

Tesis de Posgrado

Análisis de una interfase plasma-gas neutro

Fuentes, Néstor Osvaldo

1988

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Fuentes, Néstor Osvaldo. (1988). Análisis de una interfase plasma-gas neutro. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2171_Fuentes.pdf

Cita tipo Chicago:

Fuentes, Néstor Osvaldo. "Análisis de una interfase plasma-gas neutro". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1988.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2171_Fuentes.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

Registro No. 211

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TEMA DE TESIS

ANALISIS DE UNA INTERFASE PLASMA-GAS NEUTRO

AUTOR

Lic. Néstor Osvaldo Fuentes

DIRECTOR

Prof. Dr. Fausto T. Gratton

Tesis presentada para optar por el título de

Doctor en Física

1988

2.175
Ej. 2.

LUGAR DE TRABAJO

Comisión Nacional de Energía Atómica

Departamento Prospectiva y Estudios Especiales

División Fusión Nuclear

A mi esposa

Hebe Olga

RESUMEN

Se ha elaborado un modelo que permite estudiar el estado estacionario de una interfase plasma-gas neutro para una geometría plana. Esta región se encuentra comprendida entre un plasma totalmente ionizado, cuya densidad ($\geq 10^{17} \text{ cm}^{-3}$) y temperatura son datos, y un gas frío totalmente neutro, de temperatura conocida. Ha sido empleada una descripción macroscópica de cinco fluidos: electrones, iones livianos que provienen del plasma, iones pesados originados en la ionización de átomos del gas frío y los neutros correspondientes. Para una situación colisional, en la cual la ionización por impacto electrónico y la recombinación de tres cuerpos son los mecanismos dominantes del balance de partículas, el modelo incluye la existencia de un campo eléctrico producido por el efecto de separación de cargas. Se han estudiado numéricamente las situaciones correspondientes a plasmas de deuterio con densidades entre $10^{17} - 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ y temperaturas de 5 - 50 eV, con oxígeno, o silicio, a temperatura de 0.17 eV, como gas neutro. Tres constantes físicas relacionadas con los flujos de partículas, Γ , con el balance de presiones, P , y con el flujo de energía total de la región en estudio, Q , caracterizan al modelo e imponen vínculos entre las variables físicas, condicionadas además por las otras hipótesis adoptadas. También ha sido calculada la importancia relativa de cada uno de los términos que contribuyen al balance total de energía. Este conocimiento sobre la interfase fue aplicado al estudio de la difusión de un campo magnético a través de la misma.

INDICE	Página
Lista de Tablas	v
Lista de Figuras	vi
I. INTRODUCCION	1
II. PLASMAS PARCIALMENTE IONIZADOS	12
II.1.- Características generales y principales interacciones entre las partículas que componen un plasma parcialmente ionizado.....	12
II.2.- Funciones de distribución y cálculo de valores promedio.....	20
II.3.- Propiedades de transporte y reglas de mezclas.....	31
II.4.- Ionización y recombinación.....	44
II.5.- Rango de validez del empleo de funciones de distribución maxwellianas.....	52
III. DESCRIPCION MACROSCOPICA DE UN PLASMA PARCIALMENTE IONIZADO	60
III.1.- Características de la descripción macroscópica.....	60
III.2.- Ecuaciones macroscópicas de un plasma.....	61
III.3.- Descripción de una mezcla de tres componentes.....	75
III.4.- Descripción de un plasma de múltiples especies.....	82
III.5.- Condiciones de aplicabilidad de la descripción macroscópica.....	87

IV. MODELO DE CINCO FLUIDOS PARA LA INTERFASE

PLASMA-GAS NEUTRO	91
IV.1.- Antecedentes y características del modelo.....	91
IV.2.- Ecuaciones del modelo.....	95
IV.2.1.- Ecuación de continuidad con fuentes o sumideros de partículas.....	99
IV.2.2.- Ecuación del balance de la cantidad de movimiento.....	100
IV.2.3.- Ecuación del balance de la energía.....	102
IV.2.4.- Reducción del sistema de ecuaciones.....	106
IV.3.- Solución numérica.....	111
IV.3.1.- Nuevo sistema de ecuaciones.....	111
IV.3.2.- Forma adimensional de la tasa de producción de partículas.....	114
IV.3.3.- Expresiones adimensionales para las fuerzas de fricción.....	115
IV.3.4.- Conductividad térmica en forma adimensional.	117
IV.3.5.- Métodos numéricos.....	118
IV.3.5.i.- Continuación analítica.....	119
IV.3.5.ii.- Runge-Kutta.....	123
IV.3.5.iii.- Comparación de ambos métodos.....	126
V. RESULTADOS NUMERICOS	128
V.1.- Cálculos realizados.....	128
V.2.- El borde externo del plasma.....	129
V.3.- Características generales de la interfase plasma-gas neutro.....	131
V.4.- Consecuencias de ignorar la separación de cargas.....	139

VI. PROPAGACION DE UN CAMPO MAGNETICO A TRAVES DE LA	
INTERFASE PLASMA-GAS NEUTRO	144
VI.1.- El problema de la propagación de un campo magnético a través de una región parcialmente ionizada.....	144
VI.1.1.- Situación general.....	144
VI.1.2.- Ecuaciones básicas.....	145
VI.1.3.- Solución.....	148
VI.1.3.i.- Limite asintótico de la solución en la zona totalmente neutra.....	150
VI.1.3.ii.- Transitorios.....	151
VI.2.- Conductividad eléctrica de la interfase plasma-gas neutro.....	152
VI.2.1.- Regla de mezcla.....	152
VI.2.2.- Cálculo numérico.....	153
VI.3.- Aplicación del modelo de cinco fluidos a la difusión de un campo magnético.....	155
VII. DISCUSION Y CONCLUSIONES	161
AGRADECIMIENTOS	175
APENDICE A	176
A.1.- Sección eficaz, tiempo entre colisiones y camino libre medio.....	176
A.2.- Variaciones de la cantidad de movimiento y de la energía.....	188
APENDICE B	
Procesos atómicos en plasmas de hidrógeno.....	196
REFERENCIAS	203

TABLAS 218

FIGURAS 220

Lista de tablas

Tabla	Página
I	Valores característicos para los coeficientes de recombinación..... 218
II	Valores de (n_e/n_N) para H_2 con los cuales $\langle v_{ei} \rangle = \langle v_{eN} \rangle$ 218
III	Variación de los parámetros que regulan la atenuación de un campo magnético que difunde a través de una interfase plasma-gas neutro..... 219

Lista de figuras

Figura	Página
1 Comparación entre los valores de la aproximación de camino libre medio, la regla de Frost y la aproximación de Sonine de orden doce, para σ_{\parallel} y κ_{\parallel} en argón a presión atmosférica ⁷⁹	220
2 Condiciones para una distribución maxwelliana ⁹² ...	221
3 Diagrama de flujo para el cálculo numérico basado en el método de continuación analítica.....	222
4 Densidades de partículas cargadas. Variación de los cocientes entre las densidades n_s de cada especie cargada ($s = 1,2,3$) y la densidad n_0 del plasma. La situación representada corresponde a una interfase formada entre un plasma de deuterio totalmente ionizado, con densidad $n_0 = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ y temperatura $T_0 = 25 \text{ eV}$, y oxígeno como gas neutro a temperatura $T_g = 0.17 \text{ eV}$. Se incluye el efecto de separación de cargas.....	223
5 Densidades de partículas cargadas. Detalle de la situación representada en la Fig.4..	224
6 Densidades de partículas neutras. Variación de los cocientes entre las densidades n_s de cada especie neutra ($s = 4,5$) presente en la interfase plasma-gas neutro, y la densidad n_0 del plasma. El caso físico representado es el mismo que en la Fig.4.....	225
7 Densidades de partículas neutras. Detalle de la situación representada en la Fig.6..	226

8	Coefficientes de ionización y recombinación.	
	Variación de los coeficientes de ionización I_s ($s = 2,3$) y recombinación α_s , relativa a los valores iniciales I^0 y α^0 para el coeficiente de ionización de las partículas livianas, y el coeficiente de recombinación, respectivamente; para un plasma de deuterio, con oxígeno como gas neutro y con las mismas densidades y temperaturas que en las figuras anteriores. Se incluye el efecto de separación de cargas.....	227
9	Presiones de partículas cargadas.	
	Se representan los cocientes entre las presiones $n_s T$ de cada especie cargada ($s = 1,2,3$) y la constante P . La situación física es la misma que en la Fig.4.....	228
10	Presiones de partículas cargadas.	
	Detalle de la situación representada en la Fig.9..	229
11	Presiones de partículas neutras.	
	Representación de los cocientes entre las presiones $n_s T$ de cada especie neutra ($s = 4,5$) y la constante P , para el mismo caso físico que en las figuras anteriores.....	230
12	Presiones de partículas neutras.	
	Detalle de la situación representada en la Fig.11.	231
13	Potencial, campo eléctrico y conductividad eléctrica.	
	Variación de los cocientes entre el campo eléctrico E , el potencial ϕ , la conductividad eléctrica σ y las cantidades $E_0 = (8\pi P)^{1/2}$, $\phi_0 = E_0 d$ y la con-	

	ductividad eléctrica σ_0 del plasma totalmente ionizado, respectivamente. Los parámetros que caracterizan al plasma y a la zona neutra son los mismos de la Fig.4.....	232
14	Conductividades térmicas y eléctrica.	
	Variación de las conductividades térmicas total, κ , y de cada especie cargada, κ_s , ($s = 1,2,3$) y de la conductividad eléctrica σ , relativa a la conductividad térmica total κ_0 y la conductividad eléctrica σ_0 , ambas calculadas en el plasma. La situación representada corresponde al mismo caso físico que describen las figuras anteriores.....	233
15	Conductividades térmicas.	
	Contribución de las especies neutras a la conductividad térmica total, relativa al valor κ_0 . Comparar con la figura anterior.....	234
16	Balance de energía.	
	Contribución de los términos asociados al movimiento macroscópico de las partículas ($Tn_s v_s$) en la ecuación para el balance de energía (IV.55), y de los efectos de conducción térmica ($\kappa dT/dx$), relativa al valor de la constante Q . El caso físico representado corresponde al que ilustran las Figs. 4 - 15.....	235
17	Densidades de partículas cargadas.	
	Variación de los cocientes entre las densidades n_s de cada especie cargada ($s = 1,2,3$) y la densidad n_0 del plasma. La situación representada corresponde a una interfase formada entre un plasma de	

	deuterio totalmente ionizado, con densidad $n_0 = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ y temperatura $T_0 = 15 \text{ eV}$, y oxígeno como gas neutro a temperatura $T_g = 0.17 \text{ eV}$. Se incluye el efecto de separación de cargas. (Comparar con la situación representada en la Fig.4).....	236
18	Densidades de partículas cargadas. Detalle de la situación representada en la Fig.17. (Comparar con el caso presentado en la Fig.5).....	237
19	Campo eléctrico y conductividad eléctrica. Variación de los cocientes entre el campo eléctrico E , la conductividad eléctrica σ y la cantidad $E_0 = (8\pi P)^{1/2}$ y la conductividad eléctrica del plasma σ_0 , respectivamente. Los parámetros del plasma y de la zona neutra son los correspondientes a la Fig.17. (Comparar esta situación con la representada en la Fig.13).....	238
20	Densidades de partículas cargadas. Variación de los cocientes entre las densidades n_s de cada especie cargada ($s = 1,2,3$) y la densidad n_0 del plasma. La situación representada corresponde a una interfase formada entre un plasma de deuterio totalmente ionizado, con densidad $n_0 = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ y temperatura $T_0 = 50 \text{ eV}$, y oxígeno como gas neutro a temperatura $T_g = 0.17 \text{ eV}$. Se incluye el efecto de separación de cargas. (Comparar con los casos ilustrados por las Figs.4 y 17).....	239
21	Densidades de partículas cargadas. Detalle de la situación representada en la Fig.20. (Comparar con los casos físicos ilustrados por las	

	Figs.5 y 18).....	240
22	Campo eléctrico y conductividad eléctrica.	
	Variación de los cocientes entre el campo eléctrico E , la conductividad eléctrica σ y la cantidad $E_0 = (8\pi P)^{1/2}$ y la conductividad eléctrica del plasma σ_0 , respectivamente. Los parámetros del plasma y de la zona neutra son los correspondientes al caso presentado en la Fig.20. (Comparar esta situación con las representadas en las Figs. 13 y 19).....	241
23	Densidades de partículas cargadas.	
	Variación de los cocientes entre las densidades n_s de cada especie cargada ($s = 1,2,3$) y la densidad n_0 del plasma. La situación representada corresponde a una interfase formada entre un plasma de deuterio totalmente ionizado, con densidad $n_0 = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ y temperatura $T_0 = 25 \text{ eV}$, y oxígeno como gas neutro a temperatura $T_g = 0.17 \text{ eV}$. Se incluye el efecto de separación de cargas. (Comparar con los casos físicos presentados en las Figs.4, 17 y 20).....	242
24	Densidades de partículas cargadas.	
	Detalle de la situación representada en la Fig.23. (Comparar con los casos presentados en las Figs.5, 18 y 21).....	243
25	Campo eléctrico y conductividad eléctrica.	
	Variación de los cocientes entre el campo eléctrico E , la conductividad eléctrica σ y la cantidad $E_0 = (8\pi P)^{1/2}$ y la conductividad eléctrica del	

	plasma σ_0 , respectivamente. Los parámetros del plasma y de la zona neutra son los correspondientes a la Fig.23. (Comparar esta situación con las representadas en las Figs.13, 19 y 22).....	244
26	Densidades de partículas cargadas. Variación de los cocientes entre las densidades n_s de cada especie cargada ($s = 1,2,3$) y la densidad n_0 del plasma. La situación representada corresponde a una interfase formada entre un plasma de deuterio totalmente ionizado, con densidad $n_0 = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ y temperatura $T_0 = 25 \text{ eV}$, y silicio como gas neutro a temperatura $T_g = 0.17 \text{ eV}$. Se incluye el efecto de separación de cargas. (Comparar con los casos presentados en las Figs.4, 17, 20 y 23).....	245
27	Densidades de partículas cargadas. Detalle de la situación representada en la Fig.26. (Comparar con los casos físicos ilustrados por las Figs.5, 18, 21 y 24).....	246
28	Campo eléctrico y conductividad eléctrica. Variación de los cocientes entre el campo eléctrico E , la conductividad eléctrica σ y la cantidad $E_0 = (8\pi P)^{1/2}$ y la conductividad eléctrica del plasma σ_0 , respectivamente. Los parámetros del plasma y de la zona neutra son los correspondientes al caso presentado en la Fig.26. (Comparar esta situación con las presentadas en las Figs. 13, 19, 22 y 25).....	247
29	Coefficientes de ionización y recombinación.	

	Variación de los coeficientes de ionización I_s ($s = 2,3$) y recombinación α_s , relativa a los valores iniciales I^0 y α^0 para el coeficiente de ionización de las partículas livianas, y el coeficiente de recombinación, respectivamente; para un plasma de deuterio con silicio como gas neutro, y con las mismas densidades y temperaturas que en la Fig.26. Se incluye el efecto de separación de cargas.(Comparar esta situación física con la representada en la Fig.8).....	248
30	Densidades de partículas cargadas. Variación de los cocientes entre las densidades n_s de cada especie cargada ($s = 1,2,3$) y la densidad n_0 del plasma. La situación representada corresponde a una interfase formada entre un plasma de deuterio totalmente ionizado, con densidad $n_0 = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ y temperatura $T_0 = 25 \text{ eV}$, y oxígeno como gas neutro a temperatura $T_g = 0.17 \text{ eV}$. No se incluye el efecto de separación de cargas. (Comparar con el caso físico ilustrado por las Figs.4 y 5)..	249
31	Densidades de partículas neutras. Variación de los cocientes entre las densidades n_s de cada especie neutra ($s = 4,5$) presente en la interfase plasma-gas neutro, y la densidad n_0 del plasma. El caso físico representado es el mismo que el de la Fig.30. (Comparar con la situación presentada en la Fig.6).....	250
32	Densidades de partículas neutras. Detalle de la situación representada en la Fig.31.	

	(Comparar con el caso presentado en la Fig.7).....	251
33	Coefficientes de ionización y recombinación. Variación de los coeficientes de ionización I_s ($s = 2,3$) y recombinación α_s , relativa a los valores iniciales I^0 y α^0 para el coeficiente de ionización de las partículas livianas, y el coeficiente de recombinación, para un plasma de deuterio, con oxígeno como gas neutro y las mismas densidades y temperaturas que en la Fig.8, pero sin incluir el efecto de separación de cargas.(Comparar esta situación con las representadas en las Figs.8 y 29).....	252
34	Coefficientes de ionización y recombinación. Detalle de la situación representada en la Fig.33. Se representa la variación de los coeficientes de ionización I_s ($s = 2,3$) relativa al valor inicial I^0 del coeficiente de ionización de las partículas livianas. (Comparar esta situación con los casos de las Figs.8 y 29).....	253
35	Presiones de partículas cargadas. Se representan los cocientes entre las presiones $n_s T$ de cada especie cargada ($s = 1,2,3$) y la constante P . La situación física es la misma que la presentada en la Fig.30. (Comparar con el caso ilustrado por las Figs.9 y 10).....	254
36	Presiones de partículas neutras. Representación de los cocientes entre las presiones $n_s T$ de cada especie neutra ($s = 4,5$) y la constante P , para el mismo caso físico que en la	

	Fig.35. (Comparar con la situación presentada en la Fig.11).....	255
37	Presiones de partículas neutras.	
	Detalle de la situación representada en la Fig.36. (Comparar con el caso de la Fig.12).....	256
38	Conductividades térmicas y eléctrica.	
	Variación de las conductividades térmicas total κ , y de cada especie cargada κ_s , ($s = 1,2,3$) y de la conductividad eléctrica σ , relativa a la conductividad térmica total κ_0 y la conductividad eléctrica σ_0 , ambas calculadas en el plasma. La situación representada corresponde al mismo caso físico que describe la Fig.30. (Comparar con Fig.14).....	257
39	Conductividades térmicas.	
	Contribución de las especies neutras a la conductividad térmica total, relativa al valor κ_0 . Comparar con la figura anterior. (Comparar esta situación con la representada en la Fig.15).....	258
40	Conductividades térmicas.	
	Detalle de la situación representada en la Fig.39.	259
41	Balance de energía.	
	Contribución de los términos asociados al movimiento macroscópico de las partículas ($Tn_s v_s$) en la ecuación para el balance de energía (IV.55), y de los efectos de conducción térmica ($\kappa dT/dx$), relativa al valor de la constante Q . El caso físico representado corresponde al de la Fig.30. (Comparar con la situación de la Fig.16).....	260

I. INTRODUCCION

En la última década, debido al avance de las investigaciones en fusión nuclear, el tema de la física de la interacción plasma-pared, ha adquirido un desarrollo extraordinario (cuando se lo compara con la década precedente) que se manifiesta en el creciente interés en el estudio de los procesos involucrados en ella. La construcción de las grandes máquinas como el JET de la Comunidad Europea o el TFTR de los Estados Unidos, han hecho necesario una mayor concentración de esfuerzos en el tema. Un gran proyecto experimental de carácter internacional, el TEXTOR, que se realiza en Jülich¹, Alemania Federal, está dedicado específicamente al análisis de los problemas de pared y contaminación, en una configuración tipo tokamak. Asimismo, dado el desarrollo de los primeros proyectos de reactor de fusión prototipo, como el INTOR, el problema de la interacción plasma-pared se ha convertido en una cuestión crítica².

En los conceptos de fusión por confinamiento magnético la atención está dirigida al régimen de densidad (intermedio, $n \approx 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) esperado para un reactor. La literatura es muy abundante¹⁻⁶, y merece señalarse la importante reseña de G.M. Mc Cracken y P.E. Stott⁷. Sin embargo, en otros experimentos de física del plasma, como el Z-pinch denso, el plasma focus, los llamados "imploding liners", así como una variedad de experimentos con ondas de choque, la densidad es cuatro o cinco órdenes de magnitud superior a la mencionada. El modelo que se presentará en este trabajo es particularmente apropiado para el estudio de las caracterís-

ticas de la interacción plasma-pared correspondientes a este régimen. En el otro extremo, para bajas densidades, se encuentran las naturales extensiones de la clásica teoría de la vaina sin colisiones^{8,9}.

Para un plasma caliente como los que se investigan en fusión nuclear, el confinamiento magnético no es perfecto. Las partículas escapan a través de las líneas de campo magnético impactando sobre las paredes que rodean al plasma. Ellas son recicladas, en parte, desde la pared mediante "backscattering" y liberación de átomos del gas previamente ocluido en el material de la pared. Al no existir equilibrio térmico entre el plasma y las paredes sólidas, la interacción plasma-pared debe ser explicada en términos de los distintos procesos atómicos que tienen lugar en la zona adyacente a la pared. Mientras que el "backscattering" de partículas es razonablemente entendido, los procesos de atrapamiento de partículas, difusión y liberación de átomos de un gas desde la pared, son más difíciles de describir ya que ellos dependen de muchos parámetros que incluyen la historia de la pared sólida y su temperatura.

Si se desea mantener un gas no ionizado a una dada densidad, bastará con encerrarlo en un recipiente de paredes sólidas. Las superficies de estas paredes representan las condiciones de contorno para el gas actuando como reflectoras de las partículas. Las superficies actuarán además como fuente o sumidero de calor. En el caso de paredes razonablemente limpias y con las cuales el gas no reacciona químicamente, otros efectos relacionados con la emisión o absorción de partículas tendrán menor importancia.

Cuando, en cambio, se desea confinar un plasma de baja temperatura, también puede encerrárselo entre las paredes sólidas de un recipiente. En este caso, las superficies de las paredes no podrán considerarse como un "espejo" para las partículas del plasma en lo que se refiere a las colisiones de éstas con el recipiente. En casi todos los casos las velocidades electrónicas, y por lo tanto los flujos de electrones desde el plasma hacia la pared, son mayores que los correspondientes a los iones. En el equilibrio, se forma una vaina de carga espacial entre el plasma y la pared⁶⁻¹¹. Es de esperar que la existencia de esta vaina modifique la cantidad de energía que las partículas del plasma depositan sobre la pared. En este sentido, un modelo que pretenda explicar el comportamiento de la transición plasma-pared, deberá poner de manifiesto esta circunstancia.

Al confinar un plasma caliente, con temperaturas iónicas desde 1 a 20 keV, ya no es posible pretender un confinamiento simple mediante paredes sólidas. La energía que se depositaría en la superficie de las mismas resultaría demasiado alta, la pared se evaporaría y el plasma se enfriaría considerablemente. Un intento por reducir el contacto del plasma con las paredes, consiste en aplicar un campo magnético fuerte paralelo a las mismas, como se hace en los experimentos del tipo tokamak y de espejos magnéticos. En este contexto, la situación teórica ideal consiste en el tratamiento de un plasma confinado magnéticamente en forma perfecta, rodeado por una región de alto vacío que lo separa de las paredes. Sin embargo, un campo magnético no puede confinar perfectamente a las partículas. La difusión de

partículas en la dirección perpendicular al campo magnético, se reduce sólo en un factor de 10^3 a 10^4 comparado con las situaciones correspondientes a la dirección paralela al campo o en ausencia del mismo. Aún en plasmas "confinados magnéticamente", el confinamiento de las partículas es finalmente influenciado por las paredes que lo contienen. En las actuales configuraciones del tipo tokamak, todas las partículas del plasma difunden desde el plasma, tocan la llamada primera pared y las mismas partículas, o bien otras, regresan hacia el plasma, más de diez veces, en promedio, durante cada descarga¹². En este proceso de reciclaje se desarrolla un estrato de gas parcialmente ionizado, del orden de 10^{-4} cm de espesor, que recubre las paredes. La existencia y conformación de esta transición, resultan esenciales para determinar el tipo de descarga obtenida.

Generalmente, en las diferentes áreas de las paredes expuestas al contacto con un plasma, pueden predominar distintos procesos en cada una de ellas, las cuales pueden diferir en descargas sucesivas o para distintos tipos de descargas. Para una acabada comprensión de la interacción plasma-pared, se requiere una mayor investigación de la zona adyacente a la pared que actúa como transición entre ella y el plasma. Los datos disponibles permiten, a veces, una explicación cualitativa de algunas observaciones realizadas en los actuales experimentos. Sin embargo, una descripción cuantitativa de la interacción plasma-pared, imprescindible para el diseño de futuras máquinas, ha sido encarada solamente para algunos procesos particulares como los de reciclaje¹³⁻¹⁵. El conocimiento actual sobre la interacción

plasma-pared ha sido reseñado en varias publicaciones^{7, 16-27} en congresos y conferencias^{3, 22-24}.

Otra de las formas de evitar que un plasma de alta temperatura entre en contacto con una pared, además del empleo de un fuerte campo magnético paralelo a la misma, es la utilización de un gas frío que se interponga entre el plasma y la pared. Esta presencia de un "gas blanket" o "plasma blanket"²³⁻⁴⁵ alrededor de un plasma confinado magnéticamente, puede cumplir dos funciones benéficas. Una de ellas es la formación de un estrato de plasma con temperaturas no mayores que algunos eV. Tal estrato de espesor d , mayor que el camino libre medio para intercambio de carga con los neutros de más alta energía que puedan crearse en el plasma, (para el cual se tiene típicamente $nd \gtrsim 10^{15} \text{ cm}^{-2}$, donde n es la densidad del plasma³⁵) puede actuar como un escudo protector de las paredes de la cámara de descarga, absorbiendo los neutros de alta energía y reduciendo, de esta manera, la cantidad de impurezas que pudieran penetrar en el plasma debido a "sputtering". Este efecto de protección puede ser completado si las propiedades de transporte del escudo son tales que evitan la acumulación, en el interior del plasma, de impurezas originadas en la pared. Por otra parte, el estrato mencionado podría utilizarse para realimentar el plasma de un reactor a través del flujo de iones de deuterio y tritio (desde el "blanket" hacia el plasma) y de partículas α en sentido opuesto, siempre que las propiedades de transporte sean las adecuadas^{33, 40}.

La posible existencia y propiedades de un escudo frío, durante tiempos mayores que los tiempos típicos

de confinamiento de partículas, depende de que los balances de partículas y energía de la descarga posean, o no, soluciones estacionarias, y si ello se cumple, de qué perfiles de densidades del plasma, de las impurezas, y de la temperatura resultan. Un análisis teórico del problema requiere entonces, el conocimiento, incompleto hasta el presente, de los mecanismos principales de transporte en el estrato.

Una forma alternativa de crear las condiciones necesarias de temperatura para obtener reacciones de fusión en un gas de deuterio-tritio, para un amplio rango de densidades, lo constituye el calentamiento por ondas de choque⁴⁶. En este sentido, y como parte de los experimentos sobre ondas de choque, el grupo de la Universidad de Columbia, Estados Unidos, obtuvo velocidades de choque del orden de 10^8 cm s⁻¹ generando un plasma caliente ($T \sim 860$ eV) con densidades $\sim 10^{16}$ cm⁻³. Los resultados de los estudios sobre un posible ciclo de fusión basado en el concepto de calentamiento por ondas de choque, fue publicado por este grupo en 1973⁴⁷. En este tipo de experimentos se forma un pistón magnético que conduce una onda de choque en la dirección axial, entre dos cilindros metálicos coaxiales. Esta onda altamente ionizante crea un plasma denso caliente que posee un campo magnético azimutal. La onda de choque es reflejada en la tapa del extremo de los cilindros y se propaga a través del plasma calentándolo y comprimiéndolo. Mediante la aplicación de intensos espejos magnéticos el plasma puede ser atrapado en el volumen coaxial del extremo de los cilindros. De esta manera, el plasma queda confinado axialmente por la tapa del tubo de choque, y radialmente por paredes cilin-

dricas metálicas. En esta forma de confinamiento mediante paredes sólidas, el plasma caliente entra en contacto con superficies metálicas frías, formándose un estrato que ayuda a aislarlo de la pared. Debido a la alta densidad del plasma, la pérdida de energía mediante intercambio de carga es pequeña^{34, 38, 48}. La física de esta forma de confinamiento presenta ciertos efectos interesantes. A medida que el estrato adyacente a las paredes se enfría, se propaga una onda magnetosónica hacia el interior del plasma. Se crea, así, una presión espacialmente uniforme que varía con el tiempo. En respuesta a estas señales magnetosónicas el plasma realiza movimientos convectivos hacia la pared. Este movimiento produce un campo eléctrico y las correspondientes corrientes en el plasma, las cuales producen, a su vez, un campo magnético que impide el movimiento hacia las paredes. El campo magnético reduce la transferencia de calor hacia las paredes metálicas. Este efecto debido al enfriamiento del estrato que recubre las paredes, ha sido estudiado analíticamente y numéricamente por M. S. Chu⁴⁹, comparando ambas soluciones para el comportamiento dinámico del plasma. Chu evalúa también, la energía total por unidad de área que se escapa hacia la pared.

Además de la importancia que reviste el contacto de un plasma con las paredes que lo contienen, y toda la física que deriva de ello, el efecto de la interacción plasma-pared es relevante para interpretar las mediciones realizadas con sondas, en todos los experimentos donde se crea una lámina de corriente por medio de una descarga en un gas. Para los experimentos del tipo plasma focus, se ha mos-

trado que el tiempo de formación de una zona de transición, formada con el material evaporado de la pared de la sonda, es menor que el tiempo de relajación de los iones en el plasma y que el tiempo que tarda en pasar la lámina de corriente por la posición de la sonda¹¹. Uno de los mayores inconvenientes en toda medición con sondas es la contaminación y enfriamiento del plasma debido a la evaporación del material aislante que cubre el instrumento de medición. En el caso particular de las sondas magnéticas, otro problema serio es la posible distorsión, y atenuación, del campo magnético debido a su difusión a través de la zona compuesta por el material evaporado⁵⁰.

La difusión del campo magnético del plasma depende de la evolución de la interfase plasma-gas neutro, que es una región con temperatura y conductividad bajas. El enfriamiento de esta región favorece la difusión del campo, pero la duración del proceso depende, también, del espesor de la transición. Aún no se dispone de una teoría que permita describir, en forma combinada, la evolución de la interfase y del campo magnético, y por lo tanto, no existe fórmula alguna que permita corregir las mediciones realizadas. No obstante, quien esto escribe, ha participado de trabajos que permitieron estimar el tiempo de evaporación de la superficie de la sonda¹¹, y dar una expresión para la señal de campo magnético medida⁵⁰. En todos los casos es de fundamental importancia el estudio del comportamiento de la transición plasma-pared.

De la reseña hasta aquí presentada, se desprende que para el estudio teórico de las propiedades de la

interacción plasma-pared, con las características propias de cada experimento en particular, resulta imprescindible conocer el comportamiento de una interfase plasma-gas neutro. La influencia de esta región sobre el plasma puede sintetizarse diciendo que:

- La interfase plasma-gas neutro actúa como sumidero y fuente de iones de hidrógeno, o deuterio, que forman el plasma, determinando el balance de los mismos.
- Actúa como fuente y sumidero de electrones.
- Actúa como fuente y sumidero de impurezas, es decir, de átomos del gas que se dirigen hacia el plasma, y sus iones correspondientes, y los neutros originados en los iones que provienen del plasma.

Dentro de este marco de referencia se ha elaborado un modelo que permite estudiar el estado estacionario de una interfase plasma-gas neutro para una geometría plana. Esta región de transición se establece entre un plasma totalmente ionizado, con densidad y temperatura conocidas, y un gas frío totalmente neutro. Como paso previo a la presentación formal del modelo, se da en el capítulo II una introducción a los plasmas parcialmente ionizados, brindando los conceptos necesarios para plantear el modelo, junto con una bibliografía que puede consultar el lector interesado en profundizar el tema. El capítulo III expresa, en forma general, las relaciones que existen entre las variables macroscópicas de cada especie presente en el plasma. Estas relaciones son aplicadas, luego, a la descripción de una mezcla de tres componentes (electrones, iones y neutros de la misma especie) y son tomadas como base para la descrip-

ción de un plasma de múltiples especies, que constituye la base del modelo presentado en este trabajo. En el capítulo IV se brinda una descripción macroscópica de la interfase, mediante el empleo de cinco fluidos (electrones, iones livianos que provienen del plasma, iones pesados originados en la ionización de átomos del gas frío y los neutros correspondientes) para una situación colisional, donde la ionización por impacto electrónico y la recombinación de tres cuerpos son los mecanismos dominantes del balance de partículas. El modelo contempla la posibilidad de la existencia de un campo eléctrico debido a separación de cargas. Este capítulo incluye, además, una breve reseña de trabajos previos sobre el tema, que son antecedentes inmediatos del presente trabajo. En el capítulo siguiente se discuten los resultados numéricos que permiten obtener las densidades de todas las partículas, el perfil de temperatura y la variación de las conductividades térmica y eléctrica en cada punto de la zona de transición. Se ha puesto especial énfasis en plasmas de alta densidad ($> 10^{17} \text{ cm}^{-3}$) al efectuar los cálculos numéricos. En este capítulo V se brinda, además, la proporción de la densidad de energía asociada con los movimientos de difusión de las partículas, que superando la interfase alcanza la zona neutra. El empleo del modelo de cinco fluidos para calcular la conductividad eléctrica, de la zona de transición, es el objetivo del capítulo VI. En él se determina, además, el valor $((\int_{x_1}^{x_2} x^2 dx) / x_{12})$ para evaluar la atenuación, o distorsión, ya que tal valor aparece en la expresión del tiempo que tarda el campo magnético del plasma en difundir a través de una interfase plasma-gas neutro de

espesor x_{12} . Por último, se dan las conclusiones de todo el trabajo realizado.

II. PLASMAS PARCIALMENTE IONIZADOS.

II.1.- Características generales y principales interacciones entre las partículas que componen un plasma parcialmente ionizado.

A temperatura ambiente la mayoría de los gases son esencialmente no ionizados, en tal caso, las principales partículas que los constituyen son átomos eléctricamente neutros o moléculas. La energía cinética aleatoria de dichas partículas es pequeña comparada con la energía de ligadura de los electrones de la capa más externa, y la estructura electrónica interna de las partículas no es alterada por colisiones. Sin embargo, a altas temperaturas, las colisiones pueden ser suficientemente energéticas para provocar la ruptura de la estructura interna de las partículas y, en especial, puede resultar en la producción de iones y electrones libres. Las temperaturas más bajas a las cuales un gas exhibe un grado de ionización significativo depende en forma crítica del tipo de átomo o molécula, como así también de la presión.

Desde un punto de vista fenomenológico, un gas ionizado se distingue, primariamente, de los gases a temperatura ambiente por su capacidad de conducir electricidad. En contraste con un gas no ionizado, dicho gas, al igual que un conductor sólido, es capaz de interactuar fuertemente con campos eléctricos y magnéticos. Esta posibilidad de acople entre fluidos y fuerzas electromagnéticas abre la puerta a una vasta galería de nuevos fenómenos físicos. La

importancia de esta relación fue reconocida por primera vez en astrofísica, hace ya unos setenta años, y sentó las bases para la explicación de muchos fenómenos celestes.

A temperaturas del orden de $100,000,000 \text{ }^\circ\text{K}$ ($> 8.0 \text{ keV}$) requeridas para la fusión controlada, los gases se encuentran totalmente ionizados, y las especies más simples como hidrógeno y helio han perdido totalmente sus electrones. Las partículas de estos gases carecen de estructura atómica e interactúan entre sí mediante fuerzas de leyes simples. En este sentido, la descripción de un gas totalmente ionizado se simplifica considerablemente si se compara con la situación más general^{51, 52}.

Las investigaciones sobre los gases a temperaturas inferiores a los $20,000 \text{ }^\circ\text{K}$ (1.72 eV), conciernen a los plasmas parcialmente ionizados, constituidos por electrones, iones y especies neutras. Pueden identificarse seis tipos de partículas "básicas" que generalmente se encuentran presentes en un gas parcialmente ionizado. Ellas son⁵³ : fotón, electrón, átomo (o molécula) en el nivel fundamental, átomo (o molécula) excitado, ion (atómico o molecular) positivo, ion (atómico o molecular) negativo. Las primeras dos clases de partículas carecen de estructura. Un fotón puede transportar energía, dependiendo de su frecuencia ν , en una cantidad $E_\nu = h\nu$, donde h es la constante de Planck. La energía de un electrón libre depende de su velocidad de traslación v ; entonces, $E_e = m_e v^2 / 2$, con m_e la masa del electrón.

Debido a que los átomos y moléculas tienen estructura interna, ellos pueden existir en una gran varie-

dad de estados de energía. Estos estados pueden ordenarse en forma creciente según su energía y se acostumbra representar a los mismos mediante los conocidos diagramas de energía, llamando nivel fundamental o nivel 1 al de menor energía. El nivel de mínima energía, por encima del fundamental, que corresponde a un electrón libre y a un ion libre, recibe el nombre de límite de la serie de niveles y define la energía de ionización E_i . (La energía de ionización del nivel k -ésimo se escribirá $E_{k,i}$, y como notación equivalente puede usarse $E_{i,k} \equiv E_i$). Como todas las energías son posibles para dos partículas libres, dependiendo de los valores relativos de sus energías cinéticas, la región de energía que excede el valor E_i es denominado "continuo".

Los diferentes niveles de energía de un átomo pueden ser considerados, en forma clásica, como diferentes arreglos de electrones. El número de estos arreglos, o más precisamente, estados cuánticos, con un mismo nivel de energía, es llamado degeneración o peso estadístico del nivel en cuestión y acostumbra representarse mediante g_1, g_2 , etc. Para mayor información sobre detalles de la estructura atómica, pueden consultarse, por ejemplo, las tablas preparadas por C. E. Moore⁵⁴.

Para una molécula, cada arreglo electrónico puede hallarse en algún estado vibracional, y cada estado electrónico-vibracional podrá tener un estado rotacional entre varios. La representación de los niveles de energía de una molécula puede convertirse en un asunto complicado, pero, en forma esquemática, se utilizan los mismos diagramas de niveles que para los átomos. La degeneración de los nive-

les de energía molecular se definen en forma similar a la atómica.

Si se restringe la discusión a los átomos, entonces, resulta conveniente pensar en los distintos niveles de energía como las diferentes órbitas correspondientes a un electrón ligado en particular. Este electrón se encuentra usualmente en la capa más externa, y recibe el nombre de electrón óptico. En algunas circunstancias puede existir, en forma simultánea, excitación correspondiente a dos electrones ligados; esto corresponde a la llamada excitación dielectrónica. A un estado dielectrónico, o estado correspondiente a la excitación de un electrón de una capa interna, puede corresponderle un nivel de energía del continuo, en cuyo caso tal estado es inestable. Un átomo en un estado excitado decaerá, en forma espontánea, a un estado de energía inferior, con la emisión de un fotón en un tiempo del orden de 10^{-8} s. Algunos estados tienen una vida más prolongada, en cuyo caso reciben el nombre de metaestables.

Los estados de iones positivos, sean atómicos o moleculares, también podrán describirse en términos de los diagramas de niveles de energía, siendo válida la discusión precedente. Para un átomo una sola vez ionizado, el límite de la serie corresponde ahora a la creación de un átomo doblemente ionizado, y así siguiendo. Para ciertos átomos y moléculas, en particular para aquellos con su capa externa casi completa, puede ocurrir que un electrón se ligue al mismo para formar un ion negativo. El diagrama de niveles para un ion negativo consiste en el estado fundamental y el límite de la serie. En este caso la diferencia de energías

es llamada afinidad electrónica.

A medida que dos partículas, inicialmente separadas, se aproximan una a la otra, algún tipo de interacción tendrá lugar entre ellas. Si después de la interacción se verifica la ocurrencia de algún cambio, en principio medible, se dirá que ha tenido lugar una colisión^{53, 55}. Si no se modifican las energías internas ni las identidades de las partículas, se trata de una colisión elástica^{53, 55-57}. En este tipo de colisiones las partículas modifican las direcciones de sus movimientos, pero se conservan los valores iniciales totales de cantidad de movimiento y energía. Cualquier otro tipo de colisión se agrupa bajo el rótulo de inelástica^{53, 55, 58-60}.

Es intención de este capítulo focalizar la atención en algunos aspectos de los plasmas en que predominan las colisiones, situación propia de aquéllos parcialmente ionizados. En tal sentido, el concepto de sección eficaz, que provee la descripción cuantitativa básica de un proceso microscópico, se considerará conocido y sólo se discutirán algunos conceptos asociados, como la frecuencia de colisiones y el camino libre medio, en función de su empleo en el cálculo de los coeficientes de transporte. Para una información un poco más detallada se remite al lector al apéndice A y a las referencias correspondientes.

Para relacionar una propiedad macroscópica de un plasma, en un modo riguroso, con los procesos microscópicos que en él están ocurriendo, es necesario tener en cuenta las distribuciones de velocidades de las partículas en el gas. Este procedimiento será ilustrado utilizando el cálculo

de velocidades macroscópicas medias que permiten consideraciones de tipo hidrodinámico. Los resultados así obtenidos, son utilizados para hallar relaciones aproximadas para los coeficientes de transporte, empleando convenientes reglas de mezclas.

Debe tenerse presente que, además de los procesos mencionados (correspondientes a interacciones entre las partículas de la materia) siempre tiene lugar la interacción de la radiación con la materia. Si bien el tratamiento de los fenómenos radiactivos escapa del marco del presente trabajo, puede decirse que, de acuerdo con la teoría cuántica, un campo de radiación se considera, en muchos aspectos, asimilable a un conjunto de entidades semejantes a partículas llamadas cuantos o fotones. Resulta conveniente emplear este cuadro, a fin de explotar las analogías entre la descripción de los fenómenos radiactivos y las consideraciones familiares sobre partículas^{70, 71}. Al adoptar esta aproximación no deberá olvidarse que en algunas circunstancias existen diferencias esenciales.

Cuando una partícula campo es irradiada por un haz de fotones, éstos pueden interactuar con la partícula en alguna forma entre muchas posibles. Las principales clases de interacción son: (1) absorción y emisión inducida, y (2) "scattering". Cualquier proceso radiactivo particular p , que involucra a una partícula campo puede describirse mediante una sección eficaz $\sigma_{\nu}^{(p)}$, en completa analogía con la sección eficaz para procesos colisionales entre partículas materiales. La dependencia de las secciones eficaces radiactivas de la frecuencia ν , ω (o de la energía del fotón $h\nu$, o

$\pi\omega$) es análoga a la dependencia de las secciones eficaces de la velocidad relativa (o energía cinética relativa $E = m_a b v^2 / 2$)

Absorción y emisión son procesos inversos y se encuentran relacionados mediante el principio de balance detallado. Es por ello que cualquier enfoque de los procesos radiactivos puede desarrollarse en base a la descripción de uno de los dos fenómenos, ya que es inmediata la relación con su inverso. Así, si un haz de radiación incide sobre una partícula campo, la distribución de la radiación transmitida exhibe (1) absorción de línea, o bien (2) absorción continua⁷⁰⁻⁷³.

De acuerdo a la teoría cuántica, la emisión y absorción para un átomo, constituyen cada una un proceso cuántico que involucra una etapa. Por el contrario, el "scattering" por un átomo es un único proceso cuántico que comprende dos etapas. El proceso de "scattering" consiste en la absorción de un fotón con cantidad de movimiento inicial $h\nu/c$ y la emisión simultánea de un fotón con cantidad de movimiento final $h\nu'/c$. En general, el proceso de "scattering" no es lo mismo que un proceso de absorción independiente seguido de un proceso de emisión independiente. Hasta cierto punto, el "scattering" de fotones por los átomos es análogo a la colisión de dos partículas: las direcciones de las partículas son modificadas por la colisión pero los estados internos pueden, o no, ser modificados. Dentro de los procesos de "scattering" pueden distinguirse los llamados procesos resonantes y los no resonantes. Con el nombre de procesos resonantes se indica el "scattering" de frecuencias que son removidas de cualquiera de las frecuencias ν_{ki} de las tran-

siciones atómicas. El "scattering" no resonante puede ocurrir a energías del fotón que sean comparables, o inferiores, a las energías características de ligadura del electrón, o bien a energías que excedan considerablemente las energías de ligadura. Estos procesos son discutidos ampliamente por H. R. Griem⁷¹ y R. W. Ditchburn⁷⁴.

Todos los procesos radiactivos que han sido mencionados, son caracterizados por secciones eficaces, caminos libres medios y tasas de reacción para cada proceso en particular. Es por ello que la importancia relativa de estos fenómenos frente a los distintos tipos de colisiones entre las partículas, puede estimarse comparando los mencionados parámetros. Ejemplos de este tipo de fórmulas pueden encontrarse en las referencias citadas⁷⁰⁻⁷⁴.

En muchas situaciones de interés práctico, los plasmas parcialmente ionizados no se encuentran en un estado de equilibrio termodinámico total. Sin embargo, las relaciones disponibles para la descripción de un plasma en dicho estado idealizado, resultan extremadamente útiles para estimar aproximadamente la composición del plasma y para describir aquellos plasmas en los que puedan existir formas "limitadas" de equilibrio: equilibrio termodinámico local. Estas relaciones son utilizadas para aplicar el método de balance detallado, que permite relacionar la ionización por impacto electrónico con su proceso inverso, la recombinación de tres cuerpos.

Por último, y debido a que la gran mayoría de los experimentos en física del plasma utilizan al hidrógeno, o sus isótopos, como gas de llenado, el lector interesado

encontrará en el apéndice B, una reseña de los principales procesos que tienen lugar en esos gases.

II.2.- Funciones de distribución y cálculo de valores promedio.

El estado de un plasma puede especificarse mediante las funciones de distribución $f_a(t, r, v)$ que caracterizan cada especie de partícula que lo compone. Estas funciones describen la densidad de partículas de la clase a , en el instante t y en el punto r, v , del espacio de fase; la cantidad $f_a(t, r, v) d^3r d^3v$ representará, entonces, el número de partículas en el elemento de volumen $d^3r d^3v$, del espacio de seis dimensiones. En el más simple de los casos, el plasma estará compuesto de electrones ($a=e$) y una única especie iónica ($a=i$), tal es el caso de un plasma "simple" totalmente ionizado⁵². Un plasma parcialmente ionizado representa una situación más complicada, ya que además de poder existir más de una especie iónica, siempre existen partículas neutras ($a=n$) como átomos, moléculas, átomos excitados, etc. El comportamiento del plasma se describe mediante un sistema de ecuaciones cinéticas (ecuaciones de Boltzmann) de la forma^{52, 75, 76}:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\partial (v_j f_a)}{\partial x_j} - \frac{\partial (F_{aj} f_a / m_a)}{\partial v_j} = C_a \quad , \quad (II.1)$$

donde F_a es la fuerza que actúa sobre una partícula del tipo a , ubicada en la posición r con velocidad v . Para las partículas de carga e_a en un campo eléctrico E y un campo magné-

tico B, esa fuerza se escribirá

$$F_a = e_a E + e_a (v \times B) / c \quad (II.2)$$

La ecuación cinética no toma en cuenta las fluctuaciones térmicas. F_a representa una fuerza macroscópica promedio sobre un volumen conteniendo un gran número de partículas y sobre tiempos largos comparados con los de colisiones; lo mismo es válido para los campos E y B. La fuerza F_a no incluye a campos y fuerzas microscópicos, los que manifiestan fluctuaciones rápidas debidas al acercamiento, muy próximo, de las partículas. Estos efectos, incluidos genéricamente en las colisiones, son tenidos en cuenta en los términos de colisiones C_a del miembro derecho de la ecuación (II.1).

Cada partícula de la especie a puede interactuar con las de su misma especie y con las restantes partículas del plasma. Entonces, uno debe escribir

$$C_a = \sum_b C_{ab}(f_a, f_b) \quad , \quad (II.3)$$

dando C_{ab} la variación por unidad de tiempo de la función de distribución de las partículas del tipo a, debida a colisiones con las partículas de la clase b. Los términos C_{ab} pueden describir cada tipo de proceso elástico o inelástico, por ejemplo, los átomos excitados son tratados como una "especie" diferente de los no excitados, asignándoseles un subíndice correspondiente. Debe notarse que la ecuación (II.1) no hace referencia explícita a los grados de libertad rotacionales, que pueden llegar a ser importantes si se trabaja

con moléculas. A fin de poder tener en cuenta estos efectos sería necesario introducir una función de distribución que dependiera del momento total M , de la partícula, además de la dependencia en r y v . Formalmente, puede considerarse que el subíndice a incluye la consideración del momento M y de los grados internos de libertad; sin embargo, el tratamiento de los efectos de rotación es sumamente complicado y no será materia de este trabajo. Simplemente se supondrá que los valores promedio que se utilicen han sido promediados sobre la variable de rotación. El término de colisiones para procesos inelásticos es extremadamente complicado y no siempre es posible escribirlo en forma explícita. Por su parte, el término de colisiones para procesos elásticos es de la forma^{52, 75, 76}:

$$C_{ab}(f_a, f_b) = \int \{f_a(v'_a) f_b(v'_b) - f_a(v_a) f_b(v_b)\} v d\sigma d^3v_b. \quad (II.4)$$

Aquí $d\sigma = \sigma(v, \theta) d\Omega$ es la sección eficaz diferencial para "scattering" dentro de un ángulo sólido $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, para colisiones de partículas con velocidad relativa $v = |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|$. Las velocidades primadas son las velocidades de las partículas después de la colisión, y se relacionan con las velocidades \mathbf{v}_a y \mathbf{v}_b mediante las leyes de conservación de la cantidad de movimiento y la energía. El segundo término en la llave de (II.4) refleja la pérdida de partículas del elemento de volumen d^3v_a en el espacio de velocidades alrededor del punto \mathbf{v}_a , debido a las colisiones con las partículas b ; por su parte, el primer término corresponde al flujo de partículas hacia ese volumen elemental. Estrictamente hablando,

la forma de Boltzmann (II.4) para el término de colisiones no es aplicable para las colisiones coulombianas. Esto es consecuencia del hecho que el reemplazo de $d\sigma$ por la sección eficaz de Rutherford conduce a una integral divergente. Sin embargo, introduciendo un corte en la integral, la expresión (II.4) da los mismos resultados que el término de colisiones en la forma de Landau⁷⁵:

$$C_{ab}(f_a, f_b) = -(2\pi\lambda e_a^2 e_b^2 / m_a) \frac{\partial}{\partial v_j} \int \left\{ (f_a(v) / m_b) \frac{\partial}{\partial v'_k} f_b(v') - (f_b(v') / m_a) \frac{\partial}{\partial v_k} f_a(v) \right\} U_{jk} d^3v' \quad (II.5)$$

$$U_{jk} = (u^2 \delta_{jk} - u_j u_k) / u^3 \quad u_j = v_j - v'_j \quad ,$$

donde λ es el logaritmo coulombiano y u representa a la velocidad relativa $v - v'$, indicando las cantidades primadas al tipo de partículas b , y las sin primar a las correspondientes a la especie a .

Ciertas propiedades del término de colisiones pueden deducirse sin conocer su forma explícita. Si se desprecian los procesos que convierten a partículas de una especie en partículas de otra clase (ionización, disociación, etc.), entonces los términos de colisiones satisfacen las condiciones

$$\int C_{ab} d^3v = 0 \quad (II.6)$$

$$\int m_a v C_{ab} d^3v = 0 \quad (II.7)$$

$$\int (m_a v^2 / 2) C_{aa} d^3v = 0 \quad (II.8)$$

La integral (II.6), multiplicada por d^3r , representa la va-

riación del número total de partículas a en un volumen elemental d^3v debido a las colisiones con las partículas de la clase b ; sin embargo, al considerar colisiones elásticas, no ocurre tal cambio y la integral se anula. Las integrales (II.7) y (II.8) representan, respectivamente, las variaciones en la cantidad de movimiento y la energía para la especie a , como resultado de las colisiones entre partículas de la misma especie; pero como la cantidad de movimiento y la energía se conservan en las colisiones de este tipo, dichas integrales también deberán anularse. Para colisiones elásticas entre partículas de especies diferentes, a y b , en las cuales se conservan la cantidad de movimiento y la energía totales, se verifican las relaciones siguientes:

$$\int m_a v C_{ab} d^3v + \int m_b v C_{ba} d^3v = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$\int (m_a v^2 / 2) C_{ab} d^3v + \int (m_b v^2 / 2) C_{ba} d^3v = 0 \quad (\text{II.10})$$

La mecánica estadística obtiene, como resultado general, que las partículas de cualquier gas en equilibrio térmico, son caracterizadas por una función de distribución de velocidades maxwelliana, de la siguiente forma (omitiendo subíndices):

$$f^0 = (n / (2\pi T/m)^{3/2}) \exp(-m(v-V)^2 / 2T) \quad , \quad (\text{II.11})$$

con V la velocidad macroscópica del gas en su conjunto. Cuando la función de distribución f^0 se utiliza en (II.1) el miembro izquierdo de la ecuación cinética se anula y, consecuentemente, cuando se utiliza una distribución maxwelliana

el término de colisiones debe anularse. Más aún, si la función de distribución varía sólo en virtud de las colisiones, puede demostrarse que sin importar cuáles son las condiciones iniciales, la función de distribución deberá tender a una maxwelliana con el transcurso del tiempo; este proceso recibe el nombre de relajación y generalmente ocurre en un tiempo del orden del tiempo medio entre colisiones.

Si existe producción o aniquilación de partículas, la (II.6) deja de ser válida y deberá reemplazarse el miembro derecho por una apropiada fuente de partículas:

$$\int C_{ab} d^3v = \dot{n}_{ab} \quad (II.12)$$

La descripción de un plasma utilizando funciones de distribución, si bien detallada, no siempre es necesaria. Con frecuencia resulta suficiente describir a un plasma en una forma más simplificada, empleando ciertas cantidades promedio como, por ejemplo, el número de partículas de una dada especie por unidad de volumen

$$n_a(t, r) = \int f_a(t, r, v) d^3v \quad (II.13)$$

la velocidad media de dichas partículas

$$V_a(t, r) = \langle v \rangle_a = (1/n_a) \int v f_a(t, r, v) d^3v \quad , \quad (II.14)$$

y la energía media o temperatura. En el equilibrio térmico, esto es, cuando la función de distribución es una maxwelliana, la energía cinética media por partícula $m\langle v^2 \rangle/2$ puede

relacionarse en forma simple con la temperatura; más aún, en aquel sistema de coordenadas en el cual $V = 0$, vale la relación $m\langle v^2 \rangle / 2 = 3T/2$. Si el plasma se encuentra en equilibrio térmico, es posible definir una temperatura introduciendo la cantidad $m\langle v^2 \rangle / 3$ en el sistema de coordenadas con $V = 0$. La temperatura así definida es una función de t , de r , y de cualquiera otra característica macroscópica local del plasma

$$T_a(t, r) = (1/n_a) \int (m_a/3) (v - V_a)^2 f_a(t, r, v) d^3v = m_a \langle (v - V_a)^2 \rangle / 3$$

(II.15)

En general, los parámetros macroscópicos n_a , V_a , y T_a , en un estado fuera de equilibrio, son diferentes para cada una de las distintas especies de partículas. En algunos casos estos parámetros, de significado físico sencillo, son complementados por otros más complicados.

Para obtener una tasa de reacción (o colisión) entre dos especies de partículas que interactúan entre sí, se considera que el plasma está compuesto por una superposición de haces de partículas, de prueba que corresponden a la clase con velocidad v_a . En el marco de referencia de la velocidad del centro de masa del fluido, el número de partículas de prueba por unidad de volumen en los mencionados haces es $dn_a = f_a(v_a) d^3v_a$. Con respecto a una partícula campo de velocidad v_b , cada uno de estos haces de partículas tiene una velocidad $v = v_a - v_b$. El número de haces de partículas incidentes que atraviesan un área unitaria perpendicular a v , por unidad de tiempo, es igual al producto $dn_a v$ (con $v = |v|$). Como el haz tiene la misma dirección que v , la

densidad diferencial de flujo puede escribirse en forma vectorial como

$$d\Gamma_a = (f_a(v_a) d^3v_a) v \quad (II.16)$$

De la definición de sección eficaz resulta que el número de partículas de prueba que sufren los procesos del tipo p, por unidad de tiempo, con una partícula campo es

$$f_a(v_a) d^3v_a v \sigma_{ab}^{(p)}(v)$$

Como existen $f_b(v_b) d^3v_b$ partículas campo por unidad de volumen con velocidades entre v_b y $(v_b + dv_b)$, el número promedio de procesos p, por unidad de tiempo y unidad de volumen entre las partículas de las clases a y b, o tasa diferencial de la reacción para procesos p, es:

$$dR_{ab}^{(p)} = f_a(v_a) f_b(v_b) v \sigma_{ab}^{(p)}(v) d^3v_a d^3v_b \quad (II.17)$$

Entonces, el número total de procesos de la clase p que tienen lugar por unidad de tiempo y unidad de volumen es :

$$R_{ab}^{(p)} = \int \int f_a(v_a) f_b(v_b) v \sigma_{ab}^{(p)}(v) d^3v_a d^3v_b . \quad (II.18)$$

que también puede expresarse:

$$R_{ab}^{(p)} = n_a n_b \left[(1/n_a) \int d^3v_a f_a(v_a) \left((1/n_b) \int d^3v_b f_b(v_b) (v \sigma_{ab}^{(p)}(v)) \right) \right] , \quad (II.19)$$

o bien, normalizando a 1 las funciones de distribución,

$$R_{ab}^{(p)} = n_a n_b \left[\int d^3v_a f_a(v_a) \left(\int d^3v_b f_b(v_b) (v \sigma_{ab}^{(p)}(v)) \right) \right] \quad (\text{II.20})$$

Las integrales en (II.18)-(II.20) no son otra cosa más que el valor promedio de la cantidad $v \sigma_{ab}(v)$. Para procesos que requieren de una energía umbral, es evidente de las expresiones anteriores que el rango de integración sobre las velocidades se reduce a aquellos valores para los cuales $\sigma_{ab}^{(p)} \neq 0$. Cuando las partículas campo son del mismo tipo que las partículas de prueba, los miembros derechos de las ecs. (II.18)-(II.20) deben ser divididos por dos, ya que el cálculo realizado cuenta dos veces cada colisión⁷⁷.

En el caso particular de que tanto f_a como f_b sean funciones maxwellianas de la forma

$$f = (m/2\pi T)^{3/2} \exp(-mv^2/2T) \quad (\text{II.21})$$

para una dada temperatura T , se obtiene, a partir de (II.20) haciendo los reemplazos adecuados⁷⁰,

$$R_{ab}^{(p)} = n_a n_b (m_{ab}/2\pi T)^{3/2} \int v \exp(-m_{ab} v^2/2T) \sigma_{ab}^{(p)}(v) d^3v, \quad (\text{II.22})$$

que corresponde al promedio de la cantidad $v \sigma_{ab}^{(p)}(v)$, con la función de distribución $(m_{ab}/2\pi T)^{3/2} \exp(-m_{ab} v^2/2T)$, como si se tratara el plasma, con partículas a y b , de un medio con una única función de distribución respecto de la ve-

locidad relativa, para el caso maxwelliano⁷⁶. En forma más compacta podrá escribirse

$$R_{ab}^{(p)} = n_a n_b \langle v \sigma_{ab}^{(p)} \rangle \quad (\text{II.23})$$

El factor exponencial que aparece en el integrando de (II.22) refleja la hipótesis de distribución de velocidades maxwellianas para cada especie de partículas involucradas en el proceso p . En ciertas ocasiones esta consideración no resulta apropiada y (II.22) conduce a resultados erróneos. Como ejemplo puede mencionarse el caso de la excitación electrónica, $R_{ab}^{(k^{-1})}$, en un gas que se encuentra a temperatura muy inferior a la correspondiente a la energía umbral. Sólo aquellos electrones con velocidades altas, ubicadas en la cola de la función de distribución, contribuyen a la integral (II.22). Como el proceso de excitación remueve electrones de la cola, puede considerarse que la mayor parte de los electrones son aproximadamente maxwellianos, pero con una distribución diferente para el rango de altas velocidades. Esta situación trae como consecuencia la necesidad de utilizar un factor distinto de aquél que aparece en el integrando de (II.22)

En muchas ocasiones las propiedades de transporte son dominadas por las colisiones elásticas con ángulos de "scattering" grandes. En este contexto, es razonable dirigir la atención hacia la frecuencia de colisiones de transferencia de cantidad de movimiento (definidas en el apéndice A por las ecs. (A.11), (A.12)). Para definir una frecuencia promedio puede tomarse la relación (A.11) y en

virtud de (II.22) y (II.23) , escribir

$$\langle v_{ab} \rangle \equiv n_b \langle v \sigma_{ab} \rangle \quad , \quad (II.24)$$

$$\text{donde } \langle v \sigma_{ab} \rangle \equiv (m_{ab}/2\pi T)^{3/2} \int \exp(-m_{ab}v^2/2T) (v \sigma_1) d^3v \quad (II.25)$$

o bien, integrando sobre el ángulo sólido,

$$= (2/\sqrt{2\pi}) (m_{ab}/T)^{3/2} \int_0^\infty (v \sigma_1) \exp(-m_{ab}v^2/2T) v^2 dv \quad ,$$

y empleando^{75, 76} $g \equiv v/(2T/m_{ab})^{1/2}$,

$$\langle v \sigma_{ab} \rangle = (4/\sqrt{\pi}) (2T/m_{ab})^{1/2} \int_0^\infty (g \sigma_1) \exp(-g^2) g^2 dg \quad , \quad (II.26)$$

haciendo el cambio de variables $x = g^2$, se tiene:

$$\langle v \sigma_{ab} \rangle = (8T/\pi m_{ab})^{1/2} \int_0^\infty x \sigma_1 \exp(-x) dx \quad , \quad (II.27)$$

siendo $(8T/\pi m_{ab})^{1/2} = \langle v \rangle$.

Puede definirse una frecuencia media siguiendo la aproximación de Chapman-Enskog, según la cual se realiza el promedio utilizando un factor de peso que es un cociente de energías:

$$\langle v_{ab} \rangle = \int_0^\infty ((m_{ab}v^2/2)/(3T/2)) v_{ab}(v) f(v) 4\pi v^2 dv. \quad (II.28)$$

Trabajando con la expresión (II.28) se encuentra que es po-

sible escribir

$$\langle v_{ab} \rangle \equiv n_b \langle v \rangle \langle \sigma_{ab} \rangle \quad , \quad (\text{II.29})$$

definiendo para la sección eficaz, un valor promedio dado por la integral

$$\langle \sigma_{ab} \rangle \equiv (2/3) \int_0^\infty x^2 \sigma_1 \exp(-x) dx. \quad (\text{II.30})$$

Resulta evidente de la integral (II.27) y de la definición (II.30), que según la forma elegida para promediar las cantidades de interés, los resultados pueden diferir en factores que superen varias veces la unidad. Con estos resultados, podrá escribirse en una forma más precisa la expresión clásica para el camino libre medio (ver apéndice A):

$$l_a \equiv \langle v \rangle_a / \langle v_a \rangle = V_a / \langle v_a \rangle = (\sum_b (m_a / m_{ab})^{1/2} n_b \langle \sigma_{ab} \rangle)^{-1} . \quad (\text{II.31})$$

II.3.- Propiedades de transporte y reglas de mezclas.

Históricamente, la primera aproximación al problema de relacionar los coeficientes de transporte con las propiedades microscópicas de las partículas que constituyen un gas, se realizó introduciendo el concepto de camino libre medio o, en forma equivalente, el concepto de frecuencia media de colisiones. Esta "teoría del camino libre medio" es deficiente en el sentido que conduce a expresiones en las que intervienen valores promedios de las frecuencias

de colisiones (promediadas sobre las funciones de distribución de las velocidades de las partículas), pero no especifica la manera de realizar tal promedio. La forma en que se calculen los valores promedios requeridos, dará resultados que se apartan en un factor dos o tres de los valores más precisos. Para obtener mayor precisión se deberá utilizar el enfoque más riguroso de la teoría cinética, conduciendo a resultados que no hacen referencia al concepto de camino libre medio. En compensación por la falta de exactitud, en lo que hace a factores numéricos, de la aproximación del camino libre medio, esta forma de obtener los coeficientes de transporte focaliza la atención, en forma más directa, sobre los procesos físicos correspondientes a las propiedades en estudio; además, conduce a fórmulas de fácil utilización.

En esta sección se darán expresiones, cuya deducción puede verse en la literatura corriente^{51, 52, 70, 75-77}, para la viscosidad, conductividad térmica y eléctrica, con apropiados factores que permiten utilizarlas con bastante exactitud, al tiempo que se introduce una regla de mezcla de gran utilidad para la descripción macroscópica de un plasma parcialmente ionizado.

La dependencia funcional del coeficiente de viscosidad, η , de las cantidades macroscópicas de un gas de partículas a , puede escribirse

$$\eta = \sum_a m_a n_a V_a l_a^m \quad (11.32)$$

El camino libre medio l_a^m , correspondiente a colisiones que aleatorizan la cantidad de movimiento, representa el "segmento" efectivo promedio que recorren las partículas a . Es

poco probable que las partículas pesadas sean desviadas de sus trayectorias, en una forma apreciable, como consecuencia de sus colisiones con partículas livianas. Entonces, en relación con el camino libre medio definido por (II.31), tales colisiones deberán descontarse en el cálculo de l_a^m . La frecuencia de colisiones promedio de las partículas de la especie a con las de la clase b, viene dada por (II.29). Como la variación promedio en la cantidad de movimiento de una partícula a que colisiona con partículas b, es m_{ab}/m_a veces la cantidad de movimiento p_a , el número de colisiones por unidad de tiempo, con el cual la cantidad de movimiento de la partícula a es efectivamente aleatorizado, podrá escribirse en la forma $n_b \langle v \rangle \langle \sigma_{ab} \rangle (2m_{ab}/m_b)$. (Introduciéndose el factor 2 para recuperar la forma (II.29) cuando $m_b = m_a$). Luego, la frecuencia de colisiones que aleatorizan la cantidad de movimiento para una partícula a es

$$\langle v_a^m \rangle \equiv \sum_b n_b \langle v \rangle \langle \sigma_{ab} \rangle (2m_{ab}/m_a) \quad (II.33)$$

En el intervalo de tiempo $(\langle v_a^m \rangle)^{-1}$, la partícula del tipo a recorre una distancia $l_a^m = V_a (\langle v_a^m \rangle)^{-1}$ y, en consecuencia,

$$l_a^m = (\sum_b 2(m_{ab}/m_a)^{1/2} n_b \langle \sigma_{ab} \rangle)^{-1} \quad (II.34)$$

Este resultado puede compararse con la forma usual dada en (II.31).

La viscosidad de un gas simple, es decir, constituido sólo por partículas de una misma clase a, se escribe de acuerdo a (II.32) $\eta_a^* \approx m_a n_a V_a l_a$, con $l_a = (\sqrt{2} n_a \langle \sigma_{aa} \rangle)^{-1}$. La viscosidad de una mezcla de gases

puede expresarse en términos de las viscosidades de cada gas puro en la forma

$$\eta = \sum_a (n_a / \sum_b n_b M_{ab}) \eta_a^* \quad , \quad (\text{II.35})$$

donde $M_{ab} = (2m_{ab}/m_a)^{1/2} \langle \sigma_{ab} \rangle / \langle \sigma_{aa} \rangle$ (II.36)

Si bien la ecuación (II.35) se ha obtenido a partir de la relación aproximada (II.32), en la forma en que ha sido escrita tiene una validez independiente del camino seguido para hallarla. Esta fórmula, o regla de mezcla, permite el cálculo de la viscosidad para cualquier mezcla de gases, basada en el conocimiento de las viscosidades de cada gas componente de la mezcla. Para utilizar la (II.35), pueden usarse datos experimentales para las viscosidades de un gas puro, o la forma más exacta⁷⁷ para η_a^* :

$$\eta_a^* = (1/2)m_a n_a V_a l_a \quad (\text{II.37})$$

Las contribuciones de iones y electrones a la suma en (II.34), se ponen de manifiesto empleando un modelo de tres especies para un gas parcialmente ionizado. Si $n_e \approx n_i$ se tiene:

$$l_e^m = ((2+\sqrt{2})n_e \langle \sigma_{ei} \rangle + 2n_n \langle \sigma_{en} \rangle)^{-1} \quad , \quad (\text{II.38})$$

y $l_i^m = (\sqrt{2}n_e \langle \sigma_{ei} \rangle + 2(m_{in}/m_n)^{1/2} n_n \langle \sigma_{in} \rangle)^{-1}$. (II.39)

Las cantidades l_e^m y l_i^m son del mismo orden, por lo tanto, de la relación (II.32) para cada especie, resulta

$$\eta_e / \eta_i = m_e V_e l_e^m / m_i V_i l_i^m \sim (m_e / m_i)^{1/2} \ll 1 \quad (\text{II.40})$$

La contribución de los electrones a la viscosidad total es despreciable. En general, puede decirse que

$$\eta \approx \sum_b m_b n_b V_b l_b^m, \quad (\text{II.41})$$

$$\text{siendo } l_b^m = (\sum_b 2(m_{hb}/m_b)^{1/2} n_b \langle \sigma_{hb} \rangle)^{-1} \quad (\text{II.42})$$

Las sumas que aparecen en (II.41) y (II.42) deben extenderse sobre todas las partículas pesadas. Similar interpretación deberá hacerse para la ecuación (II.35).

En lo que se refiere a la conductividad térmica, se tiene, en forma aproximada, para los electrones y las partículas pesadas, incluyendo a los iones,

$$\kappa_e \approx n_e V_e l_e^m, \quad (\text{II.43})$$

$$\kappa_H \approx \sum_b \kappa_b = \sum_b n_b V_b l_b^m, \quad (\text{II.44})$$

donde l_e^m se calcula de (II.34) y l_b^m viene dado por (II.42). Entonces, la conductividad térmica total para el gas como un todo será, siempre que $T_e = T_b$,

$$\kappa = \kappa_e + \kappa_H = \sum_a \kappa_a \quad (\text{II.45})$$

Como la distancia efectiva que en promedio recorre una partícula entre colisiones es independiente de la propiedad que se transporta, la cantidad l_a^m interviene, también, en las expresiones de la conductividad térmica. A diferencia de lo

que ocurre con la viscosidad, la contribución de los electrones a la conductividad térmica no es despreciable, en general, y es del orden de

$$\kappa_e / \kappa_i \sim (m_i / m_e)^{1/2} \quad (\text{II.46})$$

La conductividad térmica para un gas simple, formado por partículas de la especie a , es de la forma $\kappa_a^* \approx n_a V_a l_a$; entonces, la conductividad térmica para una mezcla de gases se puede escribir mediante una regla de mezcla, en forma totalmente análoga a (II.35), como

$$\kappa = \sum_a (n_a / \sum_b n_b M_{ab}) \kappa_a^* \quad , \quad (\text{II.47})$$

con el factor M_{ab} dado por (II.36). Pueden tenerse en cuenta las energías de rotación y vibración internas, transportadas por moléculas poliatómicas, empleando en (II.47) una fórmula más general para la conductividad térmica de un gas puro,

$$\kappa_a^* = [(15/8)n_a V_a l_a] [(9\gamma_a - 5) / (15(\gamma_a - 1))] \quad , \quad (\text{II.48})$$

donde γ_a es el cociente de calores específicos. El segundo factor en el miembro derecho de (II.48) es la corrección de Eucken para rotación y vibración⁷⁷, para un gas monoatómico $\gamma_a = 5/3$ y este factor es igual a la unidad. El factor $15/8$ refleja, en parte, la correlación entre la velocidad de una partícula y la cantidad de energía de traslación transportada. Con este factor, la conductividad térmica electrónica puede escribirse

$$\kappa_e = 2.4 n_e T_e / m_e \langle v_{eH} \rangle (1 + \langle v_{ei} \rangle / \sqrt{2} \langle v_{eH} \rangle) ,$$

siendo $\langle v_{eH} \rangle = \sum_n \langle v_{en} \rangle$ la frecuencia promedio total de colisiones entre electrones y partículas pesadas.

En lo concerniente a la conductividad eléctrica, las deducciones utilizando el concepto de camino libre medio parten de un caso particular de la ley de Ohm generalizada para gases parcialmente ionizados, $j = \sigma E$, expresando

$$\sigma = e(n_i \mu_i + n_e \mu_e) , \quad (II.49)$$

siendo μ_i , μ_e , las movilidades respectivas de iones y electrones. Es común utilizar la aproximación $n_e \approx n_i$, con lo cual se encuentra que

$$\mu_i = \rho_n \langle v_{en} \rangle \mu_{in} / \rho \langle v_{eH} \rangle + \rho_i \mu_{ie} / \rho , \quad (II.50)$$

donde $\mu_{in} = e/m_{in} \langle v_{in} \rangle ,$

$$\mu_{ie} = e/m_i \langle v_{eH} \rangle ,$$

$$\rho_a = n_a m_a , \quad \rho = \sum_a \rho_a \quad (II.51)$$

y $\mu_e = e/m_e \langle v_{eH} \rangle$

Para las condiciones mencionadas, con $n_e \approx n_i$, se demuestra que

$$\sigma \approx \sigma_e = n_e e^2 / m_e \langle v_{eH} \rangle \quad (II.52)$$

En el caso de plasmas parcialmente ionizados de composición arbitraria, se han realizado cálculos basados en una teoría

más rigurosa, pero sólo en casos límites se obtienen fórmulas relativamente simples. Así, para un plasma débilmente ionizado,

$$\sigma_e = (4\pi n_e e^2 / 3T_e) \int_0^\infty (u_e^4 f_e(u_e) / \nu_{eN}(u_e)) du_e \quad (\text{II.53})$$

donde se ha tomado $u_e = v_e - V_e$. Aquí, $f_e(u_e)$ es la función de distribución maxwelliana para los electrones y

$$\nu_{eN}(u_e) = \sum_n \nu_{en}(u_e)$$

es la frecuencia de colisiones para transferencia de cantidad de movimiento.

De (II.52) se desprende que para un gas con varias especies pesadas, $\langle \nu_{eH} \rangle = \sum_h \langle \nu_{eh} \rangle$, esto sugiere una regla de mezcla de la forma

$$1/\sigma_e = \sum_h (\sigma_{eh})^{-1} \quad (\text{II.54})$$

La teoría de Chapman-Enskog para propiedades de transporte^{76, 78}, supone que los mecanismos que conducen a situaciones de no equilibrio traslacional son tales que los apartamientos de las funciones de distribución, de las expresiones maxwellianas, son pequeños. Esta condición es la justificación macroscópica para la descripción de los fenómenos viscosos, de conducción térmica y difusión, en términos de las propiedades de transporte. Bajo muchas circunstancias, los fenómenos de transporte asociados con las partículas pesadas en un plasma, pueden describirse en forma sa-

tisfactoria por esta teoría desarrollada para mezclas de gases neutros, y los coeficientes de transporte calcularse utilizando métodos clásicos⁷⁶. Si bien es posible utilizar estos métodos para evaluar las propiedades de transporte de los electrones, el resultado de los cálculos es más complicado de lo necesario. En tal sentido, las propiedades de transporte electrónicas se calculan con el grado de exactitud deseado mediante el desarrollo empleando polinomios de Sonine⁷⁰. Estos cálculos incorporan la simplificación asociada con la pequeña masa de los electrones y, por tal motivo, resultan menos complicados que los correspondientes a los cálculos clásicos para una mezcla de gases. No obstante ello, en muchos casos prácticos resulta deseable, o necesario, usar fórmulas aproximadas que puedan evaluarse con un mínimo de esfuerzo numérico.

Considérese, en primer lugar, el cálculo aproximado de la conductividad eléctrica paralela, $\sigma_{e\parallel}$, que se utiliza en ausencia de campo magnético ($\sigma_{e\parallel} = \sigma_e$), o en la dirección paralela al mismo. La expresión más simple es la dada por (II.52). En la práctica, se usan varios métodos para evaluar la frecuencia de colisiones $\langle v_{eH} \rangle$. Las diferentes formas que adopte tal frecuencia corresponden a distintas maneras de promediar la sección eficaz $\langle v_{eH} \rangle$. Si se emplea la expresión bien definida en (II.28) en la relación (II.52) con $\langle v_{eH} \rangle = \sum_b \langle v_{e_b} \rangle$, la conductividad (II.52) coincide con la aproximación de polinomios de Sonine de grado 1. La fórmula (II.52) da un error de un factor del orden de dos en el límite de plasmas totalmente ionizados y, debido a algunas secciones eficaces de colisiones entre electrones y

neutros, un factor quizás mayor en el extremo de plasmas débilmente ionizados. Estas inexactitudes pueden evitarse utilizando la conductividad aproximada $\sigma_{e\parallel}^{(sum)}$, dada por (II.54), reescrita en la forma

$$1/\sigma_{e\parallel}^{(sum)} = 1/\sigma_{en} + 1/\sigma_{ei} \quad (II.55)$$

La ecuación (II.55) se basa en la sugerencia de S. C. Lin, E. L. Resler y A. Kantrowitz⁷⁹ en el sentido que las resistividades asociadas con iones y neutros deberán sumarse, y ha sido empleada recientemente por V. V. Vikhrev y S. I. Braginskii⁸⁰. Si se usa la expresión (II.53) para σ_{en} , aplicada sólo a las especie neutras, y la expresión de Spitzer-Härm⁶¹, considerando iones una sola vez ionizados,

$$\sigma_{e\parallel} = 1.975 n_e e^2 / m_e \langle v_{ei} \rangle \quad (II.56)$$

para σ_{ei} , la conductividad $\sigma_{e\parallel}^{(sum)}$ es necesariamente correcta en ambos límites. En consecuencia, si bien (II.55) es preferible a la ecuación (II.52), $\sigma_{e\parallel}^{(sum)}$ puede dar un error del orden de un factor dos para grados intermedios de ionización (ver Fig. 1).

Existe una regla de mezcla alternativa que conduce a valores más ajustados de $\sigma_{e\parallel}$ sobre todo el rango de ionización. Se trata de la fórmula propuesta por L. S. Frost⁸², en la cual se utiliza la expresión (II.53) con una frecuencia de colisiones electrón-ion modificada, de modo tal que la fórmula resultante se reduce al valor exacto de (II.56) para iones una sola vez ionizados, en el límite de

plasmas totalmente ionizados. La conductividad de Frost, $\sigma_{e\parallel}^F$, está dada por

$$\sigma_{e\parallel}^F = (4\pi n_e e^2 / 3T_e) \int_0^\infty (u_e^4 f_e / \nu^F) du_e \quad , \quad (II.57)$$

con f_e la función de distribución maxwelliana y donde,

$$\nu^F = \sum_n \nu_{en} + 0.476 (8\pi n_i / u_e^2) (m_e / 2T_e)^{1/2} (e^2 / m_e)^2 \lambda \quad (II.58)$$

recordando que λ es el logaritmo coulombiano. La comparación de la contribución iónica a la frecuencia de colisiones ν^F , con la dada por

$$\nu_{ei} = n_i 4\pi (e^2 / m_e)^2 \lambda / (u_e)^3 \quad , \quad (II.59)$$

para colisiones coulombianas, muestra que no varía solamente el factor numérico sino, además, la dependencia según u_e^3 en (II.59) es reemplazada por $(m_e / 2T_e)^{1/2} (u_e)^{-2}$. En realidad, si bien no existe una justificación rigurosa para la fórmula de Frost (II.57), resulta ser más adecuada que la aproximación de polinomios de Sonine de grado doce, $\sigma_{e\parallel}^{(12)}$ para el caso de baja ionización. Para grados de ionización apreciables, donde $\sigma_{e\parallel}^F$ y $\sigma_{e\parallel}^{(12)}$ concuerdan, el desarrollo en polinomios de Sonine converge más rápido.

En relación con la conductividad térmica, no se han desarrollado tantas reglas de mezclas como para la conductividad eléctrica de electrones. Las consideraciones de camino libre medio sugieren que la conductividad térmica $\kappa_{e\parallel}$ debe estar dada, a menos de un factor numérico, por la relación

$$\kappa_{e\parallel} \approx n_e T_e / m_e \langle v_{e\parallel} \rangle \quad (\text{II.60})$$

C. H. Kruger, M. Mitchner y U. Daybelge⁶³ han propuesto reglas de mezclas para los coeficientes $\kappa_{e\parallel}^F$ y ϕ_{\parallel}^F , que son similares a la conductividad de Frost (II.57), con los cuales se construye un valor tipo "Frost", $\kappa_{e\parallel}^F$, en la forma siguiente:

$$\kappa_{e\parallel}^F = \kappa_{e\parallel}^{\prime F} - (\phi_{\parallel}^F)^2 T_e / \sigma_{e\parallel}^F, \quad (\text{II.61})$$

donde,

$$\kappa_{e\parallel}^{\prime F} = (4\pi n_e / 3) \int_0^{\infty} (m_e u_e^2 / 2T_e - 5/2)^2 u_e^4 (v_{\kappa'}^F)^{-1} f_e du_e \quad (\text{II.62})$$

$$y \quad \phi_{\parallel}^F = (4\pi n_e / 3T_e) \int_0^{\infty} (m_e u_e^2 / 2T_e - 5/2) u_e^4 (v_{\phi}^F)^{-1} f_e du_e, \quad (\text{II.63})$$

$$\text{con } v_{\kappa'}^F = \sum_n v_{en} + 1.012 (8\pi n_i / u_e^2) (m_e / 2T_e)^{1/2} (e^2 / m_e)^2 \lambda, \quad (\text{II.64})$$

$$v_{\phi}^F = \sum_n v_{en} + 0.6776 (8\pi n_i / u_e^2) (m_e / 2T_e)^{1/2} (e^2 / m_e)^2 \lambda. \quad (\text{II.65})$$

Tal como ocurriera con la conductividad eléctrica, los valores tipo "Frost" para la conductividad térmica tienen un alto grado de concordancia con los valores exactos. Esto queda ilustrado para el caso particular del argón en la Fig.1. También, para grados de baja ionización los valores de $\kappa_{e\parallel}^F$ son más exactos que la aproximación de grado doce en polinomios de Sonine.

Puede concluirse de lo expuesto hasta aquí, que las reglas de mezclas de tipo Frost son ajustadas a los valores más exactos de los coeficientes de transporte y razonablemente sencillas para usar, por ello resultan preferibles para el cálculo de las propiedades de transporte en ausencia de un campo magnético.

La situación que se plantea al buscar reglas de mezclas en presencia de un campo magnético es más complicada y, en algún sentido, menos satisfactoria. Como resultado de incorporar un parámetro más, la intensidad del campo magnético, se incrementa el número de coeficientes de transporte. Al igual que antes, cuando se requiere un grado limitado de precisión, pueden utilizarse tanto las fórmulas de camino libre medio, como las aproximaciones de orden más bajo en polinomios de Sonine. En las expresiones de camino libre medio, el valor de la componente paralela de la propiedad de transporte se multiplica por $(1 + \beta_e^2)^{-1}$ y por $\beta_e(1 + \beta_e^2)^{-1}$ para obtener las componentes perpendicular y de Hall, respectivamente; siendo $\beta_e = \omega_e / \langle v_{eH} \rangle$ el cociente entre la frecuencia del ciclotrón de electrones y el valor medio $\langle v_{eH} \rangle$. Si bien el tratamiento de plasmas parcialmente ionizados en presencia de un campo magnético escapa del contexto del presente trabajo, puede decirse que para obtener valores más exactos de la conductividad eléctrica existen, al menos, dos métodos disponibles. El primero de ellos describe a la frecuencia de colisiones electrón-neutro mediante una dependencia de la velocidad electrónica según una ley de potencia $\sum_n \nu_{en} \propto (u_e)^{2m}$, con lo cual pueden seguirse los re-

sultados de I. P. Shkarofsky, T. W. Johnston y M. P. Brachynski⁶⁴ obteniendo directamente la aproximación de cuarto orden en polinomios de Sonine. Como en muchos casos esta aproximación resulta suficiente, se tiene que la principal incerteza en este método proviene de la ley de potencia con que se representa a la frecuencia de colisiones. El segundo método, propuesto por S. Schweitzer y M. Mitchner⁶⁵, consiste en una extensión de la regla de Frost a las componentes perpendicular y de Hall de la conductividad eléctrica. Este método incorpora frecuencias efectivas para colisiones electrón-ion, las cuales hacen que las expresiones de las componentes de la conductividad se reduzcan a los valores conocidos en el límite de plasmas totalmente ionizados. Las mencionadas frecuencias dependen de la intensidad del campo magnético y también del orden de la aproximación de Sonine utilizada. En tal sentido, las curvas de Schweitzer y Mitchner se basan en la aproximación de orden tres. Por su parte C. H. Kruger, M. Mitchner y U. Daybelge⁶³, obtienen valores más exactos introduciendo una aproximación de Sonine de orden once y, además, dan fórmulas similares para las conductividades térmicas.

II.4.- Ionización y recombinación.

Para plasmas parcialmente ionizados, es particularmente importante la tasa de reacción correspondiente a la recombinación de electrones. El coeficiente macroscópico de recombinación, α_r , se define mediante la relación

$$dn_e/dt = -\alpha_r n_e n_i \quad (\text{II.66})$$

en ausencia del proceso de ionización, siendo n_i la densidad de iones con los cuales se están recombinando los electrones. La recombinación puede tener lugar a través de alguno de los distintos mecanismos posibles. Si la energía liberada en la recombinación de un electrón, e , y un ion, A^+ , es llevada por un fotón, ϕ , se habla de recombinación radiactiva. Este proceso puede representarse utilizando la ecuación siguiente:



Si la energía de la recombinación incrementa la energía cinética de un tercer cuerpo involucrado en la colisión, se dirá que es una recombinación de tres cuerpos. Como consecuencia de la pequeña masa de los electrones, se acostumbra distinguir los casos en los que el tercer cuerpo es un electrón,



de los casos en los que el tercer cuerpo es otra partícula pesada:

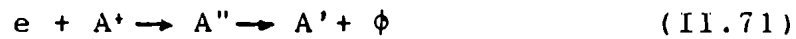


En el caso en que el electrón se recombine con un ion molecular $(AB)^+$, un proceso particularmente efectivo consiste en que la energía de la recombinación se reparta en disociar la molécula y en incrementar la energía cinética de los produc-

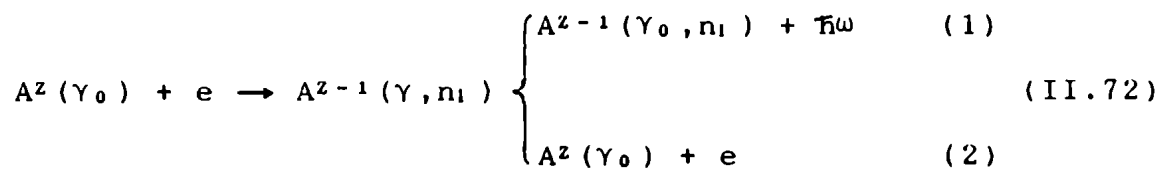
tos resultantes. Este proceso de recombinación disociativa es representado por



Otra forma en la que puede distribuirse la energía excedente de la recombinación es formándose un átomo neutro en el cual dos electrones se encuentran simultáneamente excitados. La energía de ese átomo doblemente excitado es superior al límite de la serie y resulta energéticamente inestable, pero puede estabilizarse emitiendo un fotón correspondiente a la transición a un estado de menor energía. Este proceso es llamado recombinación dielectrónica y se representa por la reacción



En relación con este proceso, puede decirse en forma más general que los estados ionizados $A^{Z-1}(\gamma, n_1)$, formados durante la colisión de un electrón con un ion múltiplemente cargado, $A^Z(\gamma_0)$, decae a través de dos vías⁶⁶:



Aquí Z representa la carga iónica antes de la colisión y γ_0 y γ son los conjuntos de números cuánticos de los estados fundamental y excitado del ion A^Z . El decaimiento sin radiación a través del canal (2) conduce al "scattering" elástico

del electrón sobre el ion. La estabilización radiactiva mediante el canal (1) produce la captura del electrón incidente por el ion, es decir la recombinación, ya que el ion $A^{Z-1}(\gamma_0, n_1)$ con el electrón n_1 excitado, sufre una transición a su estado fundamental después de emitir un segundo fotón. Este tipo de recombinación es, como ya se explicara, la recombinación dielectrónica que involucra transiciones mediante dos electrones. Este tipo de recombinación fue descrito por primera vez por H. S. W. Massey y D. R. Bates⁶⁷ en 1942, sin embargo, recién en 1964 A. Burgess⁶⁸ llevó a cabo cálculos sobre esta recombinación y mostró que la eficiencia de la misma en plasmas de alta temperatura es considerablemente mayor que la de recombinación radiactiva. Entonces, a manera de regla, debe recordarse que la recombinación dielectrónica es el principal mecanismo de recombinación en plasmas de alta temperatura y bajas densidades, de modo que la tasa de recombinación de tres cuerpos (no radiactiva) sea baja. En caso contrario predominará este último proceso.

Si bien los valores de los coeficiente de recombinación para cada proceso dependen de la especie iónica, es posible identificar el orden de magnitud de los α para cada uno de los casos mencionados. La tabla I muestra algunos valores característicos a temperatura ambiente. Los valores de recombinación de tres cuerpos, cuando el tercer cuerpo es una partícula pesada, son tomados de H.S.W. Massey y E. H. S. Burhop⁶⁶, mientras que los valores correspondientes al caso del electrón como tercer cuerpo, se deben a los cálculos de E. Hinnov y J. G. Hirschberg⁶⁹. Por otra parte,

en diversos trabajos se obtienen fórmulas que concuerdan con los datos experimentales para algún rango particular de temperatura. Por ejemplo, para la recombinación radiactiva electrón-ion, R. W. P. McWhirter⁸⁹ da la siguiente fórmula para el rango $1 \text{ eV} < T_e/Z^2 < 15 \text{ eV}$:

$$\alpha_r(Z) = 2.7 \times 10^{-13} Z^2 (T_e)^{-1/2} \quad [\text{cm}^3 \text{s}^{-1}] \quad (\text{II.73})$$

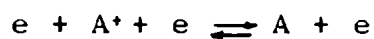
Para la recombinación de tres cuerpos electrón-ion una vez ionizado se podrá utilizar la expresión⁹⁰:

$$\alpha_3 = 8.75 \times 10^{-27} (T_e)^{-4.5} n_e \quad [\text{cm}^3 \text{s}^{-1}] \quad . \quad (\text{II.74})$$

La descripción de los procesos de recombinación en términos de reacciones independientes, representadas por las ecuaciones (II.67)-(II.74), es un enfoque tradicional. Sin embargo, en general, los mencionados procesos pueden estar acoplados. Este acoplamiento ha sido tratado por D. R. Bates, A. E. Kingston y R. W. P. McWhirter⁹¹ para procesos colisionales y radiactivos.

En lo que se refiere al cálculo de la tasa de reacción para los procesos de ionización de partículas, una primera aproximación consiste en emplear el método de balance detallado⁷⁰. El principio de balance detallado se aplica, en rigor, a procesos microscópicos correspondientes a cambios entre estados cuánticos. Sin embargo, el método de balance detallado se aplica, con frecuencia, utilizando tasas de reacciones (valores macroscópicos) para obtener relaciones, de limitada aplicabilidad, entre cantidades que descri-

ben determinados procesos y sus inversos. Esta aproximación es usada en cinética química. Un ejemplo del empleo del método lo constituye su aplicación al proceso de recombinación de tres cuerpos (II.68)



Tal como se discutiera anteriormente, la tasa correspondiente al proceso directo se escribe en términos de un coeficiente de recombinación $\alpha = \delta(T_e) n_e$:

$$R_r = \delta(T_e) n_e^2 n_i \quad (II.75)$$

La tasa de reacción correspondiente al proceso inverso de ionización puede escribirse

$$R_i = I(T_e) n_e n \quad , \quad (II.76)$$

siendo $I(T_e)$ el coeficiente de ionización y n la densidad de partículas A. La forma de escribir R_i se basa en la consideración que el proceso de ionización consiste en una colisión de dos cuerpos y, entonces, debería ser proporcional al producto de las densidades de cada especie involucrada. Usando el método de balance detallado, en condiciones de equilibrio termodinámico local, $R_r = R_i$, y entonces

$$I(T_e) = (n_e n_i / n)_{\text{equil.}} \delta(T_e) \quad , \quad (II.77)$$

donde $(n_e n_i / n)_{\text{equil.}}$ es la función de T_e dada por el miembro derecho de la ecuación

$$(n_e n_i / n) = 2(Z_i / Z) (2\pi m_e T_e / h^2)^{3/2} \exp(-E_i / T_e) \quad , \quad (\text{II.78})$$

que es la ecuación de Saha, donde Z y Z_i son las funciones de partición de la especie neutra y de los iones, h es la constante de Planck y E_i es la energía de ionización. También puede escribirse en la forma

$$(n_e n^+ / n_k) = 2(g_i^+ / g_k) (2\pi m_e T_e / h^2)^{3/2} \exp(-E_{ki} / T_e) \quad (\text{II.79})$$

siendo n^+ la densidad de iones positivos en el nivel fundamental, n_k de las partículas neutras en el nivel k -ésimo, g_i^+ , g_k las degeneraciones de los niveles correspondientes de las partículas mencionadas, y $E_{ki} = |E_i - E_k|$, la diferencia de energías de los niveles respectivos. La ecuación de Saha puede generalizarse en forma inmediata para el caso de partículas con carga múltiple. Escribiendo como supraíndice el estado de ionización, r , entonces, las ecuaciones (II.78) y (II.79) toman la forma

$$(n_e n^{(r+1)} / n^r) = 2(Z^{(r+1)} / Z^{(r)}) (2\pi m_e T_e / h^2)^{3/2} \exp(-E_i^r / T_e) \quad , \quad (\text{II.80.a})$$

$$(n_e n^{(r+1)} / n_k) = 2(g_i^{(r+1)} / g_k^{(r)}) (2\pi m_e T_e / h^2)^{3/2} \exp(-E_{ki}^r / T_e) \quad (\text{II.80.b})$$

A partir de (II.77) y (II.78), promediando sobre la función de distribución maxwelliana para los electrones, se obtiene

una expresión para la ionización de un átomo en el nivel fundamental⁸⁹, con energía de ionización E_{∞}^z ,

$$I(T_e) = 10^{-5} (T_e/E_{\infty}^z)^{1/2} / (E_{\infty}^z)^{3/2} (6.0 + T_e/E_{\infty}^z) \exp(-E_{\infty}^z/T_e), \quad (\text{II.81})$$

siendo las unidades de $I(T_e)$ en (II.81), cm^3s^{-1} . Cuando la producción de electrones queda determinada principalmente por el proceso (II.68) y su inverso, si $n_e \approx n_i$, la tasa de producción neta de electrones por unidad de volumen queda expresada por $dn_e/dt = \alpha(T_e) ((n_e^*)^2 - n_e^2)$, donde $(n_e^*)^2 \equiv n(n_e^*/n)_{\text{equil}}$.

Los plasmas parcialmente ionizados se encuentran muy rara vez en un estado de completo equilibrio termodinámico, pero con frecuencia pueden estar en un estado de aproximado equilibrio termodinámico local (ETL). Se dice que un gas tiene una condición de ETL cuando las partículas de la materia se hallan en equilibrio entre ellas, pero los fotones no tienen por qué estar en equilibrio con la materia. En muchas situaciones un plasma parcialmente ionizado es transparente para muchos intervalos de frecuencias, y en consecuencia alguna radiación escapa del mismo, violando, en consecuencia, una condición necesaria para el equilibrio termodinámico completo. A fin de que la materia se encuentre en ETL, es necesario que las tasas de los procesos colisionales, que modifican la población de los niveles de energía de la materia, excedan los valores de las tasas de fenómenos radiactivos. Es posible utilizar las relaciones de Saha para un plasma en ETL sin que alcance el equilibrio termodinámico

completo. Para plasmas dominados por colisiones son siempre aplicables tales relaciones, aun cuando existan otros tipos de apartamientos del equilibrio. Es por ello que resulta frecuente el caso en que electrones y partículas pesadas tengan distintas temperaturas, T_e, T , pero que ambas especies posean funciones de distribución maxwellianas con sus respectivas temperaturas. En el caso en que se de esta situación, siendo las colisiones con los electrones los procesos que producen principalmente las transiciones que determinan la población de algún nivel de energía o el grado de ionización, la temperatura que aparece en la relación de Saha debe ser la electrónica.

II.5.- Rango de validez del empleo de funciones de distribución maxwellianas.

La posibilidad de utilizar una solución local deriva de la existencia de procesos de relajación, los que hacen que cualquier función de distribución arbitraria tienda a una maxwelliana como consecuencia de las colisiones. La distribución maxwelliana representa la solución de la ecuación cinética para el caso en que los gradientes y las derivadas temporales sean idénticamente nulos. Si estas cantidades no se anulan, pero resultan pequeñas, la función de distribución se aproximará a una maxwelliana y la diferencia (proporcional a los gradientes pequeños) será también pequeña. Así, si uno se encuentra interesado en cambios que ocurren en intervalos de tiempo mucho mayores que el tiempo en-

tre colisiones y si todas las cantidades varían lentamente sobre distancias recorridas por las partículas entre colisiones sucesivas, la solución de la ecuación cinética (II.1) se aproximará a una maxwelliana; específicamente, la solución será de la forma

$$f_a(t, r, v_a) = f_a^0 + f_a^1 = (n_a(t, r) / (2\pi T_a / m_a)^{3/2}) \cdot \exp(-m_a (v_a - V_a(t, r))^2 / 2T_a(r, t)) + f_a^1 \quad (\text{II.82})$$

con $|f_a^1| \ll f_a^0$. El término de primer orden f_a^1 puede tratarse como una corrección, o perturbación, a la función de distribución de orden cero f_a^0 . Esta corrección será proporcional a los efectos que perturban la distribución maxwelliana, esto es, gradientes, campos eléctricos, etc. La función f_a^0 y sus derivadas son determinadas en forma unívoca por los parámetros n , V , T y sus derivadas. En igual manera, dichas cantidades pueden utilizarse para expresar la corrección f_a^1 .

En plasmas dominados por colisiones, la función de distribución para electrones, $f_e(u)$, difiere en una pequeña cantidad de la función isotrópica $f_e^0(u)$ que depende de $|u|$. Este hecho hace posible un desarrollo de la función de distribución f_e respecto de su dependencia en u para pequeños apartamientos de f_e^0 . Esta situación es en parte similar a la de una mezcla de gases neutros, dominada por colisiones, en la cual las funciones isotrópicas son las distribuciones maxwellianas de equilibrio. En cambio, en un plasma, como resultado del acoplamiento relativamente débil de los electrones con las partículas pesadas, la función $f_e(u)$ no necesariamente es la distribución de equilibrio. En

este sentido, puede desarrollarse la función de distribución f_e , teniendo en cuenta la dependencia angular del espacio de velocidades, usando los armónicos esféricos⁶⁴

$$f_e(u) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,m}(u) Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad , \quad (\text{II.83})$$

o, en forma equivalente⁷⁰,

$$f_e(u) = f^0(u) + f^1(u) \cdot u/u + \dots \quad (\text{II.84})$$

que contiene, como caso especial, el desarrollo de Chapman-Enskog^{76, 78}. La utilidad práctica de este desarrollo reside en la condición que los apartamientos de $f_e(u)$ de una distribución isótropa $f^0(u)$ sean pequeños: $f^0 \gg |f^1|, |f^2|, \dots$; estas funciones se calculan a partir de las ecuaciones que se obtienen reemplazando f_e en la ecuación cinética (II.1) por el desarrollo (II.84), multiplicando luego por 1, u_j/u , $u_j u_k/u^2$, ... e integrando sobre el ángulo sólido en el espacio de velocidades⁷⁰. De esta manera se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, f^0 y f^1 . Si bien las dos ecuaciones resultantes se encuentran acopladas, resulta conveniente considerar a una de ellas como la ecuación que gobierna la parte isótropa f^0 , y a la segunda como la que determina a f^1 . En el caso en que todos los términos de la ecuación que gobierna a f^0 sean pequeños comparados con cada una de las partes individuales del término de colisiones electrón-electrón, C_{ee}^0 , resulta que el mismo término de colisiones C_{ee}^0 deberá anularse para satisfacer dicha ecuación. La solución de la condición $C_{ee}^0 = 0$ es una función de distribu-

ción maxwelliana.

Entonces, para determinar las condiciones de aplicabilidad de una función f^0 maxwelliana, deberá estimarse cuándo C_{ee}^0 domina sobre los otros términos de colisiones de la ecuación en cuestión. Esto es particularmente importante ya que en el cálculo de los coeficientes de transporte, a través de reglas de mezclas, se utiliza la función de distribución maxwelliana para los electrones. En tal sentido, considerando el orden de magnitud de los términos de colisiones para electrones de energías térmicas, se tiene

$$C_{eh}^0/C_{ee}^0 \sim m_e v_{eh} / m_h v_{ee} \sim m_e \langle v_{eh} \rangle / m_h \langle v_{ee} \rangle \quad , \quad (\text{II.85})$$

y si la sumatoria de estos términos es tal que

$$\sum_h m_e \langle v_{eh} \rangle / m_h \langle v_{ee} \rangle \ll 1 \quad , \quad (\text{II.86})$$

se podrán despreciar los términos de colisiones con las partículas pesadas, C_{eh}^0 , frente a C_{ee}^0 . Debido a que para colisiones electrón-ion, las frecuencias $\langle v_{ei} \rangle$ y $\langle v_{ee} \rangle$ son del mismo orden de magnitud, la relación (II.86) se satisface siempre para los iones. Por su parte, cuando se trata de partículas neutras, tal relación debe verse como una condición sobre el grado de ionización del plasma. Más aún, dado que m_e/m_h es siempre un parámetro pequeño, la condición (II.86) se verificará solamente para plasmas moderadamente ionizados. A fin de facilitar la estimación del rango de validez para (II.86) se emplearán órdenes de magnitud en las fórmulas respectivas:

$$\langle v_{ee} \rangle \sim n_e T_e^{-3/2} \quad (II.87)$$

$$y \quad m_e \langle v_{en} \rangle / m_h \langle v_{ee} \rangle \sim (\langle \sigma_{en} \rangle T_e^2 / W_n \lambda) n_n / n_e ,$$

donde W_n es el peso molecular de la especie neutra.

Resulta claro de (II.86) que cuando $\langle v_{en} \rangle = \langle v_{ei} \rangle$, la relación se verifica siempre. Este hecho brinda la posibilidad de tener un criterio que permita determinar si deben utilizarse los resultados de la teoría para el límite de plasma total o débilmente ionizado. En términos de la frecuencia media de colisiones, para transferencia de cantidad de movimiento, de electrones con todas las partículas neutras $\langle v_{eN} \rangle \equiv \sum_n \langle v_{en} \rangle$, se considera que un plasma está débilmente ionizado cuando $\langle v_{ei} \rangle \ll \langle v_{eN} \rangle$, mientras que en el caso opuesto estará totalmente ionizado. En particular, el grado de ionización que separa estos dos límites se determina de la condición $\langle v_{ei} \rangle = \langle v_{eN} \rangle$. Cuando existe una única especie iónica, con iones de carga unitaria, siendo $n_i \approx n_e$, la condición límite se escribe

$$n_e / n_N = \langle \sigma_{eN} \rangle / \langle \sigma_{ei} \rangle \quad (II.88)$$

donde $\langle \sigma_{eN} \rangle = \sum_n (n_n / n_N) \langle \sigma_{en} \rangle$ y $n_N = \sum_n n_n$. Un ejemplo de aplicación de este criterio para el cálculo de valores críticos de n_e / n_N para H_2 puede verse en la tabla II.

A su vez, si τ y L representan valores característicos del tiempo y de la escala de longitudes para variaciones macroscópicas, se dirá que en un plasma dominan las colisiones, con respecto al gas de electrones, si

$$1 / \langle v_{ee} \rangle \tau \ll 1 \quad , \quad (II.89)$$

$$y \quad V_e / \langle v_{ee} \rangle \tau \ll 1 \quad (\text{II.90})$$

Si se cumplen las desigualdades anteriores, se ve, usando las condiciones $f^1 \ll f^0$ y $V < V_e$, que todos los términos de la ecuación que gobierna f^0 resultan pequeños si se comparan con C_{ee}^0 , a excepción, posiblemente, del término que contiene al campo E' . El término en cuestión será pequeño comparado con C_{ee}^0 , si

$$\frac{e |(V_e - V) \cdot E'|}{m_e V_e^2 \langle v_{ee} \rangle} = \frac{|j_e \cdot E'|}{n_e m_e V_e^2 \langle v_{ee} \rangle} \ll 1 \quad , \quad (\text{II.91})$$

donde j_e es la densidad de corriente de los electrones. Utilizando las relaciones (II.89) y (II.90), con fórmulas aproximadas para la relación entre j_e y E' , puede demostrarse que la desigualdad (II.91) se satisface cuando⁷⁰

$$|V_e - V|^2 \langle v_{eh} \rangle / V_e^2 \langle v_{ee} \rangle \ll 1 \quad (\text{II.92})$$

Siendo $f^1 \ll f^0$ y en virtud de (II.86), resultan condiciones suficientes para que las desigualdades (II.91) o (II.92) se verifiquen

$$e |E'| / m_e V_e \langle v_{ee} \rangle \ll 1$$

$$o \quad |V_e - V|^2 / V_e^2 \ll \langle m_e / m_h \rangle \quad ,$$

respectivamente, donde $\langle m_e / m_h \rangle$ es un valor promedio de masas. Debe notarse que (II.89), en la que interviene un tiempo característico, no excluye a campos eléctricos de alta frecuencia. El calentamiento de Joule asociado con tales

campos, deberá satisfacer, sin embargo, la desigualdad (II.91).

Las condiciones (II.86), (II.89), (II.90), y (II.91) o (II.92), son suficientes para asegurar que f^0 es maxwelliana. Para el caso de un plasma uniforme en un campo eléctrico fuerte, este resultado ha sido verificado numéricamente por J. R. Viegas y C. H. Kruger⁹². En la presente discusión no se han considerado los efectos de las colisiones inelásticas. En este caso se demuestra que como resultado de tales colisiones se requiere una condición adicional para que la función de distribución sea maxwelliana. Las colisiones inelásticas juegan un papel importante en la dinámica de los plasmas parcialmente ionizados, siendo de primordial importancia en la ecuación de continuidad de los electrones. Para incluir el efecto de estas colisiones, se debe agregar un término de pérdida inelástico a la ecuación que gobierna f^0 , de la forma $-n_e f^0 \nu_{NE}$, donde ν_{NE} es la frecuencia total de colisiones inelásticas de los electrones, suma de todos los procesos inelásticos relevantes. De esta manera, es razonable estimar la importancia de las colisiones inelásticas considerando el término de pérdida solamente. Entonces, resulta que a la condición (II.86) para que f^0 sea maxwelliana, deberá agregarse la condición

$$\langle \nu_{ee} \rangle \gg \langle \nu_{NE} \rangle \quad (II.93)$$

para electrones con energías térmicas.

En esta sección se ha enfatizado la importancia de las colisiones electrón-electrón en el proceso de es-

a una temperatura T_e . Deberá tenerse en cuenta, además, que para pequeños apartamientos del equilibrio, las colisiones electrón-partículas pesadas tienden a producir una función de distribución electrónica maxwelliana con $T_e = T_b$. Es así que, para bajos grados de ionización, aunque no se cumpla (II.86), f^0 puede ser una maxwelliana a temperatura T_b , tal como ocurre para pequeños valores de E' .

En la Fig. 2 se muestra la situación de un plasma uniforme y estacionario para el cual la existencia de un campo eléctrico es la causa principal del apartamiento del equilibrio². En este diagrama se indican las regiones de aplicabilidad de la teoría descrita en esta sección, en términos de la intensidad del campo eléctrico (la ordenada) y el grado de ionización, expresado mediante $\langle v_{ee} \rangle / \langle v_{eb} \rangle$, (la abscisa). La teoría clásica de transporte de Chapman-Enskog se aplica, estrictamente, en la región de campo débil donde $T_e = T_b$ y f^0 es maxwelliana a T_b . Sin embargo el desarrollo de f_e que se expone en esta sección, se puede extender la teoría rigurosa de propiedades de transporte a toda la región donde f^0 sea maxwelliana.

III. DESCRIPCIÓN MACROSCÓPICA DE UN PLASMA PARCIALMENTE IONIZADO

III.1.- Características de la descripción macroscópica.

Si bien el conocimiento exacto del estado de un sistema de muchos cuerpos requiere del conocimiento de las posiciones y velocidades de todas las partículas en el sistema, gran parte del comportamiento del mismo puede describirse en términos de variables macroscópicas como la densidad, la temperatura, la velocidad promedio y la presión. Las cantidades mencionadas se encuentran relacionadas a través de leyes de conservación y mediante las ecuaciones dinámicas de la cantidad de movimiento y el transporte de energía. El propósito de este capítulo es utilizar las citadas variables, ya definidas en el capítulo anterior, y sus relaciones, a fin de describir el comportamiento de un plasma parcialmente ionizado. Dichas variables y ecuaciones constituyen una descripción reducida del plasma, esto es, contienen menos información que la descripción completa del sistema de muchos cuerpos. En consecuencia, existirán algunas propiedades que no podrán ser descritas de este modo, como por ejemplo las inestabilidades en el espacio de velocidades, pero resultan suficientes para describir una amplia gama de efectos y aplicaciones en plasmas.

Las variables macroscópicas de un plasma se definen integrando, sobre todas las velocidades, el producto de los distintos momentos de la velocidad con $f(x,v,t)$, y las relaciones entre estas variables se obtienen a partir de

la ecuación diferencial (II.54) para la función de distribución. Es objetivo de este capítulo expresar estas relaciones en forma general para cada especie presente en el plasma, para aplicarlas, luego, a la descripción de una mezcla de tres componentes: electrones, iones y neutros de la misma clase. Esta descripción será ampliada para ser aplicada a un plasma de múltiples especies, que constituyen la base del modelo desarrollado. Se expresarán las ecuaciones para la descripción de un plasma compuesto por iones de una única especie y electrones ("plasma simple" según la notación de Braginskii⁵²), sin entrar en mayores detalles, ya que ellas han sido tratadas abundantemente por la literatura corriente^{52,70,93}, y se pondrá énfasis en los plasmas parcialmente ionizados, mencionando las distintas aproximaciones que se utilizan en determinadas situaciones y el rango de aplicabilidad de la descripción macroscópica formulada, para una mezcla de varios fluidos.

III.2.- Ecuaciones macroscópicas de un plasma.

Las ecuaciones que describen el comportamiento de los parámetros macroscópicos, usualmente llamadas ecuaciones de transporte, pueden obtenerse a partir de la ecuación cinética (II.54). Multiplicando la misma por 1, $m_a V_a$ y $m_a v_a^2 / 2$, considerando (II.65) e integrando sobre las velocidades se obtiene, respectivamente,

$$\partial n / \partial t + \text{div}(nV) = \dot{n} \quad (\text{III.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(mnV) + \frac{\partial}{\partial x_k}(mn\langle v_j v_k \rangle) - en(E_j + (V \times B)_j / c) = \int mv_j C d^3v, \quad (III.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(mn\langle v^2 \rangle / 2) + \text{div}(mn\langle v^2 v \rangle / 2) - enE \cdot V = \int (mv^2 C / 2) d^3v, \quad (III.3)$$

donde se ha omitido el subíndice a por razones de simplicidad, los índices j, k representan componentes de las cantidades vectoriales, y $\langle \rangle$ representa el valor promedio sobre la función de distribución de velocidades. Se ha intercambiado el orden de integración sobre las velocidades y las derivadas temporal y espacial en los primeros dos términos de (II.54), integrando por partes el tercer término con la suposición que la función de distribución se anula rápidamente a medida que v tiende a infinito.

La ecuación (III.1) expresa la conservación de partículas y se denomina, usualmente, ecuación de continuidad. Si no hay producción o aniquilación de partículas \dot{n} deberá ser cero, tomando (III.1) la forma más común para la ecuación de continuidad en la descripción de un plasma como un fluido. Con frecuencia resulta conveniente transformar las ecuaciones (III.2) y (III.3) en expresiones equivalentes^{52, 93}, dividiendo a la velocidad en dos componentes: una velocidad media V y una velocidad aleatoria $u = v - V$; siendo evidente que $\langle u \rangle = 0$. Entonces, el segundo término en (III.2) se escribe

$$\langle v_j v_k \rangle = \langle (V_j + u_j)(V_k + u_k) \rangle = V_j V_k + \langle u_j u_k \rangle$$

Expresando $\partial n/\partial t$ mediante la ecuación de continuidad, es posible expresar (III.2) en la forma

$$nm \, dV_j/dt = - \partial P/\partial x_j - \partial \mathbb{P}_{jk}/\partial x_k + en (E_j + (V \times B)_j/c) + R_j \quad , \quad (III.4)$$

$$\text{donde} \quad d/dt = \partial/\partial t + V_k \partial/\partial x_k = \partial/\partial t + (V \cdot \nabla) \quad (III.5)$$

es la llamada derivada total, y

$$p = nm \langle u^2 \rangle / 3 = nT \quad , \quad (III.6)$$

$$\mathbb{P}_{jk} = nm \langle u_j u_k - (u^2/3) \delta_{jk} \rangle \quad , \quad (III.7)$$

$$R = \int m u C \, d^3v \quad (III.8)$$

La cantidad p es la presión escalar para las partículas de una dada especie. El tensor de presiones completo, para cada especie, es

$$P_{jk} = \int m u_j u_k f(t, r, v) \, d^3v = nm \langle u_j u_k \rangle = p \delta_{jk} + \mathbb{P}_{jk} \quad .(III.9)$$

Si la función de distribución de velocidades (para cada velocidad aleatoria) es isótropa, entonces $\langle x_1^2 \rangle = \langle u_y^2 \rangle = \langle u_z^2 \rangle = (1/3) \langle u^2 \rangle$, $\langle u_x u_y \rangle = \langle u_x u_z \rangle = \langle u_y u_z \rangle = 0$, de modo que $P_{jk} = p \delta_{jk}$. El tensor \mathbb{P}_{jk} representa la parte de P_{jk} que resulta de las desviaciones de la distribución de la simetría esférica; estas cantidades reciben el nombre de tensor de los esfuerzos y, al igual que P_{jk} , es un tensor simétrico: $\mathbb{P}_{jk} = \mathbb{P}_{kj}$. La cantidad R representa la variación

media de la cantidad de movimiento de las partículas de una dada especie, debida a las colisiones con todas las restantes partículas. La ecuación (III.4), llamada ecuación de transporte de la cantidad de movimiento, o simplemente ecuación de movimiento, representa una generalización de la ecuación correspondiente en dinámica de los gases.

Realizando similares transformaciones se puede escribir

$$\begin{aligned} \langle (v^2/2)v_k \rangle &= (V^2/2)V_k + V_j \langle u_j u_k \rangle + (\langle u^2 \rangle/2)V_k + \langle (u^2/2)u_k \rangle/2 \\ &= (V^2/2 + 5p/2mn)V_k + V_j \pi_{j,k}/mn + \langle (u^2/2)u_k \rangle \end{aligned}$$

con lo cual la ecuación (III.3) se reduce a la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (nmV^2/2 + 3nT/2) + \frac{\partial}{\partial x_k} \{ (nmV^2/2 + 5nT/2)V_k \\ + (\pi_{j,k} \cdot V_j) + q_k \} = enEV + RV + Q. \end{aligned} \quad (III.10)$$

Aquí se ha introducido la notación

$$q = \int (mu^2/2) v f(t, r, v) d^3v = nm \langle u^2 v/2 \rangle, \quad (III.11)$$

$$Q = \int (mu^2/2) C d^3v \quad (III.12)$$

El vector q es la densidad del flujo de calor transportado por las partículas de una dada especie y representa el transporte de energía asociado con el movimiento aleatorio en el sistema de coordenadas en el cual el gas de partículas, como un todo, se encuentra en reposo para un dado punto

del espacio. La cantidad Q es el calor generado en un gas de partículas de una especie en particular como consecuencia de las colisiones con las partículas de otras especies.

En la ecuación (III.10), de transporte de la energía, el primer término representa la variación de la energía total, es decir, de la energía cinética $nmV^2/2$ y la energía interna $3nT/2$ por unidad de volumen. El término entre llaves representa el flujo de energía total y está formado por el transporte macroscópico de la energía total con velocidad V , el flujo macroscópico de energía, esto es, el flujo de calor q , y el trabajo hecho por las fuerzas debidas a las presiones totales :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (V_j P_{j k}) = \frac{\partial}{\partial x_k} (pV_k + \Pi_{j k} V_j)$$

Los términos del miembro derecho tienen en cuenta el trabajo realizado por otras fuerzas y la generación de calor.

A veces es conveniente eliminar la energía cinética de la ecuación (III.10) utilizando la ecuación de continuidad y la ecuación de movimiento, obteniendo, entonces, la ecuación para el transporte de la energía interna o de balance de calor,

$$(3/2) \frac{\partial}{\partial t} (nT) + \text{div}((3/2)nTV) + nT \text{div}(V) + \Pi_{j k} \frac{\partial}{\partial x_k} V_j + \text{div}(q) = Q' , \quad (\text{III.13})$$

donde $Q' = Q - (mV^2/2) \dot{n} = \int (m(u^2 - V^2)/2) C d\dot{v} = \int mv \cdot (u/2 - V/2) C d\dot{v} = \int mv \cdot (v/2 - V) C d\dot{v} ,$

tiene en cuenta la posibilidad de creación o aniquilación de partículas de una dada especie, a través de la tasa \dot{n} que aparece en la ecuación de continuidad.

Denominando R_{ab} a la variación de la cantidad de movimiento y Q_{ab} al calor generado en un gas de partículas de la especie a como consecuencia de las colisiones con partículas de la clase b , resulta que $R_a = \sum_b R_{ab}$, y $Q_a = \sum_b Q_{ab}$. Considerando que se conservan la cantidad de movimiento ($\dot{n}_{ab} m_a V_a = -\dot{n}_{ba} m_b V_b$) y la energía ($\dot{n}_{ab} m_a V_a^2/2 = -\dot{n}_{ba} m_b V_b^2/2$) en las colisiones, utilizando además las relaciones (II.62) y (II.63), se encuentra que

$$R_{ab} = -R_{ba} \quad , \quad (III.14)$$

$$Q_{ab} + Q_{ba} = -R_{ab}V_a - R_{ba}V_b = -R_{ab}(V_a - V_b) \quad (III.15)$$

Si se usan las ecuaciones (III.1), (III.4) y (III.13) para encontrar los parámetros n , V y T , resulta necesario, en primera instancia, establecer la relación entre μ_{jk} , q , R y Q con los parámetros que se pretende encontrar. Esta relación puede establecerse en forma fenomenológica o por medios cinéticos. Si se emplea la segunda aproximación, deberá obtenerse una solución aproximada para las ecuaciones cinéticas que permita expresar la función de distribución, para un dado punto, en términos de n , V y T ; utilizando luego esta relación en las ecuaciones (III.7), (III.8), (III.11) y (III.12) para obtener expresiones de μ_{jk} , q , R y Q en el mismo punto. En principio, esta solución local aproximada de la ecuación cinética, es válida en el caso

en que se satisfagan ciertos requerimientos atinentes al análisis macroscópico de un plasma. En esencia, estos requerimientos piden que todas las cantidades varíen lentamente en el espacio (pequeños gradientes) y en el tiempo. La posibilidad de usar una solución local proviene de la existencia de los llamados procesos de relajación que hacen que cualquier función de distribución arbitraria tienda a una maxwelliana como consecuencia de las colisiones, circunstancia que ha sido tratada en el capítulo anterior, siendo las cantidades η_{jk} , q , R y Q proporcionales a los efectos que producen los apartamientos de la función de distribución de equilibrio. Los correspondientes coeficientes de proporcionalidad (coeficiente de fricción entre partículas de diferentes especies, conductividad térmica, viscosidad, etc.) reciben el nombre de coeficientes de transporte, cuya determinación constituye la meta básica de la teoría cinética (ver capítulo II).

La descripción en base a las ecuaciones formuladas, sólo puede llevarse a cabo en forma más o menos simple para un plasma totalmente ionizado con una única especie iónica; este tipo de sistema recibe el nombre de plasma simple⁵². Con frecuencia, se utilizan los métodos de un único fluido^{52, 93}, o de dos fluidos⁹³ para describir este tipo de plasmas. En el primer caso, las dos ecuaciones de movimiento, para iones y electrones, son reemplazadas por una única ecuación de movimiento para el plasma en su conjunto; esta ecuación representa una extensión de la ecuación de movimiento de la hidrodinámica convencional, mientras que la expresión de la corriente es esencialmente una generaliza-

ción de la expresión familiar de la ley de Ohm. Este modelo hidrodinámico es útil para la descripción de fenómenos de baja frecuencia, pudiendo despreciarse la inercia de los electrones y considerando que el plasma permanece neutro. El primer paso para la obtención de las ecuaciones del único fluido consiste en definir ciertas cantidades como la densidad de masa ρ y la velocidad hidrodinámica, o velocidad del centro de masa, V :

$$\rho = \sum_a m_a n_a \quad , \quad (\text{III.16})$$

$$V = (\sum_a m_a n_a V_a) / \rho \quad (\text{III.17})$$

Despreciando la masa de los electrones se puede hacer la aproximación

$$\rho = m_i n_i \quad , \quad (\text{III.18})$$

$$V = V_i \quad (\text{III.19})$$

La ecuación de continuidad para los iones se reescribe en la forma de una relación de conservación de masa, ya que $\dot{n}_e = \dot{n}_e = 0$ al no existir especies neutras que ionizar,

$$\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho V) = 0 \quad , \quad (\text{III.20})$$

esta ecuación también es válida si se parte de las definiciones (III.16) y (III.17). La densidad de carga eléctrica ρ_e y la densidad de corriente son (llamando $u' = V_e - V_i$) :

$$\rho_e = \sum_a e_a n_a = e (Zn_i - n_e) \quad , \quad (\text{III.21})$$

$$j = \sum_a e_a n_a V_a = \rho_e V_i - en_e u' \quad (\text{III.22})$$

De las ecuaciones de continuidad para iones y electrones se obtiene una ecuación para la conservación de la carga eléctrica:

$$\partial \rho_e / \partial t + \text{div}(j) = 0 \quad (\text{III.23})$$

El modelo de un único fluido presupone la cuasineutralidad del plasma. Esto no significa que sea nula la carga espacial en el plasma, sino que ella es pequeña en comparación con la cantidad en_e , de modo que podrá despreciarse la diferencia $(Zn_i - n_e)$ frente a $n = n_e$. Entonces, la densidad de corriente se escribe en la forma

$$j = - enu' \quad (\text{III.24})$$

Considerando que todos los procesos son lentos, es decir, se trata de procesos cuasiestacionarios, se tiene que $\partial \rho_e / \partial t$ puede despreciarse en (III.23), al igual que las corrientes de desplazamiento en las ecuaciones de Maxwell. En estas condiciones las mencionadas ecuaciones resultan:

$$\text{div}(j) = 0 \quad , \quad (\text{III.25})$$

$$\text{rot}(E) = - (1/c) \partial B / \partial t \quad , \quad (\text{III.26})$$

$$\text{rot}(B) = (4\pi/c) j \quad ; \quad \text{div}(B) = 0 \quad . \quad (\text{III.27})$$

La condición de neutralidad provee la relación $Zn_i = n_e$ y, en consecuencia, puede omitirse la ecuación de Poisson, en la cual aparece en forma explícita la carga espacial :

$$\text{div}(\mathbf{E}) = 4\pi\rho_e \quad (\text{III.28})$$

del sistema de ecuaciones del plasma.

Por otra parte, sumando las ecuaciones de movimiento de iones y electrones y despreciando la inercia de estos últimos, se obtiene la ecuación de movimiento del plasma

$$\rho d\mathbf{V}/dt = -\nabla p + (1/c) \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{F} \quad (\text{III.29})$$

donde $\mathbf{V} = \mathbf{V}_i$ y $p = p_e + p_i$. En un plasma magnetizado, bajo condiciones de laboratorio, las dos fuerzas principales son el gradiente de presiones y la fuerza magnética. El término \mathbf{F} representa la suma de las restantes fuerzas por unidad de volumen que actúan sobre el plasma. En ellas se incluyen, por ejemplo, la fuerza viscosa $\mathbf{F}_\eta = -\partial \Pi_{jk} / \partial x_k$, donde $\Pi_{jk} = \Pi_{jk}^i + \Pi_{jk}^e \approx \Pi_{jk}^i$ es el tensor total de los esfuerzos y la fuerza de gravedad $\mathbf{F}_g = \rho \mathbf{g}$, que es importante en muchos problemas astrofísicos. La fuerza eléctrica, $\mathbf{F}_E = \rho_e \mathbf{E}$, es usualmente muy pequeña comparada con las otras.

Como es bien sabido, la ley de Ohm, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, relaciona la densidad de corriente con el campo eléctrico para un dado instante. Sin embargo, al ser el campo eléctrico responsable de la aceleración de los electrones, en general no se obtiene una relación de ese tipo. En aquellos pro-

cesos en los que todas las cantidades varían lentamente en el tiempo, es decir, no existen cambios significativos en el tiempo entre colisiones electrón-ion, la inercia de los electrones resulta poco importante y el efecto del campo eléctrico es balanceado por la fricción debida a las colisiones de los electrones con los iones, $u' = -j/en$. Esta condición de equilibrio para un gas de electrones es llamada ley de Ohm. Para un plasma se obtiene una ley de Ohm en forma análoga.

Resulta más conveniente expresar el campo eléctrico en función de la corriente, que a la inversa. Además de simplificarse las fórmulas, esta forma de descripción brinda un cuadro más adecuado de la naturaleza del efecto: en un plasma altamente conductor, donde la reactancia es mayor que la resistencia real, la corriente queda usualmente determinada por los parámetros externos, mientras que el campo eléctrico queda determinado por la corriente a través de la ley de Ohm. La ley de Ohm para un plasma puede escribirse de diferentes maneras equivalentes. Una de ellas consiste en desprestigiar la inercia de los electrones y la viscosidad en las ecuaciones de movimiento, y tomar adecuadas expresiones para la fuerza⁵² $R = R_e + R_T$, con R_e la fuerza de fricción y R_T la fuerza térmica, obteniendo:

$$E' = j_{\parallel} / \sigma_{\parallel} + j_{\perp} / \sigma_{\perp} + (j \times B) / en_e c \quad , \quad (\text{III.30})$$

donde E' es el campo efectivo dado por

$$E' = E + (1/c) \nabla \times B + (\nabla p_e - R_T) / en_e \quad (\text{III.31})$$

Si ahora j se expresa en términos de E' se obtiene

$$j = \sigma_{\parallel} E' + \sigma_{\perp} \{ E'_{\perp} + \omega_{ce} \tau_e (h \times E') \} / (1 + \omega_{ce}^2 \tau_e^2) \quad , \quad (III.32)$$

siendo $h = B/|B|$, ω_{ce} la frecuencia del ciclotrón de electrones y τ_e es el tiempo "básico" de relajación de electrones⁵² (τ_s o τ_1 según notación de Trubnikov⁷⁵ , ver capítulo II). La cantidad E' contiene el campo eléctrico E^* en el sistema de coordenadas que se mueve con la materia (con los iones) :

$$E^* = E + (1/c) V \times B \quad (III.33)$$

Además, E' contiene la fuerza termoeléctrica $-R_T/en_e$ y el término de presión electrónica $\nabla p_e/en_e$, que en un plasma puede variar abruptamente y resultar de gran importancia. De las expresiones anteriores es inmediato que en el caso de no existir campo magnético, $E' = j/\sigma_{\parallel}$, relación que también vale para la componente E'_{\parallel} .

Por su parte, en lo que se refiere a las ecuaciones individuales para la energía de iones y electrones, éstas pueden ser reemplazadas por una ecuación general de balance de energía. Combinando las ecuaciones de transporte para iones y electrones (III.10), teniendo en cuenta (III.15), despreciando la inercia de los electrones y tomando $T_e = T_i = T$, se obtiene la ecuación de transporte de la energía:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V^2 / 2 + 3p/2) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho V^2 / 2 + 5p/2) V_k + \mathbb{1}_{jk} V_j + q_k = E J \quad (\text{III.34})$$

siendo $q = q_e + q_i + (5/2) p_e u'$ (III.35)

A su vez, las ecuaciones de Maxwell (III.26) y (III.27) brindan una ecuación de energía para los campos (mediante el teorema de Poynting con la aproximación $E \ll B$):

$$\partial(B^2/8\pi)/\partial t + \text{div}(\mathbf{S}) = -E j \quad , \quad (\text{III.36})$$

con $\mathbf{S} = (c/4\pi) \mathbf{E} \times \mathbf{B}$, el vector de Poynting.

Considerando (III.34) y (III.36) se obtiene una ley de conservación para la energía total:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{total} + \text{div}(q_{total}) = 0 \quad ,$$

$$E_{total} = \rho V^2 / 2 + 3p/2 + B^2 / 8\pi \quad , \quad (\text{III.37})$$

$$q_{total} = (\rho V^2 / 2 + 5p/2) \mathbf{V} + \mathbb{1} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{q} + \mathbf{S} \quad .$$

Sumando las ecuaciones (III.13) para iones y electrones, teniendo en cuenta (III.15) y la relación $\text{div}(n_e u') = 0$, o bien, eliminando la energía cinética de (III.34) y utilizando la ley de Ohm (III.30), resulta una ecuación de balance de calor para el plasma:

$$\frac{\partial}{\partial t} (3p/2) + \text{div}((3p/2)\mathbf{V}) + p \text{div}(\mathbf{V}) = -\text{div}(\mathbf{q}) + u' \nabla p_e + \Sigma Q \quad (\text{III.38})$$

El miembro derecho de esta ecuación contiene todas las fuentes de calor, incluyendo la debida a la viscosidad: $\Sigma Q = -R. u' + Q_{vis}$.

La energía puede ser transferida por medio de mecanismos macroscópicos (transporte con velocidad V y trabajo debido a las presiones) y por mecanismos microscópicos (conductividad térmica, viscosidad, etc.). Los mecanismos microscópicos y sus correspondientes términos en las ecuaciones de energía y calor, son llamados disipativos. Estos mecanismos incrementan la entropía del plasma (por partícula), la cual se conserva en ausencia total de efectos disipativos. La importancia relativa de los procesos disipativos disminuye a medida que aumentan las dimensiones del sistema, ya que la energía transportada debido a estos procesos es de naturaleza difusiva. Si los tiempos característicos de estos procesos ($L^2 n/\kappa$ para la conductividad térmica, $L^2 \rho/\eta$ para la viscosidad, etc.) son grandes comparados con la inversa de la frecuencia del movimiento del plasma $1/\omega$ o L/V , los términos disipativos son pequeños.

En la segunda de las formas mencionadas para describir un plasma "simple", la de dos fluidos, las ecuaciones correspondientes tratan a iones y electrones como dos fluidos conductores, acoplados a través de las colisiones de transferencia de cantidad de movimiento y las ecuaciones de Maxwell. Las variables de esta descripción son la densidad, la velocidad y la presión de cada especie, relacionadas mediante las ecuaciones de continuidad (III.1), con $\dot{n}=0$, y de transporte de cantidad de movimiento (III.4). Cada fluido

requiere una ecuación de estado, o bien, alguna otra restricción de clausura. Por ejemplo, distintas suposiciones sobre el flujo de calor durante algún proceso en el plasma, conducen a considerar las situaciones

$$\begin{array}{ll}
 & p = A n \quad , \quad \text{isotérmico} \\
 \text{o} & p = A n^{5/3} \quad , \quad \text{adiabático} \\
 \text{o bien} & p = 0 \quad ,
 \end{array}$$

que resulta una buena aproximación en procesos que involucren un campo magnético intenso ($B^2/8\pi \gg p$). Para el caso de un plasma parcialmente ionizado, existe además una componente neutra que satisface la ecuación de transferencia de cantidad de movimiento y se encuentra acoplada con iones y electrones sólo a través de las colisiones de transferencia de cantidad de movimiento. El fluido neutro también requiere de una ecuación de estado.

III.3.- Descripción de una mezcla de tres componentes.

Un ejemplo simple de una mezcla de tres componentes lo constituye un plasma parcialmente ionizado que contiene electrones, una especie iónica y una especie de partículas neutras. El movimiento de estas componentes puede especificarse mediante las tres velocidades V_e , V_i y V_n , o por una velocidad hidrodinámica común, V , que en forma aproximada es

$$V \approx (m_i n_i V_i + m_n n_n V_n) / \rho \quad ,$$

(debido a la pequeña masa de los electrones) y de dos velocidades relativas:

$$u' = V_e - V_i \quad , \quad w = V_i - V_n \quad (\text{III.39})$$

En un plasma simple existe una única ecuación para la velocidad relativa, la ley de Ohm; en una mezcla de tres componentes se requieren dos ecuaciones : una para la velocidad de difusión w y otra para la velocidad asociada con la corriente $u' = -j/en_e$.

La determinación de las velocidades de difusión requiere la solución de un sistema de tres ecuaciones cinéticas y el cálculo local de las funciones de distribución para cada componente. Sin embargo, pueden obtenerse resultados aproximados empleando las ecuaciones de movimiento de las componentes individuales (III.4). En ellas, la fuerza de fricción se obtiene considerando la interacción de las partículas de una especie con las restantes $R_a = -\sum_b R_{ab}$, y cada fuerza $R_{ab} = -R_{ba}$ adquiere una expresión sencilla en el caso en que las componentes a y b tengan funciones de distribución maxwellianas con velocidades V_a y V_b . En este caso resulta^{52,76}

$$R_{ab} = -\alpha_{ab}(V_a - V_b) \quad , \quad \alpha_{ab} = \alpha_{ba} \quad (\text{III.40})$$

$$\alpha_{ab} = n_a n_b m_{ab} \alpha'_{ab} \quad , \quad (\text{III.41})$$

siendo el coeficiente de fricción proporcional a $n_a n_b$, a la

masa reducida de las partículas que colisionan, $m_{ab} = m_a m_b / (m_a + m_b)$, y a un coeficiente α'_{ab} que se calcula mediante la integral

$$\alpha'_{ab} = \langle v \sigma_{ab} \rangle = (m_{ab}/3T) \int v^3 \sigma'_{ab} f_v^0 d^3v, \quad (\text{III.42})$$

con
$$\sigma'_{ab}(v) = \int (1 - \cos\theta) d\sigma(v, \theta) = \sigma_1, \quad (\text{III.43})$$

(ver (II.78), (II.82)). Para colisiones elásticas con partículas neutras, considerando a las partículas a y b como esferas sólidas de radios r_a y r_b , la sección eficaz es, aproximadamente, $\sigma_{ab} = \pi(r_a + r_b)^2$; en este caso, tomando $T_a = T_b = T$, se puede escribir

$$\alpha'_{ab} = (4/3) \sigma_{ab} (8T/\pi m_{ab})^{1/2} \quad (\text{III.44})$$

En el caso de interacciones coulombianas entre partículas de carga e_a y e_b , se tendrá, también con $T_a = T_b = T$,

$$\alpha'_{ab} = (4/3) \sqrt{2\pi} \lambda e_a^2 e_b^2 / \sqrt{m_{ab}} T^{3/2} \quad (\text{III.45})$$

Las relaciones (III.40) no tienen en cuenta la posible anisotropía del coeficiente de fricción en un campo magnético.

Las ecuaciones de movimiento para cada componente de la mezcla, utilizando (III.39) y (III.40), pueden escribirse para el caso más general,

$$m_e n_e \frac{d^e}{dt} \mathbf{V}_e = -\nabla p_e - \nabla \Pi_e - e n_e (\mathbf{E} + (\mathbf{V}_e \times \mathbf{B})/c) - \alpha_e \mathbf{u}' - \alpha_{enw}, \quad (\text{III.46})$$

$$m_i n_i \frac{d^i}{dt} V_i = - \nabla p_i - \nabla \phi_i + e n_i (E + (V_i \times B)/c) + \alpha_{e i} u' - \alpha_{i n} w , \quad (\text{III.47})$$

$$m_n n_n \frac{d^n}{dt} V_n = - \nabla p_n - \nabla \phi_n + \alpha_{e n} u' + \alpha_{n w} \quad (\text{III.48})$$

Aquí se ha supuesto iones una sola vez ionizados ($Z=1$), y se empleó la siguiente notación:

$$\frac{d^a}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V^a \cdot , \quad (\text{III.49})$$

$$\alpha_e = \alpha_{e i} + \alpha_{e n} = m_e n_e / \tau_e \quad \tau_e = (1/\tau_{e i} + 1/\tau_{e n})^{-1} \quad (\text{III.50})$$

$$\alpha_n = \alpha_{e n} + \alpha_{i n} = \alpha_{i n} / (1 - \epsilon) \quad ; \quad \epsilon = \alpha_{e n} / \alpha_{i n} \quad . (\text{III.51})$$

El coeficiente de fricción α_n depende principalmente de las colisiones entre partículas pesadas, ya que en este tipo de colisiones se produce una mayor transferencia de cantidad de movimiento. Es por ello que resulta usual escribir

$$\alpha_n \approx \alpha_{i n} \quad , \quad \epsilon = \alpha_{e n} / \alpha_n \approx (m_e / m_{i n}) (\alpha_{e n}^i / \alpha_{i n}^i) \ll 1$$

Las aproximaciones más comunmente usadas al trabajar con las ecuaciones (III.46)-(III.48), son despreciar los efectos viscosos y la inercia de los electrones, y considerar un plasma neutro, $n_i = n_e$, pudiendo reemplazarse u' por $-j/en_e$. En esta situación, puede obtenerse una descripción de dos fluidos sumando las ecuaciones para las partículas cargadas y conservando la de la componente neutra

$$-m_i n_i \frac{d^i V_i}{dt} - \nabla(p_e + p_i) + (j \times B)/c = -\alpha_{e n} j / e n_e + \alpha_n w \quad ,$$

(III.52)

$$-m_n n_n \frac{d^n V_n}{dt} - \nabla p_n = \alpha_{e n} j / e n_e - \alpha_n w \quad (III.53)$$

La suma de estas ecuaciones provee la ecuación general de movimiento para un único fluido.

Si la frecuencia de colisiones es baja, resulta más conveniente usar las ecuaciones individuales de movimiento para neutros y partículas cargadas, debido a que las velocidades no se encuentran ligadas entre sí por las colisiones (estrictamente hablando la ecuación cinética debería emplearse en el límite de pocas colisiones). Por otra parte, la descripción hidrodinámica se aplica para altas frecuencias de colisiones, resultando más conveniente el empleo de la ecuación general de movimiento para V y las ecuaciones de las velocidades relativas. Dentro de este segundo caso, varios autores^{52, 94-96} han transformado con diferentes métodos las ecs. (III.46)-(III.48), obteniendo distintas expresiones para las velocidades relativas según el problema particular. Así, por ejemplo, la difusión del plasma respecto de los neutros, representada por w , puede obtenerse de (III.52) y (III.53), reemplazando en los términos de inercia a $d^i V_i / dt$ y $d^n V_n / dt$ por dV/dt (esto corresponde a despreciar términos del orden de dw/dt comparados con términos del orden de w/τ que aparecen en las fuerzas de fricción), para luego sumar ambas ecuaciones y obtener una expresión para dV/dt , con la cual se reemplaza en alguna de las dos ecua-

ciones, despejando finalmente w :

$$w = \{ -G + m_n n_n (j \times B) / \rho c \} / \alpha_n + \epsilon_j / e n_e \quad , \quad (III.54)$$

$$\text{donde } G = (m_n n_n / \rho) \nabla(p_e + p_i) - (m_i n_i / \rho) \nabla p_n \quad (III.55)$$

Con las hipótesis que permitieron escribir (III.52) y (III.53), la ecuación (III.46) para los electrones se reduce a la forma

$$-\nabla p_e - e n_e (E + (V_e \times B) / c) = -\alpha_e j / e n_e + \alpha_e n w \quad (III.56)$$

Si en esta ecuación se reemplaza w por la expresión (III.54) se obtiene una ecuación para la ley de Ohm:

$$E + (V_i \times B) / c + (\nabla p_e - \epsilon G) / e n_e = j / \sigma + (1 - \epsilon m_n n_n / \rho) (j \times B) / e n_e c \quad (III.57)$$

$$\text{con } \sigma = e^2 n_e^2 (\alpha_{ei} + \alpha_{en} \alpha_{in} / (\alpha_{en} + \alpha_{in}))^{-1} \approx e^2 n_e \tau_e / m_e \quad . \quad (III.58)$$

La ecuación (III.57) es bastante similar a la (III.30) para un plasma simple, pero contiene el factor $1/\sigma$ determinado por la frecuencia total de colisiones $1/\tau_e$. Para obtener una ecuación que se acerque más a (III.30), puede usarse la relación $V_i = V + m_n n_n w / \rho$, con (III.54), en (III.57), obteniendo

$$E + (V \times B)/c + (\nabla p_e - \epsilon G)/en_e -$$

$$m_n n_n (G \times B)/c \rho \alpha_n = j_{\parallel} / \sigma_{\parallel} + j_{\perp} / \sigma_{\perp} + (1 - 2\epsilon m_n n_n / \rho) (j \times B) / en_e c$$

(III.59)

$$\text{donde } \sigma_{\parallel} = \sigma, \quad 1/\sigma_{\perp} = 1/\sigma + B^2 (m_n n_n / \rho)^2 / \alpha_n c^2 \quad (\text{III.60})$$

La ley de Ohm en la forma (III.59) coincide con la obtenida por T. G. Cowling⁹⁴.

Por último, en lo que concierne a la energía disipada por causa de la fricción, se tiene que el calor generado como consecuencia de ella es $Q_{fr} = Q_e + Q_i + Q_n$. Teniendo en cuenta la relación general (III.15), esta expresión podrá escribirse en la forma $Q_{fr} = -R_{ei} u'^2 - R_{en} (u' + w)^2 - R_{in} w^2$. Utilizando (III.40) se encuentra

$$Q_{fr} = \alpha_{ei} u'^2 + \alpha_{en} (u + w)^2 + \alpha_{in} w^2 = \alpha_e u'^2 + \alpha_n w^2 + 2\alpha_{en} u \cdot w \quad (\text{III.61})$$

Empleando las ecuaciones (III.54) y (III.58), se transforma (III.61) en la expresión siguiente:

$$Q_{fr} = j^2 / \sigma + 1/\alpha_n (m_n n_n (j \times B) / \rho c - G)^2 \quad (\text{III.62})$$

Si la corriente fluye en la dirección del campo magnético, o bien $B = 0$, se tiene que $w \sim \epsilon u' \ll u'$, debido al gran coeficiente de fricción para las partículas pesadas, de modo que la disipación debida a ellas es pequeña: $\alpha_n w^2 \sim \epsilon \alpha_e u'^2$. En el caso en que la corriente fluya en la dirección perpen-

dicular al campo magnético, la disipación puede ser mayor como consecuencia de las colisiones entre iones y neutros.

El cuadro general planteado por las ecuaciones (III.46)-(III.48) para una mezcla de tres componentes, puede ser ampliado incluyendo distintas especies de iones y neutros. Los aspectos distintivos de esta nueva situación serán tratados en la siguiente sección.

III.4.- Descripción de un plasma de múltiples especies.

En la práctica, en los experimentos de laboratorio o bajo condiciones astrofísicas, uno debe considerar un plasma formado por varias especies. Un plasma totalmente ionizado puede contener iones de distintos tipos, mientras que un gas que no se encuentra totalmente ionizado puede contener distintas moléculas, átomos, etc., además de iones y electrones. Si las colisiones entre las partículas son suficientemente frecuentes, la descripción hidrodinámica puede seguir aplicándose a tal tipo de plasma. La densidad del plasma y su velocidad hidrodinámica son determinadas por las ecuaciones (III.16) y (III.17), donde la suma debe extenderse sobre todas las componentes. Además de la ecuación de conservación de la masa (III.20), que es válida siendo $\dot{n}_a \neq 0$, se requieren ecuaciones para cada una de las componentes, que describen el cambio de estado del plasma. Si la tasa de producción de partículas de la especie a , por unidad de volumen, es \dot{n}_a , dichas ecuaciones pueden escribirse en la forma (III.1) y, a partir de ella,

$$\rho \frac{d}{dt} (m_a n_a / \rho) + \text{div}(m_a n_a u'_a) = m_a \dot{n}_a \quad , \quad (\text{III.63})$$

donde $u'_a = v_a - V$ y siendo $m_a n_a / \rho$ la concentración relativa de la especie a . Planteando la conservación de la masa y la carga se obtienen las relaciones

$$\sum_a m_a \dot{n}_a = 0 \quad , \quad \sum_a e_a \dot{n}_a = 0 \quad (\text{III.64})$$

Para la descripción del movimiento del plasma pueden utilizarse las ecuaciones individuales para cada especie (III.4), considerando el plasma como compuesto por varios fluidos, o bien sumar todas estas ecuaciones y obtener la ecuación de movimiento que describe el balance total de la cantidad de movimiento. Esta única ecuación se reduce a una forma del tipo (III.29) donde $p = \sum_a p_a$, $\Pi_{jk} = \sum_a \Pi_{jk}^a$. En esta ecuación donde aparece la velocidad hidrodinámica V , la información sobre la difusión de cada componente, mediante u'_a , se pone de manifiesto en las expresiones para T_a , p_a y Π_a que se obtienen adoptando nuevas definiciones para las mismas. La diferencia radica en que al tomar como variables a las velocidades de difusión, la definición de T_a, p_a, Π_a , se utiliza la velocidad aleatoria $(v_a - V)$, en lugar de $(v_a - V_a)$ utilizada en (III.6)-(III.8). Las cantidades "viejas" se encuentran relacionadas con las "nuevas" mediante las expresiones

$$\begin{aligned}
T_a^{(nueva)} &= T_a^{(vieja)} + m_a (u'_a)^2 / 3 \quad , \\
p_a^{(nueva)} &= p_a^{(vieja)} + m_a n_a (u'_a)^2 \quad , \quad (III.65) \\
\mathbb{T} \left\{ \begin{smallmatrix} n & u & e & v & o \\ a & j & k \end{smallmatrix} \right\} &= \mathbb{T} \left\{ \begin{smallmatrix} v & i & e & j & a \\ a & j & k \end{smallmatrix} \right\} + m_a n_a u'_{aj} u'_{ak}
\end{aligned}$$

Cuando las colisiones son dominantes y es aplicable la descripción hidrodinámica, la diferencia entre las dos cantidades no resulta importante debido a que u'_a es pequeña, en cuyo caso pueden despreciarse los términos cuadráticos. Elijiendo la descripción de un único fluido, se requieren ecuaciones para determinar las velocidades u'_a . Para ello, teniendo en cuenta que

$$\sum_a m_a n_a u'_a = 0 \quad , \quad (III.66)$$

reemplazando $d^a V_a / dt$ por dV / dt y despreciando los efectos viscosos en (III.4), se tiene una ecuación de movimiento, para cada componente, de la cual despejar u_a en forma aproximada:

$$\begin{aligned}
m_a n_a \frac{d}{dt} V &= - \nabla p_a + e_a n_a (E + (V \times B) / c) + e_a n_a (u'_a \times B) / c - \\
&\quad \sum_b \alpha_{ab} (u'_a - u'_b) \quad (III.67)
\end{aligned}$$

En el caso general, considerando todos los efectos posibles, estas expresiones se tornan realmente muy complicadas.

En lo relativo al calor total generado por fricción, en concordancia con (III.15) y (III.40), resulta

$$Q_{fr} = \sum_a Q_a = \sum_{a,b} Q_{ab} = \sum_{a \neq b} \alpha_{ab} (u'_a - u'_b)^2 \quad . \quad (III.68)$$

Multiplicando (III.67) por u'_a y sumando sobre todas las componentes del plasma, tomando en cuenta (III.68), se tiene

$$Q_{rr} = (E + (V \times B)/c) \cdot j - \sum_a u'_a \nabla p_a \quad (\text{III.69})$$

La ecuación de balance de energía para un plasma de múltiples especies se obtiene sumando las ecuaciones de conservación para cada componente ((III.10) y (III.13)), obteniendo una expresión formalmente similar a las ecuaciones (III.34) o (III.37) para un plasma "simple", donde ahora el flujo de calor es

$$q = \sum_a q_a^{(\text{nuevo})} + \sum (5/2) p_a u'_a, \quad (\text{III.70})$$

donde

$$q_{aj}^{(\text{nuevo})} = q_{aj}^{(\text{viejo})} + (m_a n_a (u'_a)^2 / 2) u'_{aj} + \eta_{(a)jk}^{(\text{viejo})} u'_{ak}$$

Debe tenerse presente que (III.34) y (III.37) se aplican solamente para un plasma de componentes monoatómicas, en cuyo caso puede suponerse que la energía cinética de todas las partículas está asociada con el movimiento de traslación en el caso que, por ejemplo, el plasma esté totalmente ionizado. La energía interna del plasma, por unidad de volumen, resulta $E = \sum_a E_a = 3p/2$. En el caso general debe reemplazarse $3p/2$ por la energía interna E en la ecuación de la energía, mientras que $5p/2$ deberá reemplazarse por $E + p$ en la expresión del flujo de energía. Por ejemplo, en una molécula diatómica

que tiene cinco grados efectivos de libertad, $E_a = 5n_a T_a / 2 = 5p_a / 2$; $E_a + p_a = 7p_a / 2$. La ecuación de balance de calor, o ecuación de transporte para la energía interna, para un plasma de múltiples componentes, se obtiene en forma análoga a la ecuación (III.38), y es de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E + \text{div}(EV) + p \text{div}V &= -\text{div}(q) + \sum_a u'_a \nabla p_a + \sum Q \\ &= -\text{div}(q) + (E + (V \times B)/c) \cdot j + Q_{vis} \end{aligned} \quad (\text{III.71})$$

donde $\sum Q = Q_{fr} + Q_{vis}$, pudiendo aparecer otras fuentes de pérdida de calor.

Como se ha visto, las ecuaciones para la descripción de un plasma de varias componentes como un único fluido, guardan similitud formal con las ecuaciones de un plasma "simple", pero es necesario, además, considerar tantas ecuaciones adicionales como velocidades de difusión u'_a existan en la mezcla de múltiples especies. El otro camino para encarar la descripción de este tipo de plasma, consiste en mantener como variables a las velocidades medias de cada especie V_a y utilizar las ecuaciones individuales para describir cada fluido de partículas a , que componen el plasma. La conveniencia de cada descripción dependerá del caso particular que se pretenda analizar.

III.5.- Condiciones de aplicabilidad de la descripción macroscópica.

Las cantidades q , \mathbb{f}_{jk} , R y Q que aparecen en las ecuaciones de transporte, se definen dando por supuesto que los procesos de relajación, que hacen que las funciones de distribución se aproximen a una maxwelliana, no se vean inhibidos, esto es, dichas relaciones se aplican solamente cuando se verifican ciertos requerimientos. En esencia, lo que se pide es que los valores promedio de todas las cantidades del plasma varíen lentamente en el espacio y en el tiempo. Una función de distribución se convierte en maxwelliana en un tiempo del orden del tiempo entre colisiones τ . Así, al usar las ecuaciones de transporte todas las cantidades del plasma no deberán variar significativamente durante un tiempo característico entre colisiones, τ , o sobre distancias comparables a las que recorren las partículas entre dos colisiones sucesivas, l . La condición de una variación temporal lenta se escribe

$$d/dt \ll 1/\tau \quad , \quad (\text{III.72})$$

mientras que el requerimiento de variaciones espaciales lentas, para el caso con campo magnético débil, $\omega_c \tau < 1$, o nulo, se expresa

$$L \gg l \quad , \quad (\text{III.73})$$

donde L es la longitud característica sobre la cual varían

en forma significativa todas las cantidades, con lo que $\nabla \sim 1/L$. Las dos condiciones anteriores también deben ser satisfechas cuando se utilizan las ecuaciones cinéticas usuales.

En el caso de campos magnéticos fuertes ($\omega_c \tau \gg 1$) la primera condición sigue siendo válida, pero la segunda se hace un poco más complicada. El movimiento de las partículas a través del campo magnético se encuentra acotado por el radio de Larmor r_L , que es menor que el camino libre medio en un factor $\omega_c \tau$. Es así que en muchos casos las condiciones de aplicabilidad se completan pidiendo

$$L_{\perp} \gg r_L \quad , \quad L_{\parallel} \gg l \quad , \quad (\text{III.74})$$

siendo L_{\perp} y L_{\parallel} las distancias características en las direcciones perpendicular y paralela al campo magnético, de manera que, en forma aproximada, es $\nabla_{\perp} \sim 1/L_{\perp}$ y $\nabla_{\parallel} \sim 1/L_{\parallel}$. Sin embargo, las dos condiciones (III.74) valen si el sistema es manifiestamente elongado en la dirección del campo magnético y tiene la simetría necesaria, un ejemplo típico es un plasma cilíndrico, axisimétrico, de radio $\sim L_{\perp}$ y campo magnético simétrico, o bien un toro obtenido al cerrar el cilindro de plasma sobre sí mismo, usando un radio de curvatura R muy grande. En un campo magnético inhomogéneo, las partículas realizan un movimiento de deriva con velocidad del orden de $(v_r |\nabla B/B|)$ además de girar en una circunferencia de radio igual al radio de Larmor. Esta deriva representa un desplazamiento de partículas entre colisiones. Si las trayectorias de deriva atraviesan regiones con diferentes temperaturas, existirá un transporte adicional de calor y la consecuente

desviación de la función de distribución de la forma maxwelliana. La condición $L_{\perp} \gg r$ se aplica sólo cuando este mecanismo no existe. En un sistema simétrico en el cual la curvatura de las líneas de fuerza es pequeña, como es el caso de un toro con radio de curvatura $R \gg L_{\perp}$, el mecanismo descrito tiene lugar con una velocidad característica del orden de v_r/R . De esta manera, una partícula podrá desplazarse una distancia $\sim v_r r/R \sim l_r/R$ en un intervalo igual al tiempo entre colisiones, entonces, a la condición $L_{\perp} \gg r$ deberá agregarse el requerimiento $L_{\perp} \gg l_r/R$. Si no existe este tipo especial de simetría, el fenómeno ocurrirá con velocidades del orden de v_r/L_{\perp} y las condiciones a satisfacer serán

$$L_{\perp} \gg \sqrt{l_r} \quad L_{\parallel} \gg l \quad (\text{III.75})$$

Si en el cálculo de los coeficientes de transporte se utiliza la forma de Landau para el término de colisiones, debe tenerse presente que en él se ha despreciado el efecto del campo magnético sobre las colisiones. Esta aproximación es válida si el radio de Larmor es grande comparado con las dimensiones efectivas de la región en la cual tienen lugar las interacciones coulombianas, es decir, cuando es mayor que la longitud de Debye,

$$r \gg l_D \quad , \quad (\text{III.76})$$

$$B^2 \ll 8\pi n_e m_e c^2$$

Si esta condición no se satisface, los coeficientes de transporte sufrirán alguna modificación. Usualmente, esta

modificación es menor que un orden de magnitud, debido a que las colisiones caracterizadas por parámetros de impacto menores que r son del orden de $(\ln(l_D/r))^{-1}$ veces las colisiones que tienen parámetros de impacto mayor.

Existe otro factor que puede limitar la aplicabilidad de las ecuaciones de transporte presentadas en este capítulo. Se trata de la presencia de alguna inestabilidad en el plasma. Un plasma inestable puede generar campos que fluctúen aleatoriamente y que, a su vez, pueden producir una significativa modificación de los coeficientes de transporte. Este efecto es análogo al de la turbulencia en hidrodinámica y escapa del contexto de las situaciones que serán tratadas con el modelo presentado en el siguiente capítulo.

IV. MODELO DE CINCO FLUIDOS PARA LA INTERFASE PLASMA-GAS NEUTRO

IV.1.- Antecedentes y características del modelo.

Muchos de los estudios cinéticos sobre el transporte de neutros en la región de transición plasma-gas neutro, se circunscriben a la consideración de un único elemento: hidrógeno y sus neutros. Tal es el caso, por ejemplo, de los trabajos de S.Rehker y H.Wobig (1973)⁹⁷, J.Hackmann, et al, (1978)⁹⁸, y de M.B.Tendler y O.Ågren (1982)⁹⁹. En todos ellos se emplea una geometría plana y, partiendo de la ecuación de Boltzmann, se calculan numéricamente las funciones de distribución comparándolas con una maxwelliana, y los flujos de partículas y de energía que se depositan en la pared⁹⁷. También se ha estudiado la intervención de diferentes mecanismos de reflexión de partículas en la pared, y su incidencia en las soluciones numéricas de los casos estacionario y dependiente del tiempo⁹⁸. Asimismo se han buscado aproximaciones analíticas para la función de distribución y densidad de los neutros, considerando los efectos de perfiles inhomogéneos de temperatura y comparando estos resultados con los obtenidos numéricamente⁹⁹. En un trabajo posterior, M.B.Tendler y R.S.Chhabra (1982)¹⁰⁰ aplican por primera vez la teoría cinética al problema de la penetración de gas neutro a través de una región de transición de dos elementos. En este trabajo los autores despreciaron el fenómeno de intercambio de carga y recombinación, por ello su estudio no es aplicable a impurezas importantes como el oxígeno, ni

a plasmas moderadamente densos ($\sim 10^{14} \text{ cm}^{-3}$). M.B.Tendler¹⁰¹ extendió el trabajo anterior a las impurezas de oxígeno. Más recientemente R.S.Chhabra (1984)¹⁰² incluye términos correspondientes a importantes interacciones que tienen lugar entre neutros, iones y electrones, en un plasma de dos elementos, y obtiene expresiones analíticas para los perfiles de densidades de hidrógeno y de los átomos de las impurezas. El mencionado autor encuentra que la inclusión del proceso de recombinación incrementa la densidad de neutros en algunos órdenes de magnitud a distancias de unos pocos caminos libres medios de la pared. Encuentra, además, que para impurezas como oxígeno, para las cuales el intercambio de carga con hidrógeno es un fenómeno resonante accidental, la densidad de neutros es gobernada principalmente por el fenómeno de mutuo intercambio de carga para plasmas moderadamente densos. Sin embargo, para plasmas densos ($\geq 10^{17} \text{ cm}^{-3}$) la densidad de neutros es determinada, preponderantemente, por la recombinación de tres cuerpos. Este incremento en la densidad de neutros es proporcional a la densidad del plasma; la importancia de la recombinación aumenta con el incremento de la densidad del plasma.

En lo que concierne al empleo de la descripción macroscópica, mediante un modelo de uno o varios fluidos para la transición plasma-gas neutro, el primer tratamiento cuantitativo utilizando un sistema de dos fluidos, fue realizado por B.Lehnert en 1960¹⁰³. En este trabajo, Lehnert considera un sistema de dos fluidos: "plasma simple" (según la notación de Braginskii⁵² utilizada en el capítulo anterior) como un único fluido y una componente neutra como

segundo fluido; emplea las leyes de conservación de la masa, carga, cantidad de movimiento y energía, incluyendo los procesos de ionización, intercambio de carga y colisiones elásticas de las partículas neutras. En todo el desarrollo considera válida la condición de cuasineutralidad del fluido correspondiente al plasma simple, es decir que no trata los efectos del potencial electrostático. Este enfoque fue desarrollado en extenso por el mismo autor en trabajos posteriores de 1968 ^{104, 105} y 1976 ¹⁰⁶. En ellos se emplea la aproximación de difusión y se considera la existencia de bajo contenido de impurezas. Estudios similares fueron hechos B. Bonnevier (1976)¹⁰⁷ y A. Nocentini y R. Engelmann (1981)¹⁰⁸, mostrándose en éste último trabajo que, en general, el cociente entre las densidades de los dos tipos de neutros varía a través de la interfase plasma-gas neutro, mientras que permanece casi constante, para las aproximaciones realizadas, el cociente entre las densidades iónicas. En todos estos modelos se pone especial atención en la variación de las especies neutras, determinada por ionización e intercambio de cargas, para plasmas de bajas densidades ($\lesssim 10^{14} \text{ cm}^{-3}$).

Hasta el presente, ninguna de las dos descripciones alternativas, teoría cinética o descripción macroscópica, ha completado el cuadro de los procesos que tienen lugar durante la interacción de un plasma con un gas neutro para los diversos regímenes físicos de interés. En este sentido, el modelo que se presenta a continuación es una nueva contribución al estudio de la interfase plasma-gas neutro, particularmente para la comprensión del régimen de alta densidad ($\gtrsim 10^{17} \text{ cm}^{-3}$). La descripción macroscópica a-

doptada posee características comunes a todos los modelos de este tipo: geometría plana, aproximación de difusión, predominio de interacciones colisionales sobre procesos radiactivos, pero, a la vez, presenta diferencias fundamentales en la forma de encarar la descripción de la transición, que convierten a esta formulación en una contribución original. Las diferencias pueden resumirse diciendo, para el modelo, que:

- Considera a cada componente de la interfase como un fluido individual.
- Es la recombinación de tres cuerpos (y no el proceso de intercambio de cargas) la que, junto con la ionización por impacto electrónico, regula el balance de las componentes neutras, extendiendo la aplicación de uno de los más recientes resultados de la descripción cinética¹⁰².
- El predominio del proceso de recombinación presupone un rango de densidades típico de los experimentos con plasmas densos, un área hasta ahora poco estudiada.
- Estudia la incidencia de distintos gases (variando la mezcla de componentes) en las características de la región de transición.
- Calcula la variación de las conductividades térmicas y eléctrica con adecuadas reglas de mezclas. Esto permite el cálculo del valor promedio del producto de la conductividad eléctrica por el cuadrado del espesor de la interfase, con el cual se obtiene el tiempo de difusión de un campo magnético a través de la región en estudio. Quien esto escribe, ha comprobado que la magnitud del campo magnético que puede medirse en el gas neutro después de difundir, de-

pende críticamente del valor de dicho producto⁵⁰.

- Contempla la existencia de un campo eléctrico debido a separación de cargas.
- Calcula las variaciones de la densidad de energía asociada a los movimientos de difusión de las partículas, comparándolas con el incremento de la densidad de energía debida a los efectos de conducción térmica.

El modelo de cinco fluidos que posee las características descritas, se expresa mediante las ecuaciones que se dan a continuación.

IV.2.- Ecuaciones del modelo.

Se describen las propiedades de un estrato plano, de plasma parcialmente ionizado, correspondiente a la transición entre un plasma caliente totalmente ionizado y un gas neutro frío. El plasma ocupa el semiespacio $x < 0$, siendo la masa de sus iones, m_i , su densidad, n_0 , y temperatura, T_0 , parámetros del modelo, al igual que la temperatura, T_g , y la masa, m_H , de los átomos que forman el gas neutro ubicado en la región $x > d$. Para plantear las ecuaciones macroscópicas que determinan el comportamiento de la interfase plasma-gas neutro se han considerado las siguientes hipótesis:

- i. Situación estacionaria ($\partial/\partial t = 0$), para una interfase en reposo ($V_{c.m.} = 0$).
- ii. Predominio de los procesos colisionales sobre los radiativos, lo cual hace posible despreciar estos últimos

- iii. Validez de las relaciones (II.86), (II.89), (II.90), y (II.93), en virtud de las cuales es posible considerar que las funciones de distribución de las partículas son, con muy buena aproximación, maxwellianas. Estas restricciones deberán ser verificadas a posteriori para garantizar la coherencia del modelo.
- iv. Grado de ionización tal que verifique la condición (II.86) para las colisiones de electrones con partículas neutras⁹² (ver Fig. 2 y tabla II).
- v. Las colisiones electrón-partícula pesada (incluyendo iones y neutros) tienden a producir una función de distribución electrónica maxwelliana con temperatura $T_e = T_H$. En consecuencia, se tomará para cada punto de la región de transición un único valor de temperatura⁹² $T_e = T_i = T_H = T$ (equilibrio termodinámico local).
- vi. Se admite la existencia de un campo eléctrico debido a separación de cargas, el cual puede producir pequeños apartamientos de la función maxwelliana, pero su intensidad es tal que no modifica el cuadro anterior (ver Fig.2 y sus comentarios en el capítulo II).
- vii. Siendo cuasi-maxwellianas las funciones de distribución, se puede hacer uso de las reglas de mezclas dadas en el capítulo II para el cálculo de los coeficientes de transporte que sean necesarios.
- viii. No se toma en cuenta el campo magnético en la interfase, para lo cual hay que suponer que no existe o bien que se trata de un campo "débil" en el sentido de verificar la condición $\omega_c \tau \ll 1$.
- ix. El espesor de la transición, d , verifica la condición de

aplicabilidad de la descripción macroscópica mediante ecuaciones de fluidos: $d \gg l$, con l el camino libre medio entre colisiones de las partículas de la región en estudio. Esta condición, junto con iv, establecerá el rango de densidades y temperaturas que aseguran la validez del modelo.

x. Las velocidades de las partículas componentes de la interfase son debidas a difusión. Ello posibilita despreciar términos cuadráticos en las velocidades.

xi. No se tienen en cuenta niveles excitados de las partículas que componen la zona de transición.

xii. Los procesos colisionales que regulan el balance de partículas son la ionización por impacto electrónico y la recombinación de tres cuerpos.

xiii. Se ignoran los efectos viscosos.

xiv. Iones una sola vez ionizados.

xv. Vale la condición de cuasineutralidad pero sólo para el plasma totalmente ionizado.

xvi. La temperatura del plasma se mantiene constante en un valor T_0 (no así a través de la interfase donde $T=T(x)$)

Partiendo de (III.1), (III.4) y (III.71), con el empleo de la ecuación (III.68), y utilizando las hipótesis mencionadas, las ecuaciones que describen el comportamiento de la interfase plasma-gas neutro son las siguientes:

La ecuación de continuidad con fuentes o sumideros de partículas, para cada especie,

$$\frac{d}{dx}(n_s v_s) = \dot{n}_s, \quad (IV.1)$$

la ecuación del balance de la cantidad de movimiento para cada especie,

$$\frac{d}{dx}(n_s T) = e_s n_s E + R_s \quad , \quad (\text{IV.2})$$

y la ecuación del balance de la energía,

$$\frac{d}{dx}T = (T(\sum_s (5/2)n_s v_s) - Q)/\kappa \quad , \quad (\text{IV.3})$$

junto con las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla_x E = 0 \quad \text{de donde resulta} \quad E = -\nabla\phi \quad , \quad (\text{IV.4})$$

$$\nabla \cdot E = 4\pi \sum_s e_s n_s \quad , \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{de} \quad \nabla \cdot B = 0 \quad \text{resulta} \quad B_x = \text{cte.} \quad , \quad (\text{IV.6})$$

$$\text{y} \quad j_x = \sum_s e_s n_s v_s = 0 \quad \text{porque} \quad \nabla_x B = 0 \quad , \quad (\text{IV.7})$$

donde el subíndice s , ($s = 1, \dots, 5$), representa a cada una de las especies de la interfase, con densidad n_s , velocidad v_s y carga e_s ($e_s = 0$ para los neutros). Según el número que adopte el índice s , el tipo de partícula representado será el siguiente:

$$\begin{aligned}
1 &= \text{electrones} & , \\
2 &= \text{iones livianos} & , \\
3 &= \text{iones pesados} & , \quad (\text{IV.8}) \\
4 &= \text{neutros livianos} & , \\
5 &= \text{neutros pesados} & ,
\end{aligned}$$

κ es la conductividad térmica total y Q es una constante que depende de las condiciones de contorno del problema

A continuación se explicará el origen y reducción de las ecuaciones que se acaban de presentar, a partir de las hipótesis del modelo.

IV.2.1.- Ecuación de continuidad con fuentes o sumideros de partículas.

De acuerdo a la hipótesis xii, son los procesos de ionización por impacto electrónico (II.76), (II.81) y de recombinación de tres cuerpos (II.74), (II.75), quienes determinan la tasa de producción de iones livianos y pesados

$$\begin{aligned}
\dot{n}_s &= \frac{10^{-5} n_1 n_{(s+2)} (T/E_{(s+2)}^\infty)^{1/2}}{(E_{(s+2)}^\infty)^{3/2} (6.0 + T/E_{(s+2)}^\infty)} \exp(-E_{(s+2)}^\infty/T) - \\
&8.75 \times 10^{-27} n_1^2 n_s T^{-4.5} \quad (\text{IV.9})
\end{aligned}$$

con $s = 2, 3$, $E_{(s+2)}^\infty$ la energía de ionización del átomo $(s + 2)$, del cual se obtiene el ion s , expresada en eV. A partir de (IV.9) se pueden calcular las tasas correspondientes a las restantes partículas:

$$\dot{n}_1 = \dot{n}_2 + \dot{n}_3 \quad \dot{n}_{(s+2)} = -\dot{n}_s \quad , \quad s = 2, 3 \quad . \quad (IV.10)$$

En virtud de la hipótesis *i* (situación estacionaria) la ecuación (III.1) para balance del número de partículas de cada especie presente en la interfase, se reduce a la forma (IV.1), donde las tasas de producción de partículas que figuran en el miembro derecho son las expresadas por las ecs. (IV.9) y (IV.10).

IV.2.2.- Ecuación del balance de la cantidad de movimiento.

Las hipótesis *i*, *v*, *vi*, *viii*, *x* y *xiii*, permiten escribir la ec. (III.4) para la cantidad de movimiento de cada especie, en la forma (IV.2). En esta última ecuación se ha utilizado además la expresión (III.6): $p_s = n_s T$.

La fuerza de fricción para cada componente *s*, que aparece en el miembro derecho de (IV.2), está dada por $R_s = \sum_{r \neq s} R_{sr}$, y cada fuerza R_{sr} en el caso de partículas *r* y *s* con funciones de distribución maxwellianas (hipótesis *iii* - *v*) puede escribirse utilizando las expresiones (III.40) - (III.43). Considerando que para colisiones elásticas de partículas cargadas con partículas neutras, y de partículas neutras entre sí, la sección eficaz σ_{sr} de (III.43) es independiente de la velocidad (si bien puede tener una dependencia débil de la temperatura. Ver apéndice B), se tendrá, en general,

$$\alpha_{sr} = (8/3) n_s n_r \sigma_{sr} (2m_{sr} T / \pi)^{1/2} \quad , \quad (IV.11)$$

donde se ha utilizado la condición $T_s = T_r$, (hipótesis v).
 En el caso de interacciones coulombianas entre partículas de carga $e_s = e_r = e$ (hipótesis xiv), se tiene para el coeficiente de fricción:

$$\alpha_{s r} = (4/3) n_s n_r (2\pi m_{s r})^{1/2} e^4 \lambda(T)^{-3/2} \quad , \quad (\text{IV.12})$$

siendo λ el logaritmo coulombiano.

A partir de las expresiones (IV.11) y (IV.12), con la relación (III.14) y las aproximaciones

$$\begin{aligned} m_{1 s} &= m_1 \quad , \quad s \neq 1 \quad , \\ m_{s r} &= m_{s s} \quad , \quad s = 2, 3 \quad r = s+2 \quad , \quad (\text{IV.13}) \\ m_{s r} &= m_2 \quad , \quad s = 2, 4 \quad r = 3, 5 \quad , \end{aligned}$$

las fuerzas de fricción se escribirán de la siguiente manera:

$$R_{1 r} = - (4/3) n_1 n_r (2\pi m_1)^{1/2} e^4 \lambda T^{-3/2} (v_1 - v_r) \quad , \quad r = 2, 3 \quad , \quad (\text{IV.14})$$

$$R_{1 r} = - (8/3) n_1 n_r \sigma_{1 r} (2m_1 T/\pi)^{1/2} (v_1 - v_r) \quad , \quad r = 4, 5 \quad , \quad (\text{IV.15})$$

$$R_{2 1} = - R_{1 2} \quad , \quad (\text{IV.16})$$

$$R_{2 3} = - (4/3) n_2 n_3 (2\pi m_2)^{1/2} e^4 \lambda T^{-3/2} (v_2 - v_3) \quad , \quad (\text{IV.17})$$

$$R_{2 4} = - (8/3) n_2 n_4 \sigma_{2 4} (m_2 T/\pi)^{1/2} (v_2 - v_4) \quad , \quad (\text{IV.18})$$

$$R_{2 5} = - (8/3) n_2 n_5 \sigma_{2 5} (2m_2 T/\pi)^{1/2} (v_2 - v_5) \quad , \quad (\text{IV.19})$$

$$R_{3r} = - R_{r3} \quad , \quad r = 1, 2 \quad , \quad (IV.20)$$

$$R_{34} = - (8/3) n_3 n_4 \sigma_{34} (2m_2 T/\pi)^{1/2} (v_3 - v_4) \quad , \quad (IV.21)$$

$$R_{35} = - (8/3) n_3 n_5 \sigma_{35} (m_3 T/\pi)^{1/2} (v_3 - v_5) \quad , \quad (IV.22)$$

$$R_{4r} = - R_{r4} \quad , \quad r = 1, 2, 3 \quad , \quad (IV.23)$$

$$R_{45} = - (8/3) n_4 n_5 \sigma_{45} (2m_2 T/\pi)^{1/2} (v_4 - v_5) \quad , \quad (IV.24)$$

$$R_{5r} = - R_{r5} \quad , \quad r = 1, \dots, 4 \quad . \quad (IV.25)$$

IV.2.3.- Ecuación del balance de la energía.

Con la hipótesis *i* la ecuación (III.71) se reduce a:

$$\text{div}(q) = \sum_s v_s \nabla p_s + \sum Q \quad , \quad (IV.26)$$

despreciando los efectos viscosos y la existencia de fuentes o sumideros de calor en la zona de transición, se tomará $\sum Q \approx 0$. De las ecuaciones (III.4) se despeja ∇p_s , despreciando en ella los efectos viscosos (hipótesis *xiii*) y el término del campo magnético (hipótesis *viii*), y reemplazando en (IV.26) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} q &= \sum_s (v_s e_s n_s E + v_s R_s) \\ &= E \sum_s e_s n_s v_s + \sum_s v_s R_s \quad , \end{aligned}$$

por (IV.7) se anula el primer término del miembro derecho, con lo que se obtiene

$$\frac{d}{dx}q = \sum_s v_s R_s \quad (\text{IV.27})$$

Utilizando (III.68) para el calor total generado por fricción, (IV.27) también se puede escribir

$$\frac{d}{dx}q = \sum_{s \neq r} \alpha_{sr} (v_s - v_r)^2 \quad (\text{IV.28})$$

Es en virtud de la aplicación de la hipótesis x que se desprecia el miembro derecho de (IV.28), permitiendo obtener la siguiente ecuación para el balance total de la energía en la interfase plasma-gas neutro:

$$\frac{d}{dx}q = 0 \quad (\text{IV.29})$$

Debe tenerse presente que en la expresión (III.71) q viene dado por la definición (III.70), la cual, con las hipótesis x y $xiii$, se reduce a la forma

$$q = \sum_s q_s + \sum_s (5/2) p_s v_s \quad , \quad (\text{IV.30})$$

o bien,

$$q = \sum_s q_s + T (\sum_s (5/2) n_s v_s) \quad (\text{IV.31})$$

De (IV.29), y empleando (IV.31), se obtiene:

$$\sum_s q_s + T (\sum_s (5/2) n_s v_s) = Q \quad , \quad (\text{IV.32})$$

siendo Q una constante que deberá ser determinada a partir de los datos del modelo. Escribiendo para el flujo de calor asociado a cada tipo de partícula

$$q_s = - \kappa_s \frac{d}{dx} T \quad , \quad (IV.33)$$

con κ_s la conductividad térmica correspondiente, la (IV.32) resulta finalmente:

$$\frac{d}{dx} T = (T (\sum_s (5/2) n_s v_s) - Q) / \kappa \quad , \quad (IV.34)$$

siendo $\kappa = \sum_s \kappa_s$, la conductividad térmica total de la región de transición.

La conductividad térmica total que aparece en la ecuación (IV.3) se calcula en base a las ecuaciones (II.45) y (II.47), que permiten escribirla como suma de las conductividades térmicas individuales κ_s ,

$$\kappa = \sum_s \kappa_s \quad , \quad (IV.35)$$

con $\kappa_s = (n_s / \sum_s n_r M_{sr}) \kappa_s^*$,

donde M_{sr} es el factor definido por (II.36) y κ_s^* es

$$\kappa_s^* = (15/8\sqrt{2}) V_s / \langle \alpha_{s s} \rangle \quad (IV.36)$$

Sabiendo de (III.42) que

$$\alpha'_{sr} = \langle v \sigma_{sr} \rangle \quad ,$$

y que en virtud del desarrollo (II.24) - (II.29) se puede escribir

$$\alpha'_{sr} = \langle v \rangle \langle \sigma_{sr} \rangle \quad , \quad (IV.37)$$

llamando $\langle v \rangle$ a la velocidad media relativa entre las partículas s y r

$$\langle v \rangle = V_{sr} = (8T/\pi m_{sr})^{1/2} \quad (IV.38)$$

y teniendo presente la definición (III.41) para los coeficientes de fricción α_{sr} , se encuentra que

$$\sum_r n_r M_{sr} = (n_s / \alpha_{ss}) \sum_{r=1}^5 \alpha_{sr} \quad , \quad (IV.39)$$

$$\kappa_s^* = (15/16) n_s^2 m_s V_s^2 / \alpha_{ss} \quad (IV.40)$$

Reemplazando por (IV.39) y (IV.40) en (IV.35), se obtiene la expresión general para calcular la conductividad térmica de cada especie

$$\kappa_s = (15/2\pi) n_s^2 T / \sum_{r=1}^5 \alpha_{sr} \quad (IV.41)$$

Usando las fórmulas (IV.11) y (IV.12) para los α_{sr} en (IV.41), resultan las siguientes conductividades térmicas:

$$\kappa_1 = (45/8\sqrt{\pi}) n_1 T^{5/2} / (\sqrt{m_1} (\pi e^4 \lambda (n_1 + \sqrt{2}(n_2 + n_3)) + \sqrt{8} T^2 (n_4 \sigma_{14} + n_5 \sigma_{15}))) , \quad (\text{IV.42})$$

$$\kappa_2 = (45/8\sqrt{\pi}) n_2 T^{5/2} / (\sqrt{m_2} (\pi e^4 \lambda (n_2 + \sqrt{2}(n_1 (m_1/m_2)^{1/2} + n_3)) + 2T^2 (n_4 \sigma_{24} + \sqrt{2} n_5 \sigma_{25}))) , \quad (\text{IV.43})$$

$$\kappa_3 = (45/8\sqrt{\pi}) n_3 T^{5/2} / (\sqrt{m_3} (\pi e^4 \lambda (n_3 + (2m_2/m_3)^{1/2} (n_1 (m_1/m_2)^{1/2} + n_2)) + 2T^2 (n_4 \sigma_{34} (2m_2/m_3)^{1/2} + n_5 \sigma_{35}))) , \quad (\text{IV.44})$$

$$\kappa_4 = (45/16\sqrt{\pi}) n_4 T^{1/2} / (\sqrt{m_2} (\sqrt{2} (n_1 \sigma_{14} (m_1/m_2)^{1/2} + n_3 \sigma_{34} + n_5 \sigma_{45}) + n_2 \sigma_{24} + n_4 \sigma_{44})) , \quad (\text{IV.45})$$

$$\kappa_5 = (45/16\sqrt{\pi}) n_5 T^{1/2} / (\sqrt{m_3} ((2m_2/m_3)^{1/2} (n_1 \sigma_{15} (m_1/m_2)^{1/2} + n_2 \sigma_{25} + n_4 \sigma_{45}) + n_3 \sigma_{35} + n_5 \sigma_{55})) \quad (\text{IV.46})$$

IV.2.4.- Reducción del sistema de ecuaciones.

El sistema de ecuaciones (IV.1) - (IV.7) puede reducirse a un sistema de ocho ecuaciones con igual número de variables a determinar. Dado que (IV.7) es, en esencia, una relación entre partículas cargadas, a partir de esta relación podrá despejarse uno de los flujos de partículas, por ejemplo $n_1 v_1$,

$$\sum_s e_s n_s v_s = e(n_2 v_2 + n_3 v_3 - n_1 v_1) = 0 ,$$

$$n_1 v_1 = n_2 v_2 + n_3 v_3 \quad (\text{IV.47})$$

Por otra parte, la suma de las ecuaciones (IV.1) correspondientes a los pares de partículas s y $s+2$ (ver ec. (IV.10)), permitirá despejar otros dos flujos de partículas, en este caso serán $n_{(s+2)}v_{(s+2)}$ con $s = 2,3$, ya que

$$n_s v_s + n_{(s+2)} v_{(s+2)} = \Gamma_s = \text{cte.}, \quad s = 2,3 \quad (\text{IV.48})$$

de donde resulta

$$n_{(s+2)} v_{(s+2)} = \Gamma_s - n_s v_s \quad (\text{IV.49})$$

con las cantidades Γ_s a ser determinadas en función de los datos del plasma. Las relaciones (IV.47) y (IV.49) permiten reducir de cinco a dos las ecuaciones (IV.1):

$$\frac{d}{dx}(n_s v_s) = \dot{n}_s, \quad s = 2,3 \quad (\text{IV.50})$$

A su vez, la suma de todas las ecuaciones (IV.2) para la cantidad de movimiento, brinda la posibilidad de encontrar otra relación que disminuya el número de ecuaciones del sistema. Esa relación es

$$T \sum_{s=1}^5 n_s - E^2/8\pi = P = \text{cte.}, \quad (\text{IV.51})$$

donde se han utilizado (III.14), para las fuerzas de fricción, y (IV.5) para reemplazar $\sum_s e_s n_s$ en función de E . De la ecuación (IV.51) se obtiene en forma inmediata

$$E = \sqrt{8\pi} (T \sum_{s=1}^5 n_s - P)^{1/2} \quad (\text{IV.52})$$

En virtud de (IV.52), no es necesario considerar a (IV.5) para la determinación del campo eléctrico y, por lo tanto, puede excluirse del sistema de ecuaciones a considerar, el cual queda reducido, de esta manera, a las ocho ecuaciones siguientes:

$$\frac{d}{dx}(n_s v_s) = \dot{n}_s \quad , \quad s = 2,3 \quad , \quad (IV.53)$$

$$\frac{d}{dx}(n_s T) = e_s n_s \sqrt{8\pi} (T \sum_{s=1}^5 n_s - P)^{1/2} + R_s \quad , \quad s = 1, \dots, 5 \quad (IV.54)$$

$$\frac{d}{dx}T = (T (\sum_{s=2}^3 \frac{5}{2} (n_s v_s + \Gamma_s)) - Q) / \kappa \quad , \quad (IV.55)$$

donde las incógnitas son n_s ($s = 1, \dots, 5$), v_s ($s = 2, 3$) y T .

Las cuatro constantes que quedaron por determinar, Q , P y Γ_s ($s = 2, 3$), dependen íntimamente del criterio que se tome para determinar el comienzo de la zona de transición, posición que se identificará con $x = 0$. Dado que este borde de la interfase limita con el plasma, donde, precisamente, es válida la hipótesis xv de cuasineutralidad, la constante P se calcula de la expresión

$$P = 2n_0 T_0 (1 + c_n^0) \quad , \quad (IV.56)$$

siendo $c_n^0 = (n_4^0 + n_5^0) / 2n_0$ (IV.57)

la concentración inicial de neutros. Aquí el supraíndice 0

indica cantidades evaluadas en $x = 0$.

A su vez, empleando la hipótesis i , con las relaciones (IV.48), se encuentra una forma de determinar una de las dos Γ_s mediante

$$\Gamma_3 = - (m_2/m_3) \Gamma_2 \quad (\text{IV.58})$$

Evaluando la condición (IV.7) en $x = 0$ y empleando la expresión (IV.58) se tiene

$$(n_1 v_1)^0 = \Gamma_2 (1 - m_2/m_3) \quad (\text{IV.59})$$

Luego, empleando las relaciones (IV.58) y (IV.59) para evaluar la ecuación (IV.55) en $x = 0$, se encuentra

$$Q = 5 T_0 \Gamma_2 (1 - m_2/m_3) \quad (\text{IV.60})$$

En virtud de las relaciones (IV.56)-(IV.60), se necesita conocer solamente Γ_2 y c_n^0 para definir todas las constantes del modelo. En la práctica, y a fin de considerar que la interfase realmente limita con un plasma totalmente ionizado, se toma $c_n^0 \ll 1$ de modo de tomar en forma efectiva

$$P = 2n_0 T_0 \quad (\text{IV.61})$$

que es el valor de la presión total de ese plasma completamente ionizado. Manteniendo como hipótesis que $c_n^0 \ll 1$ las constantes Γ_s , $s = 2, 3$, pueden escribirse

$$\Gamma_s = n_s^0 v_s^0, \quad s = 2, 3 \quad (\text{IV.62})$$

Reemplazando por (IV.62) en (IV.58) se obtiene una relación entre las densidades de los dos tipos de iones,

$$n_3^0 = c_3^0 n_2^0 m_2 / m_3, \quad (\text{IV.63})$$

donde $c_3^0 = v_2^0 / v_3^0$, (IV.64)

es el cociente entre las dos velocidades iónicas. Plantando la condición de neutralidad de cargas (hipótesis xv) se obtiene la expresión de la densidad de iones livianos,

$$n_2^0 = n_0 / (1 + c_3^0 m_2 / m_3), \quad (\text{IV.65})$$

y usando este valor para n_2^0 , la densidad de iones pesados será:

$$n_3^0 = n_0 c_3^0 m_2 / (m_3 + c_3^0 m_2), \quad (\text{IV.66})$$

Dado que n_3^0 representa la densidad de impurezas ionizadas presentes en el borde que separa a la interfase del plasma totalmente ionizado, queda claro que siempre deberá verificarse la desigualdad

$$n_3^0 \ll n_2^0,$$

que permite obtener la condición

$$c_3^0 \ll m_3/m_2$$

(IV.67)

Los resultados expresados por (IV.58)-(IV.67) permiten definir las constantes del modelo y las relaciones que existen entre ellas. Si bien el valor de Γ_2 es, en principio, arbitrario, debe tenerse siempre presente la hipótesis de difusión, por la cual todas las velocidades de los fluidos componentes de la interfase son mucho menores que las velocidades térmicas respectivas. Esto es así ya que se trata de velocidades debidas a la difusión de partículas. Resulta claro entonces, que $\Gamma_2 \rightarrow 0$ a medida que uno se acerca al centro del plasma totalmente ionizado, donde solamente existen iones livianos con densidad $n_2^0 = n_0$.

Los pasos llevados a cabo para determinar las constantes del modelo permitieron, además, encontrar condiciones para aquellos parámetros que poseen cierta arbitrariedad en su elección, y que están estrechamente vinculados con la posición a partir de la cual se considera que empieza la interfase plasma-gas neutro. Con el cuadro hasta aquí presentado, se está en condiciones de encarar la solución del sistema (IV.53) - (IV.55).

IV.3.- Solución numérica.

IV.3.1.- Nuevo sistema de ecuaciones.

Para aprovechar la forma particular del sistema de ecuaciones (IV.53) - (IV.55), en el cual existen so-

lamente derivadas primeras en los miembros izquierdos, resulta conveniente hacer el cambio de variables siguiente:

$$y_j = n_s v_s / \Gamma \quad , \quad j = s-1 \quad , \quad s = 2,3 \quad , \quad (\text{IV.68})$$

$$y_j = n_s T / P \quad , \quad j = s+2 \quad , \quad s = 1, \dots, 5 \quad , \quad (\text{IV.69})$$

$$y_s = T / T_0 \quad , \quad (\text{IV.70})$$

$$X = x / l_D \quad , \quad (\text{IV.71})$$

donde P está dada por (IV.61). Dado que se ignora el espesor de la interfase, que es una longitud macroscópica que la caracteriza y será uno de los resultados del modelo, se ha decidido utilizar la longitud de Debye del plasma totalmente ionizado, l_D , para definir la variable X . Por su parte, el valor de Γ se determina calculando el flujo de iones livianos en la dirección normal a la interfase, mediante la integración sobre todas las velocidades, con $v_x > 0$, del producto de la distribución maxwelliana correspondiente y la velocidad¹¹. La expresión que resulta es:

$$\Gamma = n_2^0 V^0 / 4 \quad , \quad (\text{IV.72})$$

$$\text{siendo} \quad V^0 = (8T_0 / \pi m_2)^{1/2} \quad (\text{IV.73})$$

Con las definiciones anteriores, el sistema (IV.53) - (IV.55) se escribe:

$$\frac{d}{dX} y_j = \dot{N}_j \quad , \quad j = 1,2 \quad , \quad (\text{IV.74})$$

$$\frac{d}{d\lambda} y_j = 2 (e_{j-2}/e) (y_j/y_8) (\sum_{j=3}^7 y_j - 1)^{1/2} + R_j \quad , \quad j=3, \dots, 7$$

(IV.75)

$$\frac{d}{d\lambda} y_8 = (2.5 y_8 (y_1 + y_2) + (\Gamma_2/\Gamma) (1 - m_2/m_3) (2.5 y_8 - 5))/K$$

(IV.76)

donde e_{j-2} es la carga de la especie $s = j-2$, según las definiciones (IV.8) y e es la carga del electrón. Las expresiones adimensionales para la tasa de producción de partículas, \dot{N}_j , las fuerzas de fricción, R_j , y la conductividad térmica, K , se darán en las subsecciones siguientes.

Para el nuevo sistema de ecuaciones (IV.74) - (IV.76), las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} y_1^0 &= \Gamma_{j+1}/\Gamma \quad , \quad j = 1, 2 \quad , \\ y_3^0 &= 0.5 \quad , \\ y_4^0 &= 0.5 / (1 + c_3^0 m_2/m_3) \quad , \\ y_5^0 &= 0.5 c_3^0 m_2 / (m_3 + c_3^0 m_2) \quad , \\ y_j^0 &= c_{n,j}^0 \quad , \quad j = 6, 7 \quad , \\ y_8^0 &= 1.0 \end{aligned}$$

(IV.77)

El criterio adoptado para realizar los cálculos numéricos, fue tomar aquellos valores Γ_2 , c_3^0 y $c_{n,j}^0$, compatibles con el funcionamiento del código elaborado, que mejor simularan el borde que separa a la interfase del plasma, según las condiciones expresadas en la sección anterior. Para obtener los resultados que se darán en el capítulo siguiente, se usaron los siguientes valores:

con Γ expresado por (IV.72) y l_D la longitud de Debye del plasma. Aquí todas las unidades son cgs, excepto T_0 que debe expresarse en eV.

IV.3.3.- Expresiones adimensionales para las fuerzas de fricción.

La forma adimensional para las fuerzas de fricción que aparecen en (IV.75) se encuentra a partir de

$$R_{jk} = R_{sr} l_D / P \quad , \quad s = j-2 \quad , \quad r = k-2 \quad ; \quad j, k = 3, \dots, 7$$

(IV.84)

con P definida por (IV.56) y R_{sr} dadas en la subsección 4.2.2. Debe señalarse que los subíndices j, k están asociados a las variables adimensionales, mientras que s, r indican el tipo de partícula según la definición (IV.8) y aparecerán en las secciones eficaces de colisiones de partículas cargadas con neutras, de neutras entre sí, y en las masas de las distintas partículas. Con estas aclaraciones en mente, el empleo de las variables adimensionales en la relación (IV.84) y las expresiones (IV.14) - (IV.25), resulta:

$$R_{3k} = - C_3 y_8^{-5/2} (y_k (y_1 + y_2) - y_3 y_{k-3}) \quad , \quad k = 4, 5 \quad ,$$

(IV.85)

$$R_{3k} = - D_{3k} y_8^{-1/2} (y_k (y_1 + y_2) - y_3 (\Gamma_{k-4} / \Gamma - y_{k-5})) \quad , \quad k = 6, 7$$

(IV.86)

$$R_{43} = - R_{34} \quad , \quad (IV.87)$$

$$R_{45} = - C_4 y_8^{-5/2} (y_1 y_5 - y_2 y_4) \quad , \quad (IV.88)$$

$$R_{46} = - D_{46} y_8^{-1/2} (y_1 (y_4 + y_6) - y_4 \Gamma_2 / \Gamma) \quad , \quad (IV.89)$$

$$R_{47} = - D_{47} y_8^{-1/2} (y_1 y_7 + y_2 y_4 + y_4 (m_2 \Gamma_2 / m_3 \Gamma)) \quad , \quad (IV.90)$$

$$R_{5k} = - R_{k5} \quad , \quad k = 3, 4 \quad , \quad (IV.91)$$

$$R_{56} = - D_{56} y_8^{-1/2} (y_1 y_5 + y_2 y_6 - y_5 \Gamma_2 / \Gamma) \quad , \quad (IV.92)$$

$$R_{57} = - D_{57} y_8^{-1/2} (y_2 y_5 + y_2 y_7 + y_5 (m_2 \Gamma_2 / m_3 \Gamma)) \quad , \quad (IV.93)$$

$$R_{6k} = - R_{k6} \quad , \quad k = 3, 4, 5 \quad , \quad (IV.94)$$

$$R_{67} = - D_{67} y_8^{-1/2} (y_2 y_6 - y_1 y_7 + ((m_2 / m_3) y_6 + y_7) \Gamma_2 / \Gamma) \quad , \quad (IV.95)$$

$$R_{7k} = - R_{k7} \quad , \quad k = 3, \dots, 6 \quad , \quad (IV.96)$$

donde
$$C_{jk} = \left(\frac{4e^4 \lambda l_D n_0}{3 T_0^2} \right) \frac{(m_{j-2, k-2} / m_2)^{1/2}}{(1 + (m_2 / m_3)^{1/2})} \quad , \quad \begin{matrix} j = 3, 4, 5 \\ k = 3, 4, 5 \end{matrix} \quad (IV.97)$$

y
$$D_{jk} = \left(\frac{8 l_D r_0^2 n_0}{3} \right) \frac{(m_{j-2, k-2} / m_2)^{1/2}}{(1 + (m_2 / m_3)^{1/2})} \Sigma_{j-2, k-2} \quad , \quad \begin{matrix} j = 3, \dots, 7 \\ k = 6, 7 \end{matrix} \quad (IV.98)$$

siendo r_0 el radio de Bohr , $m_{j-2, k-2}$ la masa relativa , y $\Sigma_{j-2, k-2}$ la sección eficaz de colisiones entre las partículas de las especies $j-2$ y $k-2$, expresada en unidades de πr^2 . Entonces, la fuerza de fricción total, asociada a la variable y_j , $j = 3, \dots, 7$, será:

$$R_j = \sum_{k=3}^7 R_{jk} \quad , \quad j = 3, \dots, 7 \quad , \quad (\text{IV.99})$$

IV.3.4.- Conductividad térmica en forma adimensional.

Para el cálculo de la expresión adimensional de la conductividad térmica de la interfase plasma -gas neutro, valen las mismas aclaraciones que en la sección anterior. Sigue siendo válido que

$$K = \sum_{j=3}^7 K_j \quad , \quad (\text{IV.100})$$

donde cada conductividad se calcula a partir de la relación

$$K_j = \kappa_{j-2} / l_D \quad (\text{IV.101})$$

siendo κ_{j-2} cada una de las conductividades definidas en la subsección IV.2.3. Usando las definiciones (IV.68) - (IV.71) para las nuevas variables en las expresiones (IV.42)-(IV.46) de las conductividades térmicas individuales, y reemplazando luego en (IV.101), se obtienen las siguientes formas adimensionales:

$$K_3 = (15/2\pi) y_3 y_8^{5/2} / (C_{33} y_3 + C_{34} y_4 + C_{35} y_5 + y_8^2 (D_{36} y_6 + D_{37} y_7)) \quad , \quad (\text{IV.102})$$

$$K_4 = (15/2\pi) y_4 y_8^{5/2} / (C_{43} y_3 + C_{44} y_4 + C_{45} y_5 + y_8^2 (D_{46} y_6 + D_{47} y_7)) \quad , \quad (\text{IV.103})$$

$$K_5 = (15/2\pi) y_5 y_8^{5/2} / (C_{53} y_3 + C_{54} y_4 + C_{55} y_5 + y_8^2 (D_{56} y_6 + D_{57} y_7)) , \quad (\text{IV.104})$$

$$K_6 = (15/2\pi) y_6 y_8^{1/2} / (D_{63} y_3 + D_{64} y_4 + D_{65} y_5 + D_{66} y_6 + D_{67} y_7) , \quad (\text{IV.105})$$

$$K_7 = (15/2\pi) y_7 y_8^{1/2} / (D_{73} y_3 + D_{74} y_4 + D_{75} y_5 + D_{76} y_6 + D_{77} y_7) , \quad (\text{IV.106})$$

con los coeficientes C_{jk} y D_{jk} dados por (IV.97) y (IV.98).

IV.3.5.- Métodos numéricos.

Se han utilizado dos métodos para obtener la solución numérica de las ecuaciones diferenciales (IV.74) - (IV.76), ellos son: continuación analítica¹⁰⁹ y Runge - Kutta^{109, 110}. Si bien ambos métodos son similares en espíritu, difieren en diversos detalles de procedimiento que hacen que cada uno de ellos tenga distinto grado de complejidad. Para comprender las características de cada uno de ellos, se darán a continuación los fundamentos teóricos de ambos, dejando para el lector la profundización del tema mediante la consulta a las referencias citadas.

IV.3.5.i.- Continuación analítica¹⁰⁹.

En la ecuación diferencial

$$w' = f(z,w) \quad , \quad (IV.107)$$

donde las derivadas de w respecto de z se indican con primas, mientras que las derivadas parciales de f se expresarán con subíndices, se supone que $f(z,w)$ es una función analítica de dos variables complejas z y w en la región R definida por las desigualdades

$$|z - z_0| \leq A \quad , \quad |w - w_0| \leq B$$

Entonces, existen en R las derivadas parciales de $f(z,w)$, y mediante derivaciones sucesivas se obtienen de (IV.107) las ecuaciones

$$\begin{aligned} w' &= f & , \\ w'' &= f_z + w' f_w & , \\ w''' &= f_{zz} + 2w' f_{zw} + (w')^2 f_{ww} + w'' f_w & , \end{aligned} \quad (IV.108)$$

Se supone que $w = w_0$ cuando $z = z_0$. Reemplazando dichos valores en la primera de las ecuaciones (IV.108), se obtiene w'_0 (el valor de w' en $z = z_0$), luego, tomando z_0, w_0, w'_0 en el miembro derecho de la segunda ecuación, se encuentra w''_0 . Procediendo paso a paso de esta manera, se obtiene la secuencia

$$w_0, w_0', w_0'', w_0''', \dots, \quad (IV.109)$$

una vez que han sido determinadas, resulta simple desarrollar la serie de Taylor para w ,

$$w = w_0 + w_0'(z - z_0) + w_0''((z - z_0)^2/2!) + \dots \quad (IV.110)$$

En la región donde la serie converge¹⁰⁹, ésta define una solución de la ecuación diferencial.

La ecuación $|z - z_0| = A$ define un círculo C_1 en el plano z con centro en z_0 y radio A . En forma similar la ecuación $|w - w_0| = B$ define un círculo C_2 en el plano w . Si t_1 es una variable en C_1 , y t_2 una variable en C_2 y, si z se encuentra dentro de C_1 y w dentro de C_2 , se supone además que M es el máximo valor absoluto de $f(t_1, t_2)$. A partir de la derivada m -ésima de la expresión de $f(z, w)$, escrita usando la fórmula integral de Cauchy, se encuentra que el radio de convergencia ρ verifica la desigualdad siguiente¹⁰⁹:

$$\rho \geq A (1 - \exp(-B/2AM)) \quad (IV.111)$$

Dentro de un círculo de convergencia determinado por el radio ρ , la serie (IV.110) define una función de z , analítica y univaluada, que toma el valor w_0 cuando $z = z_0$ y satisface la ecuación diferencial (IV.107).

La serie de Taylor (IV.110) provee la solución teórica de la ecuación diferencial en el círculo de convergencia. Esta serie brinda también una solución numéri-

ca en una región más restringida, R' , definida por $|z-z_0| < \rho'$ siendo ρ' considerablemente menor que ρ . Dado que la cantidad de términos que se calculan explícitamente está en relación directa con el trabajo que implica su cálculo, se toma $|z - z_0|$, tan pequeño como sea posible a fin de que los términos restantes sean despreciables dentro del grado de aproximación deseado. Para los valores de z que cumplan esta limitación se tendrá una solución numérica.

Ocurre con frecuencia que el círculo de convergencia no comprende todos los valores de z para los cuales se desea la solución. En tales casos, el proceso familiar de continuación analítica permite cubrir mediante pasos sucesivos, una región en la cual la solución es univaluada y analítica. En muchos problemas prácticos como en el caso del modelo de cinco fluidos, la región para la cual se desea una solución es un segmento del eje real. Sin embargo, el método no se encuentra restringido a los reales, ni tampoco (en el caso de soluciones multivaluadas) a una hoja de la superficie de Riemann.

La continuación analítica se efectúa mediante los pasos siguientes. Empleando el método descrito se calcula la serie de Taylor (IV.110). Para un valor de z , $z=z_1$, donde la serie converge con suficiente rapidez para la aproximación deseada, se halla con esta serie el correspondiente w_1 . Utilizando z_1 y w_1 como valores iniciales, se obtendrá una nueva serie de Taylor:

$$w = w_1 + w_1' (z - z_1) + w_1'' ((z - z_1)^2/2!) + \dots \quad (\text{IV.112})$$

A partir de esta ecuación se obtiene un nuevo valor w_2 para $z = z_2$, eligiendo z_2 en la región donde (IV.112) converge. Con z_2 , w_2 , como valores iniciales, se construye otra serie de Taylor. Esta cadena continúa hasta cubrir la región donde se desea encontrar la solución.

El método que se acaba de describir puede aplicarse a un sistema simultáneo de ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\begin{aligned}
 y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) & , \\
 y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n) & , \\
 \dots & \dots & , \\
 y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) & ,
 \end{aligned}
 \tag{IV.113}$$

Los valores de y_i en el paso $(n+1)$ se obtienen a partir de y_i' y de los valores precedentes de y_i y de y_i' mediante el mismo procedimiento que para una sola ecuación. El cálculo de y_i' a partir de las ecuaciones (IV.113) es la única parte del proceso en la cual la presencia de varias ecuaciones en lugar de una sola, puede marcar alguna diferencia en el método de solución. Esta diferencia consiste simplemente en el reemplazo de varios valores y_1, y_2, \dots, y_n , en lugar de un único valor y .

El sistema de ecuaciones (IV.74) - (IV.76), con las condiciones iniciales (IV.77), constituye un sistema de la forma (IV.113). La característica más saliente del sistema que caracteriza al modelo de cinco fluidos, es que no aparece explícitamente en las ecuaciones la variable x , si bien todas las magnitudes que intervienen en el modelo

son funciones de ella.

En el caso particular del modelo de cinco fluidos, se desconoce la extensión de la región a estudiar ya que se ignora el espesor de la interfase plasma—gas neutro, por ello se termina el cálculo imponiendo un valor límite para la temperatura del gas neutro, T_g , que se supone conocida. El diagrama de flujo de la figura 3, resume las características principales del programa elaborado sobre la base del método de continuación analítica incluyendo la tercera derivada. El error estará dado por el término de cuarto orden en el desarrollo en serie de Taylor. La evaluación del error permite modificar el paso ΔX de tal manera que su incidencia se haga sentir en la quinta cifra decimal de los resultados obtenidos. El programa permite además, distinguir las situaciones con y sin campo eléctrico debido a separación de cargas.

IV.3.5.ii.- Runge-Kutta^{109, 110}.

La idea fundamental de este método es obtener una expresión para y_{n+1} que coincida, hasta términos de un dado orden en h , con el desarrollo de y_{n+1} en serie de potencias de h , sin emplear en el cálculo las derivadas de $f(x,y)$ como se hizo en el método de continuación analítica. El paso de y_n a y_{n+1} se hace sin usar los valores de y que preceden a y_n , de modo que no se requieren métodos especiales para iniciar el cálculo. Kutta mostró que aproximaciones de segundo, tercero y cuarto orden, respectivamente, requie-

ren dos, tres y cuatro reemplazos en la ecuación diferencial. El mencionado autor, obtuvo varios conjuntos de fórmulas para dichos casos, de los cuales el más conocido es

$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \quad , \quad (IV.114)$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_n, y_n) \quad , \\ k_2 &= h f(x_n+h/2, y_n+k_1/2) \quad , \\ k_3 &= h f(x_n+h/2, y_n+k_2/2) \quad , \\ k_4 &= h f(x_n+h, y_n+k_3) \quad , \end{aligned} \quad (IV.115)$$

Estas ecuaciones permiten obtener y_{n+1} con una aproximación de cuarto orden en h y requieren cuatro reemplazos dentro de la ecuación diferencial para cada valor de y obtenido. El trabajo original de Kutta sobre este método, aparecido en 1895, fue seguido por un trabajo de Heun en 1900 y uno de Kutta en 1901. Otros autores, en especial E.J.Nyström, han hecho diferentes contribuciones al método.

Para asegurar una aproximación de orden m en h , cuando m es mayor que cuatro, se requieren más de m reemplazos. Kutta y Nyström han obtenido conjuntos de fórmulas que dan y_{n+1} con una aproximación de quinto orden en h , haciendo uso de seis reemplazos. La complejidad de las fórmulas se incrementa rápidamente a medida que aumenta el orden. Por ejemplo, una de las fórmulas de Kutta corregidas por E.J.Nyström es

$$y_{n+1} = y_n + (2^3 k_1 + 125 k_3 - 81 k_5 + 125 k_6)/192 \quad , \quad (IV.116)$$

donde

$$\begin{aligned}k_1 &= h f(x_n, y_n) , \\k_2 &= h f(x_n+h/3, y_n+k_1/3) , \\k_3 &= h f(x_n+2h/5, y_n+(6k_2+4k_1)/25) , \\k_4 &= h f(x_n+h, y_n+(15k_3-12k_2+k_1)/4) , \\k_5 &= h f(x_n+2h/3, y_n+(8k_4-50k_3+90k_2+6k_1)/81) , \\k_6 &= h f(x_n+4h/5, y_n+(8k_4+10k_3+36k_2+6k_1)/75) .\end{aligned}\tag{IV.117}$$

Es evidente que las fórmulas se hacen rápidamente más complejas a medida que se intenta una aproximación de orden superior, incrementándose el número de reemplazos por paso. Este incremento implica un tiempo de cómputo cada vez mayor, aun para las ecuaciones diferenciales más simples. Debe tenerse presente que el modelo a resolver implica tratar con un sistema de ecuaciones como el (IV.113), para el cual habrá que extender el método que se acaba de describir, haciendo más lento el programa con un considerable incremento del tiempo de cómputo.

Para aplicar este método en la solución del modelo de cinco fluidos se ha utilizado la subrutina DVERK de la biblioteca IMSL¹¹¹. Se trata de un Runge-Kutta modificado por Vermer, de quinto y sexto orden, cuya última versión es de junio de 1982. Esta subrutina reemplaza a las subrutinas que calculan las sucesivas derivadas en el método de continuación analítica (ver diagrama de flujo en Fig.3). Para trabajar con DVERK es necesario proveer una subrutina externa, FCN, que evalúa el sistema de ecuaciones del modelo. El lector interesado en ampliar conocimientos sobre este

método en particular, puede remitirse a las referencias citadas.

IV.3.5.iii.- Comparación de ambos métodos.

En contraste con el procedimiento paso a paso basado en el desarrollo en serie de Taylor (continuación analítica) el método de Runge-Kutta posee dos principales ventajas:

- a) No se necesitan cálculos adicionales (las derivadas) para iniciar el trabajo computacional.
- b) El tamaño del paso puede ser modificado en cualquier instante del proceso sin requerimiento adicional.

Por el contrario, pueden hacerse dos objeciones al método:

- a) El proceso no contiene en sí mismo ningún camino sencillo para estimar el error, o detectar errores aritméticos. Si bien es cierto que Rieberbach encontró una expresión que provee una cota superior para el error en un dado paso del proceso Runge-Kutta, esta estimación depende de cantidades que no intervienen directamente en el cálculo, y que por lo tanto requieren de un cómputo adicional por separado.
- b) Cada paso requiere más de seis reemplazos en cada ecuación diferencial del sistema a resolver. Esto demanda una importante inversión de tiempo de cómputo en cada caso.

Por su parte, para el caso especial del modelo de cinco fluidos, el método de continuación analítica po-

see las siguientes ventajas sobre el proceso Runge-Kutta:

- a) Menor tiempo de cómputo. Reduce en un 35 % el tiempo empleado con la subrutina DVERK.
- b) En todo momento se tiene control del error que se está cometiendo

Tiene, a su vez, la gran desventaja de requerir la inversión de tiempo personal para el cálculo analítico de las derivadas exactas necesarias para el grado de aproximación deseado.

Para obtener la solución del modelo presentado en este capítulo, se han aplicado alternativamente los dos métodos. Contrastando los resultados de ambos nunca se observaron diferencias mayores del 3 %. Los resultados obtenidos para cada uno de los casos físicos analizados constituyen la materia del próximo capítulo.

V. RESULTADOS NUMERICOS

V.1.- Cálculos realizados.

Utilizando el modelo presentado en el capítulo anterior, se han obtenido resultados numéricos para la interfase formada entre un plasma de deuterio y una región de oxígeno, o silicio, neutro. El comportamiento de la transición plasma-gas neutro fue determinado para un plasma con densidades n_0 entre 10^{17} - 10^{19} cm^{-3} y temperaturas entre 5 - 50 eV. En todos los casos se mantuvieron constantes los valores iniciales (IV.77), (IV.78) para las magnitudes que describen a la región de transición. Se analizaron los diferentes comportamientos obtenidos al variar las características del plasma totalmente ionizado (densidad y temperatura) y el tipo de gas que forma la región totalmente neutra. También, se han analizado las características de la interfase cuando se tiene en cuenta el efecto de separación de cargas, y la modificación de este cuadro al no incluir la presencia de un campo eléctrico debido, precisamente, al efecto mencionado. Una vez efectuados los cálculos, se ha verificado el comportamiento de las hipótesis del modelo a fin de certificar la validez de la aplicación del mismo. En todos los casos analizados se verificó la consistencia del modelo de cinco fluidos, es decir el cumplimiento de las hipótesis y condiciones de validez. El comportamiento de la región en estudio será ilustrado tomando un plasma de deuterio con $n_0 = 10^{17}$ cm^{-3} y $T_0 = 25$ eV, y una zona totalmente neutra de oxígeno a temperatura $T_g = 0.17$ eV.

V.2.- El borde externo del plasma.

Resulta claro de la discusión sobre la determinación de las condiciones iniciales del modelo, realizada en el capítulo anterior, que los valores de las constantes Γ , P y Q , que lo caracterizan físicamente, deben ser asignados evaluando las ecuaciones para la interfase en $X = 0$. Una vez asignados los valores correspondientes, éstos se mantienen constantes en todo el desarrollo del cálculo numérico. Sin embargo, la determinación de la posición inicial, o sea del borde que separa al plasma totalmente ionizado de la interfase parcialmente ionizada, puede establecerse con cierto grado de arbitrariedad (ver secciones IV.2.- y IV.3.1.-). Dado que el borde que separa al plasma del comienzo de la interfase no debería tener, idealmente, impurezas neutras o ionizadas, se han tomado las concentraciones de impurezas ionizadas, c_j^0 , y neutras, c_n^0 , ($j = 4,5$), que mejor simularan esa condición ideal para el borde plasma-interfase. Para arrancar el cálculo numérico ha sido suficiente tomar $c_j^0 = c_n^0 = 10^{-20}$, como concentraciones iniciales, siendo estos gérmenes suficientes para generar luego la transición a la zona parcialmente ionizada.

Este grado de arbitrariedad se pone de manifiesto en el camino total de integración. En él existen dos tramos perfectamente diferenciados. Uno de ellos abarca 99% de la extensión total de la integración y su espesor está relacionado con los valores iniciales elegidos. Mientras que el segundo tramo, de unas pocas longitudes de Debye, repre-

senta a la verdadera interfase plasma-gas neutro, cuyas propiedades no se ven alteradas por las variaciones en las dimensiones de la primera zona.

En la primera región que resulta de la integración, la temperatura es aproximadamente constante, existiendo sólo un 2 % de diferencia entre los valores de cada uno de sus extremos ($X = 0$ y $X = X_0$). Las densidades de deuterones y electrones mantienen prácticamente los mismos valores del plasma totalmente ionizado. Esta zona se caracteriza, en cambio, por un incremento en la concentración de iones pesados, n_3/n_0 , que varía desde $\sim 10^{-20}$ en $X = 0$, hasta valores $n_3/n_0 \gg 10^{-2}$ en $X = X_0$, debido a la ionización de los neutros pesados. Las concentraciones de los elementos neutros, n_4/n_0 y n_5/n_0 , aumentan desde 10^{-20} hasta valores del orden de 10^{-6} , entre cada borde de esta primera zona. A pesar del aumento de las concentraciones de partículas consideradas impurezas, desde el punto de vista de un plasma totalmente ionizado, los niveles de las mismas son suficientemente bajos como para considerar, con muy buena aproximación, que toda esta región es parte integrante del plasma. Además, se verifica en ella la condición de cuasineutralidad propia del mismo. En resumen, en esta zona se mantienen prácticamente invariadas las propiedades del plasma, pero aumentan sensiblemente las concentraciones de iones pesados, es decir que se tiene un plasma con cierto nivel de contaminación.

Cualquier variación en las concentraciones iniciales c_j^0 y c_n^0 , ($j = 4,5$), modifica el espesor de la primera región sin introducir cambios en la zona de transición

propriadamente dicha. Esta posibilidad de elegir diferentes valores iniciales sin afectarlas propiedades de la interfase, representa, en la práctica, un simple corrimiento del origen de coordenadas, ubicado en la posición adoptada para el borde del plasma. Es por ello que para el estudio de la interfase plasma-gas neutro se ha adoptado como posición inicial a $X = X_0$, definida como la posición en la cual la contaminación por iones pesados ha alcanzado un valor del 1 % de la densidad del plasma.

V.3.- Características generales de la interfase plasma - gas neutro.

Es posible establecer características generales, más allá de las variaciones propias de cada caso analizado, que describen a la interfase plasma-gas neutro. En tal sentido, se pueden destacar tres zonas, diferenciadas por sus propiedades físicas, que componen la transición plasma-gas neutro cuando existe separación de cargas (Figs. 4 - 29)

i) La primera de ellas se extiende entre el borde del plasma, fijado con el criterio que se ha establecido en la sección anterior y la posición $X = X_i$, siendo ésta la posición a partir de la cual $n_1/n_0 < 1$. A esta zona le corresponde un espesor que representa ≈ 64.3 % del total de la interfase. En ella se advierte un suave descenso de la temperatura, que cae a $\approx 0.90 T_0$ en X_i . Debido a la dependencia particular de los coeficientes de ionización y recombinación respecto de

la temperatura (ver las expresiones respectivas en el capítulo IV) resulta manifiesto el predominio de la ionización en toda esta región cuando se tiene en cuenta el efecto de separación de cargas, si se lo compara con la situación en que el campo eléctrico es siempre nulo. La figura 8 muestra la variación de cada uno de los coeficientes que representan a los procesos colisionales de ionización por impacto electrónico y de recombinación de tres cuerpos.

Si bien el campo eléctrico toma valores pequeños comparados con el campo $E_0 = (8\pi P)^{1/2}$ respecto del cual se normaliza (Fig. 13), los coeficientes de ionización de ambas especies iónicas mantienen en forma aproximada sus valores correspondientes al borde del plasma; mientras que el coeficiente de recombinación (normalizado respecto de su valor en dicha posición inicial) tiene valores parecidos al valor inicial, el cual es mucho menor que cualquiera de los coeficientes de ionización.

Este efecto hace que la densidad electrónica alcance un incremento máximo del orden del 5 % respecto de su valor en el plasma, en una posición próxima a X_i , a partir de la cual comenzará a disminuir en forma pronunciada. Por su parte, las densidades iónicas crecen aproximadamente en un 19 % de sus respectivos valores iniciales. El crecimiento de las concentraciones de iones, en las proximidades de $X = X_i$, por encima de la de electrones, produce un perceptible aumento en la importancia del campo eléctrico debido al efecto de separación de cargas y, en consecuencia, aparece una de las características que diferencia a la interfase del plasma totalmente ionizado: *deja de tener validez*

en esta primera región, la condición de cuasineutralidad.

Dado el predominio del proceso de ionización en esta zona, que trae como consecuencia un aumento en las densidades de los dos tipos de iones, bien puede ser denominada como la zona de ionización de las impurezas neutras, que se dirigen hacia el plasma. Además, las concentraciones de tales impurezas mantienen el mismo nivel que en el borde del plasma, a través de toda esta zona (Figs. 4 - 7)

En lo correspondiente al balance de energía de la interfase plasma-gas neutro como un todo, la densidad de energía que por unidad de tiempo ingresa desde el borde del plasma, permanece constante a través de toda la interfase. En el borde de la primera región que limita con el plasma, toda la energía está asociada al movimiento macroscópico de difusión de las partículas, representado por los términos $(5T/2) (n_2 v_2 + n_3 v_3 + \Gamma_2 (1 - m_2/m_3))$ de la ecuación (IV.55). Los primeros dos términos dependen de los procesos de ionización y recombinación, vinculados a través de las correspondientes ecuaciones de continuidad, y la contribución de los mismos representa inicialmente el 50 % de Q . El otro 50 % corresponde al tercer término, que representa la energía asociada a los flujos de difusión de partículas (caracterizados por el valor constante Γ_2) y cuyo valor disminuye con el descenso de la temperatura. Por su parte, el término $\kappa dT/dx$ de (IV.55) crece en importancia a medida que se hace más pronunciado el gradiente de temperatura. Este término corresponde a los efectos de conducción térmica en la interfase y crece desde un valor nulo en el borde del plasma hasta representar, en $X = X_j$, el 8 % del valor de Q (Fig. 16).

ii) En la segunda región de la interfase, de dimensiones menores que la precedente (le corresponde un 33 % del espesor total) se revierte el cuadro anterior. Aquí la combinación de los efectos de separación de cargas, que produce un aumento notorio del campo eléctrico (Fig. 13), y de recombinación de tres cuerpos (Fig. 8), hacen que disminuya la densidad de electrones hasta hacerse nula en $X = X_E$. Es precisamente en este borde que separa a la segunda y tercera zonas de la interfase, donde se alcanzan los máximos valores de densidades iónicas y de campo eléctrico (Figs. 4, 5 y 13). Los resultados numéricos permiten resaltar la importancia del papel del campo eléctrico en la determinación de las propiedades de la interfase. La inclusión del efecto de separación de cargas es la principal causa de la reducción del flujo de electrones hasta hacerlo nulo. Este efecto es más importante que la recombinación de tres cuerpos, cuyos valores son siempre del orden, o inferiores, a los valores iniciales en el borde del plasma. En esta situación $(n_2 v_2 + n_3 v_3)_{X=X_E} = 0$ y la densidad de energía relacionada con el movimiento macroscópico de las partículas se reduce a $\approx T_E Q / 2T_0$, siendo T_E la temperatura de la interfase en $X = X_E$. Para el caso particular que sirve de ejemplo a esta descripción, el porcentaje de energía asociado al movimiento de difusión de las partículas es $\approx 2\%$ de Q . Como consecuencia de lo anterior, al tiempo que se incrementa el gradiente de temperatura, se hace cada vez más importante la contribución de los procesos de conducción térmica al balance total de la energía de la interfase, siendo $k dT/dx \approx 98\%$ del valor de Q (Fig. 16) en

la posición $X = X_F$.

Entre cada uno de los extremos de esta zona, el comportamiento anteriormente descrito es acompañado por variaciones en las densidades de todas las especies, y también de las presiones parciales correspondientes a cada tipo de partículas (Figs. 9 - 12). Mientras que $n_1 = 0$ en $X = X_F$, (como consecuencia de la repulsión del potencial electrostático negativo) las densidades de iones livianos y pesados alcanzan sus picos máximos con valores $n_2/n_0 = 64.15$ y $n_3/n_0 = 2.28$, respectivamente (Figs. 4 y 5). Por su parte, las concentraciones de neutros no son significativas aún (Figs. 6 y 7). En tales condiciones, el balance de presiones (IV.51) establece la relación entre el pico iónico y el valor máximo posible de campo eléctrico: $E_{\max.}/E_0 \approx ((n_2+n_3)_{\max} \cdot T_E/P - 1)^{1/2}$. Los valores de densidades físicamente posibles son aquellos que permiten obtener soluciones reales para el campo eléctrico de separación de cargas. En el ejemplo analizado es $E_{\max.}/E_0 = 4.5$ y $\phi_{\max.}/\phi_0 = 0.36$ (con $\phi_0 = E_0 d$), que en términos absolutos representan un campo eléctrico $E_{\max} = 1.92 \times 10^9 \text{ Vm}^{-1}$ y un potencial $\phi_{\max} = 126 \text{ V}$. Este potencial negativo que neutraliza a las cargas positivas de los iones, es tal que $e\phi_{\max.}/T_0 = 5$. Los valores del potencial electrostático obtenidos con el modelo de cinco fluidos resultan del mismo orden de magnitud, aunque mayores, que los que pueden obtenerse para el caso en que el plasma se encuentra en reposo, usando el criterio expuesto en un trabajo previo¹¹. En el trabajo al que se hace referencia, el potencial adopta la forma conocida dada por Lovberg¹¹² cuando $u = 0$: $\phi = (T_0/2e) \ln(m_i/m_e)$.

Debe destacarse que si bien no se ha considerado hipótesis alguna sobre la magnitud del potencial electrostático en la interfase, resulta suficiente información para el modelo aquí presentado el hecho de incluir el efecto de separación de cargas a través de la existencia de un campo eléctrico. Esta forma de aproximarse al conocimiento de las características de la transición plasma-gas neutro, representa un camino totalmente distinto del seguido en el trabajo de la referencia 11, donde específicamente se determinó la forma de calcular el potencial. Sin embargo, los resultados obtenidos en ambos casos muestran una notable concordancia entre sí.

Por todas las características expuestas, esta segunda región de la interfase plasma-gas neutro puede identificarse, sin ninguna duda, con la vaina de carga espacial, cuyo espesor es de un par de longitudes de Debye.

iii) La última zona de la interfase, con un espesor igual al 2.7 % del total, está caracterizada por la caída abrupta en las densidades iónicas y en el campo eléctrico (Figs. 4, 5 y 13) en las proximidades de $X = X_f$. Por el contrario, aumentan en forma considerable las densidades de las partículas neutras. Los neutros livianos, producto de los iones provenientes del plasma, penetran en la zona alcanzando una concentración máxima $n_4/n_0 = 2.8 \times 10^{-6}$. Por su parte, los neutros pesados aumentan su densidad hasta alcanzar el valor correspondiente a la densidad de la región totalmente neutra, que en este ejemplo resultó ser $n_5 = 2.94 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ (Fig. 6). Los máximos valores de partículas neutras se al-

canzan en $x = d$. En este extremo de la transición plasma-gas neutro, donde ya no existen partículas cargadas, el campo eléctrico es nulo y la densidad de neutros livianos es prácticamente despreciable frente a la densidad del gas pesado. Entonces, la condición (IV.51) brinda una relación que vincula a la densidad del gas que ocupa la región totalmente neutra, con los parámetros del plasma, a través de la constante P y la temperatura T_g a la que se encuentra dicho gas: $P = n_s(x=d) T_g$. Este hecho establece la existencia de pares de valores $(n_0 T_0, n_s(x=d) T_g)$ para los cuales es posible aplicar el modelo, y que dado alguno de ellos el restante no puede elegirse arbitrariamente sino que debe verificarse la condición anterior.

En toda la interfase la variación de cada una de las presiones parciales está estrechamente vinculada con la competencia entre los procesos de ionización por impacto electrónico, la recombinación de tres cuerpos y el efecto de separación de cargas. Se ha visto que en la región donde densidades iónicas y campo eléctrico alcanzan sus valores máximos, es posible vincular estos valores a partir del balance de presiones (IV.51). Usando en esa relación la condición deducida en esta última zona, se encuentra que $T_E/T_g > n_s(x=d)/(n_2 + n_3)_{\max} > 1$. La desigualdad anterior relaciona al cociente entre las temperaturas de ambos extremos de la tercera región de la transición plasma-gas neutro, con la razón entre las densidades máximas, de iones y neutros, que se alcanzan en dichos extremos.

Por su parte, la inclusión del efecto de separación de cargas en el modelo, transforma a la última zo-

na de la interfase en una virtual barrera para la densidad de potencia asociada con el movimiento macroscópico de las partículas. Como se ha visto en la segunda zona, esta contribución a la energía total se reduce a $T_E Q/2T_0$. Recordando que inicialmente la energía debida a la difusión de partículas era igual a Q , se concluye que el campo eléctrico representa una importante barrera térmica para este tipo de aporte al balance total de la energía de la interfase. La densidad de potencia vinculada a los movimientos de difusión disminuirá aún más a medida que se frenan las partículas neutras, resultando un valor final igual a $T_R Q/2T_0$. En forma simultánea aumenta la energía que, por unidad de área y de tiempo, está asociada con el gradiente térmico. El máximo valor que alcanza la densidad de potencia debida a los efectos de conducción térmica es $(T_R(2T_0/T_R - 1)/2T_0)Q$.

Este cuadro general cualitativo para el comportamiento de la interfase plasma-gas neutro, no se modifica si varían los parámetros n_0 y T_0 del plasma totalmente ionizado, o el gas neutro que constituye la interfase, si bien cada caso particular presenta valores numéricos que lo distinguen. Así, por ejemplo, puede apreciarse en las Figs. 17-22, que una variación en la temperatura modifica los espesores relativos para las tres zonas de la transición, cambiando un poco el valor final d/l_D . También modifica los picos máximos de densidades iónicas y de campo eléctrico que se alcanzan en $X = X_E$ (Figs. 19 y 22). Por su parte, un aumento en la densidad n_0 acorta el espesor relativo d/l_D respecto del caso $n_0 = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ y $T_0 = 25 \text{ eV}$. A su vez, el reemplazo del gas neutro (silicio por oxígeno) introduce va-

riaciones similares a las obtenidas modificando la temperatura T_0 (Figs.23-29). Una de las mayores diferencias que introduce este caso es la diferenciación de las curvas que representan a los coeficientes de ionización. Este hecho se debe a que, a diferencia de lo que sucede con el oxígeno, la energía de ionización del silicio tiene un valor bien diferente de la energía de ionización de un neutro liviano (Fig. 29).

V.4.- Consecuencias de ignorar la separación de cargas.

Resulta interesante examinar las consecuencias que surgen de ignorar, arbitrariamente, la posible existencia de efectos de carga espacial e introducir la cuasineutralidad en todas las zonas. En el caso de no incluirse el efecto de separación de cargas, el primer tramo de la integración, asimilable al borde externo del plasma, permanece inalterado. Por el contrario, crece notablemente la extensión de la interfase en un factor cercano a 26. En ella desaparece la región correspondiente a la vaina de carga espacial, quedando reducida a dos zonas bien diferenciadas (Figs. 30 - 41).

i) La primera parte de la transición plasma-gas neutro abarca el 98.9 % del espesor total. En ella continúa siendo válida la hipótesis de cuasineutralidad, y las densidades de todas las partículas cargadas crecen alcanzando sus máximos valores en $X = X_M$. La caída en la temperatura de esta re-

gión, llegando a un valor cercano a $0.25 T_0$ en $X = X_M$, produce un incremento notorio del coeficiente de recombinación, a la vez que disminuyen los coeficientes de ionización de neutros livianos y pesados en un 87.6 % respecto de sus valores iniciales en el borde del plasma (Figs.33 y 34). Esta competencia entre los procesos de ionización y recombinación, hace que el incremento de las densidades de las partículas cargadas no sea tan pronunciado como en el caso donde se incluye separación de cargas. Es por ello que los valores máximos se mantienen en el mismo orden de magnitud que los valores iniciales de iones y electrones, siendo mayores en un factor 4, aproximadamente (Fig. 30). Por su parte, las concentraciones de partículas neutras siguen siendo pequeñas: $n_4/n_0 = 7.44 \times 10^{-7}$, $n_5/n_0 = 1.0 \times 10^{-7}$ (Figs.31 y 32)

Para este caso donde no existe separación de cargas, la condición que la presión cinética total de la interfase iguale a la presión del plasma, se verifica en toda la transición plasma-gas neutro. Esto establece una diferencia de comportamiento en comparación con el caso donde existe una "presión" debida al campo eléctrico. En este último caso las presiones de las partículas superan a la presión del plasma, pero son balanceadas por los efectos del campo eléctrico (Fig. 9); mientras que en el caso contrario, todas las presiones parciales de las partículas resultan inferiores al valor de la constante P , que representa la presión total del plasma, y se mantienen constantes en toda esta región de la interfase (Fig. 35).

Debe destacarse el diferente grado de importancia que tiene el proceso de recombinación de tres cuerpos

según exista, o no, separación de cargas (comparar Figs. 8, 33 y 34). En el primer caso el campo eléctrico actúa como una eficiente barrera impidiendo que lleguen los electrones a la última zona de la interfase. De esta manera, la recombinación de tres cuerpos, sensible tanto a la temperatura cuanto a la densidad de electrones, se mantiene en el orden de magnitud de su valor inicial. A diferencia de este comportamiento, cuando no existe campo eléctrico el coeficiente de recombinación es, en X_M , 1881 veces mayor que el valor inicial y 20386 veces mayor que el coeficiente de ionización de los elementos livianos (Fig. 33).

Consecuentemente con la circunstancia que se acaba de describir, la densidad de potencia asociada a los movimientos macroscópicos de las partículas ($5T(n_2 v_2 + n_3 v_3 + \Gamma_2(1 - m_2/m_3))/2$) se reduce a $0.23 Q$, valor superior al correspondiente a la situación general que incluye la presencia de un campo eléctrico.

ii) La segunda y última zona que forma la interfase cuando no se tiene en cuenta la separación de cargas, abarca un par de longitudes de Debye (1.1 % del espesor total). En esta pequeña región las densidades de las partículas cargadas caen abruptamente a niveles despreciables, debido al importante efecto de la recombinación de tres cuerpos. Al igual que en el caso con campo eléctrico, aquí los flujos de partículas cargadas son nulos y, en consecuencia, la cantidad de energía que por unidad de área y de tiempo está asociada con la difusión de partículas es $T_R Q/2T_0$, y por lo tanto, a los efectos de conducción térmica les corresponde un valor (1 -

$T_x/2T_0)Q$. Si bien los valores finales correspondientes a cada contribución a la energía total, son los mismos para los dos casos (con o sin separación de cargas) la diferencia fundamental se observa en el borde interno de la última zona de la interfase. En un caso, la existencia de un campo eléctrico reduce la energía relacionada con la difusión de partículas en un orden de magnitud, respecto del caso en que no se considera separación de cargas. Este diferente comportamiento hace que esta región de la interfase plasma-gas neutro, sea la zona donde se produce un incremento pronunciado en la importancia de los efectos de conducción térmica (en el caso en que $E = 0$), o bien que sea una región donde no son importantes los términos asociados al movimiento de difusión de las partículas, predominando en toda la zona la conducción térmica (cuando $E \neq 0$). Puede concluirse diciendo que la última región de la interfase es una zona de "transición térmica", donde cambia la importancia relativa de los términos correspondientes al movimiento macroscópico de partículas y al gradiente de temperatura, cuando no se incluye el efecto de separación de cargas en el modelo. En cambio, si se tiene en cuenta la existencia de un campo eléctrico, esta última zona es una zona con neto predominio de la conducción térmica sobre cualquiera otra contribución al balance de energía.

Con las características que se acaban de exponer, queda sintetizado el comportamiento general de la interfase plasma-gas neutro. El conocimiento de la misma puede ser aplicado, por ejemplo, al estudio de la difusión de un campo magnético, tema que será materia del siguiente capítu-

lo. En un modelo sin separación de cargas la conductividad eléctrica permanece casi constante en toda la transición, para caer drásticamente justo en el borde con la zona neutra. El modelo está dominado por la competencia entre ionización y recombinación, que son factores determinantes del ancho de la transición, y son responsables del mantenimiento de un valor de conductividad eléctrica parecido al valor correspondiente al plasma en gran parte de la transición, efecto a nuestro juicio artificioso. Como se verá en el siguiente capítulo, los efectos de separación de cargas modifican sustancialmente este comportamiento y la conductividad eléctrica, en cambio, decae monotonamente en la transición plasma-gas neutro.

VI. PROPAGACION DE UN CAMPO MAGNETICO A TRAVES DE LA INTERFASE PLASMA - GAS NEUTRO.

VI.1.- El problema de la propagación de un campo magnético a través de una región parcialmente ionizada.

VI.1.1.- Situación general.

En un trabajo previo¹¹, se ha calculado el tiempo de evaporación del material de la superficie de un obstáculo que es embestido por un plasma denso acelerado. Esta situación es aplicable a las mediciones con sondas magnéticas en experimentos con plasmas de alta densidad, por ejemplo Z-pinch denso, plasma focus, etc. Se ha encontrado que la pared del material aislante que protege al instrumento, alcanza su temperatura de fusión mucho antes que la lámina de corriente termine de pasar por la posición de la sonda. En consecuencia, deberá esperarse la presencia de una región parcialmente ionizada entre la pared aislante y la lámina de corriente. Este hecho representa un importante apartamiento de las predicciones clásicas^{112, 113} para mediciones con sondas en experimentos con densidades $n \lesssim 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ donde el campo magnético difunde hacia el interior de la sonda antes de formarse un estrato con el material evaporado.

En diversos experimentos existe, en forma natural, una lámina conductora delante de un campo magnético que actúa como pistón. La interacción de la lámina con una sonda introducirá modificaciones en el estrato formado, ade-

más de la incorporación de más material evaporado.

La posibilidad de atenuación y distorsión de la señal medida por una sonda magnética, ha sido tomada como punto de partida para la elaboración del modelo que describe la evolución temporal de un campo magnético en la sonda⁵⁰, identificando a la vez, un sistema de parámetros físicos que influyen críticamente la fidelidad de este método de diagnóstico. En este modelo, el comportamiento del campo magnético en la región débilmente ionizada es gobernado por una ecuación integrodiferencial, incluyéndose además, efectos dispersivos en el dieléctrico de la sonda. Para el límite de bajas frecuencias, la ecuación se reduce a una "ecuación del telegrafista"¹¹⁴. En el trabajo citado se obtiene la solución de la ecuación integrodiferencial para un problema mixto de condiciones iniciales y de contorno. Si bien el estudio desarrollado fue motivado por la discusión sobre sondas magnéticas, la solución puede ser adaptada al tratamiento de otros problemas. La interacción, dependiente del tiempo, de las ondas de choque con campos magnéticos externos y la difusión en "liners" de compresión magnética, son algunos de los posibles campos de aplicación.

VI.1.2.- Ecuaciones básicas.

La evolución temporal de un campo magnético ha sido estudiada con un modelo unidimensional que depende de la variable espacial x , para una zona de transición como la descrita en los capítulos precedentes. Los cambios del

campo magnético $B(t,x)$ en el plasma, son modelados con la condición de contorno $B(t,x=0) = B_0 f(t)$, donde $f(t)$ es una función dato que se anula para $t < 0$. En el instante inicial no existe campo magnético en todo el semiespacio $x > 0$. En $x \gg d$, donde se encuentra la zona totalmente neutra, se ubicará el material aislante de la sonda magnética, si es que el modelo se aplica a interpretar las mediciones de este instrumento. Se considera que el campo magnético tiene la dirección y , y el campo eléctrico inducido la dirección z . En consecuencia, se tendrá a través de todo el sistema

$$c \frac{\partial}{\partial x} E = \frac{\partial}{\partial t} B \quad , \quad (\text{VI.1})$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. En todas las expresiones se ha utilizado el sistema cgs de unidades.

Para la zona de transición se supone una relación constitutiva lineal, la cual vincula a la densidad de corriente j con E :

$$j(t,x) = \int_{-\infty}^t \hat{\sigma}_1(t-\tau) E(\tau,x) d\tau \quad , \quad (\text{VI.2})$$

donde $\hat{\sigma}_1(t)$ es la función de respuesta para la conductividad¹⁵. En (VI.2) se desprecian efectos de dispersión espacial. En un plasma parcialmente ionizado la transformada de Fourier de $\hat{\sigma}_1$ puede escribirse como¹⁰

$$\sigma_1(\omega) = \sigma / (1 - i\omega/\nu_c) \quad , \quad (\text{VI.3})$$

donde ω es la frecuencia, σ el valor correspondiente al li-

mite estático de la conductividad, y ν_c la frecuencia de colisiones de electrones con neutros. En esta última ecuación no se ha tenido en cuenta la influencia del campo magnético sobre la conductividad. Esta aproximación es posible debido a que una de las hipótesis para el estudio de la interfase plasma-gas neutro, es considerar que $\omega_c \tau_c \ll 1$, con ω_c la frecuencia del ciclotrón de electrones y τ_c el tiempo entre colisiones. Utilizando (VI.2) en la ecuación de Maxwell para el rotor de B, se obtiene

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} B = 4\pi \int_{-\infty}^t d\tau \hat{\sigma}_1(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} B + \frac{\partial^2}{\partial t^2} B \quad , \quad (\text{VI.4})$$

que es la ecuación para la propagación del campo magnético a través de toda la región en estudio. Para bajas frecuencias, $\omega \ll \nu_c$, en la aproximación estática, esta expresión se reduce a la "ecuación del telegrafista"

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} B = \frac{1}{\nu_m} \frac{\partial}{\partial t} B + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} B \quad , \quad (\text{VI.5})$$

siendo $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$ la viscosidad magnética.

Por su parte, en la región totalmente neutra (correspondiente al dieléctrico en el caso de una sonda magnética) el desplazamiento eléctrico D se relaciona con E mediante

$$D(t,x) = \int_{-\infty}^t \hat{\epsilon}_2(t-\tau) E(\tau) d\tau \quad , \quad (\text{VI.6})$$

donde $\hat{\epsilon}_2(t)$ es la función de respuesta dieléctrica de esta región. La transformada de Fourier en frecuencia de $\hat{\epsilon}_2$ da la

función dieléctrica $\epsilon_2(\omega)$ cuya forma es (despreciando absorción)^{116, 117}

$$\epsilon_2(\omega) = 1 + \omega_{p2}^2 (f_i / (\omega_i^2 - \omega^2) + f_{uv} / (\omega_{uv}^2 - \omega^2)) \quad (\text{VI.7})$$

con ω_{p2} la frecuencia del plasma para electrones y f_i , f_{uv} , ω_i , ω_{uv} , son las intensidades de los osciladores y las resonancias infrarroja y ultravioleta, respectivamente. Considerando (VI.1) y (VI.6) se obtiene

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} B = \int_{-\infty}^t \hat{\epsilon}_2(t-\tau) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} B \, d\tau \quad (\text{VI.8})$$

Para frecuencias mucho menores que las de resonancia, ϵ_2 se reduce a la constante dieléctrica ϵ_{20} para el caso estático y (VI.8) da la ecuación de propagación de ondas electromagnéticas con velocidad $c/\sqrt{\epsilon_{20}}$. Las condiciones de contorno en $x = d$ requieren la continuidad de B y E para todo instante. Como la señal se genera en $x = 0$, los campos en la zona neutra se propagan solamente en la dirección de las x positivas. Esta es una condición de radiación impuesta para $x \gg d$.

VI.1.3.- Solución.

El método de la transformada de Laplace resulta particularmente útil para el estudio del problema mixto de condiciones iniciales y de contorno, dado por las ecuaciones (VI.4) y (VI.8). Se han considerado las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
 B(0,x) &= 0 & , & \\
 \frac{\partial}{\partial t} B(0,x) &= 0 & , & \quad (VI.9)
 \end{aligned}$$

notando que $B(t,x=0) = 0$ para $t < 0$, y pidiendo como condiciones de contorno, en ambos bordes de la interfase, la continuidad de los campos.

La solución para el campo magnético en $x = d$, donde comienza la región totalmente neutra, está dada por la transformación inversa⁵⁰

$$B(t,d) = (B_0/2\pi i) \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} (\tilde{f}(p)/g(p)) \exp(pt) dp , \quad (VI.10)$$

donde

$$g(p) = \cosh(t_2 p \epsilon_1^{1/2}) + (\epsilon_1/\epsilon_2)^{1/2} \sinh(t_2 p \epsilon_1^{1/2}) , \quad (VI.11)$$

con $t_2 = d/c$, ϵ_1 y ϵ_2 son las funciones dieléctricas de la zona de transición y de la región totalmente neutra, respectivamente; $\tilde{f}(p)$ es la transformada de Laplace de la función $f(t)$ con la que se simula el campo magnético en el borde del plasma, y el contorno $Re(p) = \gamma$ se ubica a la derecha de todas las singularidades del integrando. La solución de (VI.10) se encuentra sumando todos los residuos del integrando, en los ceros de $g(p)$ y polos de $\tilde{f}(p)$, más la contribución de los puntos de ramificación si los hubiera¹¹⁸. El campo magnético $B(t,d)$, así calculado, se expresará como la suma de un valor asintótico, B^0 , más una parte transitoria B^T . El resultado obtenido es general, en el sentido que es

válido para cualquier par de medios con relaciones constitutivas lineales, como es el caso de (VI.2) y (VI.6).

VI.1.3.i.- Limite asintótico de la solución en la zona totalmente neutra.

Resulta conveniente estudiar, en primer lugar, el caso $f(t) = H(t)$, donde $H(t)$ es la función de Heaviside o función escalón ($H(t) = 0$ para $t < 0$ y $H(t) = 1$ para $t > 0$). Una vez conocida esta solución, $B_H(t, x)$, la solución para cualquier otra función $f(t)$ podrá calcularse mediante la convolución⁵⁰

$$B(t, x) = \int_0^t f(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} B_H(\tau, x) d\tau \quad , \quad (VI.12)$$

Como $\tilde{f}(p) = 1/p$, la contribución del residuo en $p = 0$ a la solución (VI.10) es

$$B_H^0 = B_0 / (1 + r) \quad , \quad (VI.13)$$

con $r = \lim_{p \rightarrow 0} (t_2 p \epsilon_1 / \epsilon_2^{1/2}) = 4\pi t_2 \sigma / \epsilon_2^{1/2}$ (VI.14)

El valor constante B_H^0 es el limite asintótico, para valores grandes de t , de $B_H(t, x)$ en la región neutra (ocupada por el dieléctrico en el caso de una sonda magnética). La expresión (VI.13) da la atenuación o apantallamiento del campo magnético B_0 del plasma, como consecuencia de la existencia de la zona de transición. Debe notarse que (VI.14) contiene la ra-

zón de dos tiempos característicos, $r = t_1/t_2 \epsilon_2^{1/2}$, donde $t_1 = 4\pi\sigma d^2/c^2$ es el tiempo de difusión de un campo magnético a través de una distancia d en un medio de conductividad σ .

VI.1.3.ii.- Transitorios.

La contribución de todos los residuos a la solución (VI.10), excluyendo a $p = 0$, da los transitorios del campo magnético que penetra en la zona totalmente neutra, cuya expresión es⁵⁰

$$B_H^T(t,d) = B_H^{(1)}(t,d) + B_H^{(2)}(t,d) \quad , \quad (VI.15)$$

donde

$$B_H^{(1)}(t,d) = -2B_0 \sum_{n=1}^N \{ (r + 1 - x_n^2/r) \cos(x_n) \}^{-1} \cdot \exp(-x_n^2 t/t_1) \quad , \quad (VI.16)$$

$$B_H^{(2)}(t,d) = 2B_0 \epsilon_2^{1/2} (\epsilon_2 - 1)^{-1/2} \exp(-|x'|t/t_2) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} [x' \cos(y_m \theta) - y_m \sin(y_m \theta)] ((x')^2 + y_m^2)^{-1} \quad (VI.17)$$

$$\text{con } \theta = (t/t_2) - 1 \quad , \quad (VI.18)$$

$$x' = \ln [(\epsilon_2^{1/2} - 1)/(\epsilon_2^{1/2} + 1)]^{1/2} \quad ,$$

obteniéndose las raíces x_n , y_m a partir de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \tan(x_n) &= -x_n/r \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad , \\ y_m &= (2m + 1)\pi/2 \quad , \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (VI.19)$$

En general, puede decirse que la parte transitoria $B_H^{(1)}$ de la solución, resulta despreciable cuando se la compara con B_H^0 después de un tiempo t del orden de t_1 . A su vez, la parte transitoria $B_H^{(2)}$ se debe a las múltiples reflexiones de las ondas electromagnéticas en la zona de transición. Esta última parte de la solución está compuesta por oscilaciones de alta frecuencia, y decae con una escala temporal gobernada por t_2 .

VI.2.- Conductividad eléctrica de la interfase plasma-gas neutro.

VI.2.1.- Regla de mezcla.

Para poder calcular el valor asintótico que alcanza el campo magnético para tiempos mucho mayores que t_1 y t_2 (ec. (VI.13)), como así también, para estimar esas dos escalas temporales, resulta imprescindible calcular la conductividad eléctrica de la región de transición.

Existe una regla de mezcla que proporciona valores muy precisos para la conductividad eléctrica σ en todo el rango posible de ionización. Esta fórmula propuesta por L.S.Frost^{9,2} se escribe (ver capítulo II, sección II.3):

$$\sigma = (4\pi n_1 e^2 / 3T) \int_0^\infty (u^4 / v^F) f_M(u) du \quad ,$$

donde n_1 es la densidad total de electrones, f_M es la función de distribución maxwelliana para los electrones, y ν^F es una frecuencia de colisiones modificada, definida por la expresión (II.58). A partir de la fórmula de Frost se obtiene una expresión que resulta mucho más útil desde el punto de vista del cálculo numérico. Así, la conductividad eléctrica se puede escribir en la forma:

$$\sigma = c \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (a/b)^k I_{2(k+3)} \quad , \quad (\text{VI.20})$$

$$\text{con } c = (4\pi n_1 e^2 / 3T) (m_1 / 2\pi T)^{3/2} / b \quad , \quad (\text{VI.21})$$

$$I_{2(k+3)} = \int_0^{\infty} \exp(-m_1 u^2 / 2T) u^{2(k+3)} du \quad , \quad (\text{VI.22})$$

siendo a la suma de todas las frecuencias de colisiones entre electrones y partículas neutras ($a = \sum_n \nu_{1n}$) y $b = 3.808 \cdot n_i \pi \lambda e^4 / (2Tm_1^3)^{1/2}$, donde n_i es la densidad total de iones. En todas las expresiones anteriores se ha mantenido la convención adoptada en (IV.8) para los subíndices.

VI.2.2.- Cálculo numérico.

En todos los casos analizados en el capítulo anterior para la interfase plasma-gas neutro, se ha encontrado que resulta suficiente tomar los primeros cuatro términos de la serie (VI.20) para obtener resultados muy precisos.

En el caso particular donde no se considera separación de cargas (y por lo tanto no existe campo eléctrico) σ mantiene un valor constante, igual a la conductividad eléctrica del plasma, σ_0 , para todo $x < d$. Por el contrario, cuando existe un campo eléctrico (cuya intensidad crece hacia el borde X_E de la vaina de carga espacial) la densidad de electrones decrece hasta hacerse cero (Figs. 4 y 5). Esta caída en la densidad electrónica, es factor fundamental para la considerable disminución que sufre σ junto a la zona neutra. En la figura 13 se representa la variación del cociente σ/σ_0 , el campo eléctrico normalizado con $E_0 = (7.52 \times 10^4 \sqrt{P}) \text{ V m}^{-1}$ (con P expresada en unidades cgs) y T/T_0 , para un plasma de deuterio con una densidad $n_0 = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ y temperatura $T_0 = 25 \text{ eV}$, y una zona totalmente neutra de oxígeno. Este caso ilustra el comportamiento general de la conductividad y campo eléctricos en la interfase plasma-gas neutro. Cualquier variación en la temperatura T_0 , o en la densidad del plasma n_0 , como así también en el tipo de gas que forma la región neutra, producen cambios en el espesor de la interfase pero no alteran sustancialmente los valores relativos de σ/σ_0 y E/E_0 (Figs. 19, 22, 25 y 28). Así, por ejemplo, E/E_0 es 4.52 y 4.5 para $n_0 = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ y temperaturas de 25 y 50 eV, respectivamente. A su vez, para $T_0 = 25 \text{ eV}$, un aumento de n_0 en un orden de magnitud hace que $E/E_0 = 5.8$. Por su parte, si la zona neutra es de silicio, para un plasma con $n_0 = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ y $T_0 = 25 \text{ eV}$, resulta $E/E_0 = 4.74$. En todos los casos σ/σ_0 decae a cero.

La diferencia fundamental, en lo que respecta al cociente σ/σ_0 , entre las situaciones con y sin separación

de cargas es que, en el primer caso, al disminuir la densidad electrónica, la conductividad relativa decae desde un valor $\sigma/\sigma_0 = 1$ en el borde del plasma, hasta hacerse nula en $X = X_F$. Por el contrario, cuando no se incluye el efecto de la separación de cargas, la conductividad permanece constante en toda la zona de transición, e igual a la conductividad del plasma, para caer abruptamente a cero en $x = d$.

El cálculo de la conductividad eléctrica permite, además, obtener un valor que caracterice al producto $\langle \sigma x_{12}^2 \rangle$ utilizado para determinar la atenuación del campo que difunde a través de la interfase, y que será tema de discusión en la sección siguiente.

VI.3.- Aplicación del modelo de cinco fluidos a la difusión de un campo magnético.

Hasta el presente, el principal obstáculo para la aplicación de la teoría expuesta en la sección VI.1, ha sido la carencia de un modelo que permitiera calcular las distintas magnitudes asociadas a la interfase plasma-gas neutro. El modelo de cinco fluidos presentado en los capítulos precedentes, brinda la posibilidad de calcular la atenuación sufrida por el campo magnético al difundir desde el plasma a través de la región de transición. La existencia de transitorios en $x = d$ está regulada por los tiempos t_1 y t_2 , mientras que el valor asintótico depende del cociente entre estos dos tiempos (ec.(VI.14)). La tabla III da los valores de t_1^0 , t_2^0 y r^0 calculados con el valor de la conductividad

eléctrica del plasma, σ_0 , y el espesor total, d , de la interfase, para el caso que se ha tomado como ejemplo, es decir, $n_0 = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ y $T_0 = 25 \text{ eV}$ para un plasma de deuterio, con una zona totalmente neutra de oxígeno.

Para el caso más general, y a la vez más realista, en el que la separación de cargas produce un campo eléctrico, se ha empleado el valor

$$\langle \sigma x_{12}^n \rangle = (1/x_{12}) \int_{x_1}^{x_2} \sigma x^n dx \quad (\text{VI.23})$$

para caracterizar el producto σx_{12}^n que aparece en el cálculo de r y t_1 para cada zona $x_1 < x < x_2$ que forma la región de transición (ver capítulo V). Cada una de estas zonas tiene asociado un tiempo t_2 y un tiempo t_1 . Este último permite estimar cuánto habría que esperar para que el campo magnético difundiese desde un extremo al otro de cada región considerada. La expresión utilizada para calcularlo es

$$t_1 = \frac{4\pi}{c^2 x_{12}} \int_{x_1}^{x_2} \sigma x^2 dx = \frac{4\pi}{c^2} \langle \sigma x_{12}^2 \rangle \quad (\text{VI.24})$$

Dado que la última porción de la interfase ($X_f \ll X < d/l_D$) no contribuye al valor de t_1 , en los resultados de la tabla III la última zona a considerar se extenderá entre $X_i \ll X < d/l_D$. Por su parte, $t_2 = x_{12}/c$ es el tiempo que tarda una señal en recorrer cada sección de la interfase, viajando con la velocidad de la luz. De esta manera, el cociente t_2/t_1^0 brinda el espesor relativo, $(x_2 - x_1)/d$, de cada región considerada.

La elección de una serie de valores corres-

pondientes a alguna de las zonas presentadas en la tabla III estará reflejando un criterio posible para elegir la zona de difusión del campo magnético que debe tenerse en cuenta al aplicar las fórmulas de la sección VI.1.3.-. Se entiende que una información adecuada acerca de la configuración inicial de campo magnético, en las diferentes situaciones físicas reales, es indispensable para poder aplicar esta teoría. Una posibilidad consiste en tomar toda la interfase ($0 < x < d$) que resulta de aplicar el modelo de cinco fluidos, en el caso de saber que el campo magnético no llega hasta el borde mismo del plasma. Mientras que la segunda alternativa es considerar que la región, distinta de un plasma, que se ha generado por contacto con la pared, es la transición comprendida entre $X_i \ll X < d/l_D$. Esto se debe a que entre $0 < X < X_i$ la temperatura permanece aproximadamente constante y del orden de T_0 , que la densidad de electrones es $n_1 \gg n_0$, que se cumple con muy buena aproximación la condición de cuasineutralidad y la disminución en la conductividad eléctrica es pequeña. Por su puesto, esta alternativa se emplearía en el caso de contarse con información de que el campo magnético llega, inicialmente, hasta el borde del plasma.

Las dos opciones posibles representan, naturalmente, distintas situaciones físicas. Así, por ejemplo, la adopción de la zona de transición en forma completa simularía, en cierta medida, lo que ocurre con la lámina de corriente en experimentos del tipo "plasma focus" o similares. En ellos, durante la etapa coaxial se forma una zona muy delgada de plasma (frente de "choque") delante de la lámina de corriente. Este frente de choque posee campo magnético

muy pequeño o nulo, mientras que detrás de la lámina existe un campo magnético azimutal B_0 que actúa como pistón. Es por ello que, además de la elección de la región de difusión, deberá tomarse una función de campo magnético que represente lo que ocurre en la lámina de corriente. Una primera aproximación sería tomar

$$B_0(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ B_0^0 t/\tau_D & 0 < t \leq \tau_D \\ B_0^0 & t > \tau_D \end{cases}, \quad (\text{VI.25})$$

siendo $\tau_D = l_D/u$, un tiempo que caracteriza el paso de la lámina de corriente de espesor l_D , por un dado punto del espacio (por ejemplo, donde se ubica una sonda magnética) moviéndose con velocidad u . Para la misma transición ($0 < x < d$) la situación anterior es acompañada con el caso donde un plasma ocupa el semiespacio $x \leq 0$ y posee un campo magnético constante B_0 . Debido a las características de la región $0 < X < X_i$, esta circunstancia particular representará la difusión del campo magnético interno de un plasma que no está en contacto con el borde de la transición ($X_i \leq X < d/l_D$).

Por otra parte, el empleo de las dos funciones de campo magnético mencionadas en los ejemplos anteriores, con la segunda opción para la elección del espesor de la transición plasma-gas neutro, indicará que el campo magnético llega hasta el borde donde empieza la zona de transición. En todos los casos se supone que inicialmente no existe campo magnético en la interfase.

Para tiempos superiores a t_i^0 no existirán

transitorios del campo magnético en $x > d$, observándose solamente los términos correspondientes a la solución asintótica. En el caso de un campo $B = B_0 = \text{cte.}$, la solución está dada por (VI.13), mientras que para la función (VI.25) el valor asintótico es

$$B_0(t, d) = \begin{cases} B_0^0(t/\tau_p) / (1 + r) & t_1^0 < t \leq \tau_p \\ B_0^0 / (1 + r) & t > \tau_p \end{cases}, \quad (\text{VI.26})$$

La atenuación de las señales de campo magnético, para los distintos casos mencionados, puede observarse en la tabla III. De los resultados expuestos se desprende que las escalas temporales asociadas a las componentes transitorias del campo, resultan despreciables frente al tiempo de paso de una lámina de corriente, $\tau_p = l_p/u$. Más aún, t_1^0 y t_2^0 son siempre demasiado pequeños como para que una sonda magnética pueda detectar las correspondientes contribuciones a la señal. De lo anteriormente expuesto resulta claro que la difusión de un campo magnético sufre una atenuación mayor en los casos en que una zona ionizada se interpone entre el plasma y la transición propiamente dicha, cuando se los compara con la situación en que el campo se halla en el borde de la transición.

Los casos aquí presentados ejemplifican el comportamiento de la difusión de un campo magnético a través de la interfase plasma-gas neutro. Deberá tenerse siempre presente, al aplicar la teoría de este capítulo, que la descripción de la transición dada por el modelo de cinco fluidos brinda un panorama mucho más complejo que el considerado

como punto de partida para elaborar la teoría formulada en la primera sección. Así, por ejemplo, no se ha tenido en cuenta en (VI.13), (VI.16), (VI.17) y (VI.26) la dependencia espacial de σ , ni tampoco se consideró la existencia de un campo eléctrico $E(x)$ debido a separación de cargas. El modelo de cinco fluidos indica que deberán incorporarse estos dos elementos a la teoría de la difusión del campo magnético, para obtener resultados más acordes con el comportamiento real.

VII. DISCUSION Y CONCLUSIONES

Como ya se mencionara en la introducción, existen muchas circunstancias en los experimentos de laboratorio, en las cuales un estrato de gas parcialmente ionizado se interpone entre el plasma generado y una región totalmente neutra (que bien puede ser el material aislante de las paredes de la cámara de descarga, o un gas neutro, "gas blanket", introducido "ad hoc" en el experimento). El origen de esta interfase plasma-gas neutro depende de la interacción entre el plasma y la zona neutra. Las propiedades que caracterizan a esta transición dependen de las características del plasma y del gas neutro, en gran medida a través de sus parámetros: densidades n_0 , $n_s(x=d)$ y temperaturas T_0, T_g , respectivamente.

El estudio de la interfase plasma-gas neutro, se ha encarado mediante la elaboración de un modelo que adopta una descripción macroscópica, de cinco fluidos, para una situación estacionaria, con predominio de las interacciones colisionales sobre los procesos radiactivos, en una geometría plana y asumiendo la hipótesis de difusión para el movimiento de las partículas. Si bien la modalidad expresada es común a muchos modelos de este tipo^{103, 104}, se ha extendido su aplicación al régimen, poco estudiado hasta el presente, de plasmas de alta densidad ($n_0 \gtrsim 10^{17} \text{ cm}^{-3}$) y se ha introducido como diferencia fundamental, la presencia de un campo eléctrico debido al efecto de separación de cargas. El hecho de focalizar la atención en los plasmas densos, hace que sean la ionización por impacto electrónico y la re-

combinación de tres cuerpos, los mecanismos colisionales más importantes que regulan el balance de partículas. Por su parte, la existencia de un campo eléctrico juega un papel fundamental en el balance de energía de la interfase. Este campo provoca una considerable disminución del flujo de electrones hacia la zona neutra, disminuyendo en consecuencia, la energía asociada al movimiento macroscópico de cada especie (T_n, v_n). Como contrapartida, se hacen importantes los efectos de conducción térmica.

Dentro de este marco de referencia, las ecuaciones que formulan el modelo propuesto en el capítulo IV para describir el comportamiento de la transición, pueden expresarse en forma compacta mediante el sistema (IV.74)-(IV.76). Las variables y coeficientes del sistema han sido convenientemente adimensionalizados según las definiciones (IV.68)-(IV.71). Cada uno de los coeficientes que interviene en las ecuaciones mencionadas, es una función de las variables del sistema, es decir, de los flujos y densidades de partículas, y de la temperatura de la interfase. Esta circunstancia que, sin duda, presupone un esfuerzo adicional de cálculo, trae como consecuencia beneficiosa la posibilidad de conocer, para todo punto de la transición, las conductividades térmicas de cada especie y sus respectivas contribuciones a la conductividad térmica total, además de la conductividad eléctrica de la transición (ec.(VI.20)). El necesario trabajo de investigación bibliográfica, previo al cálculo de los coeficientes de transporte, aporta un apreciable número de referencias que el lector interesado puede consultar sobre el tema^{51, 52, 66, 69, 70, 75-91}. En tal sentido, el ca-

pítulo II del presente trabajo, cumple la función de guía rápida de consulta sobre las fórmulas que expresan varias reglas de mezclas, de mucha utilidad para el cálculo de coeficientes de transporte en gases débilmente ionizados.

La condición (IV.7) que pide que la densidad de corriente sea nula, es en esencia, una expresión del balance de flujos de las partículas cargadas. Esta condición de difusión ambipolar, común en todos los trabajos sobre la vaina de carga espacial, permite calcular en todo momento el flujo de electrones conociendo el comportamiento de los flujos de cada especie iónica, reduciendo así el número de variables. Además, sumando las ecuaciones de continuidad para iones y neutros de una misma especie, se encuentra que la suma de los flujos respectivos permanece constante a través de toda la región de transición (ec.(IV.48)). Es obvio que estas relaciones permitirán encontrar los flujos de las partículas neutras como diferencia entre los valores constantes Γ_s (indicando s el tipo de gas que forma el plasma o la zona neutra) y cada flujo iónico. Estas dos constantes expresan, por sobre todo, una limitación para los flujos de partículas neutras que pueden penetrar en el borde del plasma, regulándose de esta manera, las concentraciones de impurezas neutras para esta situación estacionaria. Precisamente, partiendo de la hipótesis i por la cual la situación a analizar es estacionaria, y por ello la interfase mantiene su espesor, resulta que la velocidad del centro de masa es nula. Esta circunstancia se expresa empleando los balances de flujos de partículas, mediante la condición (IV.58): $\Gamma_3 = -\Gamma_2 \cdot (m_2/m_3)$. En el marco de las presentes hipótesis, sólo se

necesita conocer la constante que representa el balance de flujos de iones y neutros, del gas que constituye el plasma, Γ_2 , para limitar el posible valor de flujo neto de impurezas pesadas, Γ_3 , que penetra hacia el plasma desde la interfase. La magnitud de este flujo de impurezas está en relación directa con las masas de los átomos que componen el gas de llenado que se utiliza para generar el plasma, m_2 , y el gas que ocupa la región totalmente neutra, m_3 . Dado que el plasma se encuentra totalmente ionizado, el balance de flujos de la especie liviana, Γ_2 , evaluado en el borde externo del plasma, representará, en esencia, el valor de iones del plasma que están penetrando en la zona de transición. Además, el valor Γ asignado a Γ_2 en el borde del plasma, lleva implícita la condición de difusión, ya que al representar el flujo de iones livianos, y siendo $n_2^0 \approx n_0$, su valor está íntimamente relacionado con la velocidad de difusión de los deuterones, que deberá ser mucho menor que la velocidad térmica correspondiente.

La segunda constante del modelo, P , es la representación del balance de presiones entre el plasma totalmente ionizado y la interfase parcialmente ionizada. Esta constante se obtiene sumando todas las ecuaciones para la cantidad de movimiento de cada especie de partículas, y se calcula a partir de la ec. (IV.51): $T \sum_{s=1}^5 n_s - (E^2/8\pi) = P$, siendo entonces inmediato obtener el campo eléctrico a partir de ella. El balance entre la suma de las presiones parciales de cada especie, $T \sum_{s=1}^5 n_s$, y la "presión" debida a los efectos del campo eléctrico, $E^2/8\pi$, dan un saldo neto que se mantiene constante e igual a P . La condición (IV.51)

determina la densidad del gas que ocupa la región totalmente neutra, en función de los parámetros del plasma, a través de la constante P , y la temperatura T_g a la que se encuentra dicho gas. De aquí resulta un hecho importante para los llamados "gas blanket" o "plasma blanket": la densidad de gas neutro que rodea a un plasma totalmente ionizado, de densidad n_0 y temperatura T_0 , no puede fijarse arbitrariamente, sino que dependerá de la presión total del plasma $P = 2n_0T_0$, y de la temperatura T_g a la que se mantenga el escudo protector o "blanket". Por su parte, si se desea aplicar el modelo a la descripción de la transición entre un plasma y una pared sólida, que bien puede ser la cápsula aislante que protege a una sonda, pueden ser datos del problema la densidad del material evaporado, $n_s(x=d)$, y la temperatura a la cual se funde el material, T_g . En esta situación, el modelo podrá aplicarse a aquellos plasmas que verifiquen $P = T_g \cdot n_s(x=d)$. De la discusión precedente se desprende que existen pares de valores $(n_0T_0, n_s(x=d)T_g)$ para los cuales es posible aplicar el modelo, y que si se conoce alguno de ellos, el restante no puede elegirse arbitrariamente sino que debe verificar la condición $n_s(x=d)T_g/P = 1$. En toda la región comprendida entre cada uno de los bordes mencionados, la variación de cada una de las presiones parciales está estrechamente vinculada con la competencia entre los procesos de ionización por impacto electrónico y recombinación de tres cuerpos. En el caso analizado en el presente trabajo, cuando $E = 0$, resulta notorio el aumento del coeficiente de recombinación en relación con el valor inicial del coeficiente de

ionización de elementos livianos en el borde del plasma (Fig 33). Por el contrario, la existencia de un campo eléctrico, debido a separación de cargas, modifica sustancialmente el comportamiento anterior. Ahora, la importancia relativa de la recombinación disminuye apreciablemente, siendo solamente un orden de magnitud mayor que el valor inicial del coeficiente de ionización en el plasma. En la región donde el campo eléctrico alcanza su máximo valor (Fig.13), también son máximas las densidades de iones (Fig. 4), mientras que se anula la densidad de electrones (repelidos por el campo eléctrico) y las concentraciones de neutros no son significativas (Figs. 6 y 7). En tal circunstancia, el balance de presiones (IV.51) establece la relación entre el pico iónico y el máximo valor de campo eléctrico posible:

$$E = (8\pi P)^{1/2} ((n_2 + n_3)_{\max} T_E / P - 1)^{1/2}$$

Utilizando la condición de balance de presiones en el borde de la región totalmente neutra podrá escribirse

$$E = (8\pi)^{1/2} ((n_2 + n_3)_{\max} T_E - n_5(x=d) T_g)^{1/2}$$

Los valores de densidades físicamente posibles son aquellos que dan soluciones reales para el campo eléctrico de separación de cargas. Esta condición establece una relación entre los máximos valores de densidades de partículas cargadas y neutras:

$$(n_2 + n_3)_{\max} T_E > n_5(x=d) T_g ,$$

o bien, $T_E/T_g > n_5(x=d) / (n_2 + n_3)_{\max} > 1$

Al ser la temperatura T_E , a la cual se alcanza el máximo valor de concentración iónica, mayor que la temperatura del gas neutro, T_g , el modelo impone un límite superior para las densidades iónicas, que deberán ser siempre inferiores a la densidad del gas totalmente neutro en $x = d$. En consecuencia, el valor de la constante P que representa al balance de presiones, determina fuertes limitaciones para los valores máximos de las densidades de partículas, compatibles con el funcionamiento del modelo.

El tratamiento del transporte de energía se efectúa considerando a la interfase como un todo, obteniendo la ecuación necesaria como suma de las ecuaciones individuales para la energía de cada componente. La evaluación de esta ecuación en el origen de coordenadas (borde externo del plasma) con el empleo de las relaciones entre las constantes de los flujos de partículas, permite obtener la expresión (IV.60) que representa a la última constante del modelo: $Q = 5T_0 \Gamma (1 - m_2/m_3)$. La constante Q representa el flujo de energía transportado por los iones livianos, que difunden desde el plasma hacia la interfase con un flujo $\Gamma_2 = \Gamma$, modificado por un factor numérico menor o del orden de 5. A través del valor de Γ se pone de manifiesto la dependencia de la energía que ingresa inicialmente a la interfase, de la hipótesis de difusión. Mientras que el factor $(1 - m_2/m_3)$ da cuenta de la existencia de la condición de difusión ambipolar ($j_x = 0$). Estos dos hechos son de fundamental importan-

cia, ya que en virtud de la hipótesis de difusión se han despreciado los términos cuadráticos en las velocidades, asociados al calor total generado por fricción ($\sum_{s,r} \alpha_{sr} (v_s - v_r)^2$, con α_{sr} el coeficiente de fricción) y, a su vez, la segunda condición hace que los efectos del campo eléctrico ($E \sum_s e_s n_s v_s$) no contribuyan al balance total de la energía para la interfase plasma-gas neutro. Deberá tenerse siempre en mente, además, que la constante Q caracteriza a una ecuación para la energía en la que se han despreciado los efectos viscosos y la existencia de fuentes o sumideros de calor en la zona de transición. Una vez establecido el valor de Q en $x = 0$, la densidad de energía que por unidad de tiempo ingresa desde el borde del plasma, permanecerá constante a través de toda la interfase. En la posición inicial toda la energía está asociada al movimiento macroscópico de difusión de las partículas. A medida que se avanza en la zona de transición, aumenta la importancia de los efectos de conducción térmica a expensas de la energía asociada a la difusión de partículas. Este juego de energía se pone de manifiesto escribiendo la ec. (IV.55) en la forma

$$Q = (5/2)T (n_2 v_2 + n_3 v_3 + \Gamma(1 - m_2/m_3)) - \kappa dT/dx$$

Los primeros dos términos del miembro derecho dependen de los procesos que regulan el número de partículas cargadas, esto es, la ionización por impacto electrónico y la recombinación de tres cuerpos, vinculadas a través de las correspondientes ecuaciones de continuidad. Estos dos términos representan, en definitiva, la energía asociada a los procesos

colisionales que modifican el número de partículas y que son influenciados, como se ha visto, por la presencia de un campo eléctrico. La contribución de los mismos es máxima en el borde del plasma, y se hace cero en la posición donde es máxima la recombinación (cuando $E = 0$), o cuando el campo eléctrico alcanza su valor máximo (cuando se tiene en cuenta el efecto de separación de cargas). El tercer término representa la energía asociada a los flujos de difusión de partículas. En la posición inicial su contribución representa el 50 % del valor de Q , mientras que el mínimo valor lo alcanza en el borde de la región totalmente neutra, siendo inferior a Q en un factor $T_g/2T_0$. Por su parte, el último término es puramente conductivo, y su importancia crece a medida que nos acercamos a la zona neutra. La contribución debida a la conducción térmica pasa de ser nula en el borde del plasma, a tomar el valor máximo $T_g(2T_0/T_g - 1)/2T_0 Q$, que resulta ser $(2T_0/T_g - 1)$ veces superior al valor final de energía debido a la difusión de partículas.

La discusión precedente subraya el hecho de que las constantes Γ , P y Q caracterizan físicamente al modelo, y que imponen restricciones entre sus variables. Pero la elección de las condiciones iniciales no puede establecerse sin la existencia de cierto grado de arbitrariedad (ver secciones IV.2.- y IV.3.-). Como, idealmente, el borde que separa a un plasma totalmente ionizado del comienzo de la interfase no debería tener impurezas, neutras o ionizadas, el criterio adoptado para arrancar el cálculo numérico fue tomar concentraciones de impurezas ionizadas, c_3^0 , y neutras, $c_{n,j}^0$, con $j = 4,5$, que mejor simularan la condición i-

deal para la posición $x = 0$ y resultaran compatibles con el modelo elaborado. En tal sentido, se han explorado valores de concentraciones de impurezas entre 10^{-20} y 10^{-6} sin que se modificaran los resultados del cálculo numérico, adoptándose en consecuencia, el mínimo valor de impurezas para obtener los resultados expuestos en el capítulo V. Por su parte, debido a que la hipótesis de difusión aparece implícitamente expresada en el valor de Γ_2 , se han explorado numéricamente situaciones con valores en el rango $10^{-10} \Gamma < \Gamma_2 < 10^{-4} \Gamma$, siendo $\Gamma = (n_2^0/4)(8T_0/m_2)^{1/2}$. En todo el rango estudiado no se han obtenido diferencias en el comportamiento del modelo para distintos valores de Γ .

A pesar del grado de arbitrariedad inicial, es posible establecer características generales que describen a la interfase plasma-gas neutro, las cuales se han ilustrado en el capítulo V tomando algunos casos particulares. Sin entrar en la discusión particular de cada zona que compone la interfase, puede decirse que el modelo de cinco fluidos ha permitido identificar y describir cada una de las zonas integrantes de la transición, brindando un cuadro del comportamiento de la misma en diferentes situaciones. En tal sentido, debe destacarse la importancia del papel que juega el campo eléctrico en la determinación de las propiedades de la interfase. La inclusión del efecto de separación de cargas, hace posible la existencia de una zona que actúa como doble barrera para la densidad de potencia asociada con el movimiento macroscópico de las partículas. Esta región es adyacente a la posición donde el campo eléctrico es máximo, y se extiende hasta el comienzo de la zona totalmente neu-

tra. Como se ha podido ver, la presencia del campo eléctrico reduce el flujo de electrones hasta hacerlo nulo. En esta situación $(n_2 v_2 + n_3 v_3) = 0$ y la densidad de energía relacionada al movimiento macroscópico de las partículas se reduce a $T_e Q / 2T_0$. Si se tiene presente que inicialmente la energía debida a la difusión de las partículas era exactamente igual a Q , se tiene que el campo eléctrico representa una importante barrera térmica para este tipo de contribución al flujo total de la energía en la interfase. Pero la densidad de potencia vinculada a los movimientos de difusión disminuirá aún más a medida que se frenan las partículas neutras, resultando un valor final igual a $T_e Q / 2T_0$. Esta última porción de la interfase resulta virtualmente una doble barrera térmica. Por el contrario, y en forma simultánea, aumenta la energía que, por unidad de área y de tiempo, está asociada con el gradiente térmico. El máximo valor que alcanza la densidad de potencia debida a los efectos de conducción térmica es $(T_e (2T_0 / T_e - 1) / 2T_0) Q$.

Puede decirse, en general, que las partículas con sus movimientos debido a la difusión, atravesarán tres regiones caracterizadas por los diferentes comportamientos que experimentan en cada una de ellas. La primera, que es la zona de mayores dimensiones, limita con el borde externo del plasma (cuyo espesor y características brinda también el cálculo numérico). Está caracterizada por el predominio de los procesos de ionización, en el caso de existir separación de cargas, y por el crecimiento de la importancia de la recombinación de tres cuerpos cuando se trata el caso con $E=0$. En el primero de los casos, la temperatura permanece casi

constante en toda la zona y se advierte un lento crecimiento del campo eléctrico. Si no se incluye el efecto de separación de cargas, el ancho de esta región se hace mayor y es pronunciado el descenso de la temperatura. La segunda porción de la interfase, del orden de un par de longitudes de Debye, es lo análogo a la región correspondiente a la vaina de carga espacial de los plasmas de baja densidad. En ella, el descenso de la temperatura es acompañado por el crecimiento del campo eléctrico y de las densidades iónicas, que alcanzan aquí sus máximos valores, y por una caída en la densidad de electrones. También disminuye el flujo de energía asociada a la difusión de las partículas, a la vez que aumentan su importancia los efectos de conducción térmica. Esta segunda zona de la interfase caracteriza a la situación en que se considera la existencia de un campo eléctrico. Por lo tanto, no aparece cuando no se tiene en cuenta en el modelo la separación de cargas. La última zona bien puede identificarse con el borde de la región totalmente neutra. Como se ha visto, ella actúa como barrera térmica para la energía asociada a los flujos de las partículas, que alcanzan allí su mínimo valor, mientras que el calor relacionado con el gradiente de la temperatura pasa a ser el término dominante en el balance de la energía total de la interfase.

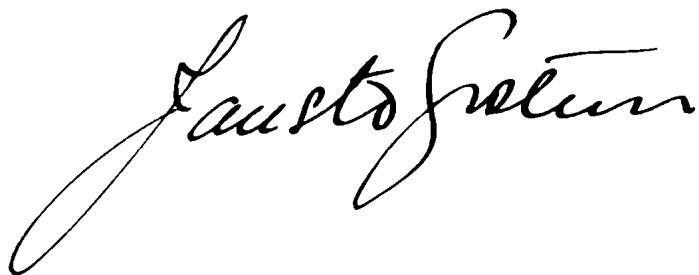
Los resultados obtenidos con el modelo de cinco fluidos son de aplicación inmediata al estudio de la difusión de un campo magnético a través de la interfase plasma-gas neutro. A este respecto, en el capítulo VI se explica detalladamente un modelo que describe la evolución temporal de la señal de un campo magnético que puede medirse

en la región totalmente neutra, identificando un sistema de parámetros físicos que determinan la posible atenuación, o distorsión, del campo magnético que difunde⁵⁰. Debe tenerse presente que el comportamiento particular para cada caso analizado en el capítulo anterior, depende de la condición inicial supuesta, esto es que no existe campo magnético en la interfase. Que ello ocurra o no antes de formarse la zona de transición plasma-gas neutro, no siempre es un hecho fácil de determinar para cada configuración experimental que se considere. Desde el punto de vista práctico, los cálculos muestran que la medición del campo magnético con una sonda sólo puede estar afectada por la atenuación de la señal. Esto es así, debido a que el intervalo temporal asociado con la posible distorsión es muy pequeño y el sistema sonda-osciloscopio no puede revelar dicha distorsión y mide, entonces, solamente la atenuación de la señal.

Es necesario resaltar que la descripción de la zona de transición dada por el modelo de cinco fluidos, brinda un panorama más amplio que el considerado como punto de partida para elaborar la teoría expuesta en el capítulo anterior. En ella no se tienen en cuenta la dependencia espacial de la conductividad eléctrica, ni tampoco la existencia del campo eléctrico producido por separación de cargas. En este sentido, el modelo para la interfase plasma-gas neutro indica que, en futuros trabajos, deberán considerarse estas circunstancias a fin de obtener resultados más ajustados al comportamiento real.

El trabajo presentado en esta tesis, pone de manifiesto la complejidad de los procesos que intervienen en

la interacción plasma-gas neutro. En tal sentido, partiendo de las hipótesis que han permitido formular el modelo de cinco fluidos, podrán incorporarse nuevos efectos que vayan aproximando cada vez más, la descripción teórica a la descripción de las circunstancias que puedan presentarse en distintos experimentos de laboratorio. Como opciones futuras para enriquecer la contribución expuesta en el presente trabajo, se sugiere adaptar el modelo con la inclusión de los términos cuadráticos en las velocidades de las partículas, hecho que permitiría tener en cuenta un posible movimiento relativo entre el plasma y el gas totalmente neutro y los términos disipativos viscosos. Por último, la posibilidad de la presencia de un campo magnético en la interfase, con corrientes transversales y efecto Joule. Con estos elementos adicionales en el programa numérico, se podrían estudiar las estructuras de varias configuraciones de gran importancia en la física de plasmas, tales como las láminas de corriente ionizantes, o las ondas de choque ionizantes.

A handwritten signature in cursive script, appearing to read "Steven". The signature is written in black ink on a white background.A handwritten signature in cursive script, appearing to read "Augusto Suter". The signature is written in black ink on a white background.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer muy especialmente al Dr. Fausto T. Gratton, en su doble función de Director de Tesis y Consejero de Estudios, por sus valiosas enseñanzas, por su ayuda y supervisión.

Agradezco también al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, por haber posibilitado la iniciación de los estudios que culminaron con esta Tesis, mediante el otorgamiento de una Beca de Iniciación desempeñada en el Laboratorio de Física del Plasma, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

Finalmente, quiero agradecer el apoyo y estímulo brindado por todos los miembros de la División Fusión Nuclear de la Comisión Nacional de Energía Atómica, en la etapa de culminación de mi Tesis.

APENDICE A

A.1.- Sección eficaz, tiempo entre colisiones y camino libre medio.

El concepto de sección eficaz para un dado tipo de colisión, σ_{ab} , entre una partícula de prueba a y una partícula campo b, se define mediante la razón

$$\sigma_{ab}(v) \equiv \frac{\text{Número de partículas de prueba que colisionan con la partícula campo, por unidad de tiempo.}}{\text{Densidad de flujo de partículas de prueba}}, \quad (\text{A.1})$$

teniendo σ_{ab} dimensiones de área. Puede interpretarse a la sección eficaz como la sección geométrica efectiva que la partícula campo opone al haz incidente de partículas de prueba. La sección eficaz definida es una cantidad atómica, función de las dos especies de partículas involucradas (en este caso, independiente del orden de los subíndices) y de la velocidad relativa v .

La definición anterior corresponde a la de sección eficaz total, sin distinguir los distintos tipos de colisiones que pueden tener lugar. En realidad, es una suma de las secciones eficaces para colisiones elásticas y las secciones eficaces de los procesos inelásticos relevantes, esto es,

$$\sigma_{ab} = \sigma_{ab}^{(e)} + \sum_{n \cdot e_1} \sigma_{ab}^{(n \cdot e_1)}. \quad (\text{A.2})$$

Cada una de estas secciones eficaces particulares puede definirse en forma análoga a (A.1) pero con un apropiado cambio en el numerador. Por ejemplo, si la partícula campo fuera un átomo en el nivel fundamental, entonces, la sección eficaz para excitación de esa partícula al primer nivel excitado, debido a la interacción con una partícula de prueba, sería

$$\sigma_{a b}^{(1 \rightarrow 2)}(v) \equiv \frac{\text{Número de partículas de prueba que causan una excitación (1} \rightarrow \text{2) de la partícula campo, por unidad de tiempo}}{\text{Densidad de flujo de partículas de prueba}} .$$

En este caso la sección eficaz depende del orden de los subíndices que representan a cada especie y del proceso atómico en particular, como así también de v . Si la partícula de prueba fuera electrón, $\sigma_{a b}^{(1 \rightarrow 2)}(v)$ sería nula a menos que la energía cinética relativa entre el electrón y el átomo excediera la energía umbral E_{12} del nivel excitado. Para valores suficientemente pequeños de v , resulta claro que $\sigma = \sigma^{(e1)}$; a medida que v crece lo suficiente para producir colisiones inelásticas, el segundo término en (A.2) puede llegar a ser del mismo orden de magnitud^{56, 58-61, 66, 119} que $\sigma^{(e1)}$.

La cantidad de información disponible sobre secciones eficaces hasta el presente, si bien es muy grande, resulta una pequeña fracción de todo lo que sería deseable tener. En general, el grado de precisión de los cálculos es incierto, y resulta, usualmente, más conveniente utilizar datos experimentales^{57, 65}, y en caso de no existir tales datos para los procesos requeridos, es frecuente utilizar los

resultados de los cálculos, combinados con aquella información experimental relacionada con el proceso en cuestión, que pueda servir para obtener extrapolaciones útiles.

Debe notarse que las secciones eficaces para colisiones elásticas entre electrones y átomos, o moléculas, se encuentran en un rango comprendido entre 10^{-1} y 10^{-3} , en unidades de πr_0^2 , con r_0 el radio de Bohr. La dependencia irregular de este tipo de colisiones respecto de la energía, está reflejando la naturaleza cuántica esencial de estas interacciones. Por su parte, las colisiones elásticas entre partículas pesadas pueden describirse, en forma frecuente, utilizando la mecánica clásica, y esta situación se manifiesta en una dependencia energética más regular.

Las secciones eficaces correspondientes a los procesos inelásticos de ionización y excitación por impacto electrónico, exhiben un grado de regularidad sorprendente y han sido objeto de considerable tratamiento teórico. Es así que se han propuesto diversas fórmulas para estas secciones eficaces, algunas basadas puramente en la mecánica clásica¹²⁰ o con algunas suposiciones adicionales para la obtención del resultado final^{59, 64}, o en cálculos cuánticos¹²¹. Las fórmulas halladas son objeto de revisión constante y de comparación permanente con los resultados experimentales que se van obteniendo^{61, 65, 122}, lo cual permite acotar el rango de aplicación, o ampliar la validez de las expresiones teóricas.

Por su parte, las secciones eficaces para colisiones inelásticas entre partículas pesadas que involucran una variación ΔE en la energía electrónica interna, pueden

resultar muy pequeñas si se las compara con las secciones de procesos elásticos, aun cuando la energía cinética relativa exceda considerablemente el valor de ΔE . Para que la sección eficaz de este tipo de interacción resulte comparable a la de colisiones elásticas, la colisión deberá cumplir un requerimiento de no adiabaticidad¹¹⁹. En términos clásicos, si la velocidad relativa entre los dos átomos es pequeña, comparada con las velocidades orbitales de los electrones ligados, entonces dichos electrones dispondrán de tiempo suficiente para ajustarse gradualmente al cambiante campo de fuerzas, sin efectuar una transición, y la colisión es prácticamente adiabática. Una consecuencia práctica del requerimiento de no adiabaticidad es que a temperaturas inferiores a algunos eV y para grados de ionización no demasiado bajos, las colisiones entre partículas pesadas tienen, en general, poca trascendencia en los procesos de ionización y excitación electrónicas.

Como queda expresado, en la teoría cinética de los gases las colisiones entre sus partículas son convenientemente descritas mediante el empleo de las secciones eficaces. En el caso de fuerzas de corto alcance, como por ejemplo aquellas que actúan entre moléculas neutras, la sección eficaz para colisiones elásticas estará dada, en forma aproximada, por

$$\sigma = \pi d^2 \quad , \quad (A.3)$$

donde d es el radio efectivo de la molécula. La cantidad

$$\sqrt{\sigma} = f \quad , \quad (A.4)$$

tiene dimensiones de longitud y recibe el nombre de amplitud del proceso de colisión ("scattering"). Cualquier molécula que se mueve a través del gas en un trayecto Δx debe colisionar con todas las moléculas cuyos centros se encuentren dentro de un cilindro de altura Δx y base $\pi d^2 = \sigma$. Si la densidad del gas es n , el número de tales moléculas es $\Delta x n \sigma$. El camino libre medio l es un segmento del recorrido Δx en el cual la molécula experimenta una colisión: $l n \sigma = 1$, de donde

$$l = 1/n\sigma \quad (A.5)$$

El tiempo entre dos colisiones sucesivas será

$$\tau = l/v = 1/n\sigma v \quad , \quad (A.6)$$

siendo v la velocidad (usualmente velocidad térmica) de las partículas en consideración.

A fin de aplicar el concepto de sección eficaz a la descripción de interacciones entre las partículas de un plasma, es necesario suponer que se encuentra suficientemente rarificado de modo que la duración de una colisión es mucho menor que el tiempo entre colisiones sucesivas. Siendo $n_a v \sigma$ el número de partículas que inciden sobre una partícula campo por unidad de tiempo, y si n_b es la densidad de estas partículas, entonces,

$$R_{ab} = n_a n_b v \sigma_{ab}(v) \quad (\text{A.7})$$

es la tasa total de la reacción (o colisión) entre ambas especies, por unidad de volumen. La tasa de colisión para un proceso atómico particular, o para un grupo de procesos, puede definirse utilizando la correspondiente sección eficaz. Por ejemplo, si la densidad de partículas de algún nivel excitado, l , es n_l , entonces la tasa de desexcitación para las partículas del tipo b por las partículas de la especie a , a un nivel k menos excitado, es

$$R_{ab}^{(l \rightarrow k)} = n_a n_b v \sigma_{ab}^{(l \rightarrow k)}(v) \quad ,$$

o, en forma más general para un proceso p ,

$$R_{ab}^{(p)} = n_a n_b v \sigma_{ab}^{(p)}(v) \quad (\text{A.8})$$

Para procesos tales como la desexcitación o recombinación, que requieren energía umbral nula, el modelo simplificado en el que todas las partículas del plasma son consideradas con la misma velocidad relativa, no es realmente malo. La deficiencia del modelo aparece cuando se consideran procesos como excitación o ionización, los cuales requieren una energía umbral distinta de cero. Bajo algunas circunstancias, sólo una fracción relativamente pequeña de las partículas del plasma tendrán energías relativas que exceden el valor umbral, y serán precisamente esas partículas las que tendrán el potencial para poder participar del proceso. En estos casos resultaría inapropiado la descripción de un plasma en

términos de una única velocidad relativa, y resulta imprescindible considerar explícitamente la distribución de velocidades de las partículas.

A diferencia de las secciones eficaces, que pueden caracterizarse como cantidades atómicas, o microscópicas, la tasa de reacción es una cantidad macroscópica. Con esta terminología se quiere significar que esta tasa depende de variables tales como temperatura y presión, que definen el estado termodinámico del plasma.

Debido a que un dado proceso atómico p puede considerarse la causa de la "remoción" de partículas campo, con una tasa por unidad de volumen $R_a^{(p)}$, se podrá escribir para este proceso

$$dn_b/dt = - R_a^{(p)} \quad (A.9)$$

La ecuación (A.9) puede utilizarse para obtener un tiempo característico de relajación para el proceso p ,

$$\tau^{(p)} \sim n_b / R_a^{(p)} \quad , \quad (A.10)$$

(compárese esta relación con (A.6)). Cuando el tiempo de relajación $\tau^{(p)}$ es suficientemente largo, comparado con el tiempo que una partícula permanece en una dada región, se dice que el flujo está "congelado" en esa región. Esto quiere decir que el proceso puede desprejarse en lo que concierne a su influencia sobre el flujo de partículas. En el límite opuesto, cuando $\tau^{(p)}$ es pequeño en relación con el tiempo de flujo característico, se dirá que el flujo se en-

cuentra en "equilibrio".

La tasa con la cual una única partícula de prueba colisiona con todas las partículas campo en un plasma, es la llamada frecuencia total de colisión (con esas partículas campo), y está dada por la expresión

$$\nu_{ab} = R_{ab}/n_a = n_b v \sigma_{ab}(v) \quad (\text{A.11})$$

Las frecuencias de colisiones para procesos particulares se definen en forma similar:

$$\nu_{ab}^{(p)} = n_b v \sigma_{ab}^{(p)}(v) \quad (\text{A.12})$$

Si existen diferentes especies de partículas campo presentes en el plasma, la frecuencia total de colisiones de la partícula de prueba es

$$\nu_a = \sum_b \nu_{ab} \quad , \quad (\text{A.13})$$

lo mismo vale para algún proceso particular p.

El camino libre medio recorrido por una partícula de prueba entre colisiones sucesivas será

$$l_a = v/\nu_a = (\sum_b n_b \sigma_{ab})^{-1} \quad (\text{A.14})$$

La trayectoria de una partícula de prueba tiene una forma de "zig-zag", teniendo cada segmento de la misma una longitud l_a . Resulta, entonces, imposible hablar de caminos libres, para un particular proceso atómico, en la forma simple que

se hiciera para las frecuencias de colisiones. Sin embargo, consideraciones estadísticas basadas en el concepto de camino aleatorio⁷⁰, sugieren que el camino libre medio para un dado proceso p se puede escribir:

$$l_a^{(p)} \approx (v_a/v_a^{(p)})^{1/2} l_a \quad (\text{A.15})$$

El cociente $v_a/v_a^{(p)}$ representa el número total de colisiones experimentadas por una partícula de prueba entre dos colisiones sucesivas del tipo p . El producto de la raíz cuadrada de este número y la longitud de cada segmento l_a , es una combinación característica que aparece en la descripción de muchos fenómenos difusivos.

Las cantidades definidas: sección eficaz, camino libre medio y tiempo libre medio τ (llamado tiempo de relajación en física de plasmas) resultan parámetros convenientes para caracterizar los distintos procesos que ocurren en un gas. Por ejemplo, es suficiente un conocimiento de estas cantidades para estimar el coeficiente de difusión, la viscosidad, y la conductividad térmica, que son realmente las densidades de flujo de partículas, cantidad de movimiento y energía, debidas a las colisiones en el gas. Este hecho puede expresarse mediante las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} j &= -D \, dn/dx & , \\ \Pi_{xy} &= -\eta \, \partial v_y / \partial x & , \\ q &= -\kappa \, \partial T / \partial x \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Por convención, las ecuaciones anteriores son llamadas ecua-

ciones de transporte, y sus coeficientes D , η y κ reciben el nombre de coeficientes de transporte. La teoría cinética elemental muestra que estos coeficientes pueden ser estimados a partir de las relaciones

$$\begin{aligned} D &\cong lv = v/n\sigma & , \\ \eta &\cong mnD = mv/\sigma & , \quad (A.17) \\ \kappa &\cong nD = v/\sigma & , \end{aligned}$$

donde $v=(T/m)^{1/2}$ (con T expresada en unidades de energía, y m la masa de las moléculas del gas) es la velocidad térmica de las moléculas.

En una aproximación más rigurosa se encuentra que el análisis detallado de distintos procesos requiere la introducción de varias secciones eficaces en lugar de una única sección; consecuentemente, es necesario introducir varios caminos y tiempos libres medios, en particular, se necesitan por lo menos tres tiempos de relajación diferentes para cada especie en un plasma⁷⁵: "tiempo de deflexión", τ_d , "tiempo de frenamiento", τ_s , y "tiempo de intercambio de energía", τ_E , que fueron introducidos por L. Spitzer⁵¹.

Considerando la cuestión de las secciones eficaces con un poco más de detalle, la sección diferencial correspondiente al proceso de desviación de la trayectoria de las partículas de prueba, provocando la dispersión de las mismas ("scattering"), al incidir sobre un centro dispersor, partícula campo, se define:

$$d\sigma = (\rho(\theta)/\sin\theta) (d\rho(\theta)/d\Omega) d\Omega = \rho d\rho d\phi \quad , \quad (A.18)$$

donde el parámetro de impacto $\rho(\theta)$ es considerado una función del ángulo de "scattering" θ , en el sistema centro de masa. Geométricamente, la cantidad $d\sigma$ representa un área elemental en el plano perpendicular a la velocidad asociada con el flujo de partículas incidentes. Físicamente, $d\sigma$ es el número de partículas que son dispersadas por unidad de tiempo en un ángulo θ , dentro del elemento de ángulo sólido $d\Omega$, dividido por el flujo incidente. La cantidad

$$\sigma = \int d\sigma = \int (d\sigma/d\Omega) d\Omega \quad , \quad (A.19)$$

es la sección total. Si el potencial de interacción no es rigurosamente nulo para valores del parámetro de impacto mayores que cierto valor crítico (como es el caso, por ejemplo, de esferas duras que no interactúan a menos que estén en contacto), la integral en (A.19) diverge haciendo infinita la sección total de "scattering" (por lo menos en la teoría clásica, mientras que en mecánica cuántica la sección eficaz puede ser finita si el potencial decae suficientemente rápido). Debido a esta divergencia, la sección eficaz total no resulta, obviamente, de utilidad en cualquier fórmula que se utilice para encontrar las propiedades físicas de un plasma. En teoría cinética se encuentra que es más apropiado introducir cantidades de la forma

$$\sigma_k = \int (1 - \cos^k \theta) d\sigma \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (A.20)$$

La primera de ellas,

$$\sigma_1 = \int (1 - \cos\theta) d\sigma \quad , \quad (A.21)$$

recibe el nombre de sección eficaz de transporte o de difusión y, también, sección eficaz de frenamiento, nombres debidos a que el factor $(1 - \cos\theta)$ da la pérdida de la velocidad dirigida de la partícula en un evento de "scattering" elástico:

$$\Delta v = -v (1 - \cos\theta) \quad (A.22)$$

La segunda cantidad,

$$\sigma_2 = \int (1 - \cos^2\theta) d\sigma \quad , \quad (A.23)$$

puede llamarse sección eficaz de deflexión, ya que el factor $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$ caracteriza el incremento cuadrático medio en la velocidad transversal de la partícula. S. Chapman y T. G. Cowling⁷⁶ mostraron que la viscosidad y la conductividad térmica de un gas, son determinadas por la sección eficaz σ_2 : si g es la velocidad relativa entre dos partículas, medida en unidades de $(2T/m_{ab})^{1/2}$, de modo que la distribución maxwelliana de velocidades es

$$f d^3v = (m_{ab}/2\pi T)^{3/2} \exp(-m_{ab}v^2/2T) d^3v = \pi^{-3/2} \exp(-g^2) dg^3 \quad , \quad (A.24)$$

con normalización $\int f d^3v = 1$; entonces, indicando con $\langle \rangle$ los valores promedio sobre esta distribución, se obtienen las siguientes fórmulas para la viscosidad y la conductividad

térmica de un gas simple (esto excluye las mezclas):

$$\begin{aligned}\eta &= (5/2)(mT)^{1/2} / \langle g^5 \sigma_2 \rangle \\ \kappa &= 15 \eta / 4m\end{aligned}\tag{A.25}$$

La sección eficaz de frenamiento, σ_1 , determina la movilidad de las partículas y aparece en el coeficiente de difusión que describe una mezcla inhomogénea de dos gases:

$$D_{ab} = (9T/8m_{ab})^{1/2} / n \langle g^3 \sigma_1 \rangle \tag{A.26}$$

En contraste con las ecuaciones (A.17) que sólo dan órdenes de magnitud, las (A.25) y (A.26) pueden utilizarse para obtener expresiones cuantitativas para los coeficientes de transporte.

A.2.- Variaciones de la cantidad de movimiento y de la energía.

Si se desea encontrar la tasa de variación de la cantidad de movimiento y de la energía de una partícula de prueba que incide sobre un medio de partículas campo, caracterizadas por una función de distribución $f_b(v_b)$; se tiene que el cambio en la velocidad de la partícula a, debido a una colisión con una partícula de la especie b, está relacionado con el cambio de la velocidad relativa

$$\Delta v_a = (m_{ab}/m_a) \Delta v \tag{A.27}$$

Así, los incrementos en la cantidad de movimiento y la energía son

$$\Delta p_a = m_a \Delta v_a = m_{ab} \Delta v$$

$$\begin{aligned} E_a &= (m_a/2) ((v_a + \Delta v_a)^2 - v_a^2) = m_a (v_a \cdot \Delta v_a + (\Delta v_a)^2/2) \\ &= m_{ab} (v_a \cdot \Delta v + (m_{ab}/2m_a)(\Delta v)^2) \end{aligned} \quad (A.28)$$

Como el "scattering" es elástico, el módulo v no cambia. Entonces,

$$(v + \Delta v)^2 - v^2 = 2v \Delta v + (\Delta v)^2 = 0 \quad , \quad (A.29)$$

y el cambio en la energía resulta

$$E_a = m_{ab} (v_a - (m_{ab}/m_a)v) \cdot \Delta v \quad (A.30)$$

La integración sobre todos los valores del parámetro de impacto $\rho d\rho d\phi = d\sigma$ conduce a las expresiones siguientes

$$\int \Delta p_a d\sigma = m_{ab} \int \Delta v d\sigma \quad ; \quad (A.31)$$

$$\int \Delta E_a d\sigma = m_{ab} (v_a - (m_{ab}/m_a)v) \cdot \int \Delta v d\sigma$$

Escribiendo las componentes del cambio de la velocidad relativa en la forma⁷⁵:

$$\begin{aligned}
\Delta v_z &= -v (1 - \cos\theta) & , \\
\Delta v_x &= v \sin\theta \cos\phi & , \quad (A.32) \\
\Delta v_y &= v \sin\theta \sin\phi & ,
\end{aligned}$$

la última integral resulta

$$\int \Delta v \, d\sigma = -v \sigma_1 \quad (A.33)$$

De esta manera (A.31) puede expresarse

$$\int \Delta p_a \, d\sigma = -m_a b v \sigma_1 \quad ; \quad (A.34)$$

$$\int \Delta E_a \, d\sigma = -m_a b (v_a \cdot v - (m_a b / m_a) v^2) \sigma_1$$

La tasa media de variación de cantidad de movimiento y de energía de la partícula de prueba, puede obtenerse multiplicando (A.34) por $f_b v_b d^3v_b$ e integrando sobre todas las partículas campo:

$$dp_a/dt = \int d^3v_b f_b v \int \Delta p_a \, d\sigma = -m_a b \int d^3v_b f_b \sigma_1 |v| v \quad ; \quad (A.35)$$

$$\begin{aligned}
dE_a/dt &= \int d^3v_b f_b v \int \Delta E_a \, d\sigma = -m_a b v_a \int d^3v_b f_b \sigma_1 |v| v + \\
&\quad ((m_a b)^2 / m_a) \int d^3v_b f_b \sigma_1 |v|^3 .
\end{aligned}$$

Estas fórmulas se aplican para cualquier ley de interacción entre las partículas, pero resultan particularmente simples para el caso de las llamadas moléculas de Maxwell, que se repelen con una fuerza inversamente proporcional a la quinta potencia de la distancia, ya que se reem-

plaza $\sigma_1 = \text{const.}/v$:

$$\int d^3v_b f_b \sigma_1 |v| v = \text{const.} v_a n_b \quad ; \quad (A.36)$$

$$\int d^3v_b f_b \sigma_1 |v|^3 = \text{const.} (v_a^2 + \langle v_b^2 \rangle) n_b$$

(Se supone por simplicidad que el gas de partículas campo, como un todo, se encuentra en reposo, con lo que $\int d^3v_b f_b v_b = 0$). Es evidente, de las expresiones anteriores, que en este caso la transferencia (pérdida) de cantidad de movimiento y energía de la partícula a queda determinada por la densidad n_b y la energía media (temperatura) de las partículas b.

La presencia de partículas cargadas en un plasma hace imprescindible considerar el caso de la interacción coulombiana entre partículas. En este caso la sección eficaz diferencial viene dada por la conocida relación de Rutherford

$$d\sigma/d\Omega = (\rho(\theta)/\sin\theta) dp(\theta)/d\theta = \rho_{\perp}^2 / 4\sin^4(\theta/2) \quad , \quad (A.37)$$

donde $\rho_{\perp} = e_a e_b / m_a b v^2$, siendo válida la relación

$$\rho(\theta) = \rho_{\perp} \cot(\theta/2) \quad (A.38)$$

Es evidente que todas las secciones eficaces "parciales", σ_k , divergen logarítmicamente para pequeños ángulos de "scattering", es decir, para parámetros de impacto grandes:

$$\sigma_k = \int (1 - \cos^k \theta) (d\sigma/d\Omega) d\Omega \cong \pi (2\rho_{\perp})^2 k \int_{\theta_{\min}}^{\pi} d\theta/\theta. \quad (\text{A.39})$$

En un plasma puede tomarse a la longitud de Debye l_D como el máximo parámetro de impacto para el cual las partículas dejan de interactuar en forma efectiva, de modo tal que puede ignorarse la interacción. Entonces,

$$\begin{aligned} \theta_{\min} &= 2\rho_{\perp}/l_D, \\ \int_{\theta_{\min}}^{\pi} d\theta/\theta &= \ln(\pi/\theta_{\min}) \cong \ln(l_D/\rho_{\perp}) = \lambda, \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

obteniéndose el logaritmo coulombiano. Con la notación

$$\sigma_{\text{coul.}}(v) = \pi\lambda(2\rho_{\perp})^2 = \pi\lambda(2e_a e_b / m_a b v^2)^2, \quad (\text{A.41})$$

la (A.39) toma la forma

$$\sigma_k |_{\text{plasma}} = k\sigma_{\text{coul.}}(v), \quad (\text{A.42})$$

En particular, $\sigma_2 = 2\sigma_1$.

Reemplazando por

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{coul.}}(v) = \lambda 4\pi e_a^2 e_b^2 / (m_a b v^2)^2, \quad (\text{A.43})$$

en (A.35), se encuentra que la variación media en la cantidad de movimiento y la energía, por unidad de tiempo, de una partícula de prueba a que se mueve en un medio de partículas b , con las cuales interactúa mediante la fuerza de Coulomb (recordando que $v = v_a - v_b$) es:

$$dp_a/dt = -(\lambda 4\pi e_a^2 e_b^2 / m_{ab}) \int (v/v^3) f_b d^3v_b, \quad (A.44)$$

$$dE_a/dt = -(\lambda 4\pi e_a^2 e_b^2 / m_{ab}) (v_a \int (v/v^3) f_b d^3v_b - (m_{ab}/m_a) \int (f_b/v) d^3v_b).$$

Utilizando distintas estimaciones cualitativas de la energía del movimiento relativo, $m_{ab}v^2/2$, en la expresión para $\sigma_{coul}(v)$ puede introducirse la temperatura. De esta manera, la sección eficaz para colisiones coulombianas podrá escribirse, en forma aproximada,

$$\sigma_{coul} = \pi (e^2/T)^2 \lambda \cong \lambda e^4/T^2 \quad (A.45)$$

En este caso el camino libre medio l y el tiempo entre colisiones (tiempo medio de relajación) son del siguiente orden de magnitud:

$$l = 1/n_b \sigma_{coul} = T^2 / \lambda n_b e^4 \quad (A.46)$$

$$\tau = l/v = \sqrt{m} T^{3/2} / \lambda n_b e^4$$

De las relaciones anteriores se desprende que los caminos libres medios de iones y electrones serán iguales para la misma temperatura, mientras que

$$\tau_{ee} / \tau_{ii} \cong (m_e / m_i)^{1/2} \quad (A.47)$$

Como las cantidades σ_1 y σ_2 adquieren valores muy aproximados entre sí, la longitud de retardo $l = 1/n_b \sigma_1$ es aproximada-

mente igual a la longitud de deflexión $l=1/n_b\sigma_2$.

Deberá tenerse presente que una estimación apropiada de un dado proceso requiere la introducción de su propia sección eficaz efectiva. Para el caso particular de intercambio de energía entre iones y electrones, se acostumbra considerar, por simplicidad, que el electrón, $m_e=m$, colisiona con un ion en reposo, $m_i=M \gg m$. Entonces, $v = v_a$ y

$$m_{ei} = m_e m_i / (m_e + m_i) \cong m(1 - m/M) \quad (A.48)$$

De (A.34) se tiene

$$\int \Delta E_e d\sigma = -m_{ei} (1 - m_{ei}/m_e) v^2 \sigma_1 \cong -E_e (2m\sigma_1/M) . \quad (A.49)$$

En forma análoga, para el caso en que un ion choque a un electrón en reposo:

$$\int \Delta E_i d\sigma = -mv^2 \sigma_1 = -E_i (2m\sigma_1/M) . \quad (A.50)$$

Si se define una sección eficaz de transferencia de energía, $\sigma_{E^{ab}}$, usando la relación

$$\int \Delta E_a d\sigma = -E_a \sigma_{E^{ab}} , \quad (A.51)$$

entonces, en órdenes de magnitud,

$$\sigma_{E^{ei}} = \sigma_{E^{ie}} = 2m\sigma_1/M \cong (m/M)\lambda e^4/T^2 \quad (A.52)$$

Puede verse, en consecuencia, que la fracción relativa de e-

nergia transferida en una colisión entre dos partículas depende del cociente de masas de las mismas: la máxima transferencia ocurre para masas iguales, mientras que resulta proporcional a $m/M \ll 1$ cuando son muy diferentes. Por esta razón la sección eficaz de transferencia de energía es $2m/M$ veces menor que la sección eficaz de frenamiento. Calculando los tiempos de relajación se obtiene:

$$\tau^{ee} : \tau^{ii} : \tau^{ei} \approx 1 : \sqrt{M/m} : M/m \quad (\text{A.53})$$

En general, para el cálculo de coeficientes de transporte es frecuente el empleo de estos tiempos, que caracterizan directamente la duración de cada proceso en el plasma, en lugar de las secciones eficaces correspondientes.

APENDICE B

Procesos atómicos en plasmas de hidrógeno.

Dado que la gran mayoría de los experimentos en física de plasmas emplean como gas de llenado hidrógeno, o sus isótopos, se dará a continuación una reseña de los principales procesos que pueden tener lugar entre electrones, iones y neutros (átomos o moléculas) de esos gases.

En el caso particular de las colisiones elásticas entre iones, átomos y moléculas de hidrógeno, de uso frecuente en los estudios sobre plasmas parcialmente ionizados, las secciones eficaces tienen una dependencia suave con la temperatura. Para las colisiones átomo-molécula se pueden tomar los valores teóricos dados por J.T.Vanderslice et al.¹²³ para la integral de colisiones,

$$\sigma_{(00)0} = (2.168 - 0.59 \ln(T))^2 \times 10^{-16} \text{ cm}^2, \text{ (B.1)}$$

con T en eV. Confirmación experimental de esta dependencia ha sido dada por K.Behringer¹²⁴.

En el caso de colisiones átomo-átomo puede utilizarse la fórmula

$$\sigma_{00} = (7.676 - 4.41 \ln(T)) \times 10^{-16} \text{ cm}^2, \text{ (B.2)}$$

(T en eV), obtenida a partir de los resultados teóricos de R.S.Devoto¹²⁵, J.T.Vanderslice, et al.¹²³ y N.T.Grier¹²⁶. La sección eficaz para colisiones electrón-átomo de hidrógeno

es poco conocida para energías menores que 1 eV. Mediciones realizadas por R.H.Neynaber, et al.¹²⁷, de la sección eficaz como función de la energía electrónica, cubren el rango entre 1 - 14 eV. Una buena aproximación a los resultados de A. Temkin¹²⁸, K.Smith, et al.¹²⁹ y R.H.Neynaber, et al.¹²⁷, está dada por la expresión

$$\sigma = (51/(E(\text{eV}) + 1.2) + c) \times 10^{-16} \quad \text{cm}^2 \quad , \quad (\text{B.3})$$

donde c es una constante del orden de la unidad. Tomando³¹ $c = 2$, se obtiene un valor aproximado para la sección eficaz dado por

$$\sigma_{e0} = \exp(2.715 - 0.554 \ln(T)) \times 10^{-16} \quad \text{cm}^2 \quad , \quad (\text{B.4})$$

sección eficaz que concuerda con la dada por R.S.Devoto¹²⁵ y N.T.Grier¹²⁶ para temperaturas entre 0.43 y 3.45 eV. A su vez, la sección eficaz para colisiones ion-átomo está dada, en parte, por intercambio de carga y por colisiones elásticas. Los valores teóricos de la sección eficaz para intercambio de carga dados por A.Dalgarno y H.N.Yadav¹³⁰, en un rango entre $10 - 10^4$ eV, concuerdan razonablemente con los valores experimentales de W.L.Fite¹³¹. Para temperaturas entre 0.17 - 8.617 keV, la sección eficaz promedio estará dada por

$$\sigma_{10} = (78.3 - 9.45 \ln(T)) \times 10^{-16} \quad \text{cm}^2 \quad (\text{B.5})$$

Existen diversas colecciones de datos experi-

mentales sobre secciones eficaces^{65, 132-139}, y muchos intentos han sido hechos para describir teórica o experimentalmente^{64, 140-146} las variaciones de las secciones eficaces con la energía, para un dado proceso colisional. M. Gryzinski^{64, 140-142} ha elaborado formas teóricas para las secciones eficaces de ionización electrónica y de intercambio de carga. En muchos casos no existe buena concordancia entre las expresiones teóricas y los datos experimentales¹⁴⁷. W. Lotz^{145, 146} da fórmulas teóricas para las secciones eficaces de ionización electrónica, las cuales utiliza para obtener las tasas de los procesos correspondientes; concordando las secciones con los datos experimentales y las tasas con las del trabajo de E.M. Jones¹⁴⁸. En este último trabajo se usaron los datos experimentales representándolos, en cada caso, por un polinomio de la forma

$$\ln(\sigma) = \sum_{i=0}^n A_i \ln(E)^i \quad (\text{B.6})$$

Estos polinomios son utilizados para evaluar las tasa de los distintos procesos, en el trabajo citado se dan los valores de los coeficientes A_i para los distintos procesos, indicándose el rango de energías para el empleo de los mismos. En general, puede decirse que en un plasma de hidrógeno tendrán lugar, entre otros, los siguientes procesos:

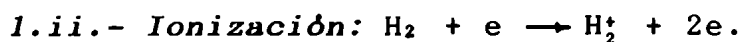
1. Hidrógeno molecular y electrones.

1.i.- Excitación disociativa: $\text{H}_2 + e \rightarrow 2\text{H} + e$.

La sección eficaz se obtiene de la sección de disociación por impacto electrónico de S.J.B.Corrigan¹⁴⁹, restándole la sección eficaz de ionización molecular. La expresión que resulta es,

$$\sigma = 9.7 \times 10^{-17} \frac{\exp(-3.4 (1 - 16.5/E)^2)}{(1 + 1.0 \times 10^{-5} (E/10)^6)} \quad , \quad (\text{B.7})$$

donde la energía se expresa en eV y σ tiene por unidades cm^2 . Esta fórmula es válida en el rango de 3 - 90 eV.



La sección eficaz y la tasa de esta reacción se calcularon en la forma polinómica (B.6) en las referencias^{147, 148}.

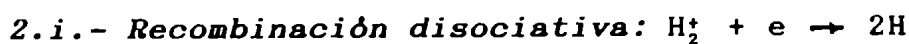


Se piensa que esta reacción tiene lugar de la siguiente forma:



produciéndose neutrones rápidos^{148, 150}.

2. Reacciones entre H_2^+ y electrones.



Esta sección eficaz ha sido medida experimentalmente¹⁵¹, sugiriéndose una dependencia con la energía dada por la expresión

$$\sigma = 7.6 \times 10^{-16} E^{-1.14} \text{ cm}^2, \quad (\text{B.8})$$

válida para el rango 0.1 - 2.0 eV.

2.ii.- Excitación disociativa: $\text{H}_2^+ + e \rightarrow \text{H}^+ + \text{H} + e$.

Las aproximaciones teóricas dadas por B.Peart y K.T.Dolder¹⁵² concuerdan razonablemente con los datos experimentales para energías por debajo de 30 eV.

2.iii.- Ionización disociativa: $\text{H}_2^+ + e \rightarrow 2\text{H}^+ + 2e$.

Los datos experimentales son ajustados con la aproximación polinómica (B.6) en la referencia ¹⁴⁸.

2.iv.- Producción total de protones:
$$\begin{cases} \text{H}_2^+ + e \rightarrow \text{H}^+ + \text{H} + e \\ \text{H}_2^+ + e \rightarrow 2\text{H}^+ + 2e \end{cases}$$

Debido a las dificultades para distinguir entre los protones producidos por ionización disociativa y excitación disociativa, era costumbre medir la sección eficaz para producción total de protones:

$$\sigma = \frac{5.0 \times 10^{-15} E^{-0.7138}}{(1 + 1.5 \times 10^{19}/E^{15})} \text{ cm}^2, \quad (\text{B.9})$$

expresión con un rango de validez desde 1 a 3×10^4 eV.

Llamando σ_p , σ_i y σ_e a las secciones eficaces para la producción total de protones, la ionización disociativa y excitación disociativa, respectivamente, entonces se tiene que diferentes mediciones han dado como resultado que^{153, 154}

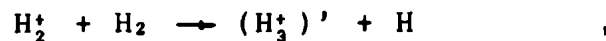
$$\sigma_p = \sigma_e + 2\sigma_i \quad ,$$

o bien^{155, 156} $\sigma_p = \sigma_e + \sigma_i$

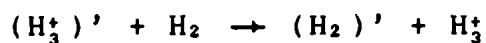
3. Procesos que involucran a H_3^+ .

3.i.- Formación de H_3^+

Es comunmente aceptado que iones H_3^+ se forman mediante la reacción



desexcitándose $(H_3^+)'$ según el proceso



Esta reacción tiene por sección eficaz, para energías entre 0.01 - 10 eV, la dada por la fórmula siguiente¹⁴⁸:

$$\sigma = \frac{1.4 \times 10^{-15} E^{-0.473}}{(1 - 0.21E + 0.21E^{2.4})} \quad \text{cm}^2 \quad . \quad (\text{B.10})$$

3.ii.- *Recombinación disociativa:* $H_3^+ + e \rightarrow 3H$.

La sección eficaz $\sigma = 1.07 \times 10^{-15} E^{-0.67} \text{ cm}^2$ (B.11)

caracteriza este proceso¹⁴⁸.

4. *Intercambio de carga.*

Los procesos más comunes de intercambio de carga con protones se representan mediante la expresión¹⁵⁷

$$\sigma = \frac{0.6937 \times 10^{-14} (1 - 0.155 \log_{10} E)^2}{(1 + 0.1112 \times 10^{-14} E^{3.3})} \text{ cm}^2, \text{ (B.12)}$$

aplicable para energías de $1 - 10^5$ eV.

El lector interesado en ampliar la información brindada, en esta u otras secciones, podrá consultar las referencias que se han ido mencionando en el transcurso de la tesis, cuya lista se brinda a continuación

REFERENCIAS

- ¹F.Waelbroeck et al., KFA Jülich GmbH, Institut für Plasmaphysik, Assoc. Euratom-KFA (1980).
- ²F.Engelmann, NATO Advanced Studies Institute on PHYSICS OF PLASMA-WALL INTERACTIONS IN CONTROLLED FUSION, Val-Morin, Québec, Can., July 30 - Aug. 10, 1984, IK 84/030. FOM-Instituut voor Plasmafysica, Rijnhuizen, Nieuwegein, The Netherlands, P.P. 84/006.
- ³Int. Symp. on "Plasma-Wall Interactions", Jülich 1976, Pergamon Press (1977).
- ⁴F.Engelmann, W.J.Goedheer and A.Nocentini, Comments on Plasma Physics and Controlled Fusion, III(2), 63 (1977)
- ⁵F.Engelmann and W.J.Goedheer, IAEA 2nd. Technical Committee Meeting on Atomic and Molecular Data for Fusion, Paris, 19 - 22 May 1980, IR 80/022. FOM-Instituut voor Plasmafysica, Rijnhuizen, Nieuwegein, The Netherlands, P.P. 80/05.
- ⁶Int. School on "Physics of Plasmas Close to Thermonuclear Conditions", Villa Monastero, Varenna, Italy, 27 Aug.- 8 Sep. 1979. EUR FU BRU/XII/476/80, Vol.I.
- ⁷G.M.McCracken and P.E.Stott, Nucl. Fusion, Rev. Paper,

19, 889 (1979).

⁸I.Langmuir and L.Tonks, Phys. Rev., 34, 876 (1929).

⁹G.D.Hobbs and J.A.Wesson, Plasma Phys., 9, 85 (1967).

¹⁰A.E.Robson, P.C.Thoneman, Proc. Phys. Soc., 73, 508
(1959).

¹¹N.Fuentes and F.T.Gratton, IEEE Transactions on Plasma
Science, PS-14(5), 575 (1986).

¹²E.Hinnov, J. Nucl. Mat., 53, 9 (1974).

¹³H.Vernickel et al., in "Plasma Wall Interactions", Proc.
Int. Symp. Jülich 1976, 209. Pergamon Press (1978).

¹⁴S.J.Fielding, G.M.McCracken, P.E.Stott, J. Nucl. Mat.,
76/77, 273 (1978).

¹⁵W.Köppendörfer, J. Nucl. Mat., 76/77, 418 (1978).

¹⁶G.M.McCracken in "Fusion Reactor Design Problems", Nucl.
Fusion Special Suppl. 1974, 471, IAEA, Vienna (1974).

¹⁷R.Behrisch, B.B.Kadomtsev, in "Plasma Physics and Contr.
Nucl. Fusion Research", Proc. 5th Int. Conf. Tokyo, 1974.
Vol.2, 229, IAEA, Vienna (1975).

- ¹⁶R.Behrisch in "Tokamak Reactors for Breakeven", Proc. Conference Erice 1976, 37. Ed. by H.Knoepfel, EURATOM, Pergamon Press (1977).
- ¹⁹S.A.Cohen, J. Vac. Sci. Tech., 13, 449 (1976).
- ²⁰B.M.U.Scherzer, J. Vac. Sci. Tech., 13, 420 (1976).
- ²¹R.Behrisch, J. Nucl. Mat., 85 (1979).
- ²²Proc. Int. Conf. on Plasma Surface Interactions, in J. Nucl. Mat. 53 (1974), 63 (1976), and 76/77 (1978).
- ²³Workshop on Cold Blanket Research, Jutphaas, May 1977, EURATOM-FOM Instituut voor Plasmafysika, Rijnhuizen, Report 77-103 (1977).
- ²⁴P.E.Stott, Workshop on Magnetic Divertors for Experimental Tokamaks and Fusion Reactors, Culham, CLM-R 196, April 1978.
- ²⁵A.D.Sakharov, "Plasma Physics and The Problem of Controlled Thermonuclear Reactions", Vol. I, 21, (M.A.Leontovich ed.), Pergamon Press (1961).
- ²⁶H.Alfvén and E.Smars, Nature, 188, 801 (1960).
- ²⁷H.Alfvén, et al., Nucl. Fusion, Suppl. Part I, 33 (1962).

- ²⁸C.M.Braams, Phys. Rev. Lett., 17, 470 (1966).
- ²⁹B.Lehnert, Nucl. Fusion, 8, 173 (1968).
- ³⁰B.Lehnert, Arkiv f. Fysik, 38, 499 (1968).
- ³¹G.K.Verboom, Plasma Phys., 11, 903 (1969).
- ³²J.Rem, Nucl. Fusion, 10, 95 (1970).
- ³³G.K.Verboom and J.Rem, Nucl. Fusion, 13, 69 (1973).
- ³⁴B.Lehnert, Nucl. Fusion, 13, 958 (1973).
- ³⁵B.Lehnert, in Proc. of the Third Int. Symp. on Toroidal Plasma Confinement, Garching, 1973, papers C1-I and C-7.
- ³⁶B.Lehnert, Plasma Phys., 16, 341 (1974).
- ³⁷B.Brandt and C.M.Braams, Nucl. Fusion, Spec. Suppl., 385 (1974).
- ³⁸B.Lehnert, "Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research", Vol. II, 717. IAEA, Vienna (1975).
- ³⁹B.Lehnert, Physica Scripta, 12, 327 (1975); Nucl. Instr. Methods, 129, 31 (1975).
- ⁴⁰J.A.Markvoort and J.Rem, in Proc. of the Seventh European

Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics,
Lausanne, Vols. I and II, paper 131 (1975).

⁴¹F.Engelmann, A.Nocentini, H.Schrijver, "Plasma Physics
and Controlled Nuclear Fusion Research", paper CN-35/B7,
Vol. II, 19. IAEA, Vienna (1977).

⁴²T.F.Volkov, Yu L.Igitkhanov, M.Z.Tokar', "Plasma Physics
and Controlled Nuclear Fusion Research", Vol. III, 359,
paper CN-35/I9-3. IAEA, Vienna (1977).

⁴³T.A.Oliphant, Nucl. Fusion, 13, 521 (1973).

⁴⁴R.A.Gross, Nucl. Fusion, 15, 729 (1975).

⁴⁵W.J.Goedheer, in Proc. of the International Symposium on
Plasma-Wall Interaction, Jülich, 1976.

⁴⁶IAEA Madison Conf. on Plasma Physics and Controlled
Nuclear Fusion Research, 3, Papers j8-j12, 241-302. IAEA,
Vienna (1971).

⁴⁷R.A.Gross, Nucl. Fusion, 13, 293 (1973).

⁴⁸B.Lehnert, Nucl. Fusion, 13, 781 (1973).

⁴⁹M.S.Chu, Phys. Fluids, 16, 1441 (1973).

⁵⁰F.T.Gratton and N.Fuentes, IEEE Transactions on Plasma

Science, PS-14(3), 240 (1986).

⁵¹L.Spitzer, Jr., "Physics of Fully Ionized Gases", Interscience, New York (1962).

⁵²S.I.Braginskii, "Rev. of Plasma Physics", Consultants Bureau, New York, Vol. 1, 205 (1965).

⁵³J.B.Hasted, "Plasma of Atomic Collisions", Butterworths (1964).

⁵⁴C.E.Moore, "Atomic Energy Levels", Nat'l. Bur. Standards Circ. 467, Vols. I, II, III (1949, 1952, 1958).

⁵⁵E.W.McDaniel, "Collision Phenomena in Ionized Gases", Wiley (1964).

⁵⁶R.T.Brackmann, W.L.Fite, and R.H.Neynaber, Phys. Rev., 112(4), 1157 (1958).

⁵⁷L.J.Kieffer, Atomic Data, 2(4), 293 (1971).

⁵⁸E.Bauer, and C.D.Bartky, Jour. Chem. Phys., 43(7), 2466 (1965).

⁵⁹H.W.Drawin, "Atomic Cross-Sections for Inelastic Electronic Collisions", Report EUR-CEA-FC 236 (1963).

⁶⁰W.L.Fite, and R.T.Brackmann, Phys. Rev., 112(4), 1141

(1958).

⁶¹V.I.Ochkur, and A.M.'Petrun'kin, Sov. Phys.-Optics and Spectroscopy, 14(4), 245 (1963).

⁶²L.P.Presnyakov, A.D.Ulantsev and L.A.Shelepin, Sov. Phys.-Optics and Spectroscopy, 24(5), 363 (1968).

⁶³M.R.H.Rudge, Rev. Mod. Phys., 40(3), 564 (1968).

⁶⁴M.Gryzinski, Phys. Rev., 138(2a), A336 (1965).

⁶⁵L.J.Kieffer and G.H.Dunn, Rev. Mod. Phys., 38(1), 1 (1966).

⁶⁶H.S.W.Massey and E.H.S.Burhop, "Electronic and Ionic Impact Phenomena", Oxford (1952).

⁶⁷H.S.W.Massey, "Electronic and Ionic Impact Phenomena. II: Electron Collisions with Molecules and Photoionization", 2nd. ed., Oxford (1969).

⁶⁸J.B.Hasted, Proc. Roy. Soc. (London), A-205(1082), 421 (1951).

⁶⁹E.Hinnov and J.G.Hirschberg, Phys. Rev., 125(3), 795 (1962).

⁷⁰M.Mitchner and C.H.Kruger, Jr., "Partially Ionized

- Gases", Wiley-Interscience (1973).
- ⁷¹H.R.Griem, "Plasma Spectroscopy", McGraw-Hill (1964).
- ⁷²L.C.Green, P.R.Rush and C.D.Chandler, *Astrophys. Jour. Suppl.*, 3(26), 37 (1957).
- ⁷³L.H.Aller, "Astrophysics, the Atmospheres of the Sun and Stars", Ronald Press (1963).
- ⁷⁴R.W.Ditchburn, "Light", Vol. 2, Interscience (1963).
- ⁷⁵B.A.Trubnikov, "Rev. of Plasma Physics", Consultants Bureau, New York, Vol. 1, 105 (1965).
- ⁷⁶S.Chapman and T.G.Cowling, "Mathematical Theory of Nonuniform Gases", Cambridge University Press (1959).
- ⁷⁷W.G.Vincenti and C.H.Kruger, "Introduction to Physical Gas Dynamics", Wiley (1965).
- ⁷⁸J.O.Hirschfelder, C.F.Curtiss, and R.B.Bird, "Molecular Theory of Gases and Liquids", Wiley (1964).
- ⁷⁹S.C.Lin, E.L.Resler, and A.Kantrowitz, *Jour. Appl. Phys.*, 26, 95 (1955).
- ⁸⁰V.V.Vikhrev and S.I.Braginskii, "Rev. of Plasma Physics", Consultants Bureau, New York, Vol. 10 (1986).

- ⁸¹L.Spitzer and R.Härm, Phys. Rev., 89, 977 (1953).
- ⁸²L.S.Frost, Jour. Appl. Phys., 32, 2029 (1961).
- ⁸³C.H.Kruger, M.Mitchner and U.Daybelge, AIAA Jour., 6, 1712 (1968).
- ⁸⁴I.P.Shkarofsky, T.W.Johnston, and M.P.Brachynski, "The Particle Kinetics of Plasmas", Addison Wesley (1966).
- ⁸⁵S.Schweitzer and M.Mitchner, Phys. Fluids, 10, 799 (1967).
- ⁸⁶V.P.Zhdanov, "Dielectronic Recombination", Rev. of Plasma Phys., Consultants Bureau, New York, Vol. 12, 103 (1986).
- ⁸⁷H.S.W.Massey and D.R.Bates, Rep. Prog. Phys., 9, 62 (1942).
- ⁸⁸A.Burgess, Astrophys. Jour., 139, 776 (1964).
- ⁸⁹R.W.P.McWhirter, "Spectral Intensities", in "Plasma Diagnostic Techniques", R.H.Huddlestone and S.L.Leonard, Eds., Academic Press, New York (1965).
- ⁹⁰Ya.B.Zel'dovich and Yu.P.Raizer, "Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamics Phenomena", Academic Press, New York, Vol. I, 407 (1966).

- ⁹¹D.R.Bates, A.E.Kingstone and R.W.P.McWhirter, Proc. Roy. Soc. (London), A-267(1328), 297 (1962). También, Proc. Roy. Soc. (London), A-270(1341), 155 (1962).
- ⁹²J.R.Viegas and C.H.Kruger, Phys. Fluids, 12, 2050 (1969).
- ⁹³N.A.Krall and A.W.Trivelpiece, "Principles of Plasma Physics", McGraw-Hill Kogakusha, LTD. (1973).
- ⁹⁴T.G.Cowling, "Magnetohydrodynamics", Interscience, New York (1957).
- ⁹⁵A.Schlüter, Z. Naturforsch., 6a, 73 (1951).
- ⁹⁶B.Lehnert, Nuovo Cimento, Suppl. No. 1, 13 (1959).
- ⁹⁷S.Rehker and H.Wobig, Plasma Phys., 15, 1083 (1973).
- ⁹⁸J.Hackmann, Y.C.Kim, E.K.Souw and J.Ulenbusch, Plasma Phys., 20, 309 (1978).
- ⁹⁹M.B.Tendler and O. Ågren, Phys. Fluids, 25(6), 1037 (1982).
- ¹⁰⁰M.B.Tendler and R.S.Chhabra, Phys. Fluids, 25(11), 2101 (1982).
- ¹⁰¹M.B.Tendler, Royal Institute of Technology, Stockholm,

Report TRITA PFU 82-07 (1982).

¹⁰²R.S.Chhabra, J. Plasma Phys., 31(1), 105 (1984).

¹⁰³B.Lehnert, Ark. Fys., 18, 251 (1960).

¹⁰⁴B.Lehnert, Ark. Fys., 38, 499 (1968).

¹⁰⁵B.Lehnert, Nucl. Fusion, 8, 173 (1968).

¹⁰⁶B.Lehnert, Astrophys. Space Sci., 40, 225 (1976).

¹⁰⁷B.Bonnevier, Astrophys. Space Sci., 40, 231 (1976).

¹⁰⁸A.Nocentini and R.Engelmann, Astrophys. Space Sci., 76,
371 (1981).

¹⁰⁹W.E.Milne, "Numerical Solution of Differential
Equations", Dover, 2nd. Ed. (1970).

¹¹⁰F.B.Hildebrand, "Introduction to Numerical Analysis",
Dover, 2nd. Ed. (1987).

¹¹¹IMSL ROUTINE DVERK, IMSL INC. (1982).

¹¹²R.H.Lovberg, "Magnetic Probes", in "Plasma Diagnostic
Techniques" (Pure and Applied Physics Series, Vol. 21),
R.H.Huddleston and S.L.Leonard Eds., New York, Academic
(1965).

- ¹¹³W.Böttcher, "Measurements of Magnetic Fields in Plasmas" in "Plasma Diagnostics", W.Lochte-Holtgreven Ed., Amsterdam (1968).
- ¹¹⁴R.Courant and D.Hilbert, "Methods of Mathematical Physics", Vol. II, New York (1962).
- ¹¹⁵L.D.Landau and E.M.Lifshitz, "Electrodynamics of Continuous Media", New York (1960).
- ¹¹⁶G.R.Fowles, "Introduction to Modern Optics", New York (1968).
- ¹¹⁷C.Kittel, "Introduction to Solid State Physics", New York (1968).
- ¹¹⁸I.N.Sneddon, "The Use of Integral Transforms", New York (1972).
- ¹¹⁹H.S.W.Massey and E.H.S.Burhop, "Electronic and Ionic Impact Phenomena. I: Collision of Electrons with Atoms", 2nd. Ed., Oxford (1969).
- ¹²⁰J.J.Thomson, "Ionization by Moving Electric Particles", Phil. Mag., 23(136), 449 (1912).
- ¹²¹M.J.Seaton, "The Theory of Excitation and Ionization by Electron Impact", in "Atomic and Molecular Processes",

Ed. by D.R.Bates, Academic (1962).

¹²²B.L.Moiseiwitsch and S.J.Smith, Rev. Mod. Phys., 40(2),
238 (1968).

¹²³J.T.Vanderslice, et al., Phys. Fluids, 5, 155 (1962).

¹²⁴K.Behringer, Z. Phys., 215, 127 (1968).

¹²⁵R.S.Devoto, J. Plasma Phys., 2, 617 (1968).

¹²⁶N.T.Grier, Lewis Research Center Cleveland, NASA Tech.
Note No. D3186 (1966).

¹²⁷R.H.Neynaber, et al., Phys. Rev., 124, 135 (1961).

¹²⁸A.Temkin, Phys. Rev., 121, 788 (1961).

¹²⁹K.Smith, et al., Phys. Rev., 125, 553 (1962).

¹³⁰A.Dalgarno and H.N.Yadav, Proc. Phys. Soc., A66, 173
(1953).

¹³¹W.L.Fite, Proc. R. Soc., A268, 527 (1962).

¹³²L.J.Kieffer, JILA REPORT 30 (1965).

¹³³L.J.Kieffer, JILA Information Centre Report 13 (1973).

- ¹³⁴L.J.Kieffer, Atomic Data 1, 120 (1969).
- ¹³⁵O.Heinz and E.J.Feinler, OOR Project C4 Interim Tech. Report No. 1 (1961).
- ¹³⁶L.J.Kieffer, NBS Miscellaneous Publication 289 (1967).
- ¹³⁷R.C.Dehmel, et al., Atomic Data, 5, 231 (1973).
- ¹³⁸H.Tawara and A.Russek, Rev. Mod. Phys., 45, 178 (1973).
- ¹³⁹Barnett et al., ORNL 5206 and ORNL 5207, Atomic Data for Controlled Fusion Research (1977).
- ¹⁴⁰M.Gryzinski, Phys. Rev., 115, 374 (1959).
- ¹⁴¹M.Gryzinski, Phys. Rev., 138 A, 305 (1965).
- ¹⁴²M.Gryzinski, Phys. Rev., 138 A, 322 (1965).
- ¹⁴³M.R.H.Rudge and S.B.Schartz, Proc. Phys. Soc., 86, 773 (1963).
- ¹⁴⁴A.C.Kolb et al., 2nd. Conference on Plasma Physics and Contr. Nucl. Fusion Research (CN-21/98 Culham) (1965).
- ¹⁴⁵W.Lotz, IPP 1/62 (1967).
- ¹⁴⁶W.Lotz, Astrophys. J. Suppl., 14, 207 (1967).

- ¹⁴⁷E.L.Freeman and E.M.Jones, CLM-R137 (1974).
- ¹⁴⁸E.M.Jones, CLM-R175 (1977).
- ¹⁴⁹S.J.B.Corrigan, J. Chem. Phys., 43, 4381 (1965).
- ¹⁵⁰D.Rapp and P.Englander-Golden, J. Chem. Phys., 42, 4081 (1965).
- ¹⁵¹B.Peart and K.T.Dolder, J. Phys., B.7, 236 (1974).
- ¹⁵²B.Peart and K.T.Dolder, J. Phys., B.5, 860 (1972).
- ¹⁵³G.H.Dunn, et al., Phys. Rev. Lett., 15, 610 (1965).
- ¹⁵⁴D.F.Dance, et al., Proc. Phys. Soc., 92, 577 (1967).
- ¹⁵⁵B.Peart and K.T.Dolder, J. Phys., B.4, 1496 (1971).
- ¹⁵⁶B.Peart and K.T.Dolder, J. Phys., B.5, 1554 (1972).
- ¹⁵⁷A.C.Riviere, Nucl. Fusion, 11, 363 (1971)

TABLA I
Valores característicos para los
coeficientes de recombinación

<i>Proceso</i>	α_r (cm ⁻³ s ⁻¹) para T = 300 °K
<i>Radiactiva</i>	10 ⁻¹²
<i>Tres cuerpos (electrón)</i>	
$n_e = 10^{12}$ cm ⁻³	9 x 10 ⁻⁶
$n_e = 10^{14}$ cm ⁻³	9 x 10 ⁻⁶
$n_e = 10^{16}$ cm ⁻³	9 x 10 ⁻⁴
<i>Tres cuerpos (partícula pesada)</i>	
Helio (1 atmósfera de presión)	7 x 10 ⁻⁹
Argón (1 atmósfera de presión)	7 x 10 ⁻¹¹
Aire (1 atmósfera de presión)	2 x 10 ⁻⁷
H ₂ (1 atmósfera de presión)	2 x 10 ⁻⁷
<i>Disociativa</i>	10 ⁻⁷
<i>Dieletrónica</i>	10 ⁻¹²

TABLA II
Valores de (n_e/n_N) para H₂ con los cuales $\langle v_{ei} \rangle = \langle v_{eN} \rangle$

n_e (cm ⁻³)	T (eV)				
	10 ⁻³	10 ⁻²	10 ⁻¹	1.0	10
10 ⁶	4 x 10 ⁻⁹	3 x 10 ⁻⁷	2 x 10 ⁻⁵	1 x 10 ⁻³	0.8 x 10 ⁻¹
10 ⁹	9 x 10 ⁻⁹	4 x 10 ⁻⁷	3 x 10 ⁻⁵	2 x 10 ⁻³	1 x 10 ⁻¹
10 ¹²		9 x 10 ⁻⁷	4 x 10 ⁻⁵	3 x 10 ⁻³	1 x 10 ⁻¹
10 ¹⁵			9 x 10 ⁻⁵	4 x 10 ⁻³	2 x 10 ⁻¹
10 ¹⁶				9 x 10 ⁻³	3 x 10 ⁻¹

TABLA III

Variación de los parámetros que regulan la atenuación de un campo magnético que difunde a través de una interfase plasma-gas neutro

Parámetros	Plasma	Interfase		Gas neutro
		$0 < x < d$	$x_i \ll x < d$	
<i>Especie</i>	<i>Deuterio</i>			<i>Oxigeno</i>
<i>Espesor (cm)</i>		1.32×10^{-4}	7.87×10^{-5}	
n_0 (cm)	10^{17}			
T_0 (eV)	25			
T_g (eV)				0.17
ϵ_{20}				1.000523
t_1^0 (ps)	6.4×10^{-1}			
t_2^0 (ps)	4.4×10^{-3}			
l_p (cm)	1.0			
u_1 (cm.s ⁻¹)	5×10^6			
u_2 (cm.s ⁻¹)	3×10^7			
τ_{p1} (ps)	2×10^5			
τ_{p2} (ps)	3.33×10^4			
r_0	145.535			
t_1/t_1^0		1.09×10^{-2}	2.11×10^{-3}	
t_2/t_2^0		1.0	5.98×10^{-1}	
r/r_0		1.09×10^{-2}	3.53×10^{-3}	
B/B_0		3.86×10^{-1}	6.6×10^{-1}	
$\frac{B_0}{B_0^0} \begin{cases} t_1^0 < t < \tau_{p1} \\ t_1^0 < t < \tau_{p2} \\ t > \tau_{p1,2} \end{cases}$		$1.93 \times 10^{-6}.t$	$3.3 \times 10^{-6}.t$	
		$1.6 \times 10^{-5}.t$	$1.98 \times 10^{-5}.t$	
		3.86×10^{-1}	6.6×10^{-1}	

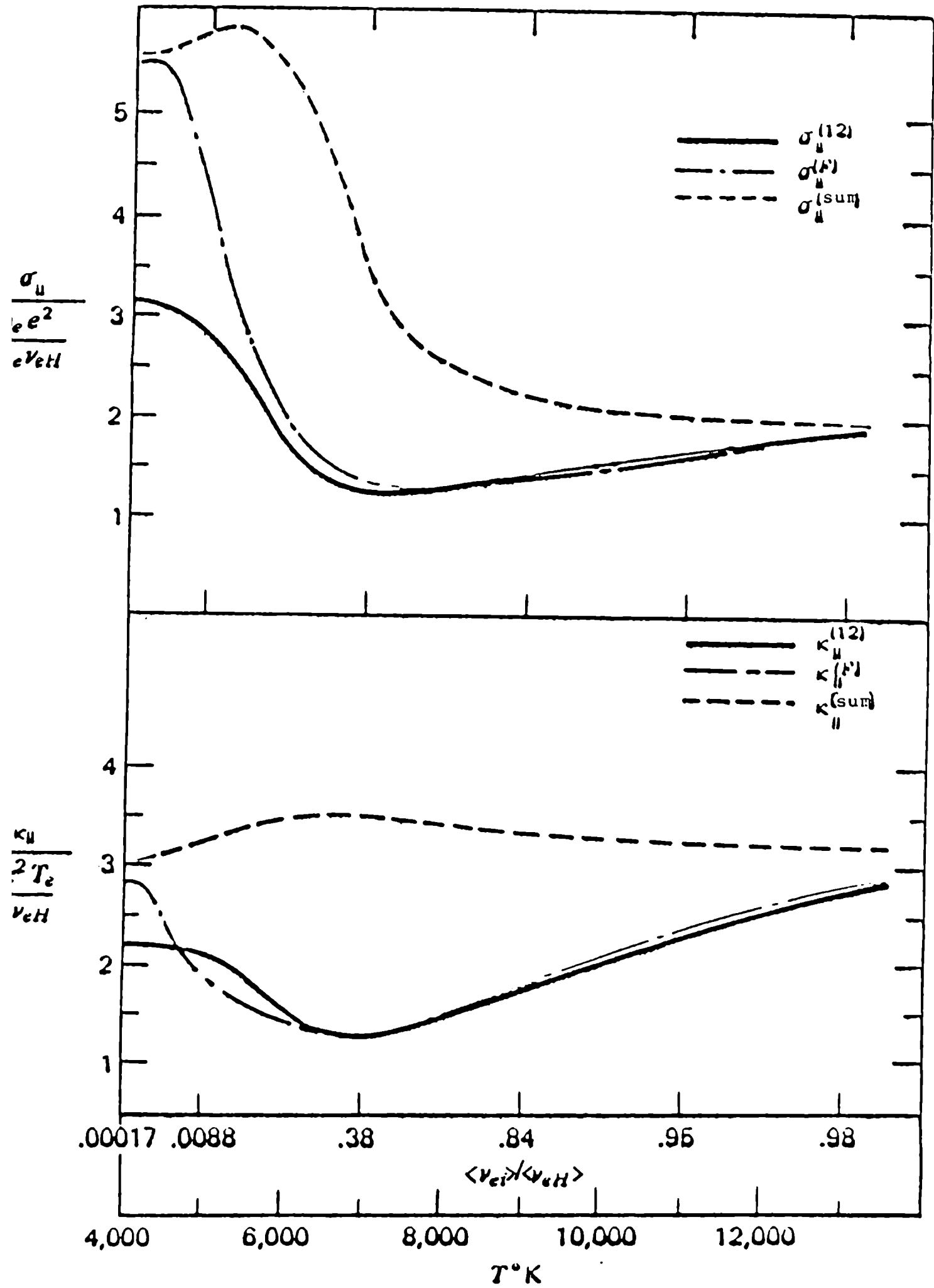


Figura 1.

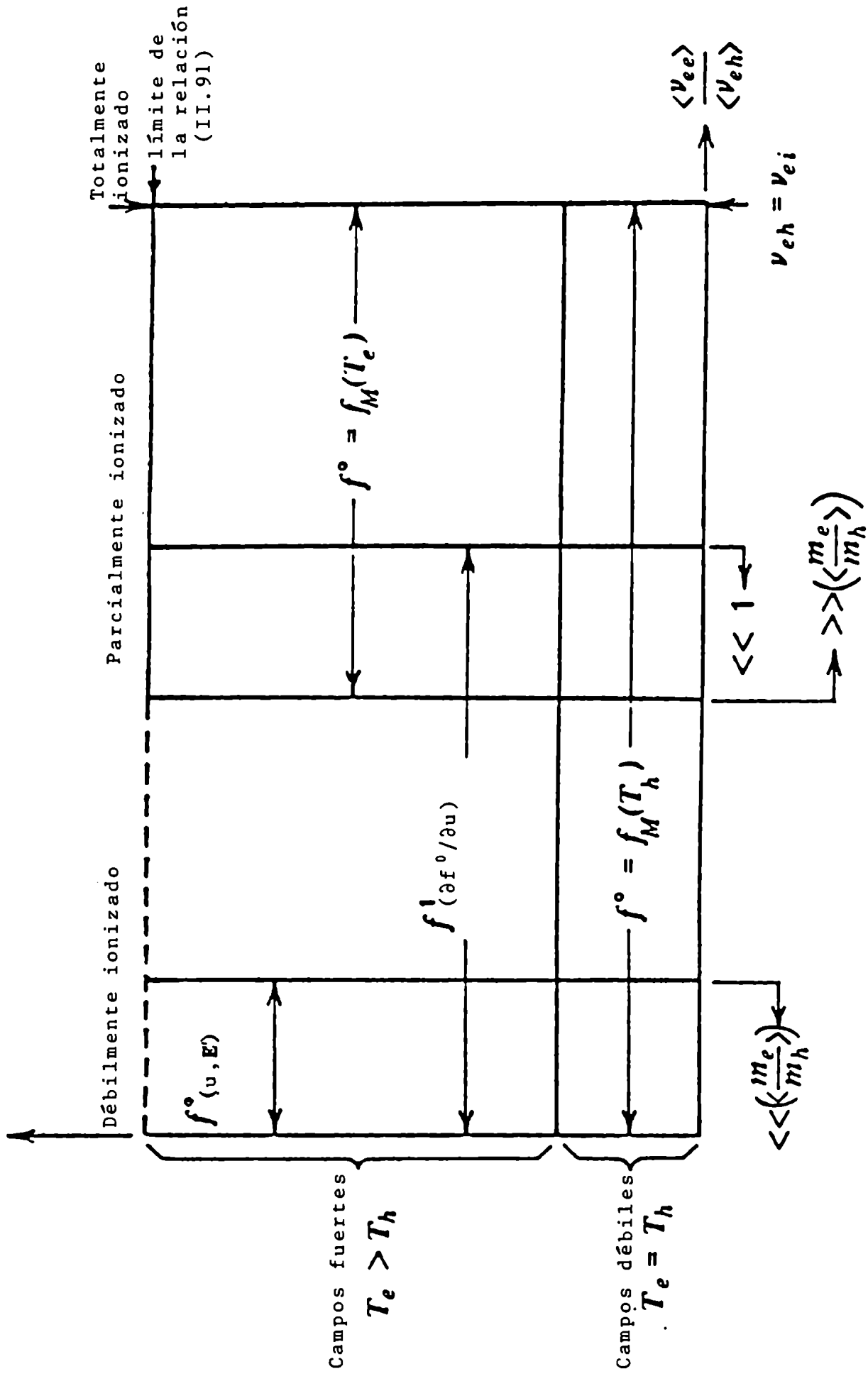


Figura 2.

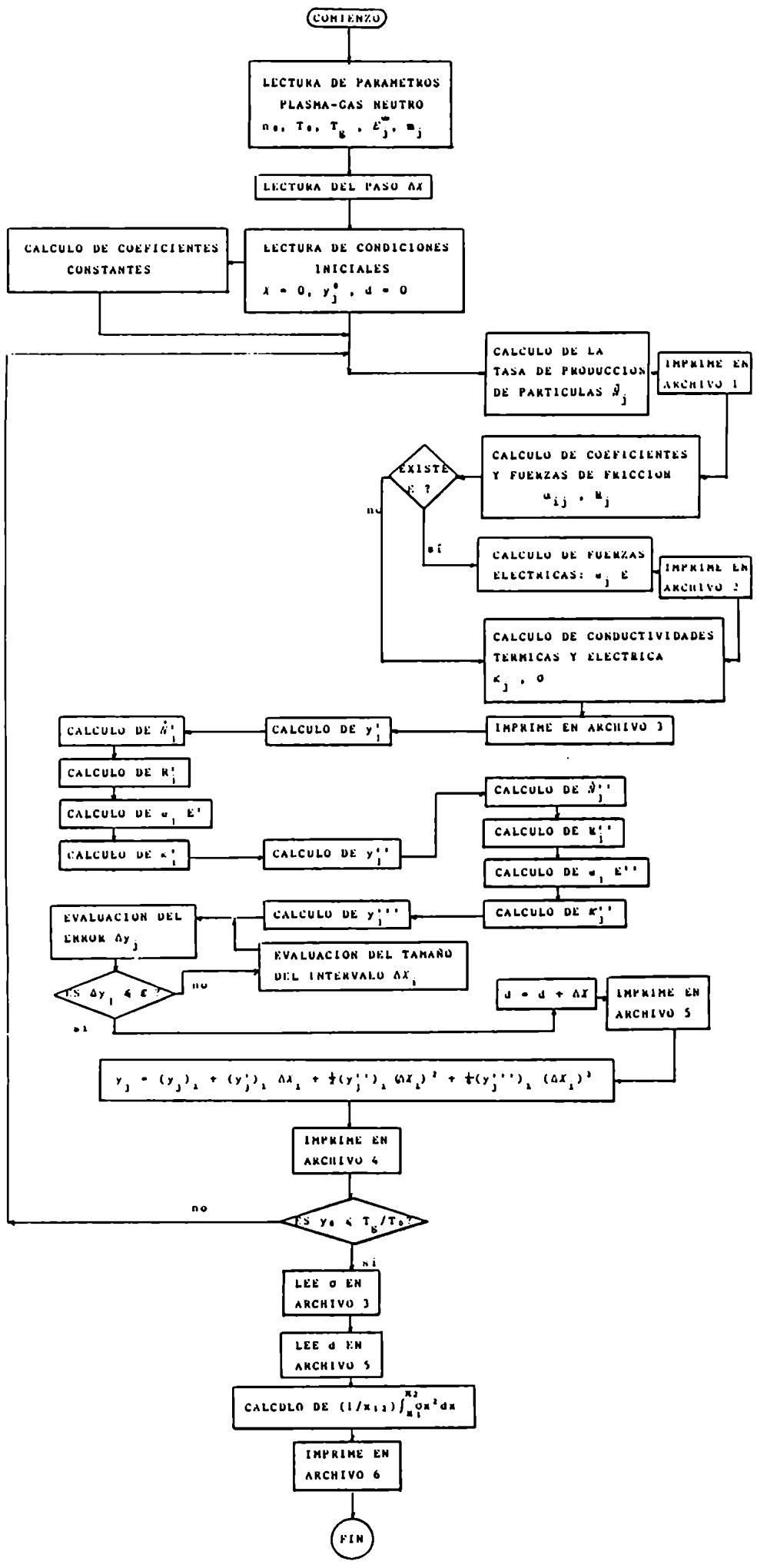


Figura 3

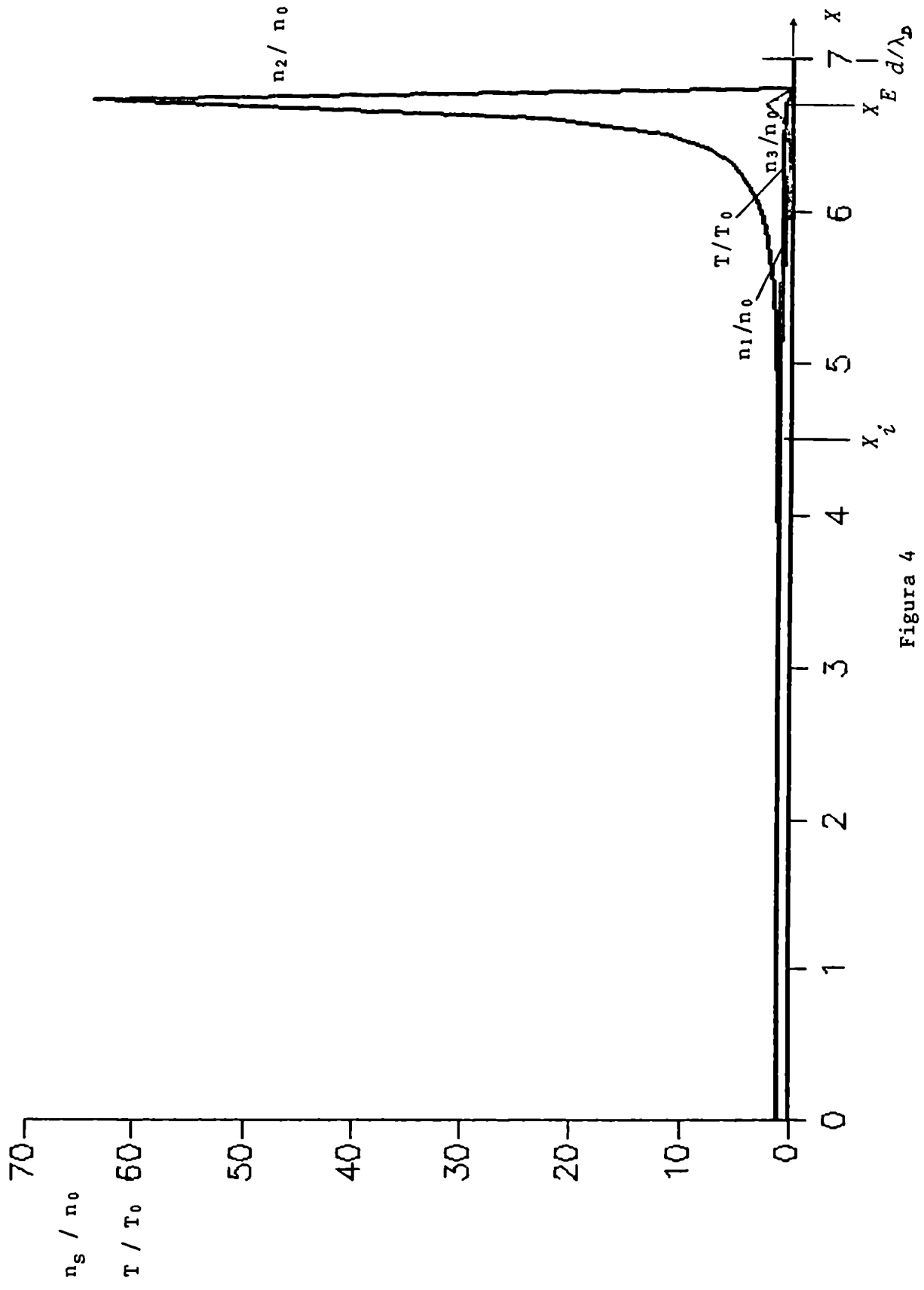


Figure 4

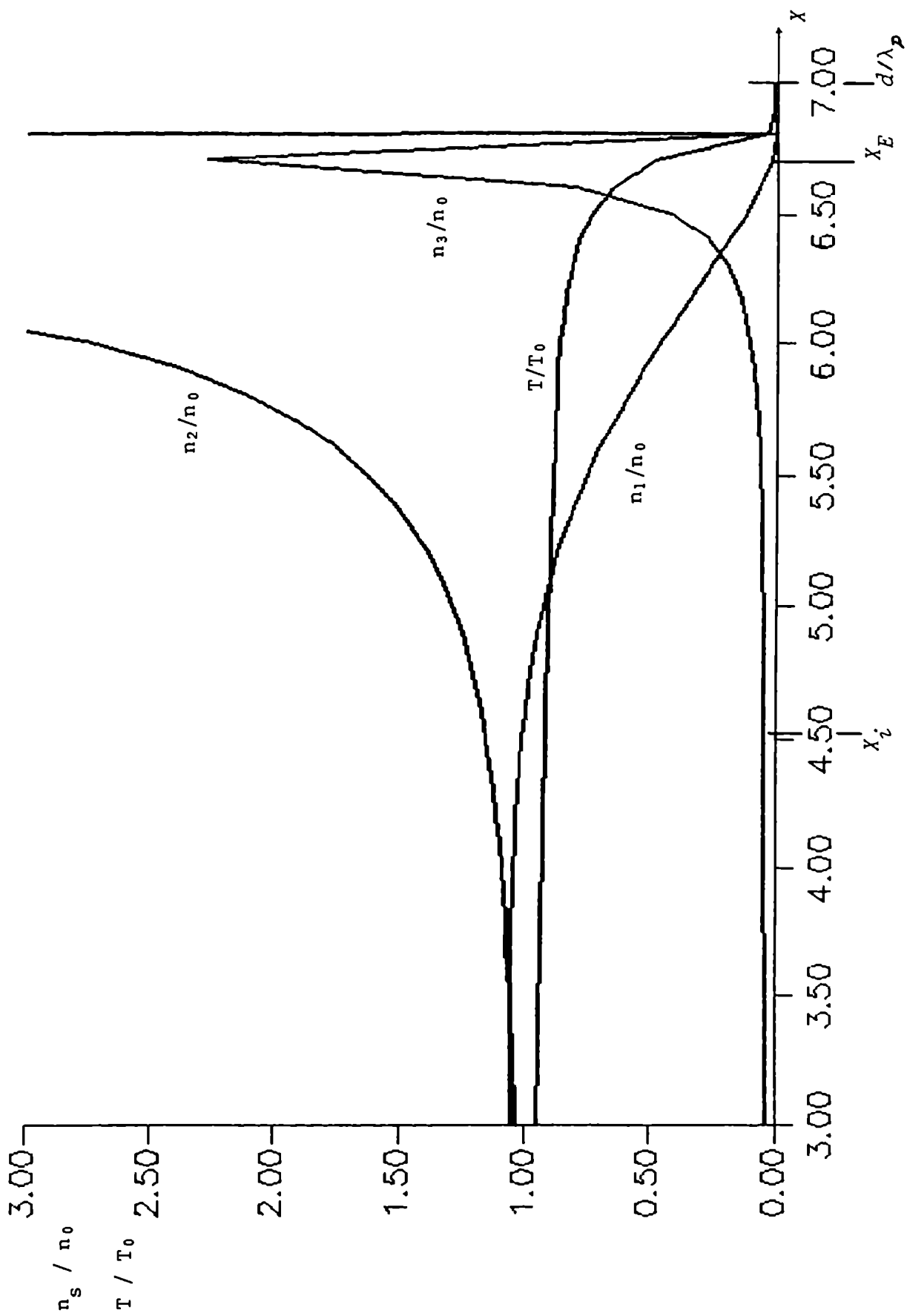


Figure 5

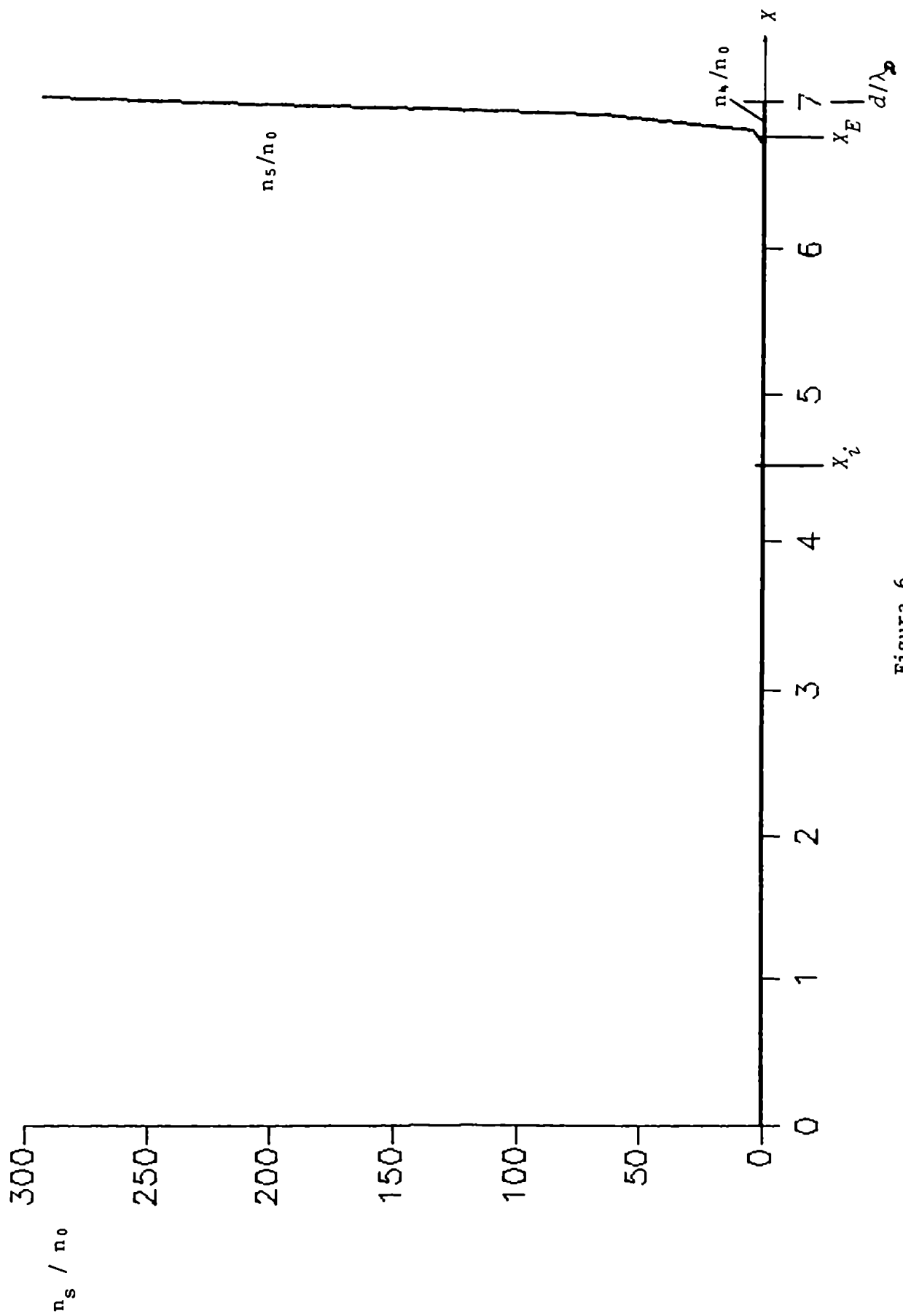


Figura 6

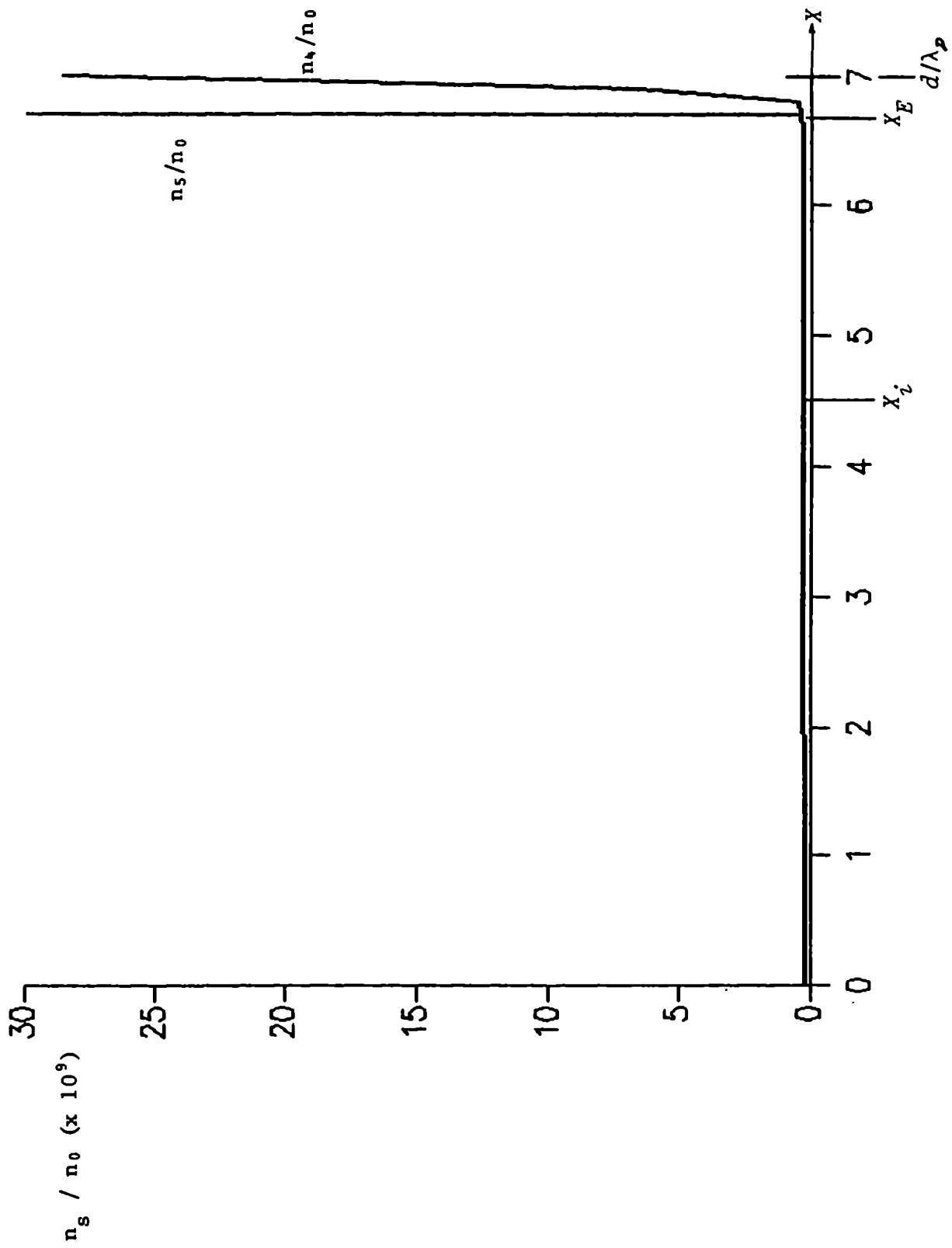


Figura 7

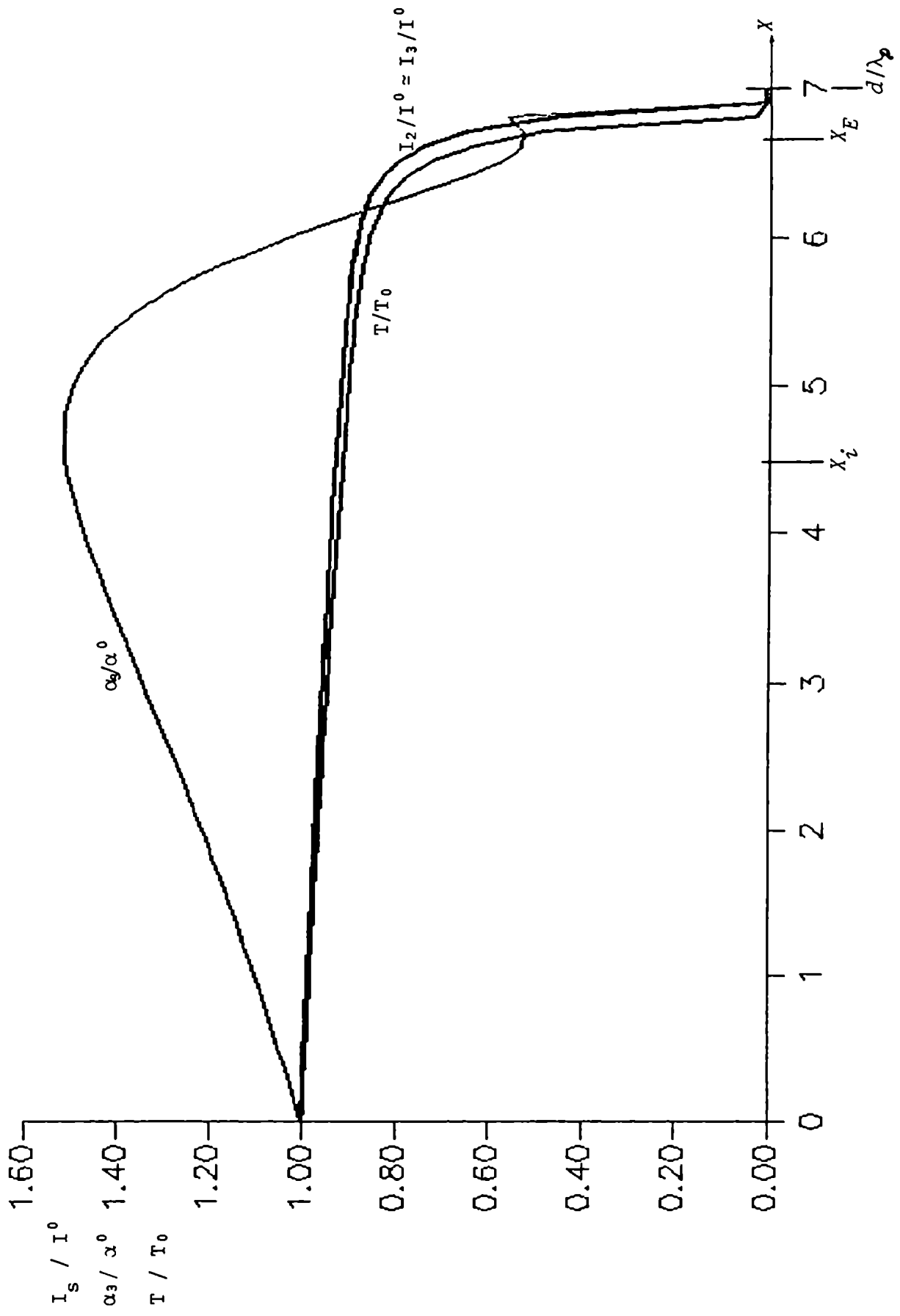


Figura 8

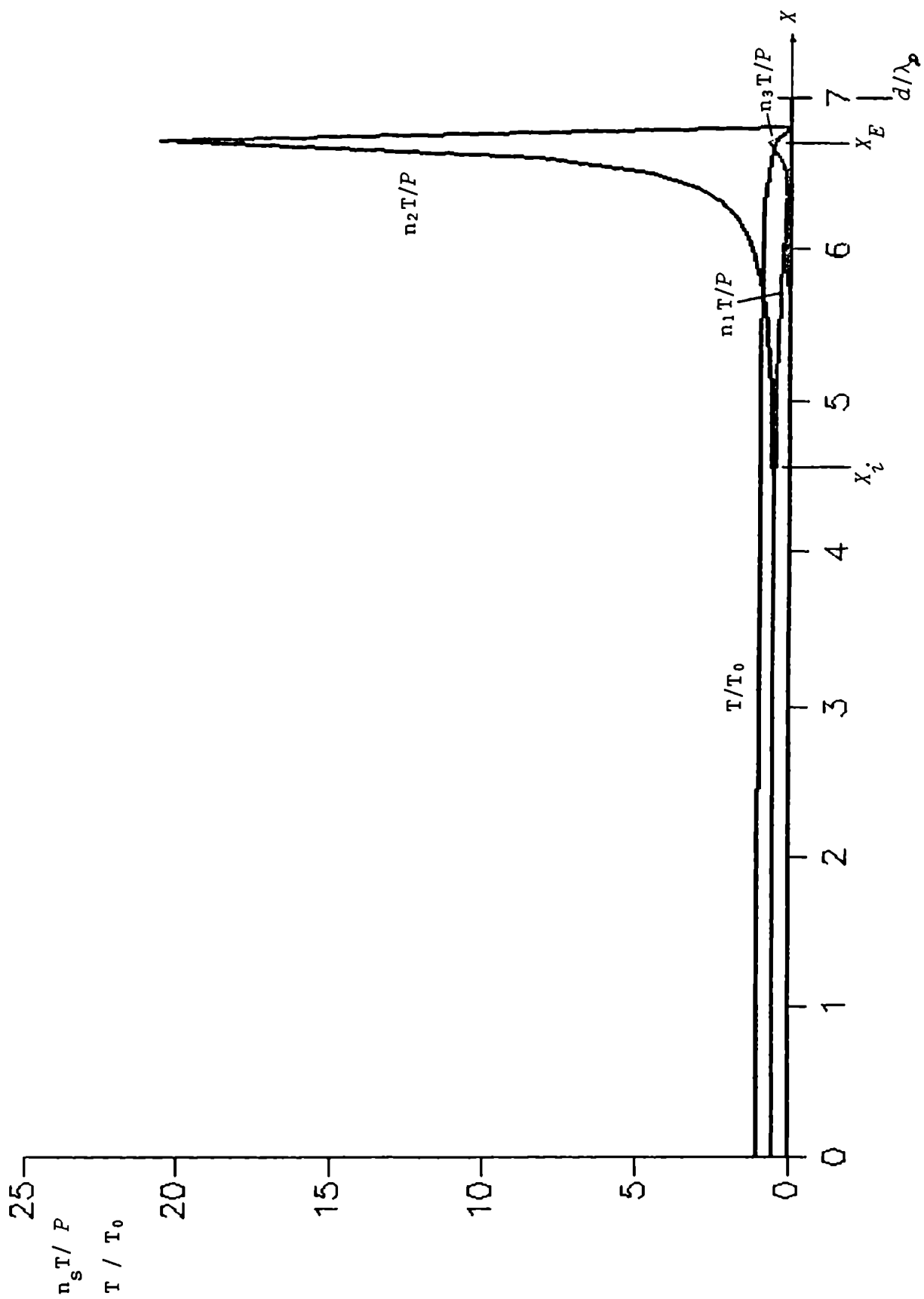


Figura 9

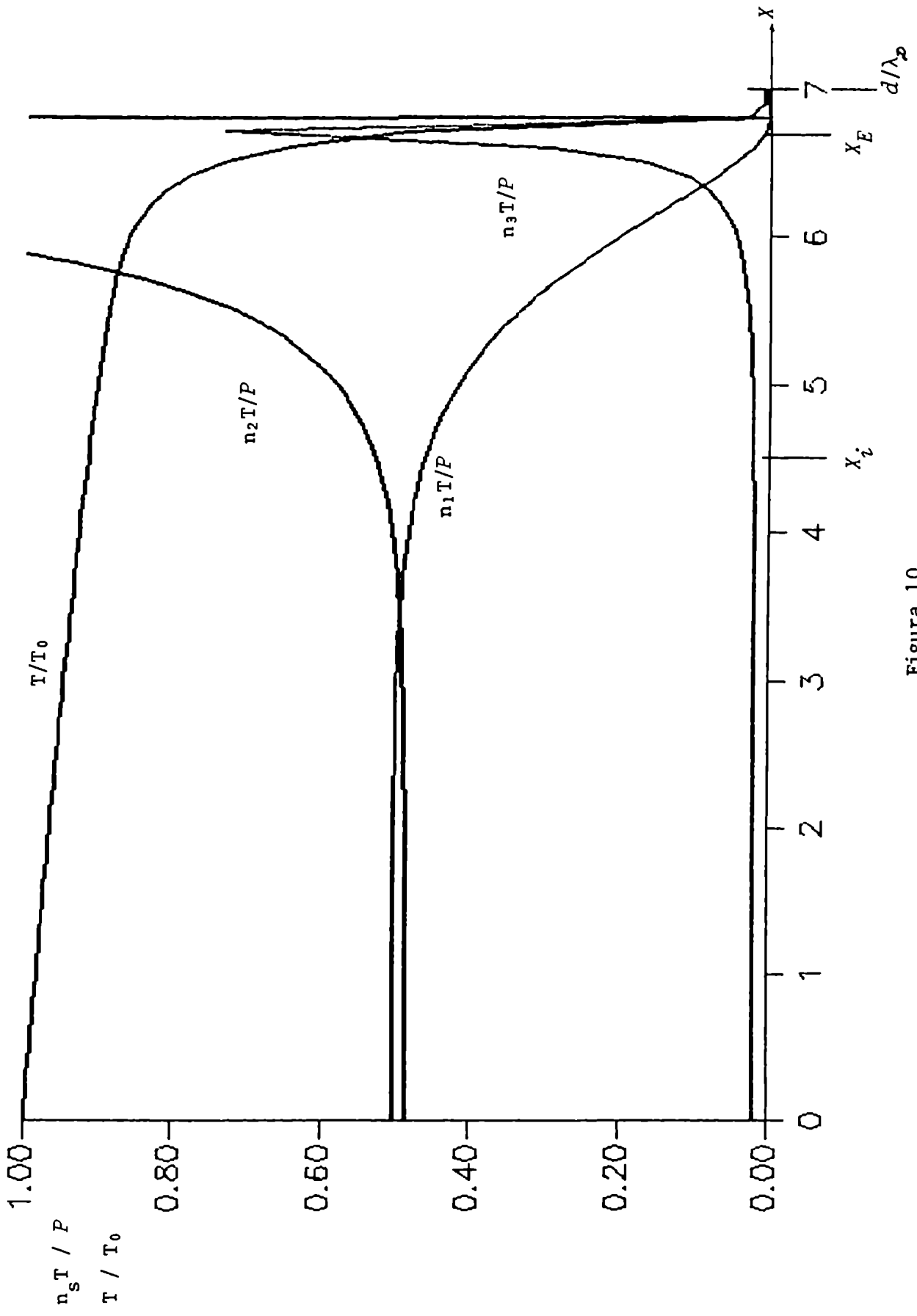


Figure 10

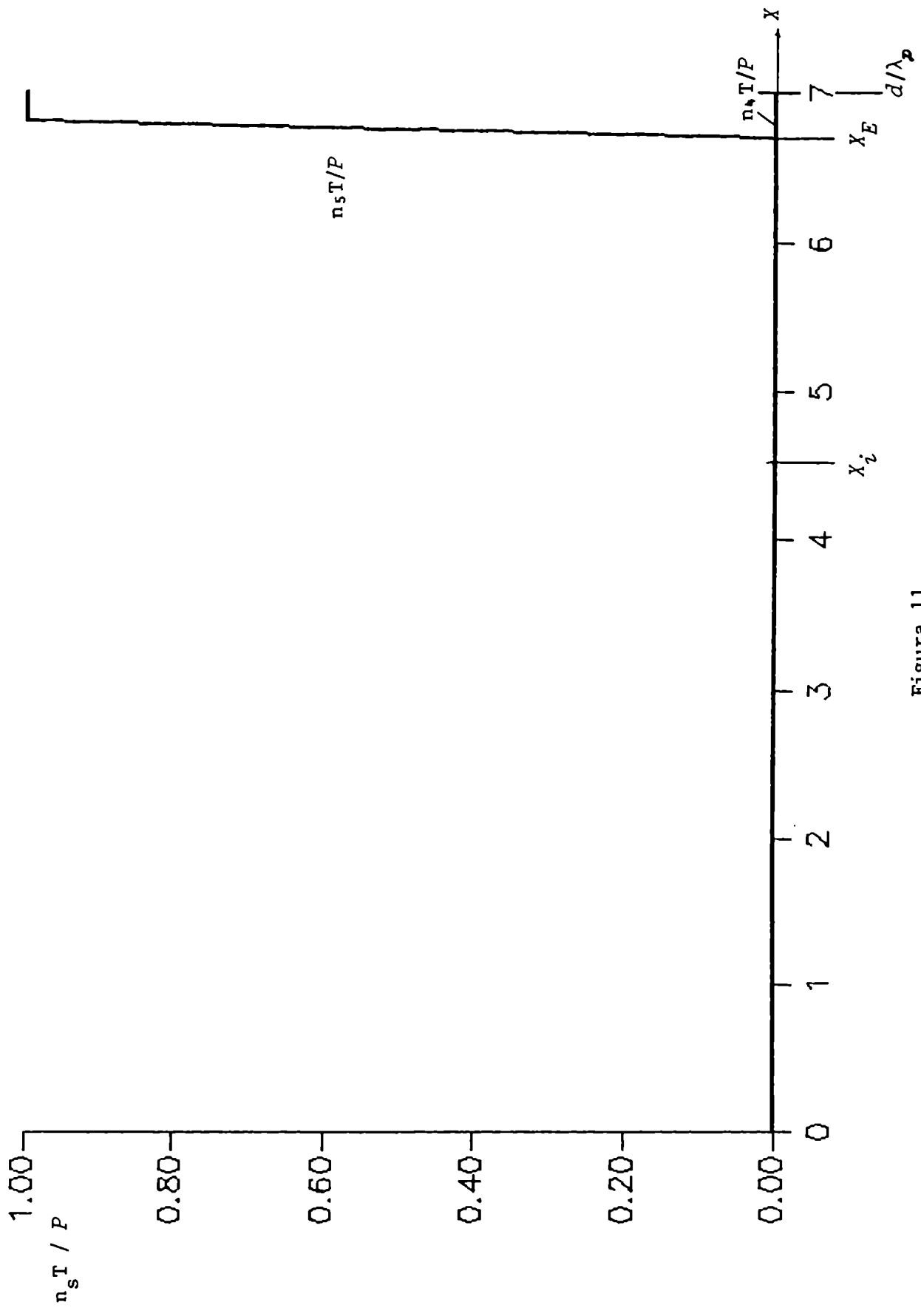


Figure 11

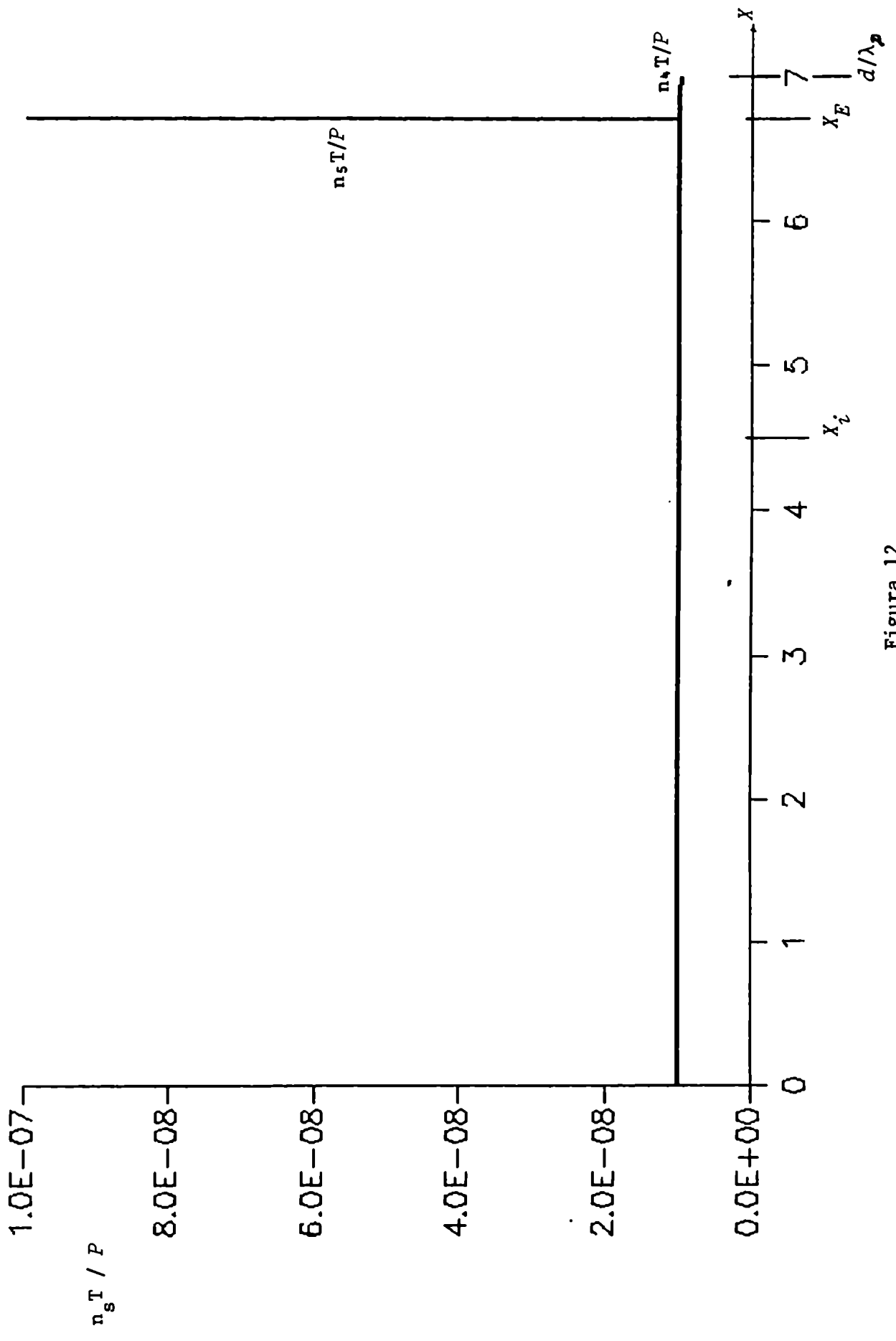


Figure 12

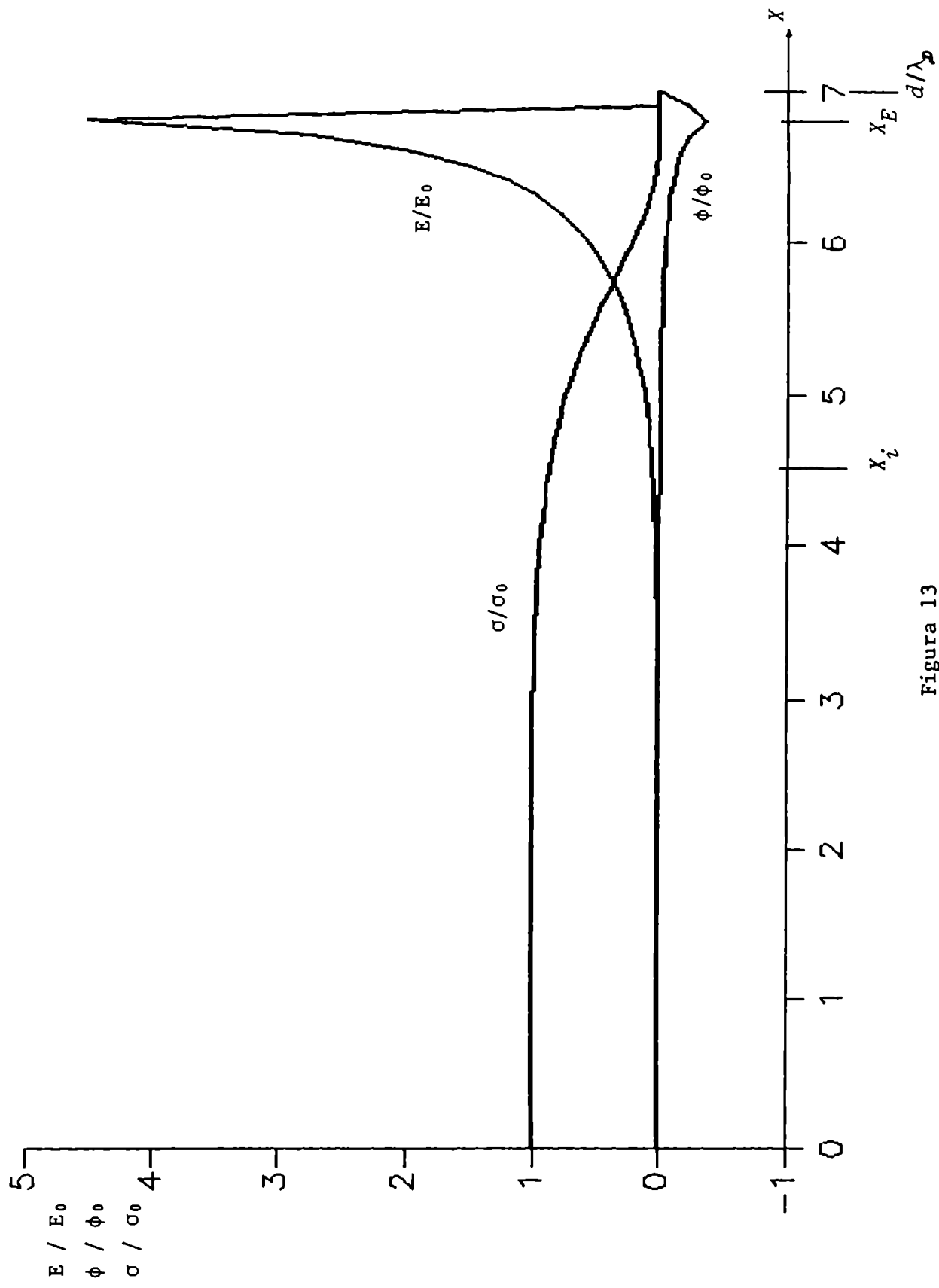


Figure 13

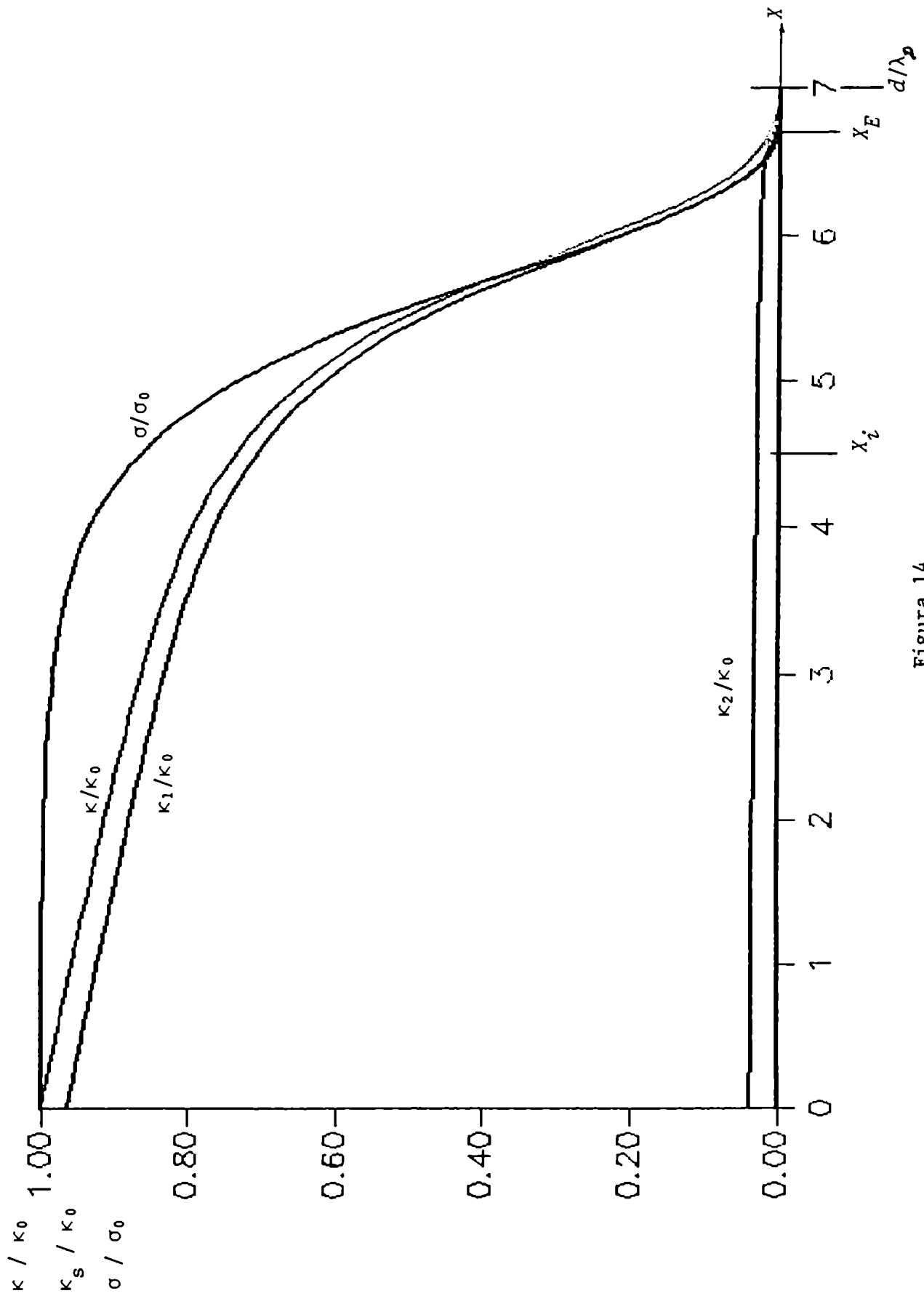


Figure 14

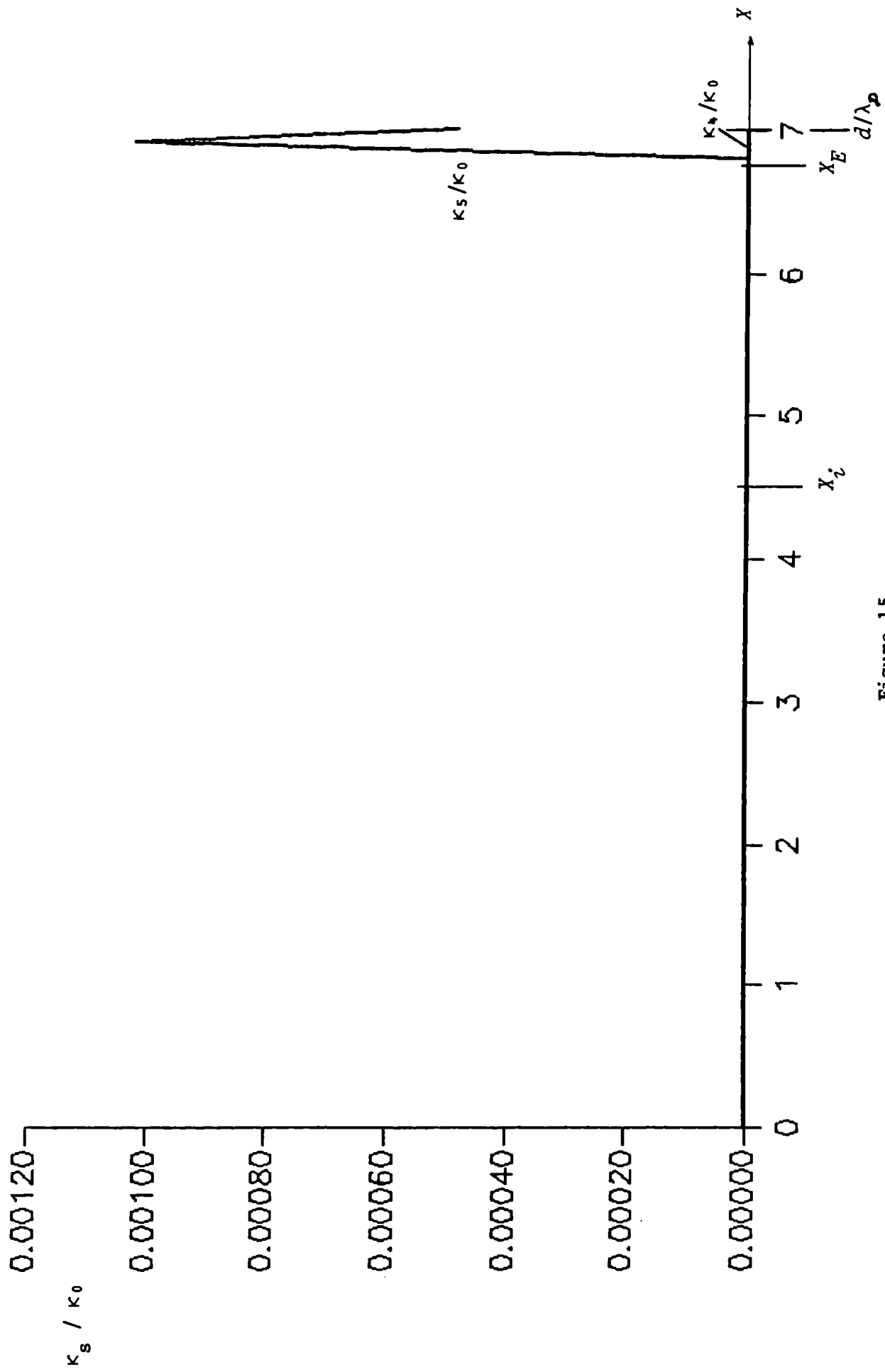


Figure 15

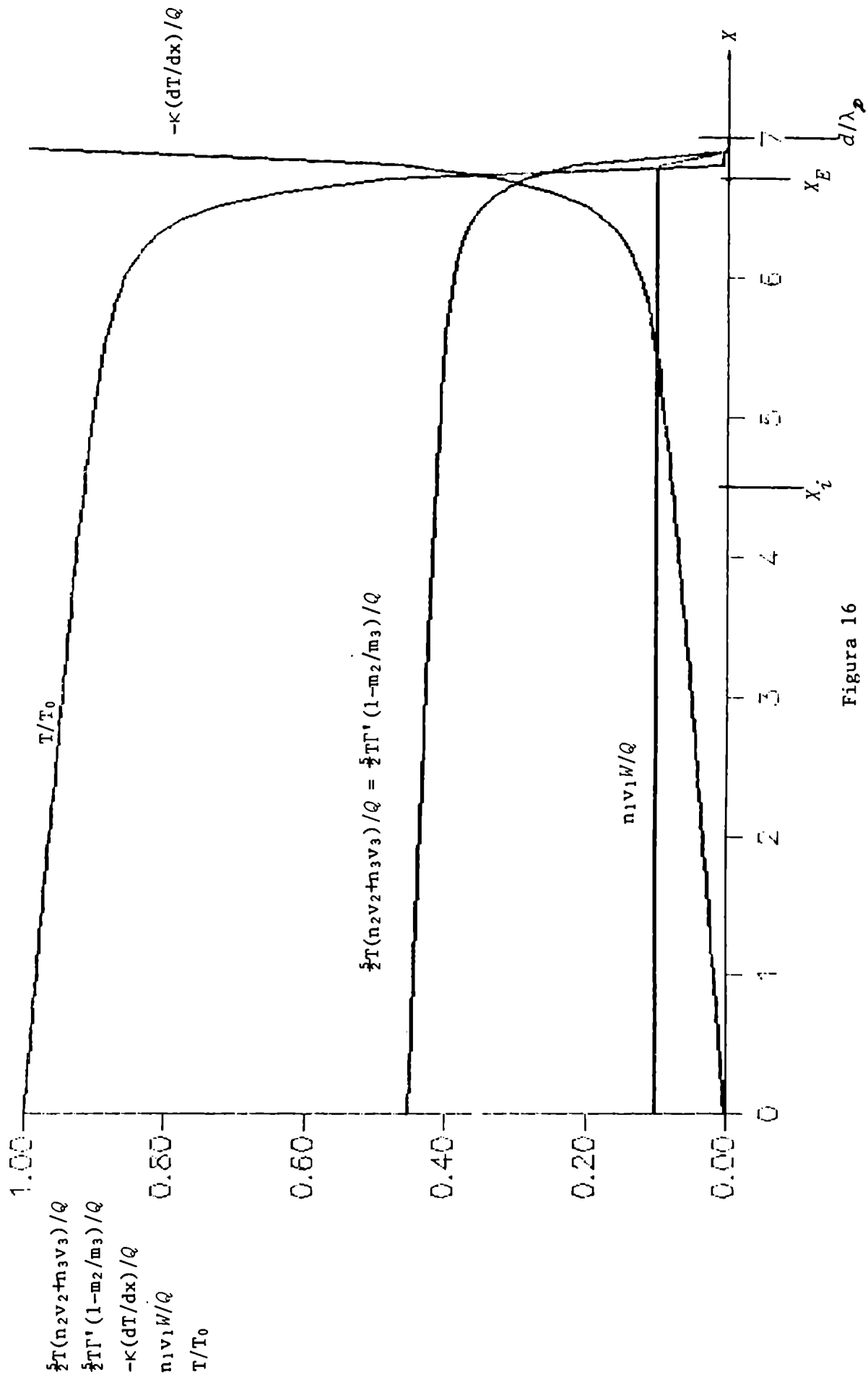


Figure 16

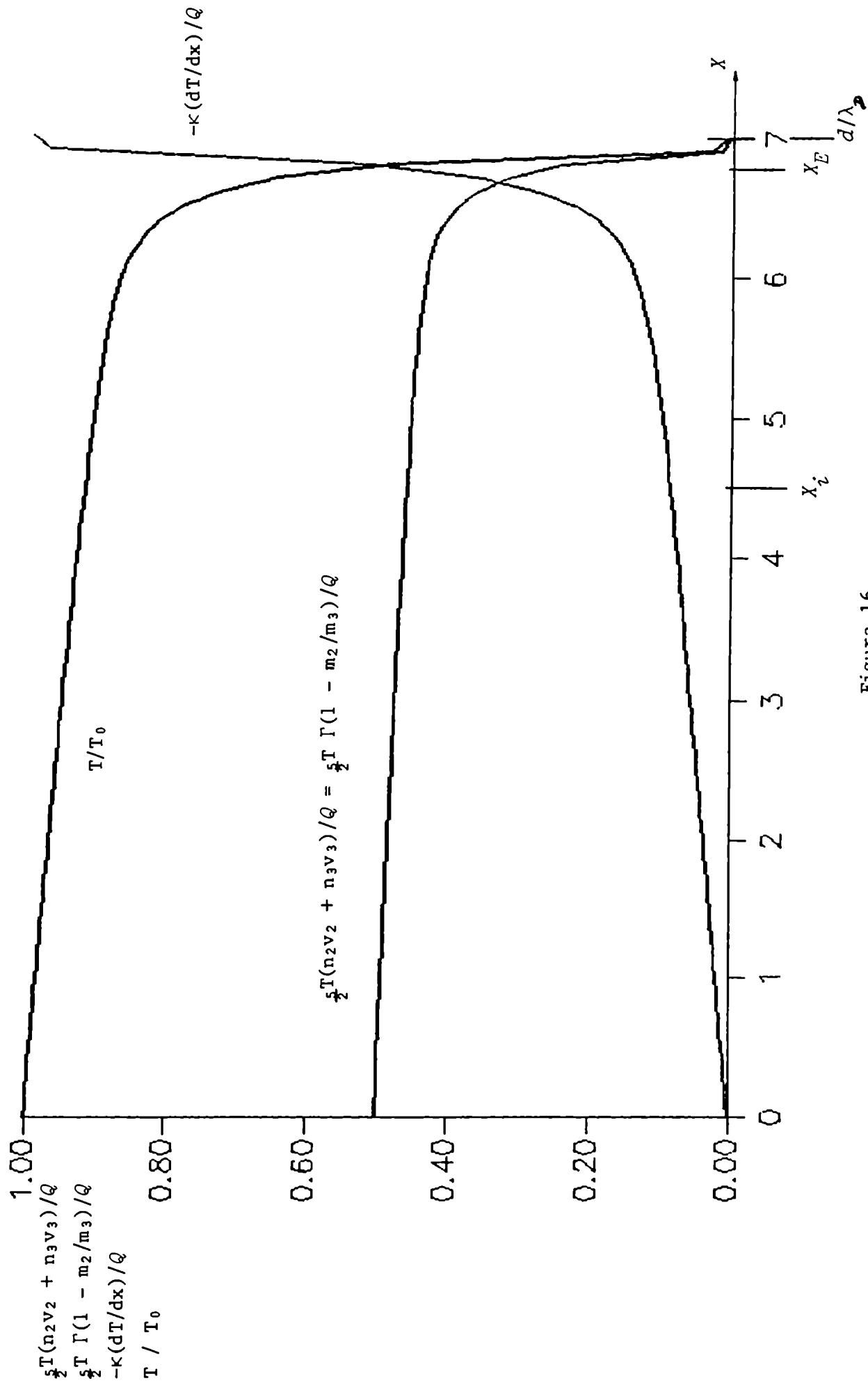


Figure 16

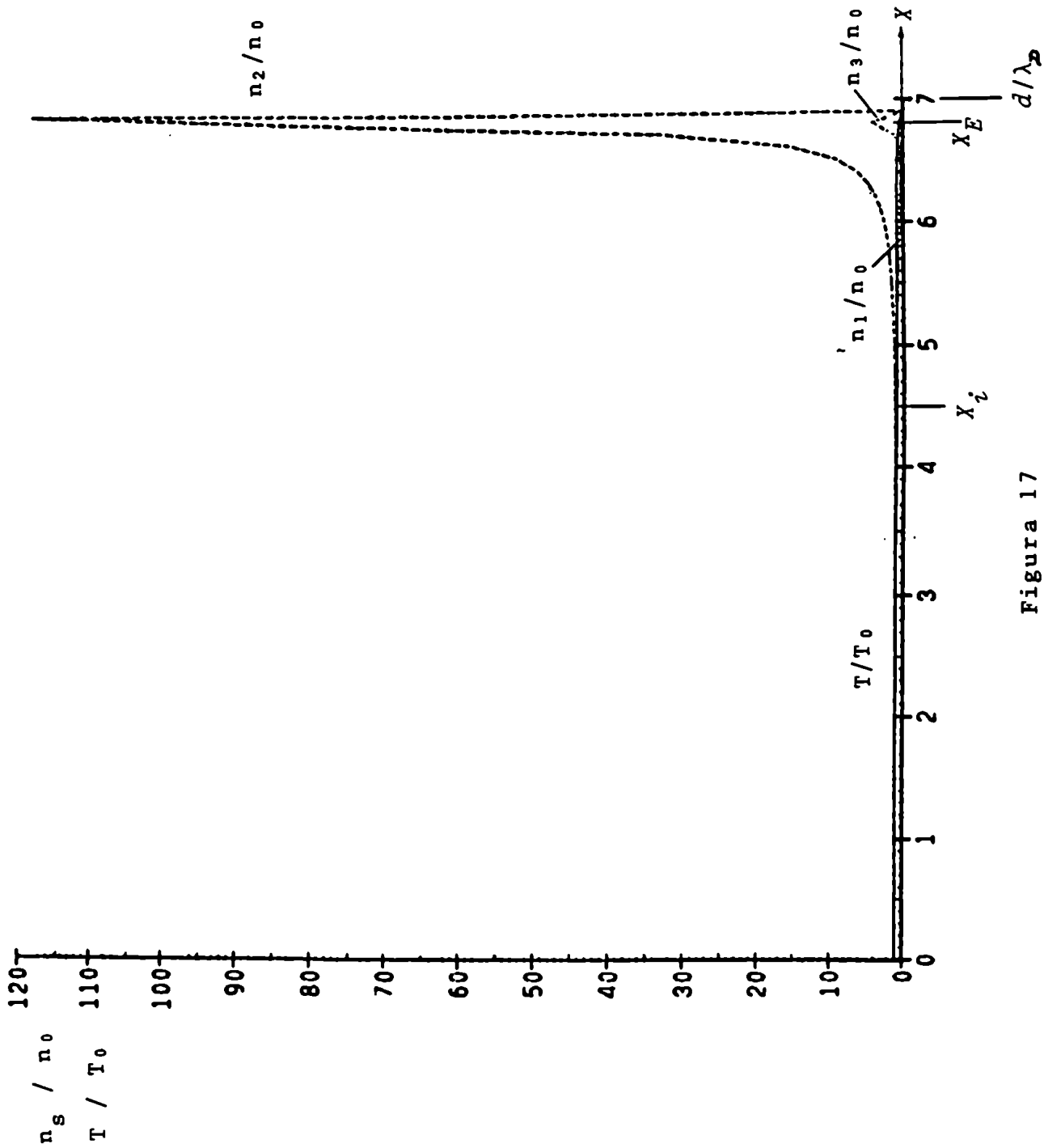


Figura 17

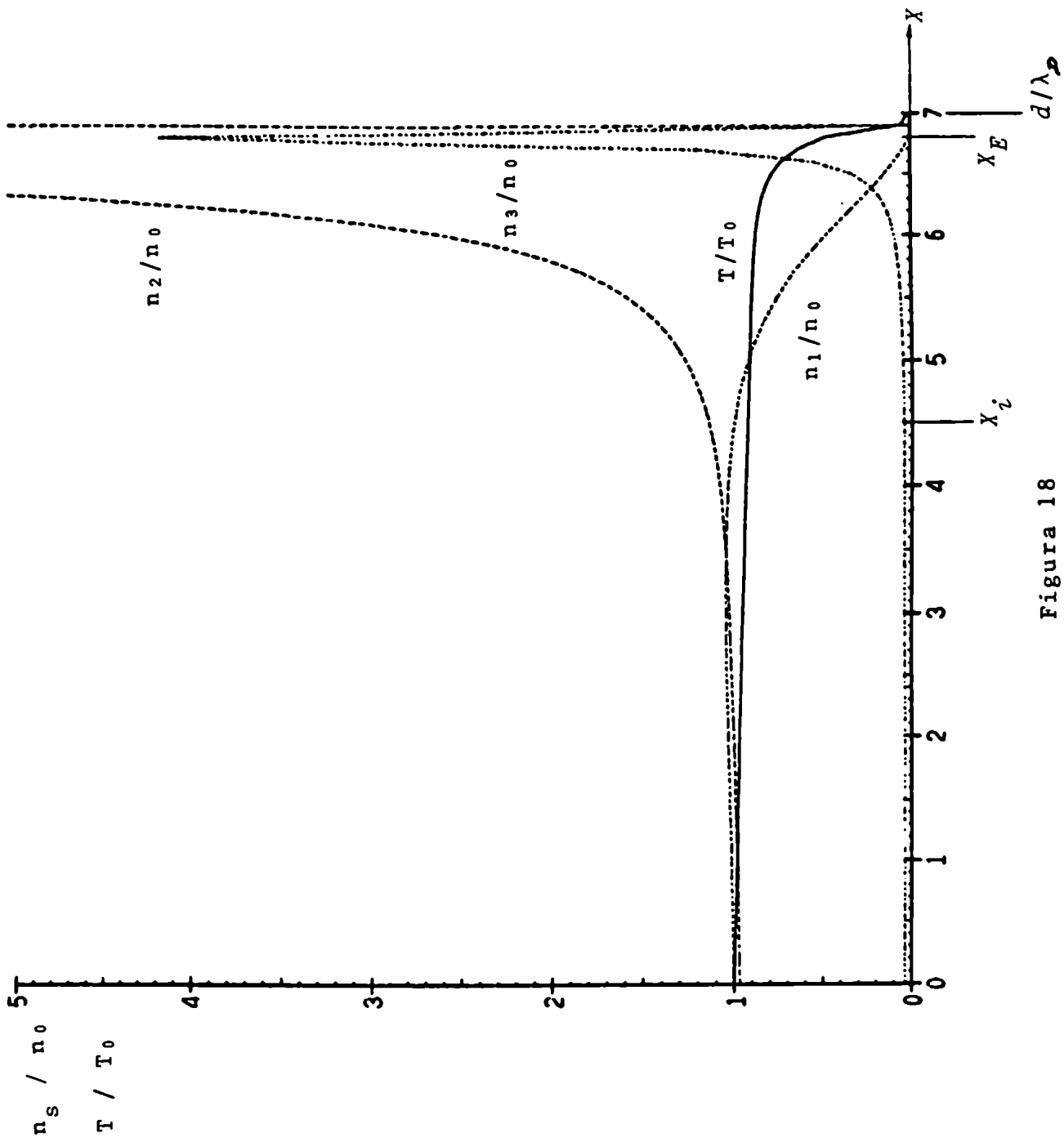


Figura 18

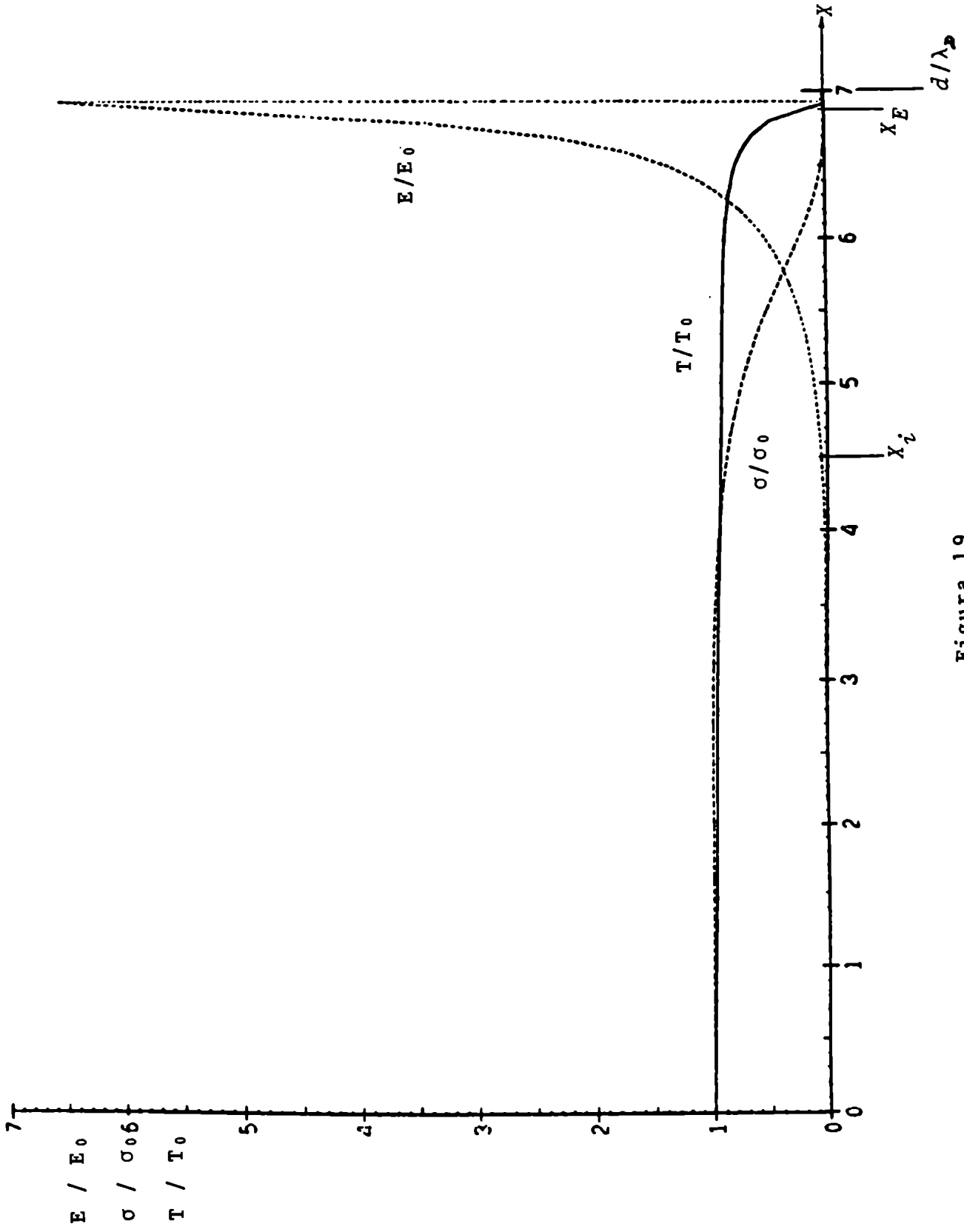


Figure 19

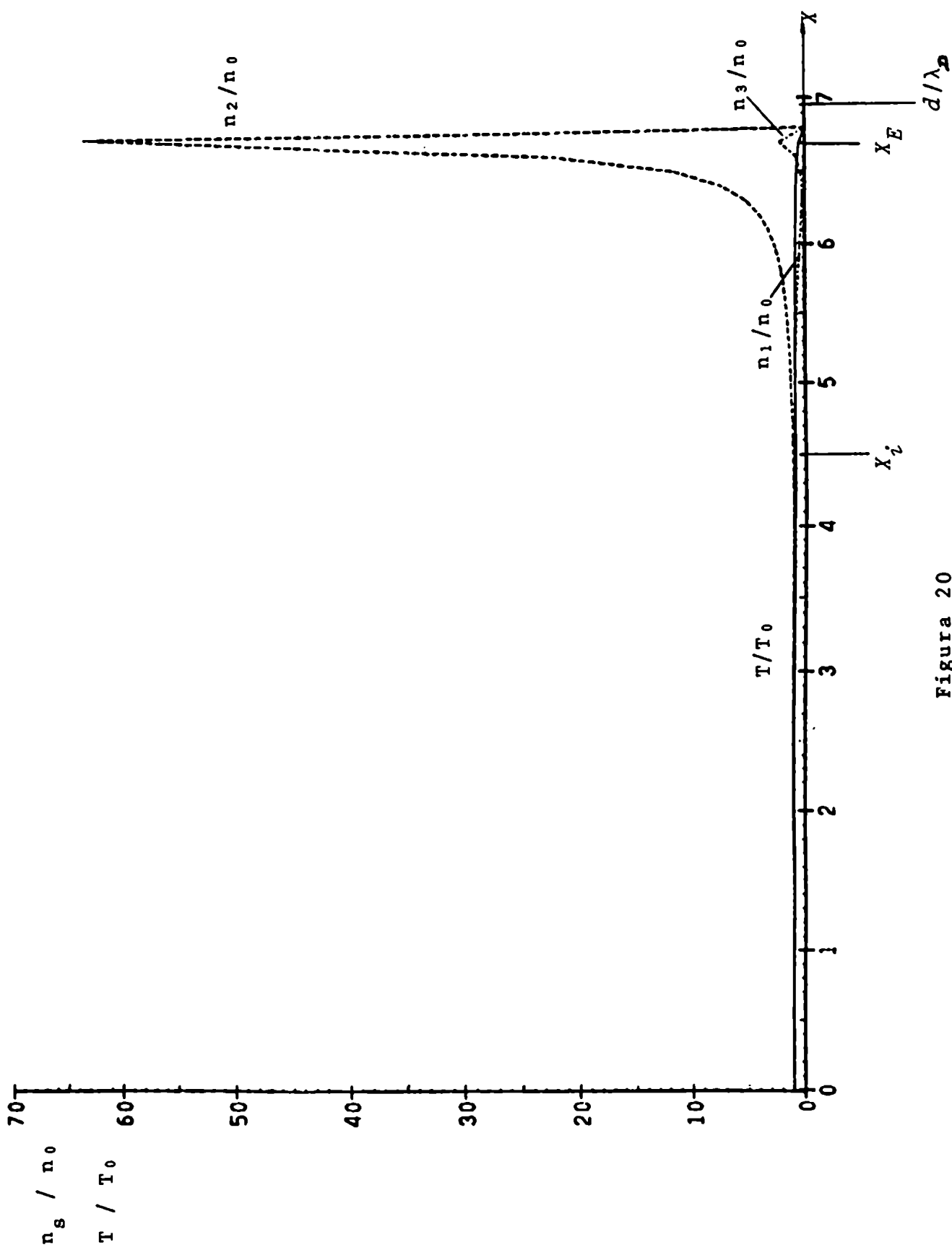


Figura 20

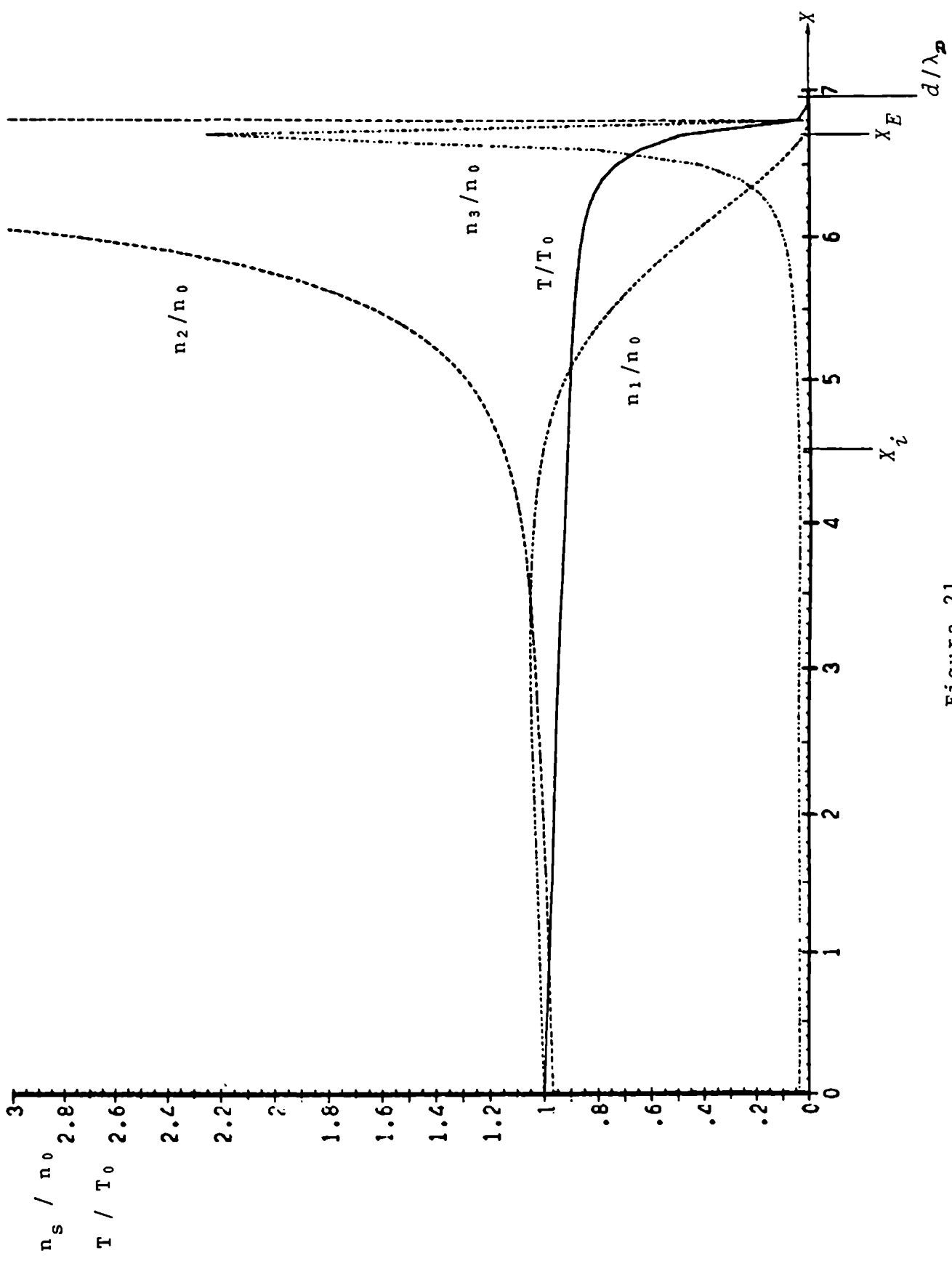


Figura 21

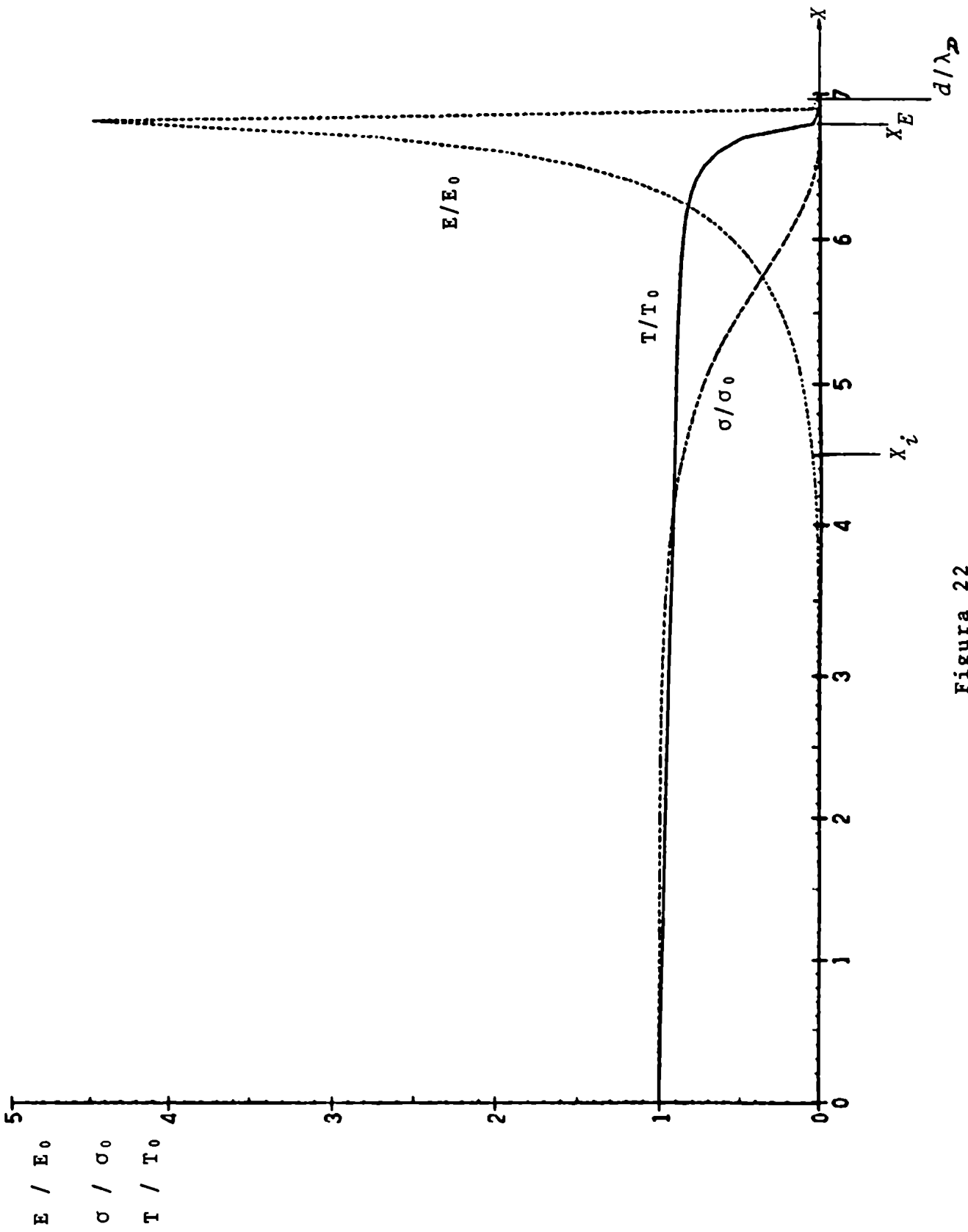


Figure 22

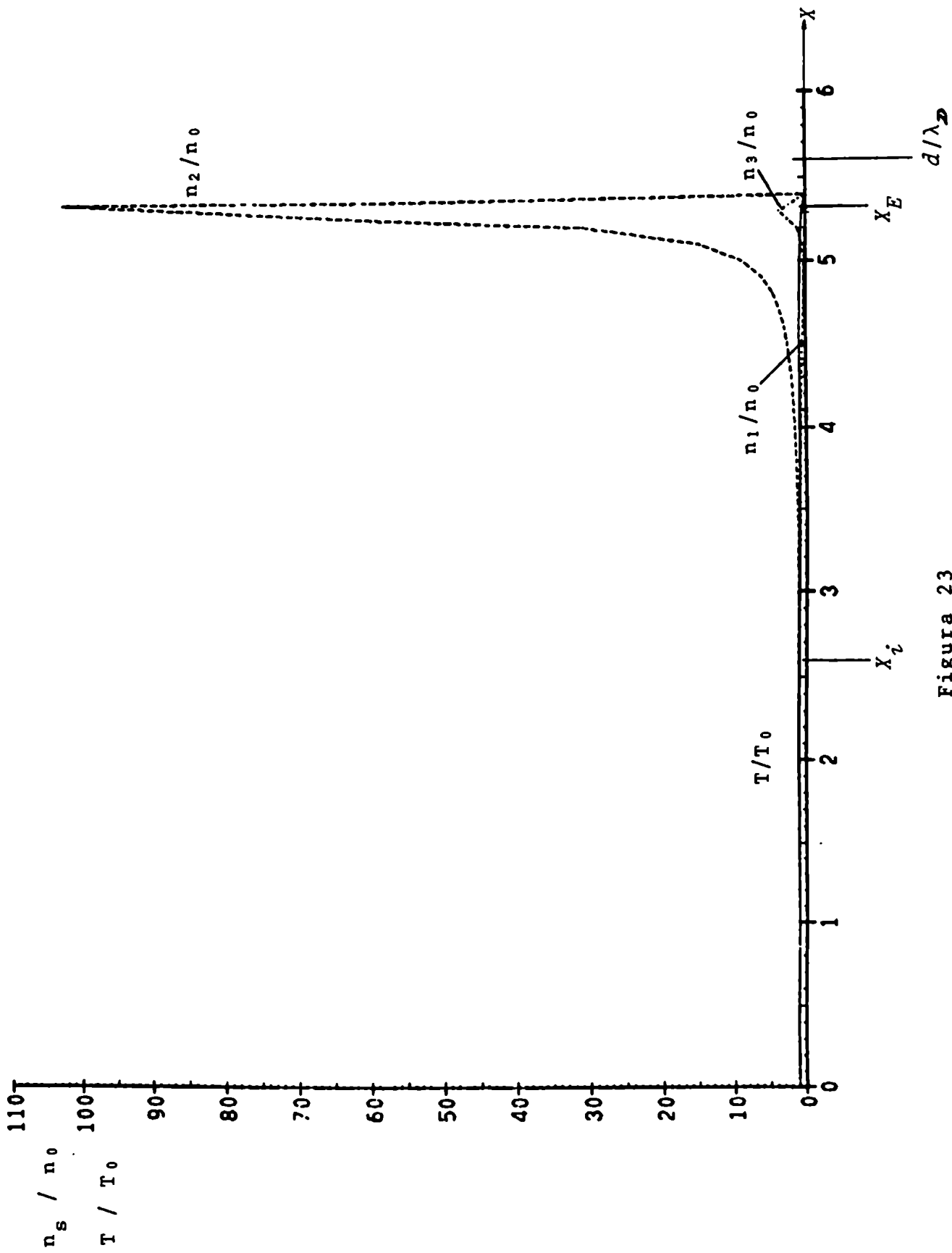


Figure 23

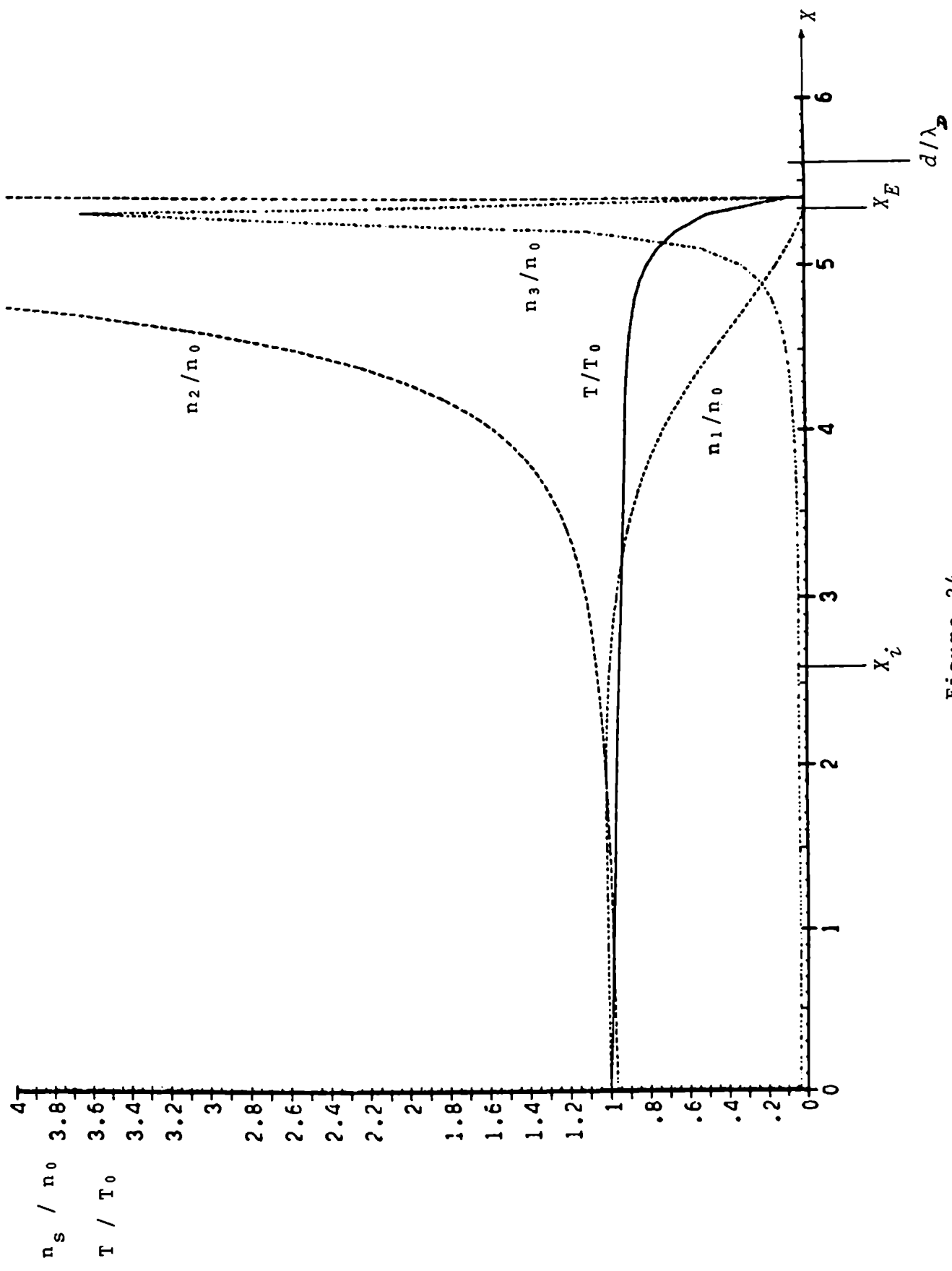


Figura 24

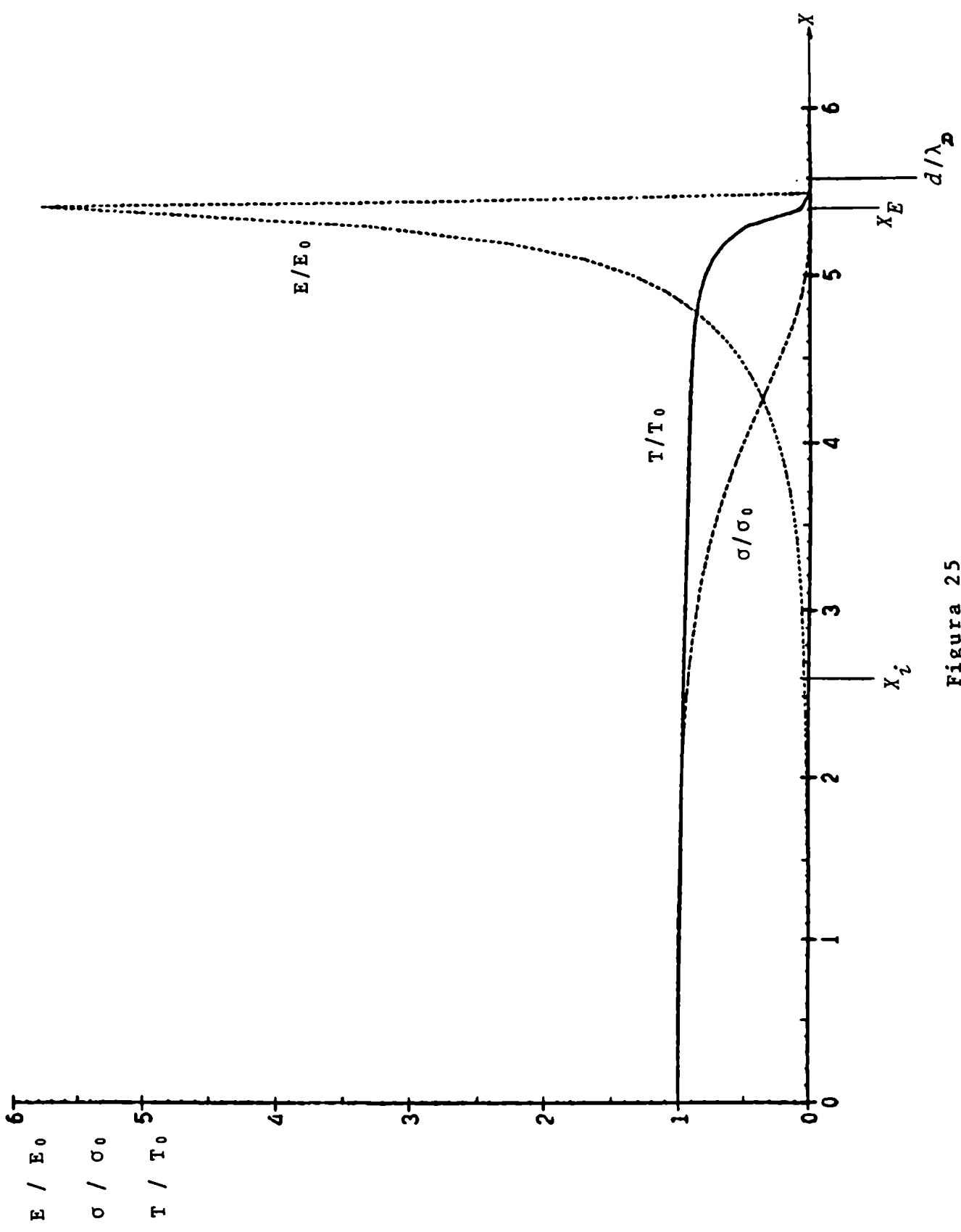


Figura 25

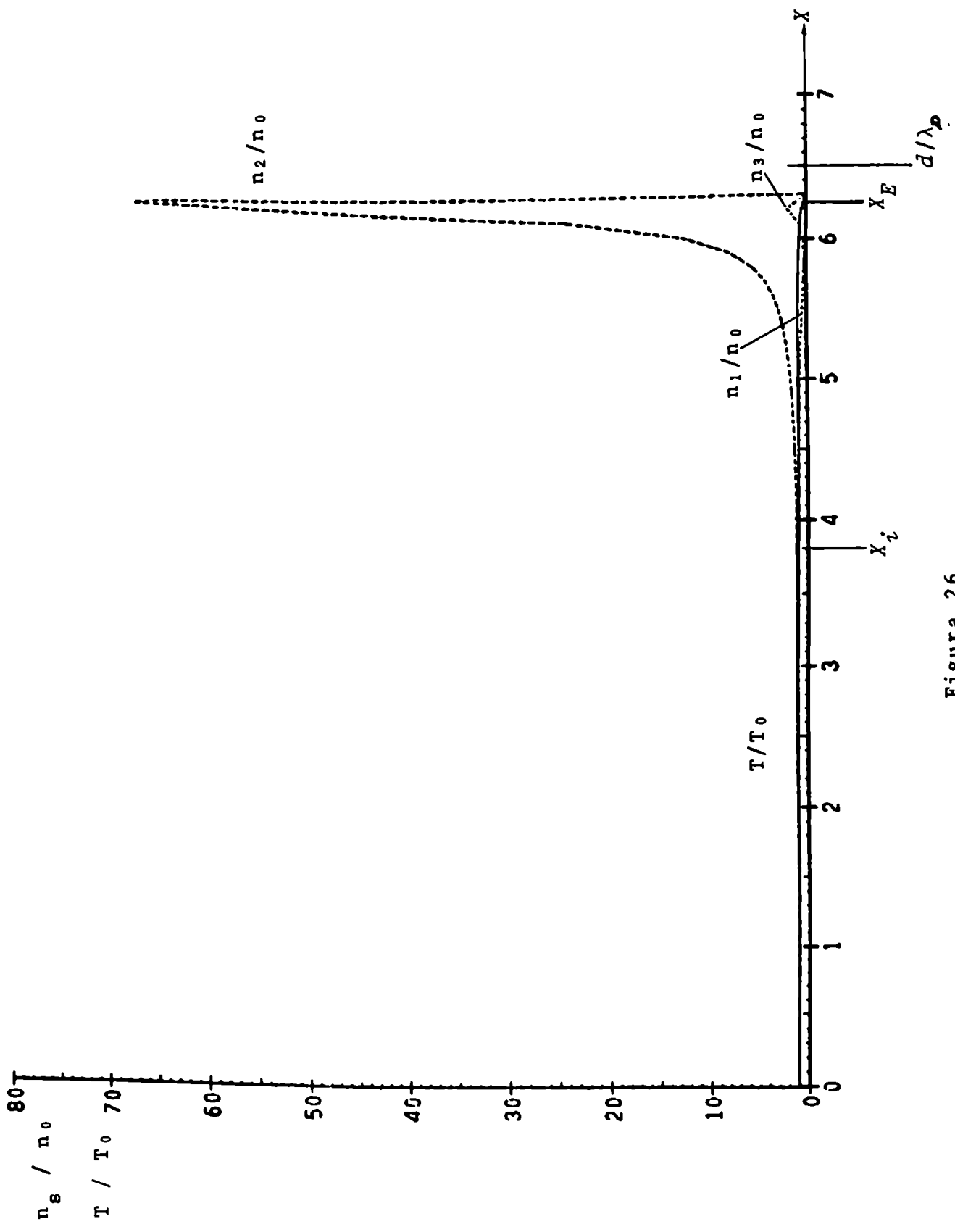


Figura 26

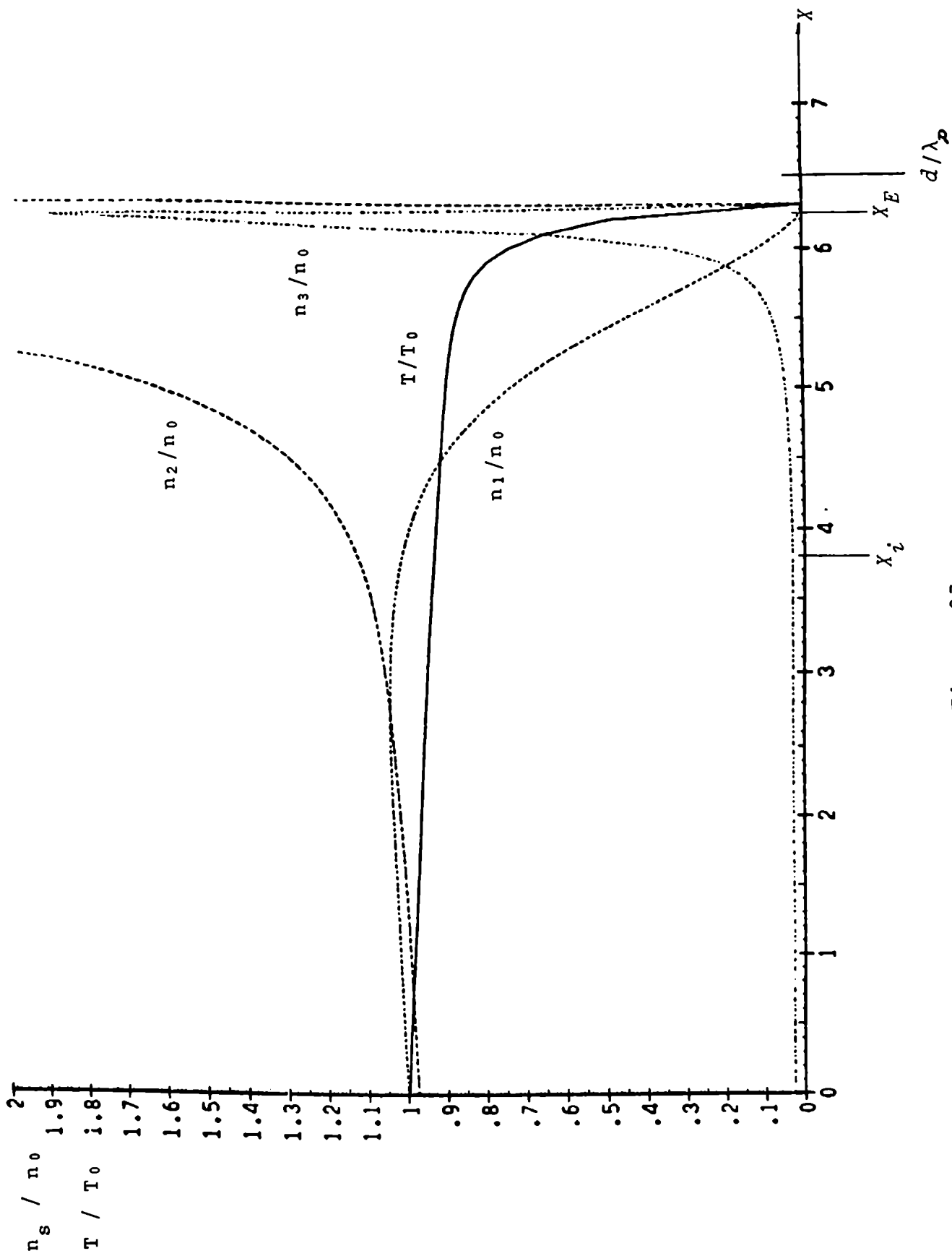


Figura 27

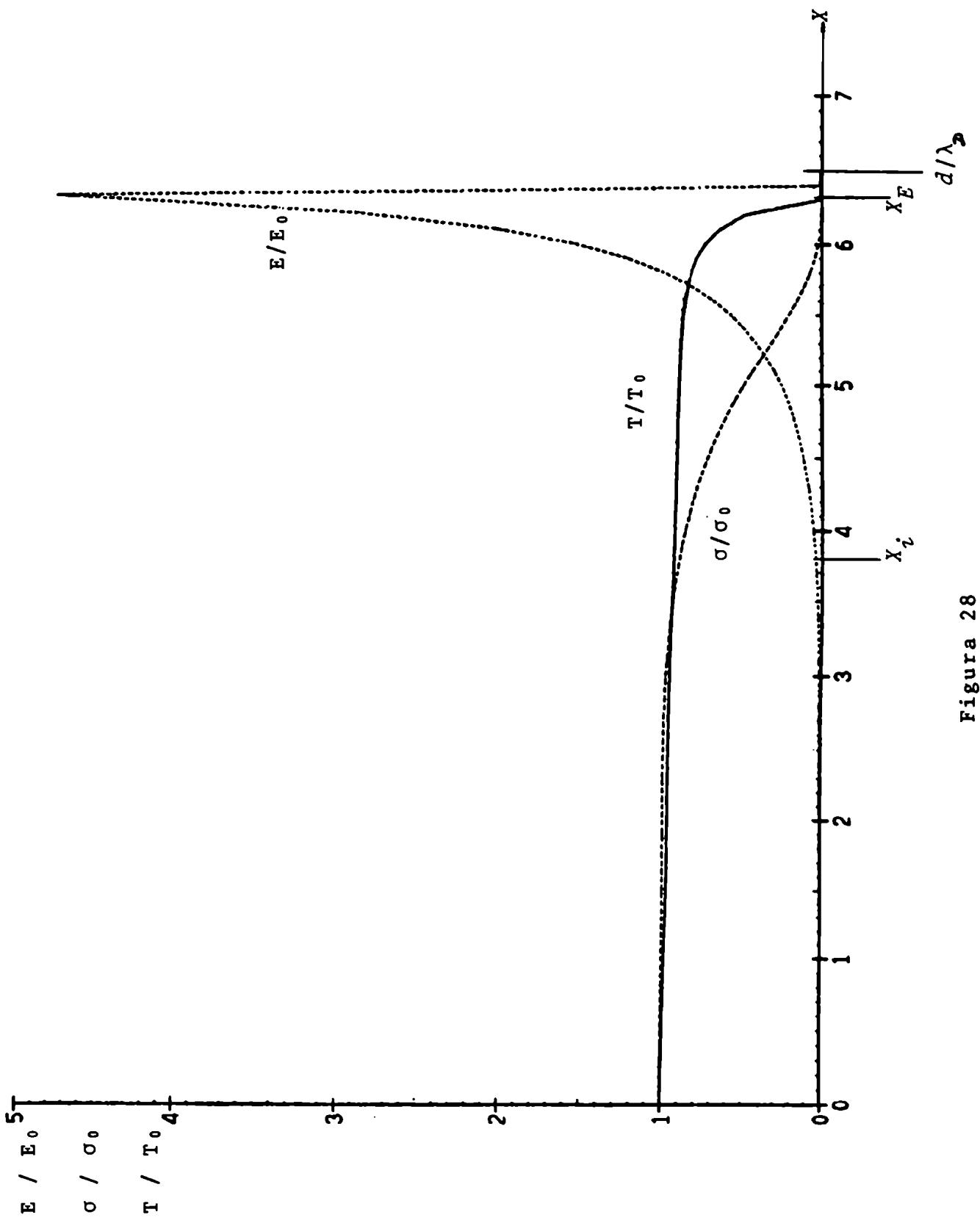


Figura 28

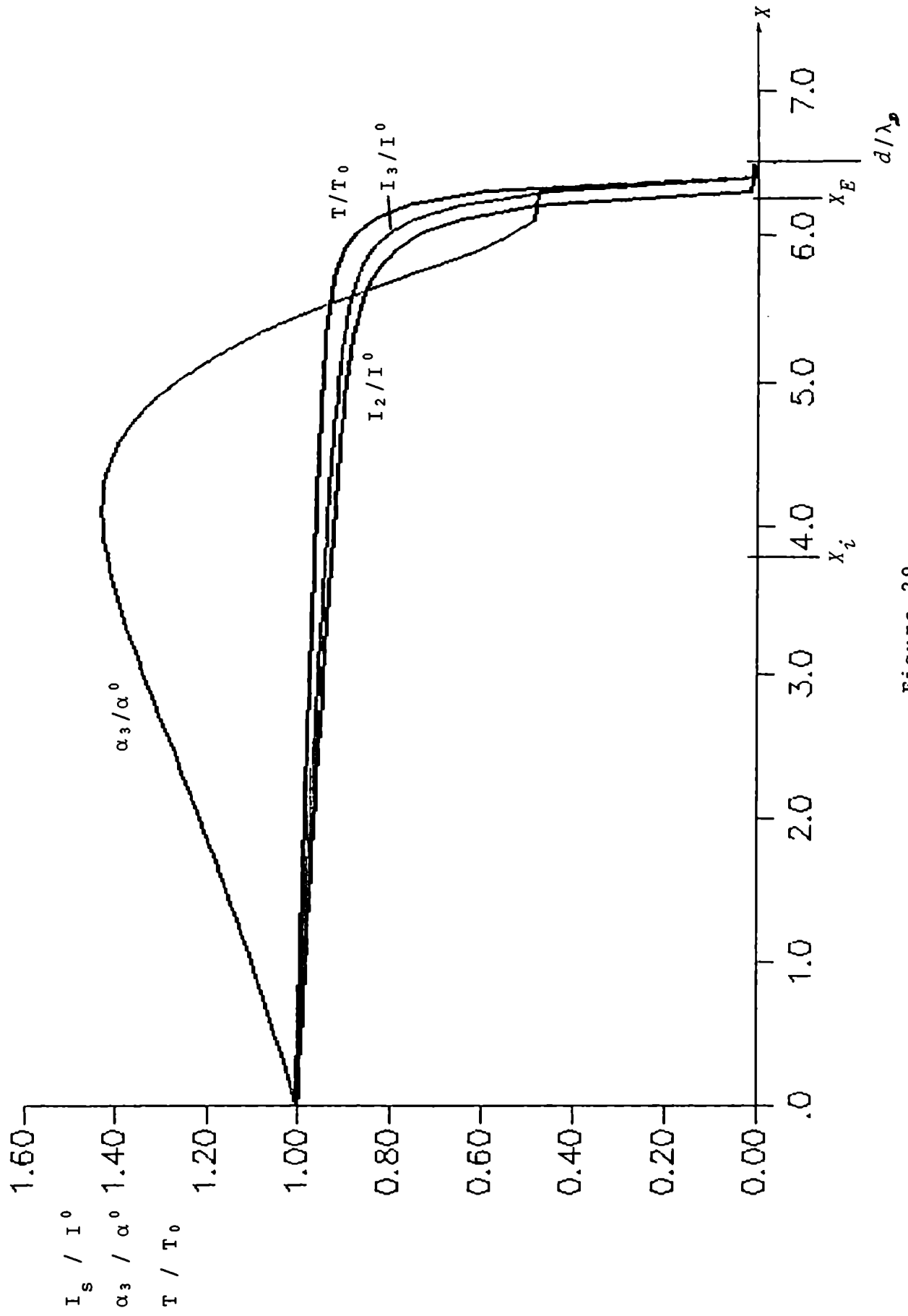


Figura 29

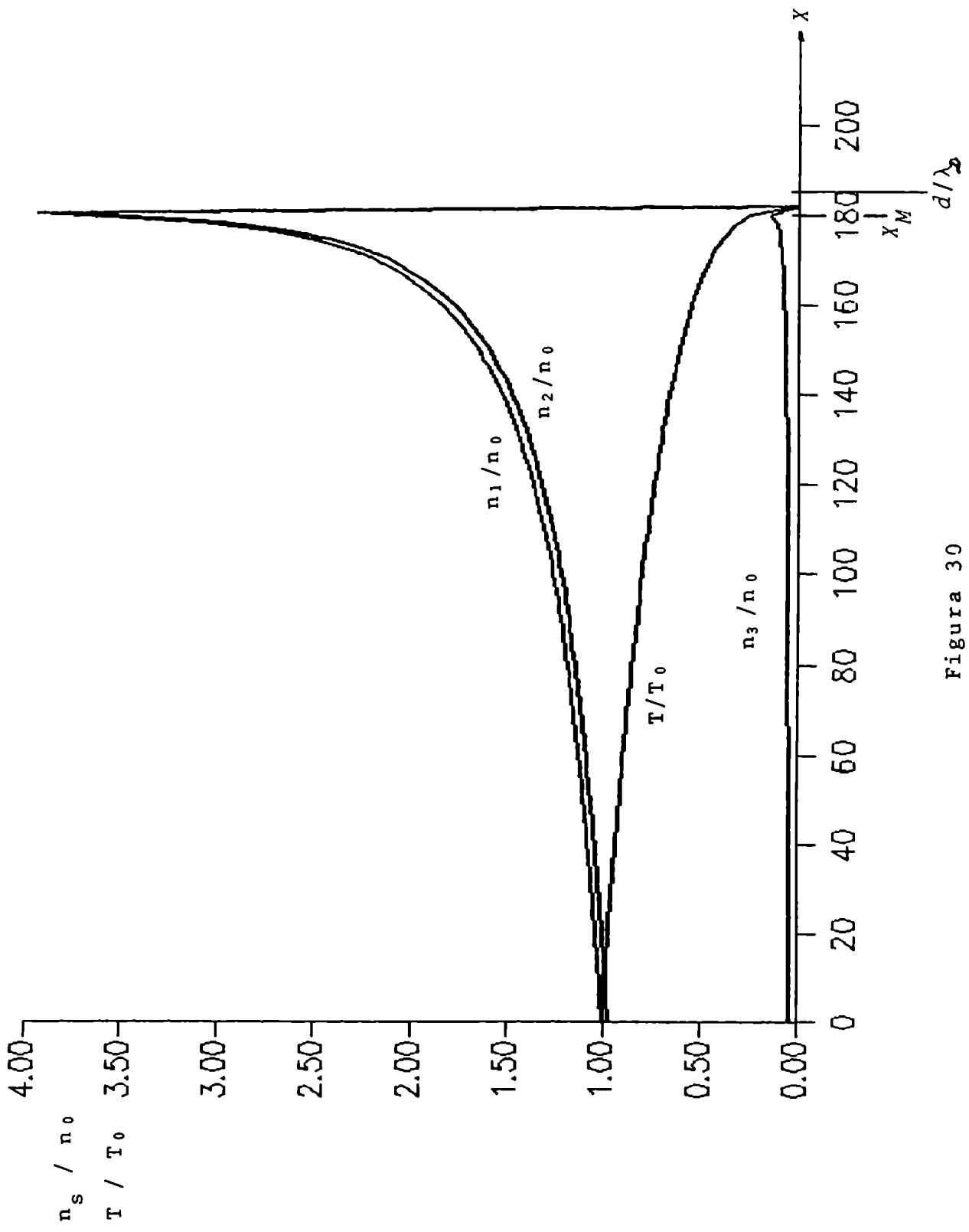


Figura 30

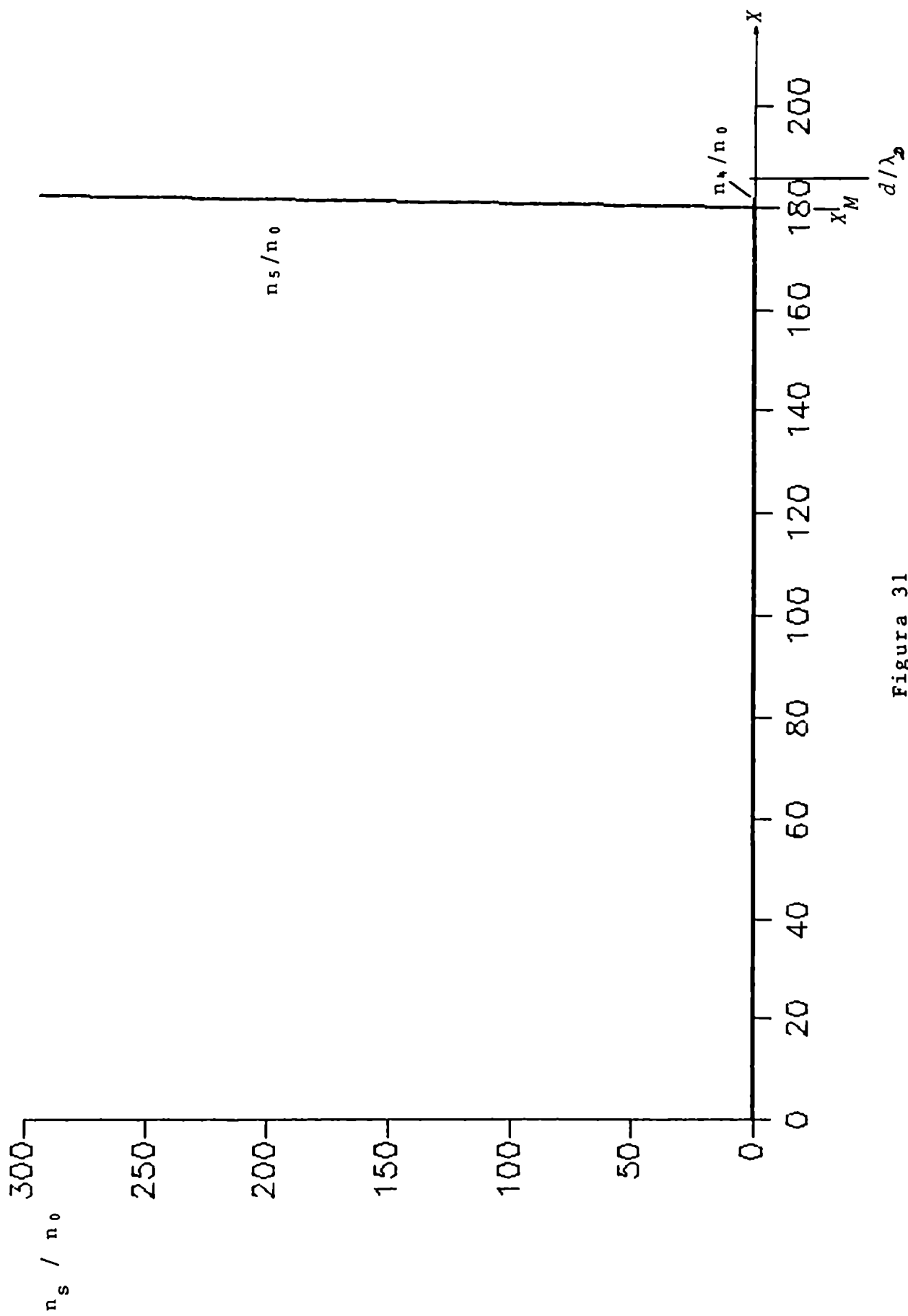


Figura 31

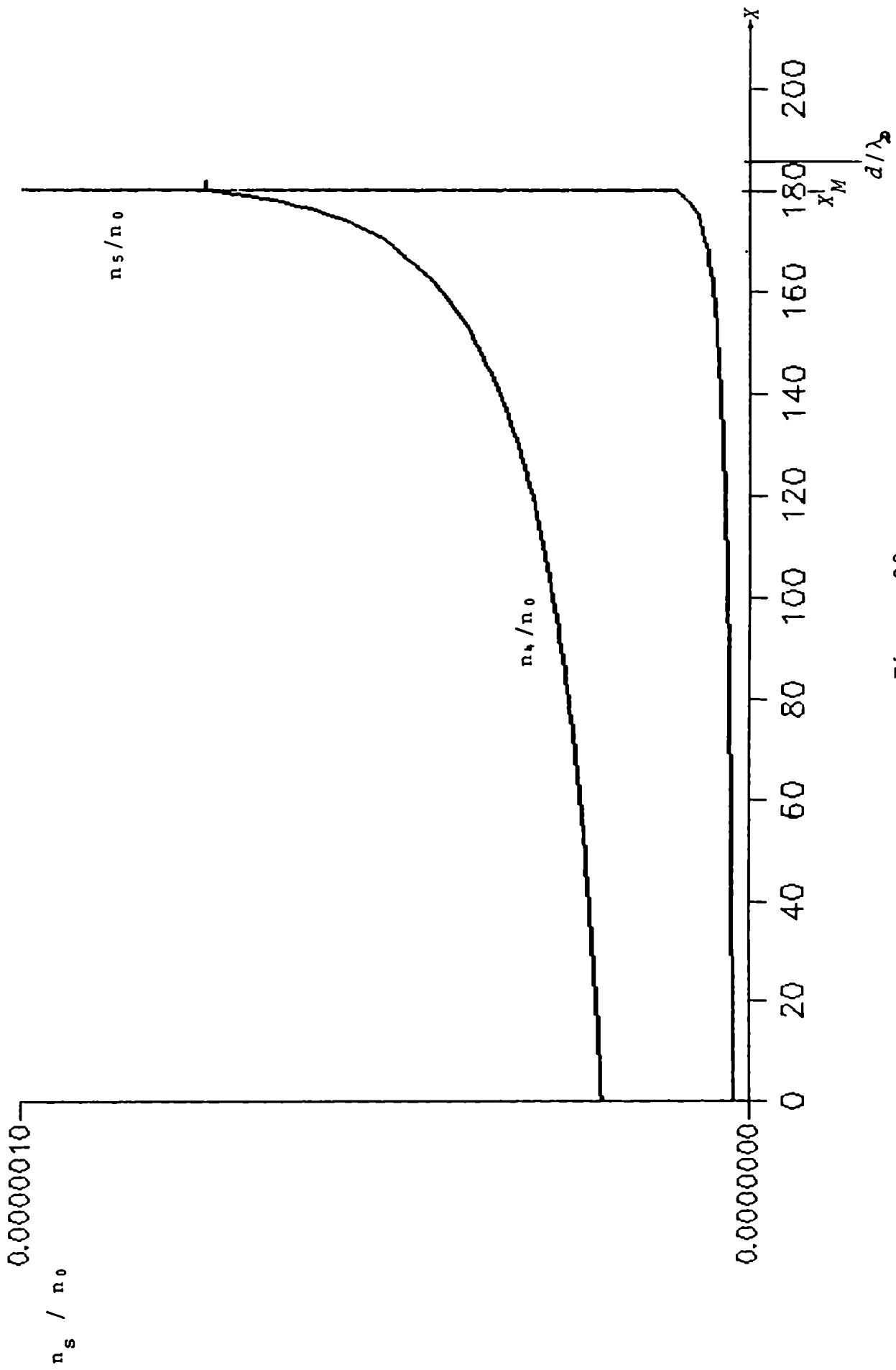


Figura 32

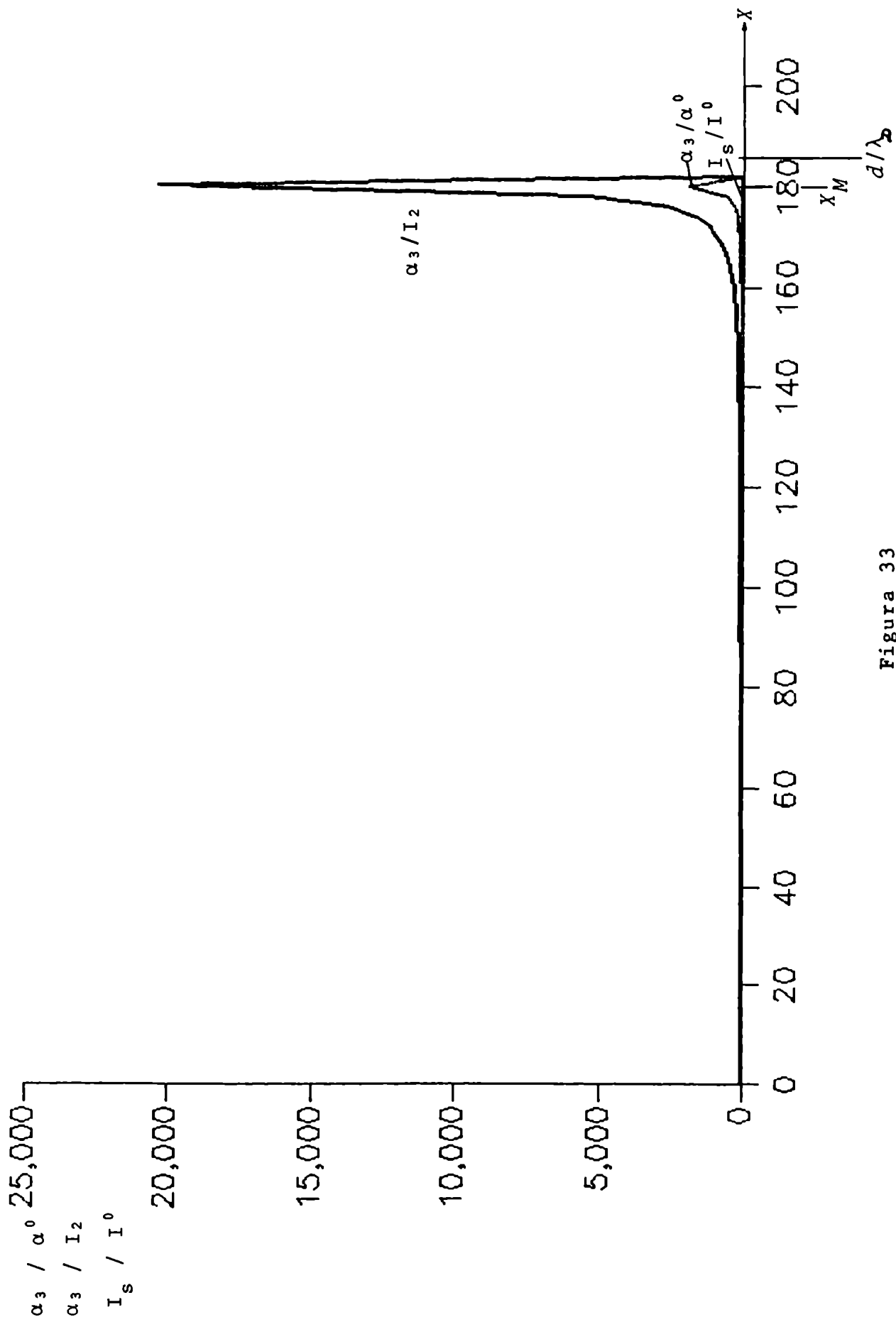


Figura 33

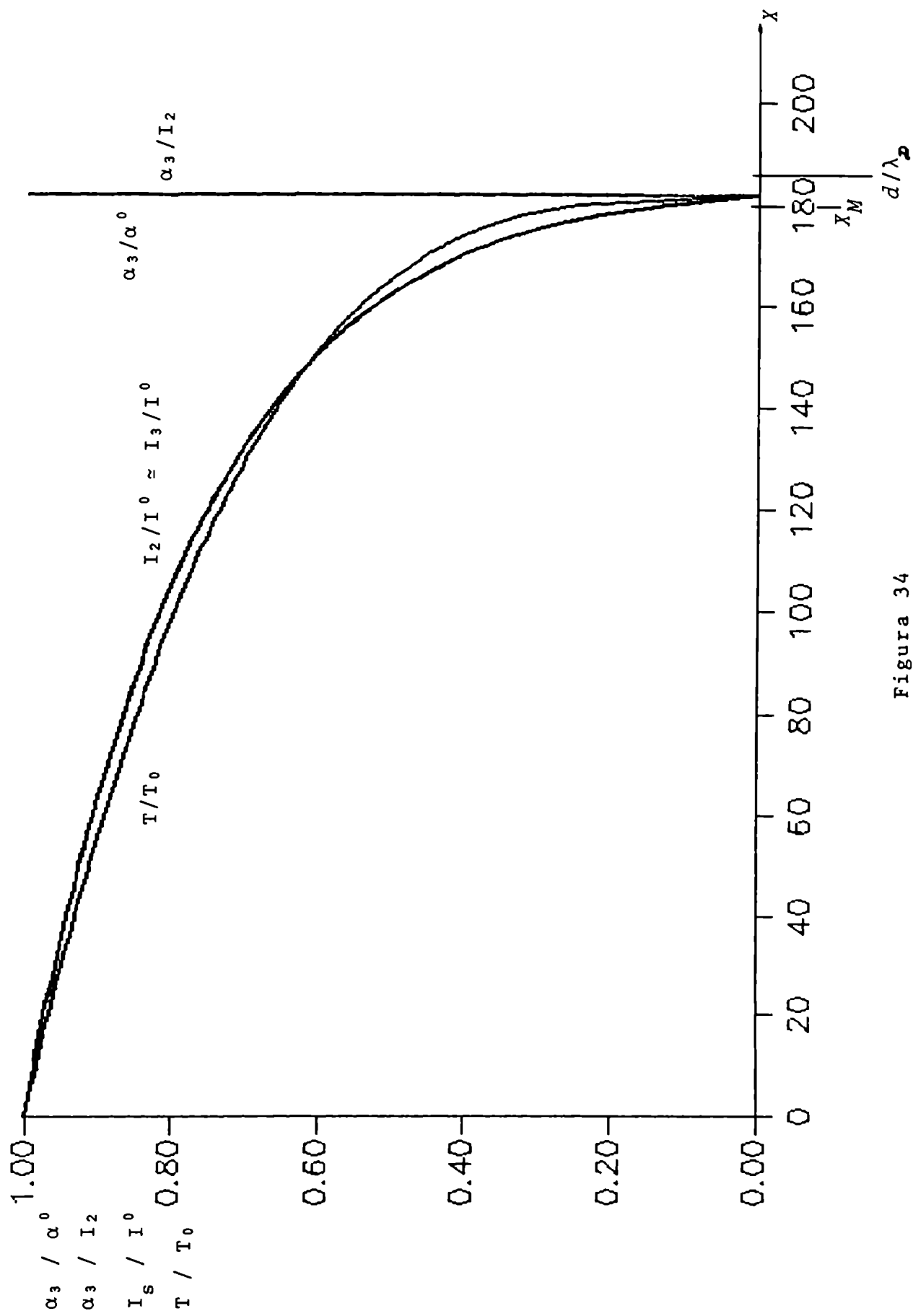


Figure 34

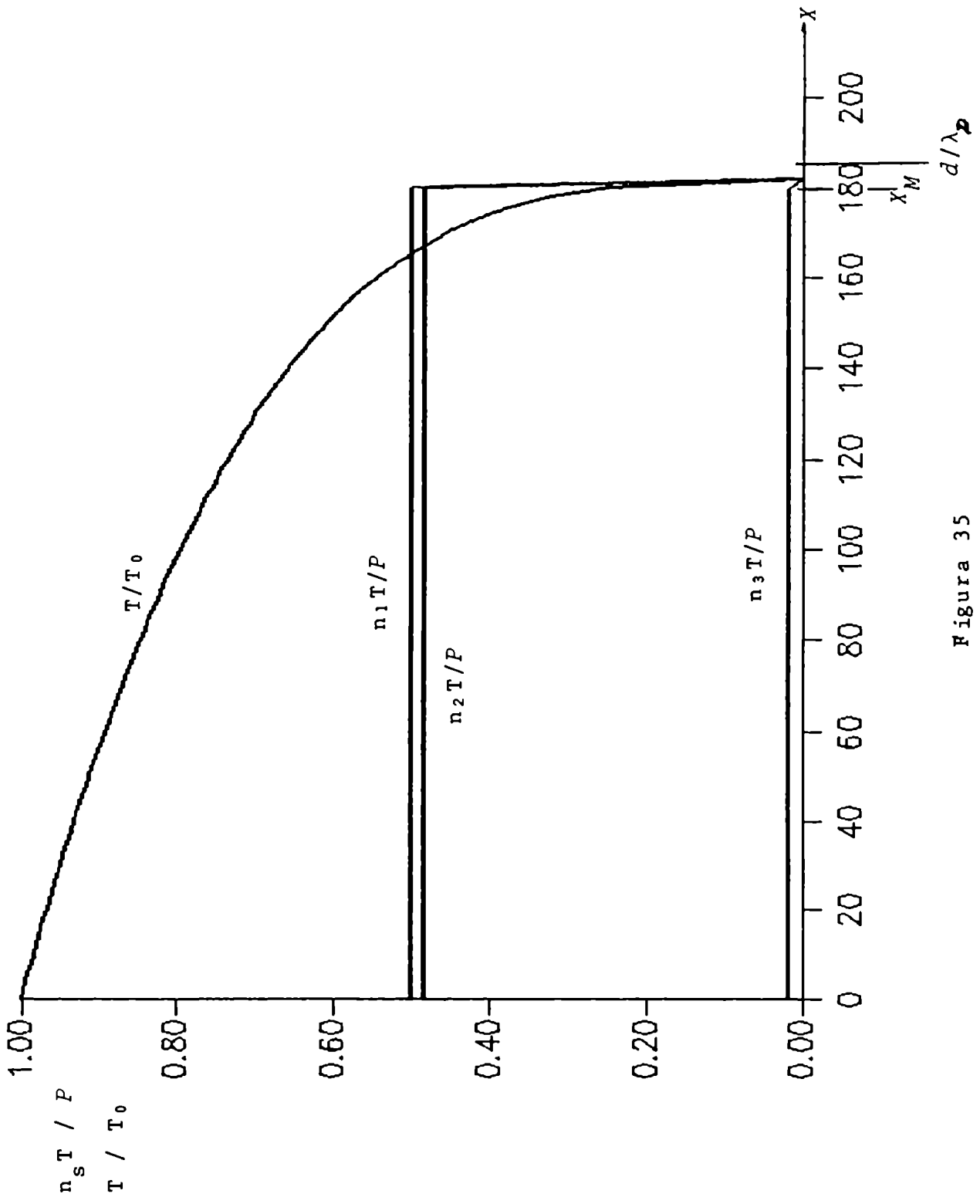


Figura 35

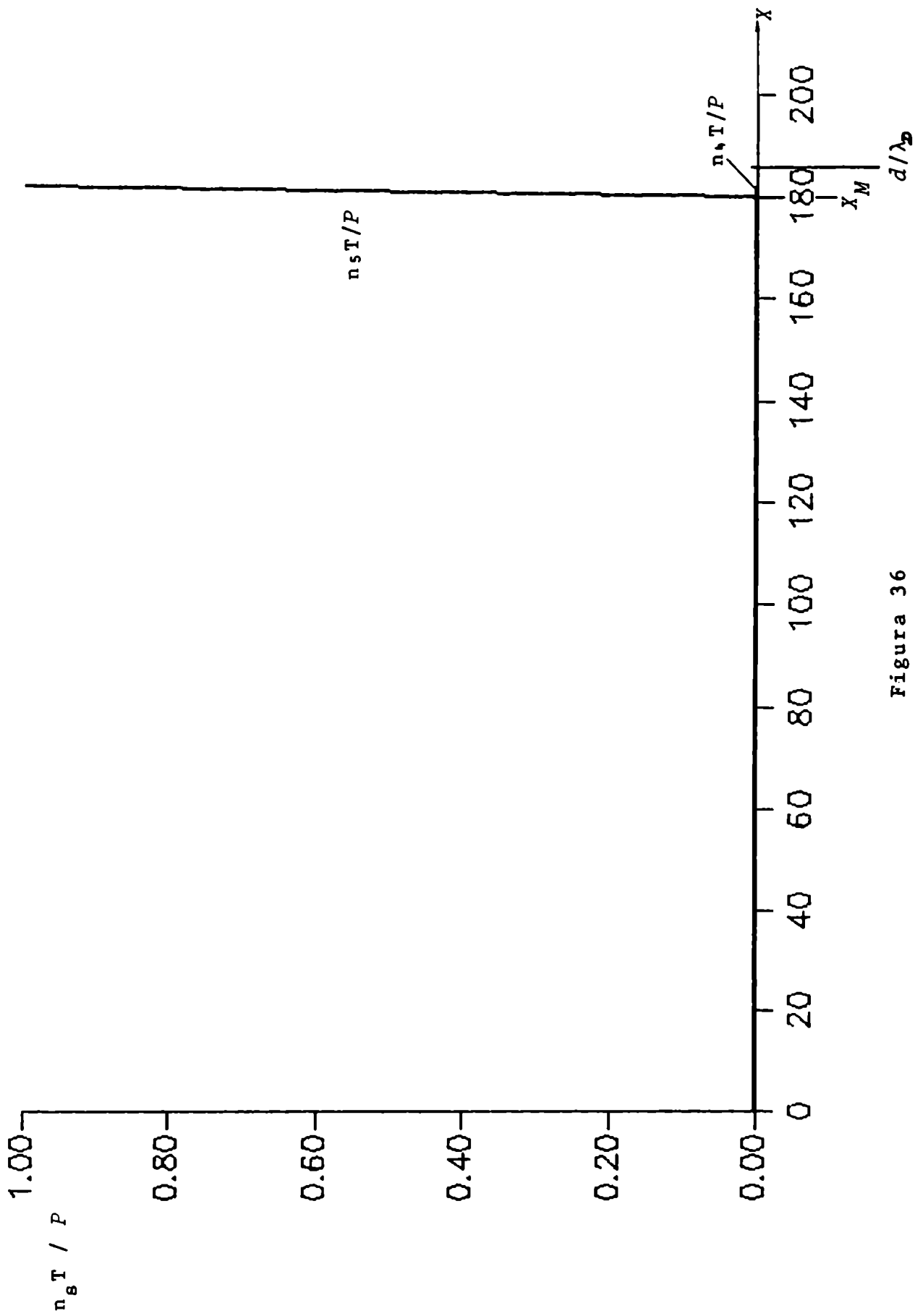


Figura 36

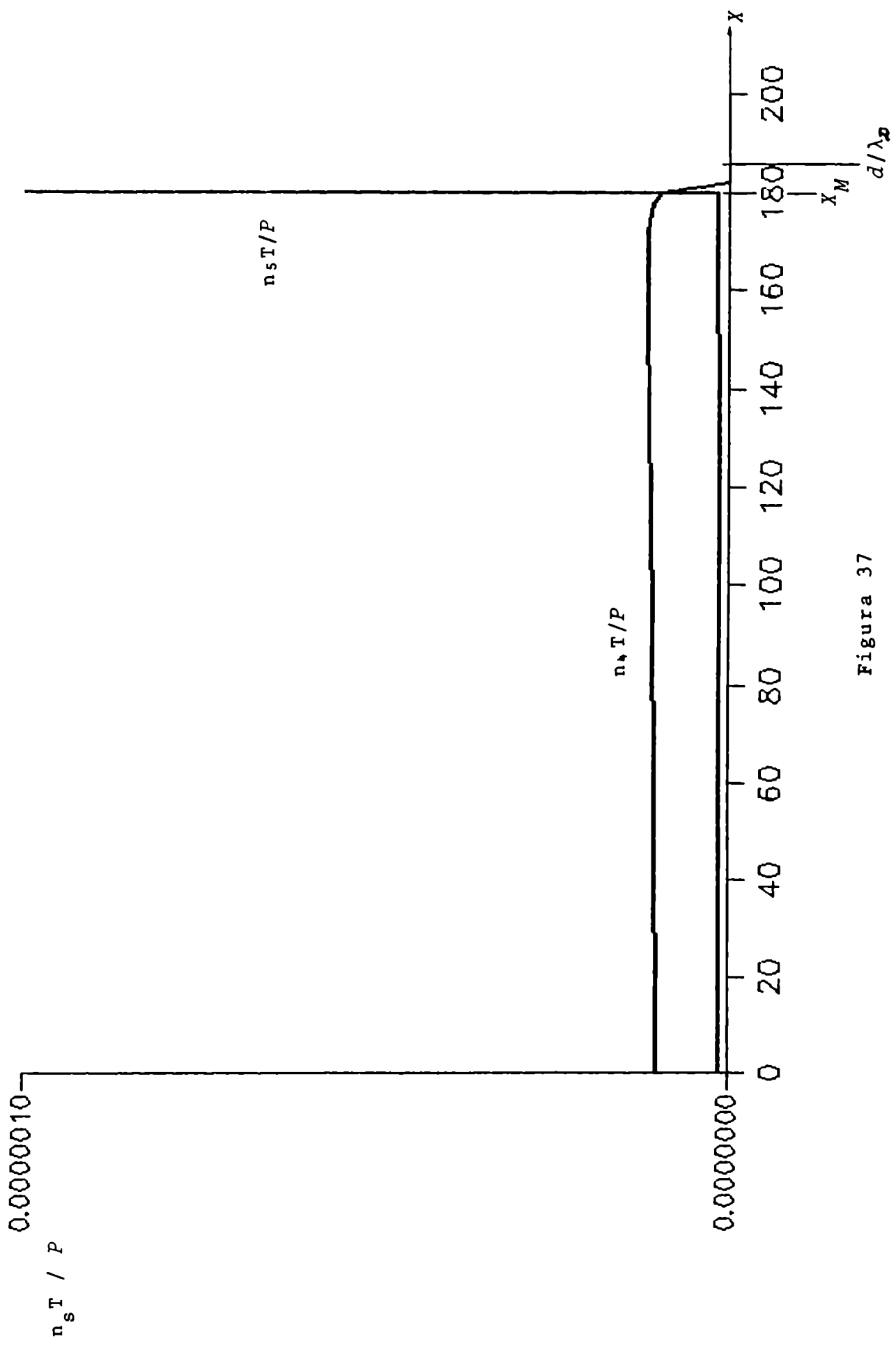


Figura 37

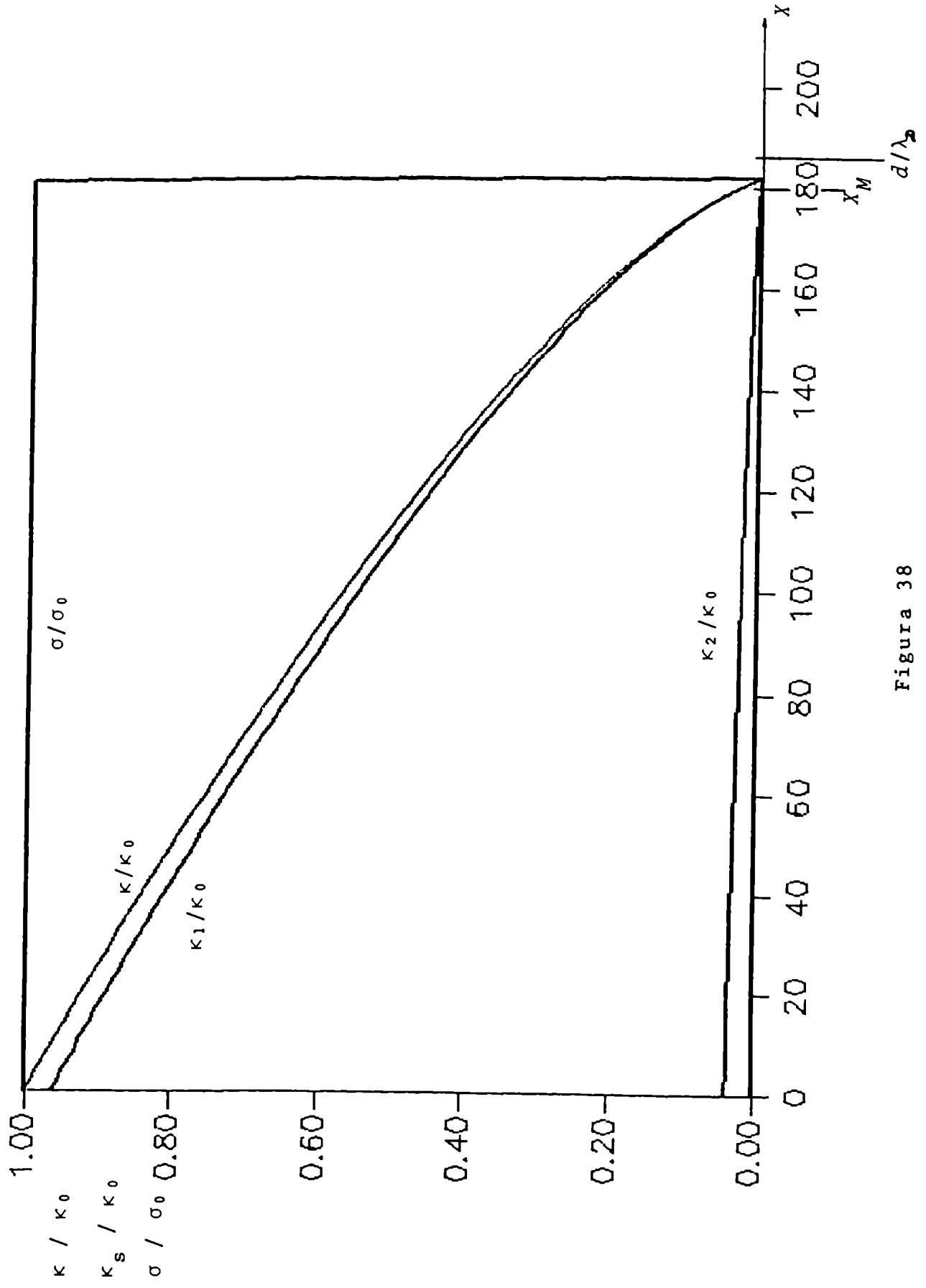


Figura 38

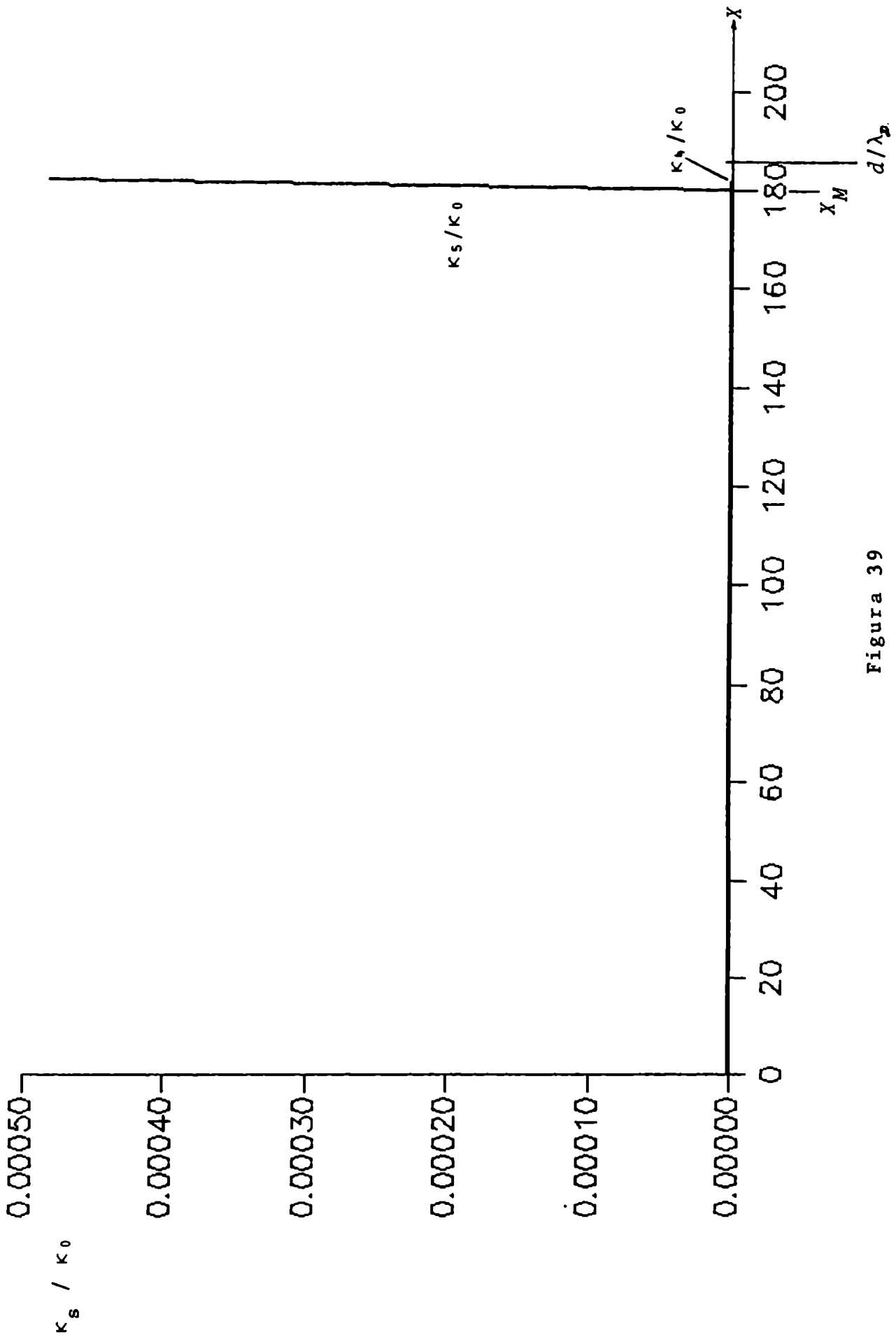


Figura 39

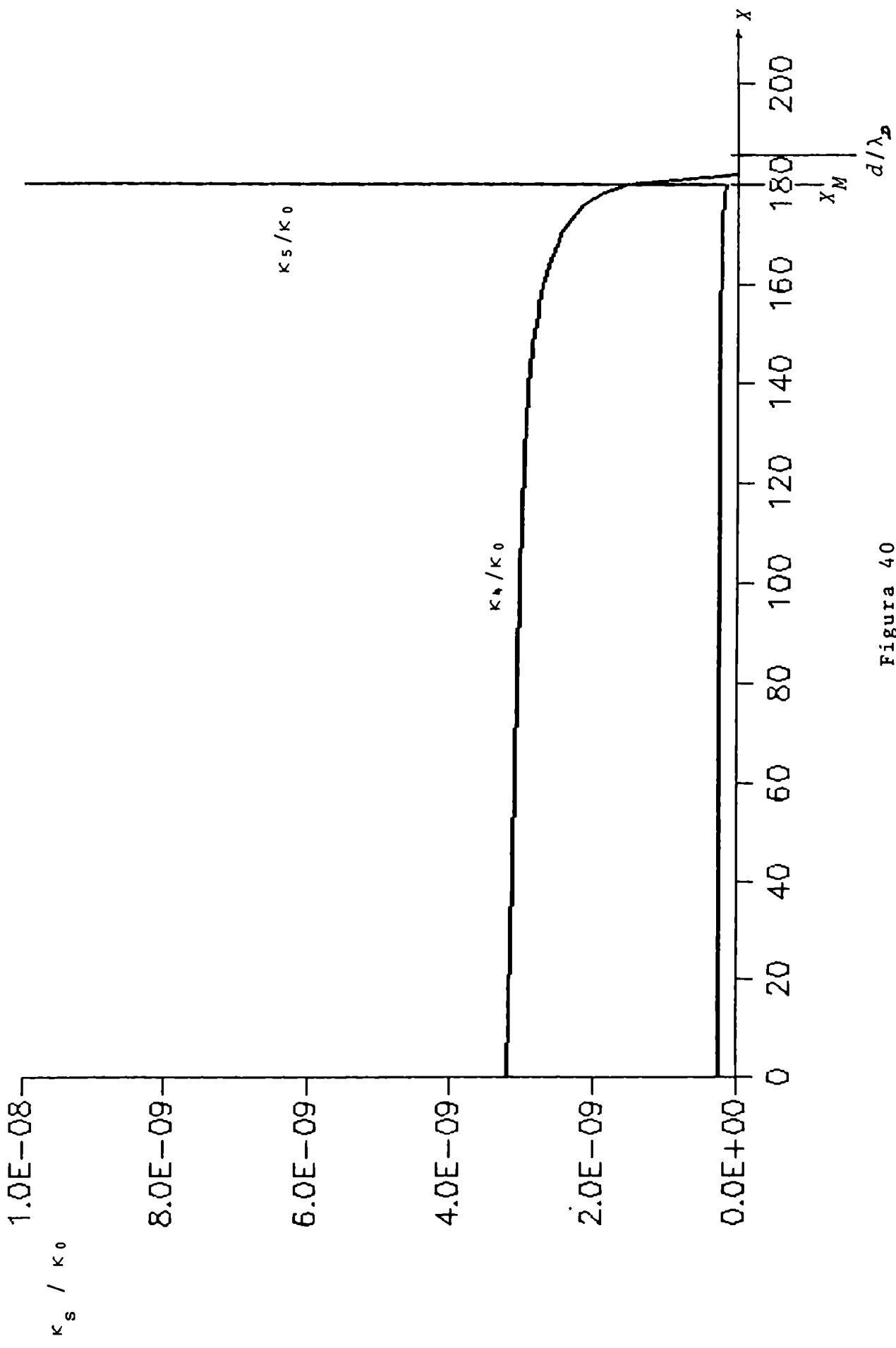


Figura 40

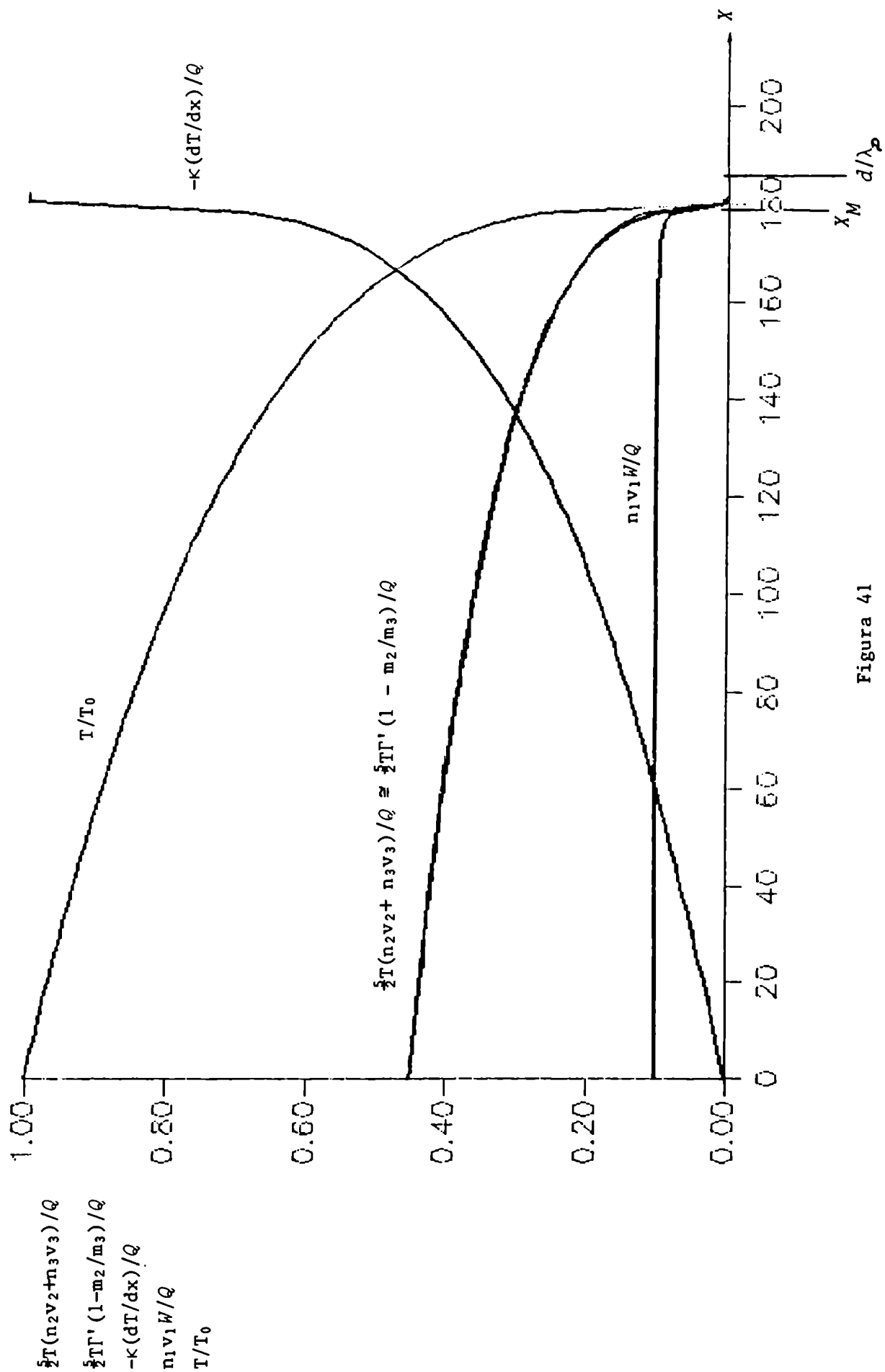


Figura 41