el espacio-tiempo.

En tercer lugar, la incorporación de sistemas de referencia anholónomos permitirá deducir ecuaciones para el campo gravitatorio en el marco de una teoría de gauge de la gravitación.

1.2.2. Derivada de Lie

Para visualizar mejor el carácter que asume esta derivada y con el fin de estudiar posteriormente su íntima relación con la torsión y con la anholomía de sistemas de referencia, trabajaremos, por el momento, en un espacio-tiempo plano.

Sean dos campos vectoriales que denotaremos por \vec{u} y \vec{v} , y calculemos en el punto P_0 la derivada de Lie del vector \vec{v} respecto del vector \vec{u} , definida como (31):

$$\mathcal{L}_{\vec{u}} \vec{v} = [\vec{u}, \vec{v}] = \partial_{\vec{u}} \vec{v} - \partial_{\vec{v}} \vec{u} \quad (1.47)$$

En la Figura 1.2. hemos dibujado los vectores $\vec{u}(P_0)$ y $\vec{v}(P_0)$, y los puntos P_1 (situado en el "extremo" del vector $\vec{u}(P_0)$), y P_2 (en el "extremo" del vector $\vec{v}(P_0)$). Las curvas dibujadas representan aquellas a las cuales son tangentes los vectores \vec{u} y \vec{v} respectivamente.

Tomemos ahora los vectores $\vec{v}(P_1)$ y $\vec{u}(P_2)$. Hasta primer orden, la derivada de Lie resulta ser el vector punteado que, en la Figura 1.3., va de P_3 a P_4 . O sea, si los puntos en cuestión son infinitamente cercanos, se cumplirá como veremos:

$$\begin{aligned}
 [\vec{U}, \vec{V}]_1 &= \vec{U}(P_0) + \vec{V}(P_1) - \vec{V}(P_0) - \vec{U}(P_2) \\
 &= [\vec{U}(P_0) - \vec{U}(P_2)] + [\vec{V}(P_1) - \vec{V}(P_0)]
 \end{aligned}$$

(1.48)

En efecto, comparemos $\vec{u}(P_0)$ y $\vec{u}(P_2)$. El vector $\vec{u}(P_2)$ está aplicado en un punto de aquella curva respecto de la cual $\vec{v}(P_0)$ y $\vec{v}(P_2)$ son tangentes (este último vector no se ha dibujado en la Figura 1.3.). Utilizando la notación del párrafo 1.1.6., la variación hasta primer orden de \vec{u} respecto de la curva a la cual el campo representado por \vec{v} es tangente podemos escribirla:

$$\vec{U}(P_2) - \vec{U}(P_0) = \partial_{\vec{V}} \vec{U} \tag{1.49}$$

En una base holónoma \vec{e}_μ , $\vec{u} = u^\mu \vec{e}_\mu$ con $\vec{e}_\mu = \partial_\mu$. Entonces tenemos

$$\vec{U} = \partial_{\vec{U}} = U^\mu \partial_\mu \tag{1.50}$$

Por lo tanto

$$\vec{U}(P_2) - \vec{U}(P_0) = \partial_{\vec{V}} (U^\mu \vec{e}_\mu) = V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} (U^\mu \vec{e}_\mu) \tag{1.51}$$

Desarrollando (1.51) y haciendo lo propio con $\partial_{\vec{V}} \vec{V}$ obtenemos:

$$\vec{U}(P_2) - \vec{U}(P_0) = V^\nu \frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu} \vec{e}_\mu \Big|_{P_0} + V^\nu U^\mu \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu} \Big|_{P_0} \tag{1.52}$$

$$\vec{V}(P_1) - \vec{V}(P_0) = U^\nu \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \vec{e}_\mu \Big|_{P_0} + U^\nu V^\mu \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu} \Big|_{P_0} \tag{1.53}$$

Por lo tanto (1.48) queda

$$[\vec{U}, \vec{V}] = V^\mu{}_{,\nu} U^\nu \vec{e}_\mu - U^\mu{}_{,\nu} V^\nu \vec{e}_\mu \tag{1.54}$$

que es la derivada de Lie (1.47). (La coma indica derivación ordinaria y debemos recordar que las componentes de \vec{u} y \vec{v} son holónomas). Como el mismo razonamiento a primer orden es válido aún cuando los vectores no estén sobre el mismo plano, la interpretación geométrica de la

derivada de Lie en un espacio-tiempo curvo, es similar. En tal caso, el extremo de cada vector "no se encuentra" en la variedad.

1.2.3. Derivada de Lie Para Bases Anholónomas. Un Ejemplo

Para cualquier par de elementos \vec{e}_μ y \vec{e}_ν de una base holónoma se verifica:

$$[\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu] = \partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu = 0 \quad (1.55)$$

Para el caso de una base anholónoma será, para por lo menos un par de versores,

$$[\vec{e}_{\hat{\mu}}, \vec{e}_{\hat{\nu}}] \neq 0 \quad (1.56)$$

donde diferenciamos con una tilde el índice anholónomo del holónomo. Esta notación se justifica cuando $\vec{e}_{\hat{\mu}} // \vec{e}_\mu$.

Para visualizar el hecho de que la derivada de Lie para el caso de versores anholónomos no es nula, estudiaremos, en un espacio euclideo de tres dimensiones, lo que sucede en la superficie bidimensional de una esfera. La esfera posee un radio a . Utilizaremos los vectores de la base holónoma \vec{e}_θ y \vec{e}_ϕ referidos a las coordenadas esféricas θ y ϕ respectivamente. Recordando que $g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu$ tenemos:

$$g_{\theta\phi} = 0 \quad g_{\theta\theta} = a^2 \quad g_{\phi\phi} = a^2 \text{sen}^2 \theta \quad (1.57)$$

Si tomamos $\vec{e}_{\hat{\theta}}$ y $\vec{e}_{\hat{\phi}}$ de forma tal de que sean paralelos a \vec{e}_θ y \vec{e}_ϕ respectivamente, y exigimos ortonormalidad, esto es $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \delta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, tenemos:

$$\vec{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{a} \vec{e}_\theta \quad \vec{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{a \text{sen} \theta} \vec{e}_\phi \quad (1.58a, b)$$

Calculemos $[\vec{e}_{\hat{\theta}}, \vec{e}_{\hat{\phi}}]$

$$[\vec{e}_{\hat{\theta}}, \vec{e}_{\hat{\phi}}] = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{1}{a \text{sen} \theta} \vec{e}_\phi \right)^\mu (\vec{e}_{\hat{\theta}})^\nu \vec{e}_\mu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{1}{a} \vec{e}_\theta \right)^\mu (\vec{e}_{\hat{\phi}})^\nu \vec{e}_\mu \quad (1.59)$$

Trabajando un poco llegamos a:

$$[\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi] = - \frac{\cotg \theta}{a} \vec{e}_\phi \quad (1.60)$$

Veamos cómo puede interpretarse esto gráficamente. En un punto P_0 dibujamos los vectores \vec{e}_θ y \vec{e}_ϕ holónomos. Estos vectores "se salen" de la variedad (en el párrafo anterior ya se discutió este hecho). Los vectores \vec{e}_θ son tangentes a los meridianos, mientras que los \vec{e}_ϕ lo son a los paralelos. Vemos en la Figura 1.4. que los meridianos no guardan siempre la misma distancia entre si, contrariamente a lo que sucede con los paralelos. Por ejemplo, a la altura de P_0 y P_2 los meridianos representados en la figura se encuentran más cerca entre si que cuando se encuentran a la altura de P_1 y P_3 . Además se puede ver que $|\vec{e}_\phi(P_0)| < |\vec{e}_\phi(P_1)|$ ya que $\theta(P_0) < \theta(P_1)$ y $\vec{e}_\phi = a \operatorname{sen} \theta \vec{e}_\Delta$ con $|\vec{e}_\Delta| = 1$; en cambio $|\vec{e}_\theta(P_0)| = |\vec{e}_\theta(P_2)|$.

Veamos ahora qué sucede con \vec{e}_θ y \vec{e}_Δ . En la Figura 1.5. vemos que los versores anholónomos, al ser unitarios, no logran "cerrar" el "cuadrilátero". Si se va desde P_0 a P_2 a lo largo de una curva, cuyo vector tangente es \vec{e}_Δ , cierta longitud a_1 hasta el punto P_2 , y de allí cierta longitud a_2 hasta el punto P_3 a lo largo de la curva cuyo vector tangente es \vec{e}_θ , no se llega al mismo punto si se recorre, en cambio, una longitud a_2 desde P_0 a lo largo de la curva cuyo vector tangente es \vec{e}_θ y luego a_1 hasta un punto a lo largo de la curva cuyo vector tangente es \vec{e}_Δ . Esto se ilustra en la Figura 1.6. (En esta figura P_3 y P_2 parecerían coincidir, pero hay que tener en cuenta que en realidad estamos representando en un plano, la superficie de una esfera). La situación aquí expuesta se puede visualizar en la Figura 1.7. (idéntica a la Figura 1.4., pero sin los versores) donde $l_2 > l_1$.

Concluimos que las curvas a las cuales \vec{e}_Δ y \vec{e}_θ son tangentes se superponen a aquellas a las cuales son tangentes \vec{e}_ϕ y \vec{e}_θ res-

pectivamente; pero ambos tipos de curvas están parametrizadas en forma distinta. Podemos afirmar que las curvas a las cuales \vec{e}_θ y \vec{e}_ϕ son tangentes, están "coordinadas". No así las "curvas anholónomas".

Notemos que localmente, \vec{e}_θ y \vec{e}_ϕ pueden ser utilizados como versores de un sistema de coordenadas, si en nuestro ejemplo, el radio a es lo suficientemente grande o la zona considerada tiene una variación de la coordenada θ lo suficientemente pequeña (lo que implica tomar una región lo suficientemente reducida). Lo dicho está íntimamente ligado a la posibilidad de tomar localmente sistemas de referencia inerciales, adoptando, en particular, coordenadas cartesianas con una métrica minkowskiana.

1.2.4. Tétradas Ortonormales Como Sistemas de Referencia Anholónomos

En este párrafo definiremos el campo de tétradas (o vierbein) y una nueva conexión.

Usaremos las primeras letras del alfabeto griego para indicar índices anholónomos: $\alpha, \beta, \gamma \dots = 0, 1, 2, 3$, utilizando el resto del alfabeto para indicar índices holónomos $\mu, \nu, \lambda \dots = 0, 1, 2, 3$.

i) Campos de tétrada $\vec{e}_\alpha(x)$: En cada punto del espacio-tiempo introducimos una base ortonormal de cuatro vectores que llamamos tétrada:

$$\vec{e}_\alpha(x) = e^\mu{}_\alpha(x) \partial_\mu \quad (1.61)$$

donde $e^\mu{}_\alpha$ representa la componente contravariante μ de un elemento de la base \vec{e}_α respecto de una base holónoma. También definimos el dual

$$\vec{e}^\alpha(x) = e_\mu{}^\alpha(x) d\vec{x}^\mu \quad (1.62)$$

Para estos vectores se cumple

(1.63)

o, lo que es equivalente:

$$g_{\mu\nu} e^\mu_\alpha e^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad (1.64)$$

donde las $\eta_{\alpha\beta}$ son las componentes del tensor métrico de Minkowski

$$\eta_{00} = -1 \quad \eta_{ij} = \delta_{ij} \quad \eta_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{si } \alpha \neq \beta$$

De la (1.64), y teniendo en cuenta que $\eta_{\alpha\beta} \eta^{\beta\sigma} = \delta_\alpha^\sigma$, obtenemos

$$e^\mu_\alpha e_\mu^\sigma = \delta_\alpha^\sigma \quad (1.65)$$

La distancia infinitesimal ds entre los puntos x y $x+dx$, viene dada por:

$$ds = (\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{1/2} \quad (1.66)$$

siendo $dx^\alpha = e_\mu^\alpha dx^\mu$.

Si bien las $e_\mu^\alpha(x)$ dependen del sistema de coordenadas x^μ , el campo \vec{e}_α es totalmente independiente de él. Tomemos por ejemplo un vector \vec{A} con componentes A^α en una base anholónoma y notemos que

$$A^\alpha = e_\mu^\alpha A^\mu = e_{\mu'}^\alpha A^{\mu'} \quad (1.67)$$

donde x^μ y $x^{\mu'}$ son dos sistemas de coordenadas distintos.

ii) Orientación relativa de las tétradas: Para cada punto $x \in U_\alpha$, es posible construir respecto de cada dirección dx^μ , una tétrada $\vec{e}_\alpha''(x, dx)$ que definiremos como la paralela a $\vec{e}_\alpha'(x+dx)$. (Ver Figura 1.8.). Esta notación la hemos tomado de (34). Para ello se define un transporte paralelo de la tétrada con respecto a una dirección holónoma μ . Las componentes de la conexión que llamaremos "conexión mixta" utilizada en este transporte paralelo, se denotan $\Gamma_{\mu\alpha}^\beta$. En consecuencia

$$\vec{e}''_{\alpha}(x, dx) = \vec{e}_{\alpha}(x) + \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}(x) \vec{e}_{\beta}(x) dx^{\mu} \quad (1.68)$$

Esta conexión nos permite definir, entonces, una tétrada paralela a la correspondiente al punto $x+dx$, en el punto x . De la condición

$$(\vec{e}''_{\alpha} \cdot \vec{e}''_{\beta})(x, dx) = (\vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta})(x+dx) = \eta_{\alpha\beta} \quad (1.69)$$

obtenemos

$$\Gamma_{\mu(\alpha\beta)} = 0 \quad (1.70)$$

El paralelo a un vector, en principio, puede definirse en forma arbitraria. En nuestra definición de paralelismo hemos impuesto conservación de la norma (ecuac. (1.69)), que es lo que se exige en Relatividad Especial, en el correspondiente transporte paralelo en el espacio de Minkowski.

1.2.5. Derivadas Covariantes

Para expresar las componentes anholónomas de un tensor en componentes holónomas y viceversa, se utilizan las distintas componentes de la tétrada y de su dual. Así, por ejemplo, para un tensor de cuarto rango:

$$T_{\mu}^{\nu\alpha}{}_{\rho} = e_{\mu}^{\delta} e_{\delta}^{\nu} e_{\lambda}^{\alpha} e^{\sigma\rho} T_{\delta}^{\lambda\sigma} \quad (1.74)$$

Para vectores tenemos

$$V^{\alpha} = e_{\mu}^{\alpha} V^{\mu} \quad V^{\mu} = e^{\mu}_{\alpha} V^{\alpha} \quad (1.75a,b)$$

Obtengamos la expresión de la derivada covariante en una dirección coordenada de un vector expresado en una base anholónoma. Sabemos que:

$$\nabla_{\nu} V^{\alpha} = \nabla_{\nu} (e_{\mu}^{\alpha} V^{\mu}) = V^{\mu} \nabla_{\nu} e_{\mu}^{\alpha} + e_{\mu}^{\alpha} \nabla_{\nu} V^{\mu} \quad (1.76)$$

Además

$$\nabla_{\nu} e_{\mu}^{\alpha} = \nabla_{\nu} (\vec{e}^{\alpha})_{\mu} = \partial_{\nu} (\vec{e}^{\alpha})_{\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} (\vec{e}^{\alpha})_{\rho} \quad (1.77)$$

$$y \quad \nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\rho \quad (1.78)$$

Entonces

$$\nabla_\nu V^\alpha = V^\mu \partial_\nu (e_\mu^\alpha) + e_\mu^\alpha \partial_\nu V^\mu = \partial_\nu (e_\mu^\alpha V^\mu) \quad (1.79)$$

Lo que implica que

$$\nabla_\nu V^\alpha = \partial_\nu V^\alpha \quad (1.80)$$

Resultado que se podía haber obtenido sin más que pensar que v^α , al no poseer índices holónomos, es un escalar para la base coordenada. Podemos extender este resultado y afirmar que toda componente de un tensor referida a una tétrada, se comporta como un escalar en la base holónoma.

Definiremos a continuación la derivada covariante con respecto a una dirección coordenada, respecto de las componentes anholónomas de un vector:

$$\Delta_\nu V^\alpha \equiv e_\mu^\alpha \nabla_\nu V^\mu \quad (1.81)$$

Como de acuerdo con (1.68) debe ser

$$\nabla_\mu e_\alpha^\nu = \lim_{\Delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{e_\alpha^\nu(x^\mu + \Delta x^\mu) - e_\alpha^\nu(x^\mu)}{\Delta x^\mu} = \Gamma_{\mu\alpha}^\beta e_\beta^\nu \quad (1.82)$$

y dado que también se cumple que

$$\nabla_\mu e_\alpha^\nu = \frac{\partial e_\alpha^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_\rho^\alpha \quad (1.83)$$

obtenemos

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = e_\nu^\alpha e_\beta^\lambda \Gamma_{\mu\alpha}^\beta + e_\beta^\lambda \partial_\mu e_\nu^\beta \quad (1.84)$$

Esta expresión relaciona ambas conexiones. Haciendo uso de (1.81) y (1.84) tenemos que

$$\Delta_\nu V^\alpha = \partial_\nu V^\alpha + \Gamma_{\nu\beta}^\alpha V^\beta \quad (1.85)$$

$$\Delta_\nu V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \quad (1.86)$$

resultado este último que expresa que respecto de esta derivación covariante, las componentes holónomas de un vector (en general de un tensor) se comportan como escalares. A su vez esta derivada covariante aplicada a la tétrada vale

$$\Delta_\nu e_\mu^\alpha = \partial_\nu e_\mu^\alpha + \Gamma_{\nu\beta}^\alpha e_\mu^\beta \quad (1.87)$$

Existe, a su vez, una relación importante, que se verifica para tensores de cualquier rango, y es la siguiente (10):

$$\nabla_\mu A_{\nu\dots}^{\lambda\dots} = e_\nu^\alpha \dots e^{\lambda\beta} \Delta_\mu A_{\alpha\dots}^{\beta\dots} \quad (1.89)$$

que nos da la prescripción para pasar de una derivada covariante a otra.

Digamos, finalmente, que también es posible definir esta derivada con respecto a las direcciones de los versores anholónomos. El operador D_α que la representa viene dado por

$$D_\alpha = e^\mu_\alpha \Delta_\mu \quad (1.90)$$

1.3. SIGNIFICADO GEOMETRICO DE LA TORSION

1.3.1. Relación entre la Torsión y las Derivadas Covariantes de las Bases

Para los vectores de una base holónoma, tenemos:

$$[\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu] = \partial_\mu \vec{e}_\nu - \partial_\nu \vec{e}_\mu = 0 \quad (1.91)$$

donde hemos tenido en cuenta que $\vec{e}_\mu = \partial / \partial x^\mu$. En consecuencia

$$\nabla_\mu \vec{e}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \vec{e}_\lambda - \nabla_\nu \vec{e}_\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \vec{e}_\lambda = 0 \quad (1.92)$$

Agrupando, obtenemos:

$$\nabla_\mu \vec{e}_\nu - \nabla_\nu \vec{e}_\mu = - (\Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \vec{e}_\lambda = 2 \Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda \vec{e}_\lambda \quad (1.93)$$

Por lo tanto

$$\nabla_{[\mu} \vec{e}_{\nu]} = S_{\mu\nu}^\lambda \vec{e}_\lambda \quad (1.94)$$

Esta última relación nos indica que la torsión mide la no conmutatividad de las derivadas covariantes de los vectores holónomos.

Tomando la parte antisimétrica de (1.84) obtenemos la torsión en términos de la tetrada y la conexión mixta:

$$S_{\mu\nu}^\lambda = e^\lambda_\alpha \partial_{[\mu} e_{\nu]}^\alpha + e_{[\nu}^\alpha e^\lambda_\beta \Gamma_{|\mu]} \alpha^\beta \quad (1.95)$$

Sabemos que

$$\nabla_\mu e_\nu^\alpha = \partial_\mu e_\nu^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^\alpha \quad (1.96)$$

$$\nabla_\nu e_\mu^\alpha = \partial_\nu e_\mu^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda e_\lambda^\alpha \quad (1.96')$$

Restando miembro a miembro (1.96) y (1.96') obtenemos

$$\nabla_{[\mu} e_{\nu]}^\alpha = \partial_{[\mu} e_{\nu]}^\alpha - \Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda e_\lambda^\alpha \quad (1.97)$$

Se define el objeto de anholomía como

$$\Omega_{\mu\nu}{}^\alpha = \partial_{[\mu} e_{\nu]}{}^\alpha \quad (1.98)$$

que mide la no conmutatividad de las tétradas. La conexión totalmente anholónoma viene dada por:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = e^\mu{}_\alpha \Gamma_{\mu\beta\gamma} \quad (1.99)$$

Fuede probarse que (10):

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = -\Omega_{\alpha\beta\gamma} + \Omega_{\beta\gamma\alpha} - \Omega_{\gamma\alpha\beta} - S_{\alpha\beta\gamma} - S_{\beta\gamma\alpha} + S_{\gamma\alpha\beta} \quad (1.100)$$

con

$$\Omega_{\alpha\beta}{}^\gamma = e^\mu{}_\alpha e^\nu{}_\beta \Omega_{\mu\nu}{}^\gamma \quad (1.101)$$

Multiplicando ambos miembros de (1.97) por $e^\rho{}_\alpha$ y agrupando, vemos que

$$S_{\mu\nu}{}^\rho = e^\rho{}_\alpha \partial_{[\mu} e_{\nu]}{}^\alpha - e^\rho{}_\alpha \nabla_{[\mu} e_{\nu]}{}^\alpha \quad (1.102)$$

Teniendo en cuenta (1.82) y que la derivada covariante de la métrica es nula:

$$\nabla_\mu e_\nu{}^\alpha = \nabla_\mu (g_{\rho\nu} e^{\rho\alpha}) = g_{\rho\nu} \nabla_\mu e^{\rho\alpha} = \Gamma_\mu{}^{\alpha\beta} e^\rho{}_\beta g_{\rho\nu} \quad (1.103)$$

llegando a

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}{}^\rho &= \frac{1}{2} (\partial_\mu e_\nu{}^\alpha - e_{\nu\beta} \Gamma_\mu{}^{\alpha\beta} - \partial_\nu e_\mu{}^\alpha + e_{\mu\beta} \Gamma_\nu{}^{\alpha\beta}) e^\rho{}_\alpha \\ &= \Omega_{\mu\nu}{}^\rho + e_{[\mu\sigma} \Gamma_{\nu]}{}^{\sigma\rho} e^\rho{}_\alpha \end{aligned} \quad (1.104)$$

de donde

$$e^\rho{}_\alpha D_{[\mu} e_{\nu]}{}^\alpha = S_{\mu\nu}{}^\rho \quad (1.105)$$

Resulta interesante comparar esta última relación con la (1.94).

Por otro lado, si la torsión es nula entonces:

$$D_{[\mu} e_{\nu]}{}^\alpha = 0 \quad (1.106)$$

Y de acuerdo con (1.94), para los vectores de la base holónoma tendremos:

$$\nabla_{[\mu} \vec{e}_{\nu]} = 0 \quad (1.107)$$

1.3.2. Interpretación Geométrica de la Torsión

Nos es posible ahora dar una interpretación geométrica de la torsión.

De (1.54) vemos que

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}] &= (V^{\rho}_{;\sigma} U^{\sigma} - U^{\rho}_{;\sigma} V^{\sigma}) \vec{e}_{\rho} \\ &+ (\Gamma^{\rho}_{\sigma\theta} V^{\theta} U^{\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\theta} V^{\sigma} U^{\theta}) \vec{e}_{\rho} \end{aligned} \quad (1.108)$$

Por lo que

$$[\vec{u}, \vec{v}] - (V^{\rho}_{;\sigma} U^{\sigma} - U^{\rho}_{;\sigma} V^{\sigma}) \vec{e}_{\rho} = S_{\sigma\theta}{}^{\rho} U^{\sigma} V^{\theta} \vec{e}_{\rho} \quad (1.109)$$

(Se ha tenido en cuenta la antisimetría de la torsión). Notemos que en el miembro izquierdo de (1.109) están restadas las derivadas covariantes y las derivadas parciales de los vectores \vec{u} y \vec{v} ; por lo que el mismo representa la diferencia entre los transportes paralelos de \vec{u} y \vec{v} a lo largo de las curvas recíprocas. En consecuencia, el significado de la torsión es el siguiente: sean en un punto los vectores \vec{u} y \vec{v} . Cada vector es transportado paralelamente (empleando la conexión), respecto de la curva a la cual el otro es tangente. Se obtiene así un "paralelogramo" que no cierra. La torsión da cuenta de la magnitud y dirección del vector \vec{w} que representa esta diferencia. Por lo tanto:

$$W^{\mu} = S_{\sigma\theta}{}^{\mu} U^{\sigma} V^{\theta} \quad (1.110)$$

Esto puede visualizarse con la ayuda de la Figura 1.9 .

Finalmente, en un espacio V_4 :

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \nabla_{\vec{u}} \vec{v} - \nabla_{\vec{v}} \vec{u}$$

y el "paralelogramo" clausura.

CAPITULO II

TEORIAS GRAVITATORIAS CON TORSION

En este capítulo expondremos las motivaciones como así también las ideas principales, contenidas en teorías de la gravitación donde los resultados fundamentales provienen de exigir a) invariancias frente al Grupo de Poincaré o bien b) supersimetrías en el lagrangiano.

En la Primera Parte estudiaremos la necesidad de incorporar potenciales de gauge traslacionales y rotacionales, toda vez que se exijan transformaciones de Poincaré dependientes del punto. Una nueva variable geométrica dinámica debe ser incorporada: la torsión. Su incorporación se justifica, a su vez, en la necesidad de dar cuenta de un mayor número de grados de libertad en la materia, que aquellos considerados en R.G. A su vez, la incorporación de la torsión trae aparejada la necesidad de redefinir el Principio de Equivalencia.

En forma particular, estudiaremos la teoría denominada de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECSK). Lo que básicamente la distingue, es la elección de un lagrangiano para los campos gravitatorios libres del tipo de Hilbert-Einstein. Una de las dos ecuaciones de campo que se obtienen indica que la torsión no se propaga, lo que permite reunir en una sola ecuación, de la del tipo de Einstein, a todas las variables del problema. La eliminación de la torsión en la ecuación restante, reemplazándola por las componentes del tensor impulso angular intrínseco, nos lleva a una ecuación combinada. Esto conduce a profundas similitudes entre las teorías ECSK y R.G.

En la Segunda Parte introducimos las supersimetrías y discutimos el hecho de cómo aquellas dependientes del punto, hacen necesaria la existencia de gravedad. Desde muchos puntos de vista la Supergravedad $N=1$ aparece como la teoría supersimétrica más sencilla debido, fun-

damentalmente, al hecho de que incluye sólo un gravitino, partícula supersimétrica del gravitón. En este modelo la torsión aparece como íntimamente ligada al campo gravitínico. Las teorías ECSK y la Supergravedad N=1 son similares en muchos aspectos, particularmente en el caso de Supergravedad libre, lo que conduce a ciertas consecuencias geométricas conceptualmente coincidentes.

PRIMERA PARTE: LA TEORIA ECSK

2.1. INTRODUCCION

Resulta interesante indagar en algunas de las suposiciones que realizó Einstein para elaborar una teoría de la gravitación en el marco de una geometría sin torsión. Establecido el carácter curvo del espacio, una de sus preocupaciones fundamentales consistió en determinar la forma de la trayectoria de partículas puntuales en un fondo geométrico no plano, exigiendo que la expresión de la misma fuera covariante.

En el espacio-tiempo plano de la R.E. las trayectorias de las partículas libres son rectas. En el plano la recta posee la doble condición de ser, por un lado, la distancia más corta entre dos puntos y, por el otro, la de constituir una curva que, una vez parametrizada, puede caracterizarse por medio vectores tangentes que resultan paralelos entre si. Por otro lado, en R.E. no existe ninguna restricción en relación con el tipo de coordenadas a ser empleadas en sus ecuaciones, siempre y cuando las mismas posean un buen comportamiento en aquellas regiones del espacio donde se pretenda utilizarlas, esto es, que no existan singularidades. Sí, en cambio, existe una restricción para la métrica, la cual debe corresponder a la de un espacio plano en todo los puntos del espacio-tiempo: precisamente el tensor que la representa en coordenadas cartesianas debe ser η .

De acuerdo con lo ya discutido en 1.1.2., al utilizar coordenadas

distintas a las cartesianas y, debido al hecho de que los versores tangentes a las líneas coordenadas no son ya paralelos entre si, en la ecuación de la recta deben incluirse las componentes de una conexión afín Γ que "corrija" en su expresión el no paralelismo entre versores. La expresión de una recta considerada como una curva autoparalela conduce, de acuerdo con (1.40) a:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (2.1)$$

donde λ parametriza la curva. Esta ecuación es covariante y la inclusión de la conexión responde exclusivamente a una elección de un sistema de coordenadas no cartesiano. Si estamos en un espacio-tiempo de Minkowski, al expresarse la recta en coordenadas cartesianas, las componentes de dicha conexión son de hecho nulas. Esto se relaciona con el comportamiento no tensorial de la conexión (ver (1.15)).

Al pasar a un espacio-tiempo curvo, esto es, a un espacio donde la curvatura es no nula, la utilización de coordenadas curvilíneas se hace necesaria toda vez que se pretenda expresar en forma global las ecuaciones de la física. La elección de un conveniente sistema de coordenadas depende del particular problema físico. El Principio de Equivalencia Débil (PED), basado en la equivalencia entre la masa inercial y la gravitatoria, permite establecer que en cada punto del espacio una partícula de prueba no cargada y sometida sólo a fuerzas gravitatorias, describe una trayectoria independiente de su estructura y composición. En consecuencia, al escribir la expresión de la trayectoria de un cuerpo, las componentes de la conexión afín estarán representando un verdadero campo: el campo gravitatorio; por lo que todas ellas no podrán anularse globalmente en forma simultánea. Sin embargo, en el caso de que la conexión sea simétrica, esto sí es posible en forma local, adoptando, de acuerdo con (1.19), un conveniente sistema de referencia inercial en el punto. Precisamente en

estos casos, las coordenadas curvilíneas indican la presencia de un campo que curva el espacio y ya no una mera elección de coordenadas, como lo sería en R.E. En consecuencia, la expresión para la trayectoria sigue siendo (2.1), pero ahora las componentes de la conexión están indicando la presencia de un campo gravitatorio (un genuino campo de gauge) que sólo localmente es anulable. Esto, a su vez, se relaciona con el Principio de Equivalencia Fuerte (PEF), que establece que en presencia de un campo gravitatorio, cualquier experimento realizado en un sistema libremente gravitante es independiente de la velocidad de aquel, como así también del instante y lugar en que se lleve a cabo. El PED está contenido en el PEF, de forma tal que cuando estudiamos la curva de partículas libremente gravitantes en forma local, el campo gravitatorio puede ser anulado (todos los $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$), y estas partículas describen rectas, independientemente de sus masas, tal cual sucede con las partículas libres. (Todo esto se discutirá con mayor detenimiento en 2.2.1.)

Esta es fundamentalmente la razón por la cual Einstein adoptó una conexión simétrica para describir el espacio-tiempo curvo. Está claro entonces que en el esquema por él empleado, los potenciales que representan al campo gravitatorio no pueden estar asociados a las componentes de un tensor y, por lo tanto, la parte antisimétrica de la conexión, el tensor de la torsión, debe anularse. Por otro lado, de acuerdo con lo visto en 1.1.5., la hipótesis de no metricidad nula, o sea $Q_{\mu\nu\lambda} = 0$, y la no existencia de torsión, trae aparejado el hecho de que existirá una única conexión compatible con la métrica cuyas componentes son, precisamente, los símbolos de Christoffel de segunda especie (ver (1.22-3) y (1.26)). Como ésta es la conexión elegida para la R.G. y teniendo en cuenta que estos símbolos, de acuerdo con su definición, dependen exclusivamente de la métrica y de sus derivadas, en esta teoría existe una única variable geométrica independiente: la métrica.

De acuerdo con las ecuaciones (1.40) y (1.46), que representan las expresiones para las autoparalelas y geodésicas respectivamente, observamos que en R.G. estas curvas coinciden. Einstein consideraba que, por medio de la conexión, no sólo se podía llevar a una forma covariante la trayectoria de partículas libremente gravitantes, sino, también, toda la física de la R.E. Esto lo condujo a postular un Principio de Equivalencia más general.

Como primera conclusión vemos que en el caso de que exista alguna razón poderosa para establecer una teoría alternativa a R.G. que incluya una conexión no simétrica, ella deberá dar cuenta de la forma de las trayectorias de las partículas de prueba por algún medio que no sea el FED. Y esto en virtud del hecho de que la extensión de la noción de recta de M_4 a U_4 no es aplicable, como sí lo es, en cambio, para el caso de V_4 . Por otro lado, teniendo en cuenta que la física conocida es aquella de la R.E., será necesario un Principio de Equivalencia que dé una prescripción acerca de cómo expresar las funciones de aquella teoría, cuando se trabaja en un espacio-tiempo con torsión.

Fundamentalmente, la incorporación de la parte antisimétrica en la conexión agregará una variable no dependiente de la métrica, indicando este hecho que se está trabajando con un número mayor de grados de libertad geométricos. Si siguiendo el espíritu de la R.G., se formula una teoría donde la geometría y la materia se determinen mutuamente, la incorporación de la torsión como nueva variable geométrica deberá traer aparejada la existencia de fuentes para las cuales la materia posea nuevos grados de libertad respecto de los considerados en R.G.

Macroscópicamente, la masa de los cuerpos extendidos es consecuencia de una suma (de una integración); ello es así, debido a que la masa posee un carácter monopolar. Por otro lado el espín, cuyo carácter es

dipolar, por lo general conduce, en su evaluación macroscópica, a un promedio nulo. Entre otras razones es esta importante distinción entre las características masivas y espinoriales de la materia lo que conduce al hecho de que R.G. posea un buen comportamiento clásico. En efecto, en esta teoría, lo señalado se traduce en tomar como fuente de los campos gravitatorios la parte de la materia asociada con las distribuciones de energía e impulso, como así también la debida a ciertos campos, que como el electromagnético, dan como resultado una distribución no nula a nivel macroscópico.

Sin embargo una argumentación de importancia en favor de la incorporación de la torsión se puede presentar a partir del siguiente análisis:

La materia puede ser descripta por campos de materia $\Psi(x)$, tal cual se lo hace en Teoría de Campos, cuyo comportamiento es bien conocido en R.E. Estos campos "viven" en las tétradas $e_{\mu}^{\alpha}(x)$ y se transforman como tensores-espinores con respecto al grupo de Poincaré, el cual incluye traslaciones y rotaciones. Esta descripción de la materia permite, en consecuencia, establecer su comportamiento espinorial. Pero, a la vez, en esta teoría, las nociones de trayectoria y de partícula (en el sentido clásico), pierden su sentido original. A diferencia de la masa de una partícula de prueba, que en R.G. es una cantidad que surge de una integración de una distribución de energía-impulso extendida a una región del espacio, el campo de materia es claramente, tal cual afirma Hehl, un "objeto" más localizado (10). El pasaje a un espacio-tiempo con torsión y curvatura, hace que la conexión tenga un significado, en principio, diferente a aquel de R.G., y sólo en el límite macroscópico, donde, sin embargo, es posible que queden "residuos" de los efectos espinoriales, la noción de trayectoria recobra el sentido que posee en aquella teoría.

Esta es una objeción de importancia que puede formularse a la elección

"a priori" de una conexión simétrica.

Finalmente digamos que como en R.G. la energía y el impulso se acoplan a la métrica del espacio-tiempo y su ley de conservación está asociada a invariancias del lagrangiano de materia ante traslaciones, es de esperar que el espín se acople a la parte rotacional del grupo de Poincaré.

2.2. EL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA

2.2.1. El Principio de Equivalencia en R.G.

El Principio de Equivalencia Débil (PED) está inspirado en el conocido ejemplo del "ascensor de Einstein" y se basa en la equivalencia entre las masas inercial y gravitatoria de los cuerpos.

Si un observador en un recinto cerrado, verifica que todo cuerpo libre de fuerzas se mueve con movimiento rectilíneo uniforme (o permanece en reposo), puede suponer dos cosas igualmente válidas (35):

- a) su sistema es libremente gravitante, o sea, él se encuentra en el campo gravitatorio de, por ejemplo, una estrella, y en caída libre.
- b) su sistema es un sistema de referencia inercial (esto es, muy alejado de toda distribución de materia).

El PED se puede enunciar como sigue: "Si un cuerpo de prueba no cargado está situado en un evento inicial del espacio-tiempo poseyendo una determinada velocidad, entonces, su trayectoria será independiente de su composición y de su estructura interna" (21). Se trata, en consecuencia, de cuerpos eléctricamente neutros. Estos cuerpos deben ser lo suficientemente pequeños como para hacer despreciables los efectos de las inhomogeneidades de los campos exteriores.

Esto lo podemos expresar matemáticamente haciendo uso de leyes de mecánica elemental. Supongamos una partícula con masa inercial m , moviéndose a velocidad no relativista y sometida a un campo gravitatorio exterior en una región del espacio lo suficientemente pequeña como para que el campo pueda ser representado por el valor constante g . En algún sistema de referencia inercial tendremos:

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = m \vec{g} \quad (2.2)$$

donde la aceleración \vec{g} es válida para todos los cuerpos, independientemente de cuál sea la masa m . Hagamos la transformación (no galileana) (36):

$$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \quad t' = t \quad (2.3a,b)$$

que pasa al sistema no inercial (x', t') . En tal caso el efecto del campo será cancelado por una fuerza no inercial y la ecuación de movimiento será:

$$m \frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} = 0 \quad (2.4)$$

Con respecto a esta ley mecánica que describe el movimiento de la partícula, observadores O y O' no percibirán ninguna diferencia, excepto por el hecho de que O afirmará que ve la acción de un campo gravitatorio, mientras que O' afirmará que no "siente" tal campo. Las ecuaciones (2.2) y (2.4) serán válidas en la medida en que la velocidad de la partícula sea pequeña. Esto implica un campo gravitatorio débil de forma tal que la partícula no sea acelerada hacia velocidades relativistas.

Veamos qué relación tiene lo dicho con las trayectorias geodésicas. En (2.1) podemos parametrizar las curvas x^μ utilizando el diferencial de tiempo propio de la partícula, $d\tau$, que es un invariante, ya que viene dado por:

$$d\bar{t}^2 \equiv -ds^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.5)$$

donde hemos tomado la velocidad de la luz igual a uno ($c=1$). Como la partícula es no relativista:

$$V_i = \frac{dx^i}{d\bar{t}} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{dt}{d\bar{t}} \simeq 1 \quad (2.6a,b)$$

En R.G., (2.1) representa una geodésica; esto es, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$.
Entonces:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ 00 \end{matrix} \right\} \cdot 1 \cdot 1 \simeq 0 \quad \frac{d^2 t}{d\bar{t}^2} \simeq 0 \quad (2.7a,b)$$

Calculando $\left\{ \begin{matrix} i \\ 00 \end{matrix} \right\}$ y teniendo en cuenta que el campo es estacionario, lo que implica que todas las derivadas de $g_{\mu\nu}$ respecto del tiempo son nulas, obtenemos:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \simeq 0 \quad (2.8)$$

Dado que el campo gravitatorio es débil, nos es posible elegir un sistema de coordenadas cuasi cartesiano donde la métrica valga:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.9)$$

Consecuentemente

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \quad (2.10)$$

Comparando este resultado con (2.2), podemos escribir:

$$\frac{1}{2} \nabla g_{00} = \vec{g} \quad (2.11)$$

Como $\vec{g} = -\nabla\phi$, donde ϕ es el campo gravitatorio, tenemos, entonces, que

$$g_{00} = -1 - 2\phi \quad g^{ij} = \delta^{ij} \quad (2.12a,b)$$

También podemos interpretar que en (2.4) los símbolos de Christoffel

son todos nulos, por lo que este sistema libremente gravitante funciona para el observador O' , en relación con el movimiento de los cuerpos, como un sistema inercial. En consecuencia, lo que en la mecánica newtoniana representa un sistema no inercial en caída libre, corresponde, en el límite newtoniano de R.G., a un sistema inercial donde se cumplen las leyes de movimiento de Newton.

Calculemos el valor de la componente R_{oio}^j del tensor de curvatura. Haciendo uso de su definición (1.17) y eliminando las derivadas temporales, obtenemos

$$R_{oio}^j = \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \begin{matrix} j \\ oo \end{matrix} \right\} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} \quad (2.13)$$

Dado que existe por lo menos una componente no nula, el espacio-tiempo es curvo; esto es, las componentes de la conexión están indicando la presencia de un genuino campo de gauge. Esto nos indica que, si bien nos es posible anular localmente los potenciales gravitatorios, no nos es posible anular todas sus derivadas.

Localmente, la trayectoria de una partícula libremente gravitante en algún sistema en caída libre es aquella de la R.E. Teniendo en cuenta además, que la inclusión de la conexión afín es lo que garantiza la covariancia de las ecuaciones, toda vez que en ellas aparezcan derivadas, es razonable postular el Principio de Equivalencia Fuerte (PEF): "En presencia de un campo gravitatorio arbitrario, en cualquier punto del espacio-tiempo, es posible elegir localmente un sistema inercial de coordenadas de forma tal de que en una región lo suficientemente pequeña en torno al punto en cuestión, las leyes de la naturaleza toman la misma forma que en los sistemas de coordenadas no acelerados en ausencia de gravedad" (36). (Hagamos notar que muchos autores, por razones que aquí no vamos a discutir, distinguen dos PEF: uno incluyendo todas las leyes y otro, más débil, que excluye las leyes

gravitacionales). La diferencia importante entre el PED y el PEF, es que este último se refiere a todas las leyes físicas y no exclusivamente a las leyes de movimiento de las partículas de prueba.

Se puede inferir del PEF un Principio General de Covariancia (PGC). El mismo indica que las ecuaciones físicas en los sistemas globales de coordenadas deben cumplir las siguientes tres condiciones:

- a) La ecuación se cumple en ausencia de gravedad; esto es, satisface las leyes de R.E. cuando $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ y $\{\overset{\lambda}{\mu\nu}\} = 0$.
- b) La ecuación es covariante; esto es, preserva su forma bajo una transformación general de coordenadas.
- c) En relación con la métrica, en la ecuación solamente pueden aparecer $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas primeras.

La condición c) es necesaria ya que, en general, existen muchas ecuaciones covariantes que se reducen a la correspondiente de R.E. en ausencia de gravedad. Dado que el PGC se hace uso a una escala pequeña comparada con la escala del campo gravitatorio, debemos esperar que, luego de su aplicación a las leyes de la R.E., las ecuaciones expresadas en coordenadas generalizadas, contengan sólo a $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas primeras (provenientes de derivadas parciales transformadas en covariantes). Ecuaciones conteniendo derivadas mayores, no podrán provenir de la utilización de este principio. Haciendo uso del PGC no es posible, por ejemplo, que en alguna ecuación aparezca el tensor de curvatura, el cual depende de las derivadas segundas de la métrica y no es anulable localmente.

En consecuencia, la prescripción para conocer las leyes en el espacio-tiempo curvo es el acople mínimo que consiste, para ecuaciones de hasta primer orden, en tomar las leyes de R.E. escritas en coordenadas cartesianas y realizar las sustituciones:

$$\eta \rightarrow g \qquad \partial \rightarrow \nabla \qquad (2.14a,b)$$

Schiff ha conjeturado que toda teoría de la gravedad autoconsistente y completa que incluya el PED, necesariamente debe contener el PEF (21).

2.2.2. El Principio de Equivalencia en U_4 . El Acople Mínimo

En R.G. el acople mínimo se obtiene tomando las ecuaciones de R.E. expresadas en un sistema de coordenadas inercial y haciendo las sustituciones:

$$\eta_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\mu\nu} \quad \partial_\alpha \rightarrow \partial_\mu + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} f_\lambda^\mu \quad (2.15)$$

Esto es, por medio de una conexión simétrica, que localmente puede anularse. Este acople es sin duda restrictivo dado que debe entenderse como referido a una clase particular de sistemas de referencia. Precisamente a los holónomos, cuya ley de transformación:

$$dx^\alpha \rightarrow dx^\mu = \varepsilon^\mu_\alpha(x) dx^\alpha \quad (2.16)$$

debe ser integrable. Esto implica

$$\varepsilon^\mu_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \quad (2.17)$$

Los campos de materia que se comportan en R.E. como espinores frente al Grupo de Lorentz, poseen índices espinoriales que se relacionan, de acuerdo con su representación, con los índices de un sistema de referencia, cuya única condición es que posea una métrica $\eta_{\alpha\beta}$. En otras palabras, "viven" en tétradas (36). Por lo tanto y siguiendo las ideas expuestas en (37), digamos que a nivel de Teoría de Campos la restricción (2.17) no es necesaria, y nada impide que los sistemas de referencia locales estén rotados independientemente unos de los otros. Ahora bien, un campo de tétradas no posee los vínculos de los sistemas de referencia holónomos de R.G., lo que a su vez permite la existencia de un mayor número de grados de libertad geométricos.

Ya en M_4 nosotros podemos utilizar tétradas. Más aún, nos es posible

trivializar sus coeficientes, orientándolas paralelamente a las líneas coordenadas del sistema global cartesiano:

$$e_{\mu}^{\alpha} = \delta_{\mu}^{\alpha} \qquad e^{\mu}_{\beta} = \delta_{\beta}^{\mu} \qquad (2.18a,b)$$

En tal caso, obtenemos:

$$\Gamma_{\mu}^{\alpha\beta} = 0 \qquad (2.19)$$

Veamos qué sucede en el espacio-tiempo curvo. En el marco de la Teoría de Campos, es posible enunciar un Principio de Equivalencia como sigue: "Localmente las propiedades de la materia de R.E. en un sistema de referencia no inercial, son indistinguibles de sus propiedades en el correspondiente campo gravitatorio" (37). Esto está íntimamente ligado a la posibilidad de anular la conexión localmente. Observando (1.100), notamos que es posible anular las componentes anholónomas de la conexión, sin que ello implique que la torsión sea nula. La anulación en cada punto, obviamente, dependerá de la elección del campo de tétradas. En efecto, tal cual lo probado en (10), en U_4 es siempre posible obtener en todo punto:

$$e_{\mu}^{\alpha}(\vec{x} = \vec{x}_0) \stackrel{*}{=} \delta_{\mu}^{\alpha} \qquad \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}(\vec{x} = \vec{x}_0) \stackrel{*}{=} 0 \qquad (2.20a,b)$$

donde * significa "válido para un sistema de coordenadas adecuado y tétradas específicas". Esto nos indica que el espacio-tiempo, es en este sentido, localmente minkowskiano, y que a pesar de la existencia de torsión, las componentes de la conexión referida a las tétradas son anulables en cada punto, con tal de tomar un campo de tétradas conveniente.

La existencia en U_4 de las igualdades (2.20a,b), nos permite escribir el lagrangiano correspondiente a los campos de materia por medio de un acople mínimo. Las sustituciones serían:

$$\delta_{\alpha}^{\mu} \rightarrow e^{\mu}_{\alpha} \qquad \partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu} \qquad (2.21a,b)$$

Lo que es posible dado que las (2.20a,b) se cumplen en todos los puntos para una adecuada tetrada. O sea, el lagrangiano debe tener la propiedad:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi, \partial_{\mu} \Psi, e_{\mu}^{\alpha}, \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}) \stackrel{*}{=} L(\Psi, \partial\Psi) \qquad (2.22)$$

donde L corresponde al lagrangiano de la R.E. (Notemos que las derivadas de e_{μ}^{α} y $\Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}$ no aparecen). Como vemos, (2.22) se constituye en un genuino PEF dado que de L obtendremos toda la física en forma covariante a partir del empleo de los potenciales \vec{e}_{μ} y $\Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}$. Por lo tanto, en el contexto de U_4 , puede adoptarse un Principio de Equivalencia referido no a "objetos" directamente observables (como la masa de los cuerpos) y que "viven" en los entornos de los orígenes de sistemas de coordenadas, sino a campos asociados a las tetradas. La igualdad (2.22) - basada a su vez en la existencia de las (2.20a,b) - se restringe a puntos. Precisamente, a aquellos puntos en donde las tetradas han sido aplicadas y en donde los campos de materia están aplicados. En estas tetradas las componentes de la métrica son minkowskianas, y sus orientaciones relativas son, en principio, arbitrarias; no hallándose restringidas como sí lo están entre sí las orientaciones de los sistemas de coordenadas inerciales empleados en R.G. A su vez, la conexión mixta puede ser anulada y no obstante la torsión permanecer no nula. Todo esto está en total acuerdo con lo ya señalado acerca de los grados de libertad que poseen tanto las tetradas como la conexión. En R.G., en cambio, los sistemas libremente gravitantes son considerados sistemas de coordenadas y la anulación de la conexión se supone, de hecho, en una localidad de forma tal de permitir, por ejemplo, dar cuenta del movimiento de partículas que poseen una masa, cuyo valor se obtiene por integración en el espacio. Claramente, también es posible emplear tetradas en R.G., pero la imposición de que la conexión sea simétrica le quita grados de libertad a la

geometría, y como veremos, también a la materia.

Por otro lado, si bien los potenciales gravitatorios (tétrada y conexión) son localmente medibles, no lo son ni la curvatura ni la torsión, dado que ellas incluyen sus derivadas (esto se verá claramente más adelante, a través de las relaciones (2.67) y (2.68), las que muestran explícitamente la dependencia de estos tensores respecto de las derivadas de la tétrada y la conexión). En este sentido, el carácter riemanniano o no riemanniano del espacio-tiempo, no puede ser "descubierto" localmente (10).

El hecho de que sólo se haya enfocado la atención hacia sistemas holónomos, ha hecho pensar por mucho tiempo que una geometría con torsión era incompatible con el Principio de Equivalencia. Sin embargo la Teoría de Campos, que permite incorporar campos de materia asociados con las tétradas, también permite esta redefinición del PEF, necesaria para la formulación de una teoría de gauge de la gravitación.

Resulta interesante observar qué sucede en T_4 y en V_4 con los potenciales de gauge. En T_4 tenemos:

$$R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} \equiv 0 \quad \Gamma_{\mu}{}^{\alpha\beta} \neq 0 \quad S_{\mu\nu}{}^{\alpha} \neq \Omega_{\mu\nu}{}^{\alpha} \quad (2.23)$$

Si tenemos presente (1.84), que nos da la expresión de la conexión como función de $\Gamma_{\mu}{}^{\alpha\beta}$, $e_{\mu}{}^{\alpha}$ y sus derivadas, vemos que la única variable gravitatoria independiente es la tétrada. Por otro lado, en V_4 :

$$S_{\mu\nu}{}^{\alpha} \equiv 0 \quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = -\Omega_{\alpha\beta\gamma} + \Omega_{\beta\gamma\alpha} - \Omega_{\gamma\alpha\beta}$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = 2 \partial_{\mu} \Omega_{\nu\alpha\beta} + \dots \quad (2.24)$$

Teniendo en cuenta (1.98), reconocemos el hecho bien sabido de que en una geometría riemanniana la única variable gravitatoria independiente es la tétrada. En consecuencia, tanto en T_4 como en V_4 , la conexión

es una variable dependiente. Dado que las componentes de la conexión $\Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}$ se relacionan con grados de libertad de la materia - más concretamente, y tal cual se verá en la sección 2.3., con su parte rotacional -, notamos, entonces, que existen coincidencias físicas importantes cuando se trabaja en un espacio-tiempo sin curvatura y con torsión, o en uno que posea torsión nula y curvatura no nula. En este sentido, sólo en un espacio-tiempo U_4 y donde aún existiendo torsión nos es posible definir un Principio de Equivalencia, puede formularse una teoría gravitatoria que de cuenta de todos los grados de libertad que posee la materia espinorial.

Para ejemplificar las implicancias del acople mínimo utilizando una conexión que posea torsión, escribamos en forma covariante y referida a las tétradas, la ecuación de Dirac:

$$(\gamma^{\alpha} D_{\alpha} + i m) \Psi(x) = 0 \quad (2.25)$$

donde las γ corresponden a las matrices de Dirac, $\hbar = 1$ y el operador D viene dado por (1.90), valiéndose:

$$D_{\alpha} = e^{\mu}_{\alpha} (\partial_{\mu} + \Gamma_{\mu}^{\gamma\beta} f_{\beta\gamma}) \quad (2.26)$$

La ecuación (2.25) proviene, precisamente, de un lagrangiano de materia mínimamente acoplado. De acuerdo con (2.20a,b), en las tétradas inerciales, esta ecuación se puede escribir como

$$(\gamma^{\alpha} \partial_{\alpha} + i m) \Psi = 0 \quad (2.27)$$

que es la ecuación de Dirac libre ordinaria. Por lo tanto, ella misma puede ser extendida, mínimamente, a un espacio-tiempo donde el operador D_{α} dependa de la torsión.

2.3. SIMETRÍAS EN M_4

2.3.1. Transformaciones de Poincaré en M_4

En Teoría de Campos la materia está asociada a "campos de materia". Estos campos poseen infinitos grados de libertad y la dinámica de un sistema está descrita por ecuaciones que relacionan entre sí los valores del campo en los distintos puntos. Al requerirse macrocausalidad la determinación del campo y de su derivada en un instante dado determina al campo en todos los puntos y en todos los instantes posteriores (38). En consecuencia, las ecuaciones de campo deben ser ecuaciones diferenciales. A su vez, la existencia de ciertas simetrías conducen a restricciones en la forma de estas ecuaciones y a leyes de conservación.

En el espacio-tiempo plano la simetría fundamental es la invariancia frente al grupo de Poincaré. Consideremos, en primer lugar, una transformación global infinitesimal de las coordenadas cartesianas en el espacio de Minkowski:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \overset{\circ}{\omega}_{\nu}{}^\mu x^\nu + \overset{\circ}{\epsilon}^\mu \quad (2.28)$$

donde $\overset{\circ}{\omega}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\omega}_{[\mu\nu]}$ y $\overset{\circ}{\epsilon}^\mu$ son los 6 y 4 parámetros infinitesimales constantes de las rotaciones y de las traslaciones, respectivamente. La transformación (2.28) puede ser entendida como una traslación seguida de una rotación. El campo de materia transformado y visto en x' debe ser el mismo campo sin transformar en x :

$$\overset{\leftrightarrow}{\Psi}'(x') = \overset{\leftrightarrow}{\Psi}(x) \quad (2.29)$$

Las componentes del campo de materia $\Psi(x)$ respecto de la base coordenada \vec{e}_μ que es, en nuestro caso, ortonormal, se transforma de acuerdo con:

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x') = (1 + \overset{\circ}{\omega}{}^{\nu\mu} f_{\mu\nu}) \Psi(x) \quad (2.30)$$

donde las cantidades $f_{\mu\nu} = f_{[\mu\nu]}$ son los generadores del grupo de

Lorentz asociados al campo Ψ . En todos los casos omitiremos los índices espinoriales y tensoriales.

Sabemos que la física, localmente es la de la R.E., lo que supone métricas minkowskianas en todo el espacio-tiempo. La orientación relativa de los sistemas que poseen estas métricas son en principio arbitrarias, dado que lo que realmente se observa son invariancias locales de Poincaré.

Supongamos, entonces, que realizamos una transformación de las coordenadas con parámetros infinitesimales, ahora, dependientes del punto:

$$X^\mu \rightarrow X'^\mu = X^\mu + \omega_\nu{}^\mu(x) X^\nu + \mathcal{E}^\mu(x) \quad (2.31)$$

Sin embargo, ahora podemos entender (2.31) como una transformación con sólo 4 parámetros independientes $\mathcal{E}^\mu(x)$, que absorben en si mismos los parámetros $\omega_{\mu\nu}(x)$ y $\mathcal{E}^\mu(x)$:

$$\mathcal{E}^\mu(x) = \omega_\nu{}^\mu(x) X^\nu + \mathcal{E}^\mu(x) \quad (2.32)$$

con

$$\frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\nu} = \delta_\nu^\mu + \frac{\partial \mathcal{E}^\mu}{\partial X^\nu} \quad (2.33)$$

En este caso $\omega_\nu{}^\mu(x) X^\nu$ estaría representando una parte de la traslación total $\mathcal{E}^\mu(x)$. La definición (2.32) nos permite redefinir $\mathcal{E}^\mu(x)$ y entonces pensar a

$$X^\mu \rightarrow X'^\mu = X^\mu + \mathcal{E}^\mu(x) \quad (2.34)$$

como un cambio general de coordenadas (CGC). Esto no implica un inconveniente desde el punto de vista matemático. Sin embargo, si lo que se pretende al desarrollar una teoría física es que ella posea ecuaciones invariantes ante transformaciones de gauge locales, y se supone la existencia de magnitudes físicas que, asociadas a las traslaciones y rotaciones, sean independientes entre si, entonces las

rotaciones ω no deben reducirse a traslaciones. En particular, los fermiones poseen una representación espinorial del grupo de Lorentz, mientras que los CBC no la poseen. En consecuencia, si han de incluirse los efectos de los espinores, y ha de suponerse que existe un impulso angular intrínseco o espín no reductible a un impulso asociado a las traslaciones, $\omega(x)$ debe poseer un status independiente de ϵ .

Nos es posible erigir en cada punto del espacio-tiempo un campo de tétradas respecto de las cuales se realicen todas las mediciones de las componentes de los campos. Como trabajamos en M_4 , las bases \vec{e}_α de las tétradas y las correspondientes a las bases cartesianas del sistema global \vec{e}_μ pueden tomarse paralelas. En tal caso tenemos:

$$\vec{e}_\alpha = \delta_\alpha^\mu \vec{e}_\mu \quad \vec{e}_\beta = \delta_\beta^\mu \vec{e}_\mu \quad (2.35a,b)$$

Definiremos la P-transformación del campo $\psi(x)$ en x , como aquella transformación activa consistente en: 1) llevar paralelamente el campo evaluado en $x^\mu - \epsilon^\mu$ al punto x^μ y 2) aplicarle una transformación en x^μ que sea la asociada a una rotación ω en la tétrada situada en x^μ

Trabajaremos primero con P-transformaciones globales. Tenemos en primer lugar una traslación con parámetro ϵ^μ :

$$\psi''(x^\mu - \epsilon^\mu) |_{x^\mu} = \psi(x^\mu) - \epsilon^\mu \partial_\mu \psi(x^\mu) \quad (2.36)$$

(La transformación activa (2.36) tiene su correlato en la transformación pasiva que se denota $\psi'(x^\mu)$ (38):

$$\psi''(x^\mu - \epsilon^\mu) |_{x^\mu} = \psi'(x^\mu)$$

donde $\psi'(x^\mu)$ debe entenderse como el valor del campo sin trasladar en el punto x^μ en un sistema trasladado $-\epsilon^\mu$. En otras palabras, la notación $\psi'(x^\mu)$ tiene sentido en el caso en que se traslada el sistema de coordenadas y se deja el campo fijo al espacio).

Aplicando una rotación con parámetro $\dot{\omega}^{\alpha\beta}$ a (2.36), obtenemos:

$$P\psi(x) = (1 + \dot{\omega}^{\alpha\beta} f_{\beta\alpha} - \dot{E}^{\mu} \partial_{\mu} - \dot{\omega}_{\alpha}^{\beta} x^{\mu} \delta_{\mu}^{\alpha} \partial_{\beta}) \psi(x) \quad (2.37)$$

donde ahora \dot{E}^{α} , $\dot{\omega}^{\alpha\beta}$ y las componentes tensoriales de $\psi(x)$ están referidas a la tétrada, y $\partial_{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\mu} \partial_{\mu}$, corresponden a las (2.35a,b). Los generadores $f_{\alpha\beta}$ y ∂_{α} cumplen las relaciones de conmutación del grupo de Poincaré (39):

$$[f_{\alpha\beta}, f_{\gamma\delta}] = \eta_{\delta[\alpha} f_{\beta]\gamma} - \eta_{\delta[\alpha} f_{\beta]\gamma} \quad (2.38)$$

$$[f_{\alpha\beta}, \partial_{\gamma}] = \eta_{\delta[\alpha} \partial_{\beta]} \quad (2.39)$$

$$[\partial_{\alpha}, \partial_{\beta}] = 0 \quad (2.40)$$

Dado que en el espacio de Minkowski las tétradas \vec{e}_{α} se toman todas paralelas, los generadores \dot{E} de las traslaciones no producen ninguna rotación de los ψ . Lo que se ha ganado con (2.37) es que los generadores $\dot{\omega}$ y \dot{E} sean independientes entre sí, esto es, no reductibles unos a otros; hecho que vendrá asociado con nuevos grados de libertad en la materia. En 2.4.1. analizaremos el caso de las transformaciones de Poincaré locales.

2.3.2. Leyes de Conservación en M_4

El lagrangiano de la R.E. puede ser escrito como

$$L(\psi, \partial_{\alpha} \psi) = L(\psi, \delta_{\alpha}^{\mu} \partial_{\mu} \psi, \eta_{\alpha\beta}, \delta^{\alpha}, \dots) \quad (2.41)$$

Obviamente, excepto por los campos de materia, todas las demás magnitudes son invariantes ante P-transformaciones. Dado que la distribución de los campos, luego de producirse las P-transformaciones,

debe ser equivalente en sus propiedades físicas a la distribución original, la acción W debe permanecer invariante ante P -transformaciones. Esto significa que, luego de trasladar y rotar los campos de materia que conforman el lagrangiano L , y hacer lo propio con los elementos de volumen, la integración de L en todo el espacio-tiempo debe coincidir con la integración original. Esto lo expresamos de la siguiente manera:

$$\delta W = PW - W = 0 = \int_{P\Omega} L(P\psi, \partial_\mu P\psi) d^4x - \int_{\Omega} L(\psi, \partial_\mu \psi) d^4x \quad (2.42)$$

donde $P\Omega$ es el volumen Ω P -transformado. Implementando lo postulado en (2.42), en cada elemento d^4x , obtenemos:

$$0 = \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) \delta \psi + \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta \psi + \right. \right. \\ \left. \left. + (\tilde{\varepsilon}^\alpha + \tilde{\omega}_\gamma^\alpha \delta_\nu^\gamma X^\nu) \delta_\alpha^\mu L \right] \right\} d^4x \quad (2.43)$$

Exigiremos que ψ satisfaga las ecuaciones de campo:

$$\frac{\delta L}{\delta \psi} = \frac{\partial L}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} = 0 \quad (2.44)$$

Por lo tanto el primer paréntesis de (2.43) se anula. Como el integrando debe ser nulo independientemente del punto, y teniendo en cuenta que $\delta \psi = P\psi - \psi$, obtenemos:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi} \tilde{\omega}^{\alpha\beta} f_{\beta\alpha} \psi - \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi} \tilde{\varepsilon}^\alpha \partial_\alpha \psi - \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi} \omega_{\beta\alpha} \delta_\nu^\beta X^\nu \partial_\alpha \psi \right. \\ \left. + \tilde{\varepsilon}^\alpha \delta_\alpha^\mu L + \omega_{\beta\alpha} \delta_\nu^\beta X^\nu \delta_\alpha^\mu L \right) = 0 \quad (2.45)$$

Esta última relación puede escribirse como:

$$\partial_\mu \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi} f_{\beta\alpha} \psi - \delta_\beta^\nu X_\nu \delta_\alpha^\mu L + \delta_\beta^\nu X_\nu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi} \partial_\alpha \psi \right) \tilde{\omega}^{\alpha\beta} \right] \\ - \partial_\mu \left[\left(\delta_\alpha^\mu L - \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi} \partial_\alpha \psi \right) \tilde{\varepsilon}^\alpha \right] = 0 \quad (2.46)$$

Se definen las corrientes canónicas de impulso angular y de energía-impulso respectivamente, como sigue:

$$T_{\alpha\beta}{}^{\mu} \equiv - \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} \psi} f_{\alpha\beta} \psi \quad (2.47)$$

$$\Sigma_{\alpha}{}^{\mu} \equiv \delta_{\alpha}^{\mu} L - \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} \psi} \partial_{\alpha} \psi \quad (2.48)$$

Teniendo en cuenta que las derivadas ∂_{μ} de los coeficientes de los parámetros constantes $\dot{\omega}^{\alpha\beta}$ y $\dot{\xi}^{\alpha}$ deben anularse en forma independiente, llegamos a la siguiente ley de conservación para Σ (correspondiente a la traslación $\dot{\xi}^{\alpha}$):

$$\partial_{\mu} \Sigma_{\alpha}{}^{\mu} = 0 \quad (2.49)$$

Dado el carácter antisimétrico de $\dot{\omega}$, la derivada ∂_{μ} del término que le corresponde en (2.46) puede escribirse:

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} \left[\frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} \psi} f_{\beta\alpha} \dot{\omega}^{\alpha\beta} \psi \right] - \partial_{\mu} \left[x_{\nu} (\delta_{\alpha\beta}^{\nu} \delta_{\alpha}^{\mu} L - \right. \\ \left. - \delta_{\alpha\beta}^{\nu} \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} \psi} \partial_{\alpha} \psi) \dot{\omega}^{\alpha\beta} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Teniendo en cuenta las definiciones (2.47) y (2.48), llegamos a la otra ley de conservación

$$\partial_{\mu} T_{\alpha\beta}{}^{\mu} - \Sigma_{[\alpha\beta]} = 0 \quad (2.51)$$

donde

$$\Sigma_{[\alpha\beta]} = \partial_{\mu} (x_{\nu} \delta_{\alpha\beta}^{\nu} \Sigma_{\alpha}{}^{\mu}) = e_{\mu}{}^{\sigma} \eta_{\sigma\beta} \Sigma_{\alpha}{}^{\mu} \quad (2.52)$$

De (2.51) se desprende que la parte antisimétrica del tensor asociado al parámetro traslacional $\dot{\xi}$, es la divergencia del tensor asociado con el parámetro rotacional $\dot{\omega}$. Es importante señalar el hecho de que si $\psi(x)$ es un campo escalar, entonces él resulta insensible a las rotaciones, dado que para este caso $f_{\alpha\beta} = 0$, obteniéndose $T_{\alpha\beta}{}^{\sigma} = 0$: el tensor energía-impulso es simétrico. Esto está de acuerdo con la posibilidad de simetrizar el tensor energía-impulso en R.E. (40).

2.4. SIMETRIAS EN U_4

2.4.1. Transformaciones locales de Poincaré

Supongamos ahora que los parámetros de las traslaciones y de las rotaciones dependen del punto: $\varepsilon^\mu = \varepsilon^\mu(x)$ y $\omega^{\alpha\beta} = \omega^{\alpha\beta}(x)$. En tal caso

$$\partial_\mu \varepsilon^\alpha \neq 0 \quad (2.53)$$

$$\partial_\mu \omega^{\alpha\beta} \neq 0 \quad (2.54)$$

Los campos se transforman de acuerdo con

$$\Psi(x) \rightarrow P\Psi(x) = (1 + \omega^{\alpha\beta} f_{\beta\alpha} + \varepsilon^\gamma \partial_\gamma) \Psi \quad (2.55)$$

La variación δW de la acción valdrá

$$\delta W = \int_\Omega [(\partial_\mu \varepsilon^\alpha - \omega_\beta^\alpha \delta_\mu^\beta) \Sigma_\alpha^\mu + (\partial_\mu \omega^{\alpha\beta}) \zeta_{\alpha\beta}^\mu] d^4x \quad (2.56)$$

donde ζ y Σ están dados por (2.47) y (2.48), respectivamente. Claramente, bajo estas condiciones una F-transformación que dependa del punto no dará como resultado una nueva distribución de los campos de materia que resulte equivalente a la distribución original. Para obtener invariancia de Poincaré, debemos introducir en el lagrangiano 2 campos de gauge de forma tal de compensar los términos de (2.56) y lograr así que $\delta W = 0$.

$$L(\Psi, \partial\Psi) \rightarrow \mathcal{L}(\Psi, \partial_\mu\Psi, \Gamma_\mu^{\alpha\beta}, e_\mu^\alpha)$$

En consecuencia, acoplamos los 4 potenciales de gauge traslacionales $e_\mu^\alpha(x)$ y los 6 potenciales de gauge rotacionales $\Gamma_\mu^{\alpha\beta} = \Gamma_\mu^{[\alpha\beta]}$ (ver (1.70)), tal que sus respectivas F-transformaciones anulen los términos sobrantes de δW . En consecuencia

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e_\mu^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_\mu^\alpha} \simeq \Sigma_\alpha^\mu \quad (2.57)$$

con

(2.58)

Por otro lado

$$\frac{\delta R}{\delta \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}} \simeq \tau_{\alpha\beta}^{\mu} \quad (2.59)$$

con

$$P \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta} \equiv \delta \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta} \simeq -\partial_{\mu} \omega^{\alpha\beta} \quad (2.60)$$

Esto garantizaría que en (2.56) fuese $\delta W = 0$. Sin embargo, las leyes (2.49) y (2.51) ya no serán válidas, dado que ellas han sido obtenidas suponiendo ε y ω constantes. En consecuencia, las verdaderas definiciones de los tensores energía-impulso e impulso angular (y sus correspondientes leyes de conservación) no serán las mismas que las recién consideradas para (2.56).

Para ver por qué no resulta suficiente incorporar los campos de gauge, veamos qué sucede cuando aplicamos una P-transformación al producto escalar entre $\partial_{\mu} \psi$ y un campo vectorial infinitesimal $\xi^{\mu}(x) = \delta_{\alpha}^{\mu} \xi^{\alpha}(x)$ (9). Si se trata de una transformación global de gauge, obtenemos la condición "rígida" de conservación del producto escalar:

$$P(\xi^{\mu} \partial_{\mu} \psi) = (P \xi^{\alpha}) \delta_{\alpha}^{\mu} \partial_{\mu} (P \psi) \quad (2.61)$$

lo que nos indica que es equivalente comparar las 2 magnitudes y luego P-transformar el resultado, a comparar las magnitudes ya P-transformadas. Sin embargo, si la transformación P depende del punto, teniendo en cuenta (2.58) y (2.60), tendremos:

$$P(\xi^{\mu} \partial_{\mu} \psi) \simeq (P \xi^{\alpha}) (\delta_{\alpha}^{\mu} + \delta e^{\mu}_{\alpha}) (\partial_{\mu} + \delta \Gamma_{\mu}^{\beta\gamma} f_{\delta\beta\gamma}) (P \psi) \quad (2.62)$$

lo que implica que la equivalencia y la "rigidez" han sido perdidas. Esto sugiere que, en realidad, deben hacerse las sustituciones (2.21a,b)

$$\delta_\mu^\alpha \rightarrow e_\mu^\alpha(x) \quad \partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu^{\alpha\beta}(x)$$

que definen el acople mínimo. En consecuencia, la P-transformación de un campo de materia deberá escribirse:

$$P\Psi(x) = (1 + \omega^{\alpha\beta} f_{\beta\alpha} - \epsilon^\alpha D_\alpha) \Psi(x) \quad (2.63)$$

Las reglas de conmutación entre los generadores del nuevo grupo están deducidas en (10) y valen:

$$[f_{\alpha\beta}, D_\gamma] = \eta_{\gamma\alpha} D_\beta - \eta_{\gamma\beta} D_\alpha \quad (2.64)$$

$$[f_{\alpha\beta}, f_{\gamma\delta}] = \eta_{\gamma\alpha} f_{\beta\delta} - \eta_{\delta\alpha} f_{\beta\gamma} - \eta_{\gamma\beta} f_{\alpha\delta} + \eta_{\delta\beta} f_{\alpha\gamma} \quad (2.65)$$

$$[D_\alpha, D_\beta] = -F_{\alpha\beta}{}^\gamma D_\gamma + F_{\alpha\beta}{}^{\delta\gamma} f_{\delta\gamma} \quad (2.66)$$

donde

$$F_{\mu\nu}{}^\gamma = 2(\partial_{[\mu} e_{\nu]}{}^\gamma + \Gamma_{[\mu}^{\alpha\gamma} e_{\nu]}{}^\beta \eta_{\alpha\beta}) = 2D_{[\mu} e_{\nu]}{}^\gamma \quad (2.67)$$

$$F_{\mu\nu}{}^{\delta\gamma} = 2(\partial_{[\mu} \Gamma_{\nu]}{}^{\delta\gamma} + \Gamma_{[\mu}^{\alpha\gamma} \Gamma_{\nu]}{}^{\beta\delta} \eta_{\alpha\beta}) \quad (2.68)$$

Veamos a qué corresponden los campos de gauge $F_{\mu\nu}{}^\gamma$ y $F_{\mu\nu}{}^{\delta\gamma}$. Comparando (2.67) con (1.105) vemos que $F_{\mu\nu}{}^\gamma$ representa la torsión, salvo por un factor 1/2:

$$S_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{1}{2} e^\lambda{}_\alpha F_{\mu\nu}{}^\alpha \quad (2.69)$$

Por otro lado, comparando (2.68) con (1.17) vemos que las $F_{\mu\nu}{}^{\delta\gamma}$ no son otra cosa que las componentes del tensor de curvatura. El valor del conmutador (2.66) nos indica que las traslaciones no conmutan entre sí; esto es, conforman un grupo no abeliano.

A partir de las sustituciones propias del acople mínimo, vemos que (2.62) deberá escribirse

$$P(\xi^\mu D_\mu \Psi) = (P\xi^\alpha)(e^\mu_\alpha + \delta e^\mu_\alpha)(\Delta_\mu + \delta\Gamma_\mu^{\alpha\beta} f_{\gamma\beta})(P\Psi) \quad (2.70)$$

cumpliéndose ahora la condición de "rigidez" siempre que las P-transformaciones de los potenciales de gauge valgan:

$$\delta\Gamma_\mu^{\alpha\beta} = -\Delta_\mu \omega^{\alpha\beta} - \varepsilon^\gamma F_{\gamma\mu}^{\alpha\beta} \quad (2.71)$$

$$\delta e^\mu_\alpha = \omega_\gamma^\alpha e^\mu_\gamma - \Delta_\mu \varepsilon^\alpha - \varepsilon^\gamma F_{\gamma\mu}^\alpha \quad (2.72)$$

de forma tal que (2.70) coincida con

$$P(\xi^\mu D_\mu \Psi) = (P\xi^\alpha)(e^\mu_\alpha \Delta_\mu) P\Psi \quad (2.73)$$

Notemos entonces, que la invariancia local de gauge exige que el espacio-tiempo sea U_4 : curvo y con torsión no nula.

Para el caso de M_4 , vemos que (2.71) y (2.72) conducen a (2.60) y (2.58), respectivamente, ahora en forma exacta; pero no obstante ello, la "deformación" (2.62) subsiste. En este sentido, R.E. no constituye una teoría con invariancia local de Poincaré, dado que ello implicaría incorporar transformaciones cuyo resultado final habría de ser distribuciones no equivalentes de materia. Es necesario, en consecuencia, establecer una independencia entre los potenciales de gauge e y Γ ; los que en el caso de R.E. resultan, por lo dicho, dependientes.

2.4.2. Leyes de conservación en U_4

La acción de la materia se expresa en función de un lagrangiano obtenido por acople mínimo. El Principio de Equivalencia discutido en 2.2.2., nos da la prescripción de cómo expresar covariantemente la física de la R.E. en U_4 . En relación con los campos físicos, toda vez que se realice un tratamiento que involucre una teoría de gauge, es posible establecer una distinción entre campos de materia y campos o potenciales de gauge. Los campos de materia $\Psi(x)$, que pueden poseer tanto índices tensoriales como espinoriales, se corresponden con los de

R.E., por lo que los mismos, originariamente, poseen sólo índices anholónomos. La tétrada es la que relaciona las componentes anholónomas con las propias del espacio-tiempo. En el espíritu de una teoría de gauge, por definición, un campo poseyendo originariamente un índice holónimo, no puede ser un campo de materia (10). Tal es el caso de los potenciales de gauge gravitatorios, o del potencial electromagnético A_μ .

Para obtener las leyes de conservación en U_4 , pediremos que la acción de la materia sea invariante ante P-transformaciones de los campos de materia, de los potenciales de gauge y de los elementos de volumen:

$$\delta W = \int_{P\Omega} \mathcal{L}(P\psi, \partial_\mu P\psi, P e_\mu^\alpha, P \Gamma_\mu^{\alpha\beta}) d^4x - \int_\Omega \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, e_\mu^\alpha, \Gamma_\mu^{\alpha\beta}) d^4x \quad (2.74)$$

donde

$$W = \int_\Omega e L(\psi, e_\mu^\alpha, \Delta_\mu \psi) d^4x = \int_\Omega \mathcal{L}(\psi, \Delta_\mu \psi, e) d^4x \quad (2.75)$$

que incluye $e = \det(e_\mu^\alpha)$ de forma tal que el integrando \mathcal{L} sea una densidad escalar. Podemos escribir (2.74) de la siguiente manera:

$$\int_\Omega \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} P\psi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e_\mu^\alpha} \delta e_\mu^\alpha + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma_\mu^{\alpha\beta}} \delta \Gamma_\mu^{\alpha\beta} + \partial_\mu (e^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_\mu \psi} P\psi) \right] d^4x = 0 \quad (2.76)$$

Dado que se cumplen las ecuaciones de campo provenientes de $\delta \mathcal{L} / \delta \psi = 0$, teniendo en cuenta que ∂_μ puede ser reemplazado por D_μ debido al hecho de que en el paréntesis no existen índices anholónomos libres (ver (1.86)) y que la expresión entre corchetes debe ser válida para cualquier elemento de volumen, obtenemos:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e_{\mu}^{\alpha}} [-\Delta_{\mu} \varepsilon^{\alpha} + \omega_{\gamma}^{\alpha} e_{\mu}^{\gamma} - \varepsilon^{\gamma} F_{\gamma\mu}^{\alpha}] + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}} [-\Delta_{\mu} \omega^{\alpha\beta} - \varepsilon^{\gamma} F_{\gamma\mu}^{\alpha\beta}] + \Delta_{\mu} [\varepsilon^{\alpha} e_{\mu}^{\alpha} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Psi} (-\varepsilon^{\gamma} \Delta_{\gamma} + \omega^{\alpha\beta} f_{\beta\alpha}) \Psi] = 0 \quad (2.77)$$

donde se han reemplazado δe y $\delta \Gamma$ por lo que ellos valen de acuerdo con (2.71) y (2.72), respectivamente. Luego de agrupar, se obtienen los coeficientes de ε^{α} , $D_{\mu} \varepsilon^{\alpha}$, $\omega^{\alpha\beta}$ y $D_{\mu} \omega^{\alpha\beta}$, los cuales deben anularse independientemente, obteniéndose así las siguientes 2 leyes de conservación:

$$D_{\mu} (e \Sigma_{\alpha}^{\mu}) = F_{\alpha\mu}^{\beta} e \Sigma_{\beta}^{\mu} + F_{\alpha\mu}^{\beta\gamma} e \tau_{\beta\gamma}^{\mu} \quad (2.78)$$

$$D_{\mu} (e \tau_{\alpha\beta}^{\mu}) - e \Sigma_{[\alpha\beta]} = 0 \quad (2.79)$$

con las correspondientes definiciones de los tensores impulso angular y energía-impulso:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}} \equiv e \tau_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Psi} f_{\alpha\beta} \Psi \quad (2.80)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e_{\mu}^{\alpha}} \equiv e \Sigma_{\alpha}^{\mu} = e^{\mu}_{\alpha} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Psi} D_{\alpha} \Psi \quad (2.81)$$

A la derecha de la ecuación (2.78) aparecen dos densidades de fuerza. La que multiplica a $\tau_{\beta\gamma}^{\mu}$ posee su análoga en R.G.: es la llamada fuerza de Matthisson y consiste en una fuerza aplicada sobre partículas con espín (10).

Observemos que (2.78) no coincide con la respectiva ley de conservación de R.E., dado que la torsión y la curvatura son tensores. Con esto, el Principio de Equivalencia no se ve contradicho, dado que el mismo, entendido como Principio General de Covariancia, involucra sólo leyes que posean hasta derivadas primeras (ver párrafo 2.2.1.). En efecto, en la divergencia de $e \Sigma_{\alpha}^{\mu}$ hay un término de la forma $D_{\mu} D_{\alpha} \Psi$, esto

es, una derivada segunda del campo de materia. Sin embargo, las leyes de conservación para M_4 emergen, como es de esperar, si tomamos globalmente (2.18) y (2.19) y, simultáneamente, curvatura y torsión nulas:

$$\partial_\gamma \sum_\alpha \sigma^\alpha = 0 \quad (2.82)$$

$$\partial_\gamma \tau_{\alpha\beta}^\gamma - \sum [\alpha\beta\gamma] = 0 \quad (2.83)$$

Resulta importante analizar el caso particular de materia escalar. Ella no posee propiedades que privilegien alguna dirección del espacio y viene representada por campos de materia que no se acoplan a la conexión $\Gamma_\mu^{\alpha\beta}$. Por lo tanto, para este tipo de materia, de acuerdo con (2.80) y siendo $f_{\alpha\beta} = 0$, tenemos

$$\tau_{\alpha\beta}^\mu = 0 \quad (2.84)$$

De esta última condición y de (2.79), se obtiene:

$$\sum [\alpha\beta\gamma] = 0 \quad (2.85)$$

que nos indica que el tensor energía-impulso es simétrico. Llamando a este tensor σ , (2.78) queda:

$$\Delta_\nu (e \sigma_\alpha^\nu) = F_{\alpha\nu}^\gamma e \sigma_\gamma^\nu \quad (2.86)$$

Por lo tanto, comparado con el caso general, en (2.78) sólo un tipo de fuerza permanece.

Pero además, se puede mostrar que (2.86) conduce a la ley de conservación del tensor energía-impulso de R.G. (41):

$$\{\!\!\{ \nabla_\mu \sigma_\nu^\mu = 0 \}\!\!\} \quad (2.87)$$

(El símbolo $\{\!\!\{ \nabla_\mu$ representa la derivada covariante respecto de los

símbolos de Christoffel). La ecuación (2.87) implica que el movimiento de la materia escalar es geodésico, por lo que para ella formalmente, es indistinto "vivir" en U_4 o en V_4 .

Algo análogo sucede en el caso de materia cuyo espín se promedie macroscópicamente a cero (43), o se lo tome igual a cero haciendo $\hbar \rightarrow 0$. Volvamos sobre la ecuación de Dirac (2.25). En el límite $\hbar \rightarrow 0$, esta ecuación se transforma en la ecuación (1.46) de una geodésica (59). Esto significa que las partículas de espín 1/2 que sólo interactúan con el campo gravitatorio, son macroscópicamente "insensibles" a la torsión. Por otro lado, vimos que, sin necesidad de buscar un límite macroscópico, la materia escalar sigue geodésicas. Dado que, cuánticamente el espín de las partículas se mide en unidades \hbar , es razonable que al tomarse $\hbar = 0$, materia que cuánticamente es espinorial, se comporte macroscópicamente como escalar (espín cero). Volveremos más adelante sobre este punto cuando discutamos la diferencia entre partículas de prueba (con o sin espín), y fuentes del campo gravitatorio con espín (Capítulo III, párrafo 3.1.2.). Por otro lado, también veremos, en el Capítulo IV, sección 4.3., que en el límite clásico de la Supergravedad, la partícula de espín 1/2 no sigue una trayectoria geodésica, lo que es debido, fundamentalmente, al hecho de que en aquella teoría, resulta necesario introducir interacciones que en la ecuación de campo libre (2.25) no están presentes.

2.4.3. Las Ecuaciones de Campo de la Teoría ECSK

Para obtener las ecuaciones de campo debemos establecer la acción total W_T , que ha de ser invariante ante F-transformaciones. Esta acción deberá estar constituida por la acción de la materia W_M y la acción W_C correspondiente a los campos (potenciales) gravitatorios e y Γ :

$$W_T = W_M + W_C = \int \mathcal{L}(\psi, \partial\psi, e, \Gamma) d^4x + \int \mathcal{V}(e, \partial e, \Gamma, \partial\Gamma) d^4x \quad (2.88)$$

El lagrangiano \mathcal{V} depende tanto de los potenciales de gauge como de sus

derivadas primeras. Ello es así debido a que estos constituyen sus variables dinámicas.

La teoría de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble surge a partir de la siguiente elección de V :

$$V = \frac{e}{2k} e^\lambda{}_\sigma e^\sigma{}_\beta F_{\sigma\lambda}{}^{\sigma\beta} \quad (2.89)$$

donde k es una constante de acople, cuyo valor coincide con el correspondiente al de R.G. De esta manera se obtiene un adecuado límite newtoniano. Precisamente, la opción (2.89) es la correspondiente a R.G. para un espacio-tiempo U_4 : la curvatura escalar, único término que compone este lagrangiano, está definida a partir de una conexión con torsión no nula. En esta particular elección del lagrangiano correspondiente a los campos gravitatorios, vemos que no existe dependencia respecto de ∂e :

$$V = V(e, \Gamma, \partial\Gamma) \quad (2.90)$$

El principio de acción requiere que:

$$\frac{\delta L_T}{\delta \psi} = \frac{\delta L}{\delta \psi} = 0 \quad (2.91)$$

$$\frac{\delta L_T}{\delta e^\mu{}_\alpha} = \frac{\delta L}{\delta e^\mu{}_\alpha} + \frac{\delta V}{\delta e^\mu{}_\alpha} = 0 \quad (2.92)$$

$$\frac{\delta L_T}{\delta \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}} = \frac{\delta L}{\delta \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}} + \frac{\delta V}{\delta \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}} = 0 \quad (2.93)$$

De las dos últimas ecuaciones y de (2.80) y (2.81), obtenemos:

$$\frac{\delta V}{\delta e^\mu{}_\alpha} = -e \sum_\mu{}^\alpha \quad (2.94)$$

$$\frac{\delta U}{\delta \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}} = -e \tau_{\alpha\beta}^{\mu} \tag{2.95}$$

Partiendo de (2.90) tenemos que

$$\frac{\delta U}{\delta e_{\mu}^{\alpha}} = \frac{\partial U}{\partial e_{\mu}^{\alpha}} \tag{2.96}$$

$$\frac{\delta U}{\delta \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}} = \frac{\partial U}{\partial \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}} - \partial_{\nu} \frac{\partial U}{\partial (\partial_{\nu} \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta})} \tag{2.97}$$

Luego de desarrollar (2.96), la ecuación (2.94) puede escribirse:

$$F_{\gamma\alpha}^{\mu\delta} - \frac{1}{2} e^{\mu}_{\alpha} F_{\gamma\delta}^{\delta\delta} = G_{\alpha}^{\mu} = R \Sigma_{\alpha}^{\mu} \tag{2.98}$$

Por otro lado, el resultado de desarrollar $\partial U / \partial \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}$ conduce a:

$$\frac{\partial U}{\partial \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}} = \frac{2e}{R} e^{[\lambda}_{\beta} e^{\mu]\gamma} \Gamma_{\lambda}^{\delta\delta} \eta_{\alpha\delta} \tag{2.99}$$

mientras que el propio de $\partial_{\nu} \frac{\partial U}{\partial (\partial_{\nu} \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta})}$ a

$$\partial_{\nu} \frac{\partial U}{\partial (\partial_{\nu} \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta})} = \frac{1}{R} (\Delta_{\nu} e e^{[\mu}_{\alpha} e^{\nu]\beta} + e \partial_{\nu} (e^{[\mu}_{\alpha} e^{\nu]\beta})) \tag{2.100}$$

Agrupando (2.99), y (2.100), la ecuación de campo (2.95) queda:

$$\frac{1}{2} F_{\alpha\beta}^{\mu} + e^{\mu}_{[\alpha} F_{\beta]\delta}^{\delta} = R \tau_{\alpha\beta}^{\mu} \tag{2.101}$$

Las ecuaciones (2.98) y (2.101) fueron obtenidas por Kibble y Sciama a partir de otro tipo de consideraciones. Kibble partió del espacio de Minkowski y de una interpretación pasiva de la transformación de Poincaré (ver abajo de (2.36)) (4). Al pasar a una transformación local, la traslación total E^{μ} de (2.34) fue interpretada como un CGC, acoplándosele a ella una rotación activa independiente del campo de materia:

$$X^{\mu} \rightarrow X'^{\mu} = X^{\mu} + E^{\mu}(x) ; \quad \Psi'(x') = (1 + \omega^{\alpha\beta} f_{\beta\alpha}) \Psi(x)$$

En (9) se analiza el hecho de que en esta formulación, e_{μ}^{α} no aparece en forma obvia como constituyéndose en un potencial de gauge. Analizando las transformaciones anteriores, se puede ver que R.E. no es invariante ante una transformación $E = 0$ y $\omega = \text{cte} \neq 0$. Por otro lado, interpretando esta transformación como activa,

$$\Psi'(x) = (1 + \omega^{\alpha\beta} f_{\beta\alpha} - E^{\mu} \partial_{\mu}) \Psi(x)$$

no se describe una rotación independiente de una traslación, debido a que la rotación del campo Ψ se compone de ω y de la rotación de la tetrada E^{μ} . La transformación de Kibble debe ser interpretada formalmente como compuesta por una rotación

$$\omega^{\alpha\beta} \rightarrow \omega^{\alpha\beta} + E^{\mu} \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}$$

e interpretando a las E^{μ} como parámetros de traslaciones pasivas. Dado que la teoría que resulta es invariante ante rotaciones, ella coincide con la que surge a partir de (2.37), donde rotaciones y traslaciones son independientes. En consecuencia, la invariancia ante F-transformaciones implica la invariancia ante CGC.

Sciama partió de la R.G. y supuso que una corriente independiente proveniente de mayores grados de libertad de la materia, correspondía a un potencial de gauge independiente (5). Reemplazando en el lagrangiano total la conexión de R.G. por esta nueva conexión, obtuvo las ecuaciones (2.98) y (2.101).

2.4.4. Las Ecuaciones de la Teoría ECSK en Componentes Holónomas.

Coincidencias entre las Teorías ECSK y R.G.

En U_4 la razón para postular un acople mínimo para el lagrangiano de materia surge, de acuerdo con lo discutido en el parágrafo 2.2.2., a partir de la posibilidad de establecer un P.E. cuando se trabaja en una geometría con torsión. Si se trabaja en un sistema global de coordenadas, este acople se traduce en las sustituciones:

$$\eta \rightarrow g \quad \partial \rightarrow \nabla$$

(2.102a,b)

y, en consecuencia, el lagrangiano de los campos de materia debe escribirse:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \nabla\psi, g) = \mathcal{L}(\psi, \partial\psi, g, \partial g, S) \quad (2.103)$$

El significado físico de este acople es el siguiente: Al existir gravedad el lagrangiano de los campos de materia es aquel de la R.E. escrito en forma covariante, por lo que debe incluir toda la conexión afín. De esta forma el lagrangiano puede ser expresado en todos los puntos del espacio-tiempo por medio de una única función. Este espacio-tiempo contiene curvatura y torsión: al existir gravedad, curvatura y torsión "aparecen" simultáneamente. Ahora bien, en cada punto los campos de materia no deben ser asociados a sistemas de referencia holónomos, sino a tétradas. Y estas tétradas están orientadas de forma tal que su "paralelismo" depende de la torsión, magnitud, como la curvatura, no local.

A partir de (2.103) nos es posible definir dos tensores asociados respectivamente, a los tensores independientes de la métrica y de la torsión:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{2}{e} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (2.104)$$

$$\mu_{\mu}{}^{\nu\lambda} = \frac{1}{e} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta S_{\lambda\nu}{}^{\mu}} \quad (2.105)$$

El tensor energía-impulso "métrico" σ es simétrico.

El espín está acoplado a la contorsión y no a la torsión. Esto puede establecerse fácilmente teniendo en cuenta el transporte paralelo de una tétrada:

$$d\vec{e}_\alpha = (-\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} e_\mu^\beta dx^\mu) \vec{e}_\sigma \quad (2.106)$$

A partir de (1.100), que expresa las componentes de la conexión en cada vierbein, vemos que la rotación sufrida por la tétrada en su transporte paralelo está compuesta por una rotación asociada a la parte riemanniana Ω , y otra proporcional a la contorsión K (Los últimos tres términos de (1.100) corresponden, de acuerdo con (1.25) a $-K_{\alpha\beta\sigma}$). Se define, entonces, el tensor momento angular de espín como

$$\tau_\mu^{\nu\lambda} = \frac{1}{e} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta K_{\lambda\nu}^\mu} \quad (2.107)$$

pudiéndose comprobar fácilmente, a partir de la relación entre la torsión y la contorsión (1.25), que

$$\mu^{\mu\nu\lambda} = -\tau^{\mu\nu\lambda} + \tau^{\nu\lambda\mu} - \tau^{\lambda\mu\nu} \quad (2.108)$$

La acción de la materia

$$W_M = \int \mathcal{L}(\psi, \partial\psi, g, \partial g, \dots) d^4x \quad (2.109)$$

debe ser invariante ante transformaciones del grupo de Poincaré. Trabajando como en el párrafo 2.4.2., esto es, teniendo en cuenta la independencia de los parámetros de las traslaciones y de las rotaciones, y considerando, además, que los campos verifican (2.44), se llega a las 2 leyes de conservación:

$$\overset{*}{\nabla}_\nu \Sigma_\mu^\nu = 2 \Sigma_\lambda^\nu S_{\mu\nu}^\lambda + \tau_{\nu\lambda}^\sigma R_{\mu\sigma}^{\nu\lambda} \quad (2.110)$$

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda \tau_{\mu\nu}^\lambda - \Sigma_{[\mu\nu]} = 0 \quad (2.111)$$

con $\overset{*}{\nabla}_\lambda = \nabla_\lambda + 2 S_{\lambda\sigma}^\sigma$ y donde

$$e \Sigma_\mu^\nu = \mathcal{L} \delta_\mu^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \psi)} \nabla_\mu \psi \quad (2.112)$$

$$e \bar{\sigma}_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \Psi)} f_{\nu\mu} \Psi \quad (2.113)$$

El tensor asimétrico de energía-impulso total Σ se relaciona con los tensores definidos en (2.104), (2.105) y (2.107) a través de:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \mu^{\mu\nu\lambda} = \sigma^{\mu\nu} + \nabla_\lambda (\bar{\sigma}^{\mu\nu\lambda} - \bar{\sigma}^{\nu\lambda\mu} + \bar{\sigma}^{\lambda\mu\nu}) \quad (2.114)$$

Las definiciones (2.112) y (2.113) coinciden con las (2.81) y (2.80), respectivamente, y se constituyen en las transcripciones covariantes de las correspondientes definiciones de R.E.

Es posible escribir las ecuaciones de campo de la teoría ECSK en componentes holónomas, partiendo de las correspondiente escritas en componentes anholónomas. Para ello debemos multiplicar ambos miembros de (2.98) por $e_\nu{}^\alpha$

$$F_{\gamma\nu}{}^{\mu\delta} - \frac{1}{2} \delta_\nu^\alpha F_{\gamma\delta}{}^{\delta\sigma} = k \Sigma_\nu{}^\mu \quad (2.115)$$

Lo que podemos escribir

$$F_{\lambda\nu}{}^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu F_{\lambda\sigma}{}^{\sigma\lambda} = G_\nu{}^\mu = k \Sigma_\nu{}^\mu \quad (2.116)$$

Por otro lado, multiplicando ambos miembros de (2.101) por $e_\nu{}^\alpha e_\lambda{}^\beta$, obtenemos

$$\frac{1}{2} F_{\nu\lambda}{}^{\mu\lambda} + \delta_{[\nu}^\mu F_{\lambda]\gamma}{}^{\gamma\sigma} = k \bar{\sigma}_{\nu\lambda}{}^\mu \quad (2.117)$$

Recordando (2.68), (2.69), (1.17) y reordenando los índices, llegamos a que las dos ecuaciones de campo de la teoría ECSK pueden escribirse:

$$G^{\mu\nu} = k \Sigma^{\mu\nu} \quad (2.118)$$

$$S_{\mu\nu}{}^\lambda + 2 \delta_{[\mu}^\lambda S_{\nu]\sigma}{}^{\sigma\sigma} = k \bar{\sigma}_{\mu\nu}{}^\lambda \quad (2.119)$$

De hecho, estas ecuaciones se pueden obtener considerando, a menos de una divergencia, la variación de la correspondiente acción de los

campos gravitatorios para el lagrangiano

$$V = \frac{e}{2R} R(g, \partial g, \Gamma, \partial \Gamma) \quad (2.120)$$

que es la forma holónoma del lagrangiano (2.89); y realizando las variaciones de la acción total respecto de la métrica y la torsión.

Resulta importante detenerse a analizar las características de las dos ecuaciones de campo (2.118) y (2.119). La primera de ellas es la ecuación de Einstein, pero incluyendo un tensor de Einstein que depende de la torsión y que es, por lo tanto, asimétrico. La segunda ecuación es algebraica (no incluye derivadas parciales), y nos indica que en ausencia de espín, la torsión se anula. Por lo tanto, la teoría ECSK predice una torsión que no se propaga y que sólo no es nula en aquellas regiones del espacio donde existe materia dotada de espín. En consecuencia, en el vacío, el espacio-tiempo de esta teoría corresponde a una geometría V_4 .

Dado el carácter algebraico de la segunda ecuación de campo, resulta siempre posible reemplazar, a la izquierda de la primera ecuación, la parte del tensor de Einstein que depende de la torsión, por las correspondientes componentes del espín. Se obtiene la siguiente ecuación combinada

$$G_{\mu\nu}(\{\}) = k \bar{\sigma}_{\mu\nu} \quad (2.121)$$

donde el tensor energía-impulso combinado vale

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{\mu\nu} = & \sigma^{\mu\nu} + k \left[-4 \zeta^{\mu\lambda} \zeta_{\sigma}^{\nu\lambda} - 2 \zeta^{\mu\lambda\sigma} \zeta_{\lambda\sigma}^{\nu} + \right. \\ & \left. + \zeta^{\lambda\sigma\mu} \zeta_{\lambda\sigma}^{\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (4 \zeta_{\rho}^{\lambda} \zeta_{\sigma}^{\rho\lambda} + \zeta^{\rho\lambda\sigma} \zeta_{\rho\lambda\sigma}) \right] \end{aligned} \quad (2.122)$$

Toda la parte no riemanniana se ha "transformado" en fuente. Dado que debe verificarse $\nabla_{\mu}^{\{\}} G^{\mu\nu}(\{\}) = 0$, tenemos

$$\nabla_{\mu} \bar{\sigma}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.123)$$

Y ahora la conexión afín puede escribirse

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} + k (z_{\mu\nu}^{\lambda} - z_{\nu}^{\lambda}{}_{\mu} + z^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \delta^{\lambda}_{\mu} z_{\nu\sigma}{}^{\sigma} - z_{\mu\nu} z^{\lambda\sigma}{}_{\sigma}) \quad (2.124)$$

Las ecuaciones (2.121) y (2.123) son idénticas a las correspondientes a R.G., con la salvedad que el tensor energía-impulso contiene el espín de las fuentes. Si bien el espacio-tiempo es de tipo U_4 , claramente, estas relaciones incluyen sólo la parte riemanniana de la geometría.

La "eliminación" de la torsión trae aparejado el hecho de que la sustitución (2.102b), conduce, en definitiva, a un acople mínimo con conexión (2.124); respecto de $\left\{ \right\}$, esta sustitución, claramente, no corresponde a un acople mínimo. Se ha probado que para cualquier lagrangiano de materia de M_4 mínimamente acoplado (conexión total) de la teoría ECSK, existe un correspondiente lagrangiano mínimamente acoplado (símbolos de Christoffel) para R.G., que produce las mismas ecuaciones de campo (44). La inversa también es cierta (45). Ello es así, básicamente, debido a que en la teoría ECSK, el tensor energía-impulso que aparece a la derecha de la ecuación de Einstein, puede ser, o bien el tensor energía-impulso canónico (2.112), o bien el tensor energía-impulso combinado (2.122), dependiendo ello de que uno haga uso del tensor de Einstein con conexión total (2.118), o de aquel definido sólo por medio de los símbolos de Christoffel (2.121). El primer caso puede entenderse como una teoría gravitatoria desarrollada en un espacio-tiempo con torsión; el segundo caso puede pensarse como una teoría gravitatoria desarrollada en una geometría V_4 , aunque producida por fuentes que contienen espín.

SEGUNDA PARTE: LA SUPERGRAVEDAD N=1

2.5. SUPERSIMETRÍAS

2.5.1. Transformaciones Supersimétricas Globales

La Supergravedad (SG) es la teoría de gauge de las supersimetrías. La supersimetría es la simetría entre los campos bosónicos y fermiónicos para determinados modelos de lagrangiano.

El modelo más sencillo con supersimetría global es el de Wess-Zumino (13). Supongamos tener un escalar A un pseudoescalar B y un campo de espín 1/2 que llamamos λ , todos sin masa y reales. Definamos el siguiente lagrangiano, suma de dos lagrangianos de Klein-Gordon y uno de Dirac:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu B)^2 - \frac{1}{2} \bar{\lambda} \not{\partial} \lambda \tag{2.125}$$

con $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$, y el conjugado de λ vale:

$$\bar{\lambda} = \lambda^+ \gamma^4 \tag{2.126}$$

donde $+$ significa "transpuesto conjugado". El espinor λ es de Majorana. Los espinores de Majorana son reales y corresponden a una representación irreducible del grupo de Lorentz, poseyendo la mitad de componentes independientes que los espinores de Dirac. En consecuencia verifican:

$$\lambda_\alpha^+ = \lambda_\alpha \tag{2.127}$$

Tomaremos todas las representaciones de las matrices de Dirac $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ como reales, y definimos γ^4 tal que $\gamma^4 = i\gamma^0$; por lo que resulta ser una matriz imaginaria pura.

El lagrangiano (2.125) se dice supersimétrico dado que la acción $S = \int \mathcal{L} d^4x$ es invariante ante las siguientes transformaciones globales (esto es a parámetro ϵ constante):

$$\delta A = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \lambda \quad (2.128)$$

$$\delta B = -\frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma_5 \lambda \quad (2.129)$$

$$\delta \lambda = \frac{1}{2} \not{\epsilon} (A - i B \gamma_5) \epsilon \quad (2.130)$$

donde

$$\bar{\epsilon} = \epsilon^\dagger \gamma^4 \quad (2.131)$$

siendo a su vez

$$\gamma_5 = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 \quad (2.132)$$

matriz que resulta imaginaria. Este modelo es invariante, aún eliminando B. A su vez vemos que

$$(\bar{\epsilon} \lambda)^* = \bar{\lambda} \epsilon = (\lambda)^\alpha (\gamma^4)^\alpha_\beta (\epsilon)^\beta = -\epsilon^\beta (\gamma^4)^\alpha_\beta (\lambda)^\alpha = \bar{\epsilon} \lambda \quad (2.133)$$

dado que γ^4 es antisimétrica en la representación real, con lo que las reglas de transformación de los campos resultan reales. (Se ha tenido en cuenta que ϵ y λ son espinores de Grassmann, esto es, "números" que anticonmutan).

Es fácil probar que la acción S permanece invariante ante las transformaciones (2.128-30). Estudiemos una transformación supersimétrica de (2.125). Considerando (2.128) y (2.130), obtenemos

$$\begin{aligned} \delta \left[-\frac{1}{2} (\partial_\mu A)^2 \right] &= -\frac{1}{2} \delta [\eta^{\mu\nu} \partial_\mu A \partial_\nu A] = \\ &= -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} [\partial_\nu (\delta A) \partial_\mu A + \partial_\nu A \partial_\mu (\delta A)] = \\ &= -\frac{1}{2} (\partial^\mu A) \partial_\mu (\bar{\epsilon} \lambda) \end{aligned} \quad (2.134)$$

$$\begin{aligned} \delta \left(-\frac{1}{2} \bar{\lambda} \not{\epsilon} \lambda \right) &= -\frac{1}{2} \delta(\bar{\lambda}) \not{\epsilon} \lambda - \frac{1}{2} \bar{\lambda} \delta(\not{\epsilon} \lambda) = \\ &= \frac{1}{4} \bar{\epsilon} (\not{\epsilon} A) (\not{\epsilon} \lambda) - \frac{1}{4} \bar{\lambda} \not{\epsilon} \not{\epsilon} A \epsilon \end{aligned} \quad (2.135)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\delta \bar{\lambda} = (\delta \lambda)^\dagger \gamma^4$. Para B el cálculo es

muy similar a aquel que corresponde a A. Como $\bar{\epsilon}\lambda = \bar{\lambda}\epsilon$ y $\bar{\epsilon}\gamma_5\lambda = \bar{\lambda}\gamma_5\epsilon$, se llega a

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu \tag{2.136}$$

donde

$$K^\mu = -\frac{1}{4} \bar{\epsilon} \gamma^\mu [\not{\partial} (A - i\gamma_5 B)] \lambda \tag{2.137}$$

La relación (2.136), muestra que la variación del lagrangiano es una divergencia.

Dado que λ^α y λ^β anticonmutan, el lagrangiano es hermítico. A su vez, la ley general que transforma un fermión F en un bosón D debe darse a través del parámetro supersimétrico:

$$\delta D = \epsilon \bar{F} \tag{2.138}$$

Debemos exigir que ambos lados de la igualdad (2.138) posean las mismas propiedades. En consecuencia, haremos las siguientes consideraciones (17):

i) Dado que los fermiones por su propia estadística deben anticonmutar, los ϵ^α deben ser parámetros anticonmutantes. Se puede probar que las relaciones de conmutación y anticonmutación entre ϵ , F y D valen:

$$\{\epsilon^\alpha, \epsilon^\beta\} = \{\epsilon^\alpha, \bar{\epsilon}_\beta\} = \{\epsilon^\alpha, F\} = [\epsilon^\alpha, D] = \{F, F\} = 0 \tag{2.139}$$

Esto implica que ϵ^α y λ^α cumplen con un álgebra de Grassmann.

ii) Dado que los bosones poseen espín entero y los fermiones semi-entero, el espín de los parámetros ϵ^α deben ser semienteros.

Supondremos el caso más simple: ϵ es de espín 1/2.

iii) Como ϵ es de espín 1/2, entonces la representación irreductible debe poseer como mínimo un bosón y un fermión. En el modelo de Wess-Zumino, existen dos representaciones irreductibles: los dobletes

$$(A+iB, (1+\gamma_5)\lambda) \text{ y } (A-iB, (1-\gamma_5)\lambda)$$

iv) Los campos bosónicos poseen dimensión 1 y los fermiónicos dimensión

$3/2$ en unidades $\hbar = c = 1$; de esta forma la acción no tiene unidades. (De acuerdo con (2.138) las dimensiones de \mathcal{E} son $-1/2$). En consecuencia, la transformación inversa debe ser

$$\delta F = (\partial D) \mathcal{E} \tag{2.140}$$

v) Consideremos 2 transformaciones supersimétricas globales consecutivas de un bosón D . A partir de (2.128) o (2.129), vemos que la primera transforma a D en F ; pero a partir de (2.130) vemos que F se transforma en $\partial_\mu D$. Sabemos de Teoría de Campos que un operador traslacional P_ν cumple (38):

$$i \mathcal{E}^\nu [P_\nu, \varphi_\alpha] = \partial_\nu \varphi_\alpha \mathcal{E}^\nu$$

para todo campo φ_α , siendo \mathcal{E}^ν el parámetro de traslación. Dado que

$$[\delta(\mathcal{E}_1), \delta(\mathcal{E}_2)] D = \frac{1}{2} (\bar{\mathcal{E}}_2 \gamma^\mu \mathcal{E}_1) \partial_\mu D \tag{2.141}$$

podemos entender a la supersimetría global, como la "raíz cuadrada" del operador de las traslaciones. (El resultado (2.141) también es válido para F si es que existen campos auxiliares. Esto se verá en el parágrafo 2.5.3.)

2.5.2. Supersimetrías Locales y Supergravedad

Estudieemos ahora el caso de una supersimetría local, lo que implica $\mathcal{E}^\alpha = \mathcal{E}^\alpha(x)$. Ahora definimos:

$$\delta \lambda = \frac{1}{2} [\not{\partial} (A - i \gamma_5 B)] \mathcal{E}(x) \tag{2.142}$$

Como se supone que las derivadas de los parámetros sólo entran en las leyes de transformación de los campos de gauge, en (2.142) no existen términos $\partial_\mu \mathcal{E}$, dado que esta transformación involucra campos de materia (17). Dado que la acción correspondiente a (2.125) es invariante ante transformaciones supersimétricas globales, la variación de esta acción respecto de un parámetro \mathcal{E} dependiente del punto, deberá ser proporcional a $\partial_\mu \mathcal{E}(x)$. Para el caso global tenemos

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \delta \partial_\mu \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi = \partial_\mu K^\mu \quad (2.143)$$

Para los campos de materia debe satisfacerse la ecuación (2.44). Para $\xi^\alpha = \xi(x)$ podemos seguir el mismo procedimiento que en la sección 2.4. Tendremos

$$\delta \mathcal{L} = \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \right) \delta \varphi = \partial_\mu K^\mu + (\partial_\mu \bar{E}) J^\mu \quad (2.144)$$

con

$$\bar{E} J^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \delta \varphi - K^\mu = -\frac{1}{2} \bar{E} [\not{\partial}(A + i\gamma_5 B)] \gamma^\mu \lambda \quad (2.145)$$

En consecuencia

$$\delta S = \int d^4x (\partial_\mu \bar{E}) J^\mu \quad (2.146)$$

Dado que los campos de gauge se obtienen "agregando" índices holónomos al parámetro, el campo de gauge de la supersimetría debe ser un campo vectorial espinorial ψ_μ^a (con a índice espinorial), llamado gravitino. Su espín debe ser 3/2. En consecuencia, la acción correspondiente a (2.125) tendrá un término adicional:

$$S' = \int d^4x (-\kappa \bar{\psi}_\mu J^\mu) \quad (2.147)$$

donde $\kappa = (8\pi G)^{1/2}$ es una constante de acople. Las dimensiones de esta constante nos indica, como es bien sabido, que las supersimetrías locales requieren de la existencia de gravedad.

Ahora bien, si uno considera la variación de S' , encontrará nuevos términos debidos a δA , δB y $\delta \lambda$. Para los términos cuadráticos en A y B tendremos:

$$\delta(S+S') = \int d^4x \frac{\kappa}{2} (\bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \epsilon) (T^{\mu\nu}(A) + T^{\mu\nu}(B)) \quad (2.148)$$

donde, por ejemplo,

$$T_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A \partial_\nu A - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} (\partial_\lambda A)^2 \quad (2.149)$$

es el tensor energía-impulso correspondiente al campo escalar A. Pero ahora es necesario cancelar estos términos y por lo tanto debe agregarse el acople de un nuevo campo: el $g_{\mu\nu}$, requiriendo que su transformación supersimétrica sea:

$$\delta g_{\mu\nu} = -\frac{\alpha}{2} \Psi_{\mu} \delta_{\nu} E - \frac{\alpha}{2} \bar{\Psi}_{\nu} \delta_{\mu} E \quad (2.150)$$

La idea será, en consecuencia, aquella expuesta en el párrafo 2.4.4.; esto es, debemos covariantizar respecto de la gravedad haciendo las sustituciones del tipo (2.15), e incluyendo e en la acción. Por ejemplo, para el caso del término cuadrático de A en (2.125) debemos escribir:

$$-\frac{1}{2} e g^{\mu\nu} \partial_{\mu} A \partial_{\nu} A$$

cuya variación dará:

$$\frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}(A)$$

Claramente, el campo $g_{\mu\nu}$ puede ser identificado con la métrica. Dado que trabajamos con fermiones, el campo gravitatorio debe expresarse en función de la tétrada e_{μ}^{α} , cuya transformación supersimétrica, a su vez, vale:

$$\delta e_{\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} \alpha \bar{E} \delta^{\alpha} \Psi_{\mu} \quad (2.151)$$

Dado que ahora trabajamos en un espacio-tiempo curvo, también deberá covariantizarse la transformación supersimétrica correspondiente al gravitino. Ella vale:

$$\delta \Psi_{\mu} = \frac{1}{2} D_{\mu} E \quad (2.152)$$

con

$$D_{\mu} E = \partial_{\mu} E + \frac{1}{2} \omega_{\mu}^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} E \quad (2.153)$$

siendo $\omega_{\mu}^{\alpha\beta}$ la conexión espinorial y denotando ahora con $\sigma_{\alpha\beta}$ al

generador de las transformaciones de Lorentz. (Empleamos aquí esta notación, que es la habitual en Supergravedad. El operador derivada covariante empleado en (2.153) es, obviamente, equivalente al (1.13)).

En resumen: Con la incorporación de los campos de gauge ψ_μ^a y e_μ^α , y sus correspondientes transformaciones supersimétricas, se ha conseguido, aunque parcialmente, invariancia supersimétrica local para la acción $S + S'$. Esto es, se ha logrado cancelar los términos provenientes de la variación de la acción original de Wess-Zumino (por medio de la incorporación del gravitino) y los nuevos términos cuadráticos en A y B (por medio de la incorporación de la métrica). Los primeros son de orden $(\chi)^0$, mientras los segundos lo son de orden χ . En la sección 2.7. volveremos sobre la supersimetrización local del lagrangiano de Wess-Zumino, discutiendo el problema de la cancelación de todos los términos a órdenes superiores en χ .

Por todo lo dicho, vemos que las supersimetrías locales hacen necesaria la existencia de la gravedad, la que a su vez "covariantiza" las supersimetrías. De allí que el nombre de esta teoría que estamos tratando sea el de "Supergravedad". A su vez, en este caso en particular se habla de Supergravedad $N=1$, ya que la misma contiene un solo gravitino.

2.5.3. Supergrupo de Poincaré

Definamos para los campos A , B y λ las transformaciones supersimétricas de forma tal que, por ejemplo para A , su correspondiente transformación pueda expresarse como:

$$\delta_Q(\epsilon) A = [A, \bar{\epsilon}_\alpha Q^\alpha] \quad (2.154)$$

Por otro lado, definamos los generadores del Grupo de Poincaré como

$$\delta_P(\xi^\alpha) A = \partial_\alpha A = [A, \xi^\alpha P_\alpha] \quad (2.155)$$

$$\delta(\lambda^{\alpha\beta})\lambda = \frac{1}{2}(\lambda^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta})^a{}_b\lambda = \left[\lambda, \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}\right] \quad (2.156)$$

donde ξ^α y $\lambda^{\alpha\beta}$ son los parámetros infinitesimales de las traslaciones y rotaciones, respectivamente, (análogos a los ε^α y $\omega^{\alpha\beta}$ del párrafo 2.4.1.), y P_α y $M_{\alpha\beta}$ son los generadores de las traslaciones y rotaciones, respectivamente. Luego de mucho álgebra, se puede llegar, cuando se actúa sobre A o B, a las siguientes relaciones de conmutación y anticonmutación (17):

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] = \delta_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta} + \dots \quad (2.157)$$

$$[P_\alpha, M_{\beta\gamma}] = 2\delta_{\alpha[\beta}P_{\gamma]} \quad (2.158)$$

$$[P_\alpha, P_\beta] = [Q^a, P_\beta] = 0 \quad (2.159)$$

$$[Q^a, M_{\beta\gamma}] = (\sigma_{\beta\gamma})^a{}_b Q^b \quad (2.160)$$

$$\{Q^a, Q^b\} = \frac{1}{2}(\gamma^\alpha C^{-1})^{ab}P_\alpha \quad (2.161)$$

donde C es la matriz de Conjugación de Carga que cumple $C_{ab}(C^{-1})^{bc} = \delta_a^c$, $C^T = -C$. Las relaciones (2.157-61) constituyen el Superálgebra de Poincaré. Notemos, además, que los resultados (2.157-8) y el primero de (2.159) son análogos a los del Algebra de Poincaré (ver (2.38-40)).

Es importante aclarar que las relaciones (2.157-61) son válidas cuando se aplicaban a los campos escalares A y B, pero no al espinorial λ . Tanto en el caso del modelo de Wess-Zumino con supersimetría global, como en el caso de la Supergravedad, para que el superálgebra de Poincaré cierre, deben incorporarse campos auxiliares. A continuación analizaremos estos hechos.

El lagrangiano (13):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} [(\partial_\mu A)^2 + (\partial_\mu B)^2 + \lambda \not{\partial} \lambda - F^2 - G^2] \quad (2.162)$$

es invariante frente a las transformaciones -con parámetro constante-:

$$\delta A = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \lambda \quad \delta B = -\frac{1}{2} i \bar{\epsilon} \gamma_5 \lambda \quad \delta F = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \not{\partial} \lambda \quad (2.163 \text{ a,b,c})$$

$$\delta G = \frac{1}{2} i \bar{\epsilon} \gamma_5 \not{\partial} \lambda \quad \delta \lambda = \frac{1}{2} [\not{\partial} (A - i \gamma_5 B)] \epsilon + \frac{1}{2} (F + i \gamma_5 G) \epsilon \quad (2.163 \text{ d,e})$$

donde F y G son campos bosónicos auxiliares. (F no debe confundirse con aquel de 2.5.1. que denotaba un campo fermiónico). Notemos que ahora se tiene igual número de componentes bosónicas (los cuatro campos A, B, F y G) que fermiónicas (las cuatro componentes de λ). Para poner de manifiesto la acción de los campos auxiliares en el superálgebra de Poincaré, recordemos (2.141), la cual es válida para un bosón. En cambio, para el caso de λ , y sin F ni G - o sea, suponiendo que la supersimetría de λ es (2.130) obtendríamos:

$$[\delta(\epsilon_1), \delta(\epsilon_2)] \lambda = \frac{1}{2} (\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1) \partial_\mu \lambda - \frac{1}{4} (\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1) (\gamma_\mu \not{\partial} \lambda) \quad (2.164)$$

En consecuencia, sólo on shell, esto es, con $\not{\partial} \lambda = 0$, (2.164) coincide con (2.141). Ahora bien, de acuerdo con las (2.163 c,d,e) para $[\delta(\epsilon_1), \delta(\epsilon_2)] \lambda$ tendríamos un término extra:

$$\frac{1}{4} (\bar{\epsilon}_1 \not{\partial} \lambda) \epsilon_2 + \frac{1}{4} (\bar{\epsilon}_1 \gamma_5 \not{\partial} \lambda) \gamma_5 \epsilon_2 - 1 \leftrightarrow 2$$

que precisamente cancela el segundo sumando a la derecha de (1.164), obteniéndose (2.141) también para λ , y por lo tanto, cerrando el álgebra. A su vez, las ecuaciones de campo para F y G resultan $F = G = 0$, con lo que on shell, (2.162) coincide con el lagrangiano original (2.125).

El procedimiento recién referido, también puede ser implementado cuando las supersimetrías son locales, lo que se discutirá brevemente en el parágrafo 2.6.2.

2.6. LA SUPERGRAVEDAD N=1 LIBRE

2.6.1. La Acción de Gauge

Por todo lo ya visto, deberán existir 3 campos en la acción de gauge: la tetrada e_{μ}^{α} llamada gravitón, el gravitino ψ_{μ}^a y la conexión espinorial $\omega_{\mu}^{\alpha\beta}$. Gravitón y gravitino ya forman un doblete bosón-fermión de helicidades adyacentes +2 y +3/2. Por simplicidad, se postula la no existencia de más campos bosónicos, además de la tetrada; por lo que en esta teoría la conexión espinorial surge como una variable dependiente. Dado que la torsión se relaciona con la parte de la conexión independiente de la métrica, veremos más abajo, que esto implica una dependencia de la torsión respecto del gravitino.

La manera de establecer cómo debe ser la acción de la SG libre, está muy inspirada en los resultados de la teoría ECSK. De acuerdo con lo visto en el parágrafo 2.4.3. en aquella teoría se parte de los campos independientes e_{μ}^{ν} $\Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}$ contenidos en el lagrangiano $\mathcal{L} = e/2k e^{\lambda\gamma} e^{\sigma\beta} F_{\sigma\lambda}^{\alpha\beta}$. La variación de este lagrangiano respecto de $\Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}$ nos conduce a la ecuación de campo (2.101) que resulta algebraica, indicándonos que la torsión no se propaga. A su vez, en el caso de que no exista materia $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(g)$. La ecuación combinada de la teoría ECSK (2.121) y la expresión para la conexión (2.124) muestra que, de hecho, $\Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}$ se puede poner en función de g y el campo \mathcal{Z} . En consecuencia, si han de buscarse soluciones para las cuales $F_{\mu}^{\alpha\beta}$ no se propague y pueda ser eliminado algebraicamente, la elección adecuada debe ser la de adoptar el lagrangiano de Hilbert-Einstein. Tomaremos entonces la parte bosónica de la acción como función del lagrangiano

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2\kappa^2} e R(e, \omega) \tag{2.165}$$

Entonces, si resolvemos la ecuación de campo sin fuentes, esto es sin lagrangiano de materia, para el caso de la conexión, suponiéndola en principio una variable independiente, llegaremos finalmente a que ella, "on shell", depende del campo de tetradas y es entonces: $\omega_{\mu}^{\alpha\beta}(e)$;

esto es, la conexión no posee torsión. Si existe materia, uno puede eliminar la conexión espinorial resolviendo $\delta S / \delta \omega_{\mu}^{\alpha\beta} = 0$, y escribir, como ya vimos, la ecuación de tipo de la de Einstein en función de la conexión dependiente de la métrica y de la fuente espinorial, con lo que la torsión, formalmente, también es eliminada.

Sin embargo, claramente (2.165) no es supersimétrico. Habrá que agregar una parte fermiónica que compense los términos adicionales debidos a (2.151) cuando se haga δe^R . Para la parte fermiónica se propone un lagrangiano linealizado, cuadrático en el gravitino y conteniendo sólo una derivada. Puede probarse que existe un único lagrangiano con estas características que conduce a energías positivas, y es el de Rarita-Schwinger:

$$-\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\Psi}_{\mu} \gamma_5 \gamma_{\nu} \partial_{\rho} \Psi_{\sigma} \quad (2.166)$$

que en el espacio-tiempo curvo debe escribirse:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\Psi}_{\mu} \gamma_5 \gamma_{\nu} \Delta_{\rho} \Psi_{\sigma} \quad (2.167)$$

con

$$\Delta_{\rho} \Psi_{\sigma}^a = \left(\partial_{\rho} \delta_b^a + \frac{1}{2} \omega_{\rho}^{\alpha\beta} (\sigma_{\alpha\beta})^a_b \right) \Psi_{\sigma}^b \quad (2.168)$$

donde hemos escrito explícitamente las componentes espinoriales del gravitino. Dado que $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es una densidad, no es necesario incluirlo en este lagrangiano. Obviamente, el lagrangiano (2.167) tampoco es supersimétrico. Sin embargo, la suma de los lagrangianos de Rarita-Schwinger y de Hilbert-Einstein sí lo es.

Haciendo las variaciones de (2.165) y (2.167) respecto de ω , obtenemos, por un lado

$$\delta \mathcal{L}_1 = \frac{1}{2\kappa^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (\Delta_{\sigma} e_{\mu}^{\alpha}) e_{\nu}^{\beta} \delta \omega_{\rho}^{\gamma\delta} \quad (2.169)$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\mu}^{\alpha} e_{\nu}^{\beta} = 2e (e_{\sigma}^{\rho} e_{\delta}^{\sigma} - e_{\delta}^{\sigma} e_{\sigma}^{\rho})$$

Por el otro lado

$$\delta \mathcal{L}_2 = -\frac{1}{8} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (\bar{\Psi}_\mu \gamma^\delta \Psi_\sigma) e^\alpha_\nu \delta \omega_{\rho\beta\gamma} \quad (2.170)$$

Comparando (2.169) y (2.170), vemos que debe cumplirse

$$2 D_{[\mu} e^{\alpha}_{\nu]} = \frac{\kappa^2}{2} (\bar{\Psi}_\mu \gamma^\alpha \Psi_\nu) \quad (2.171)$$

Pero de acuerdo con (1.105) $D_{[\mu} e^{\alpha}_{\nu]} = S_{\mu\nu}{}^\alpha$, esto es, la torsión. Por lo tanto:

$$S_{\mu\nu}{}^\alpha = \frac{\kappa^2}{4} (\bar{\Psi}_\mu \gamma^\alpha \Psi_\nu) \quad (2.172)$$

Esta importante ecuación relaciona la torsión con el gravitino, su "nueva" fuente. En consecuencia, con (2.172) llegamos a una situación similar para la torsión a aquella que se registra en la teoría ECSK libre: on shell la torsión es una variable dependiente. (En particular, en la ECSK libre, vale cero)

En este punto podemos hacer una interesante comparación entre las teorías R.G., SG N=1 y ECSK. En esta última existe una "simetría" bajo la transformación

$$\omega_{\mu}{}^{\alpha\beta} \rightarrow \omega_{\mu}{}^{\alpha\beta} + \bar{\omega}_{\mu}{}^{\alpha\beta} \quad (2.173)$$

que cumple

$$\int d^4x e R(e, \Gamma(e) + \bar{\omega}) = \int d^4x e [R(e, \Gamma(e)) - \bar{\omega}_{\mu\nu\rho} \bar{\omega}^{\rho\nu\mu} + (\bar{\omega}^\lambda{}_{\lambda\mu})^2] \quad (2.174)$$

proveniente de la descomposición (2.124). En SG N=1 existe algo equivalente (46):

$$\mathcal{L}_1(e, \omega(e, \Psi) + \bar{\omega}) + \mathcal{L}_2(e, \Psi, \omega(e, \Psi) + \bar{\omega}) = \mathcal{L}_1(e, \omega(e, \Psi)) + \mathcal{L}_2(e, \Psi, \omega(e, \Psi)) + \frac{1}{2\kappa^2} [\bar{\omega}_{\mu\nu\rho} \bar{\omega}^{\rho\nu\mu} - (\bar{\omega}^\lambda{}_{\lambda\mu})^2] + \text{una derivada total} \quad (2.175)$$

Si tomamos $\bar{\omega}_{\mu}{}^{\alpha\beta} = -\omega_{\mu}{}^{\alpha\beta}(e, \Psi)$, podemos escribir la acción de gauge sin que aparezca la curvatura escalar:

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\Psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \Psi_\sigma - \frac{1}{8} R^2_{\mu\nu\alpha} - R_{\mu\nu\alpha} R^{\nu\mu\alpha} + \frac{1}{2} R^2_{\nu\lambda\lambda} \right] \quad (2.176)$$

donde $R_{\mu\nu\alpha} = 2 \partial_{[\mu} e_{\nu]}^\alpha + \chi^2/2 \bar{\Psi}_\mu \gamma_\alpha \Psi_\nu$. De acuerdo con (1.97) y (2.172), $R_{\mu\nu}^\alpha = -2 \nabla_{[\mu} e_{\nu]}^\alpha$. La (2.176) nos indica que en este caso, en la acción de la Supergravedad libre: desaparecería la acción de Hilbert-Einstein, la acción del gravitino no contendría la conexión espinorial, y aparecerían 3 términos dependientes de la torsión. Dado que entonces puede considerarse $\omega_\mu^{\alpha\beta} = 0$, uno puede reinterpretar a la SG N=1 como una teoría con teleparalelismo (ver parágrafos 1.1.5. y 2.2.2., y las relaciones (2.23) que la definen). En (41) se indica bajo qué condiciones en un espacio-tiempo con teleparalelismo T_4 , una acción conteniendo términos cuadráticos en la torsión como los de la acción (2.176), conducen a una teoría indistinguible de la R.G. Por otro lado, en 2.4.4. ya hemos señalado y discutido las coincidencias entre las teorías R.G. y ECSK, e indicado bajo qué condiciones una teoría conduce a la otra. Podemos sintetizar todo esto diciendo que la R.G. se "conecta" con la SG N=1 para algunos casos en que U_4 se transforma en T_4 , y con la ECSK cuando U_4 se transforma en V_4 . Debemos tener presente que la SG N=1 es la R.G. en el gauge $\Psi = 0$, mientras que la ECSK es la R.G. cuando $\bar{\psi} = 0$.

2.6.2. Las Ecuaciones de Campo de la SG N=1 Libre

Las ecuaciones de campo para la SG N=1 libre se obtienen variando la acción S correspondiente a $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, respecto de la tétrada y los gravitinos. Por todo lo ya discutido, la conexión espinorial será dependiente de estas dos variables. Tenemos entonces:

$$\frac{\delta S}{\delta e_{\alpha\mu}} = e^{\alpha\mu} - \frac{1}{4} \bar{\Psi}_\lambda \gamma_5 \gamma^\alpha \bar{\Psi}^{\lambda\mu} = 0 \quad (2.177)$$

donde $\bar{\Psi}^{\lambda\mu} = 2 \epsilon^{\lambda\rho\sigma\alpha} D_{[\rho} \Psi_{\sigma]}$

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{\Psi}_\mu} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[\gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \Psi_\sigma + \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_\alpha \Psi_\sigma (D_\rho e^\alpha_\nu) \right] = 0 \quad (2.178)$$

Puede probarse que el último término de (2.178) es nulo (17). En consecuencia, las ecuaciones de campo son:

$$G^{\alpha\mu} = \frac{1}{2e} \bar{\Psi}_\lambda \gamma_5 \gamma^\alpha E^{\lambda\mu\rho\sigma} D_{[\rho} \Psi_{\sigma]} \quad (2.179)$$

$$E^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \Psi_\sigma = 0 \quad (2.180)$$

Comparando (2.179) con (2.98) (y su versión holónoma (2.116)) de la teoría ECSK, vemos que el miembro de la derecha de esta primera ecuación de campo libre, hace las veces de tensor energía-impulso total. Si no existe torsión, en virtud de (2.169) ello significa que los gravitinos son nulos y (2.179) y su correspondiente (2.98) de ECSK coinciden, siendo a su vez equivalentes a la de R.G. libre de fuentes. La ecuación de campo (2.180) comparada con la (2.101) (y su versión holónoma (2.119)) de la teoría ECSK, nos muestra que en SG N=1 la torsión se propaga, a diferencia de lo que sucede en ECSK.

En la sección siguiente analizaremos el acople de materia en Supergravedad. Es importante señalar en este punto que, tal cual lo que sucede en el caso de supersimetrías globales, la incorporación de campos auxiliares es necesaria para clausurar el superálgebra. A su vez, en Supergravedad los campos auxiliares cumplen otra función adicional ya que su incorporación permite que las reglas de transformación supersimétricas de los campos de gauge (gravitón y gravitino), no dependan de los campos de materia.

En el modelo más usual de SG N=1 libre con campos auxiliares, se incorporan tres de estos campos: un vector axial A , un escalar S y un pseudoescalar P (47). A los lagrangianos (2.165) y (2.167) debe sumarse el lagrangiano

$$- \frac{e}{3} (S^2 + P^2 + A_\mu^2)$$

por lo que estos campos auxiliares no se propagan.

2.7. ACOPLE DE MATERIA EN SUPERGRAVEDAD N=1

2.7.1. El Modelo de Wess-Zumino con Supersimetría Local

Con vistas a estudiar en el Capítulo IV el comportamiento newtoniano de materia supersimétrica en el marco de la SG N=1, retomamos aquí lo tratado en el parágrafo 2.5.2.

Teniendo en cuenta las transformaciones supersimétricas locales de los campos de materia (2.128-30) y de los campos de gauge (2.151-2), la aparición del nuevo término (2.145), y el hecho de que el lagrangiano original de Wess-Zumino debe acoplarse mínimamente, es fácil ver que para dichas transformaciones, en el siguiente lagrangiano de materia

$$\mathcal{L}_I = -\frac{e}{2} \left\{ (\partial_\mu A \partial_\nu A + \partial_\mu B \partial_\nu B) g^{\mu\nu} + \bar{\lambda} \not{\partial} (\omega(e))_\lambda - \right. \\ \left. - \kappa \bar{\Psi}_\mu [\not{\partial} (A + i \gamma_5 B)] \gamma^\mu \lambda \right\} \quad (2.181)$$

todos los términos de orden $(\kappa)^0$ y todos los términos de orden κ de la forma AA y BB se cancelan. (La transformación supersimétrica (2.130) del fermión λ contiene derivadas parciales de los campos escalares y por lo tanto para el caso de supersimetrías locales, ella se escribe igual). Para cancelar otros términos de orden κ del tipo AB, provenientes de variaciones de λ en el último término de (2.181), se deben agregar términos a la acción y a la regla de transformación del gravitino y del campo λ . Recordando la forma en que entra la constante κ en la supersimetría del gravitino (esto es, como $1/\kappa$), es fácil reconocer el hecho de que las correcciones al lagrangiano han de ser de orden κ^2 .

Luego de mucho álgebra se llega al siguiente lagrangiano, supersimétrico a orden κ^2 (17):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_I + \kappa^2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\bar{\Psi}_\mu \gamma_\nu \Psi_\rho) \left[\frac{1}{32} \bar{\lambda} \gamma_5 \gamma_\sigma \lambda - \frac{i}{8} A \overleftrightarrow{\partial}_\sigma B \right] + \\ + e \kappa^2 (\bar{\lambda} \gamma_5 \gamma^\theta \lambda) \left[-\frac{1}{16} \bar{\Psi}_\alpha \gamma_5 \gamma_\theta \Psi^\alpha - \frac{i}{8} A \overleftrightarrow{\partial}_\theta B - \right. \\ \left. - \frac{1}{64} \bar{\lambda} \gamma_5 \gamma_\theta \lambda \right] \quad (2.182)$$

donde $A \overset{\leftrightarrow}{\partial} B \equiv A(\partial B) - (\partial A)B$. Las transformaciones supersimétricas no se modifican para A, B y el gravitón, mientras que para los campos fermiónicos valen:

$$\delta\psi_\mu = \frac{1}{\mathcal{X}} D_\mu \epsilon + \frac{i}{4} \mathcal{X} \gamma_5 \epsilon A \overset{\leftrightarrow}{\Delta}_\mu \text{cov} B + \frac{\mathcal{X}}{8} \sigma_{\mu\rho} \gamma_5 \epsilon (\bar{\lambda} \gamma_5 \delta\rho\lambda) \quad (2.183)$$

$$\delta\lambda = \frac{1}{2} [\not{D}^{\text{cov}} (A - i\gamma_5 B)] \epsilon + \frac{\mathcal{X}^2}{8} \gamma_5 \lambda [A \bar{\epsilon} \gamma_5 \lambda - i B \bar{\epsilon} \lambda] \quad (2.184)$$

Aquí D_μ^{cov} representa la llamada derivada supercovariante y vale para el caso de A: $D_\mu^{\text{cov}} A = \partial_\mu A - \mathcal{X}/2 \psi_\mu \lambda$. (De acuerdo con lo ya discutido, al no haberse incorporado campos auxiliares no propagantes, la transformación supersimétrica de uno de los campos de gauge, el gravitino, depende de uno de los campos de materia y por lo tanto, del particular lagrangiano de materia elegido).

En conclusión, para que la acción de Wess-Zumino a orden newtoniano sea invariante frente a supersimetrías locales hasta un orden \mathcal{X} , debe incorporarse un término de interacción de orden \mathcal{X} , y términos de orden \mathcal{X}^2 ; como así también, corregirse algunas supersimetrías agregando términos de orden \mathcal{X} y \mathcal{X}^2 .

CAPITULO III

APROXIMACION POST-NEWTONIANA DE LA TEORIA ECSK

En la teoría de la Relatividad General la ecuación fundamental es la de Einstein, que no es lineal. Esto conduce a que, por lo general, no sea posible resolverla en forma exacta. Las soluciones exactas corresponderán a aquellos casos en que las fuentes de los campos gravitatorios poseen determinadas simetrías que hagan posible su integración. Los ejemplos más importantes de esto lo constituyen la solución de Schwarzschild, referida a una fuente central con simetría esférica, y la solución homogénea de Friedmann-Robertson-Walker.

Existen, sin embargo, desarrollos generales de esta ecuación a diversos órdenes, los que son admisibles cuando las fuentes responden a determinadas características, independientemente de que exista o no alguna simetría en el problema. Las soluciones que provienen de estos desarrollos nos dan información completa acerca del sistema físico en cuestión, hasta un deseado nivel de aproximación.

En este capítulo realizaremos la Aproximación Post-Newtoniana (APN) de la teoría ECSK. Una APN es posible toda vez que se trabaje con sistemas físicos donde las fuentes del campo gravitatorio posean velocidades pequeñas comparadas con la de la luz.

Mucho del formalismo utilizado para la APN en R.G., es adaptable a un desarrollo equivalente para la teoría ECSK. Ello es así debido, fundamentalmente, al hecho de que la ecuación combinada de esta teoría (2.121) es muy similar a la correspondiente a R.G. A su vez, la ley de conservación correspondiente al tensor combinado $\bar{\sigma}$ - la ecuación (2.123) - también es similar a la ley de conservación para el tensor energía-impulso de R.G. En consecuencia, es de esperar que los resultados a los que sea posible llegar en la aproximación correspondiente a

la teoría ECSK sean, formalmente, muy similares a los propios de R.G. Por otro lado deberán recuperarse las ecuaciones de R.G. cuando los espines de las partículas que conforman las fuentes, sean nulos.

Pero si bien existen parecidos formales entre las APN de R.G. y de ECSK, sus resultados serán marcadamente diferentes: en la ECSK las leyes de conservación ligan, a todos los órdenes, aquellas magnitudes comunes a ambas teorías que caracterizan a la materia, con la densidad de espín de las partículas; magnitud ésta que posee un origen y un rol dinámico diferentes de aquellos de R.G., de acuerdo con lo ya discutido en el Capítulo II. Por otro lado, los potenciales gravitatorios ya a tercer orden difieren en su expresión. Estas son tan sólo dos de las diferencias que aparecen luego de realizada nuestra aproximación.

En la primera sección analizaremos las características que deben tener los sistemas físicos para que sea posible aplicar el método aproximativo aquí empleado; estudiaremos las trayectorias de partículas de prueba, para lo cual será necesario resolver las ecuaciones de campo con vista a hallar los potenciales gravitatorios. Para conocer estos últimos a todo tiempo y en cualquier punto del espacio, será necesario desarrollar, hasta los órdenes necesarios, la ley de conservación referida al tensor energía-impulso unificado.

En la segunda sección adoptaremos un modelo general de fluido ideal con espín. Esto nos permitirá llegar a formas explícitas de las ecuaciones en donde se pondrá de manifiesto las diferencias entre la teorías ECSK y R.G.

En la última sección discutiremos las consecuencias más relevantes de nuestro desarrollo y trabajaremos con determinados modelos, más específicos, para estudiar su comportamiento.

3.1. LA APROXIMACION POST-NEWTONIANA

3.1.1. Hipótesis que Conducen a una APN

Consideremos un sistema de cuerpos ligados por sus atracciones gravitatorias mutuas. Tomemos como ejemplo nuestro sistema solar donde estos cuerpos corresponden al sol y los planetas. El potencial gravitatorio newtoniano ϕ está acotado y vale en el centro del sol ($c=1$):

$$\phi = \epsilon^2 \sim 10^{-5}$$

La materia solar que genera este campo, como así también la que compone los planetas, se mueve muy lentamente en relación a cómo lo hace la luz:

$$v^2 \leq 10^{-7}$$

donde v se toma respecto del centro de masa del sistema solar. En el centro del sol, los valores correspondientes a la energía interna π (siendo $\pi = (\rho - \rho_0) / \rho_0$, con ρ la densidad de energía y ρ_0 la densidad de masa en reposo) y los de P/ρ_0 (con P la presión), también son del orden de 10^{-5} (31). En aquellas regiones donde se realizan las observaciones de nuestro sistema solar, los valores de las magnitudes $|\phi|$, v^2 , π , y P/ρ_0 son siempre menores que ϵ^2 , por lo que deben ser tratadas como siendo de orden 0 (ϵ^2).

Esto sugiere la posibilidad de desarrollar las ecuaciones que describen la física del sistema solar, en potencias del pequeño parámetro ϵ o de algun valor típico de la velocidad de las partículas que lo componen. En tal caso la expansión debe dar como resultado i) un espacio-tiempo plano a orden cero en velocidad, ii) una física newtoniana a segundo orden y iii) correcciones post-newtonianas a partir del tercer orden.

En relación con la geometría y teniendo en cuenta i) y ii) vemos que es posible tomar un sistema de coordenadas cuasi minkowskiano donde, de acuerdo con lo discutido en el parágrafo 2.2.1., sea:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

Teniendo en cuenta los valores máximos del potencial de Newton en el sistema solar tenemos que

$$|h_{\mu\nu}| \leq 10^{-5}$$

Extenderemos estas consideraciones a los efectos de realizar una APN para el caso de la teoría ECSK. Por lo tanto los resultados a ser obtenidos en nuestro caso, serán aplicables a aquellos sistemas donde las hipótesis referidas a las magnitudes que entran en el problema, son del orden de magnitud que las correspondientes a nuestro sistema solar.

Consideremos, entonces, sistemas físicos que satisfagan la condición fundamental que hace posible la APN: potenciales gravitatorios débiles y velocidades de las partículas o fluidos que componen las fuentes, pequeñas comparadas con la de la luz. Sean \bar{v} , \bar{M} y \bar{r} los valores correspondientes a la velocidad, la masa y la distancia (separaciones entre cuerpos) típicas de uno de estos sistemas. De la mecánica newtoniana sabemos que una energía cinética típica: $1/2 Mv^2$ es del mismo orden de magnitud que la correspondiente energía potencial típica GM^2/r donde G es la constante gravitatoria de Newton. Por consiguiente:

$$\bar{v}^2 \sim G \frac{\bar{M}}{\bar{r}} \quad (3.1)$$

Esta expresión es exacta para el caso de una partícula de prueba moviéndose en torno de una masa central M , en órbita circular de radio r , y con velocidad v .

Para describir la geometría del espacio-tiempo siempre nos será posible encontrar un sistema de coordenadas cuasi minkowskiano donde la métrica venga expresada por:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (3.2)$$

Las distintas componentes de la métrica podrán ser desarrolladas en potencias de la velocidad típica \bar{v} . El resultado de estos desarrollos deberán ser utilizados, posteriormente, para desarrollar, a su vez, las diferentes ecuaciones que contienen estas componentes como así también a sus derivadas. Será necesario, en consecuencia, fijar de antemano cuáles son las expansiones que deben poseer las distintas componentes del tensor g , para lo cual resulta imprescindible establecer algún criterio que permita anticipar su desarrollo en serie de potencias de \bar{v} .

De acuerdo con lo visto en el párrafo 2.4.2., en una geometría con torsión y tomando el caso de materia escalar acoplada mínimamente, las 2 leyes de conservación pueden reducirse a la ecuación (2.87), la cual coincide con la correspondiente de R.G. Tal el caso de la teoría ECKK. Como ejemplo de ésto, podemos considerar a partícula de prueba puntual de masa m sin espín, moviéndose en un back-ground con torsión. La misma se representa por medio de una "delta de Dirac" y las correspondientes componentes del tensor energía-impulso se escriben (36):

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{e} m \int \frac{dx^\mu_m}{d\tau} dx^\nu_m \delta^4(\vec{x} - \vec{x}_m) \quad (3.3)$$

donde \vec{x}_m representa la posición de la partícula. Dado que la partícula es escalar, su ecuación de movimiento es la (2.87) y corresponde a una geodésica. Por lo tanto y teniendo en cuenta (1.42), vemos que puede considerarse a:

$$I_m = - m \int (-g_{00} - 2g_{0i} v^i - g_{ij} v^i v^j)^{1/2} dt \quad (3.4)$$

como la acción de la partícula y al integrando como su lagrangiano. En la aproximación de Newton este lagrangiano debe ser de orden v^2 y por lo tanto debe escribirse:

$$L = (g_{00}^{(2)} - 2g_{0i}^{(1)} v^i - g_{ij}^{(0)} v^i v^j)^{1/2} \quad (3.5)$$

donde $g_{\mu\nu}^{(n)}$ significa "hasta orden v^n en la componente $g_{\mu\nu}$ ". Dado que $g_{ij}^{(0)}$ vale δ_{ij} , la ecuación de Lagrange (48)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^j} - \frac{\partial L}{\partial x^j} = 0 \quad (3.6)$$

da como resultado:

$$\frac{dv^j}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial x^j} + \frac{d}{dt} g_{0j}^{(1)} + \frac{\partial g_{0i}^{(1)}}{\partial x^j} v^i \quad (3.7)$$

Esta ecuación coincide con la ecuación de Newton

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\phi \quad (3.8)$$

cuando como en R.G.: $g_{0i}^{(1)} = 0$ y se cumplen las relaciones (2.12a,b).

Por otro lado, si queremos órdenes más altos en el lagrangiano vemos que de acuerdo con (3.4), para obtener L hasta orden \bar{v}^4 :

$$L = (1 - 2\phi - v^2 - g_{00} [O(\bar{v}^4)] - 2g_{0i} [O(\bar{v}^3)] v^i - g_{ij} [O(\bar{v}^2)] v^i v^j)^{1/2} \quad (3.9)$$

necesitaremos g_{00} hasta orden \bar{v}^4 , g_{0i} hasta orden \bar{v}^3 y g_{ij} hasta orden \bar{v}^2 .

Por lo tanto, y tal cual sucede en R.G., necesitamos ciertas prescripciones de forma tal de poder "anticipar" la expansión de la métrica en sus diferentes órdenes. Precisamente, todas las consideraciones que se hacen en R.G. respecto del desarrollo de la métrica, serán válidas para la teoría ECSK, habida cuenta de que sea posible formular las mismas hipótesis con respecto a la forma general que deben tener sus componentes. En R.G. las hipótesis, y también las restricciones fun-

damentales, son (21) (31):

- i) Los términos superiores de la métrica (los $h_{\mu\nu}$) deben ser de orden newtoniano o post-newtoniano.
- ii) Los términos de las correcciones deben tender a cero a medida que la distancia entre los puntos del espacio x donde se evalúa el campo y aquellos x' correspondientes a la ubicación de las fuentes, se hace mayor. Esto garantiza una métrica minkowskiana del sistema de coordenadas cuasi-cartesianas, en el cual se expresa la geometría.
- iii) Las coordenadas son elegidas de forma tal que la métrica sea adimensional.
- iv) Dado que las condiciones iniciales del problema son arbitrarias, la métrica no debe contener ni los orígenes de tiempo ni los de posición.
- v) Las correcciones a la métrica h_{00} , h_{0i} y h_{ij} deben transformarse respecto de rotaciones espaciales como un escalar, un vector y un tensor, respectivamente y, en consecuencia, deben ser construídas con cantidades apropiadas.

Existe una sexta condición que se exige en R.G.:

- vi) Las componentes de la métrica deben generarse a partir de la masa en reposo, la energía, la presión, la velocidad y sus derivadas temporales, pero no por sus gradientes.

En nuestro caso, y dado el carácter de la teoría que nos ocupa, deberá agregarse el hecho de que las componentes de la métrica podrán depender también del espín de las fuentes. A su vez, no tendremos en cuenta la restricción que implica la no "participación" de gradientes de algunas magnitudes, en lo que hace a la generación de la métrica. De hecho estos gradientes han de aparecer, lo que es debido a las características de las fuentes dotadas de espín. Esto no resulta un inconveniente dado que en (31) se admite que la limitación vi) es puramente subjetiva y puede ser eliminada existiendo buenas razones para ello. Por otro lado en (21) se reconoce que la restricción en cuestión responde, en el

fondo, a un problema de simplicidad.

Las expansiones de la métrica y de todas las magnitudes, las haremos en potencias de la velocidad típica \bar{v} . Las componentes de la métrica necesarias para una AFN son, en cada caso,

$$g_{00} = -1 + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00} + O(\bar{v}^6) \quad (3.10)$$

$$g_{0i} = \overset{3}{g}_{0i} + O(\bar{v}^5) \quad (3.11)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij} + O(\bar{v}^4) \quad (3.12)$$

donde $\overset{n}{g}_{\mu\nu}$ representa el término $g_{\mu\nu}$ de orden \bar{v}^n . Una inversión temporal $t \rightarrow t' = -t$, debe cambiar el signo de g_{0i} , pero dejar invariantes g_{00} y g_{ij} . Esto está en correspondencia con las expansiones en velocidad (3.10-2) de las diferentes componentes de la métrica. En consecuencia, las componentes g_{0i} , de contener términos en velocidad y/o derivadas temporales, lo harán en cantidades impares; mientras que las componentes de g_{00} y g_{ij} , de contener términos en velocidad y/o derivadas temporales, lo harán en cantidades pares. Por ejemplo, para el caso de g_{0i} , podrían aparecer términos de orden \bar{v}^3 del estilo:

$$G \int \frac{\rho v^i}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \sim \frac{GMV}{R}$$

cuyo número total de velocidades v , es impar.

Finalmente, debemos tener en cuenta que que las derivadas temporales de cualquier magnitud A serán pequeñas en relación con las derivadas espaciales. Ello es debido a que en un punto dado, todas los cambios en el tiempo de todas las cantidades, se deben al movimiento de la materia, representado por v . Por lo tanto:

$$\left| \frac{\partial A / \partial t}{\partial A / \partial x^i} \right| \sim |v^i| \quad (3.13)$$

En otras palabras

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \sim \frac{1}{r} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{\dot{V}}{r} \quad (3.15)$$

3.1.2. Trayectorias para Materia Escalar y para Cuerpos Exteriores a las Fuentes

A diferencia de R.G., el carácter del movimiento de partículas o fluidos en una geometría dotada de torsión, no puede ser establecido a priori. En efecto, las trayectorias propias de materia espinorial debe ser obtenida integrando las leyes de conservación (2.110) y (2.111) (49). Y en general, la trayectorias de las partículas, no corresponden a ninguna de las dos curvas. Esto está de acuerdo con la discusión realizada en el Capítulo II respecto del carácter que posee el Principio de Equivalencia toda vez que trabajemos en una geometría no riemanniana.

Ya hemos visto que en un espacio-tiempo con torsión, geodésicas y autoparalelas no necesariamente coinciden. En R.G., donde sí coinciden, estas curvas constituyen la extensión natural de la recta del plano al espacio-tiempo curvo. No resulta factible establecer cuáles son las trayectorias de las partículas en los sistemas localmente planos, dado que los mismos deben ser necesariamente anholónomos. Como se ha indicado en el parágrafo 2.2.2., en este caso el P.E. se aplica a los campos y no a partículas. Por otro lado, en el tratamiento holónomo de la teoría ECSK, hemos visto que el acople mínimo implica pensar que, al existir campos gravitatorios, automáticamente aparece la torsión; por lo que este acople conduce a ecuaciones covariantes cuyo límite no es

la R.E. Basta observar la ecuación (2.110) para notar que una partícula dotada de espín no puede desacoplarse de la curvatura, la cual, dado su carácter tensorial, no es anulable localmente. Queda claro, por lo tanto, que esta ecuación no posee una equivalente en R.E. En R.G., en cambio, la ley de conservación no incluye a la curvatura y en su límite plano, coincide con la correspondiente de R.E. Por lo tanto R.E. es el límite de ECSK siempre y cuando supongamos que el pasaje de un espacio-tiempo donde existen campos gravitatorios a uno donde estos no existen, implique la eliminación simultánea de la curvatura y de la torsión.

Sin embargo, y de acuerdo con lo ya visto, la materia escalar es insensible a la torsión. Por otro lado, en la teoría ECSK toda partícula de prueba que se mueva fuera de la distribución de materia que constituya la fuente de los campos gravitatorios, seguirá una geodésica. Ello es así en virtud del hecho de que la torsión no se propaga y, en consecuencia, en el exterior de las fuentes tenemos:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} |_{ext} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \quad (3.16)$$

como puede inferirse de (2.124).

Debemos aclarar aquí que una partícula dotada de espín sólo podrá considerarse de prueba, si pueden desprejarse sus efectos sobre la geometría. Caso contrario, y de acuerdo con la ecuación de campo (2.119), habría de introducir torsión en el espacio-tiempo; torsión que, a su vez, ella misma "padecería". Lo dicho es equivalente a lo que se supone es un cuerpo de prueba en R.G.: sus propiedades son tales que las mismas no "participan" de la ecuación de campo, y los efectos que este cuerpo produce en la geometría -en el caso de R.G, sólo en la métrica- y, en general, en las condiciones del problema, son despreciables, comparados con aquellos debidos a las fuentes. En 2.4.2. ya se discutió el caso de una partícula de espín 1/2 en presencia de un

campo gravitatorio en regiones con torsión. En la ecuación de Dirac, que es la que rige su movimiento, la derivada covariante es función de la torsión propia del background, torsión a la que la propia partícula no contribuye. Algo similar sucede respecto de la métrica. De acuerdo con (2.119) en los puntos en cuestión existe espín o impulso angular intrínseco no nulo; pero el mismo no corresponde al de la partícula en cuestión, sino a los campos de materia espinoriales que sirven de fuente. En otras palabras, la partícula de prueba no participa como fuente de las ecuaciones de campo gravitatorio que definen la geometría. O lo que es equivalente, no es incluida en el lagrangiano de materia. No debe extrañar, entonces, tal cual lo expuesto en aquel parágrafo, que una partícula de Dirac, la cuál también puede considerarse como originada en algún campo, se comporte, en el límite de la física macroscópica - esto es, cuando en su función de onda se haga $\hbar \rightarrow 0$ - como si ésta fuese materia escalar evolucionando en un espacio-tiempo con torsión (con origen en los campos de materia de las fuentes), sin acoplarse con ella. (En el Capítulo IV parágrafo 4.3.1. se realiza con todo detalle la aproximación WKB para un campo que representa una partícula del tipo de Dirac en un fondo geométrico con torsión, aunque con otro origen que el supuesto aquí. Esto conduce a una ecuación de Dirac modificada y por lo tanto a resultados diferentes).

En consecuencia, no consideraremos a las partículas o fluidos que conforman las fuentes como de prueba, dado que ello implicaría desprestigiar la torsión y volver, por lo tanto, a la física de R.G. Esto se traduce en suponer no nulas las componentes del tensor impulso angular intrínseco de las fuentes. Por lo tanto, su movimiento deberá establecerse a partir de las leyes de conservación, lo que está de acuerdo con lo discutido más arriba a propósito del carácter problemático de las trayectorias de las partículas dotadas de espín y de la imposibilidad de establecer estas trayectorias a priori. En cambio y como ya vimos, sí estaremos en condiciones de estudiar trayectorias de partículas

exteriores a las fuentes (donde el único potencial gravitatorio no nulo es la métrica, la que on-shell, sin embargo, depende del espín de las fuentes), presuponiendo que estas trayectorias serán geodésicas.

Nuestro objetivo inmediato consistirá, entonces, en hallar a orden post-newtoniano, las trayectorias geodésicas de partículas de prueba que, por lo dicho, sean exteriores a las distribuciones de las fuentes. Con vistas a completar la resolución del problema, también determinaremos la evolución de las fuentes, desarrollando a los órdenes necesarios en \bar{v} , las leyes de conservación que las rigen.

3.1.3. Expansiones de la Métrica y de los Símbolos de Christoffel

Consideremos la ecuación de la geodésica (1.46). A partir de ella podemos escribir una relación en donde en lugar de aparecer las componentes de la cuadriaceleración $d\vec{u}/d\bar{t}$, aparezcan las componentes espaciales de la aceleración ordinaria $d\vec{v}/dt$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{d\bar{t}^2} &= \frac{dv^i}{dt} = \left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^{-1} \frac{d}{d\bar{t}} \left[\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^{-1} \frac{dx^i}{d\bar{t}} \right] \\ &= - \left\{ \begin{matrix} i \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^i}{dt} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Esta última ecuación la podemos escribir más explícitamente como:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{dt^2} &= - \left\{ \begin{matrix} i \\ 00 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} i \\ 0j \end{matrix} \right\} v_j - \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} v_j v_k \\ &+ \left[\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 00 \end{matrix} \right\} + 2 \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0j \end{matrix} \right\} v_j + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ jk \end{matrix} \right\} v_j v_k \right] v_i \end{aligned} \quad (3.18)$$

Si la partícula de prueba es no relativista, esto es si $v^i \sim \bar{v}$, necesitaremos establecer los valores de $\left\{ \begin{matrix} i \\ 00 \end{matrix} \right\}$ hasta orden \bar{v}^2/\bar{r} , los de $\left\{ \begin{matrix} i \\ 0j \end{matrix} \right\}$ hasta orden \bar{v}^3/\bar{r} , $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ hasta orden \bar{v}^2/\bar{r} , $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 00 \end{matrix} \right\}$ hasta orden \bar{v}^3/\bar{r} , $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0j \end{matrix} \right\}$ hasta orden \bar{v}^2/\bar{r} y $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ jk \end{matrix} \right\}$ hasta orden \bar{v}/\bar{r} . Debido a la forma que asume su geodésica, otro es el caso de la partícula de prueba relativista que se estudia y discute en 3.1.6.

Dado que será preciso emplear (1.26) para obtener los valores de los diferentes símbolos de Christoffel, será también necesario determinar la expansión de las componentes contravariantes de la métrica. Para ello utilizamos la condición (1.31) que debe ser satisfecha orden a orden. Así, por ejemplo, para obtener el valor de $\overset{\circ}{g}{}^{00}$, utilizamos dicha condición bajo la forma:

$$g^{\mu\nu} g_{0\mu} = g^{00} g_{00} + g^{0i} g_{0i} = 1 \quad (3.19)$$

Teniendo en cuenta (3.10) y (3.11) vemos que

$$\overset{\circ}{g}{}^{00} (-1) = 1 \quad (3.20)$$

Con lo que $\overset{2}{g}{}^{00} = -1$. A segundo orden:

$$\overset{2}{g}{}^{00} (-1) + (-1) \overset{2}{g}{}_{00} = 0 \quad (3.21)$$

Con lo que $\overset{2}{g}{}^{00} = -\overset{2}{g}{}_{00}$. Trabajando con todas las componentes, llegamos a la siguiente expansión de las componentes contravariantes:

$$g^{00} = -1 - \overset{2}{g}{}_{00} - \overset{4}{g}{}_{00} + \quad (3.22)$$

$$g^{ij} = \delta^{ij} - \overset{2}{g}{}_{ij} + \dots \quad (3.23)$$

$$g^{0i} = \overset{3}{g}{}^{0i} + \quad (3.24)$$

En función de (3.10-2) y (3.22-4), la expansión de los $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$ es hasta los órdenes deseados:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ i \\ 00 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ i \\ 00 \end{smallmatrix} \right\} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \overset{2}{g}{}_{00}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overset{4}{g}{}_{00}}{\partial x^i} + \frac{\partial \overset{3}{g}{}_{i0}}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \overset{2}{g}{}_{00}}{\partial x^j} \quad (3.25)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 0j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \overset{3}{g}_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial \overset{2}{g}_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{3}{g}_{j0}}{\partial x^i} \right] \quad (3.26)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ jk \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \overset{2}{g}_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \overset{2}{g}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \overset{2}{g}_{jk}}{\partial x^i} \right] \quad (3.27)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 00 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial t} \quad (3.28)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0i \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i} \quad (3.29)$$

La componente $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ jk \end{matrix} \right\}$ es nula. El símbolo $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ representa el símbolo de Christoffel de orden \bar{v}^n/\bar{r} . Para obtener estas relaciones y, en general, las que siguen, se ha hecho uso de las condiciones (3.14) y (3.15).

3.1.4. Las Ecuaciones de Campo y los Potenciales Gravitatorios

Con el fin de obtener explícitamente las componentes necesarias de la métrica, haremos uso de la ecuación de campo combinada (2.121) dado que en ella entran sólo los símbolos de Christoffel (y no toda la conexión), los que a su vez dependen exclusivamente de la métrica. Como empleamos el formalismo desarrollado en (36), resulta conveniente redefinir el tensor de Ricci dependiente de los símbolos de Christoffel como:

$$R_{\mu\nu}(\{f\}) = R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}(\{f\}) = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}_{,\nu} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}_{,\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \sigma\lambda \end{matrix} \right\} \quad (3.30)$$

Esto trae como resultado un cambio de signo en la ecuación de campo, dado que esta nueva definición implica, tanto un cambio en el signo de este tensor, como del correspondiente a la curvatura escalar R. La constante k será escrita en función de la constante de la gravitación

consecuencia:

$$R_{\mu\nu}(\{f\}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R(\{f\}) = -8\pi G \bar{T}_{\mu\nu} \quad (3.31)$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por $g^{\mu\nu}$, tenemos:

$$R - 2R = -8\pi G \bar{\sigma} \quad (3.32)$$

donde $\bar{\sigma} \equiv g^{\mu\nu} \bar{T}_{\mu\nu} = \bar{T}^{\mu}_{\mu}$. Por lo tanto, obtenemos

$$R_{\mu\nu}(\{f\}) = -8\pi G \left(\bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \bar{\sigma} \right) \quad (3.33)$$

Es sumamente conveniente redefinir las coordenadas x con vistas a llegar a expresiones más simplificadas de las componentes $R_{\mu\nu}$. Como en R.G., las 10 ecuaciones (3.33) no son todas independientes, dado que si $g_{\mu\nu}$ es solución, entonces $g'_{\mu\nu}$, obtenida a partir de un cambio general de coordenadas, también lo será. Esto implica que hay 4 funciones $x'(x)$ que hacen que existan $10-4 = 6$ ecuaciones independientes. En consecuencia las soluciones de (3.33) poseen sólo 4 grados de libertad. Elegiremos la siguiente condición para las coordenadas:

$$g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = 0 \quad (3.34)$$

que definen coordenadas llamadas armónicas. Las 4 condiciones (3.34) no son, obviamente, covariantes, y el propósito de su incorporación es el de eliminar la ambigüedad en el tensor de la métrica. En otras palabras, fijan el gauge. (Notemos que las condiciones (3.34) que definen las nuevas coordenadas cuasi cartesianas son sobre los símbolos de Christoffel (que sólo dependen de la métrica) y no sobre toda la conexión. Claramente, ello no implica ninguna restricción, dado que en esta teoría y de acuerdo con lo ya discutido en otros lugares del trabajo, podemos entender a la métrica como la única variable geométrica, "diluyendo" la torsión en el tensor energía-momento combinado).

La igualdad (3.33) debe ser válida orden a orden. De acuerdo con (3.25-9) y (3.30), teniendo en cuenta que a partir de (3.1) $G \sim \bar{V}^2/\bar{M}$ y fijando las coordenadas con (3.34), tenemos que las componentes no nulas de $R_{\mu\nu}$ respecto de la métrica valen:

$${}^2 R_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 {}^2 g_{00} \quad (3.35)$$

$${}^2 R_{ij} = \frac{1}{2} \nabla^2 {}^2 g_{ij} \quad (3.36)$$

$${}^3 R_{0i} = \frac{1}{2} \nabla^2 {}^3 g_{i0} \quad (3.37)$$

$${}^4 R_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 {}^4 g_{00} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 {}^2 g_{00}}{\partial t^2} - \frac{1}{2} g_{ij}^2 \frac{\partial^2 {}^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2} (\nabla^2 {}^2 g_{00})^2 \quad (3.38)$$

donde $R_{\mu\nu}^n$ indica orden \bar{v}^n/\bar{r}^2 .

Ahora necesitamos expandir las fuentes que conforman la parte derecha de la ecuación de campo. Para ello debemos tener presente que de acuerdo con (2.122) y teniendo en cuenta que $k \sim G$, es $\bar{\sigma}^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu}$ hasta orden $\bar{M}\bar{v}/\bar{r}^3$. Para ser consistentes con el hecho de que ${}^2 R_{0i} = {}^3 R_{00} = {}^3 R_{ij} = 0$, debe cumplirse:

$${}^0 \sigma_{0i} = {}^1 \sigma_{00} = {}^1 \sigma_{ij} = 0 \quad (3.39)$$

donde $\sigma^{\mu\nu n}$ significa orden $\bar{M}\bar{v}^n/\bar{r}^3$. No poseemos ninguna prescripción para determinar el valor de σ^{ij} . Postularemos que el mismo es nulo

$$\sigma^{ij} = 0 \quad (3.40)$$

lo que implica que en el límite newtoniano las fuentes son, precisamente, newtonianas. Esto está de acuerdo con aquellos casos en que los

potenciales gravitatorios, de los cuales surgen las diferentes componentes de la métrica, poseen desarrollos donde las velocidades de las fuentes aparecen explícitamente. En el párrafo posterior se justificará esta afirmación para el caso de un modelo particular.

Las ecuaciones de campo pueden escribirse:

$$\overset{2}{R}_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 \overset{2}{g}_{00} = -4\pi G \overset{0}{\sigma}_{00} \quad (3.41)$$

$$\overset{2}{R}_{ij} = \frac{1}{2} \nabla^2 \overset{2}{g}_{ij} = -4\pi G \delta_{ij} \overset{0}{\sigma}_{00} \quad (3.42)$$

$$\overset{3}{R}_{0i} = \frac{1}{2} \nabla^2 \overset{3}{g}_{i0} = 8\pi G \delta_{ij} \overset{1}{\sigma}_{0j} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \overset{4}{R}_{00} &= \frac{1}{2} \nabla^2 \overset{4}{g}_{00} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \overset{2}{g}_{ij} \frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2} (\nabla \overset{2}{g}_{00})^2 \\ &= -4\pi G (\overset{2}{\sigma}^{\mu\mu} - 2 \overset{2}{g}_{00} \overset{2}{\sigma}_{00}) - \frac{1}{2} (8\pi G)^2 \overset{0}{\Lambda}^{\mu\mu} \end{aligned} \quad (3.44)$$

En esta última ecuación $\overset{0}{\Lambda}^{\mu\nu}$ está compuesto por los términos extras que en (2.122) $\overset{2}{\sigma}^{\mu\nu}$ posee respecto de $\sigma^{\mu\nu}$. En otras palabras

$$\overset{2}{\sigma}^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} + 8\pi G \overset{0}{\Lambda}^{\mu\nu} \quad (3.45)$$

donde $\overset{0}{\Lambda}^{\mu\nu}$ indica orden $\bar{M}^{-2-\mu}/\bar{r}^\nu$.

Definiendo

$$\overset{2}{g}_{00} \equiv -2\phi \quad (3.46)$$

observamos que (3.41) es equivalente a la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \overset{0}{\sigma}_{00} \quad (3.47)$$

cuya solución es:

(3.48)

Teniendo en cuenta (3.42), vemos que

$$\overset{2}{g}_{ij} = -2 \delta_{ij} \phi \quad (3.49)$$

Por otro lado, definiendo

$$\overset{3}{g}_{i0} \equiv \xi_i \quad (3.50)$$

notamos que este potencial vectorial, de acuerdo con (3.43), también satisface una ecuación del tipo de Poisson. La solución es

$$\xi_i(\vec{x}, t) = -4G \int \frac{\overset{1}{\sigma}{}^{i0}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (3.51)$$

Definiendo

$$\overset{4}{g}_{00} \equiv -2\psi \quad (3.52)$$

vemos que este potencial escalar vale:

$$\psi(\vec{x}, t) = -G \int \frac{d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \left\{ \frac{1}{4\pi G} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 (\phi)^2 \right] + \overset{2}{\sigma}{}^{\mu\mu} + 8\pi G \overset{0}{\Lambda}{}^{\mu\mu} \right\} \quad (3.53)$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \nabla^2 (\phi)^2 - \phi \nabla^2 \phi$$

Como puede verse, el potencial de cuarto orden ψ es diferente al correspondiente de R.G., independientemente del modelo que se adopte para la descripción de las fuentes, ya que él posee términos que dependen explícitamente del espín. Debemos aclarar aquí, que las componentes del tensor energía-impulso métrico también pueden depender del espín de las fuentes, de acuerdo con la relación (2.114).

3.1.5. La Expresión de la Geodésica de la Partícula No Relativista

Teniendo en cuenta (3.49), (3.50) y (3.52), los símbolos de Christoffel valen:

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ i \\ 00 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ i \\ 00 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi + \phi^2 + \psi) + \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \quad (3.54)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ i \\ 0j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} \right) - \delta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.55)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ i \\ jk \end{matrix} \right\} = -\delta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} - \delta_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} + \delta_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (3.56)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 00 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.57)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0i \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (3.58)$$

En consecuencia, la ecuación de la geodésica para la partícula de prueba no relativista, hasta orden post-newtoniano, es:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{dt^2} = & -\frac{\partial}{\partial x^i} (\phi + \phi^2 + \psi) + \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} \right) v_j + 3 \frac{\partial \phi}{\partial t} v_i \\ & + \left(\delta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} + \delta_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} - \delta_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) v_j v_k + 2 \frac{\partial \phi}{\partial x^j} v_i v_j - \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.59)$$

La cual podemos escribir vectorialmente como:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} = & -\nabla (\phi + \phi^2 + \psi) - \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{\xi}) + 3\vec{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ & + 4\vec{v} (\vec{v} \cdot \nabla) \phi - |\vec{v}|^2 \nabla \phi \end{aligned} \quad (3.60)$$

También es posible obtener, adicionalmente, otros tres símbolos de Christoffel, dado que los mismos dependen exclusivamente de las componentes de la métrica recién halladas. Ellos son:

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ ij \end{matrix} \right\}^3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} \right) - \delta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.61)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ i0 \end{matrix} \right\}^4 = \frac{\partial}{\partial x^i} (\psi - \phi^2) \quad (3.62)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 00 \end{matrix} \right\}^5 = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (3.63)$$

Por otro lado, es fácil establecer lo siguiente: si el desarrollo de las componentes de la métrica potencias pares o impares de la velocidad típica, según sea el caso, se cumple para órdenes superiores (ver comentario abajo de (3.12)), entonces el desarrollo de los símbolos de Christoffel es el siguiente:

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\}^2 + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\}^4 + \dots \quad \text{para } \left\{ \begin{matrix} i \\ 00 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0i \end{matrix} \right\} \quad (3.64)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\}^3 + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\}^5 + \dots \quad \text{para } \left\{ \begin{matrix} i \\ 0j \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 00 \end{matrix} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{matrix} 0 \\ ij \end{matrix} \right\} \quad (3.65)$$

3.1.6. Trayectorias de Partículas Relativistas

Estudiaremos a continuación el movimiento de un fotón en presencia de estos campos gravitatorios. Dado que el carácter no relativista de \bar{v} se refiere exclusivamente a la velocidad de las fuentes, los resultados obtenidos en los párrafos anteriores pueden ser utilizados con vistas a establecer el movimiento de partículas relativistas. De acuerdo con (3.18), y teniendo en cuenta que las componentes de la velocidad de la luz $w_\lambda = dx^\lambda/dt$ son del orden de la unidad, tenemos que la aceleración de la luz a orden \bar{v}^2/\bar{r} , vale:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \left\{ \begin{matrix} i \\ 00 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \psi_j \psi_k + 2 \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0j \end{matrix} \right\} \psi_j \psi_i$$

(3.66)

Como función del potencial de Newton, esta última expresión puede escribirse:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + \left(\delta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} + \delta_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} - \delta_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) \psi_j \psi_k + 2 \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \psi_j \psi_i$$

(3.67)

Lo que podemos expresar en forma vectorial, como sigue:

$$\frac{d\vec{\psi}}{dt} = - (1 + |\vec{\psi}|^2) \nabla \phi + 4 \vec{\psi} (\vec{\psi} \cdot \nabla \phi)$$

(3.68).

A diferencia de la partícula no relativista, en la trayectoria de un fotón puede existir una corrección a tercer orden. Ello es debido a la magnitud que pueden alcanzar las componentes espaciales de la velocidad de la luz (esto es ~ 1) sumado a las características de las expansiones (3.64) y (3.65) de los símbolos de Christoffel. Por lo tanto, el siguiente orden es \vec{v}^3/\bar{r} , y sus correcciones valen:

$$-2 \left\{ \begin{matrix} i \\ 0j \end{matrix} \right\} \psi_j + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 00 \end{matrix} \right\} \psi_i + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ jk \end{matrix} \right\} \psi_j \psi_k \psi_i$$

(3.69)

Reemplazando los símbolos de Christoffel por los potenciales gravitatorios, esta corrección se escribe:

$$\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} \right) \psi_j + 2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \psi_i - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x^j} \right) \psi_j \psi_k \psi_i - \frac{\partial \phi}{\partial t} \psi_j \psi_k \psi_i \delta_{jk}$$

(3.70)

Por lo que la aceleración de un fotón hasta tercer orden en velocidad, vale:

(3.71).

A pesar de haber integrado R_{00}^y para obtener g_{00}^y , nosotros no podemos utilizar este resultado y calcular, entonces, la aceleración de un fotón hasta el orden siguiente, esto es hasta \bar{v}^y/\bar{r} . Ello es así debido a que necesitaríamos conocer $\{s_k^y\}$, lo que implicaría saber g_{ij}^y y, en consecuencia, poder integrar la ecuación (3.33) para R_{ij}^y (Este no es el caso de la partícula no relativista, dado que para calcular su aceleración a cuarto orden, sólo hace falta conocer g_{00}^y). Como se verá más adelante (parágrafo 3.2.3), las correcciones en la aceleración del fotón a tercer orden, resultan suficientes como para encontrar dispersiones entre la teoría ECKS y la R.G.

3.1.7. APN de la Ley de Conservación

Los potenciales gravitatorios dependen de la evolución de las fuentes. De acuerdo con (3.48) (3.51) y (3.53) necesitamos conocer en todo instante cual es la distribución correspondiente a σ_{00}^0 , σ_{i0}^1 , $\sigma_{\mu\mu}^2$ y $\Lambda^{\mu\mu}$. Esto significa que para realizar la APN de la geodésica necesitamos conocer la evolución de las fuentes hasta por lo menos un orden $\bar{M}\bar{v}^2/\bar{r}^3$. Las magnitudes que sirven de fuente a los potenciales están siempre "atrasadas" en dos órdenes respecto de la correspondiente componente de la métrica. Ello se debe a que en la ecuación de campo combinada, las fuentes están multiplicadas por un factor que depende de la constante gravitatoria G, la cual "aumenta" en un orden $\bar{v}^2 \bar{r}/\bar{M}$ su parte derecha.

Para hallar la evolución de las fuentes hasta el orden deseado, disponemos de la ley de conservación (2.123), la cual debe ser válida orden a orden. Recordando (3.45) y desarrollando (2.123), obtenemos:

$$\partial_{\mu} (\sigma^{\mu\nu} + 8\pi G \Lambda^{\mu\nu}) + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} (\sigma^{\lambda\nu} + 8\pi G \Lambda^{\lambda\nu}) + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} (\sigma^{\mu\lambda} + 8\pi G \Lambda^{\mu\lambda}) = 0 \quad (3.72)$$

En el orden más bajo, esto es a orden $\bar{M}\bar{V}/\bar{r}^4$ obtenemos la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overset{0}{\sigma}{}^{00} + \frac{\partial}{\partial x^i} \overset{1}{\sigma}{}^{0i} = 0 \quad (3.73)$$

recordando que $\partial(\overset{1}{\sigma}{}^{ij})/\partial x^i = 0$ se cumple trivialmente debido a (3.40). Para el orden siguiente, obtenemos 1+3 ecuaciones: una ecuación para $\nu = 0$ y tres para $\nu = i$.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\overset{2}{\sigma}{}^{0i} + 8\pi G \overset{0}{\Lambda}{}^{0i}) = 0 \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (\overset{2}{\sigma}{}^{ij} + 8\pi G \overset{1}{\Lambda}{}^{ij}) + \frac{\partial}{\partial t} \overset{1}{\sigma}{}^{i0} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \overset{0}{\sigma}{}^{00} = 0 \quad (3.75)$$

donde en (3.75) ya se han reemplazado los símbolos $\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\}$ por los valores obtenidos en el párrafo anterior. Desarrollando la ley de conservación a orden $\bar{M}\bar{V}^3/\bar{r}^4$, obtenemos las siguientes 1+3 ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overset{3}{\sigma}{}^{00} + 8\pi G \overset{1}{\Lambda}{}^{00}) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\overset{3}{\sigma}{}^{0i} + 8\pi G \overset{1}{\Lambda}{}^{0i}) - \frac{\partial \phi}{\partial t} \overset{0}{\sigma}{}^{00} = 0 \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overset{3}{\sigma}{}^{i0} + 8\pi G \overset{1}{\Lambda}{}^{i0}) + \frac{\partial}{\partial x^j} (\overset{3}{\sigma}{}^{ij} + 8\pi G \overset{1}{\Lambda}{}^{ij}) = 0 \quad (3.77)$$

Finalmente, para el orden $\bar{M}\bar{V}^4/\bar{r}^4$ obtenemos las 4 ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overset{4}{\sigma}{}^{00} + 8\pi G \overset{2}{\Lambda}{}^{00}) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\overset{4}{\sigma}{}^{0i} + 8\pi G \overset{2}{\Lambda}{}^{0i}) = 0 \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\overset{3}{\sigma}{}^{i0} + 8\pi G \overset{1}{\Lambda}{}^{i0}) + \frac{\partial}{\partial x^j} (\overset{2}{\sigma}{}^{ij} + 8\pi G \overset{2}{\Lambda}{}^{ij}) + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} (\overset{2}{\sigma}{}^{00} \\ & + 8\pi G \overset{1}{\Lambda}{}^{00} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) \overset{2}{\sigma}{}^{00} + \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} \right. \\ & \left. - 4\delta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \overset{1}{\sigma}{}^{0j} + \left(\delta_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} - 4\delta_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) (\overset{2}{\sigma}{}^{jk} + 8\pi G \overset{1}{\Lambda}{}^{jk}) = 0 \end{aligned}$$

(3.79)

En estas ecuaciones y en relación con R.G., no sólo aparecen nuevos términos que contienen las componentes $\Lambda^{\mu\nu}$; en la teoría ECSK también las componentes de $\sigma^{\mu\nu}$ son diferentes a las correspondientes $T^{\mu\nu}$ de R.G. Los potenciales gravitatorios, que dependen de las mismas fuentes, también participan de estas expresiones, por lo que tenemos un conjunto de ecuaciones integrodiferencial que sólo puede ser resuelto por medio de un procedimiento iterativo.

En esta sección hemos hallado las expresiones más generales para los potenciales gravitatorios, las trayectorias geodésicas de partículas relativistas (hasta orden \bar{v}^3/\bar{r}) y no relativistas (hasta orden \bar{v}^4/\bar{r}), como así también las correspondientes leyes de conservación de las fuentes que producen los campos gravitatorios (hasta orden $\bar{M}\bar{v}^4/\bar{r}^3$). Estamos, por lo tanto, en condiciones de estudiar el caso de algún modelo particular, que sea relevante y por otro lado compatible, con aquellas hipótesis físicas que hacen posible nuestras expansiones.

3.2. APN PARA UN FLUIDO IDEAL CON ESPIN

3.2.1. Modelo de Fluido Ideal. La Conexión Afín y la Torsión

Si elegimos un modelo para los tensores $\sigma^{\mu\nu}$ y $\zeta_{\mu\nu}{}^\lambda$, nos será posible escribir explícitamente los potenciales y las leyes de conservación necesarios para la APN. Para el tensor energía momento total, emplearemos un modelo muy general de fluido ideal con espín:

$$\Sigma^{\mu\nu} = P^\mu U^\nu + P(g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu) \quad (3.80)$$

donde P^μ es el momento lineal, P es la presión hidrostática (que supondremos de orden $\bar{M}\bar{v}^2 / \bar{r}^3$) y u^μ representa las componentes del vector cuadrivelocidad del fluido. $\Sigma^{\mu\nu}$ tiene la misma expresión que su correspondiente en R.G.; sin embargo ahora P^μ no es ρu^μ (con ρ la densidad de energía), y en consecuencia este tensor no es necesariamente simétrico.

Teniendo en cuenta los órdenes más bajos de las diferentes componentes de ζ , nos es posible obtener las componentes de Γ , y por lo tanto también aquellas componentes del tensor de la torsión que resultan necesarias para escribir el operador $\bar{\nabla}_\lambda$. Esto es necesario con el fin de calcular los $\sigma^{\mu\nu}$ hasta un orden $\bar{M}\bar{v}^2 / \bar{r}^3$, vía la ecuación (2.114), lo que hará posible la explicitación de los potenciales y de la ley de conservación (3.72).

Para el tensor de espín (o impulso angular intrínseco) adoptamos el modelo usual (50)

$$\zeta_{\mu\nu}{}^\lambda = \zeta_{\mu\nu} U^\lambda \quad (3.81)$$

donde $\zeta_{\mu\nu}$ es la densidad de espín que corresponde a un tensor anti-simétrico:

$$\zeta_{\mu\nu} = \zeta_{[\mu\nu]} \quad (3.82)$$

Impondremos la llamada condición de Weyssenhoff, que garantiza la

integrabilidad de las ecuaciones de movimiento de las partículas del fluido (9) (51):

$$\bar{\zeta}_{\mu\nu}{}^\nu = \bar{\zeta}_{\mu\nu} U^\nu = 0 \quad (3.83)$$

La expansión de la cuadrivelocidad u^μ se puede obtener de

$$U^\mu U_\mu = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\bar{t}} \frac{dx^\nu}{d\bar{t}} = \frac{dS^2}{-d\bar{t}^2} = -1 \quad (3.84)$$

ya que $d\bar{t}^2 = -ds^2$. Sus cuatro componentes valen:

$$U^0 = 1 - \phi + \frac{1}{2} v^2 + O(\bar{v}^4) \quad (3.85)$$

$$U^i = U^0 v^i = v^i - \phi v^i + \frac{1}{2} v^2 v^i + O(\bar{v}^5) \quad (3.86)$$

Supondremos que el espín puede ser expandido en potencias de \bar{v} :

$$\bar{\zeta}_{\mu\nu}{}^\lambda = (\bar{\zeta}_{\mu\nu}^0 + \bar{\zeta}_{\mu\nu}^1 + \bar{\zeta}_{\mu\nu}^2 + \dots) (\bar{U}^\lambda + \bar{U}^1{}^\lambda + \bar{U}^2{}^\lambda + \dots) \quad (3.87)$$

donde $\bar{\zeta}_{\mu\nu}^n$ es de orden $\bar{M}\bar{v}^n/\bar{r}^2$ y $\bar{U}^n{}^\lambda$ es de orden \bar{v}^n . De la ecuación algebraica (2.119) tenemos que espín $\sim k^{-1}$ torsión. En la APN la conexión debe expandirse en potencias de \bar{v}^n/\bar{r} y, en consecuencia, esta es la expansión correspondiente a la torsión. Teniendo en cuenta que $k^{-1} \sim \bar{M}\bar{v}^2/\bar{r}$, vemos que la expansión del espín debe hacerse, precisamente, en potencias de $\bar{M}\bar{v}^n/\bar{r}^2$. Por otro lado, el orden más bajo para las componentes de la conexión es \bar{v}^2/\bar{r} , de forma tal que si nosotros esperamos para su parte antisimétrica correcciones a este orden, deberá ser $\bar{\zeta}_{ij}^0 \neq 0$.

En la teoría ECSK (así como en R.G.), el espín suele ser asociado a un vector de espín s^λ (51). A veces esta misma asociación se hace con respecto a la torsión (52). En el primer caso se toma

$$\bar{\zeta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} U^\sigma s^\lambda \quad (3.88)$$

Aquí nuestra expansión (3.87) significaría que la magnitud $u^\sigma s^\lambda$ debe

ser, de hecho, expandida en potencias de $\bar{M}\bar{V}^n/\bar{r}^2$, donde $\bar{u}^\mu \sim \bar{v}^\mu$ y $\bar{s}^\lambda \sim \bar{M}\bar{v}^m/\bar{r}^2$, con $n=m+m'$ y $m, m'=0, 1, 2, \dots$

A partir de la ecuación (3.83), válida orden a orden, podemos obtener las siguientes relaciones y vínculos:

$$\overset{0}{\bar{b}}_{i0} = \overset{0}{\bar{b}}^{i0} = 0 \quad (3.89)$$

$$\overset{1}{\bar{b}}_{i0} = -\overset{0}{\bar{b}}_{ij} v^j \quad (3.90)$$

$$\overset{1}{\bar{b}}_{i0} = -\delta^{ij} \overset{1}{\bar{b}}_{j0} = \delta^{ij} \overset{0}{\bar{b}}_{jk} v^k \quad (3.91)$$

$$\overset{2}{\bar{b}}_{i0} = -\delta^{ij} \overset{2}{\bar{b}}^{j0} = -\overset{1}{\bar{b}}_{ij} v^j \quad (3.92)$$

De acuerdo con lo ya afirmado, supondremos que las componentes $\overset{0}{\bar{b}}_{ij}$ son distintas de cero. Esto resulta coherente con la descomposición de la densidad de espín (3.88) y las expansiones de la velocidad (3.85-6) y del tensor de espín (3.87). Para este caso, estas componentes vendrán dadas por la expresión:

$$\overset{0}{\bar{b}}_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijsk} \overset{0}{\dot{U}}^0 \overset{0}{S}^k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijsk} \overset{0}{S}^k$$

También resulta sencillo comprobar que los resultados (3.89-92) son todos compatibles con (3.88).

Haciendo nuevamente uso de (3.83), vemos que la expresión correspondiente a las distintas componentes de la conexión, se reduce a:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + 8\pi G (\bar{b}_{\mu\nu}{}^\lambda - g_{\mu\sigma} \delta^{\lambda\rho} \bar{b}_{\nu\rho}{}^\sigma + g_{\nu\sigma} g^{\lambda\rho} \bar{b}_{\rho\mu}{}^\sigma) \quad (3.93)$$

Utilizando las soluciones para los símbolos de Christoffel obtenidas en el párrafo 3.1.5., podemos escribir las componentes de la conexión hasta orden \bar{v}^3/\bar{r} como función de los potenciales, la densidad de espín y la velocidad:

$$\Gamma_{00}^i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} - 16\pi G \delta^{ij} \overset{0}{\delta}_{j\mu} v^\mu \quad (3.94)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = 8\pi G \delta^{im} (\overset{0}{\delta}_{jm} + \overset{1}{\delta}_{jm}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} \right) - \delta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.95)$$

$$\Gamma_{jk}^i = -\delta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} - \delta_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} + \delta_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + 8\pi G (\overset{0}{\delta}_{jk} v^i + 2\delta^{im} \overset{0}{\delta}_{m(j} \delta_{k)r} v^r) \quad (3.96)$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.97)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + 16\pi G \overset{0}{\delta}_{ij} v^j \quad (3.98)$$

$$\Gamma_{i0}^0 = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (3.99)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = 8\pi G (\overset{0}{\delta}_{ij} + \overset{1}{\delta}_{ij}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} \right) - \delta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.100)$$

Hasta orden \bar{v}^3 / \bar{r} , las componentes Γ_{00}^0 y Γ_{i0}^0 coinciden con los correspondientes símbolos de Christoffel de R.G., mientras que en Γ_{00}^i , Γ_{0j}^i , Γ_{j0}^i y Γ_{0i}^0 aparecen términos nuevos. En Γ_{ij}^0 tenemos términos antisimétricos debidos a la torsión; y en Γ_{jk}^i son incorporados términos simétricos y antisimétricos, también debidos a la torsión. Este último caso muestra que este tensor también contribuye a la parte simétrica de la conexión.

Hasta orden \bar{v}^3 / \bar{r} las componentes no nulas de la torsión valen:

$$S_{ij}^0 = 8\pi G (\overset{0}{\sigma}_{ij} + \overset{1}{\sigma}_{ij}) \quad (3.101)$$

$$S_{0i}^0 = 8\pi G (\overset{0}{\sigma}_{ij} V^j) \quad (3.102)$$

$$S_{jk}^i = 8\pi G \overset{0}{\sigma}_{jk} V^i \quad (3.103)$$

Un resultado interesante al que se puede arriar a partir de esto último, corresponde al valor de las diferencias, recién a tercer orden, entre geodésicas y autoparalelas. De acuerdo con la definición de autoparalela (1.40) donde la curva puede ser parametrizada con el tiempo propio, y entendiéndola a ésta, momentáneamente, como representando la aceleración de una partícula, vemos que para el orden \bar{v}^3/\bar{r} de d^2x^i/dt^2 , se obtiene:

$$\frac{d^3x^i}{dt^2} \Big|_A = 32\pi G \delta^{ij} \overset{0}{\sigma}_{jmn} V^m \quad (3.104)$$

Al mismo orden, ahora para el caso de la geodésica descrita por (3.18), llegamos a:

$$\frac{d^3x^i}{dt^2} \Big|_G = 0 \quad (3.105)$$

En general, para $\bar{\zeta} = 0$, obtendríamos el resultado bien conocido de R.G.: no existen diferencias entre autoparalelas y geodésicas a ningún orden. En la teoría ECSK tampoco existe diferencia a orden \bar{v}^2/\bar{r} porque, de hecho, $\overset{2}{\Gamma}_{00}^i = \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ 00 \end{smallmatrix} \right\}$, y ambas curvas coinciden en su expresión con:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (3.106)$$

lo que constituye la ecuación de Newton.

Las expresiones (3.104) y (3.105) de curvas autoparalelas y geodésicas, se verifican para el caso $\bar{\zeta} \neq 0$. De acuerdo con lo ya discutido en

3.1.2., corresponden a las regiones del espacio-tiempo en donde existen fuentes. El hecho de que ya a tercer orden las expresiones de estas curvas no coincidan, resulta coherente con lo visto en 1.1.6. cuando se estableció que en una geometría U_4 geodésicas y autoparalelas constituyen curvas diferentes del espacio-tiempo. Ya se ha señalado, también, que ninguna de estas curvas describen, necesariamente, la aceleración de partículas dotadas de espín.

3.2.2. Las Componentes de las Fuentes Hasta Orden $\bar{M}\bar{v}^2/\bar{r}^3$

Con los resultados obtenidos en el párrafo anterior, estamos en condiciones de obtener $\sigma^{\mu\nu}$ hasta orden $\bar{M}\bar{v}^2/\bar{r}^3$. Debemos notar que (3.39) da condiciones extras para el espín, las que habremos de tener en cuenta en nuestros cálculos.

Para el orden \bar{M}/\bar{r}^3 tenemos:

$$\overset{0}{\sigma}{}^{00} = \overset{0}{p}{}^0 \quad (3.107)$$

Hemos de tomar $\overset{0}{p}{}^0$ como la densidad de energía ρ , que a este orden coincide con la densidad de masa en reposo ρ_0 , lo que se justificará en el párrafo 3.2.3. ($\rho_0 = n\mu_0$, donde n es el número de partículas con masa μ_0 por unidad de volumen). Tal cual lo supuesto en (3.40):

$$\overset{0}{\sigma}{}^{i3} = 0 \quad (3.108)$$

La condición (3.39) para $\overset{0}{\sigma}{}^{0i}$, implica:

$$\overset{0}{p}{}^i = 0 \quad (3.109)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (\overset{0}{\sigma}{}^{ij}) = 0 \quad (3.110)$$

Para el orden $\bar{M}\bar{v}^2/\bar{r}^3$, y teniendo en cuenta que $\overset{1}{\sigma}{}^{00} = 0$, obtenemos:

$$\overset{1}{p}_0 = 2 \frac{\partial}{\partial x^i} (\overset{0}{\sigma}^{ij} v^j)$$

(3.111)

A su vez, para $\overset{1}{\sigma}^{0\mu}$

$$\overset{1}{\sigma}^{0\mu} = \rho v^\mu + \frac{\partial}{\partial x^i} (\overset{1}{\sigma}^{\mu i})$$

(3.112)

Teniendo en cuenta el hecho de que $\sigma^{\mu\nu}$ es simétrico, vemos que

$$\overset{1}{p}^\mu = \overset{1}{p}_0 v^\mu = \rho v^\mu$$

(3.113)

Por otro lado, como $\overset{1}{\sigma}^{\mu r}$ es nulo, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overset{0}{\sigma}^{ij}) + \frac{\partial}{\partial x^k} (\overset{0}{\sigma}^{ij} v^k - 2 \overset{0}{\sigma}^{k(i} v^{j)}) = 0$$

(3.114)

La parte antisimétrica de esta última ecuación no es otra cosa que la ecuación (2.111) a orden $\bar{M}v/\bar{r}^3$. La escribiremos de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overset{0}{\sigma}^{ij}) + \nabla \cdot (\overset{0}{\sigma}^{ij} \vec{v}) = 0$$

(3.115)

La cual podemos denominar "ecuación de continuidad para la densidad de espín de orden cero". Como la parte simétrica de (3.114) debe anularse, y teniendo en cuenta (3.110), vemos que debe cumplirse

$$\overset{0}{\sigma}^{k(i} \frac{\partial}{\partial x^k} (v^{j)}) = 0$$

(3.116)

Las ecuaciones (3.115) y (3.116) son sumamente importantes, dado que establecen la relación entre el espín y el campo de velocidades del fluido.

Para obtener las expresiones de las componentes de $\sigma^{\mu\nu}$ al orden siguiente, debemos tener en cuenta el hecho de que ellas deben ser

simétricas. Haciendo uso de las expansiones de las componentes de la conexión Γ y de las componentes antisimétricas del tensor energía-impulso total $\sum^{[m\mu r]}$ y $\sum^{[0m\mu]}$, utilizando nuevamente (2.114) y luego de mucho álgebra encontramos que:

$$\overset{2}{\sigma}{}^{00} = \overset{2}{P}{}^0 + \rho \left(\frac{1}{2} V^2 - \phi \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x^i} (\overset{2}{\sigma}{}^{0i}) - 16\pi G \overset{0}{\sigma}{}_{ij} \overset{0}{\sigma}{}^{ij} \quad (3.117)$$

$$\overset{2}{\sigma}{}^{m\mu r} = \rho V^m V^r + P \delta^{m\mu r} - 2 \frac{\partial}{\partial x^i} (\overset{1}{\sigma}{}^{i(m\mu} V^{r)}) + 16\pi G \overset{0}{\sigma}{}_{ij} \overset{0}{\sigma}{}^{i(m} \delta^{r)j} \quad (3.118)$$

$$\overset{2}{\sigma}{}^{0m} = 2 \frac{\partial}{\partial x^i} (\overset{0}{\sigma}{}^{ij} V^j) V^m + 2 \delta^{mj} \frac{\partial}{\partial t} (\overset{0}{\sigma}{}_{jk} V^k) + 3 \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \overset{0}{\sigma}{}^{im} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{2} \overset{0}{\sigma}{}^{mi} V^2 - \overset{0}{\sigma}{}^{mi} \phi + \overset{2}{\sigma}{}^{mi} + 2 \delta^{[m} V^{i]} \overset{0}{\sigma}{}_{jk} V^k \right) \quad (3.119)$$

Para obtener estas expresiones, se ha desarrollado la ley de conservación (2.111). Esto nos ha permitido emplear las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overset{1}{\sigma}{}^{m\mu r}) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\overset{1}{\sigma}{}^{m\mu r} V^i) - 16\pi G \overset{0}{\sigma}{}_{ij} \overset{0}{\sigma}{}^{i[m\mu} \delta^{r]j} = 0 \quad (3.120)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\overset{0}{\sigma}{}_{ij} V^j) V^m - \frac{1}{2} \overset{2}{P}{}^m + \delta^{mj} \frac{\partial}{\partial t} (\overset{0}{\sigma}{}_{jk} V^k) + \delta^{mj} \frac{\partial}{\partial x^i} (\overset{0}{\sigma}{}_{jk} V^k V^i) - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \overset{0}{\sigma}{}^{im} = 0 \quad (3.121)$$

Las ecuaciones (3.120) son particularmente importantes, dado que ellas proveen los valores de las componentes $\overset{1}{\sigma}{}^{ij}$, necesarios para conocer el potencial vectorial $\vec{\xi}$. El valor de $\overset{2}{P}{}^0$ de la ecuación (3.117), será explicitado en el párrafo siguiente.

Para poder escribir en el próximo párrafo las leyes de conservación hasta el orden deseado, en forma explícita, debemos conocer algunas

componentes de Λ . Ellas son y valen:

$$\Lambda^{00} = \frac{3}{2} \delta_{ij} \sigma^{ij} \quad (3.122)$$

$$\Lambda^{0i} = 0 \quad (3.123)$$

$$\Lambda^{ij} = 2 \delta^{i\mu} \sigma_{\mu r} \sigma^{ur} - \frac{1}{2} \delta^{ij} \sigma_{\mu r} \sigma^{\mu r} \quad (3.124)$$

La (3.123) y el hecho de que sea $\overset{4}{R}_{0i} = 0$, muestra que

$$\overset{2}{\sigma}^{0i} = 0 \quad (3.125)$$

lo que resulta consistente con (3.74), que ahora se satisface trivialmente. A partir de esto último, la ley de conservación (3.77) queda:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (\overset{3}{\sigma}^{ij} + 8\pi G \Lambda^{ij}) = 0 \quad (3.126)$$

3.2.3. La Ley de Conservación para el Fluido Ideal con Espín

La Forma Explícita de los Potenciales Gravitatorios

Dado que ahora conocemos las componentes de σ y Λ , estamos en condiciones de obtener (3.72) hasta orden $\bar{M}\bar{v}^2/\bar{r}^v$, lo que es necesario para la explicitación de las geodésicas (3.60) y (3.71). A partir de las ecuaciones (3.73), (3.107) y (3.112) obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^m} (\rho v^m) = 0 \quad (3.127)$$

donde hemos tenido en cuenta que $\partial^2 (\overset{1}{\sigma}^{ij}) / \partial x^i \partial x^j = 0$, dado que $\overset{1}{\sigma}^{ij}$ es antisimétrico.

Veamos cuál es el significado de (3.127). En R.G. nosotros podemos escribir la conservación del número de bariones, o lo que es equivalente, la conservación de la masa en reposo, en las dos formas

equivalentes:

$$\overset{\nabla}{\nabla}_{\mu} (\rho_0 U^{\mu}) = 0 \quad (3.128)$$

$$\partial_{\mu} (e \rho_0 U^{\mu}) = 0 \quad (3.129)$$

Extendiendo estas 2 ecuaciones a una teoría métrica con torsión obtenemos, respectivamente:

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_{\mu} (\rho_0 U^{\mu}) = 0 \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} (e \rho_0 U^{\mu}) &= e \overset{\Gamma}{\nabla}_{\mu} (\rho_0 U^{\mu}) + 2 e S_{\mu\sigma}{}^{\sigma} \rho_0 U^{\mu} \\ &= \overset{\nabla}{\nabla}_{\mu} (e \rho_0 U^{\mu}) = 0 \end{aligned} \quad (3.131)$$

Ambas ecuaciones difieren en el término $2S_{\mu\sigma}{}^{\sigma} \rho_0 U^{\mu}$. En (11) se prueba que la ecuación (3.130) habría de implicar una torsión asociada con una variación en la masa, y no con el espín de las fuentes, lo que no concuerda con la interpretación que al respecto se ha dado aquí. (Ello es así debido a que (3.130) puede escribirse como

$$(e \rho_0 U^{\mu})_{,\mu} - 2 e S_{\mu\sigma}{}^{\sigma} \rho_0 U^{\mu} = 0$$

Aplicando la ley de Gauss en una región Σ delimitada por dos hipersuperficies espaciales σ_1 y σ_2 que encierren toda la materia, tenemos:

$$M(\sigma_2) - M(\sigma_1) = 2 \int_{\Sigma} e S_{\mu\sigma}{}^{\sigma} \rho_0 U^{\mu} d^4x$$

con $M(\sigma) = \int_{\sigma} e \rho_0 U^{\mu} dV_{\mu} = \int \rho_0 d(\text{volumen propio})$: la masa del sistema en σ . En consecuencia, (3.130) implicaría una torsión ligada a la variación de la masa del sistema y no a su espín).

En cambio, la ecuación (3.131), entendida como un vínculo, conlleva la interpretación convencional de conservación de la masa, ya que ob-

tendríamos:

$$M(\sigma_2) - M(\sigma_1) = 0$$

Es importante señalar que la ecuación de continuidad (3.131) resulta necesaria cuando la temperatura es una variable independiente y, en consecuencia, la presión P es $P = P(\rho_0, \pi)$, siendo π la energía interna, a la cual ya nos hemos referido en 3.1.1. La densidad de energía ρ involucrada en (3.127) y la densidad de masa en reposo ρ_0 , se relacionan a través de

$$\rho = \rho_0 (1 + \pi) \tag{3.132}$$

La energía π es de orden \bar{v}^2 . En consecuencia, a orden \bar{M}/\bar{r}^3 las densidades ρ y ρ_0 coinciden, aún admitiéndose la existencia de una energía interna. En otras palabras, (3.131) es (3.127) a orden $\bar{M}\bar{v}/\bar{r}^3$, la que podemos escribir como:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^m} (\rho_0 v^m) = 0 \tag{3.133}$$

Esta ecuación es exactamente igual a la correspondiente de R.G. (31). Por lo tanto, sea o no la temperatura una variable independiente, (3.127) representa la conservación de la masa.

No debe sorprendernos el hecho de que cuando las fuentes cumplen con las condiciones de nuestras hipótesis, la ley de conservación (3.72) en su orden más bajo, nos conduzca a que la masa se conserva. En efecto, si a este orden existiese una conversión no despreciable de masa en energía, ello produciría temperaturas para las cuales el fluido habría de moverse a velocidades relativistas, lo que negaría la hipótesis fundamental de la APN (36).

Haciendo uso de (3.112), (3.118) y (3.124) la ecuación (3.75) queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^r} [\rho v^u v^r + \delta^{ur} P - 2 \frac{\partial}{\partial x^i} (\overset{\circ}{g}^{i(u} v^{r)}) + 16 \pi G \overset{\circ}{g}_{ij} \overset{\circ}{g}^{i(u} \delta^{r)j} \\ + 16 \pi G \delta^{iu} \overset{\circ}{g}_{ij} \overset{\circ}{g}^{rj} - 4 \pi G \delta^{ur} \overset{\circ}{g}_{ij} \overset{\circ}{g}^{ij}] + \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial x^u} \\ + \frac{\partial}{\partial t} [\rho_0 v^u + \frac{\partial}{\partial x^i} (\overset{\circ}{g}^{ui})] = 0 \end{aligned} \quad (3.134)$$

El potencial ϕ contenido en esta última ecuación vale

$$\phi(\vec{x}, t) = -G \int \frac{\rho d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.135)$$

y coincide con el correspondiente de R.G. Sin embargo, encontramos correcciones a los otros dos potenciales. Ellos valen:

$$\xi_i(\vec{x}, t) = -4G \int \frac{d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} [\rho v^i + \frac{\partial}{\partial x'^u} (\overset{\circ}{g}^{iu})] \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}, t) = -G \int \frac{d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \left\{ \frac{1}{4\pi G} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 (\phi)^2 \right] + \overset{\circ}{P}^0 - \rho \phi \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \rho v^2 + 3P + 4 \frac{\partial}{\partial x'^i} (\overset{\circ}{g}^{ui} v^u) + 16 \pi G \overset{\circ}{g}^{ij} \overset{\circ}{g}_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (3.137)$$

Si volvemos sobre la expresión de la geodésica para una partícula no relativista (3.60), notaremos que las correcciones debidas al potencial vectorial de tercer orden $\vec{\xi}$ son del mismo orden que las provenientes del potencial de cuarto orden Ψ . Sólo conociendo la estructura de las fuentes, se podría pesar el valor de cada una de las correcciones a la ley de Newton, provenientes de estos potenciales; correcciones que obviamente estarán acotadas en su orden de magnitud. De acuerdo con sus características, cada potencial tendrá mayor o menor influencia en lo que hace al movimiento de las partículas de prueba, como así también a la propia evolución de las fuentes. Lo que dependerá de factores tales como la particular distribución de la masa, el grado de polarización del espín o la distribución de velocidades. (Volveremos sobre esto en el parágrafo 3.3.3. cuando analicemos órdenes de magnitud).

Si la presión viene dada por una ecuación de estado conocida $P = P(\rho)$ entonces poseemos 10 incógnitas para poder establecer el movimiento geodésico recién referido: ρ , las 3 componentes $\overset{2}{z}^{\lambda j}$, $\overset{3}{z}^{\lambda j}$ y las 3 v^{λ} . Disponemos para ello de la ecuación (3.133) las tres ecuaciones (3.134), las tres (3.115) y las tres (3.120). Para la geodésica que describe el movimiento del fotón, también necesitamos establecer el valor de 10 incógnitas dado que, si bien el potencial de tercer orden sólo depende de los valores de la densidad de espín de primer orden, la ecuación (3.120) que las provee, depende de la densidad de espín a orden cero, por lo que también es necesaria la ecuación de continuidad (3.115).

Si, en cambio, la temperatura es una variable independiente, debemos dar una ecuación para la energía interna. Para ello podemos utilizar la ley termodinámica (53):

$$d\pi = T ds - P d(1/\rho) + \omega_{\mu\nu} d(\overset{2}{z}^{\mu\nu}/\rho) \quad (3.138)$$

donde T es la energía cinética de espín

$$T = \omega_{\mu\nu} \overset{2}{z}^{\mu\nu} \quad (3.139)$$

con la velocidad angular ω , representada en función de la tétrada, como

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\dot{e}^{\alpha}_{\mu} e_{\alpha\nu} - \dot{e}^{\alpha}_{\nu} e_{\alpha\mu}) \quad (3.140)$$

resultando, por lo tanto, antisimétrica. En (3.140)

$$\dot{e}^{\alpha}_{\mu} = \nabla_{\lambda} (e^{\alpha}_{\mu}) U^{\lambda} \quad (3.141)$$

En (3.138) S representa la entropía específica. Para calcular los diferentes órdenes de la velocidad angular, es necesario expandir la tétrada. Para ello puede utilizarse (1.64) en la forma:

$$g^{\mu\nu} e_{\mu}^{\alpha} e_{\nu}^{\beta} = \eta^{\alpha\beta} \quad (3.142)$$

igualdad que debe satisfacerse orden a orden. A partir de este desarrollo, se puede comprobar que

$$\overset{\circ}{\omega}_{\mu\nu} = \overset{\wedge}{\omega}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.143)$$

Al no existir flujo de calor (21) (31): $T dS = 0$. En consecuencia:

$$\beta_0^2 \frac{d\pi}{dt} = (P - \omega_{ij} z^{ij}) \frac{d\beta_0}{dt} + \beta_0 \omega_{ij} \frac{dz^{ij}}{dt} \quad (3.144)$$

Esta es una ecuación post-newtoniana de orden $\bar{M} \bar{v}^3 / \bar{r}^6$. Teniendo en cuenta (3.143), vemos que no es necesario conocer \hat{z}^{ij} . Por otro lado, las componentes de la velocidad angular a segundo orden en \bar{v} , dependerán de la velocidad del fluido y del potencial newtoniano ϕ , por lo que (3.144) nos permite despejar P , siempre y cuando poseamos otra ecuación para la energía interna. Esa ecuación es la (3.76). En otras palabras, debemos ir a un orden más alto en la ley de conservación, por lo que deberemos explicitar $\overset{2}{p}_0$ y $\overset{3}{\sigma}_{oi}$. Para ello podemos tomar, por ejemplo, el modelo empleado en (51) donde $\Sigma^{\mu\nu}$ se obtiene a partir de un lagrangiano valiéndolo:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \beta_0 (1 + \pi) U^\mu U^\nu - 2 z^{\mu\lambda} \dot{U}_\lambda U^\nu + P (g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu) \quad (3.145)$$

Comparando esto con la expresión general (3.80), vemos que

$$P^0 = \beta_0 (1 + \pi) U^0 - 2 z^{0\lambda} \dot{U}_\lambda \quad (3.146)$$

Desarrollando (3.80) y (3.145) hasta segundo orden y comparando, llegamos a que

$$\overset{2}{p}_0 = \beta_0 \left(-\phi + \frac{1}{2} v^2 + \pi \right) \quad (3.147)$$

que coincide con su expresión en R.G. Por otro lado, desarrollando (2.114) para $\overset{3}{\sigma}_{oi}$, obtenemos:

$$\overset{3}{\sigma}_{oi} = \beta_0 v^i \left(-2\phi + v^2 + \pi \right) + P v^i + \overbrace{\nabla_\lambda^* \mu^{oi\lambda}}^3 \quad (3.148)$$

con $\mu^{\mu\nu\lambda}$ definido en (2.108). El número 3 en el último término de (3.148), indica orden $\bar{M}\bar{v}^3 / \bar{r}^3$. Su expresión contiene potenciales y densidades de espín ya hallados. En consecuencia, la ley de conservación al orden deseado, esto es (3.73) + (3.76), se puede escribir:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_0 (1+v^2 - 2\phi + \pi) - 2 \delta^{ij} \omega \frac{\partial}{\partial x^j} (\overset{1}{\partial}_{im} v^m) - 4\pi G \overset{0}{\partial}_{ij} \overset{0}{\partial}^{ij}]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^i} [\rho_0 v^i (1 - 2\phi + v^2 + \pi) + p v^i + \overset{3}{\nabla}_\lambda \mu^{o i \lambda}] - \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (3.149)$$

Los potenciales gravitatorios valen para este modelo:

$$\phi(\vec{x}, t) = -G \int \frac{\rho_0 d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.150)$$

$$\xi_i(\vec{x}, t) = -4G \int \frac{d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} [\rho_0 v^i + \frac{\partial}{\partial x'^m} (\overset{1}{\partial}^{im})] \quad (3.151)$$

$$\Psi(\vec{x}, t) = -G \int \frac{d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \left\{ \frac{1}{4\pi G} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 (\phi)^2 \right] \right.$$

$$+ 2 \rho_0 (v^2 - \phi + \frac{1}{2} \pi) + 3P + 4 \frac{\partial}{\partial x^i} (\overset{1}{\partial}^{im} v^m)$$

$$\left. + 16\pi G \overset{0}{\partial}^{ij} \overset{0}{\partial}_{ij} \right\} \quad (3.152)$$

Debido al hecho de que el potencial vectorial $\vec{\xi}$ no coincide con el correspondiente de R.G., y teniendo en cuenta la ecuación de movimiento del fotón (3.71), vemos que ya a tercer orden existen discrepancias entre las teorías R.G. y ECSK. Distinto es el caso para la partícula no relativista donde las predicciones de ambas teorías difieren recién a cuarto orden. (Ello es así debido a que el potencial de tercer orden $\vec{\xi}$, participa de la ecuación de movimiento (3.60) en forma diferente que en (3.71): en el caso del movimiento no relativista, este potencial aparece derivado con respecto al tiempo o multiplicado por la velocidad de la partícula, de forma tal de contribuir en un orden \bar{v}^4 / \bar{r}).

Veremos, sin embargo, que el efecto de tercer orden del espín (de la torsión) puede anularse en algunos casos particulares.

Con esto hemos completado nuestro programa para la aproximación post-newtoniana de la teoría ECSK y en particular para el modelo de fluido ideal con espín. Es importante recalcar el hecho de que absolutamente todas las ecuaciones halladas aquí son equivalentes, cuando se cumple $\zeta = 0$, a las correspondientes a una aproximación post-newtoniana de la Relatividad General.

3.3. RESULTADOS RELEVANTES DE LA APN

3.3.1. Densidades de las Fuentes.

Supongamos, en primer lugar, que el espín de las fuentes posee un origen cuántico, con lo que el mismo no sería asociable a un fluido como el introducido en la sección 3.2. Nos interesa estudiar órdenes de magnitud para densidades de fuentes cuyo espín tenga un papel relevante a nivel post-newtoniano.

En (54) y (9) se prevén efectos físicos debidos a la torsión en aquellos casos en que

$$R^2 \zeta^2 \sim R n m$$

(3.153)

donde n es el número de partículas con masa m por unidad de volumen ($\rho = n m$) y ζ es la densidad de espín. En efecto, observando la ecuación combinada (2.121) donde el espín de las fuentes entra cuadráticamente, (3.153) significa suponer que la influencia del espín es del orden de la influencia de la masa. Un origen cuántico para el espín implica suponer:

$$\bar{\rho} = n_s \hbar / 2$$

(3.154)

donde \hbar es la constante de Planck y n_s es el número de partículas dotadas de espín por unidad de volumen. Supondremos además que los espines de las partículas son iguales y se encuentran polarizados en alguna dirección. Dado que $n \gg n_s$, podemos calcular la densidad crítica $\bar{\rho}$ que correspondería al caso (3.153). Resulta fácil comprobar que:

$$\bar{\rho} = \frac{m^2}{2\hbar^2}$$

(3.155)

Supongamos, ahora, que la fuente es o bien una estrella de neutrones, o bien de electrones (este último caso meramente teórico). Para estas estrellas tenemos

$$m_n \sim 10^{-24} \text{g}$$

$$m_e \sim 10^{-29} \text{g}$$

respectivamente. En consecuencia las densidades que se obtendrían, suponiendo todas las partículas dotadas con espín, serían:

$$\bar{\rho}_n \sim 10^{54} \text{g cm}^{-3}$$

$$\bar{\rho}_e \sim 10^{47} \text{g cm}^{-3}$$

Estas densidades no tienen, en principio, sentido físico dado que para materia tan comprimida hubiera sido necesario haber tenido en cuenta los efectos de otras interacciones no gravitatorias. Es importante indicar, sin embargo, que encontramos densidades aún mayores en determinados modelos cosmológicos y en Gravedad Cuántica (9).

Nosotros podremos obtener valores drásticamente más pequeños, debido al hecho de que hemos trabajado de acuerdo con ciertas hipótesis que, por un lado, acotan las densidades de las fuentes y por otro lado, no otorgan igual peso a los efectos debido al espín, en relación con aquellos debido a la masa de los constituyentes de las fuentes.

Antes de realizar los cálculos, recordemos las hipótesis de la AFN relevantes en relación con lo que estamos estudiando en este punto:

i) El valor de $\rho = nm$ es para nosotros de orden $\bar{M}\bar{v}^0/\bar{r}^3$ y el término $k\bar{\sigma}^{00}$ que aparece en la ecuación combinada, es de orden \bar{v}^2/\bar{r}^2 (orden newtoniano).

ii) El término $k^2\bar{\sigma}^2$ es de orden \bar{v}^4/\bar{r}^2 y comparable a $k\bar{\sigma}^{00}$ y no a $k\bar{\sigma}^{00}$.

En consecuencia

$$k \frac{\eta_s^2 \hbar^2}{4} \sim \frac{\bar{M}}{\bar{r}^3} \bar{v}^2 \quad (3.156)$$

Por lo tanto

$$\eta_s \sim \frac{\bar{M}}{\hbar \bar{r}^2} \quad (3.157)$$

Para obtener órdenes de magnitud para las cantidades involucradas, tomemos los valores correspondientes al sistema solar donde se cumplen las condiciones para una APN. A los efectos de hacer una estimación tomaremos \bar{M} como la masa del sol y \bar{r} como la distancia tierra-sol. Bajo estas condiciones:

$$\eta_s \sim 10^{44} \text{ cm}^{-3} \quad (3.158)$$

Por lo tanto si asumimos que todas las partículas están polarizadas con idéntico valor para el espín, y consideramos estrellas neutrónicas (cuyas masas, como sabemos son del orden de la del sol) llegamos a la siguiente densidad de partículas con espín:

$$\rho_s = \eta_s m_n \sim 10^{20} \text{ g/cm}^3 \quad (3.159)$$

Las estrellas de neutrones poseen densidades del orden de 10^{14} g/cm^3 , por lo que la densidad (3.159) es un millón de veces mayor. Más aún, nosotros debemos notar el hecho de que siendo $n \gg \eta_s$, la densidad de la estrella debería ser aún mayor que ese valor. Sin embargo las hipótesis i) y ii) permiten una posible reducción de

importancia en la densidad de fuentes que posean un espín de origen cuántico, detectables, en principio, a través de movimientos de partículas de prueba.

Por otro lado, el espín que sirve como fuente podría no tener un origen cuántico, como sucedería para el fluido ideal de la sección 3.2. Por ejemplo, el espín (el impulso angular intrínseco) al referirse a las partículas de un fluido, podría asociarse, en los casos cosmológicos, con galaxias o a cúmulos de galaxias (11). En estos casos las densidades podrían ser mucho más bajas. Esto se ve más claramente si tenemos en cuenta que en el cálculo realizado para arribar a (3.159), ha participado la constante de Planck en la definición de la densidad de espín. En efecto, suponer que se cumple (3.154) y que ζ es de orden \bar{M}/\bar{r}^2 , sumado al hecho de que la constante de Planck es muy pequeña, "hacen" que el número de partículas con espín por unidad de volumen n_s sea muy grande. Si, en cambio, ζ posee origen no cuántico, claramente n_s puede resultar sensiblemente más bajo.

3.3.2. Desarrollo Multipolar. Solución con Simetría Esférica

Tomemos el caso de una fuente localizada y analicemos qué sucede con los potenciales gravitatorios lejos de las fuentes. Si $r \equiv |\vec{x}|$, tenemos para $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^3} + \dots \quad (3.160)$$

Si definimos como en (36):

$$\dot{M} \equiv \int \sigma^{00} d^3x \quad (3.161)$$

$$D^i \equiv \int x^i \sigma^{00} d^3x \quad (3.162)$$

entonces el potencial newtoniano se escribe:

$$\phi = -G \frac{M^0}{r} - G \frac{\vec{x} \cdot \vec{D}^0}{r^3} + O(1/r^5) \quad (3.163)$$

Definiendo

$$P^i \equiv \int \dot{\sigma}^{0i} d^3x \quad (3.164)$$

$$J_{ij} \equiv 2 \int x^i \dot{\sigma}^{j0} d^3x \quad (3.165)$$

el potencial de tercer orden vale

$$\xi^i = -G \frac{P^i}{r} - 2G \frac{x^j J_{ji}}{r^3} + O(1/r^5) \quad (3.166)$$

Finalmente definamos

$$M \equiv \int (\dot{\sigma}^{\mu\mu} + \frac{1}{4\pi G} \nabla^2(\phi)^2 + 8\pi G \dot{\Lambda}^{\mu\mu}) d^3x \quad (3.167)$$

$$D^i \equiv \int x^i \left[\frac{1}{4\pi G} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2(\phi)^2 \right) + \dot{\sigma}^{\mu\mu} + 8\pi G \dot{\Lambda}^{\mu\mu} \right] d^3x \quad (3.168)$$

En la definición de (3.167) y recordando (3.53), se ha tenido en cuenta la condición (3.34) para el caso $g^{\mu\nu} \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$ a orden \bar{v}^3/\bar{r} , cuyo resultado es:

$$4 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\xi} = 0 \quad (3.169)$$

Si derivamos (3.169) respecto del tiempo, vemos que la integral de volumen de $\partial^2 \phi / \partial t^2$ es equivalente a la integral de volumen de la divergencia $-1/4 \nabla \cdot (\partial \vec{\xi} / \partial t)$, la cual es nula. Esta es la causa por la cual en (3.167) no hemos incluido el término $\partial^2 \phi / \partial t^2$.

Entonces podemos escribir el potencial de cuarto orden de la siguiente manera:

$$\Psi = -\frac{GM^2}{r} - G \frac{\vec{x} \cdot \vec{D}}{r^3} + O(1/r^5) \quad (3.170)$$

Si ahora definimos

$$M \equiv \overset{\circ}{M} + \overset{2}{M} \quad (3.171)$$

$$\vec{D} \equiv \overset{\circ}{\vec{D}} + \overset{2}{\vec{D}} \quad (3.172)$$

estamos en condiciones de escribir las componentes de la métrica lejos de las fuentes hasta orden r^{-3} como sigue:

$$g_{00} = -1 + 2\frac{GM}{r} + 2G \frac{\vec{x} \cdot \vec{D}}{r^3} + O(1/r^5) \quad (3.173)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2\delta_{ij}G \frac{\overset{\circ}{M}}{r} + 2\delta_{ij}G \frac{\vec{x} \cdot \overset{\circ}{\vec{D}}}{r^3} + O(1/r^5) \quad (3.174)$$

$$g_{0i} = -G \frac{\overset{1}{P}^i}{r} - 2G \frac{x^j \overset{1}{J}_{ji}}{r^3} + O(1/r^5) \quad (3.175)$$

Estos resultados permitirían, en principio, detectar lejos de una distribución localizada de materia, la existencia o no de espín en las fuentes. Ello es así debido a las diferencias existentes entre las expresiones que, en cada caso, poseen las trayectorias geodésicas de partículas de prueba. Para el fotón, por ejemplo, esta dispersión vendrá dada como consecuencia de los diferentes valores que en cada teoría, la EDSK o R.G., poseen las magnitudes $\overset{1}{P}^i$ y $\overset{1}{J}_{ij}$. Para ver esto, escribamos la expansión de su geodésica hasta orden $\sqrt{3}/\bar{r}$ como función de las componentes de la métrica. Recordando (3.66) y (3.69) como así también los resultados (3.25-9), y teniendo en cuenta que

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1R \end{matrix} \right\}^3 = -\frac{1}{2} \left(\overset{3}{g}_{10,R} + \overset{3}{g}_{R0,1} - \overset{2}{g}_{1R,0} \right) \quad (3.176)$$

tenemos, de acuerdo con las (3.173-5):

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_i}{dt} = & \frac{1}{2} \overset{2}{g}_{00,i} - \left[\left(\overset{2}{g}_{i0,1,R} - \frac{1}{2} \overset{2}{g}_{1R,i} \right) \omega_R - \overset{2}{g}_{00,j} \omega_j \right] \omega_j \\ & - \left(\overset{2}{g}_{i0,0} + 2 \overset{3}{g}_{00i,j} \right) \omega_j - \frac{1}{2} \overset{2}{g}_{00,0} \omega_i \\ & - \left(\overset{3}{g}_{01,1,R} + \frac{1}{2} \overset{2}{g}_{1R,0} \right) \omega_j \omega_R \omega_i + O(\bar{v}^4/r) \end{aligned} \quad (3.177)$$

donde los términos del primer renglón corresponden a la aceleración newtoniana (orden \bar{v}^2/r), y los restantes términos a la post-newtoniana de orden \bar{v}^3/r . En consecuencia, lejos de la fuente, la dispersión entre las aceleraciones de fotones predichas por las teorías ECKK y R.G., vendrá dada por los términos:

$$\begin{aligned} & - \left[2G \frac{\overset{1}{P}_{[ij]} X^{ij}}{r^3} + 4G \overset{1}{J}_{R[j} \left(\frac{\delta^{ij]k}}{r^3} - \frac{3X^{ij]X^k}}{r^5} \right) \right] \omega_j \\ & + \left[2G \frac{\overset{1}{P}_{[ij]} X^{Rj}}{r^3} + 4G \overset{1}{J}_{m[j} \left(\frac{\delta^{Rj]m}}{r^3} - \frac{3X^{Rj]X^m}}{r^5} \right) \right] \omega_j \omega_R \omega_i \end{aligned} \quad (3.178)$$

Si suponemos que las componentes del tensor energía-impulso métrico como así también las del espín, corresponden a una distribución esférica de energía e impulso que depende sólo de r , no es necesario, entonces, "ubicarnos" en regiones lejanas a la fuente, dado que el factor $|\vec{x}-\vec{x}'|$ puede ser reemplazado en las expresiones (3.48), (3.51) y (3.53) por su promedio angular. Así para $r > r'$ tenemos:

$$\int \frac{d\Omega}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{4\pi}{r} \quad (3.179)$$

En consecuencia, en cualquier punto exterior a la esfera:

$$\phi + \psi = -G \frac{M}{r} \quad (3.180)$$

$$\vec{\xi} = -4G \frac{\vec{P}}{r} \quad (3.181)$$

Si ahora suponemos que las componentes de σ no dependen del tiempo, vemos, a partir de (3.73), que

$$x^i \frac{\partial}{\partial x^j} (\overset{1}{\sigma}{}^{0j}) = 0 \quad (3.182)$$

Por lo tanto

$$0 = \int x^i \frac{\partial}{\partial x^j} (\overset{1}{\sigma}{}^{0j}) d^3x = \int \frac{\partial}{\partial x^j} (\overset{1}{\sigma}{}^{0j} x^i) d^3x - \int \overset{1}{\sigma}{}^{0i} d^3x \quad (3.183)$$

Como la primera integral de la derecha es nula, dado que su integrando es una divergencia, y recordando la definición (3.164) de $\overset{1}{P}{}^i$, vemos que

$$\overset{1}{P}{}^i = 0 \quad (3.184)$$

por lo que, para el caso estático, los elementos de la métrica exterior a la distribución de materia son:

$$g_{00} \simeq -1 + 2 \frac{MG}{r} \quad (3.185)$$

$$g_{ij} \simeq \delta_{ij} + 2 \delta_{ij} G \frac{M}{r} \quad (3.186)$$

$$g_{i0} \simeq 0 \quad (3.187)$$

Si tenemos en cuenta la definición (3.171) correspondiente a M y la (3.167) a \vec{M} , vemos que la solución para la métrica recién hallada, depende de la torsión de la fuente, la cual expresada en coordenadas armónicas, debe responder a una distribución del espín que sólo dependa de la distancia radial r .

La importancia de los resultados recién obtenidos reside en que representan, para el caso de sistemas que cambian en un tiempo de orden

\bar{r}/\bar{v} , una métrica que posee su análoga en la métrica de Schwarzschild de R.G. En efecto, para el caso $\bar{z} = 0$ recuperaríamos R.G., siendo posible probar, entonces, que las expresiones (3.185-7) correspondientes a esa teoría, conducen, precisamente, a la solución exacta de Schwarzschild escrita en coordenadas armónicas.

3.3.3. Ordenes de Magnitud para la Aceleración de Partículas de Prueba

La contribución del espín de las fuentes a la aceleración de partículas de prueba no relativistas, puede ser evaluada para la ecuación (3.60) de la geodésica, comparando los efectos de los términos correspondientes a los potenciales post-newtonianos, en relación con aquellos debidos al newtoniano. Supondremos que la partícula de prueba está dotada de una velocidad que es del mismo orden de magnitud que la de las velocidades típicas de nuestro sistema solar:

$$v^2 \sim 10^{-7} \tag{3.188}$$

(Las velocidades orbitales de los planetas son menores que 3×10^{-4} , de forma tal que, en realidad, $v^2 < 10^{-7}$). En consecuencia de (3.60) resulta:

$$\frac{a(\Psi)}{a(\phi)} \sim 10^{-7} \tag{3.189}$$

donde $a(\Psi)$ es la aceleración de orden \bar{v}^4/\bar{r} debida al potencial de cuarto orden Ψ , mientras que $a(\phi)$ corresponde a la aceleración newtoniana de orden \bar{v}^2/\bar{r} . En (3.60) entran términos post-newtonianos también debidos a ϕ (por ejemplo el término $-\nabla\phi^2$) y al potencial de tercer orden $\vec{\xi}$ (por ejemplo el término $\partial\vec{\xi}/\partial t$). El peso de cada uno de ellos en cuanto a su contribución a la aceleración de la partícula, dependerá de las características de la fuente, esto es, de la distribución y densidad de la masa, del espín, de la presión, etc. No debemos olvidar que, dada la estructura de Ψ (recordemos (3.152) para el caso del fluido ideal), la aceleración que proviene de este po-

tencial depende de gran cantidad de variables, las que contribuyen de forma diferente en la aceleración $a(\psi)$. La relación (3.189) sólo nos da una idea del orden de magnitud de las correcciones a la ley de Newton que pueden esperarse en condiciones parecidas a las que se presentan en nuestro sistema solar, y permite estimar el peso que, eventualmente, puede tener el espín de las fuentes en relación con el propio de la masa (que es la que determina el potencial de Newton ϕ).

En el caso de la partícula de prueba relativista, recordando su ecuación geodésica (3.71), vemos que, las aceleraciones de tercer orden provendrán de los términos conteniendo $\partial \xi_i / \partial x^j$ y $\partial \phi / \partial t$. Nuevamente, la influencia de cada uno de estos términos estará dada por la relación entre materia y espín, y por su respectiva distribución y evolución. Para el caso de un fotón con alguna de las componentes de su velocidad del orden de la unidad -por ejemplo para un fotón en caída libre "radial" respecto de un fuente localizada- la ecuación (3.71) muestra que, utilizando los mismos valores típicos que en el caso de la partícula no relativista, podrían esperarse aceleraciones post-newtonianas de orden

$$10^{-23} \text{ 1/cm} \tag{3.190}$$

En unidades más convencionales, ésto representa una aceleración de

$$10^{-2} \text{ cm/s}^2 = 10^{-7} \text{ km/s}^2 \tag{3.191}$$

Por lo tanto, el término $\partial \xi_i / \partial t$, de contener la fuente torsión, y de poseer ella una magnitud lo suficientemente grande como así también, una fuerte polarización, podría provocar un valor de aceleración como el recién indicado, que en comparación con el newtoniano habría de resultar

$$\frac{a(\xi)}{a(\phi)} \sim 10^{-4} \tag{3.192}$$

3.3.4. Soluciones para Espines Alineados

En este párrafo estudiaremos el caso de espín polarizado. En (6) y (7) se han encontrado soluciones exactas para el caso de distribuciones con simetría esférica y distribuciones de espín, de forma tal que se cumpla

$$\bar{b}_{12} = -\bar{b}_{21} \neq 0 \quad \bar{b}_{ij} = 0 \quad i+j \neq 3 \quad \bar{b}_{0\mu} = \bar{b}_{\mu 0} = 0 \quad (3.193)$$

Tomaremos el modelo empleado en (51) (53) donde las componentes de la densidad de espín aparecen como funciones explícitas de la tétrada:

$$\bar{b}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma(x) (e_{\mu}^1 e_{\nu}^2 - e_{\nu}^1 e_{\mu}^2) \quad (3.194)$$

y, en consecuencia son desarrollables, de acuerdo con lo ya discutido en el párrafo 3.2.1., en potencias de $\bar{M}\bar{v}^n/\bar{r}^2$; por lo que σ debe ser como mínimo de orden \bar{M}/\bar{r}^2 , para que así existan correcciones post-newtonianas debidas al espín. Necesitamos las componentes de esta densidad a orden cero y a primer orden. Debido al hecho de que e_{μ}^{α} vale δ_{μ}^{α} , obtenemos:

$$\bar{b}_{ij} = 0 \quad \text{para } i+j \neq 3 \quad (3.195)$$

$$\bar{b}_{12}^0 = -\bar{b}_{21}^0 = \frac{1}{2} \sigma \quad (3.196)$$

$$\bar{b}_{\mu\nu}^1 = 0 \quad \forall \mu, \nu \quad (3.197)$$

compatibles con las (3.193). En consecuencia, para este caso, no sólo el potencial newtoniano sino también el potencial de tercer orden, coinciden en su expresión con los de R.G. Por lo tanto, para fuentes así polarizadas, no existen en relación con R.G., correcciones de tercer orden para la aceleración del fotón. Notemos, por otro lado, que el modelo (3.194) coincide con el (3.88) para el caso $\bar{\sigma} = \bar{S}^3$.

El potencial de cuarto orden vale, de acuerdo con (3.152):

$$\Psi = -G \int \frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \left\{ \frac{1}{4\pi G} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 (\phi)^2 \right] + 2\beta_0 (v^2 - \phi + \frac{1}{2} \pi) + 3P + 4\pi G \sigma^2 \right\}$$

(3.198)

Uno podría suponer, en principio, que sólo el término

$$-4\pi G^2 \int \frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \sigma^2$$

(3.199)

corrige la R.G. Sin embargo debemos tener en cuenta que existen vínculos, vía la ley de conservación, entre la densidad de espín y la densidad de materia, la energía interna, etc. En consecuencia, sólo formalmente la corrección a los potenciales post-newtonianos de R.G. valdría (3.199), a menos que los vínculos entre el espín y las demás cantidades que caracterizan la materia sean tales que estas últimas coincidan, para una determinada fuente, con los valores y con la evolución propias de R.G.

Finalmente observemos que la parte específicamente espinorial (3.199) de (3.198), puede entenderse como un potencial del tipo del de Newton, compuesto por una "densidad de masa" post-newtoniana $\rho' = 4\pi G \sigma^2$. Si se espera que la relación entre la aceleración debida a este potencial y la debida al potencial de Newton sea la (3.189), (obtenida suponiendo velocidades típicas de nuestro sistema solar), tendremos que

$$\sigma^2 \sim \frac{10^{-7} \rho_0}{4\pi G} \tag{3.200}$$

con ρ_0 una densidad de masa en reposo del orden de la del sol. En consecuencia, la "densidad de espín", medida en unidades de masa/(distancia)² deberá ser:

$$\sigma \sim 10^{11} \text{g/cm}^2 \tag{3.201}$$

CAPITULO IV

APROXIMACION NEWTONIANA DE LA SUPERGRAVEDAD N=1

En este capítulo estudiaremos el límite newtoniano de la SG N=1. Las condiciones que deben cumplir los sistemas físicos para que sea posible aplicar una Aproximación Newtoniana (AN) serán, naturalmente, similares a aquellas que hacen posible una APN. Como veremos a lo largo del capítulo, ya a este orden de aproximación nos será posible encontrar resultados distintivos para esta teoría.

En la primera sección hallamos la expresión de la ecuación de campo del tipo de la de Einstein a orden newtoniano, en su forma más general. La segunda ecuación, la de Rarita-Schwinger, al no incluir ninguna constante de acople, es en su límite más bajo similar a una ecuación en el plano, y su solución sirve como fuente en la primera ecuación de campo.

En la segunda sección hallamos una solución para el gravitino y probamos que la misma no es trivial. El efecto conocido como "corrimiento al rojo gravitatorio" nos permite dar cotas máximas a los órdenes de magnitud de una eventual torsión proveniente de una fuente que incluye gravitinos.

En la tercera sección, haciendo uso del método de aproximación WKB, estudiamos el comportamiento de materia representada por un multiplete, en un fondo geométrico de SG N=1. Nos es posible mostrar que un acople supersimétrico de materia conduce, para el caso de materia con espín $1/2$ y en el orden más bajo, a una ley de movimiento no geodésica. Este resultado permite establecer diferencias físicas relevantes en relación con las predicciones de aquellas teorías gravitatorias que provienen de lagrangianos conteniendo campos de materia mínimamente acoplados. También encontramos desviaciones respecto de la ley de Newton, lo que nos permite especular acerca de la posible existencia y detección de

efectos que involucren bajas energías, con vistas a testear la Super-gravedad.

4.1. LA APROXIMACION NEWTONIANA DE LA SG LIBRE

4.1.1. La AN y las Características de la Métrica y la Torsión en la SG N=1 Libre

Dado que la R.G. se desarrolla en V_4 , la ecuación de campo gravitatorio nos entrega, conocidas las condiciones iniciales del problema, toda la información necesaria acerca de la geometría del espacio-tiempo. En efecto, la ecuación de Einstein viene expresada en función del tensor de Ricci y la curvatura escalar. Estas magnitudes contienen en su expresión a los distintos símbolos de Christoffel como así también sus derivadas, los que, a su vez, dependen exclusivamente de las componentes de la métrica y de sus derivadas.

Si en cambio, una teoría exige la existencia de torsión, el espacio-tiempo es U_4 y la descripción completa de la dinámica de la geometría implicará encontrar, también, el valor de las distintas componentes de este tensor. Para este caso, toda vez que dispongamos de alguna ecuación de campo del tipo de la Einstein, para la que sea posible aislar aquellos términos que sólo dependen de los símbolos de Christoffel, estaremos, en principio, en condiciones de hallar las diferentes componentes de la métrica, dado que estos símbolos sólo dependen de dichas componentes y sus derivadas. La ecuación de Einstein podrá escribirse dejando en su miembro izquierdo el tensor de Einstein dependiente sólo de los símbolos de Christoffel, y considerando todo el resto de la ecuación como si fuese una fuente. En consecuencia, la torsión sólo estará presente en el miembro derecho de esta ecuación. De acuerdo con lo ya visto, este es el caso de la teoría ECSK: la ecuación (2.121) cumple con las características recién referidas. De hecho, la torsión se ha "transformado" en fuente, debido a que (2.119) permite

sustituir sus componentes por componentes del tensor impulso angular intrínseco. Como veremos en 4.1.2., un tratamiento parecido también es posible en el caso de la SG $N=1$.

En R.G. la forma que asume la ecuación de Einstein en un punto sin materia (vacío), nos lleva a que todas las componentes del tensor de Ricci en ese punto son nulas. Ello no significa que el tensor de curvatura valga cero. En efecto, si en por lo menos algún otro punto existe materia, esta condición de contorno hace que aun en el vacío, el espacio-tiempo no sea plano. Por otro lado, curvatura nula en un punto sí implica tensor de Ricci y escalar de curvatura nulos, y corresponde a aquel caso en que no sólo en el punto no existe materia, sino que tampoco existe materia en los restantes puntos del espacio-tiempo (condiciones de contorno triviales). En este caso la métrica es la de Minkowski. El primer caso tiende a coincidir con el segundo caso - esto es: el espacio-tiempo curvo tiende al plano - en aquellos puntos lo suficientemente alejados de las fuentes.

En SG $N=1$, curvatura y torsión nulas, corresponden al caso de un espacio-tiempo vacío de materia en todos sus puntos. En otras palabras, obtenemos el espacio-tiempo de Minkowski, resolviendo ambas ecuaciones de campo de la SG libre con condiciones de contorno triviales. Por lo tanto el límite a orden cero de la métrica de la SG $N=1$, como en R.G. y ECSK, es la métrica plana. Pero una diferencia entre SG y ECSK consiste en que en la primera teoría, curvatura y torsión tienen el mismo status, en el sentido de que, existiendo fuentes en algún punto del espacio, los puntos sin materia (vacío) poseen curvatura y torsión no nulas. Ello es así, debido a que la torsión se propaga. En cambio, en ECSK, la torsión es nula en el vacío.

En efecto, en virtud de las ecuaciones (2.180) y (2.172) vemos que, aún en Supergravedad libre, la torsión se propaga. En particular, obser-

vando la segunda ecuación de campo (2.180), notamos que ella posee una solución no trivial, esto es gravitinos no nulos, siempre y cuando existan condiciones de contorno apropiadas; para ello debe existir, en alguna región del espacio, una fuente gravitínica. Ahora bien, de acuerdo con lo apuntado más arriba, en el caso de que sea posible hallar una solución para el gravitino, ella podrá ser empleada en la primera ecuación de campo, la (2.179), como fuente, y así resolver esta para la métrica.

Sin embargo, aún poseyendo el problema condiciones de contorno no triviales, puede darse el caso de que nuestra solución a las ecuaciones de campo no corresponda a una situación física realmente diferente a la propia de R.G. En la SG ello es así debido a que gravitón y gravitino están vinculados a través de supersimetrías, precisamente las (2.151) y 2.152), que de hecho hacen depender a cada campo del otro. En consecuencia, una solución con un determinado gravitón y gravitino (no nulo), podría resultar, vía las correspondientes transformaciones supersimétricas, similar a una solución con "otro" gravitón, pero, gravitino nulo. Las supersimetrías no son CBC, y por lo tanto ésto no contradice el hecho de que la torsión sea un tensor. El origen del gravitino implica, en realidad, que una situación con torsión no nula podría resultar, en ciertos casos, físicamente equivalente a una situación con torsión nula. Diremos entonces, que la torsión es "puro gauge". (Una discusión análoga hemos realizado en el parágrafo 2.4.4., para el caso de la teoría ECSK).

Por el contrario, si para un problema dado surgen soluciones probadamente no triviales, o sea soluciones que no sean un puro gauge, la torsión no podrá ser eliminada y estaremos en presencia de una geometría U_4 . A su vez, esta solución para el gravitino, nos dará toda la información necesaria para conocer la torsión.

Hemos señalado la razón de porqué a orden cero, la métrica del espacio-tiempo de la SG $N=1$ es la métrica del plano. Para el orden siguiente, el newtoniano, no disponemos, en principio, como sí era el caso en la teoría ECSK, de algunas prescripciones para anticipar qué es lo que sucederá en este límite. Para aquella teoría podían establecerse criterios con el fin de determinar los desarrollos de las componentes de la métrica (ver parágrafo 3.1.1.); desarrollos que coincidían con aquellos de R.G. Ello era así debido a que se presuponían dependencias de los potenciales gravitatorios - que son los que, en definitiva, conducen a las diferentes componentes de la métrica - en relación con cantidades tales como densidad, presión, velocidad, etc. Respecto del gravitino, es debido a su origen (campo de gauge de espín $3/2$ necesario para preservar supersimetrías de la acción) que el mismo no resulta, en principio, función de densidades y velocidades, como sí lo es el impulso angular intrínseco en la teoría ECSK.

Sin embargo, en Supergravedad clásica también podemos hacer una expansión del gravitino. Y además, modificando adecuadamente la forma de la ecuación de campo libre del tipo de la de Einstein, considerarlo una fuente de los campos gravitatorios. Nos resulta posible establecer sus órdenes de magnitud a partir de sus unidades y en relación con magnitudes típicas de un sistema físico cuyas fuentes, entre ellas el gravitino mismo, no sean relativistas. El gravitino entendido como fuente, poseerá una expansión que influirá en los diferentes órdenes de magnitud de la métrica. En particular, nos interesará su influencia en los potenciales de tipo newtoniano, esto es, en aquellos de segundo orden en la velocidad típica, que conducen a las primeras correcciones de la métrica plana.

Digamos aquí, que en relación con los problemas newtonianos que abordamos en este capítulo, y a los efectos de nuestros cálculos, bastará con estudiar sólo la primera corrección al valor -1 del

plano, correspondiente a la componente g_{00} de la métrica de un sistema de coordenadas cuasi minkowskiano.

4.1.2. La Ecuación de Campo de la SG N=1 Libre en el Límite

Newtoniano

Volviendo nuestra atención a la primera ecuación de campo, notamos que sería posible escribirla, separando la parte riemanniana del tensor de Einstein, de su parte no riemanniana. Dado que el tensor de Ricci y la curvatura escalar provienen de contraer adecuadamente el tensor de curvatura, y recordando su definición (1.17), vemos que en ellos aparecerán derivadas primeras y también términos cuadráticos de la conexión. Por lo tanto descomponiendo el tensor de Einstein y escribiendo la conexión en función de los símbolos de Christoffel y la contorsión (ecuación (1.24)), y a esta última en función del gravitino vía (2.172), se llega a (55):

$$\begin{aligned}
 R^\mu_\alpha(\{f\}) - \frac{1}{2} e^\mu_\alpha R(\{f\}) = & -\frac{1}{4} \alpha^2 e^\lambda_\alpha [-(\bar{\Psi}^\mu \delta^\rho \Psi_\lambda)_{; \rho} \\
 & - \bar{\Psi}^\mu \delta_\lambda \Psi^\rho_{; \rho} - (\bar{\Psi}_\lambda \delta^\mu \Psi^\rho)_{; \rho} + 2(\bar{\Psi}^\mu \delta_\rho \Psi^\rho)_{; \lambda}] \\
 & + \frac{1}{8} \alpha^2 e^\mu_\alpha [4(\bar{\Psi}^\rho \delta_\rho \Psi^\sigma)_{; \sigma} + \alpha^2 (\bar{\Psi}_\rho \delta^\rho \Psi_\lambda) (\bar{\Psi}^\nu \delta_\nu \Psi^\lambda) \\
 & - \frac{1}{4} \alpha^2 (\bar{\Psi}_\nu \delta_\lambda \Psi^\sigma) (\bar{\Psi}^\nu \delta^\lambda \Psi_\sigma) + \frac{1}{2} \alpha^2 (\bar{\Psi}^\nu \delta_\rho \Psi_\epsilon) (\bar{\Psi}^\rho \delta^\epsilon \Psi_\nu) \\
 & - \frac{1}{2} \alpha^2 e^\lambda_\alpha [-(\bar{\Psi}^\sigma \delta_\rho \Psi^\rho) (\bar{\Psi}^\mu \delta_\sigma \Psi_\lambda) + (\bar{\Psi}^\sigma \delta_\rho \Psi^\rho) (\bar{\Psi}_\sigma \delta_\lambda \Psi^\mu) \\
 & - \frac{1}{2} (\bar{\Psi}^\theta \delta^\mu \Psi_\epsilon) (\bar{\Psi}_\theta \delta_\lambda \Psi_\epsilon) + (\bar{\Psi}_\theta \delta^\mu \Psi^\sigma) (\bar{\Psi}_\lambda \delta_\sigma \Psi^\theta) \\
 & - (\Psi^\sigma \delta_\rho \Psi^\rho) (\bar{\Psi}_\lambda \delta^\mu \Psi_\sigma)] + \left(\frac{i \alpha^2}{16e} \right) \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \bar{\Psi}_\lambda \delta_5 \delta_\alpha \sigma^\lambda \sigma_\nu \\
 & \times [\bar{\Psi}_\nu \Psi_\sigma \Psi_\lambda - \bar{\Psi}_\lambda \delta_\nu \Psi_\sigma + \bar{\Psi}_\sigma \delta_\lambda \Psi_\nu] \Psi_\rho \\
 & + \left(\frac{i \alpha^2}{2e} \right) \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \bar{\Psi}_\lambda \delta_5 \delta_\alpha D_\nu \Psi_\rho
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde ; significa derivada covariante.

Utilizaremos el mismo formalismo del Capítulo III. Supondremos la siguiente expansión para el gravitino:

$$\psi^\mu = \overset{\circ}{\psi}^\mu + \overset{1}{\psi}^\mu + \overset{2}{\psi}^\mu + \dots \quad (4.2)$$

donde $\overset{n}{\psi}^\mu$ corresponde a orden $\bar{M}^{1/2} \bar{v}^n / \bar{r}$.

Dado que nos interesa estudiar las correcciones newtonianas al plano, desarrollaremos (4.1) hasta el orden más bajo, esto es \bar{v}^2 / \bar{r}^2 . Conviene despejar la curvatura escalar riemanniana $R(\{ \})$ y dejar a la izquierda de la ecuación sólo el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}(\{ \})$. Al orden que nos interesa, obtenemos:

$$\begin{aligned} \overset{2}{R}_{\mu\nu}(\{ \}) = & -\frac{x^2}{8} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \left[-(\overset{\circ}{\Psi}^\rho \delta^\mu \overset{\circ}{\Psi}^\rho)_{,i} - 2(\overset{\circ}{\Psi}^\rho \delta_\rho \overset{\circ}{\Psi}^i)_{,i} \right] \\ & + 2\frac{x^2}{8} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \left[(\overset{\circ}{\Psi}^i \delta_\rho \overset{\circ}{\Psi}^\rho)_{,i} \right] - i\frac{x^2}{4} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \varepsilon^{\lambda\sigma\rho\mu} x \\ & \times \overset{\circ}{\Psi}_\lambda \delta_\sigma \delta_\nu \partial_i \overset{\circ}{\Psi}_\rho + i\frac{x^2}{2} \overset{\circ}{g}_{\mu\sigma} \varepsilon^{\lambda\sigma\rho\mu} \overset{\circ}{\Psi}_\lambda \delta_\sigma \delta_\nu \partial_i \overset{\circ}{\Psi}_\rho \\ & + \frac{x^2}{4} \left[-(\overset{\circ}{\Psi}_\mu \delta^\mu \overset{\circ}{\Psi}_\nu)_{,i} - (\overset{\circ}{\Psi}_\mu \delta_\nu \overset{\circ}{\Psi}^i)_{,i} - (\overset{\circ}{\Psi}_\nu \delta_\mu \overset{\circ}{\Psi}^i)_{,i} \right. \\ & \left. + 2(\overset{\circ}{\Psi}_\mu \delta_\rho \overset{\circ}{\Psi}^\rho)_{,i} \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde se han tenido en cuenta las condiciones (3.14) y (3.15), pero ahora esta última como

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (4.4)$$

dado que estamos en el límite newtoniano. Esto significa considerar despreciables las variaciones temporales de las magnitudes que describen a las fuentes, con lo que a este nivel las fuentes son consideradas estáticas.

La ecuación de Rarita-Schwinger en este límite se escribe:

$$\gamma^{\rho} (\partial_{\rho} \overset{\circ}{\Psi}_{\mu} - \partial_{\mu} \overset{\circ}{\Psi}_{\rho}) = 0 \quad (4.5).$$

Se ha tenido en cuenta el hecho de que $\gamma^{\mu} = e^{\mu}_{\alpha} \gamma^{\alpha}$ y $\overset{\circ}{e}_{\alpha}^{\mu} = \delta^{\mu}_{\alpha}$ siendo $\overset{\circ}{e}_{\mu}^{\alpha} \sim \bar{v}^{\mu}$.

Las ecuaciones recién halladas son las más completas para la SG N=1 libre, y de acuerdo con lo ya discutido en el párrafo anterior, los efectos del gravitino en (4.3) sobre la métrica, no podrán ser eliminados si el gravitino proviene de una solución de (4.5) que no sea puro gauge.

Más adelante deberemos hacer uso de la expresión para $\overset{\circ}{R}_{00}$, por lo que ahora, y teniendo en cuenta (4.3), la escribiremos explícitamente:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{R}_{00}(43) = & \pi G [(\bar{\Psi}_0 \gamma^i \Psi_0)_{,i} + 2 (\bar{\Psi}_0 \gamma_0 \Psi^i)_{,i} \\ & + (\bar{\Psi}_j \gamma^i \Psi_j)_{,i} + 2 (\bar{\Psi}_j \gamma_j \Psi_i)_{,i} \\ & + 2 (\bar{\Psi}_i \gamma_j \Psi_j)_{,i} - 2 (\bar{\Psi}^i \gamma_0 \Psi_0)_{,i}] \\ & + 2\pi i G \epsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} (\bar{\Psi}_e \gamma_5 \gamma_0 \delta_i \Psi_{\rho} \\ & + \bar{\Psi}_0 \gamma_5 \gamma_e \delta_i \Psi_{\rho} - \bar{\Psi}_e \gamma_5 \gamma_{\rho} \delta_i \Psi_0) \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde, como de ahora en más, las componentes Ψ_{μ} deben considerarse como $\overset{\circ}{\Psi}_{\mu}$. En esta última ecuación se ha reemplazado χ^2 por su equivalente $8\pi G$.

Debemos hacer notar en este punto que no nos es necesario fijar de antemano las expansiones de las diferentes componentes de la métrica a segundo orden. En efecto, en el miembro derecho de la ecuación (4.3),

todos los términos de la métrica involucrados, son los minkowskianos $(-1, \delta_{ij})$ de orden cero. Por otro lado, de acuerdo con (3.30) y (1.26), la componente $\overset{2}{R}_{00}$ del tensor de Ricci sólo depende de la derivada espacial de la componente $\overset{2}{g}_{00}$ de la métrica, que es precisamente aquella que desearemos hallar. Sólo para el caso particular de esta componente newtoniana del tensor de Ricci, se da una dependencia exclusiva respecto de la componente $\overset{2}{g}_{00}$. Además, dicha dependencia es igual en cualquier sistema de coordenadas en el que la métrica sea cuasi-minkowskiana, y no particularmente en uno correspondiente a coordenadas armónicas; por lo que tampoco es necesario adoptar la condición (3.34).

4.2. CONSECUENCIAS EXPERIMENTALES DE LA AN DE LA ECUACION DE CAMPO

4.2.1. Una Solución No Trivial para el Gravitino

En este párrafo probaremos que en SG N=1 existen soluciones que difieren de aquellas de R.G., aún en el límite newtoniano. Para ello consideraremos una solución propuesta en (56), la cual, en nuestro caso, poseerá otra connotación y, como veremos más adelante, jugará un rol diferente al de la referencia.

La solución de gravitino más cercana a una simetría esférica es suponer que en ella no aparecen parámetros vectoriales (tales como un momento dipolar). En consecuencia, una tal solución debe ser construída a partir de las coordenadas espaciales x^i , las matrices de Dirac y funciones espinoriales de la distancia radial r . Una solución para nuestra ecuación (4.5) es

$$\Psi_i = \frac{1}{16\pi} S \epsilon_{i\alpha\beta} \gamma_5 \frac{x^\alpha \gamma^\beta}{r^3} \quad (4.7a)$$

$$\Psi_0 = \frac{1}{16\pi} S \gamma_i \frac{x^i}{r^3} \quad (4.7b)$$

Estas componentes del gravitino han sido escritas en el supergauge radial:

$$\chi^i \Psi_i^\alpha = 0 \quad (4.8)$$

El espinor S es una constante de integración con unidades de $(\text{masa})^{1/2}$ distancia. Al gauge (4.8) lo debemos interpretar de la siguiente manera: en cada punto cada espinor Ψ_i^α es tangente a la esfera centrada en el origen de coordenadas que pasa a través de dicho punto.

Lo importante de señalar aquí es que en nuestro caso, (4.7a-b) constituye una solución newtoniana que "vive" en un espacio-tiempo curvo, mientras que en (56) ella representa una solución plana completa. Notemos que es posible emplearla como solución de las ecuaciones de Rarita-Schwinger (2.180), porque en el límite que nos interesa, el operador D se transforma en el operador ∂ . Existe, sin embargo, una pequeña diferencia entre las ecuaciones de Rarita-Schwinger para un espacio-tiempo plano y nuestras correspondientes newtonianas (4.5): en el primer caso aparecen las derivadas $\partial/\partial t$; en cambio en las nuestras no ya, que al orden de aproximación que nos interesa, las magnitudes son tomadas como estáticas. Para $\mu=0$ y $\mu=i$ las ecuaciones (4.5) se escriben:

$$\gamma^i \partial_i \Psi_0 = 0 \quad (4.9)$$

$$\gamma^j \partial_j \Psi_i - \gamma^0 \partial_i \Psi_0 = 0 \quad (4.10)$$

Pero la diferencia recién marcada no es relevante, dado que la solución (4.7a-b) propuesta no depende del tiempo.

Debemos hacer notar el hecho de que el gravitino hace las veces de fuente en la ecuación del tipo de Einstein (4.3), afectando en consecuencia a la métrica newtoniana. Las correcciones newtonianas a la métrica son de orden \bar{v}^2 y se deben a gravitinos de orden cero en potencias de la velocidad típica del sistema. Esto es equivalente a lo que sucede en R.G. y en ECSK, donde las fuentes de orden n traen aparejadas consigo las correcciones de orden $n+2$. En todos los casos, la explicación hay que encontrarla en la constante de acople k que en la ecuación de Einstein es la que liga materia con geometría, y cuyo orden es $\bar{r}\bar{v}^2/\bar{M}$. Por lo tanto, el orden siguiente al considerado por nosotros en la ecuación de Rarita-Schwinger, debería incluir la métrica obtenida de la ecuación (4.3), resuelta, precisamente, utilizando "previamente" una solución como la (4.7). Con nuestro procedimiento no estamos sino teniendo en cuenta el "back-reaction" del gravitino; gravitino cuyo orden más bajo se obtiene a partir de una ecuación cuya métrica es, a este nivel, plana.

La solución (4.7) no es puro gauge. Basta con recordar (2.151) y (2.152) para observar que no nos sería posible tomar nuestra solución y arrivar, por medio de aquellas transformaciones supersimétricas, al caso $\Psi_\mu = 0$. En otras palabras, no resulta posible partir de $\Psi_\mu = 0$ y algún $g_{\mu\nu}$ (las que constituirían soluciones newtonianas de R.G.), y por medio de transformaciones supersimétricas, alcanzar la solución aquí propuesta. Ello es así debido al hecho de que nuestra solución implica

$$\partial_\mu \Psi_\nu - \partial_\nu \Psi_\mu \neq 0$$

que es incompatible con $\Psi = 0$, o con cualquier gravitino que surja de las transformaciones (2.151-2) tomando $\Psi = 0$. En efecto, para este

caso tendríamos

$$\delta e_{\mu}^{\alpha} = 0 \quad \delta \psi_{\mu}^{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \Delta_{\mu} \epsilon$$

y a este orden $\partial_{\mu} \psi_{\nu} - \partial_{\nu} \psi_{\mu}$ sería cero, dado que

$$\frac{1}{\alpha} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \epsilon - \frac{1}{\alpha} \partial_{\nu} \partial_{\mu} \epsilon = 0$$

Obviamente, partiendo de un gravitino nulo y su correspondiente acción de gauge y "generando" un gravitino no nulo por medio de (2.152), obtendríamos una acción total de gauge, que dada su invariancia frente a supersimetrías, debiera conducir a las mismas ecuaciones de campo que la primera acción. De hecho, esta acción fue construida de forma tal de cumplir con esta condición.

También notemos que, de acuerdo con (2.150), partiendo de un gravitino nulo, obtendríamos: $\delta g_{\mu\nu} = 0$; esto es, "permaneceríamos" en la misma métrica de R.G. En consecuencia, para nuestro caso, las correcciones a la métrica de Minkowski serán de un tipo diferente que las correspondientes a R.G. En particular, la solución que satisfecería contornos esféricos para una masa central, diferiría de la correspondiente a R.G., que de hecho habría de corresponder a $\psi = 0$ y a todas sus posibles transformaciones supersimétricas (2.152).

4.2.2. El Corrimiento al Rojo Gravitatorio.

Cotas Máximas para la Torsión

Estamos interesados en algún tipo de medición que involucre, aunque sea muy indirectamente, una torsión debida a gravitinos. Si la teoría que estamos estudiando, la SG N=1 clásica, es adecuada para describir fenómenos de orden newtoniano, entonces será posible, en principio, detectar la torsión.

Introduciendo la solución (4.7a,b) en (4.6), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{00}(\{f\}) = & \pi G \left(\gamma_j \bar{\gamma}^i \gamma^j \gamma_k \frac{x^j x^k}{r^6} \right. \\
 & + 2 \gamma_e \bar{\gamma}^0 \gamma_0 \gamma_s \epsilon_{ijk} \gamma^s \gamma^k \frac{x^e x^j}{r^6} \\
 & \frac{\gamma^m \gamma_s \bar{\gamma}^i \gamma^i \gamma^s}{(16\pi)^2} \epsilon_{iem} \epsilon_{jrp} \gamma_s \gamma^p \frac{x^e x^r}{r^6} \\
 & + 2 \frac{\gamma^u \gamma_s \bar{\gamma}^j \gamma^j \gamma^s}{(16\pi)^2} \epsilon_{iem} \epsilon_{jrp} \gamma_s \gamma^p \frac{x^e x^r}{r^6} \\
 & + 2 \frac{\gamma^u \gamma_s \bar{\gamma}^j \gamma^j \gamma^s}{(16\pi)^2} \epsilon_{iem} \epsilon_{jrn} \gamma_s \gamma^n \frac{x^e x^r}{r^6} \\
 & - 2 \frac{\gamma^k \gamma_s \bar{\gamma}^0 \gamma_0 \gamma^s}{(16\pi)^2} \epsilon_{ijk} \gamma_{ue} \frac{x^j x^u}{r^6} \Big)_{,i} \\
 & - 2\pi i G \epsilon^{0iik} \left[\frac{\gamma^p \gamma_s \bar{\gamma}^j \gamma_0 \gamma^s}{(16\pi)^2} \epsilon_{ipq} \epsilon_{kmn} \gamma_s \gamma^n \frac{x^p}{r^3} \left(\frac{x^m}{r^3} \right)_{,i} \right. \\
 & + \frac{\gamma_{ue} \bar{\gamma}^j \gamma_s \gamma_0 \gamma^s}{(16\pi)^2} \epsilon_{kpq} \gamma_s \gamma^p \frac{x^u}{r^3} \left(\frac{x^p}{r^3} \right)_{,i} \\
 & \left. - \frac{\gamma^n \gamma_s \bar{\gamma}^j \gamma_0 \gamma^s}{(16\pi)^2} \epsilon_{emn} \gamma_j \frac{x^u}{r^3} \left(\frac{x^j}{r^3} \right)_{,i} \right]
 \end{aligned}$$

(4.11)

Ahora bien, recordando (3.35), podemos escribir la ecuación de campo (4.11) para el caso exterior a una distribución de materia:

$$\bar{R}_{00}(\{f\}) = \frac{1}{2} \nabla^2 \bar{g}_{00} = -8\pi G \rho_{ext}$$

(4.12)

donde ρ_{ext} representa la componente σ_{00} del tensor energía-impulso debido exclusivamente a los gravitinos, única "fuente" presente en aquellos puntos en donde calculamos el valor de \tilde{R}_{00} .

Si suponemos que la fuente consiste en un cuerpo esférico de radio R (por ejemplo una estrella), la solución para la componente \tilde{g}_{00} será:

$$\tilde{g}_{00}(\vec{x}) = 4G \int_R^\infty \frac{\rho_{ext}(\vec{x}') d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + (\text{contornos en } |\vec{x}|=R) \quad (4.13)$$

El último término de esta ecuación es equivalente a una integral sobre el volumen del cuerpo. En otras palabras:

$$\text{contornos} \Big|_{|\vec{x}|=R} = 4G \int_0^R \frac{\rho_{int}(\vec{x}') d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad (4.14)$$

donde ρ_{int} depende de las distribuciones de masa y de gravitinos en el interior de la fuente. Nuestra ecuación es lineal y podemos suponer contribuciones independientes a la métrica, debidas a la masa y al gravitino. La densidad total interna vendrá dada por:

$$\rho_{int} = \rho_{masa} + \rho_{gravitino}$$

A su vez, es altamente razonable asumir que el cuerpo esférico que estamos estudiando, posee una distribución de masa con simetría esférica. En consecuencia la ecuación (4.13) puede escribirse como

$$\tilde{g}_{00}(\vec{x}) = 4G \int_R^\infty \frac{\rho_{ext}(\vec{x}') d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + 4G \int_0^R \frac{\rho_{\psi_{int}}(\vec{x}') d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - 2G \frac{M}{r} \quad (4.15)$$

con $\rho_{\psi_{int}}$ la densidad gravitínica interior y M la masa del cuerpo central.

Estamos interesados en dar una estimación de la torsión en la su-

perficie del cuerpo. De acuerdo con (2.172) la torsión, a la que ahora denotaremos con T , se relaciona cuadráticamente con el gravitino, siendo la constante de proporcionalidad del orden de la constante de Newton. En consecuencia:

$$T(r=R) \sim \frac{G}{128\pi} \frac{|S|^2}{R^4} \quad (4.16)$$

por lo que si deseamos encontrar el orden de magnitud para la constante S , necesitaremos algún experimento para determinar \vec{g}_{00} .

Como es bien conocido, esta última magnitud está íntimamente relacionada con el corrimiento al rojo gravitatorio. Un experimento típico para medir este proceso, consiste en determinar el corrimiento relativo de la frecuencia o de la longitud de onda de dos "relojes" idénticos en reposo, situados en puntos diferentes y en campos gravitatorios estáticos. El efecto puede ser calculado con diferente precisión en la superficie de distintos cuerpos estelares, realizando un estudio de su emisión de luz.

Un punto importante es que el corrimiento al rojo posee el mismo tipo de dependencia respecto de g_{00} en cualquier teoría métrica (21). Es sencillo probar que (57):

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \left(\frac{g_{00}(x_2)}{g_{00}(x_1)} \right)^{1/2} \quad (4.17)$$

donde ν_1 y ν_2 corresponden a las frecuencias de luz recibida y emitida respectivamente (provenientes de un mismo tipo de transición atómica) en los puntos x_1 y x_2 . Si el campo gravitatorio es débil (lo que en nuestra AN debe suceder por hipótesis) y recordando (3.46) que define al potencial ϕ , tenemos:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_1} \sim \phi(x_2) - \phi(x_1) \quad (4.18)$$

Despreciando el potencial terrestre frente al potencial en la superficie del emisor, obtenemos:

$$\frac{\Delta V}{V_1} \sim -\frac{1}{2} \overset{2}{g}_{00}(R) \quad (4.19)$$

Asumiremos que las contribuciones a $\overset{2}{g}_{00}(R)$ debidas a ρ_{ext} y ρ_{int} son del mismo orden; lo que es compatible con suponer que $\rho_{int} \sim \text{constante} \sim \rho_{ext}(|\vec{x}|=R)$.

En R.G., el corrimiento al rojo gravitatorio es adjudicado al término de masa y lo mismo debe suceder en la teoría ECKK para el caso del fluido ideal con espín (ver 3.135). Las dispersiones de los valores predichos por R.G. respecto de los valores experimentales pueden ser adjudicadas a muchos factores, como ser efectos Doppler o errores en la estimación de la masa de la estrella en cuestión.

En nuestro caso, y con el objeto de obtener una estimación gruesa del máximo de torsión permisible, supondremos que toda la dispersión es debida a los efectos de los gravitinos sobre la métrica. Para ello podremos estimar el orden de magnitud de las integrales de (4.15) y, en consecuencia, de la constante S, asumiendo que ellos causan la dispersión del corrimiento al rojo respecto del predicho por R.G. (y ECKK). Dado que estamos interesados en evaluar el máximo de torsión permisible, hemos tomado toda la dispersión de $\overset{2}{g}_{00}$ como debida a los gravitinos.

En la siguiente tabla se muestran $\overset{2}{g}_{00}$, $\Delta \overset{2}{g}_{00}$ y la torsión para el caso de tres tipos diferentes de estrellas:

TABLA IV 1.: Máximo Orden Permisible de Torsión para
Diferentes Estrellas

	$\frac{\lambda}{g_{00}}$	$\Delta \frac{\lambda}{g_{00}}$	Máximo Orden de Torsión
sol	10^{-6} (36) (21)	10^{-6} - 10^{-7}	10^{-10} 1/cm
enana blanca (40 Eridani B)	10^{-8} (36)	10^{-8}	10^{-16} 1/cm
neutrónica (varias)	10^{-1} (58)	10^{-1}	10^{-17} 1/cm

Si se deseara el valor "exacto" de la torsión, sería necesario entonces, distinguir la dispersión debida a los errores experimentales de aquellos atribuibles a la no validez de R.G. Caso contrario, el verdadero valor de la torsión se vería enmascarado en todo el $\Delta \frac{\lambda}{g_{00}}$. En todos los casos deberíamos integrar (4.11).

4.3. ACOPLES SUPERSIMÉTRICOS DE MATERIA. TRAYECTORIAS EN SUPERGRAVEDAD N=1

4.3.1. La Aproximación WKB

En la sección 4.2.1. hemos hallado una solución newtoniana exacta del gravitino que no es puro gauge, y en 4.2.2. hemos introducido un modelo satisfactorio para las fuentes del campo gravitatorio. Sin embargo y de acuerdo con lo ya expresado, los efectos de corrimiento al rojo que hemos relacionado con una eventual composición gravitínica de las fuentes, pueden ser explicados por otras teorías métricas de la gravitación (en particular por R.G.). Aquí presentaremos una aproximación más distintiva al problema de la búsqueda de consecuencias macroscópicas eventualmente mensurables, de la SG N=1.

Si una descripción de la materia es dada en el marco de una teoría cuántica de campos (tal el caso de la Supergravedad), las variables macroscópicas que describen las partículas (posiciones y velocidades) deben ser obtenidas tomando su límite clásico. Ahora bien, las trayectorias clásicas dependerán no sólo del fondo geométrico (del background), sino también del lagrangiano de materia propuesto. Por ejemplo, de acuerdo con lo ya discutido en el Capítulo II, parágrafo 2.4.2., la materia escalar mínimamente acoplada, sigue trayectorias geodésicas de U_4 . Ello es así debido a que para este caso particular, este tipo de materia no se acopla con la torsión.

Aquí nos interesa otro tipo de acople. Dado que la SG N=1 es una teoría supersimétrica, con vistas a dar cuenta de esta simetría al incorporar materia, el lagrangiano que la representa debe provenir de algún lagrangiano originariamente supersimétrico. Esto conduce a un acople que no es mínimo. En particular, nos será posible realizar un tratamiento semiclásico del acople de un multiplete de campos de materia con la gravedad. En este tratamiento la gravedad vendrá representada por los campos de la métrica y del gravitino; los que podrán ser

tratados como clásicos en la medida en que ellos no necesiten de correcciones radiativas. Por su lado, la materia se incorporará como originada en campos relacionados con el grupo de supersimetrías.

La representación lineal no trivial más sencilla del superálgebra es, de acuerdo con lo visto en 2.7.1., la del multiplete de Wess-Zumino (A, B, λ) . Vimos que si se exige supersimetría local hasta orden α (con $\alpha^2 = 8\pi G$) el lagrangiano más sencillo resulta el (2.181), cuya acción vale:

$$S = \int d^4x \frac{e}{2} [(\partial_\mu A \partial_\nu A + \partial_\mu B \partial_\nu B) g^{\mu\nu} + \bar{\lambda} \not{\partial} (w(e)) \lambda - \alpha \bar{\Psi}_\mu (\not{\partial} (A + i\gamma_5 B) \gamma^\mu \lambda)] \quad (4.20)$$

Las tres ecuaciones de campo se obtienen exigiendo que cada uno de los campos φ verifique $\delta\mathcal{L}/\delta\varphi = 0$; lo que es equivalente a asumir que la ecuación (2.44) es válida para cada campo. Ellas resultan:

$$\square A - \frac{\alpha}{2} [\partial_\rho (\bar{\Psi}_\mu) \gamma^\rho \gamma^\mu \lambda + \bar{\Psi}_\mu \gamma^\rho \gamma^\mu \partial_\rho \lambda] = 0 \quad (4.21)$$

$$\square B - i \frac{\alpha}{2} [\partial_\rho (\bar{\Psi}_\mu) \gamma^\rho \gamma_5 \gamma^\mu \lambda + \bar{\Psi}_\mu \gamma^\rho \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\rho \lambda] = 0 \quad (4.22)$$

$$D_\mu \bar{\lambda} \gamma^\mu + \frac{\alpha}{2} \bar{\Psi}_\mu \not{\partial} (A + i\gamma_5 B) \gamma^\mu = 0 \quad (4.23)$$

donde el operador d'alambertiano \square para los campos escalares vale: $\nabla_\mu \delta^\mu$. Se ha tenido en cuenta que las matrices γ^μ son constantes a menos de factores de orden α^2 (ver abajo de (4.5)).

Para obtener el límite semiclassical de los campos A , B y λ realizaremos una aproximación WKB, suponiendo que cada uno de ellos puede ser expandido como una serie en potencias de $(-i\hbar)$ (60). Nos es

posible escribir, para el caso de los bosones:

$$A(x) = \exp [i S_{(A)}/\hbar] \sum_{n=0}^{\infty} (-i\hbar)^n A_n(x) + h.c. \quad (4.24)$$

$$B(x) = \exp [i S_{(B)}/\hbar] \sum_{n=0}^{\infty} (-i\hbar)^n B_n(x) + h.c. \quad (4.25)$$

Para el fermión, denotamos al espinor fila λ^T como $\lambda^T = (\lambda_L, \lambda_L, \lambda_R, \lambda_R)$ donde las λ_L (λ_R) son las componentes "left" ("right"). Como este espinor es de Majorana, entonces posee la mitad de los grados de libertad que uno de Dirac. El mismo debe satisfacer la condición de vínculo: $\lambda_R = -\sigma^2 \lambda_L^*$ (39), donde la matriz de Pauli σ^2 vale $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. La expansión WKB del espinor columna λ_R la escribimos:

$$\lambda_R = \exp [i S_{(A)}(x)/\hbar] \sum_{n=0}^{\infty} (-i\hbar)^n \lambda_{Rn} \quad (4.26)$$

Ahora estamos en condiciones de encarar el problema referido al comportamiento clásico del multiplete de materia. Este límite se obtiene sustituyendo las expansiones (4.24-6) en las ecuaciones de campo (4.21-3), y tomando los términos de menor orden en \hbar . Luego de mucho álgebra llegamos a las siguientes tres ecuaciones:

$$\partial^\mu S_{(A)} \partial_\mu S_{(A)} = 0 \quad \partial^\mu S_{(B)} \partial_\mu S_{(B)} = 0 \quad (4.27-8)$$

$$\bar{\lambda}_0 i \gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu S_{(A)} + i \chi \bar{\Psi}_\mu A_0 \gamma^\rho \partial_\rho (S_{(A)}) \text{sen} (S_{(A)}/\hbar) \gamma^\mu - \chi \bar{\Psi}_\mu \gamma^5 B_0 \partial_\rho (S_{(B)}) \text{sen} (S_{(B)}/\hbar) \gamma^\mu = 0 \quad (4.29)$$

con $\bar{\lambda}_0 = (\lambda_{R0}^+, \lambda_{L0}^+)$. Para la ecuación (4.27) que es de orden $1/\hbar^2$, en el d'alambertiano de A se ha despreciado el término $\Gamma_{\lambda\sigma}^\lambda \delta^\sigma A$ ya que el mismo es de orden χ^2/\hbar (lo mismo en (4.27) para B); mientras que para la ecuación (4.29) que es de orden $1/\hbar$, se ha despreciado el término $1/2 \omega_\mu^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \bar{\lambda}$ dado que el mismo es de orden $(\hbar)^0 \chi^2$.

Como es bien sabido, los campos A , B y λ representarán partículas clásicas si las fases $S_{(A)}$, $S_{(B)}$ y $S_{(\lambda)}$ constituyen las funciones principales de Hamilton de partículas cuyos momentos canónicos sean:

$$P_{\mu(A,B,\lambda)} = \partial_{\mu} S_{(A,B,\lambda)} \quad (4.30)$$

Estamos interesados en campos de materia masivos. En consecuencia, es importante discutir aquí, brevemente, la incorporación de masa a los campos A , B y λ . En este sentido es muy ilustrativo lo que sucede en el modelo de Wess-Zumino invariante ante supersimetrías globales. Una forma de dar masa a estos campos sin romper la supersimetría, consiste en sumarle al lagrangiano (2.162) un término proporcional a (39):

$$m \left(\bar{\lambda} \lambda + \frac{1}{a} A F + \frac{1}{a} B G \right)$$

con m una masa (a es una constante). Las ecuaciones de campo para los campos auxiliares F y G , pueden resolverse muy fácilmente en términos de los campos A y B , respectivamente. Ello es así, debido a la ausencia de términos cinéticos para estos campos, lo que implica que sus respectivas ecuaciones resultan algebraicas. Esto hace que ellos puedan ser "eliminados" de las ecuaciones de campo correspondientes a A y B . El resultado final consiste en que las ecuaciones de campo de cada uno de los componentes del multiplete, resultan ecuaciones de Klein-Gordon con masa para los escalares A y B , y una ecuación de Dirac con masa m para el fermión λ . En consecuencia, la necesidad de preservar la supersimetría conduce a una no degeneración de la masa: todos los campos incluidos en el multiplete poseen igual masa. Esto está en íntima correspondencia con el hecho de que el operador de masa $P^{\mu} P_{\mu}$ conmuta con los generadores de la supersimetría (ver (2.159)). Sin embargo, dado que por el contrario, en la naturaleza existe

degeneración de la masa, para que la teoría de cuenta de este hecho debe suponerse rota la supersimetría.

El hecho de que la supersimetría en las teorías supergravitatorias de Gran Unificación (SG-GUT) se rompa a una masa relativamente pequeña, asegura la existencia de un mecanismo lo suficientemente suave como para darle diferente masa a las partículas, de forma tal de permitir que en la Supergravedad la ruptura de la supersimetría sea muy suave, y la teoría permanezca finita a los primeros loops (17), (61). A nivel clásico, también nos será posible hacer un tratamiento masivo del multiplete, suponiendo una ruptura de la supersimetría e incorporando masas diferentes para los tres campos de materia. (Para justificar aún más nuestra incorporación de masa, en el parágrafo 4.3.3. volveremos sobre este punto a la luz de nuestros resultados, estableciendo las similitudes que existen entre el procedimiento aquí seguido y aquel proveniente de una ruptura espontánea de la supersimetría).

A partir de las ecuaciones (4.27) y (4.28), y empleando la condición (4.30) para A y B, llegamos, para el caso masivo a:

$$P_{\mu(A)} P^{\mu(A)} = -m^2_{(A)} \tag{4.31}$$

$$P_{\mu(B)} P^{\mu(B)} = -m^2_{(B)} \tag{4.32}$$

Estas ecuaciones nos muestran que el momento canónico P^{μ} coincide con el momento (impulso) ordinario $p^{\mu} = m u^{\mu}$, donde u^{μ} es el vector temporal ortogonal a las hipersuperficies de fase S constante. Se puede probar que en la aproximación WKB: $v^{\mu} = u^{\mu} + O(\hbar)$, siendo v^{μ} , en este caso, el vector tangente a la trayectoria de la partícula (62). En consecuencia, a este orden, nos es posible identificar a u^{μ} con la cuadrivelocidad y suponer entonces, que $u^{\mu} u_{\mu} = -1$. (Cabe aclarar que esta última relación, correspondiente a la cuadrivelocidad, y que ya hemos supuesto como válida en el capítulo anterior para el caso del

fluido ideal con espín, se verifica en todo espacio-tiempo con torsión, ya que ella puede obtenerse dividiendo al invariante: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ por $d\bar{\theta}^2$ por $d\theta^2$, y haciendo luego uso de la definición de cuadrivelocity. Ver (3.84)).

Mostraremos que las ecuaciones desacopladas (4.31) y (4.32), conducen para las partículas escalares A y B, a una ecuación de movimiento geodésica. En este caso, en un background (g, ψ) . En efecto, teniendo en cuenta (4.30) y el hecho de que $F_{(\alpha)}^\mu = p_{(\alpha)}^\mu$, tenemos

$$U_{\mu(A)} = \frac{1}{m_{(A)}} \partial_\mu S_{(A)} \quad (4.33)$$

Por lo que

$$\overset{\{ \}}{\nabla}_\nu U_{\mu(A)} = \frac{1}{m_{(A)}} \partial_\nu \partial_\mu S_{(A)} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} \partial_\lambda S_{(A)} \quad (4.34)$$

Como $\partial_\nu \partial_\mu S_{(A)}$ y $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\mu \end{matrix} \right\}$ son simétricos en los índices $\nu\mu$, llegamos a que

$$\overset{\{ \}}{\nabla}_\nu U_{\mu(A)} = \overset{\{ \}}{\nabla}_\mu U_{\nu(A)} \quad (4.35).$$

A su vez, derivando $u_{(\alpha)}^\mu$, $u_{(\alpha)\mu} = -1$, obtenemos

$$U_{(\alpha)}^\mu \overset{\{ \}}{\nabla}_\nu U_{\mu(A)} = 0 \quad (4.36)$$

que combinada con la condición (4.35) nos conduce, para la materia escalar representada por el campo A y a orden $(\hbar)^0$, a una ecuación geodésica:

$$U_{(\alpha)}^\mu \overset{\{ \}}{\nabla}_\mu U_{\nu(A)} = 0 \quad (4.37)$$

(Notemos que (4.37) es la (1.39) con conexión Christoffel, que hace que, en este caso, (1.41) y (1.46) coincidan). El mismo razonamiento es válido para B.

Por otro lado, para los cuadrivectores \vec{u} de los campos A y B, se

verifica:

$$\nabla_{[\mu} U_{\nu]} = S_{\mu\nu}{}^\lambda U_\lambda \quad (4.38)$$

con $S_{\mu\nu}{}^\lambda$ la torsión. (La interpretación de (4.38) ya se ha discutido en el Capítulo I, parágrafo 1.3.1., para el caso de los versores de una base holónoma).

La ecuación correspondiente al campo de espín 1/2 masivo es:

$$\tilde{\lambda}_0 (i \gamma^S \not{P}_{(A)} - i m) = \bar{V} \quad (4.39)$$

donde

$$\bar{V} = \bar{V}(\psi, p_{(A)}, p_{(B)}) = -i \chi \bar{\Psi}_\mu (\tilde{A}_0 \not{p}_{(A)} + i \gamma_5 \tilde{B}_0 \not{p}_{(B)}) \quad (4.40)$$

con

$$\tilde{A}_0 = A_0(x) \text{sen}(S_{(A)}/\hbar) \quad (4.41)$$

$$\tilde{B}_0 = B_0(x) \text{sen}(S_{(B)}/\hbar) \quad (4.42)$$

$$\tilde{\lambda}_0 = (\lambda_{R0}^* e^{iS_0/\hbar}, \lambda_{L0}^* e^{-iS_0/\hbar}) \quad (4.43)$$

La expresión (4.39) puede ser pensada como una ecuación de campo para una partícula de espín 1/2, con una fuente externa. En esta interacción, el momento canónico y el momento ordinario de la partícula no coinciden. (Una situación similar se da en el caso de partículas cargadas en presencia de campos electromagnéticos). Debido al término de interacción, P^μ puede ser escrito como:

$$P^\mu_{(A)} = m_{(A)} U^\mu + Z^\mu \quad (4.44)$$

donde Z^μ es una magnitud vectorial que depende del término de interacción del lagrangiano de (4.20). (Recordemos aquí, que para los campos escalares este tipo de corrección no existe a orden cero en \hbar). Ahora la ecuación (4.39) queda

$$\tilde{\lambda}_0 (i \gamma^5 \gamma^\mu m_{(\lambda)} U_{\mu(\lambda)} - i m_{(\lambda)} + i \gamma^5 \gamma^\mu \underline{z}_\mu) = \bar{\nabla} \quad (4.45)$$

Esta última ecuación algebraica se satisface para

$$\tilde{\lambda}_0 i \gamma^5 \underline{z}^\mu = \frac{\bar{\nabla} \gamma^\mu}{4} \quad (4.46)$$

(donde se ha tenido en cuenta el hecho que $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$), y

$$\tilde{\lambda}_0 [\gamma^\mu p_{\mu(\lambda)} + m_{(\lambda)}] = 0 \quad (4.47)$$

Para esta última ecuación, tenemos la conocida solución

$$\tilde{\lambda}_0 = a_1(x) \bar{v}_1(p) + a_2(x) \bar{v}_2(p) \quad (4.48)$$

donde $\bar{v}_1(p)$ y $\bar{v}_2(p)$ son las dos soluciones linealmente independientes en el espacio de los momentos para las ecuaciones de Majorana de espín 1/2.

La expresión final para el momento canónico es:

$$p_{(\lambda)}^\mu = m_{(\lambda)} U^\mu - \frac{i \bar{\nabla} \gamma_\mu \gamma^5 \tilde{\lambda}_0}{4 \tilde{\lambda}_0 \tilde{\lambda}_0} \quad (4.49)$$

4.3.2. Movimiento de la Partícula de Espín 1/2 en un Fondo de Supergravedad

Teniendo en cuenta (4.30) y el hecho de que $\partial_{[\mu} \partial_{\nu]} S_{(\lambda)} = 0$, de (4.49) obtenemos

$$\partial_{[\mu} U_{\nu(\lambda)}] = \frac{i}{m_{(\lambda)}} \frac{\partial_{[\mu} \bar{\nabla}_{\nu]} \gamma^5 \tilde{\lambda}_0}{4 \tilde{\lambda}_0 \tilde{\lambda}_0} \quad (4.50)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \partial_{[\mu} U_{\nu(\lambda)}] U_{(\lambda)}^\mu &= U_{(\lambda)}^\mu \nabla_{[\mu} U_{\nu(\lambda)}] - S_{\nu\mu}{}^\lambda U_{\lambda(\lambda)} U_{(\lambda)}^\mu \\ &= U_{(\lambda)}^\mu \nabla_{\mu} U_{\nu(\lambda)} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Notemos, entonces, que las relaciones (4.36-8) no se verifican para el espín 1/2. Esto significa que no existe conmutatividad entre las componentes de la cuadrivelocidad. Ello es debido al hecho de que dada la característica del acople de los campos A, B y λ , hasta el orden que nos ocupa, él afecta la trayectoria de una partícula de tipo Dirac, y no afecta la trayectoria de las partículas escalares. Macroscópicamente este acople se traduce en la no coincidencia del momento ordinario y el momento canónico, lo que implica, a partir de (4.51), una trayectoria no geodésica ya a orden cero en \hbar :

$$U^\mu_{(A)} \frac{d}{ds} U_{\nu(A)} = 2 \alpha U^\mu_{(A)} \left\{ \partial_{[\mu} \left[\frac{\bar{\Psi}_\sigma}{4 \tilde{\lambda}_0 \tilde{\lambda}_0} \left(\tilde{A}_0 \frac{u_{(A)}}{u_{(A)}} \psi_{(A)} \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + i \left(\tilde{B}_0 \frac{u_{(B)}}{u_{(B)}} \psi_{(B)} \right) \gamma^\sigma \gamma_\nu \right] \gamma^{\nu]} \tilde{\lambda}_0 \right\} \quad (4.52)$$

En consecuencia, a orden $(\hbar)^0$ -esto es, en el límite completamente clásico-, las trayectorias de partículas de espín 1/2 provenientes de un acople supersimétrico en un espacio-tiempo de Riemann-Cartan, no son geodésicas.

Los resultados provenientes de la aproximación WKB, nos muestran que para materia escalar, estos coinciden con los ya expuestos y discutidos en varios puntos de esta Tesis: en variedades con torsión, las trayectorias correspondientes son geodésicas. Ello es así debido a que a orden $(\hbar)^0$, las ecuaciones de campo para A y B que se obtienen del lagrangiano de materia de Wess-Zumino, no difieren de aquellos lagrangianos provenientes de materia escalar mínimamente acoplados. (En (63), por ejemplo, se postula un movimiento geodésico para partículas de prueba sin espín en un background de SG. Aquí, en cambio, hemos demostrado por qué tal movimiento es el que corresponde).

Si nosotros consideramos la R.G. como el gauge $\Psi = 0$ de la Supergravedad, nuestros resultados coinciden con los propios de aquella teoría: las trayectorias de partículas representadas por campos libres

(en el sentido de que sólo interactúen con la gravedad) son geodésicas. En efecto, si el gravitino es nulo (lo que implica torsión nula), la acción de Wess-Zumino (4.20), resulta la acción de tres campos que no interactúan, y que están mínimamente acoplados con la gravedad vía conexión Christoffel; por lo que en el orden más bajo de \hbar , las ecuaciones de campo (4.21-3) conducen a leyes de movimiento geodésico.

Es interesante señalar que este es también el caso de materia no supersimétrica en un espacio-tiempo con torsión (conexión completa (1.24)), pero mínimamente acoplada. Tal el caso de la teoría ECSK. Esto está en correspondencia con lo ya discutido en el párrafo 2.4.2. para el caso particular de espín 1/2. (En (62) (64) se muestra como la ecuación de Dirac con torsión, en el orden más bajo de la aproximación WKB, conduce a trayectorias geodésicas). Sin embargo, esta última situación no puede ser considerada como un caso límite de la Supergravedad, dado que eliminar el término de interacción de (4.20) vía $\Psi = 0$, implicaría, automáticamente, un acople espinor-gravedad, sin torsión.

4.3.3. El Límite Newtoniano

En este punto, estamos interesados en encontrar la expresión newtoniana de la ecuación (4.52). Para ello supondremos, como siempre, que las fuentes del campo gravitatorio se mueven lentamente y que nos es posible expandir las magnitudes físicas en potencias de la velocidad, distancia y masa típicas del sistema. Teniendo en cuenta (3.1), (3.14) y (4.4), obtenemos la expresión al primer orden de aproximación, de la tri-aceleración de la partícula de espín 1/2:

$$\frac{dv_i}{dt}^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} (\dot{g}_{00}) - \alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\dot{\Psi}_\sigma}{4 \tilde{\lambda}_\sigma \tilde{\lambda}_0} (\tilde{A}_0 \frac{u_{(A)}}{u_{(A)}} \gamma_0 + i \gamma_5 \tilde{B}_0 \frac{u_{(B)}}{u_{(A)}} \gamma_0) \gamma^\sigma \gamma_0 \gamma^S \tilde{\lambda}_0 \right] \right\} \quad (4.53)$$

Esta ecuación se ha escrito como función de la componente 0-0 de la

métrica, y de las componentes $\dot{\Psi}_\mu$ del gravitino, el que se debe obtener integrando la ecuación newtoniana de Rarita-Schwinger (4.5). La componente \dot{g}_{00} debe obtenerse integrando (4.6) y será, a su vez, función del gravitino. En principio, es posible que \dot{g}_{00} dependa de los campos A, B y λ (lo que correspondería a un caso de Supergravedad no libre). Ello es así debido a que si tomamos el lagrangiano total: el de los campos de gauge (2.165) + (2.167), más uno de Wess-Zumino masivo, obtendríamos una ecuación de campo para \dot{g}_{00} como la (4.6), pero ahora con sumandos extras provenientes de los términos cinéticos y de masa del lagrangiano de materia. (Obviamente, a este orden no debe incluirse la interacción del multiplete, dado que variando su lagrangiano, obtendríamos como resultado a la derecha de la ecuación de Einstein, un término multiplicado por un factor χ^3 . En el orden newtoniano de esta ecuación, la materia entra siempre en su "forma plana").

Pero también resulta posible despreciar la acción de los campos de materia sobre la métrica de fondo; o sea, no tenerlos en cuenta en la ecuación de Einstein (lo que corresponde a Supergravedad libre). Esto es algo análogo a tomar a estos campos como correspondientes a partículas de prueba, lo que implica suponer que la acción de sus masas es despreciable en relación con la acción de alguna fuente masiva y gravitínica. Notemos que la ecuación (4.53) es finita aún para masas tendiendo a cero.

Nos interesa encontrar las condiciones que deben satisfacer los campos para que las correcciones de (4.53) a la geodésica, sean de un orden newtoniano. En otras palabras, nos preguntamos aquí acerca de cómo debe ser la relación entre las amplitudes de los campos, de forma tal que en (4.53) el sumando agregado al gradiente de \dot{g}_{00} , sea de orden \bar{v}^2/\bar{r} . Es fácil comprobar que esta corrección resulta newtoniana en aquellos puntos del espacio en los que el gravitino sea de orden $\bar{M}^{1/3}/\bar{r}$ y el

cociente entre la magnitud de las amplitudes de los campos escalares y el espinorial satisfaga:

$$\frac{A_0^2}{|\bar{\lambda}_0 \lambda_0|} \sim \frac{B_0^2}{|\bar{\lambda}_0 \lambda_0|} \sim \bar{v}^2 \bar{r} \frac{m_{(A)}^2}{m_{(A,B)}^2} \quad (4.54)$$

El presente análisis nos permite especular acerca de la posibilidad de diseñar algún experimento para testear la Supergravedad. En efecto, la eventual desviación en la trayectorias de partículas de espín 1/2 respecto de curvas geodésicas, podría representar un fenómeno atribuible a perturbaciones de la geometría, debidas a la existencia de un campo gravitínico.

Notemos que el primer sumando de (4.53) corresponde al gradiente de un potencial, el cual para el caso de Supergravedad libre y de ser nulo el gravitino en todo el espacio (Supergravedad trivial), coincidiría con el potencial de Newton ϕ . Los restantes términos de (4.53), son consecuencia de la propia acción de la partícula de espín 1/2 y sus interacciones con los campos escalares y el gravitino.

Para el caso de una fuente constituida por una masa central con forma esférica y en movimiento lento, sería posible emplear la solución (4.7a-b) para el gravitino. Esta expresión constituye una solución al orden más bajo, de la ecuación (4.5). Conjuntamente con la expresión correspondiente a \tilde{g}_{00} , hallada en 4.2.2. - la (4.15) - nos describen un posible background, adecuado para la detección de efectos de bajas energías, provistos por la Supergravedad. Debemos recordar aquí que nos era posible relacionar el valor de la constante S que entra en la solución del gravitino, con el máximo orden de torsión obtenible vía experimentos de corrimiento al rojo gravitatorio. El correspondiente background que proviene de los valores que puede asumir esta constante en cada uno de los casos, es, sin duda, compatible con el

acople de orden \mathcal{X} del multiplete de materia de Wess-Zumino.

Si en particular, el sistema en consideración posee los mismos valores típicos de nuestro sistema solar, podrían esperarse desviaciones significativas de la ley de Newton en las cercanías de la fuente, siempre que la relación (4.54) sea mayor que $10^{22} \text{km} \frac{m_{(\lambda)}^2}{m_{(A,B)}^2}$.

Resulta interesante discutir en este punto el problema de la incorporación de la masa en los campos A, B y λ . Para cada uno de ellos hemos introducido masas diferentes, rompiendo así la supersimetría. En (66) se expone un lagrangiano masivo y supersimétrico hasta orden \mathcal{X}^2 , compuesto por el lagrangiano (2.182), al que se le agregan términos de masa con igual parámetro m para los tres campos del multiplete, y términos de autointeracción proporcionales a un parámetro g. Dado que no nos interesa la interacción de los campos entre sí, enfocaremos nuestra atención solamente en los términos que contienen el parámetro de masa m. Cabe aclarar que a orden \mathcal{X}^0 estos términos son del tipo de los ya analizados para el caso de supersimetrías globales en 4.3.1.

Si hallásemos las ecuaciones de campo a orden \mathcal{X}^0 y \mathcal{X}^1 provenientes de la suma del lagrangiano con parámetro m de la referencia, y el (2.182), comprobaríamos que coinciden con las correspondientes de A y B (4.31-2) aunque con masas iguales; mientras que la ecuación correspondiente a λ , se vería corregida por un término extra del tipo:

$$\mathcal{X} m \bar{\Psi}_\mu (A + i \gamma_5 B) \gamma^\mu \lambda$$

En consecuencia, todo nuestro análisis cualitativo acerca del movimiento geodésico de A y B y no geodésico de la partícula de espín 1/2 quedaría inmutable y bastaría agregar este término a la ecuación (4.29), a la definición de la magnitud vectorial Z^μ y a la ecuación (4.52). Ahora bien, aunque con este procedimiento se preserva la supersimetría, su inconveniente mayor reside en el hecho de que se

adjudica igual masa a todos los campos. Para que los campos posean masas diferentes, es necesario romper la supersimetría, por medio de algun mecanismo. Precisamente, es con este objetivo que en (66) se hace una ruptura espontánea de la supersimetría, obteniéndose en el lagrangiano nuevos términos, del tipo:

$$\frac{e}{2} \frac{m_{(A)}^2 A^2}{\hbar^2} + \frac{e}{2} \frac{m_{(B)}^2 B^2}{\hbar^2} + \frac{e}{2} \frac{m_{(\lambda)} \bar{\lambda} \lambda}{\hbar}$$

con todas las masas diferentes. Esto es, términos exactamente iguales a los que nosotros hemos empleado para darle masa a los tres campos. Como en el caso de ruptura espontánea de simetría (67), debe establecerse la forma de un potencial función de los campos (de allí los términos de autointeracción del lagrangiano), calcularse su mínimo, establecerse donde él ocurre, y shiftear ("trasladar") los campos de acuerdo con esos valores. En este caso la simetría original del lagrangiano se rompe, apareciendo estos nuevos términos de masa, que dependen del parámetro de autointeracción g .

Nos es posible establecer relaciones entre las masas y densidades de las partículas no relativistas correspondientes a los campos escalares y espinorial. Para ello, veamos qué condiciones hacen posible el desarrollo WKB de las ecuaciones de campo correspondientes a A , B y λ , y estudiemos su significado. En (4.27) y (4.28) este desarrollo implica la no aparición de sumandos provenientes del término de interacción del lagrangiano. Es fácil ver que para (4.27), ésto supone:

$$\frac{A}{(\bar{\lambda}\lambda)^{1/2}} \gg \hbar^{1/2} k^{1/2} \frac{m_{(\lambda)}}{m_{(A)}^2} \tag{4.55}$$

donde $k = \chi^2(\bar{\psi}\psi)k$. En cambio en (4.29), para el caso de materia espinorial, sí aparecen sumandos provenientes de aquel término, lo que implica:

$$\frac{A}{(\bar{\lambda}\lambda)^{1/2}} \sim \frac{\hbar^{1/2}}{k^{1/2}} \frac{m_{(\lambda)}}{m_{(A)}} \tag{4.56}$$

Respecto de los campos escalares sólo estudiaremos lo que sucede con A, dado que lo referente a B, resulta análogo.

En (68) mostramos cómo las densidades propias, esto es, las componentes T^{00} de los tensores energía-impulso en el sistema propio, correspondientes a los campos A y λ valen:

$$\rho_A = \frac{A^2 m_{(A)}^2}{\hbar^2} \quad (4.57)$$

$$\rho_\lambda = \frac{\bar{\lambda} \lambda m_{(\lambda)}}{\hbar} \quad (4.58)$$

respectivamente. Combinando (4.55) con las (4.57-8) llegamos a

$$\frac{\rho_A}{\rho_\lambda} \gg k \frac{m_{(\lambda)}}{m_{(A)}^2} \quad (4.59)$$

Mientras que combinando (4.56) con las (4.57-8), obtenemos:

$$\frac{\rho_A}{\rho_\lambda} \sim \frac{m_{(\lambda)}}{k} \quad (4.60)$$

Las condiciones (4.59) y (4.60) son equivalentes a suponer:

$$m_{(A)} \gg k \quad (4.61)$$

$$\frac{\rho_A}{\rho_\lambda} \gg \frac{m_{(\lambda)}}{m_{(A)}} \quad (4.62)$$

La relación (4.61) establece una condición independiente sobre la masa $m_{(A)}$. Para el caso de un k correspondiente a un sistema físico poseyendo los valores típicos de nuestro sistema solar, obtenemos:

$$m_{(A)} \gg 10^{-52} g \quad (4.63)$$

Cualquier partícula masiva cumple suficientemente con (4.63). Dado que podemos entender a las densidades en reposo ρ_i como $\rho_i = n_i m_{(i)}$ con n_i

el número de partículas del tipo i por unidad de volumen, entonces (4.62) implica

$$\frac{\eta_A}{\eta_\lambda} \gg \left(\frac{m_{(\lambda)}}{M_{(A)}} \right)^2 \quad (4.64)$$

Por último, supongamos que no se da masa a los campos, lo que claramente preserva la supersimetría. Aquí también encontraremos diferencias entre el comportamiento de la materia escalar y la espinorial. En efecto, para los campos A y B tendremos:

$$P_{(A)}^\mu P_{\mu(A)} = P_{(B)}^\mu P_{\mu(B)} = 0 \quad (4.65)$$

$$U_{(A)}^\mu U_{\mu(A)} = U_{(B)}^\mu U_{\mu(B)} = 0 \quad (4.66)$$

lo que conduce a ecuaciones geodésicas de partículas relativistas. Por otro lado, una partícula no masiva y relativista correspondiente a λ , también habría de poseer una cuadrivelocidad satisfaciendo

$$U_{(\lambda)}^\mu U_{\mu(\lambda)} = 0 \quad (4.67)$$

pero, nuevamente, debido al término de interacción, no habría de describir movimiento geodésico. A causa del hecho de que la velocidad de una partícula relativista \vec{w} es del orden de la velocidad de la luz, para escribir explícitamente su ecuación de movimiento a orden newtoniano, deben incorporarse en su expresión, además de la componente $\overset{2}{g}_{00}$, nuevas componentes de la métrica, tal cual lo ya visto (y resuelto) para el caso del fotón en la teoría EDSK (ver parágrafo 3.1.6.). En este trabajo, estas componentes para el caso de la Supergravedad, no han sido halladas.

CONCLUSIONES

Nos ha interesado profundizar en las consecuencias que trae aparejada la incorporación de la torsión, cuando ella emerge como una de las variables geométricas del espacio-tiempo en donde se desarrollan determinadas teorías gravitatorias. En particular, nos hemos ocupado del estudio del acople mínimo y de los problemas relacionados con las trayectorias, discutiendo su carácter en una geometría no riemanniana y en relación con lagrangianos de materia correspondientes a Teoría de Campos. Nuestro interés se ha centrado en los límites no relativistas de las teorías ECSK y Supergravedad $N=1$, teorías que se han estudiado atendiendo a sus parecidos y diferencias. Nos hemos abocado a la tarea de encontrar efectos mensurables, o eventualmente mensurables.

Para el caso de la teoría ECSK hemos completado la APN en el caso más general, quedando así establecidas todas las ecuaciones diferenciales necesarias para resolver problemas físicos al orden deseado. En particular, se han determinado explícitamente las expresiones de las diversas magnitudes para el caso de un modelo realista: el del fluido ideal con espín. Se calcularon los potenciales gravitatorios hasta cuarto orden y explicitaron las componentes de la conexión, los símbolos de Christoffel de segunda especie, y la torsión; todos ellos necesarios para describir el movimiento de partículas de prueba y de las propias fuentes.

Obtenidas las relaciones fundamentales, fue posible dar una estimación de la densidad de fuentes que pueden provocar correcciones relevantes a la métrica del espacio-tiempo en relación con la propia de la Relatividad General, estimar órdenes de magnitud para la aceleración de partículas de prueba sometidas a la acción de fuentes de campo gravitatorio dotadas de torsión, analizar el caso de spines alineados y también

estudiar, por medio de un segundo desarrollo (esta vez en multipolos), el comportamiento de la geometría lejos de las fuentes.

Para la aproximación newtoniana de la Supergravedad se desarrolló la ecuación de campo del tipo de la de Einstein, para el caso libre más general. Integrando la ecuación de Rarita-Schwinger, nos fue posible encontrar una solución no trivial para el gravitino. La misma es aplicable como fuente para ciertos campos gravitatorios que respondan a determinadas simetrías, dando como resultado el hecho que ya en este límite son posibles dispersiones entre las predicciones de la SG $N=1$ y la Mecánica de Newton. El corrimiento al rojo gravitatorio nos ha permitido establecer una cota superior para una torsión con origen en supersimetrías, para el caso de diferentes modelos de estrellas.

La incorporación de un lagrangiano supersimétrico a orden newtoniano (del tipo del de Wess-Zumino) permitió estudiar las trayectorias de los componentes bosónicos y fermiónicos de la materia. Primero trabajamos con campos masivos, lo que trae aparejada una ruptura suave de la supersimetría. Se realizó una aproximación WKB de los campos que conforman el multiplete de Wess-Zumino. Debido a que el término de interacción del lagrangiano no proviene de un acople mínimo, la ecuación de campo correspondiente al campo de Dirac conduce a un movimiento no geodésico de la materia espinorial. Otro es el caso de la materia escalar y pseudoescalar, las que sí siguen trayectorias geodésicas. Un estudio de la relación entre los órdenes de magnitud de las amplitudes de los tres campos, nos permitió establecer bajo qué condiciones la corrección no geodésica de la trayectoria de la partícula de Dirac, es de un orden newtoniano y cómo deben vincularse entre si las densidades y masas de los campos. También hemos estudiado el comportamiento del multiplete para el caso no masivo. A diferencia del caso masivo, aquí el lagrangiano total que da origen a las ecuaciones de campo, permanece supersimétrico.

FIGURAS

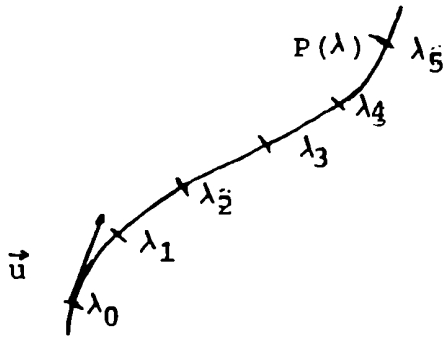


FIGURA 1.1.

Curva parametrizada $P(\lambda)$ con vector tangente $\vec{u} \equiv \frac{dP}{d\lambda}$.

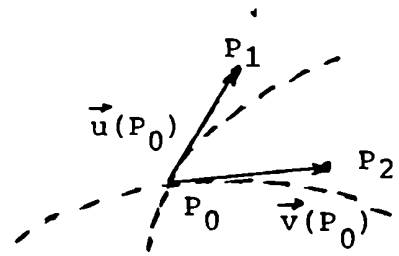


FIGURA 1.2.

Vectores tangentes a dos curvas en P_0 .

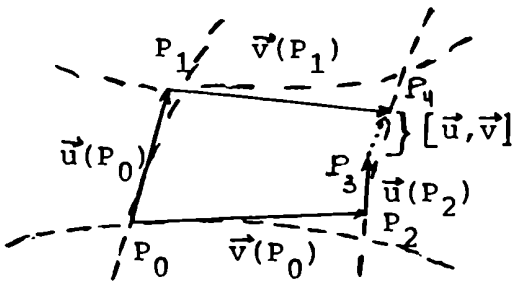


FIGURA 1.3.

Derivada de Lie $[\vec{u}, \vec{v}]$ entre dos vectores.

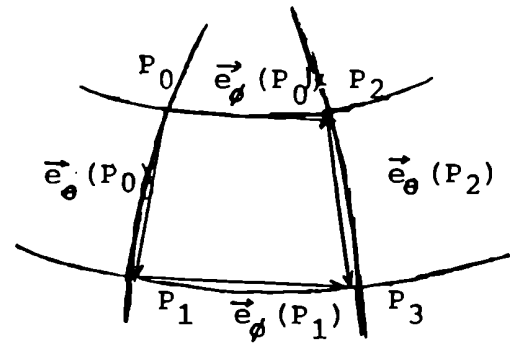


FIGURA 1.4.

Vectores holónomos en una superficie esférica.

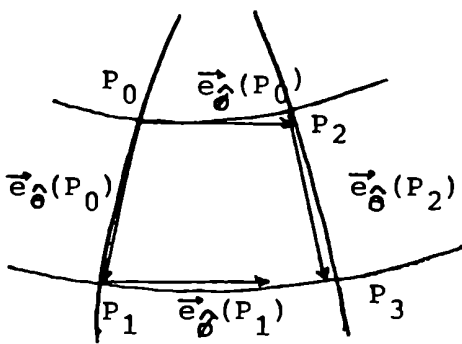


FIGURA 1.5.

Vectores anholónomos en una superficie esférica.

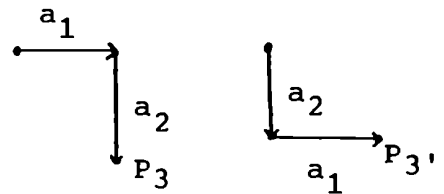


FIGURA 1.6.

Distintos recorridos y distintos puntos de llegada.

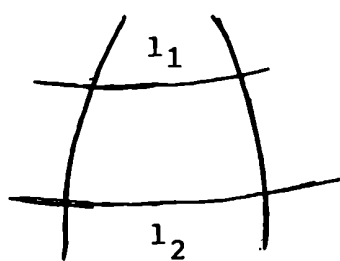


FIGURA 1.7.

Paralelos de distinta longitud.

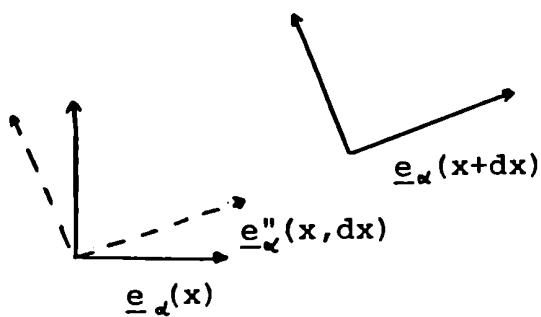


FIGURA 1.8.

Paralelo a una tétrada en otro punto.

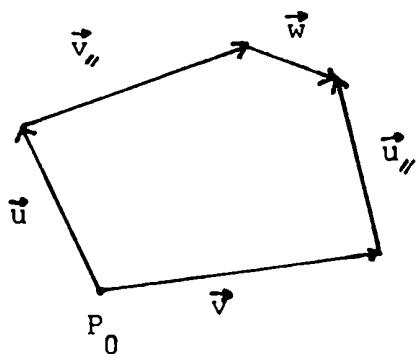


FIGURA 1.9.

El transporte paralelo de vectores y la torsión.

REFERENCIAS

- (1) Einstein A., Scientific American, Vol. 182, No.4, (1950).
- (2) Green M., Schwarz J. and Witten E., "Superstring Theory", Cambridge Univ. Press (1987).
- (3) Eddington A., "The Mathematical Theory of Relativity", Cambridge Univ. Press (1924).
- (4) Kibble T., J. Math. Phys., 2, (1961), 212.
- (5) Sciama D., Rev. Mod. Phys. 36 (1964), 463 y 1103.
- (6) Kopczynski W., Phys. Lett. 39A, 3 (1972), 219
- (7) Trautman A., Nature (Phys. Sci.), 242 (1973), 7.
- (8) Hehl F., von der Heyde P. and Kerlick G., Phys. Rev. D, 10, (1974), 1066.
- (9) Hehl F., von der Heyde P., Kerlick G. and Nester G., Rev. Mod. Phys., 48, 3 (1976), 393.
- (10) Hehl F., "Four Lectures on Poincaré Gauge Field Theory", given at 6th Course of the International School of Cosmology and Gravitation on Spin, Torsion, Rotation and Supergravity, Erice. The Univ. of Texas at Austin, ORO 3992-380, (1979).
- (11) Ray J. and Smalley L., Phys. Rev. D, 27, 6, (1983), 1383.
- (12) Goldfan Y. and Likhman E., JETP Lett., 13 (1971), 1323.
- (13) Wess J. and Zumino B., Nucl. Phys. B70 (1974), 39.
- (14) Freedman D., van Nieuwenhuizen P. and Ferrara S., Phys. Rev. D 27, 12 (1976), 3214.
- (15) Van Nieuwenhuizen P. and Ferrara S., Phys. Rev. Lett. 37 (1976), 1669.
- (16) Grisaru M., van Nieuwenhuizen P. and Vermaseren, Phys. Rev. Lett. 37, 25 (1976), 1662.
- (17) Van Nieuwenhuizen P., "Supergravity", Phys. Reports 68, 4 (1981), 189.
- (18) Chandrasekhar S., Ap. J., 142 (1965), 1488.
- (19) Chandrasekhar S., Ap. J., 142 (1965), 1513.
- (20) Nordtvedt K., Phys. Rev. 169 (1968), 1017.
- (21) Will C., "Theory and Experiment in Gravitational Physics", Cambridge Univ. Press (1981), cap. 2, 4.
- (22) Levinas M., "Trayectorias Post-Newtonianas para un Espacio-Tiempo con Torsión Debidas a un Fluido Ideal con Spín", Trabajo de Seminario (1983), FCEN, UBA, cap. 1.
- (23) Castagnino M., Levinas M. and Umerez N., "Post-Newtonian Approximation in the Einstein-Cartan-Sciama-Kibble Theory", Gen. Rel. Grav. Vol. 17, No. 7 (1985) 683.

- (24) Levinas M. and Castagnino M., "On Torsion Detection Using Post-Newtonian Approximation", Proceed. SILARG V, Ed. Bressan, Castagnino and Hamity, World Scientific Publishing Co. (1985), Singapore, 286.
- (25) Castagnino M. and Levinas M., "On the Post-Newtonian Approximation of the ECSK Theory II", Gen. Rel. Grav. Vol. 19, No. 6 (1987), 545.
- (26) Castagnino M. and Levinas M., "Photon Motion in the ECSK Theory", Gen. Rel. Grav. Vol. 20, No. 7 (1988), 715.
- (27) Castagnino M., Domenech G., Levinas M. and Umerez N., "Newtonian N=1 Supergravity", Phys. Lett. B, 179, No. 1, 2 (1986), 83 y 190, 1-2 (1987), 237.
- (28) Domenech G., Levinas M. and Umerez N., "Gravitational Theories With Torsion: Newtonian Trajectories in Supergravity" (1987). Este Trabajo obtuvo una Mención de Honor en el Concurso Anual de la Gravity Research Foundation (1987).
- (29) Domenech G., Levinas M. and Umerez N., "Low Energy Effects in Supergravity", Proceed. Silarg VI, Ed. M. Novello, World Scientific Pub. Co. (1988), 349.
- (30) Castagnino M., Domenech G., Levinas M. and Umerez N., "Supersymmetric Coupling and Trajectories in N=1 Supergravity", Class. and Quant. Grav. (En Prensa)
- (31) Misner C., Thorne K. and Wheeler J., "Gravitation", Freeman and Co. (1973), San Francisco, cap. 9, 22, 39.
- (32) Utiyama R., Prog. Theor. Phys., 64, 6 (1980), 2207.
- (33) Santalo L., "Vectores y Tensores con sus Aplicaciones", EUDEBA (Ed. 1973), Buenos Aires, cap. 10.
- (34) Von der Heyde P., Phys. Lett. 58 A, 3 (1976), 141.
- (35) Roederer J., "Mecánica Elemental", EUDEBA (Ed. 1973), Buenos Aires cap. 3.
- (36) Weinberg S., "Gravitation and Cosmology", Wiley (1972), New York, cap. 3, 5, 9.
- (37) Von der Heyde P., Nvo. Cim. Lett. 14 (1975), 250.
- (38) Roman P. "Introduction to Quantum Field Theory", North Holland Publishing Co. (1970), Amsterdam, chap. 2.
- (39) Ramond P., "Field Theory", The Benjamin/Cummings Publishing Co. (1981), cap. 1.
- (40) Landau L. y Lifshitz E., "Teoria Clasica de los Campos", Ed. Reverte S. A. (1973), Barcelona, cap. 4.
- (41) Nitsch J., "The Macroscopic Limit of the Poincaré Gauge Field Theory of Gravitation", Proceed. of the International School of Cosmology and Gravitation, Ed. Bergmann P. and de Sabatta V., Erice (1980), Plenum, 63.
- (42) West P., "Introduccion to Supersymmetry and Supergravity", World Scientific Publishing Co. (1986), Singapore, cap. 1 - 10.

- (43) Yasskin F. and Stoeger W., Phys. Rev. D 21 (1979), 2084.
- (44) Sandberg V., Phys. Rev. D, 12, 10 (1975), 3013.
- (45) Nester J., Phys. Rev. D, 16, 8 (1977), 2395.
- (46) Ferrara S. and van Nieuwenhuizen P., Phys. Rev. D 20 (1979), 2079.
- (47) Van Nieuwenhuizen P. and Ferrara S., Phys. Lett. B 74 (1978), 333.
- (48) Goldstein H., "Mecanica Clasica", Aguilar (1966), Madrid, cap. 2.
- (49) Hehl F., Phys. Lett. 39A, 3 (1971), 225.
- (50) Mauguin G., Ann. Inst. Poincare 20 (1974), 41.
- (51) De Ritis R., Lavorgna M., Platania G. and Stornaiolo C., Phys. Rev. D, 28, 4 (1983), 713.
- (52) Tsamparalis M., Phys. Rev. D, 24 (1981), 1451.
- (53) Ray J. and Smalley L., Phys. Rev. Lett. 49, 15 (1982), 1059.
- (54) Kerlick G., Phys. Rev. D, 12, 10 (1975), 3004.
- (55) Obregon O. and Ryan M. Jr., KINAM 5 (1983), 3.
- (56) Cordero P. and Teitelboim C., Phys. Lett. 78B, 1 (1978), 80.
- (57) Adler R., Bazin M. and Schiffer M., "Introduction to General Relativity", Mc. Graw-Hill (1965), cap. 4.
- (58) Limdblom L., Astrophys. J. 278 (1984), 364.
- (59) Hehl F., Found. Phys. 15, 4 (1985), 451.
- (60) Messiah A., "Mecánica Cuántica", Editorial Tecnos (Ed. 1973), Madrid, Cap. 6.
- (61) Nath P., Arnowitt R. and Chamseddine A., "Applied N=1 Super-gravity", World Scientific (1984), chap. 2.
- (62) Audretsch J., Phys. Rev. D 24, No. 6 (1981), 1470.
- (63) Vandyck M, Class. Quant. Grav. 4, No.3 (1987), 683.
- (64) Hayashik K. and Shirafuji T., Prog. Theor. Phys. 64, 3 (1980), 883.
- (65) T'Hooft G. and Veltman M., Ann. Inst. Poincare XX, 1 (1974), 69.
- (66) Das A., Fischler M. and Rocek M., Phys. Lett. B 69 (1977), 186.
- (67) Abers. E. and Lee B, Phys. Rep. 9 No. 1 (1973), 1.
- (68) Domenech G., Levinas M. and Umerez N., "The Fluid Model Lagrangian for the Wess-Zumino Multiplet", (1988). Enviado a Phys. Lett. A.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a mi director, Dr. Mario Castagnino por el continuo apoyo y asesoramiento a mis tareas de investigación. También agradezco a los Lic. Graciela Domenech y Norberto Umerez, con quienes he trabajado estrechamente en muchos de los temas de esta Tesis, y sin cuya colaboración no hubiera sido posible realizar este trabajo.

Esta Tesis fue realizada como parte de un plan de trabajo de beca del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), y como parte del plan de trabajo de una beca de Perfeccionamiento de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC).