

## Tesis de Posgrado

# Fenómenos magnéticos en el plasma de la corona solar

Gómez, Daniel Osvaldo

1988

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Gómez, Daniel Osvaldo. (1988). Fenómenos magnéticos en el plasma de la corona solar. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2163\\_Gomez.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2163_Gomez.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Gómez, Daniel Osvaldo. "Fenómenos magnéticos en el plasma de la corona solar". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1988.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2163\\_Gomez.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2163_Gomez.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

FENOMENOS MAGNETICOS EN EL PLASMA DE LA CORONA SOLAR

Autor: Daniel Osvaldo Gómez\*

Director: Constantino Ferro Fontán

Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio

(\* Becario del CONICET)

Tesis presentada para optar al título de

Doctor en Ciencias Físicas

- 1988 -

- 2.163 -  
g.2

*a mi esposa Adriana, y a  
mi pequeña hija Melina*

## INDICE

	PAGINA
RESUMEN.....	1
1. INTRODUCCION.....	2
1.1. Descripción de la corona solar.....	2
1.2. Disipación de ondas MHD.....	8
1.3. Disipación Joule en hojas de corriente.....	10
1.4. Disipación Joule anómala.....	20
1.5. Disipación topológica.....	21
2. TURBULENCIA MAGNETOHIDRODINAMICA.....	30
2.1. Cascadas y espectros estacionarios de la turbulencia.....	30
2.2. Disipación de corrientes paralelas.....	53
2.3. Calentamiento por disipación de turbulencia MHD.....	61
3. ESTABILIDAD TERMICA.....	75
3.1. Equilibrio térmico y análisis lineales de estabilidad....	75
3.2. Análisis no lineales.....	89
3.3. Estudios globales de estabilidad.....	92
3.4. Estabilidad de ciclos límites.....	101
3.5. Bifurcaciones de Hopf en la corona solar.....	108
4. CONCLUSIONES.....	132
APENDICES.....	135
A. Condiciones de incompresibilidad.....	135
B. Expresiones de los coeficientes $\Lambda$ y $\Gamma$ .....	136
C. Estimación del ancho de la base.....	138
REFERENCIAS.....	140
AGRADECIMIENTOS.....	150

## RESUMEN

Se desarrolló un modelo de calentamiento de la corona solar, basado en la excitación y disipación de turbulencia magnetohidrodinámica (MHD). El campo de velocidades de la región convectiva del Sol, arrastra consigo las líneas del campo magnético que confina al plasma coronal, induciendo de esta manera un estado de turbulencia MHD en la corona. La no linealidad de este problema se pone de manifiesto a través de una cascada directa de energía, es decir un flujo estacionario de esta cantidad hacia la microescala, donde es disipada eficientemente por efecto Joule. La tasa de calentamiento que se obtiene como consecuencia de este modelo, es comparable a las tasas de enfriamiento del plasma coronal, resultando entonces razonable esperar que el sistema alcance un estado de equilibrio térmico.

Elaboramos un análisis de estabilidad lineal del mencionado equilibrio, modelando adecuadamente el acoplamiento entre el plasma coronal y el material cromosférico subyacente. Obtuvimos como resultado que el equilibrio es inestable para tasas de calentamiento inferiores a un cierto valor crítico, dando lugar a la aparición de un ciclo límite en el diagrama densidad-temperatura como equilibrio dinámico alternativo.

A través de un estudio no lineal tanto analítico como numérico, hallamos que los ciclos límites son soluciones estables a las cuales se llega atravesando una bifurcación de Hopf de tipo subcrítico. La existencia de ciclos límites brinda una explicación novedosa al ensanchamiento Doppler anómalo observado en líneas del espectro solar en el rango ultravioleta.

## 1. INTRODUCCION

### 1.1. DESCRIPCION DE LA CORONA SOLAR

Desde el descubrimiento hace alrededor de cuarenta años de una corona solar tenue ( $10^9 \text{ cm}^{-3}$ ) de alta temperatura ( $10^6 \text{ K}$ ), innumerables estudios observacionales y modelos teóricos han sido realizados buscando develar los mecanismos físicos responsables del calentamiento de dicha región.

En 1960 fue obtenida la primera fotografía del Sol en rayos X (Friedman 1963). Desde entonces gran cantidad de observaciones desde satélites han sido realizadas en rayos X, llegándose a la notable conclusión de que los plasmas calientes y tenues son sorprendentemente frecuentes en el cielo. Dichas observaciones corresponden a los más diversos objetos astronómicos, tales como estrellas tempranas y tardías (Vaiana et al. 1981), discos de acreción (Galeev et al. 1979, Kuperus y Ionson 1985), nubes interestelares (Rosner y Hartquist 1979), galaxias (Sturrock y Stern 1980) o jets galácticos y extragalácticos (Chouduri y Königl 1986). Tanto en estos fenómenos como en el caso específico de la corona solar, la emisión del continuo en rayos X corresponde a bremsstrahlung térmico de un plasma cuya temperatura es aproximadamente de  $10^6 \text{ K}$ . ¿Cómo se explica que una estrella como el Sol, cuya atmósfera emite un espectro continuo correspondiente a un cuerpo negro de 6000 K, posea una envoltura exterior varios cientos de grados más caliente? Este es uno de los interrogantes centrales en el estudio de la física solar, hacia cuya respuesta se ha avanzado apreciablemente en los últimos años.

La atmósfera solar esta constituida por tres regiones con características físicas muy diferentes (ver Figura 1). La región más profunda es la fotósfera, que es tambien la más densa ( $10^{17} \text{ cm}^{-3}$ , 6000 K) y

opaca y emite la mayor parte de la radiación solar. Debajo de la fotosfera se halla la región convectiva, en la cual la energía generada por procesos nucleares en el interior del Sol es transportada al exterior a través de un campo de velocidades turbulento debido a que el transporte radiativo resulta insuficiente en esta zona. Sobre la fotosfera se encuentra la cromósfera, que es transparente y de menor densidad ( $10^{11} \text{ cm}^{-3}$ ), siendo la temperatura en esta región una función que crece suavemente con la distancia al centro del Sol ( $10^4 \text{ K}$ ). Finalmente se halla la corona, que es la región más tenue ( $10^9 \text{ cm}^{-3}$ ) y caliente ( $10^6 \text{ K}$ ), conectada con la

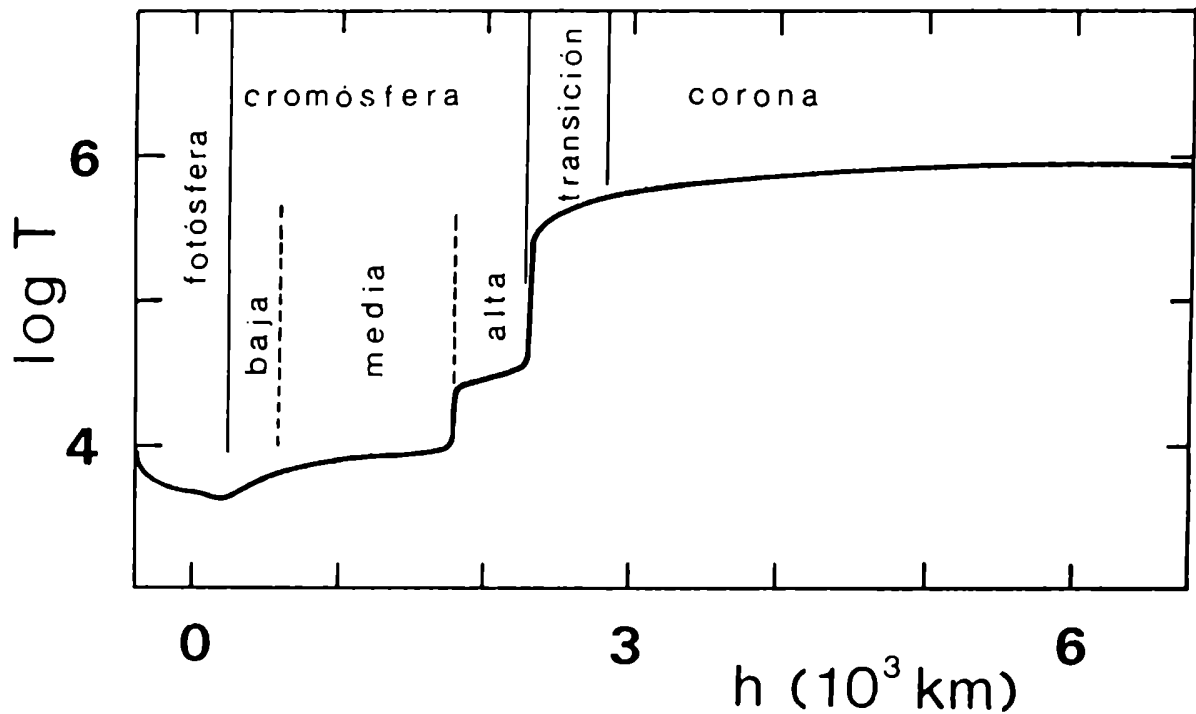


FIGURA 1: Variación de temperatura con la altura en la atmósfera solar (Athay 1976).

cromósfera a través de una delgada región de transición (300 km) donde tanto la temperatura como la densidad varían en forma prácticamente discontinua, aunque conservando la presión espacialmente constante en esta zona. La temperatura y densidad coronales decrecen muy lentamente con la distancia al Sol, alcanzando en la órbita terrestre valores típicos de  $4 \cdot 10^5 \text{K}$  y  $10 \text{ cm}^{-3}$  respectivamente, con una velocidad hidrodinámica aproximadamente radial de  $400 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

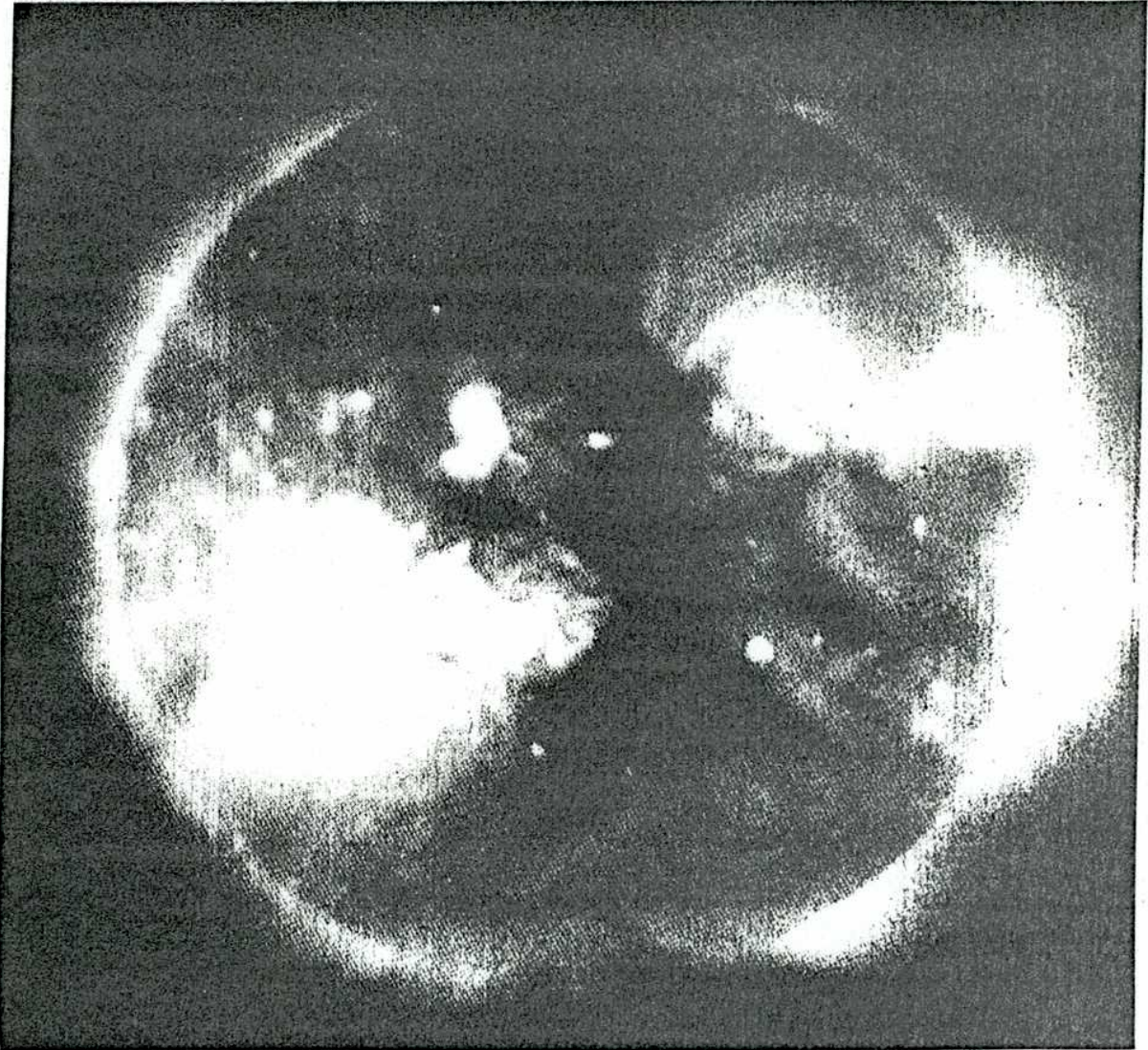
Las primeras teorías se basaban en el calentamiento coronal por disipación de ondas acústicas generadas en la región convectiva del Sol (Kuperus, Ionson y Spicer 1981 y las referencias allí citadas). Estos modelos presuponían simetría esférica y estacionariedad, y esencialmente proponían que los movimientos turbulentos de la región convectiva excitaban ondas acústicas de baja amplitud que, al atravesar zonas de densidades cada vez menores, se convertían en trenes de ondas de choque. Como es sabido, las ondas de choque transfieren su energía por efectos viscosos a energía térmica del fluido. Si bien desde el punto de vista teórico resulta un mecanismo de calentamiento bastante plausible, mediciones de flujo de energía acústica hacia la corona demostraron que resulta insuficiente para balancear las pérdidas radiativas coronales (Athay y White 1978). En rigor, las mediciones corresponden a anchos Doppler no térmicos de líneas espectrales del rango ultravioleta. Bajo la hipótesis de que dicho ensanchamiento es causado por el campo de velocidades asociado a ondas acústicas, se estimó el correspondiente flujo de energía en  $10^4 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ , el cual es más de un orden de magnitud inferior a los flujos conductivo o radiativo. No obstante, sigue resultando un candidato viable de calentamiento cromosférico.

El advenimiento a fines de la década del sesenta de detectores de mejor resolución en rayos X blandos, implicó un cambio trascendental en la



concepción que se tenía acerca de la composición de la corona solar. La imagen de un material espacialmente uniforme y con solo inhomogeneidades incidentales, debió ser reemplazada por una vasta jerarquía de estructuras de muy diverso tamaño y morfología como consecuencia de la presencia de campos magnéticos que confinan al plasma dominando la dinámica del mismo. La existencia de estas estructuras del plasma coronal y su estrecha vinculación con el campo magnético, son seguramente el hallazgo observacional más relevante desde el descubrimiento mismo de la corona solar. Estas observaciones han permitido entre otras cosas determinar, con cierta resolución espacial y temporal, la distribución de temperatura y densidad del plasma coronal (Landini et al. 1975, Davis et al. 1975). La distribución de campo magnético coronal se infiere a partir de magnetogramas que contienen información del campo magnético fotosférico a lo largo de la línea visual. Bajo la suposición que el campo coronal es esencialmente potencial (es decir generado por corrientes que no circulan por la corona), se resuelve la ecuación de Laplace con las condiciones de contorno impuestas por los magnetogramas (Krieger et al. 1971, Vaiana et al. 1973, Poletto et al. 1975). La superposición de estos campos magnéticos potenciales a las estructuras de rayos X ya mencionadas muestra en general una marcada coincidencia espacial y temporal (Poletto et al. 1975, Vaiana y Rosner 1978). Para valores típicos de densidad ( $10^9 \text{ cm}^{-3}$ ), temperatura ( $10^6 \text{ K}$ ) y campo magnético (10-100 G) coronales, se obtiene un valor para el parámetro  $\beta$  (cociente entre la presión del gas y la presión magnética) muy inferior a la unidad. Esto indica que el campo magnético ambiente es en principio capaz de confinar al plasma coronal, explicando de esta manera la coincidencia entre las estructuras magnéticas y de rayos X.

Observaciones realizadas desde el satélite Skylab (Figura 2) muestran que existen dos tipos de regiones de naturaleza muy diferente: regiones



*FIGURA 2: Fotografía del Sol en rayos X. Las regiones brillantes corresponden a estructuras magnéticas cerradas, mientras que las zonas oscuras son estructuras abiertas por las que escapa el viento solar.*

brillantes en rayos X que corresponden a estructuras magnéticas cerradas o loops y regiones oscuras vinculadas a estructuras magnéticas abiertas, también llamadas agujeros coronales. La Figura 3 muestra esquemáticamente ambos tipos de estructuras como así también los correspondientes valores

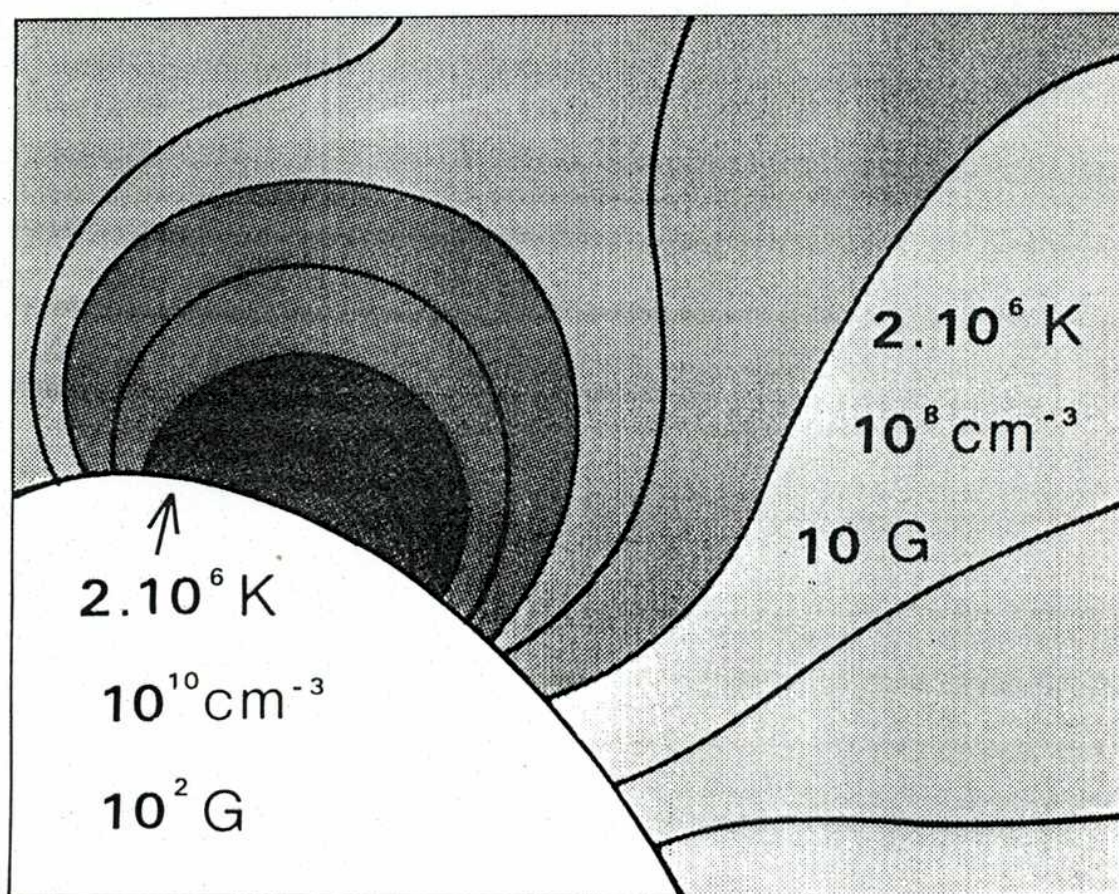


FIGURA 3: Estructuras magnéticas abiertas y cerradas. Se indican valores característicos de campo magnético, densidad y temperatura en cada región.

típicos de temperatura, densidad y campo magnético. Nótese que las temperaturas de estas regiones resultan comparables a pesar de su diferente intensidad en rayos X. Esto se debe a que la intensidad de emisión en rayos X es proporcional al cuadrado de la densidad del plasma por tratarse de procesos de bremsstrahlung. Se ha observado una estrecha correlación entre la detección de componentes de alta velocidad del viento solar y la posición de agujeros coronales en el disco solar, lo cual indica que dichas componentes rápidas se originan en los agujeros (Schatten, Wilcox y Ness 1969) y viajan a lo largo de las líneas de campo magnético.

## 1.2. DISIPACION DE ONDAS MHD

Todo lo expuesto precedentemente sugiere que debería existir un fenómeno físico capaz de ceder energía al plasma confinado en los loops y energía e impulso al viento solar, y en el que además el campo magnético desempeñe un rol protagónico. En ese sentido se han propuesto varios modelos basados en la disipación de ondas de Alfvén generadas en la región convectiva del Sol (Kuperus, Ionson y Spicer 1981). Como ya hemos dicho, las ondas acústicas no representan un mecanismo viable de calentamiento coronal y, por las mismas razones, tampoco resultan viables los modos magnetohidrodinámicos compresibles (Uchida y Kaburaki 1974, Wentzel 1974, 1976). En cambio las ondas de Alfvén, que corresponden a una perturbación netamente transversal al campo magnético, sí son capaces de propagarse hacia la corona una vez que han sido generadas en la región convectiva. La velocidad de propagación de estas ondas es de aproximadamente  $2000 \text{ km.s}^{-1}$  tanto en los loops como en los agujeros coronales. Si bien no se han detectado estas ondas en forma directa, se han medido fluctuaciones del

campo de velocidades que podrían explicarse como superposición de trenes de ondas de Alfvén. De ser así, los valores cuadráticos medios de  $25 \text{ km.s}^{-1}$  observados en loops (Cheng, Doschek y Feldman 1979) y de  $40 \text{ km.s}^{-1}$  medidos en agujeros coronales (Esser et al. 1986), representarían una cota superior para la amplitud del campo de velocidades asociado a una onda de Alfvén. El flujo de energía que transportan estas ondas desde la región convectiva es en teoría suficiente, tanto para las estructuras cerradas como para el viento solar. Pero el problema estriba en que los procesos clásicos de disipación (viscosidad y efecto Joule) son muy ineficientes en el plasma coronal, de manera que la onda se propaga en el plasma sin sufrir una atenuación significativa. Hollweg (1982, 1983) investigó la posibilidad de que las ondas de Alfvén que se propagan en tubos magnéticos degeneren en trenes de ondas de choque al atravesar la cromósfera. El calentamiento coronal que se obtendría por efectos disipativos en dichas ondas de choque solo sería suficiente en regiones de muy baja intensidad magnética. Heyvaerts y Priest (1983) sugirieron que la disipación de ondas de Alfvén en zonas de fuertes gradientes transversales de campo magnético podría ser un mecanismo eficiente de calentamiento. Puesto que la velocidad de propagación depende de la intensidad magnética, los frentes de onda se corrugan fuertemente al atravesar tales regiones, originando estructuras de escala espacial muy pequeña donde tanto la disipación viscosa como óhmica resultan muy eficientes.

En este mismo sentido aunque con un enfoque más global, Ionson (1978, 1982) elaboró un modelo en el cual se plantea una interesante analogía entre un loop coronal cuyo campo magnético es forzado por la convección subfotosférica y un circuito RLC. Ionson mostró que las ecuaciones magnetohidrodinámicas (MHD) linealizadas e integradas sobre el volumen del loop, se reducen a la ecuación de un circuito RLC para la corriente total

que circula por dicho loop, donde la resistencia está vinculada a la viscosidad y disipación óhmica del plasma y la fuerza electromotriz corresponde a la inducción de corrientes debida a los movimientos de la región convectiva. La frecuencia de resonancia de este circuito corresponde a la de una onda de Alfvén de longitud de onda comparable al tamaño del loop. En virtud de esta analogía y suponiendo conocido el espectro de potencias de la turbulencia subfotosférica (fuerza electromotriz), es posible derivar una tasa de calentamiento coronal que es esencialmente independiente de los detalles del proceso de disipación, lo cual es característico de circuitos resonantes con alto factor de calidad. Cabe aclarar aquí que a pesar del enfoque global de este modelo, el problema físico es esencialmente inhomogéneo y la condición de resonancia solo se satisface en regiones muy delgadas en las cuales tiene lugar la mayor parte de la disipación. Como se ve, la propiedad de disipar eficientemente energía en zonas de tamaño muy reducido es común a todos los procesos de calentamiento por ondas. El inconveniente que esto presenta es que no resulta claro como fluye la energía térmica generada en estas pequeñas regiones hacia el grueso del plasma, dado que el flujo conductivo es fuertemente inhibido en las direcciones perpendiculares al campo magnético. En consecuencia no es sencillo para estos modelos predecir adecuadamente la intensidad de radiación emitida en rayos X.

### 1.3. DISIPACION JOULE EN HOJAS DE CORRIENTE

Un mecanismo de calentamiento de loops coronales que está siendo activamente estudiado y que aún no hemos citado es la disipación de corrientes estacionarias por efecto Joule. En virtud de que el parámetro  $\beta$

de la región convectiva es mayor que la unidad, la dinámica es gobernada por el campo de velocidades turbulento, generando una compleja deformación de las líneas de campo magnético que emergen hacia la corona, con la correspondiente inducción de corrientes eléctricas. Si el tiempo característico de la convección subfotosférica ( $10^3$  seg.) resulta muy inferior al tiempo de tránsito de una onda de Alfvén a lo largo del loop (tiempo de Alfvén), es razonable pensar en trenes de ondas que son continuamente generados por los movimientos turbulentos, propagándose hacia la corona en la misma forma en que sucede en los agujeros coronales. En los loops cabe además la posibilidad de que se establezcan ondas estacionarias si se cumplen condiciones de resonancia, como ya hemos visto. Si por el contrario el tiempo característico de la convección es mucho mayor que el tiempo de Alfvén, la parte coronal de la estructura magnética del loop se adaptará continuamente a estos cambios lentos en su contorno atravesando una sucesión de equilibrios magnetohidrostáticos. La disipación óhmica de las corrientes eléctricas vinculadas a estos equilibrios pueden en principio constituir una fuente alternativa de calentamiento coronal.

Suponiendo (por simplicidad) que el calentamiento es producido por disipación de una corriente homogénea que circula a lo largo del loop y balanceando entonces la correspondiente tasa de disipación Joule con la tasa de enfriamiento por pérdidas radiativas, se obtienen valores muy elevados para dicha corriente. En particular, el campo magnético inducido por tal corriente sería del orden de algunos kilogauss, pero no existen observaciones que evidencien la presencia de campos magnéticos coronales tan intensos (Tucker 1973). Resulta más factible imaginar que la disipación óhmica tiene lugar en pequeños volúmenes distribuidos estocásticamente a lo largo del loop de manera que el campo magnético global que esta distribución de corrientes induzca, no resulte demasiado apreciable. Puesto

que ahora la corriente circula por una reducida fracción del volumen del loop, resulta claro que la densidad de corriente en dichas regiones será más elevada a fin de mantener la misma tasa de calentamiento.

La existencia de tales regiones de intensa disipación, habitualmente llamadas hojas de corriente, es un fenómeno frecuente tanto en plasmas astrofísicos (interacción del viento solar con la magnetósfera terrestre, discos de acreción, fulguraciones solares) como de laboratorio (disrupciones en tokamaks). Es en estas hojas de corriente donde la energía magnética es eficientemente transferida a las partículas en un proceso llamado reconexión magnética, que esencialmente consiste en un cambio topológico de líneas magnéticas que originalmente estaban antiparalelas y situadas a ambos lados de la hoja de corriente.

La evolución del campo magnético ( $\mathbf{B}$ ) está determinada por la ecuación

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.3.1)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el campo de velocidades del plasma y  $\eta$  es su resistividad eléctrica. La misma es extremadamente pequeña en la corona. El número de Reynolds magnético  $\mathcal{R}_m$ , que mide la importancia relativa del término no lineal respecto del término difusivo es  $\mathcal{R}_m \approx 10^{12}$ , de manera que el segundo término de la derecha de la ecuación (1.3.1) puede en general despreciarse. Esta ecuación describirá entonces el congelamiento del campo magnético a la materia, conservándose la topología del mismo. Pero pueden existir situaciones donde el primer término de la derecha de (1.3.1) se anule, resultando entonces una ecuación de difusión para el campo  $\mathbf{B}$  con disipación de energía magnética por efecto Joule. Este es el caso de las hojas de corriente, donde el vector de campo magnético invierte abruptamente su sentido al atravesar las mismas. En los modelos estacionarios de



reconexión, debe proponerse un mecanismo que transporte líneas de campo magnético hacia la hoja de corriente. De acuerdo a la velocidad con que se realice este transporte, pueden distinguirse seis regímenes de reconexión (Priest 1985):

(i)MUY LENTO: el campo magnético evoluciona a través de una sucesión de estados cuasipotenciales (corriente nula).

(ii)LENTO: la difusión de campo magnético tiene lugar en una delgada hoja de corriente. La energía magnética se equiparte en energía cinética del fluido y energía térmica (Sweet 1958, Parker 1963).

(iii)RAPIDO: la difusión se produce en una hoja de corriente en cuyos extremos se generan ondas MHD lentas que gobiernan el balance de energía del proceso (Petschek 1964).

(iv)DE APILAMIENTO: la velocidad de transporte de líneas es superior a la de reconexión y en consecuencia el campo magnético incidente se apila en las proximidades de la hoja de corriente ensanchándola progresivamente.

(v)IMPULSIVO: el ancho de la placa crece rápidamente y sufre inestabilidades tipo tearing que provocan la filamentación de la misma.

(vi)TURBULENTO: la placa de corriente sufre sucesivas filamentaciones con una cascada de energía hacia escalas espaciales cada vez menores.

Historicamente, el proceso de reconexión fue esbozado por Sweet (1958) y formalizado matemáticamente por Parker (1963). Este primer modelo supone una delgada línea neutra en la cual la velocidad con que ingresa el plasma coincide con la velocidad con que el campo magnético es reconectado, teniéndose entonces un comportamiento estacionario. Petschek (1964) mejoró este modelo postulando la generación de ondas MHD lentas en los extremos de la hoja de corriente, lo cual permite una mayor velocidad de reconexión. Basados en estas ideas, Sonnerup (1970) y Yeh y Axford (1970) elaboraron modelos autosimilares. Las descripción matemática de estos modelos

hidrodinámicos y analíticos, así como la comparación entre los mismos, está claramente expuesta en Vasyliunas (1975). Todos ellos presentan varias limitaciones, como por ejemplo describir la dinámica de las hojas de corriente sin tener en cuenta condiciones de contorno realistas. Otra importante limitación es la de tratarse de modelos estacionarios, lo cual impide conocer los mecanismos de formación o destrucción de las hojas de corriente. En este sentido debe mencionarse la importancia de la inestabilidad tearing, que se origina por la tendencia de los hilos de corriente que conforman una placa uniforme a atraerse mutuamente (Furth 1964). La estructura de campo magnético resultante es una serie de puntos O (islas magnéticas) y puntos X (líneas neutras). La etapa lineal de esta inestabilidad fue tratada por Furth, Killeen y Rosenbluth (1963), siendo esta la primera vez que se consideró reconexión no estacionaria. El desarrollo no lineal de esta inestabilidad es de capital importancia puesto que la teoría lineal resulta rápidamente inaplicable (Heyvaerts 1982). Esto ocurre cuando las islas magnéticas adquieren un tamaño comparable al ancho de la hoja de corriente y no existe aún una teoría que prediga satisfactoriamente su saturación (Priest 1985).

Otra limitación de los modelos MHD de reconexión es la de no poder describir consistentemente la aceleración de partículas y la excitación de inestabilidades cinéticas. Smith (1977) analizó distintos casos de reconexión en presencia de turbulencias que produzcan resistividad anómala (ver sección 1.4). Algunos trabajos calculan la evolución newtoniana de partículas que transitan la zona de reconexión (Matthaeus, Ambrosiano y Goldstein 1984). Lyons y Speiser (1985) con un análisis de este tipo, derivan una ley de Ohm válida en la hoja de corriente.

El fenómeno de reconexión es investigado no solo desde el punto de vista teórico sino que se han desarrollado máquinas especiales para

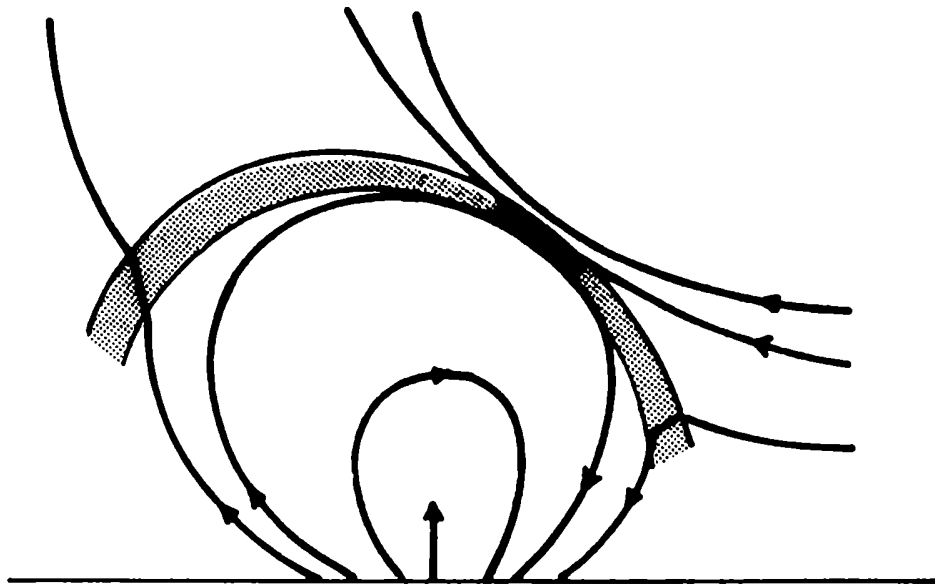
producir reconexión en el laboratorio (Stenzel y Gekelman 1981, Baum y Bratenahl 1982). El dispositivo experimental diseñado por Stenzel, Gekelman y colaboradores en la Universidad de California (UCLA), provee una placa de corriente de unos 2m de largo por 50cm de ancho y 3cm de espesor. La experiencia consiste en un mapeo con buena resolución espacial y temporal de las cantidades macroscópicas de interés (campo magnético, de velocidades, densidad, temperatura y corriente) e incluso de la función de distribución de electrones. Toda esta información es volcada a una computadora y se estudian sucesivamente la topología del campo magnético (Stenzel y Gekelman 1981), la densidad, temperatura y potencial electrostático del plasma (Gekelman y Stenzel 1981), el campo de velocidades del plasma (Gekelman, Stenzel y Wild 1982), el balance energético (Stenzel, Gekelman y Wild 1982), las disrupciones de corriente y formación de capas dobles (Stenzel, Gekelman y Wild 1983a), el desarrollo de turbulencia cinética en la placa (Gekelman y Stenzel 1985) y la evolución de la función de distribución de electrones indicando la presencia de partículas supratérmicas (Stenzel, Gekelman y Wild 1983b, Gekelman y Stenzel 1985). Esta gran cantidad de información, prolijamente analizada por sus autores, ha servido no solo para confirmar muchos efectos supuestos en los desarrollos teóricos sino también para poner de manifiesto la existencia de nuevos efectos. Es importante tener especial cuidado al intentar comparaciones entre este tipo de experimentos y las observaciones de la corona solar, puesto que los regímenes de reconexión pueden ser muy distintos. Drake y Lee (1977) presentan una clasificación de los fenómenos de reconexión basada en el grado de importancia de las colisiones. Así por ejemplo, en la magnetósfera terrestre puede considerarse no colisional como la mayoría de los experimentos de laboratorio, mientras que la reconexión en las fulguraciones solares resulta ser colisional. Las descargas en

tokamaks corresponden en cambio a un régimen semicolisional (Heyvaerts 1982).

Una extensa serie de modelos numéricos de reconexión se han desarrollado en los últimos años. Los primeros trabajos consideraron un fluido bidimensional incompresible (Fukao y Tsuda 1973, Soward y Priest 1977) extendiéndose luego a fluidos compresibles (Yang y Sonnerup 1976, Ugai y Tsuda 1977, Hayashi y Sato 1978, Sato 1979, Soward y Priest 1982). Trabajos recientes tales como Sato, Walker y Ashour-Abdalla (1985) y Sato (1985), plantean la resolución numérica de procesos de reconexión tridimensionales. El efecto de la turbulencia en la reconexión fue estudiado por Matthaeus y Montgomery (1981), Ugai (1984, 1985) y más recientemente por Matthaeus y Lamkin (1986). Existen varios modelos numéricos bidimensionales que tienen en cuenta la inestabilidad de coalescencia (v.gr. Bhattacharjee, Brunel y Tajima 1982), esto es, el desequilibrio originado por las fuerzas existentes entre islas magnéticas. A la luz de los resultados numéricos de reconexión no lineal y no estacionaria, resulta claro que el tratamiento analítico del problema resulta demasiado esquemático y simplificado, ya que se observa una compleja evolución que depende críticamente de algunos parámetros y de las condiciones de contorno que se propongan (Priest 1985).

Las fulguraciones solares son sin duda el fenómeno más espectacular de los muchos que tienen lugar en la superficie solar. Durante cada uno de estos eventos impulsivos se liberan hasta  $10^{32}$  ergios en un lapso de  $10^{3-4}$  s (Svestka 1976) y en un área de  $3 \cdot 10^{19}$  cm<sup>2</sup> del disco solar. Esta energía se libera a través de fuertes eyecciones de materia, haces de partículas aceleradas e intensificación electromagnética en todos los rangos espectrales. Existen esencialmente dos tipos de fulguraciones: compactas o de un solo loop y de dos bandas o de una arcada de loops (Heyvaerts,

Priest y Rust 1977). Los modelos teóricos que tratan de explicar la generación de fulguraciones compactas, proponen la aparición de una placa de corriente por interacción de un loop coronal preexistente con una estructura magnética que emerge desde la fotosfera (Figura 4) debido a alguna inestabilidad MHD (Heyvaerts y Priest 1976, Heyvaerts, Priest y Rust 1977, Tur y Priest 1978, Somov 1979, Syrovatsky 1982, Somov y Titov 1985, Priest 1985). Estos modelos de flujo emergente predicen un crecimiento de la densidad de corriente en la placa al aumentar la altura de la misma con respecto al nivel fotosférico. Existe entonces una altura crítica, que depende de los parámetros del modelo, para la cual se desarrolla microturbulencia en la hoja de corriente. Esto implica por un lado sobrecalentamiento por efecto Joule anómalo y por otro la generación de



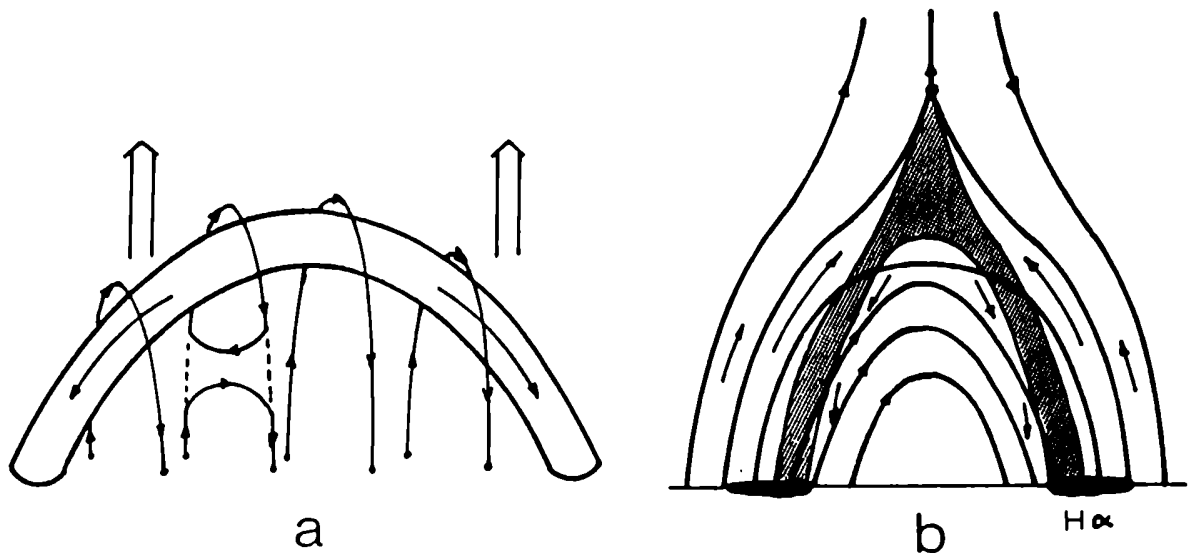
*FIGURA 4: Fulguración compacta. Reconexión de flujo emergente desde la fotosfera con una estructura magnética preexistente (Priest 1985).*

electrones acelerados cuyo impacto sobre la cromósfera produce una característica intensificación en rayos X duros. Uchida y Sakurai (1977) asocian en cambio el disparo de la fulguración con el desarrollo de la inestabilidad de intercambio, esto es, un mezclado de la estructura magnética preexistente con la emergente buscando una configuración más estable. Postulan también la formación de pequeñas placas de corriente con intensa disipación Joule en la zona de mezclado.

Las fulguraciones de dos bandas están formadas por una arcada magnética que abraza en su parte interior un tubo de corriente frío y de alta densidad llamado filamento. El estallido de la fulguración parece corresponder a la erupción de este filamento, debajo del cual las líneas se reconectan, como se muestra en la Figura 5, originando loops post-fulguración de alta temperatura ( $10^7\text{K}$ ) con sus bases emitiendo en  $H_{\alpha}$  (este brillo en  $H_{\alpha}$  de las bases de la arcada motivó la denominación de fulguración de dos bandas). Estudios de la estabilidad MHD del filamento (Hood y Priest 1980, Hood 1983) indican que la estructura es estable si el mismo yace debajo de la fotosfera. En cambio si el filamento está a cierta altura por encima o bien la torsión de las líneas de la arcada es grande, el filamento resulta dinámicamente inestable en dicha posición y emerge violentamente. van Tend y Kuperus (1978) muestran que los hilos de corriente extendidos a lo largo de la arcada, presentan una tendencia a confluir hacia una línea neutra dando así una posible explicación al origen del filamento. Recientemente se ha desarrollado un modelo global que describe las principales características de la evolución de una fulguración de dos bandas (Martens 1987, Kuin y Martens 1987) a partir de la analogía con un circuito eléctrico.

En las regiones quiescentes de la corona (es decir donde no tienen lugar los fenómenos impulsivos) no se observan indicios de la presencia de

hojas de corriente. Las observaciones de rayos X e incluso los magnetogramas no muestran la geometría correspondiente a las regiones de reconexión, ni tampoco se detecta una emisión apreciable en rayos X duros que ponga de manifiesto la existencia de haces energéticos de partículas (Poletto et al. 1975, Rosner et al. 1978). Por supuesto, nada puede afirmarse respecto de la formación de hojas de corriente de dimensiones inferiores a la resolución espacial de los actuales instrumentos de observación (6000 km sobre la superficie solar).



*FIGURA 5: Fulguración de dos bandas. (a) Erupción de filamento y reconexión de líneas debajo del mismo. (b) Corte de la arcada magnética mostrando algunos efectos de la reconexión (Priest 1985).*

#### 1.4. DISIPACION JOULE ANOMALA

Como es sabido, para densidades de corriente suficientemente altas, diversas inestabilidades cinéticas comienzan a tener lugar como por ejemplo la excitación de turbulencia iónico-acústica. La generación de esta turbulencia es un hecho muy auspicioso en lo que a calentamiento del plasma se refiere, pues la misma produce un incremento de la resistividad efectiva del plasma (resistividad anómala). Este es un fenómeno colectivo (no colisional) del plasma que consiste en un incremento de la frecuencia de colisiones de los electrones que transportan la corriente, ya que los mismos no solo interactúan con los iones sino también con los plasmones (estructuras colectivas) de la citada turbulencia (Papadopoulos 1977). La resistividad se incrementa en un factor  $10^4$  en el caso del plasma coronal aumentando notablemente la eficiencia de la disipación Joule.

Para excitar la inestabilidad iónico-acústica, la temperatura electrónica debe ser superior a la de iones, de manera que una explicación consistente de disipación anómala debe incluir un mecanismo que sobrecaliente a los electrones. Por ejemplo Kaplan y Tsitovitch (1973) sugieren que se excita primero la inestabilidad de Buneman (para velocidad relativa entre electrones e iones superior a la térmica) en el plasma isotérmico y los plasmones generados incrementan la frecuencia de colisiones calentando más eficientemente a los electrones. Posteriormente los plasmones decaen en plasmones iónico-acústicos puesto que el plasma está ahora en condiciones favorables a esta turbulencia y es además estable frente a la inestabilidad de Buneman (pues aumentó la velocidad térmica electrónica, superando a la velocidad relativa). Kaplan y Tsitovitch, usando argumentos heurísticos, derivan una frecuencia efectiva de colisiones para turbulencia iónico-acústica que en el caso coronal resulta



(como dijimos)  $10^4$  veces la frecuencia clásica de colisiones (v. gr. Rosner et al. 1978). Describir la evolución y saturación de las inestabilidades cinéticas es una tarea ardua y compleja pues las ecuaciones cinéticas que describen a las partículas y a los plasmones, están íntimamente acopladas a través de términos no lineales. Silin y colaboradores analizaron en una serie de trabajos (Bichenkhov y Silin 1982, Bichenkhov, Gradov y Silin 1982, Bichenkhov, Silin y Uryupin 1984a-b) la evolución de turbulencia iónico-acústica débil en un plasma de iones y electrones incluyendo interacciones no lineales y efectos de anisotropía en la distribución de plasmones. Calculan analíticamente las funciones de distribución de electrones y plasmones y los coeficientes de transporte anómalos. Estudian también el efecto del campo magnético en los resultados anteriores (Bichenkhov, Gradov y Silin 1984). Obtienen una frecuencia efectiva de colisiones comparable a la de Kaplan y Tsitovitch (1973) aunque con una dependencia algo diferente con los parámetros del problema. Otra consecuencia favorable de la turbulencia iónico-acústica al problema del calentamiento coronal, es la intensificación de conductividad térmica en las direcciones perpendiculares al campo magnético. No obstante, hemos encontrado que esta intensificación resulta insuficiente para coincidir aceptablemente con los requerimientos de flujo conductivo transversal provenientes de estudios observacionales detallados (Martens, van den Oord y Hoyng 1985).

#### 1.5. DISIPACION TOPOLOGICA

Aún no nos hemos ocupado de analizar los mecanismos de generación ya sea de ondas de Alfvén o de hojas de corriente. Sí hemos dicho cómo en

ambos casos el campo magnético actúa como indispensable portador de la energía desde la región de generación (zona convectiva) hasta la corona, donde es disipada por efecto Joule. Describamos entonces con cierto detalle el comportamiento de la zona convectiva y su acoplamiento con el campo magnético.

El fluido que se halla inmediatamente debajo de la fotosfera se encuentra en un estado de turbulencia hidrodinámica (HD), transportando convectivamente el calor desde el interior hacia la superficie debido a la insuficiencia del transporte radiativo. La evidencia observacional de la existencia de una zona convectiva, es la presencia de celdas convectivas o gránulos al fotografiar la superficie solar con luz blanca. El tamaño característico de dichos gránulos es de  $10^3$  km y su vida media de cinco a diez minutos, siendo la velocidad típica de este movimiento convectivo, de alrededor de  $1 \text{ km.s}^{-1}$  (Priest 1982).

Puesto que el número de Reynolds de dicho fluido se estima en  $10^{11-12}$ , se supone que los gránulos son la manifestación macroscópica y observable de un estado fuertemente turbulento. Observaciones de alta resolución (200 km sobre el disco solar) indican que el número de vórtices crece hacia escalas espaciales más pequeñas (Roudier y Muller 1986). Si bien los gránulos (vórtices de  $10^3$  km) contribuyen con la mayor parte de la emisión de luz blanca, no necesariamente significa que estos vórtices contengan el grueso de la energía cinética del plasma.

Se observaron también celdas convectivas de dimensiones mayores que los gránulos, clasificándolas de acuerdo a su tamaño en mesogránulos ( $7 \cdot 10^3$  km), supergránulos ( $3 \cdot 10^4$  km) y celdas gigantes ( $3 \cdot 10^5$  km). De acuerdo a los modelos del interior del Sol, la temperatura crece monotonamente con la profundidad medida desde la fotosfera. Sucesivamente se alcanzan las zonas de ionización de H, de ionización de He y de doble ionización de He. Puesto

que en dichas zonas la opacidad del fluido aumenta abruptamente y en consecuencia también la presión de radiación, se ha sugerido que en dichas zonas se excitan respectivamente los gránulos, mesogránulos y supergránulos. Esta hipótesis se ve reforzada por la apreciable coincidencia entre las profundidades de estas zonas de ionización y los tamaños de las mencionadas estructuras. Las dimensiones de las celdas gigantes, en cambio, parecen corresponder a la profundidad total de la región convectiva (Priest 1982). Lamentablemente, no es mucho más lo que se sabe acerca del comportamiento de esta región, dado que por un lado la resolución espacial de los actuales instrumentos es insuficiente y por otro el tratamiento teórico de un fluido turbulento, compresible y en presencia de radiación es extraordinariamente complicado.

Las líneas magnéticas provenientes de la corona se sumergen profundamente en la región convectiva formando manojos muy compactos, cuya presión magnética es de todos modos algo inferior a la presión del fluido ( $\beta \geq 1$ ). En la corona, como vimos, la presión magnética es muy superior a la presión hidrodinámica ( $\beta \ll 1$ ). Esta inversión en la relación de presiones junto con la muy alta conductividad del plasma (que garantiza el congelamiento de las líneas magnéticas al fluido) constituyen un elemento clave en el estudio del calentamiento coronal. No es difícil imaginar, bajo estas circunstancias, cuáles serán las consecuencias de la turbulencia subfotosférica sobre las líneas magnéticas que confinan a los loops coronales (ver Figura 6a). La estimación del trabajo realizado por el campo de velocidades convectivo sobre el campo magnético indica que esta energía resulta suficiente para calentar la corona. En efecto, luego de transcurrido un tiempo  $t$ , cada uno de los extremos de una línea magnética ha recorrido una trayectoria errática de longitud  $u_p \cdot t$  ( $u_p$ : velocidad típica de la convección) perpendicularmente al campo magnético  $\underline{B}_0$  (ver

Figura 6b). El esfuerzo de Maxwell con el cual el campo magnético se opone al movimiento de sus bases es  $\frac{1}{4\pi} \cdot B_o^2 \cdot \text{tg}(\theta)$ , donde  $\theta = \text{arctg}(u_p t/L)$  es la inclinación media de una línea magnética en un loop de longitud L. Entonces el trabajo realizado por la turbulencia HD sobre el campo magnético por unidad de área y tiempo resulta

$$F = \frac{B_o^2}{4\pi} \frac{u_p^2 t}{L} \quad (1.5.1)$$

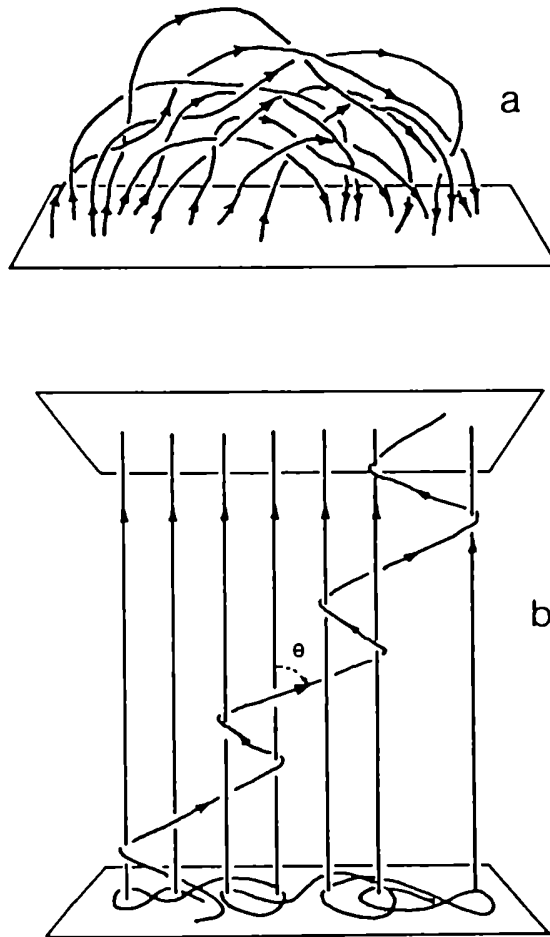


FIGURA 6: (a) Entrelazamiento de líneas magnéticas cerradas como consecuencia de la convección subfotosférica. (b) Esquema de la evolución de una línea magnética a efectos de estimar el trabajo que la convección realiza sobre el campo magnético (Parker 1967).

Para un loop típico ( $L \approx 3 \cdot 10^4$  km,  $B_0 \approx 100$  G) y una velocidad característica para la granulación de  $1.5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  (Wiehr y Kneer 1988), se obtiene que en un tiempo del orden del período granular ( $t \approx 10^3$  s) la convección entrega  $6 \cdot 10^6 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ , que es un valor comparable a las tasas de enfriamiento radiativo y conductivo del plasma. Sin embargo, cabe recordar que quien adquiere energía por este mecanismo es el campo magnético, de manera que resta aún hallar un adecuado proceso de disipación magnética.

Debido a la lentitud del movimiento subfotosférico, puede suponerse a la corona suficientemente cerca del equilibrio magnetostático, es decir

$$0 = -\underline{\nabla} p + \frac{1}{4\pi} (\underline{\nabla} \times \underline{B}) \times \underline{B} \quad (1.5.2)$$

Más aún, debido a la baja presión del gas ( $\beta \ll 1$ ) puede considerarse que el sistema se halla en un equilibrio libre de fuerzas

$$0 = (\underline{\nabla} \times \underline{B}) \times \underline{B} \quad (1.5.3)$$

lo cual implica que las corrientes eléctricas fluyen paralelas al campo magnético. Parker (1972) sugirió que, puesto que las condiciones de contorno que imponen los movimientos subfotosféricos no son en general compatibles con la existencia de equilibrios libres de fuerzas, el campo magnético coronal se encontrará en un permanente estado de no equilibrio en el cual espontáneamente se desarrollan pequeñas hojas de corriente. Más rigurosamente, Parker (1986) afirma que las ecuaciones (1.5.2) y (1.5.3) tienen la propiedad de que aún para deformaciones continuas del campo magnético en los contornos, la solución matemática dentro del volumen presenta discontinuidades tangenciales (ver también Parker 1981a-b, 1983a-b). Es importante destacar que de acuerdo a lo afirmado por Parker,

la formación de hojas de corriente (discontinuidades en MHD ideal) es producto de inestabilidades propias del campo magnético que con certeza ocurrirán cuando se perturben las bases con campos de velocidades continuos. Tal proceso fue bautizado por Parker como disipación topológica.

Recientemente se han formulado objeciones a las ideas de Parker (van Ballegooijen 1985, Antiochos 1987), específicamente respecto de la existencia de equilibrios libres de fuerzas para condiciones de contorno arbitrarias (ver también Seehafer 1986). Esta bifurcación en el tratamiento teórico del problema (ver Martens 1986 para una prolija discusión sobre el tema) se origina al suponer que el plasma coronal puede describirse a través de la MHD ideal (es decir, sin disipación), para la cual las singularidades de los campos (choques) corresponden a regiones de intensa disipación óhmica o viscosa. Admitiendo una descripción en el marco más general de las ecuaciones MHD disipativas, la mencionada disyuntiva carece de significado.

Heyvaerts y Priest (1984) desarrollaron un modelo de calentamiento coronal basado en el proceso de relajación de Taylor (Taylor 1974). La idea central es que los loops coronales evolucionan alternando una etapa de trabajo subfotosférico sobre el campo magnético con una etapa de rápida relajación a un estado de mínima energía a helicidad magnética constante. Durante la primera etapa, la energía y la helicidad son inyectadas en el sistema a través de las bases del loop. Esta teoría (que será exployada en la sección 2.2) es global en el sentido que elude el análisis detallado del mecanismo de disipación. De hecho, Heyvaerts y Priest (1984) derivan una tasa de calentamiento que depende de un tiempo fenomenológico de disipación no predicho por el modelo.

En un trabajo reciente van Ballegooijen (1986) propone un modelo de excitación de turbulencia MHD en los loops solares. Calcula la evolución

temporal de un campo magnético libre de fuerzas que es llevado hacia un estado turbulento como consecuencia de la alimentación subfotosférica y de la no linealidad de las ecuaciones. En este modelo se encuentra numericamente la progresiva excitación de números de onda cada vez mayores en el espectro de energía magnética. Analizaremos este trabajo con mayor profundidad en la sección 2.2.

Como vemos, existe un copioso caudal bibliográfico vinculado con el problema del calentamiento de la corona solar. Hemos tratado de exponer en forma sintética y objetiva los resultados más importantes de la investigación en esta interesante rama de la física solar. De hecho, esta incursión en la literatura previa sobre el tema, ha constituido la primera y necesaria etapa para la realización de esta tesis.

Como consecuencia de este relevamiento de resultados tanto observacionales como teóricos, hemos arribado a dos conclusiones fundamentales sobre las cuales hemos basado nuestro aporte original al conocimiento sobre el tema:

\* El mecanismo físico más promisorio para el calentamiento de la corona solar es la excitación de turbulencia MHD por parte de la convección subfotosférica y la posterior disipación óhmica de la misma.

\* Las estructuras térmicas observadas en rayos X blandos son el resultado de un balance energético en el cual la tasa de calentamiento Joule es solo uno de sus términos. Por lo tanto no basta desarrollar un modelo teórico que prediga una determinada tasa de calentamiento, es necesario estudiar el impacto de esta fuente de calentamiento sobre el equilibrio térmico y su estabilidad.

En el capítulo 2 se desarrolla un modelo de calentamiento por disipación Joule de turbulencia MHD (sección 2.3). El ingrediente esencial que contiene la turbulencia MHD y que no está presente en los modelos anteriores es el eficiente transporte de energía hacia escalas espaciales microscópicas donde los procesos de disipación son muy eficientes. En la sección 2.1 reseñamos los conocimientos teóricos sobre turbulencia MHD (y HD) con particular énfasis en propiedades globales de la misma, tales como la existencia de espectros estacionarios y la producción de cascadas de sus invariantes ideales.

En el capítulo 3 desarrollamos un estudio de la estabilidad térmica global (promediada espacialmente) de un loop coronal (sección 3.5). Exponemos brevemente análisis previos de estabilidad térmica, tanto lineales (sección 3.1) como no lineales (sección 3.2) y también modelos previos de estabilidad global (sección 3.3). Nuestro análisis de estabilidad indica que el equilibrio estático es estable para tasas de calentamiento suficientemente elevadas. Si dicha tasa de calentamiento cae por debajo de un cierto valor crítico, el sistema atraviesa una bifurcación subcrítica y surgen nuevos equilibrios estables (aunque dinámicos) llamados ciclos límites resultando además inestable el equilibrio estático. Hemos estudiado la estabilidad no lineal utilizando una técnica analítica perturbativa, la cual exponemos en la sección 3.4. Corroboramos la validez de nuestros resultados comparándolos con la integración numérica de las ecuaciones de evolución.

La existencia de ciclos límites involucra movimientos hidrodinámicos en la corona y alta cromósfera, los cuales producen un ensanchamiento Doppler anómalo de líneas espectrales del rango ultravioleta. Los anchos Doppler predichos por nuestro modelo coinciden muy bien con los valores medidos por Cheng, Doschek y Feldman (1976).



Finalmente, en el capítulo 4 enunciamos las conclusiones fundamentales a las que arribamos a lo largo del presente trabajo de investigación.

## 2. TURBULENCIA MAGNETOHIDRODINAMICA

### 2.1. CASCADAS Y ESPECTROS ESTACIONARIOS DE LA TURBULENCIA

La presente sección constituye una breve descripción de una serie de resultados globales referentes al estudio de turbulencia hidrodinámica (HD) y magnetohidrodinámica (MHD) a los que suelen denominarse teoría de cascadas. La misma está basada en un trabajo de Montgomery (1983), al cual le hemos agregado comentarios propios y resultados más recientes.

Las teorías de turbulencia son eminentemente estadísticas y no hacen predicciones acerca de eventos individuales. Esto debe ser tenido en cuenta al realizar comparaciones entre los resultados de estas teorías y datos observacionales o experimentales. Las posibles descripciones dinámicas de un plasma (en grado de complejidad creciente) son: (1) MHD a un fluido, (2) fluido de varias especies cargadas, (3) descripción cinética de Vlasov (no colisional), (4) descripción cinética de Boltzmann o Fokker-Planck (colisional). Mucho se ha avanzado en el estudio de plasmas utilizando estas descripciones en regímenes lineales y no turbulentos o incluso debilmente turbulentos. Lamentablemente, el avance no ha sido el mismo en regímenes fuertemente turbulentos, entendiéndose por tales a aquellos en los cuales las fluctuaciones de los campos son comparables a sus valores medios. En este caso solo existen desarrollos aislados, como en el caso de la turbulencia fuerte de Alfvén (descripción (2)) o turbulencia fuerte de Langmuir (descripción (3)), vinculados al desarrollo de inestabilidades modulativas que llevan a la formación de solitones. Por otra parte la descripción MHD, por ser la más simple, parece la más adecuada para llevar

a cabo una investigación sistemática de la turbulencia fuerte. Describamos entonces brevemente el estado actual de conocimiento sobre la turbulencia MHD. Las ecuaciones que corresponden a dicha descripción son, en el límite incompresible

$$\partial_t \underline{B} = \underline{\nabla} \times (\underline{u} \times \underline{B}) + \eta \nabla^2 \underline{B} \quad (2.1.1a)$$

$$\partial_t \underline{u} = -(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} - \underline{\nabla}(p/\rho) + (\underline{\nabla} \times \underline{B}) \times \underline{B} + \nu \nabla^2 \underline{u} \quad (2.1.1b)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{B} \quad (2.1.1c)$$

donde  $\underline{u}$  y  $\underline{B}$  son respectivamente los campos de velocidades y magnético, este último con dimensiones de velocidad (es decir  $\underline{B} = (4\pi\rho)^{-1/2} \underline{\mathcal{B}}$ , donde  $\underline{\mathcal{B}}$  es el campo magnético en Gauss). Los parámetros  $\eta$  y  $\nu$  son los coeficientes de resistividad y viscosidad respectivamente,  $p$  es la presión del fluido y  $\rho$  (=constante) es la densidad de masa. Las ecuaciones (2.1.1) a pesar de su simplicidad aparente, solo son resolubles en un número muy reducido de casos particulares además del límite lineal. En muchos casos, incluso su integración numérica representa un serio desafío. Hay fundamentalmente tres hipótesis acerca del comportamiento del plasma que han sido utilizadas para la deducción de (2.1): incompresibilidad ( $\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$ ), coeficiente de viscosidad escalar ( $\nu$ ) y régimen colisional ( $\omega \ll \nu_{col}$ ).

La incompresibilidad del plasma puede garantizarse en el caso  $\beta \ll 1$  ( $\beta = 8\pi p \mathcal{B}^{-2}$ ) siempre que la velocidad característica del fluido ( $|\underline{u}|$ ) pueda suponerse muy inferior a la velocidad del sonido ( $(\partial p / \partial \rho)^{1/2}$ ). En cambio, en el límite de campo magnético fuerte ( $\beta \ll 1$ ), la incompresibilidad aún puede asegurarse si las fluctuaciones  $\delta \mathcal{B}$  de campo magnético son suficientemente

débiles ( $\delta B/B \ll \beta$ ). Una explicación más detallada puede encontrarse en el Apéndice A. La presencia de campo magnético arruina la isotropía de cada punto del espacio, y el tensor de esfuerzos viscosos no es en general proporcional a la identidad. La fuerza viscosa comienza a depender de la intensidad de campo magnético a medida que la frecuencia de ciclotrón de los iones (el transporte de cantidad de movimiento es predominantemente realizado por los iones) deja de ser despreciable en relación con la frecuencia de colisiones. En Braginskii (1965) puede hallarse la expresión de la fuerza viscosa para campo magnético fuerte ( $\omega_{ci} \gg \nu_{col}$ ,  $\omega_{ci} = \frac{eB}{m_i c}$  frecuencia de ciclotrón iónica,  $\nu_{col}$ : frecuencia de colisiones), y en Kaufman (1960) una excelente discusión sobre este efecto. El cálculo de los coeficientes de transporte, son el resultado del desarrollo perturbativo de la ecuación de Fokker-Planck para las funciones de distribución alrededor de la distribución maxwelliana. El parámetro pequeño de este desarrollo perturbativo es  $(\nu_{col} t)^{-1}$ , donde  $t$  es el tiempo característico de variación de los campos. Existen procesos, usualmente llamados cinéticos, tales como la aceleración de partículas en hojas de corriente o el desarrollo de turbulencia iónico-acústica que, debido a que ocurren en tiempos más cortos que el tiempo entre colisiones, no pueden describirse por ecuaciones MHD y debe recurrirse a ecuaciones cinéticas.

Las teorías de turbulencia débil (Tsytovitch 1977) describen sistemas cuya dinámica puede considerarse como la interacción de modos normales oscilantes, cuyo período de oscilación es corto comparado con el tiempo característico de interacción entre estos modos. Cuando las ecuaciones del problema son fuertemente no lineales (por ejemplo alto número de Reynolds en flúidos neutros), los modos normales son muy interactuantes y una descripción en términos de quasipartículas (modos normales) resulta

inapropiada.

Hay cuatro escalas temporales asociadas a las ecuaciones (2.1.1). Si  $u_0$ ,  $B_0$  y  $\ell$  son respectivamente valores característicos de velocidad, campo magnético y longitud,  $\ell/u_0$  es el periodo de vórtices,  $\ell/B_0$  es el tiempo de tránsito de Alfvén y  $\ell^2/\eta$ ,  $\ell^2/\nu$  son los tiempos de disipación óhmica y viscosa. A fin de medir la importancia relativa de las no-linealidades respecto de los términos disipativos (lineales), es usual definir dos cantidades adimensionales a través de cocientes entre estos tiempos

$$\mathcal{R} = \frac{u_0 \ell}{\nu} : \text{número de Reynolds} \quad (2.1.2a)$$

$$\mathcal{R}_m = \frac{B_0 \ell}{\eta} \quad \text{número de Reynolds magnético} \quad (2.1.2b)$$

Cabe recordar que  $B_0$  es la velocidad de Alfvén del plasma ( $B_0 = (4\pi\rho)^{-1/2} \mathcal{B}_0$ ). En la corona solar, dichos números alcanzan valores muy elevados, tales como  $\mathcal{R} \approx 10^{10}$  y  $\mathcal{R}_m \approx 10^{12}$ . Esto muestra claramente la necesidad de desarrollar, para la corona solar, una descripción que contenga a la turbulencia fuerte como ingrediente fundamental.

En la descripción turbulenta de flúidos con alto número de Reynolds, no se hace referencia a soluciones específicas de las ecuaciones dinámicas, puesto que las componentes de los campos son consideradas como variables aleatorias. En cambio se hacen hipótesis acerca de promedios sobre ensembles de condiciones iniciales, que denotaremos con  $\langle \rangle$ , los cuales se suponen relativamente suaves y reproducibles. Entonces

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{B} \quad (2.1.3a)$$

$$u = \langle u \rangle + \delta u \quad (2.1.3b)$$

Los corchetes  $\langle \rangle$  indican promedios sobre experimentos preparados en iguales condiciones y mediciones realizadas en un determinado instante. Esta exigencia es difícil de satisfacer en el laboratorio y totalmente imposible en un plasma astrofísico. Lo que se suele hacer es formular una hipótesis ergódica, que consiste en igualar promedios sobre un ensemble con promedios temporales.

Casi todos los resultados teóricos sobre turbulencia MHD, corresponden al caso de turbulencia homogénea. Es decir, que las propiedades estadísticas de los campos son independientes de la posición. Usualmente la descripción se realiza en el sistema propio del fluido, es decir que  $\langle u \rangle = 0$ . Las cantidades teóricas de interés están generalmente vinculadas a las covariancias

$$R_{ij}^u(r, t) = \langle u_i(x, t) \cdot u_j(x+r, t) \rangle \quad (2.1.4a)$$

$$R_{ij}^B(r, t) = \langle B_i(x, t) \cdot B_j(x+r, t) \rangle \quad (2.1.4b)$$

$$R_{ij}^{uB}(r, t) = \langle u_i(x, t) \cdot B_j(x+r, t) \rangle \quad (2.1.4c)$$

las cuales, en virtud de la hipótesis de homogeneidad espacial, son independientes de  $x$ . Los intentos de calcular de manera cerrada y determinista estas cantidades han requerido mucho ingenio y solo se han obtenido resultados parciales, fundamentalmente bajo la hipótesis adicional de isotropía. En este caso, los tensores definidos en (2.1.4) se ven fuertemente simplificados. Descomponiendo Fourier, por ejemplo a la

covariancia magnética,

$$R_{ij}^B(\mathbf{r}, t) = \int dk S_{ij}^B(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.1.5a)$$

donde

$$S_{ij}^B(\mathbf{k}, t) = W^B(k, t) \left( \frac{k_i k_j - k^2 \delta_{ij}}{k^2} \right) \quad (2.1.5b)$$

con una única variable escalar que determina la evolución de la covariancia.  $W^B(k, t)$  es el espectro de energía magnética turbulenta, de manera que

$$\frac{\langle (\delta B)^2 \rangle}{8\pi} = \int_0^\infty W^B(k, t) dk \quad (2.1.5c)$$

A fin de mostrar las complicaciones que impiden avanzar analíticamente con el tratamiento del problema, descomponemos los campos en series de Fourier, suponiendo para ello un recipiente cúbico y condiciones de contorno periódicas

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} u(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (2.1.6a)$$

$$B(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} B(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (2.1.6b)$$

Si definimos un gran vector  $\chi$ , cuyo elemento  $i$ -ésimo sea la parte real o imaginaria de alguna de las componentes Fourier de alguno de los campos, las ecuaciones MHD pueden escribirse simbólicamente (Kraichnan y Montgomery

1980)

$$\frac{dX_i}{dt} = \sum_{j,k} C_{ijk} X_j X_k - \nu_i X_i \quad (2.1.7)$$

donde las constantes de acoplamiento  $C_{ijk}$  son conocidas y los coeficientes  $\nu_i$  corresponden a disipación viscosa o resistiva y generalmente crecen como el cuadrado del número de onda.

El problema fundamental que surge al intentar resolver (2.1.7), es que los términos cuadráticos son los dominantes en casi todo el espacio Fourier, y en consecuencia no es lícita su linealización. Tomar momentos de los  $X_i$  sobre el ensemble, lleva a un complejo problema de clausura

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X_i^2 \rangle = -\nu_i \langle X_i^2 \rangle + \sum_{j,k} C_{ijk} \langle X_j X_k X_i \rangle \quad (2.1.8)$$

Se advierte que la ecuación de evolución de cada momento, dependerá de momentos de orden superior de una manera reminiscente de la jerarquía BBGKY derivada para la ecuación de Liouville. Sin embargo, y a diferencia de la jerarquía BBGKY, aquí no hay parámetros pequeños que sugieran la posibilidad de una expansión perturbativa. El tratamiento de la jerarquía de momentos (2.1.8) ha sido profundizado por Kraichnan (1959, 1964) en el caso isótropo, a través de ingeniosos aunque tediosos cálculos. Su extensión a casos anisótropos es formidablemente compleja y no ha sido desarrollada aún. No es nuestro propósito profundizar aquí en el tema de las condiciones de clausura. La mismas consisten de una u otra manera en expresar las correlaciones de orden elevado en términos de momentos de menor orden. Varios modelos de clausura han sido sugeridos hasta el presente, siendo ciertamente el de aproximación de interacción directa



(DIA) elaborado por Kraichnan (1959) el más exitoso. Una vez que dicho modelo es librado de acoplamientos espurios (cinemáticos) entre modos de escala grande y pequeña, predice adecuadamente los espectros de energía en los rangos inerciales (Kraichnan 1965, Herring y Kraichnan 1979). Sin embargo, la aplicación de la DIA al problema de la difusión de los trazadores pasivos (esto es, sustancias diluidas en el fluido turbulento que no afectan la dinámica del mismo), conduce a resultados que no concuerdan cuantitativamente con los experimentos (Kraichnan 1966, Yakhot y Orszag 1986).

Las ecuaciones (2.1.8) expresan el crecimiento o decaimiento de energía en un modo Fourier particular como consecuencia de su participación en ternas de modos tales que sus números de onda suman cero. La intuición física es aquí de limitada utilidad al intentar siquiera estimar el efecto acumulado de tales interacciones, dado que los  $C_{ijk}$  suelen ser funciones suaves del número de onda y por lo tanto el número de interacciones resulta elevado. Sin embargo, el tratamiento estadístico del sistema (2.1.7) resulta posible en el caso  $\nu_i=0$ , para una serie de turbulencias tales como las de Navier-Stokes y MHD en dos y tres dimensiones. El truncamiento del desarrollo de Fourier en un número grande pero finito de términos, ha llevado a sistemas con ciertas características de ergodicidad que además presentan la interesante propiedad de mantener como constantes de movimiento a los invariantes del problema no truncado. De esta manera es posible describir el comportamiento estadístico a través de funciones de distribución de Gibbs canónicas o microcanónicas según sea el número de invariantes ideales (del problema sin disipación). Estas conclusiones han sido repetidamente verificadas en forma numérica (Fyfe y Montgomery 1976, Fyfe, Joyce y Montgomery 1977, Fyfe, Montgomery y Joyce 1977, Hossain,

Matthaeus y Montgomery 1983).

Al incluir los términos disipativos, aún cuando estos sean suficientemente pequeños, se producen modificaciones cualitativas en la dinámica del problema. La importancia de estos términos solo se advierte en los más altos números de onda, sin embargo su presencia afecta globalmente a todo el espectro de Fourier. El efecto de los términos no lineales (conservativos) es básicamente distribuir, de manera virtualmente estocástica, excitaciones de un número de onda  $k$  a otro. Solo aquellas excitaciones que se hallan en valores de  $|k|$  suficientemente elevados, decaen por efectos disipativos. Entonces se establece un flujo en el espacio  $k$  hacia aquellas regiones que resulten deficientes respecto de las predicciones del modelo sin disipación. La redistribución no lineal continuamente trata de reponer las excitaciones que son drenadas del sistema en los altos números de onda. Un incremento en los números de Reynolds solo produce un aumento en el valor de  $|k|$  donde la disipación es dominante, pero no inhibe el flujo en  $k$ .

El estudio detallado de este problema, requiere resolver de manera consistente un número elevado de modos Fourier, tanto mayor cuanto mayor sea el número de Reynolds. Esto impone severas restricciones a los esfuerzos por resolverlo numéricamente. Estimativamente, se requiere un punto de grilla por dimensión espacial y por unidad de número de Reynolds. Entonces, la simulación tridimensional para un número de Reynolds relativamente bajo como  $\mathcal{R} = 64$  requeriría  $64^3$  puntos de grilla, lo cual resulta una exigencia excesiva para las actuales computadoras.

El análisis dimensional de turbulencia isotrópica y homogénea, ha llevado a la predicción de leyes de potencias para los espectros de energía  $W^B(k)$  y  $W^U(k)$  en diferentes situaciones. Dichas predicciones son diferentes según

se trate de turbulencia HD o MHD, y si el problema es bi o tridimensional. Estos son virtualmente los únicos resultados, simples y testeables, luego de cuatro décadas de investigaciones sobre el tema. Tal conjunto de argumentos dimensionales suele recibir el nombre de teoría de cascadas, en virtud seguramente del mencionado flujo de excitaciones en el espacio de Fourier.

Las teorías de turbulencia con alto número de Reynolds, suelen clasificarse en forzadas o de decaimiento, según sea que el fluido esté o no interactuando con un sistema externo. Debido a la naturaleza disipativa de las ecuaciones, los campos turbulentos decaerán en el tiempo, a menos que se les provea de una fuente de excitaciones capaz eventualmente de balancear el drenaje viscoso o resistivo. Esta fuerza externa, se supone usualmente limitada a una reducida banda del espacio de Fourier, y se la modela a través de una variable aleatoria. Si bien los procesos de cascadas y los espectros de potencia son propios de los modelos forzados, estos conceptos suelen también emplearse en modelos de decaimiento en la medida en que los modos macroscópicos tengan un tiempo de relajación suficientemente largo como para que los modos microscópicos no logren distinguirlos de una fuente externa.

A fin de ilustrar la aplicación de las ideas centrales de la teoría de cascadas a un ejemplo concreto, nos referiremos brevemente a la turbulencia hidrodinámica en el caso bidimensional e incompresible. Las ecuaciones HD en el caso incompresible, son las (2.1.1) con campo magnético nulo, es decir

$$\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} = \underline{E} - \underline{\nabla}(p/\rho) + \nu \nabla^2 \underline{u} \quad (2.1.9a)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \quad (2.1.9b)$$

donde  $\underline{u}$  solo tiene componentes en el plano  $(x,y)$ , las cuales son independientes de la coordenada  $z$  y  $\underline{F}$  es un campo de fuerzas externo. Como consecuencia de la condición de incompresibilidad (2.1.9b) y de las mencionadas hipótesis geométricas, el campo de velocidades puede expresarse en términos de una función corriente escalar  $\psi(x,y,t)$

$$\underline{u} = \underline{\nabla}_x(\hat{z}\psi) \quad (2.1.10)$$

Tomando el rotor de (2.1.9a) obtenemos

$$\partial_t \nabla^2 \psi = (\underline{\nabla} \psi \times \hat{z}) \cdot \underline{\nabla}(\nabla^2 \psi) - \nu \nabla^4 \psi + \nabla^2 f \quad (2.1.11)$$

donde hemos empleado la siguiente descomposición para el campo  $\underline{F}(x,y,t)$

$$\underline{F} = \underline{\nabla}_x(\hat{z}f) + \underline{\nabla}g \quad (2.1.12)$$

Expresando ahora  $\psi$  y  $f$  en términos de las correspondientes amplitudes Fourier

$$\psi(x,y,t) = \sum_k \psi_k(t) \cdot e^{ik \cdot \underline{x}}, \quad \psi_k^* = \psi_{-k} \quad (2.1.13a)$$

$$f(x,y,t) = \sum_k f_k(t) \cdot e^{ik \cdot \underline{x}}, \quad f_k^* = f_{-k} \quad (2.1.13b)$$

la ecuación (2.1.11) resulta

$$\partial_t \psi_k + \nu k^2 \psi_k = f_k + \sum_{k'+k''=k} \Gamma_{k',k''}^k \psi_{k'} \psi_{k''} \quad (2.1.14a)$$

donde

$$\Gamma_{k',k''}^k = \frac{1}{2} \hat{z} \cdot k \times k' \left( \frac{k''^2 - k'^2}{k^2} \right) \quad (2.1.14b)$$

La no linealidad de la ecuación de Navier-Stokes se ve reflejada aquí a través de interacciones de ternas que satisfacen la regla  $k = k' + k''$ . La ecuación (2.1.14) describe la evolución de modos Fourier en el caso forzado y disipativo. Es sencillo mostrar que en ausencia de estos dos efectos, se conservan tanto la energía  $W$  como la enstrofia  $\Omega$  del sistema

$$W = \frac{1}{2} \int d^2x |u|^2 \quad (2.1.15a)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \int d^2x |\nabla \times u|^2 \quad (2.1.15b)$$

de manera que la distribución de Gibbs correspondiente al equilibrio (Kraichnan 1967) resulta

$$\mathcal{P} \propto \exp(-\alpha \Omega - \beta W) \quad (2.1.16a)$$

con el consiguiente espectro de energía

$$\langle W_k \rangle = (\alpha + \beta k^2)^{-1} \quad (2.1.16b)$$

donde las constantes  $\alpha^{-1}$  y  $\beta^{-1}$  pueden interpretarse como temperaturas. No obstante, se ha encontrado que aún una pequeña disipación en el sistema

altera profundamente el espectro de energías, como en seguida veremos. Este tipo de análisis fue extendido por otros autores a las ecuaciones MHD bidimensionales (Joyce y Montgomery 1973) y tridimensionales (Montgomery, Turner y Vahala 1978). En el caso bidimensional (que describiremos en detalle en la sección 2.3.) las cantidades conservadas son la energía ( $W = \frac{1}{2} \int d^2x (u^2 + B^2)$ ), la helicidad cruzada ( $H = \frac{1}{2} \int d^2x (u \cdot B)$ ) y el potencial magnético ( $A = \frac{1}{2} \int d^2x |a|^2$ ,  $B = \nabla \times (\hat{z}a)$ ). En tres dimensiones, en cambio, además de energía y helicidad cruzada, se conserva la helicidad magnética ( $K = \frac{1}{2} \int d^3x (A \cdot B)$   $B = \nabla \times A$ ). Se han investigado asimismo otras turbulencias, como por ejemplo la turbulencia de Rossby (Bretherton y Haidvogel 1976) vinculada a inestabilidades en atmósferas planetarias o la turbulencia de deriva (Hasegawa y Mima 1978) que se desarrolla en plasmas inhomogéneos.

Retornando entonces al caso HD bidimensional, la inclusión de fuerza externa y efectos viscosos altera fuertemente la distribución de equilibrio, pero no impide que puedan alcanzarse otros estados estacionarios en los cuales el flujo de los invariantes ideales que ingresa al sistema por acción de la fuerza externa se compensa con el decaimiento por viscosidad. Se postula entonces que existirá para cada invariante ideal una región del espacio de Fourier, llamada rango inercial de dicho invariante, en el cual esa magnitud fluye sin fuente ni disipación. Tal proceso es conocido como cascada de esa constante de movimiento del problema ideal (no forzado ni disipativo) y se dice que es directa si el flujo es hacia los grandes números de onda e inversa en el caso contrario. Si llamamos  $u_k$  al módulo de la componente Fourier de velocidad del modo  $k$ ,  $ku_k$  será un tiempo característico del proceso de cascada. El espectro de energía omnidireccional  $W_k$  (definido como en (2.1.5)) resultará del orden

de  $u_k^2/k$ . Entonces en el caso estacionario, el flujo de energía en el espacio  $k$  deberá ser constante e igual tanto al flujo externo entrante como a la tasa de disipación ( $\varepsilon$ )

$$\rho k u_k^3 = \varepsilon \quad (2.1.17)$$

Como  $u_k = (kW_k)^{1/2}$ , el espectro de energías (en el rango inercial de energía) que resulta de (2.1.17) es

$$W_k = C(\varepsilon/\rho)^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.1.18)$$

donde  $C$  es una constante adimensional. Este razonamiento fue originalmente llevado a cabo por Kolmogorov para obtener el espectro (2.1.18) en el caso de turbulencia hidrodinámica tridimensional (Kolmogorov 1941). Mediante razonamientos análogos sobre el flujo de enstrofia, se obtiene

$$\rho k u_k \cdot k^2 u_k^2 = \varepsilon' \quad (2.1.19)$$

de manera que el espectro de energía en el rango inercial de enstrofia es

$$W_k = C'(\varepsilon'/\rho)^{2/3} k^{-3} \quad (2.1.20)$$

Kraichnan (1967) mostró que si  $W_k \propto k^{-3}$  no hay cascada de energía, mientras que si  $W_k \propto k^{-5/3}$  no hay cascada de enstrofia. Entonces, si la fuerza externa opera en un rango espectral reducido ( $k \approx k_f$ ), se generará un rango inercial de energía para  $k < k_f$  y un rango inercial de enstrofia para  $k > k_f$ .

La siguiente Tabla (Tabla I) resume los resultados relevantes de los

distintos modelos de cascadas.

TABLA I  
CASCADAS Y ESPECTROS ESTACIONARIOS

	HD-3D	HD-2D	MHD-3D	MHD-2D
INVARIANTES IDEALES	energía (W)	energía enstrofía ( $\Omega$ )	energía helicidad (K)	energía pot. magn. (A)
SENTIDO DE CASCADAS ( $\rightarrow$ dir, $\rightarrow$ inv)	W $\rightarrow$	W $\leftarrow$ $\Omega \rightarrow$	W $\rightarrow$ K $\leftarrow$	W $\rightarrow$ A $\leftarrow$
ESPECTRO DE POTENCIAS	$k^{-5/3}$	$k^{-5/3} \leftarrow$ $k^{-3} \rightarrow$	$k^{-5/3} \rightarrow$ $k^{-1} \leftarrow$	$k^{-5/3} \rightarrow$ $k^{-1/3} \leftarrow$
VERIFICACION EXPERIMENTAL	Grant et al. 1962	Sommeria 1986	Matthaeus y Goldstein 1982	Verron y Sommeria 1984
VERIFICACION NUMERICA	Herring y Kraichnan 1972	Lilly 1969	Meneguzzi et al. 1981	Fyfe et al. 1977

Los términos no lineales en (2.1.14), que pueden interpretarse como interacciones de tres modos, sugieren que en ausencia de fuerza externa y disipación se interprete al problema como creación y destrucción de cuasipartículas (modos Fourier) respetando conservación de impulso ( $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}''$ ), energía ( $W = W' + W''$ ) y enstrofía ( $\Omega = \Omega' + \Omega''$ ). Haciendo una estadística de estos procesos, es posible arribar a interesantes coincidencias con el problema real, como por ejemplo la dirección de las respectivas cascadas de energía y enstrofía (Hasegawa y Kodama 1978, Hasegawa 1985). Sin embargo, en un estado de turbulencia fuerte es difícil



que una truncación en tres modos tenga validez, y aún en este caso la inclusión de fuerza externa y disipación introduce alteraciones importantes en el tratamiento del problema (Costa et al. 1988).

Los procesos que hemos descrito hasta ahora, llamados de decaimiento selectivo, se basan en el hecho de que si bien todos los invariantes ideales decaen en el caso no forzado y disipativo, algunos de ellos lo hacen más rápidamente que otros. Cualitativamente hay al menos dos razones para que esto ocurra. Primero, la disipación solo es efectiva a número de onda elevado y por lo tanto las cantidades que sufren cascadas inversas se encuentran fuera del alcance de la misma. Segundo, los términos de disipación de algunos invariantes ideales presentan máximos en valores de  $|k|$  diferentes que los otros. Argumentos más cuantitativos en favor de la existencia de decaimientos selectivos han sido presentados por Montgomery, Turner y Vahala (1978), Matthaeus y Montgomery (1980) o por Riyopoulos, Bondeson y Montgomery (1982). Cada proceso de decaimiento selectivo implica el decrecimiento en el tiempo del cociente de dos invariantes ideales, como por ejemplo el cociente entre energía y helicidad para el caso MHD-3D. Taylor (1974) empleó un argumento de este tipo para predecir estados asintóticos de decaimiento de Z Pinch toroidales, logrando una notable coincidencia con los resultados experimentales.

Los equilibrios transitorios o metaestables asociados a cada proceso de decaimiento selectivo se buscan a través de un problema variacional, minimizando la cantidad que relaja más rápido con la restricción de mantener constante la que relaja más lentamente. La posibilidad de que tales procesos ocurran resulta altamente interesante, puesto que mostraría la tendencia de un sistema altamente desordenado y turbulento a decaer en unos pocos estados no triviales y universales (es decir, independientes de

las condiciones iniciales) de cuasiequilibrio. Tales estados son fuertes candidatos a resultar equilibrios estables en el caso forzado.

Por ejemplo, en el caso MHD-3D, minimizando la energía a helicidad constante se obtienen simplemente los equilibrios libres de fuerzas es decir  $\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}$  donde  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange del problema variacional y  $\mathbf{u} = 0$ . Para MHD-2D, el decaimiento de energía a  $A = \text{cte.}$  lleva a un estado con campo magnético derivable del potencial vectorial  $\mathbf{A} = A(x,y)\hat{z}$  que además satisface  $(\nabla_{\perp}^2 + \lambda^2)A = 0$ . Se ha presentado evidencia numérica que muestra la relajación del sistema a estos estados cuasiestacionarios (v.gr. Matthaeus y Montgomery 1981, Riyopoulos, Bondeson y Montgomery 1982).

Un segundo tipo de modelo de decaimiento, aparentemente desvinculado del anterior, corresponde a minimización de energía sujeta a conservación de helicidad cruzada  $H = \int d^3x \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}$ , tanto en el caso MHD-3D como MHD-2D. Numericamente se encuentra que el cociente  $H/W$  crece monotonamente con el tiempo en presencia de disipación (Grappin et al. 1982, Matthaeus, Goldstein y Montgomery 1982), tendiendo al estado de máxima polarización relativa entre los campos, es decir  $\mathbf{u} = \pm \mathbf{B}$ . Esta predicción representa una magnífica posibilidad de explicar las observaciones del viento solar, que desde las efectuadas por Belcher y Davis (1971) hasta la fecha, presentan un marcado alineamiento o antialineamiento entre ambos campos. A tal estado turbulento se lo suele denominar fluctuaciones alfvénicas.

Esta dualidad de la turbulencia MHD de relajar a distintos estados según que se considere como invariantes a  $(W,K)$  o a  $(W,H)$  ha sido investigada por Ting, Matthaeus y Montgomery (1986) para el caso MHD-2D. El decaimiento selectivo, como vimos, corresponde a la búsqueda de un estado de mínima energía con conservación de la helicidad  $A$ . Esta condición

resulta razonable puesto que  $W$  crece con  $k$  más rápidamente que  $A$ , disipándose entonces en un tiempo menor. La energía sufrirá entonces una cascada directa de energía (ver Tabla I), mientras que la helicidad desarrollará una cascada inversa, es decir, hacia bajos números de onda. Este flujo de helicidad hacia escalas espaciales macroscópicas implica la formación de estructuras magnéticas ordenadas y corresponde a un ejemplo típico de autoorganización de un sistema (Hasegawa 1985). Es además el análogo bidimensional de la relajación de Taylor en plasmas tridimensionales, siendo  $A$  quien desempeña el papel de la helicidad magnética.

El alineamiento dinámico por otra parte, corresponde a una polarización relativa (alineamiento o antialineamiento) entre los campos  $u$  y  $B$ , los que además alcanzan la misma intensidad ( $u = \pm B$ ). Al estado en el que dichos campos están alineados o antialineados (pero no necesariamente con la misma intensidad), se le llama de alineamiento geométrico. Este efecto ha recibido mucha atención en los últimos años debido, como dijimos, a las interesantes coincidencias con observaciones del viento solar (Dobrowolny, Mangeney y Veltri 1980, Matthaeus y Goldstein 1982, Grappin et al. 1982). No obstante, no está aún demasiado claro que las mediciones correspondan a alineamiento dinámico puesto que podría tratarse simplemente de trenes de ondas de Alfvén generados en la corona (Grappin 1986, Hollweg 1986a).

El alineamiento dinámico es habitualmente estudiado definiendo variables de Elsässer  $z_{\pm} = u \pm B$ . Si uno de estos campos resulta eventualmente más poblado que el otro (por ejemplo  $|z_{+}| \gg |z_{-}|$ ), las respectivas ecuaciones de evolución predicen una mayor disipación del campo menos poblado ( $z_{-}$ ). Luego, esto significa que la polarización relativa inicial entre los campos  $u$  y  $B$ , es rápidamente intensificada (Matthaeus,

Goldstein y Montgomery 1983).

En resumen, el decaimiento selectivo y el alineamiento dinámico son procesos en los cuales el sistema busca un estado de mínima energía conservando constante A o H (respectivamente) a lo largo de su evolución. La situación se torna más confusa cuando se consideran los tres invariantes simultáneamente. Cálculos numéricos realizados por Ting, Matthaeus y Montgomery (1986) indican que el sistema relaja a una configuración dominada por el número de onda más bajo disponible ( $k \approx D^{-1}$ , D: dimensiones del sistema). Este no es en general el estado de mínima energía compatible con la conservación de A y H. En la Figura 7 mostramos los equilibrios a los cuales relaja el sistema, dependiendo de cuales sean los valores iniciales de los invariantes ideales. Suponiendo alineamiento geométrico, se reobtienen en forma analítica estos resultados numéricos. Es posible distinguir tres regímenes en función de los valores iniciales de  $W^u$ ,  $W^b$  y H

(I) decaimiento selectivo	$H \ll W/2$	$W^u \ll W^b$
(II) Navier-Stokes	$H \ll W/2$	$W^u \gg W^b$
(III) alineamiento dinámico	$H = W/2$	$W^u = W^b$

Resulta claro que un fluido neutro o un magnetofluido decaerá a un único estado final de equilibrio espacialmente uniforme y estático como consecuencia de la viscosidad y/o resistividad. Lo interesante es el hecho que puedan existir estados espacialmente inhomogéneos hacia los cuales relaja el sistema, capaces de perdurar durante escalas temporales cortas comparadas con el tiempo de decaimiento global de la turbulencia. De manera que parece razonable pensar que en el caso forzado y disipativo, los mencionados equilibrios resulten estables.

Recientemente parece haberse reactivado la investigación teórica sobre el problema de la turbulencia HD tridimensional, a raíz de interesantes resultados obtenidos por aplicación de ideas del grupo de renormalización (Yakhot y Orszag 1986). Este método (al cual abreviaremos GR), que fue

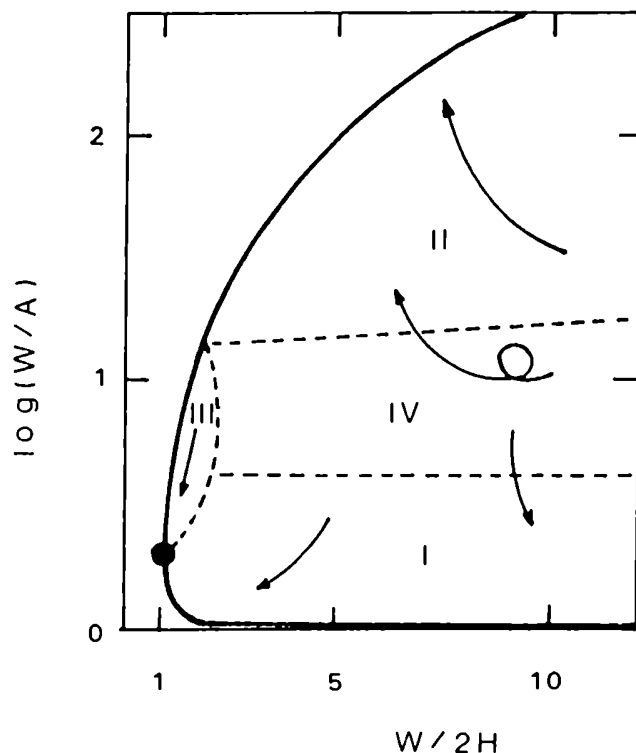


FIGURA 7: Esquema en el plano  $(W/A, W/2H)$ , indicando los estados hacia los cuales relaja el sistema. La rama superior corresponde a estados de Navier-Stokes, el punto en el extremo izquierdo de la curva representa el estado de alineamiento dinámico y la rama inferior al decaimiento selectivo. Las zonas I-II-III son las correspondientes cuencas de atracción, mientras que la zona IV corresponde a evoluciones erráticas cuyo comportamiento a tiempos largos resulta difícil de predecir (Ting et al. 1986).

originariamente desarrollado para describir la dinámica de fenómenos críticos (Ma y Mazenko 1975), fue posteriormente empleado por Forster, Nelson y Stephen (1977) para derivar correlaciones del campo de velocidades en un fluido incompresible forzado externamente por un campo de fuerzas aleatorio (ver también Yakhot 1981). La versión aplicada por Yakhot y Orszag (1986) consiste en la eliminación de modos Fourier con número de onda  $k$  tal que  $k_d e^{-r} < |k| < k_d$  (donde  $k_d^{-1}$  es la escala característica de disipación viscosa) en las ecuaciones correspondientes a los modos con  $|k| < k_d e^{-r}$ . Este procedimiento de eliminación provee una corrección al coeficiente de viscosidad desnudo ( $\nu_0$ ) en términos de una viscosidad efectiva  $\nu_r$  que tiene en cuenta el efecto de los modos eliminados. Utilizando técnicas estándar del GR, en el límite crítico  $r \rightarrow 0$  se obtiene el espectro de Kolmogorov para el rango inercial. Se derivan asimismo valores teóricos para cantidades medibles asociadas tanto al espectro de la turbulencia como a la evolución de trazadores pasivos que difunden en la misma, los cuales concuerdan muy bien con los resultados experimentales. El éxito de las predicciones que surgen de esta teoría resulta desconcertante si se tiene en cuenta que el cálculo teórico involucra un desarrollo perturbativo en un parámetro  $\varepsilon$  (supuestamente pequeño), que para reobtener el espectro de Kolmogorov debe tomar el valor  $\varepsilon = 4$ . Dicho parámetro se introduce adecuadamente en la definición de la ley de potencias de la fuerza estocástica y básicamente mide apartamientos respecto de un espectro de energía turbulenta proporcional a  $k$  ( $W(k) \propto k^{1-\frac{2}{3}\varepsilon}$ ).

Kraichnan (1987) desarrolla un análisis crítico a la teoría de Yakhot y Orszag (1986), basándose en una comparación entre esta y un modelo alterativo que no involucra métodos del GR. En dicho modelo, los

acoplamientos con modos vecinos (en el espacio Fourier) son simulados con un término de ruido blanco, mientras que los acoplamientos con modos lejanos son tenidos en cuenta a través de una viscosidad efectiva. Es decir, la ecuación de Navier-Stokes es simulada por la siguiente ecuación de Langevin (Kraichnan 1987)

$$(\partial_t + \nu_0 k^2 + \nu(k,t)k^2) u_i(k,t) = f_i(k,t) \quad (2.1.21)$$

donde  $\nu(k,t)$  es la mencionada viscosidad dinámica que representa la interacción con números de onda mayores que  $|k|$  y  $f(k,t)$  es una variable aleatoria con estadística gaussiana isótropa que fluctúa temporalmente como ruido blanco. Este término modela las interacciones con modos de bajo número de onda. Para el cálculo de la viscosidad  $\nu(k,t)$ , Kraichnan (1987) define un parámetro  $\beta$  adimensional y solo considera las interacciones del modo  $k$  con aquellos  $k'$  que satisfacen  $|k'| \geq \beta|k|$ . Esta hipótesis de Kraichnan corresponde en el límite  $\beta \rightarrow \infty$  al caso  $r \rightarrow 0$  del GR y, en efecto, obtiene resultados totalmente comparables sin necesidad de recurrir al cálculo perturbativo alrededor de  $\varepsilon = 0$ .

Zhou, Vahala y Hossain (1988) emplean técnicas del GR que tampoco involucran un cálculo perturbativo en  $\varepsilon$ . En este modelo se van eliminando sucesivamente los acoplamientos explícitos con los modos más microscópicos, incluyendo el efecto de los mismos en un término de viscosidad efectiva, de manera similar a la desarrollada por Yakhot y Orszag (1986). De esta manera, es posible hallar una relación de recurrencia a partir de la cual se calcula una viscosidad vestida, imponiendo para ello una cierta condición de clausura.

En resumen, si bien estas teorías recientes parecen arribar a

predicciones bastante alentadoras, las suposiciones que las mismas llevan implícitas no siempre resultan sencillas de justificar.

Existen también intentos de vincular la turbulencia a la teoría de caos. La diferencia esencial entre ambos fenómenos radica en que la turbulencia corresponde a problemas con cierta estructura espacial (ecuaciones de evolución en derivadas parciales) mientras que los problemas con caos involucran pocos grados de libertad (derivadas ordinarias). Para un espectro de Kolmogorov en turbulencia tridimensional, el número de modos crece con el número de Reynolds como  $\mathcal{R}^{3/4}$ . ¿Son todos estos modos necesarios para describir el problema, o bastará con considerar un subconjunto? Tal vez el carácter impredecible de un flujo turbulento sea consecuencia del comportamiento caótico de un número reducido de modos. En tal sentido, resulta de interés obtener información acerca de las características geométricas del atractor de la turbulencia, por ejemplo calculando su dimensión fractal. Debido al formidable esfuerzo computacional que este cálculo implica, se ha comenzado con el caso bidimensional. Grappin y Leorat (1987) hallaron en este caso que la dimensión del atractor resulta considerablemente inferior a la dimensión del espacio de fases. La importancia de este resultado reside en que tal vez sea factible describir las características relevantes de la turbulencia a través de un conjunto reducido de ecuaciones diferenciales ordinarias. Mucho es lo que se ha avanzado en los últimos años en el estudio de la evolución de sistemas caóticos (ver por ejemplo Bergé, Pomeau y Vidal 1984 o también Eckmann y Ruelle 1985) y es actualmente una de las áreas de investigación más activas de la Física. Esto seguramente se debe a la gran variedad de problemas en los cuales encuentra aplicación, incluyendo aquellos que corresponden a disciplinas que trascienden el ámbito de la



## 2.2. DISIPACION DE CORRIENTES PARALELAS

Ya nos hemos referido a la buena correlación espacial y temporal entre las estructuras observadas en rayos X y las extrapolaciones potenciales (es decir con  $\mathcal{J} = 0$ ) de campos magnéticos fotosféricos (ver sección 1.1.). Este resultado, sin embargo, debe interpretarse con precaución ya que el hecho de que no se observen apartamientos importantes respecto de una estructura potencial no significa que no fluyan corrientes eléctricas elevadas.

Desde el punto de vista teórico y suponiendo que el plasma se halla en un estado de equilibrio (lo cual es discutible como vimos en 1.5.), la baja presión del gas en comparación con la presión magnética ( $\beta \ll 1$ ) justifica la aproximación de equilibrio libre de fuerzas ( $\mathcal{J} \parallel B$ ). Sin embargo, si las corrientes eléctricas asociadas a estos equilibrios han de dar cuenta del calentamiento del plasma a través de la disipación Joule clásica, la distribución espacial de dichas corrientes debe ser suficientemente inhomogénea puesto que de otro modo inducirían campos magnéticos mucho más intensos que los observados. En tal sentido, se han desarrollado algunos modelos teóricos (Sturrock y Uchida 1981, Heyvaerts y Priest 1984, van Ballegooyen 1986) que proponen que el calentamiento de la corona es consecuencia de la disipación Joule de una distribución estocástica de corrientes paralelas.

Sturrock y Uchida (1981) calcularon el incremento de energía libre por unidad de tiempo de un tubo magnético cuyas bases sufren una torsión angular alrededor de su eje, siendo el ángulo de torsión una función aleatoria del tiempo. Supusieron para ello que la estructura magnética se

encuentra permanentemente en equilibrio libre de fuerzas. Buscan entonces soluciones a las ecuaciones

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \lambda \underline{B} \quad (2.2.2)$$

con simetría cilíndrica y en el límite  $\partial_r \gg \partial_z$ . Obtienen, al orden más bajo en la coordenada radial  $r$ ,

$$B_z(z,r) = B_0(z) - 4r^2(B_0''(z) + 4\lambda^2 B_0(z)) \quad (2.2.3a)$$

$$B_r(z,r) = -\frac{1}{2} B_0'(z)r \quad (2.2.3b)$$

$$B_\phi(z,r) = \lambda B_0(z)r \quad (2.2.3c)$$

donde  $\lambda$  es la torsión de las líneas magnéticas por unidad de longitud. Para un loop de longitud  $L$ , el ángulo de torsión entre sus bases es

$$\Delta\phi = \lambda L \quad (2.2.4)$$

Si el tubo tiene radio  $R(z) \approx R$ , el flujo magnético  $\Phi$  que atraviesa el tubo y la presión magnética  $p_M$  en su superficie son, respectivamente

$$\Phi = \pi R^2 B_0 - \frac{\pi}{8} R^4 B_0'' - \frac{\pi}{2} R^4 \lambda^2 B_0 \quad (2.2.5a)$$

$$P_M = \frac{1}{8\pi} B_o^2 - \frac{R^2}{8\pi} \left( \frac{1}{4} B_o'^2 - \frac{1}{2} B_o B_o'' - \lambda^2 B_o^2 \right) \quad (2.2.5b)$$

Suponiendo ahora que la convección subfotosférica genera la torsión  $\lambda$  de modo tal que ni el flujo ni la presión magnética en la superficie se alteran, es posible calcular, al orden más bajo en  $\lambda$ , el incremento de energía libre por unidad de volumen

$$\Delta W = \frac{\Phi^2 (\Delta\phi)^2}{16\pi^3 R^2 L^2} \quad (2.2.6)$$

Si la torsión es descrita a través de la variable aleatoria  $\omega(t)$  que es la velocidad angular de rotación, de manera que

$$\Delta\phi = \int_0^t \omega(t') dt' \quad (2.2.7)$$

podemos obtener el valor de espectación de aumento de energía libre por unidad de tiempo

$$\varepsilon = \left\langle \frac{\Delta W}{\Delta t} \right\rangle = \frac{\Phi^2}{16\pi^3 R^2 L^2} \left\langle \frac{(\Delta\phi)^2}{\Delta t} \right\rangle \quad (2.2.8a)$$

donde

$$\left\langle (\Delta\phi)^2 \right\rangle = \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' \left\langle \omega(t') \omega(t'') \right\rangle \quad (2.2.8b)$$

Definimos la función de correlación

$$\mathcal{R}(\tau) = \left\langle \omega(t) \omega(t+\tau) \right\rangle \quad (2.2.9)$$

a la cual supondremos esencialmente no nula para  $\tau < \tau_c \ll \Delta t$ , siendo  $\tau_c$  el tiempo característico de correlación de la turbulencia subfotosférica. Entonces, puesto que en un régimen de turbulencia desarrollada es  $\tau_c \approx \tau_p$  ( $\tau_p$ : período de vórtices), resulta

$$\langle (\Delta\phi)^2 \rangle \cong 2\mathcal{R}(0) \cdot \tau_p \cdot \Delta t \quad (2.2.10)$$

y por lo tanto, reemplazando esta expresión en (2.2.8) y estimando el flujo magnético como  $\Phi \approx \pi R^2 B$  y  $\mathcal{R}(0) = \langle \omega^2 \rangle \cong 2\langle u_p^2 \rangle / R^2$  se llega a

$$\varepsilon = \frac{B^2}{4\pi L^2} \langle u_p^2 \rangle \tau_p \quad (2.2.11)$$

donde  $u_p$  es la velocidad característica de la región convectiva.

El cálculo desarrollado por Sturrock y Uchida (1981) no constituye un modelo de calentamiento puesto que solo obtienen la tasa de incremento de energía libre y no proponen un mecanismo concreto de disipación de dicha energía. De todas maneras, implícitamente suponen que existe un mecanismo que disipa toda la energía libre en un tiempo característico mucho más largo que el de correlación ( $\tau_d \approx \Delta t \gg \tau_p$ ,  $\tau_d$ : tiempo de disipación).

Heyvaerts y Priest (1984) desarrollaron un modelo más global, basado en el mecanismo de relajación de Taylor (Taylor 1974), pero que de todas maneras arriba a una expresión para la tasa de calentamiento que depende de un tiempo característico de reconexión ( $\tau_d$ ), el cual resulta un parámetro libre del modelo. Suponen, a diferencia de Sturrock y Uchida (1981), que dicho tiempo de disipación es mucho más corto que el de correlación de la turbulencia subfotosférica ( $\tau_p$ ) y que además el tiempo de Alfvén para el loop ( $\tau_A$ ) es a su vez mucho menor que el de disipación, es decir que

$\tau_A \ll \tau_d \ll \tau_p$ . En este régimen, el sistema evoluciona atravesando una sucesión de equilibrios ( $\tau_A \ll \tau_p$ ) hacia los cuales relaja suficientemente rápido ( $\tau_d \ll \tau_p$ ).

El teorema de Woltjer (1958) establece que en el marco de la MHD ideal, la helicidad magnética  $K = \int d^3x \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  (donde  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ) de cada tubo de flujo cerrado se conserva. Este teorema se extiende también a tubos abiertos, pero siempre y cuando sus extremos no sufran desplazamientos. Una consecuencia de este teorema es que los estados de mínima energía compatibles con las condiciones de contorno son equilibrios generales libres de fuerzas. Esto se obtiene minimizando la energía a helicidad constante en cada tubo

$$\delta \int \frac{d^3x}{4\pi} [ B^2 - \lambda(\mathbf{x}) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} ] = 0 \quad (2.2.12)$$

donde  $\lambda(\mathbf{x})$  es el multiplicador de Lagrange asociado al tubo de flujo que pasa por la posición  $\mathbf{x}$  ( $\mathbf{B} \cdot \nabla \lambda = 0$ ). Se obtiene

$$\int d^3x \delta \mathbf{A} \cdot [ \nabla \times \mathbf{B} - \lambda(\mathbf{x}) \mathbf{B} ] = 0 \quad (2.2.13)$$

lo cual es satisfecho por campos generales libres de fuerzas. La hipótesis de Taylor (1974) consiste en afirmar que la inclusión de disipación óhmica arruina la conservación de helicidad en cada tubo, pero no la helicidad total. Entonces hay ahora un único invariante, que es justamente dicha helicidad global. Por lo tanto

$$\delta \int \frac{d^3x}{4\pi} [ B^2 ] - \lambda \delta \int \frac{d^3x}{4\pi} [ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} ] = 0 \quad (2.2.14)$$

lo cual implica

$$\int d^3x \delta A \cdot [ \nabla \times B - \lambda B ] = 0 \quad (2.2.15)$$

pero ahora (a diferencia de (2.2.13)) el multiplicador  $\lambda$  es un único número para el problema global. Los resultados que se derivan de la hipótesis de Taylor proveen una predicción muy satisfactoria de la estructura de inversión de campos magnéticos en experimentos de Pinch (Taylor 1975, 1976, Kadomtsev 1976). El éxito obtenido por la conjetura de Taylor en estos experimentos, ha promovido su aplicación a otros procesos de plasma, tales como los que tienen lugar en tokamaks (Bhattacharjee y Dewar 1983), en las fulguraciones solares (Norman y Heyvaerts 1983) o en el calentamiento estacionario de la corona (Heyvaerts y Priest 1984).

La idea central de Heyvaerts y Priest es que los movimientos convectivos producen una inyección de energía y helicidad en el sistema en un tiempo del orden de  $\tau_p$ , a lo cual sigue una rápida relajación a helicidad constante (en un tiempo  $\tau_d \ll \tau_p$ ) hacia un estado libre de fuerzas, con la consiguiente transformación en calor de la energía excedente. El sistema evoluciona entonces atravesando una sucesión de estados libres de fuerzas con  $\lambda$  espacialmente constante aunque variable en el tiempo a intervalos característicos  $\tau_p$ . Aplican esta idea al caso concreto de una arcada de loops magnéticos y hallan una expresión para la tasa de calentamiento que proviene de la permanente repetición de este proceso de excitación-relajación

$$\epsilon = \left( \frac{B^2}{4\pi L^2} u_p^2 \tau_p \right) \left( \frac{L}{L+\ell_p} \right)^2 \left( \frac{\tau_d}{\tau_p} \right) \quad (2.2.16)$$

El primer factor es la tasa de calentamiento calculada por Sturrock y Uchida (1981) y los otros factores restringen la eficiencia del proceso de calentamiento, ya sea en el caso  $\ell_p \geq L$  (es decir para movimientos convectivos de escala comparable a la estructura magnética) o en el caso en que  $\tau_d \ll \tau_p$  (es decir en el límite de disipación instantánea). En este modelo, como ya anticipamos, el tiempo  $\tau_d$  es un parámetro libre y Heyvaerts y Priest (1984) solo estimaron que si la disipación es producida (por ejemplo) por evolución no lineal de la inestabilidad tearing, el cociente  $(\tau_d/\tau_p)$  no resultaría muy inferior a la unidad (ver también Browning, Sakurai y Priest 1986). Como veremos en la sección 2.3., bajo la hipótesis de la existencia de un estado estacionario de turbulencia MHD, la cascada de energía y su posterior disipación proceden en tiempos del orden de  $\tau_p$  y por lo tanto este factor de reducción no limita en absoluto la disipación de energía.

En un trabajo más reciente, van Ballegooijen (1986) presenta un modelo en el cual se muestran las etapas iniciales del desarrollo de una cascada de energía magnética hacia la microescala, bajo la suposición de que la estructura magnética evoluciona siguiendo estados libres de fuerzas generales (es decir, que  $\lambda$  no es espacialmente constante). Para ello sugiere una geometría análoga a la empleada por Parker (ver Figura 6 en la sección 1.5.) y supone además que los desplazamientos convectivos son mucho menores que la longitud del loop ( $\ell_p/L \ll 1$ ). Bajo estas hipótesis, el campo magnético adquiere la forma  $\underline{B} = B_o(b_x, b_y, 1)$  y la condición de que  $\lambda$  sea constante a lo largo de cada línea magnética ( $\underline{B} \cdot \nabla \lambda = 0$ ) resulta

$$(\partial_z + b_x \partial_x + b_y \partial_y) \lambda = 0 \quad (2.2.17)$$

Esta ecuación, conjuntamente con la ecuación de inducción en el límite ideal

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.2.18)$$

proveen la evolución del equilibrio libre de fuerzas en términos de la convección subfotosférica (van Ballegoijen 1985). Considerando ahora que el campo de velocidades subfotosférico es de naturaleza estocástica, desarrolla un modelo estadístico sobre las ecuaciones (2.2.17-18) suponiendo que las funciones de correlación temporales son de tipo gaussiano con el tiempo de correlación  $\tau_p$ . Deriva entonces la evolución temporal de espectros de potencias de energía magnética y densidad de corriente (van Ballegoijen 1986), poniendo así de manifiesto la existencia de una eficiente cascada de energía hacia la microescala y una fuerte concentración de corriente en dicha región espectral, en la cual la disipación Joule comienza a ser dominante. Como el tratamiento de van Ballegoijen (1986) no incluye términos disipativos, discute fenomenológicamente el efecto de la resistividad en la contención de esta avalancha de energía magnética, sugiriendo que el sistema arribará a un estado estacionario en un tiempo  $\tau_p \ln(\mathcal{R}_m) / 6\sqrt{2\pi}$ . En dicho tiempo, la cascada de energía ha alcanzado escalas suficientemente pequeñas, en las cuales el tiempo de disipación Joule es comparable al tiempo  $\tau_p$  correspondiente a la alimentación de la cascada. A partir de este razonamiento, deriva una tasa de calentamiento

$$\varepsilon = \left( \frac{B^2}{4\pi L^2} u_p^2 \tau_p \right) \left( \frac{\ln(\mathcal{R}_m)}{3\sqrt{2\pi}} \right) \quad (2.2.19)$$



Esta expresión difiere de la obtenida en (2.2.11) (Sturrock y Uchida 1981) en el factor de la derecha, que si bien es numericamente del orden de la unidad, resulta conceptualmente llamativo que en un estado estacionario la tasa de calentamiento dependa del coeficiente de disipación. En 2.3. veremos que este resultado no es consecuencia de un modelo de turbulencia MHD sino de las hipótesis formuladas por van Ballegoijen (1986) acerca del tiempo en el cual el equilibrio es alcanzado.

A lo largo de esta sección hemos tratado de exponer resumidamente algunos trabajos previos de calentamiento coronal en los cuales la noción de turbulencia está presente. Sin embargo, ninguno de estos modelos hace uso explícito de los resultados de teoría de cascadas que hemos presentado en 2.1.. Este hecho nos indujo a intentar una aplicación de la teoría de cascadas al problema específico del calentamiento coronal, la cual exponemos en la sección siguiente (también Gómez y Ferro Fontán 1988).

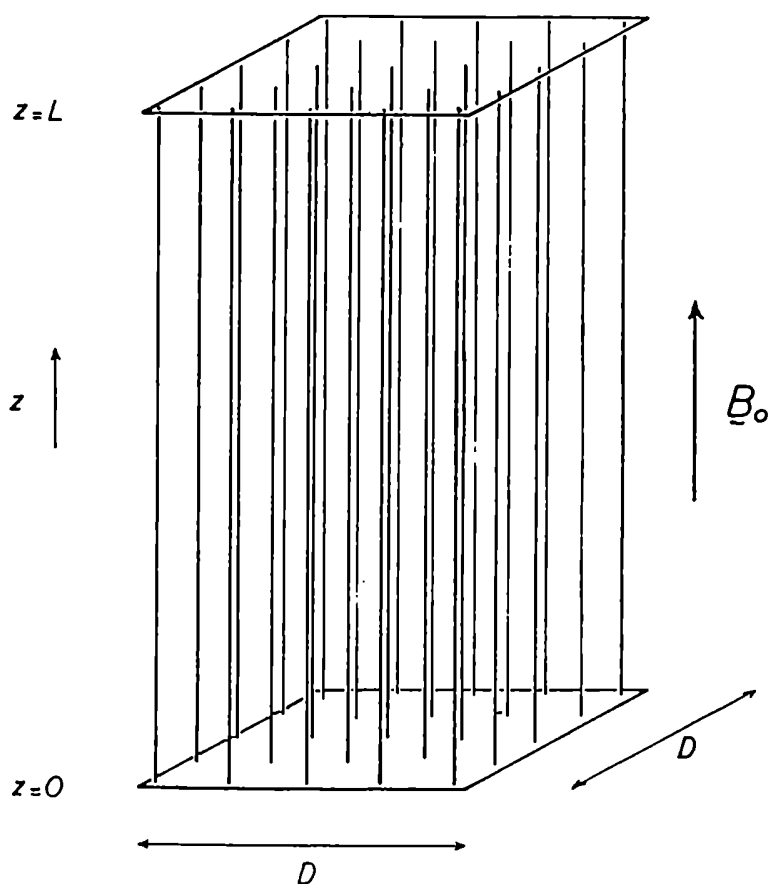
### 2.3. CALENTAMIENTO CORONAL POR DISIPACION DE TURBULENCIA MHD

En la presente sección mostraremos que la disipación Joule de turbulencia MHD es un mecanismo muy plausible para explicar el calentamiento de los loops coronales (Gómez y Ferro Fontán 1988). Bajo la hipótesis de que es alcanzado un estado turbulento estacionario, hacemos uso de ciertas propiedades de las ecuaciones MHD, tales como las cascadas de sus invariantes ideales (Hasegawa 1985), para derivar una tasa de calentamiento del plasma coronal. Puesto que estas son propiedades de las ecuaciones MHD incompresibles, no necesitamos suponer que el plasma se mantiene en un estado libre de fuerzas durante su evolución, como ha sido

supuesto en trabajos previos (v.gr. van Ballegooijen 1985, 1986).

Consideramos un loop coronal de longitud  $L$  y sección cuadrada de área  $D \times D$  y descartamos efectos toroidales pues  $D \ll L$ . El campo magnético es esencialmente uniforme y paralelo al eje del loop. Los extremos de cada línea magnética se encuentran profundamente anclados en la fotosfera como puede verse esquemáticamente en la Figura 8.

La elevada conductividad tanto de la fotosfera como de la corona,



*FIGURA 8: Estructura magnética no perturbada de un loop coronal. Los planos  $z = 0$  y  $z = L$  representan las bases del loop.*

aseguran el congelamiento de las líneas magnéticas al fluido, al menos en escalas macroscópicas. En virtud de esta condición, cada elemento de fluido de la región convectiva arrastra consigo la correspondiente línea magnética, induciendo de esta manera una compleja evolución de la componente transversal del campo magnético coronal. Las fuerzas de Lorentz que aparecen durante tal evolución, generan a su vez un campo de velocidades transversal. La interacción no lineal de estos campos origina el desarrollo de un ancho espectro de turbulencia en el espacio de Fourier. Dicha turbulencia evoluciona hacia un estado estacionario en el cual el trabajo realizado por la convección subfotosférica sobre el campo magnético se balancea con la disipación Joule en la microescala.

En la Figura 9 mostramos el mecanismo de excitación que acabamos de explicar. Un elemento de fluido subfotosférico se mueve típicamente una distancia  $\ell_p \approx 800$  km en un tiempo  $\tau_p \approx 13$  min. Luego, la velocidad característica de estos movimientos es  $u_p = \ell_p / \tau_p \approx 1 \text{ km.s}^{-1}$ . Los campos  $u$  y  $b$  generados en un lapso  $\tau_p$  son

$$b = - (1/\alpha) u \quad \alpha = \tau_A / \tau_p \ll 1 \quad (2.3.1a)$$

$$u \approx u_p \quad (2.3.1b)$$

como se desprende de la Figura 9. En (2.3.1a),  $b$  es la perturbación al campo magnético (ver (2.3.4a) más abajo). El valor típico de  $\tau_A$  (tiempo de tránsito de una onda de Alfvén a lo largo del loop) es de 30 seg.

Hemos debido revisar el cálculo de la fuerza viscosa, puesto que los iones en la corona están fuertemente magnetizados ( $\omega_{ci} \tau_i \approx 6.10^5$ ,  $\omega_{ci} = \frac{eB}{m_i c}$  : frecuencia de ciclotrón de iones,  $\tau_i$  : tiempo de colisiones ión-ión). Aplicando la teoría de transporte de Chapman-Enskog (Braginskii 1965) a la

geometría particular de nuestro campo de velocidades, la fuerza viscosa en el plano (x,y) resulta

$$F_v = \nu_3 \nabla \omega + \nu_1 \nabla^2 u \quad (2.3.2)$$

donde  $\nu_1$  y  $\nu_3$  son dos de los cinco coeficientes de viscosidad de Braginskii (1965)

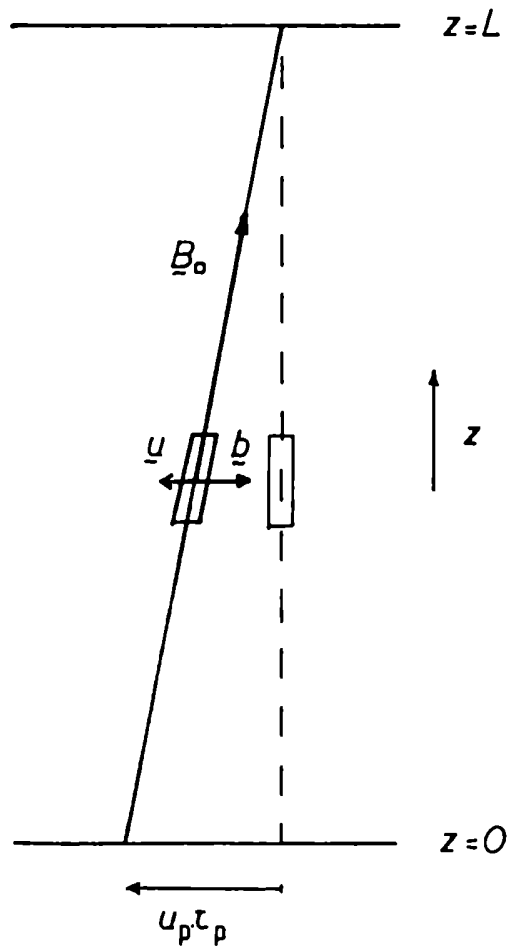


FIGURA 9: Diagrama esquemático de los campos  $u$  y  $b$  de un elemento de flujo coronal, generados por movimientos convectivos luego de un tiempo  $\tau_p$ .

$$\nu_1 = 0.31 \nu_0 (\omega_{ci} \tau_i)^{-2} \quad (2.3.3a)$$

$$\nu_3 = 0.52 \nu_0 (\omega_{ci} \tau_i)^{-1} \quad (2.3.3b)$$

$$\nu_0 = 0.96 (p/\rho) \tau_i \quad (2.3.3c)$$

$$y \quad \omega = \hat{z} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{u}.$$

El primer término en (2.3.2) es una fuerza irrotacional, de manera que representa una especie de presión y no tiene efectos disipativos. El segundo término es el habitual en ausencia de campo magnético, pero debe notarse que el coeficiente está multiplicado por un factor de atenuación  $0.31(\omega_{ci} \tau_i)^{-2} \approx 10^{-12}$ . Bajo las hipótesis que hemos hecho

$$\underline{B} = B_0 \hat{z} + \underline{b}(x, y, z, t) \quad \underline{b} \cdot \hat{z} = 0 \quad (2.3.4a)$$

$$\underline{u} = \underline{u}(x, y, z, t) \quad \underline{u} \cdot \hat{z} = 0 \quad (2.3.4b)$$

La suposición  $u_z = 0$  está bien justificada, puesto que la viscosidad inhibe fuertemente cualquier desplazamiento de plasma a lo largo del eje  $z$  debido al elevado valor del coeficiente  $\nu_0$ . Las ecuaciones de evolución para los campos  $\underline{u}$  y  $\underline{b}$  son

$$\partial_t \underline{b} = \underline{\nabla} \times (\underline{u} \times \underline{b}) + \eta \nabla^2 \underline{b} + B_0 \partial_z \underline{u} \quad (2.3.5a)$$

$$\partial_t \underline{u} = -(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} - \underline{\nabla} (p/\rho - \nu_3 \omega) + j \hat{z} \times \underline{b} + \nu_1 \nabla^2 \underline{u} + B_0 \partial_z \underline{b} \quad (2.3.5b)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{b} \quad j = \hat{z} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{b} \quad (2.3.5c)$$

donde la notación utilizada reserva el operador  $\nabla$  solo para las derivadas en el plano  $(x,y)$ , escribiendo explícitamente las derivadas respecto de la variable  $z$  ( $\partial_z$ ). Hemos despreciado términos de tipo  $(\eta,\nu)\partial_{zz}$  porque consideramos la dependencia en  $z$  mucho más suave que en  $(x,y)$ . Sin embargo, retenemos los términos  $B_0\partial_z$ , porque como veremos, pueden resultar del mismo orden que los términos no lineales. Deseamos aclarar aquí que la incompresibilidad no es una hipótesis necesaria en este modelo, sino una consecuencia de (2.3.4a-b) y de la ecuación (2.3.1a) (ver también van Ballegoijen 1986).

Debido a que los campos  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{b}$  son solenoidales (ecuaciones (2.3.5c)), pueden respectivamente escribirse en términos de una función corriente  $\hat{z}\psi(x,y,z,t)$  y un potencial vector  $\hat{z}\mathbf{a}(x,y,z,t)$

$$\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{x}}(\hat{z}\psi) \quad (2.3.6a)$$

$$\mathbf{b} = \nabla_{\mathbf{x}}(\hat{z}\mathbf{a}) \quad (2.3.6b)$$

El hecho que estos potenciales apunten en la dirección  $z$ , presupone una particular elección de medida. Dichos potenciales pueden representarse a través de sendas series de Fourier

$$\mathbf{a}(x,y,z,t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(z,t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \quad (2.3.7a)$$

$$\psi(x,y,z,t) = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}(z,t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \quad (2.3.7b)$$

donde  $\mathbf{x} = (x,y)$  y  $\mathbf{k} = 2\pi D^{-1}(n_x, n_y)$  con  $n_{x,y}$  enteros. Las ecuaciones de

evolución para los coeficientes Fourier de los campos son

$$(\partial_t + \eta k^2) b_k = B_0 \partial_z u_k + i \sum_{k=k_1+k_2} k \times (u_{k_1} \times b_{k_2}) \quad (2.3.8a)$$

$$(\partial_t + \nu_1 k^2) u_k = B_0 \partial_z b_k + i \sum_{k=k_1+k_2} [(k_1 \times b_{k_1}) \times b_{k_2} - (k_2 \cdot u_{k_1}) u_{k_2}]_{\perp} \quad (2.3.8b)$$

$$k \cdot u_k = 0 = k \cdot b_k \quad (2.3.8c)$$

donde  $[A_{\perp}]_{\perp} = A_{\perp} (k)^{-2} k_i k_j A_j$  es la componente de un vector  $A$  perpendicular a  $k$ . Los términos proporcionales a  $\eta$  o  $\nu_1$  son los responsables de la disipación de energía en el sistema. Los del tipo  $B_0 \partial_z$  representan la interacción de la turbulencia en el plano  $z_0$  con turbulencias vecinas en los planos  $z = z_0 \pm \Delta z$ , mientras que los términos no lineales tienen en cuenta el acoplamiento de diferentes modos Fourier.

En el caso estrictamente bidimensional ( $\partial_z = 0$ ) e ideal ( $\nu_1 = 0 = \eta$ ), hay como vimos tres invariantes globales que resisten el truncamiento a un número grande pero finito de modos, la energía (cinética + magnética)  $W$ , la helicidad  $A$  y la helicidad cruzada  $H$ . La expresión de los mismos en términos de los coeficientes de Fourier de los potenciales  $a$  y  $\psi$  es

$$W = W_U + W_B = \frac{1}{2D^2} \int d^2x \langle u^2 + b^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_k k^2 \langle |a_k|^2 + |\psi_k|^2 \rangle \quad (2.3.9a)$$

$$A = \frac{1}{2D^2} \int d^2x \langle a^2 / \ell_p^2 \rangle = \frac{1}{2\ell_p^2} \sum_k \langle |a_k|^2 \rangle \quad (2.3.9b)$$

$$H = \frac{1}{2D^2} \int d^2x \langle u \cdot b \rangle = \frac{1}{2} \sum_k k^2 \langle a_k^* \cdot \psi_k \rangle \quad (2.3.9c)$$

La existencia de estas constantes de movimiento ha permitido calcular funciones de distribución de equilibrio correspondientes a un ensemble canónico (Fyfe y Montgomery 1976), en el espacio de fases formado por los coeficientes Fourier de  $a$  y  $\psi$ . Los corchetes  $\langle \rangle$ , como dijimos, representan promedios sobre el ensemble de condiciones iniciales.

Cuando tanto la dependencia en  $z$  como la disipación son admitidas en el problema, los citados invariantes se tornan funciones de  $z$  y del tiempo y las correspondientes ecuaciones de evolución son

$$\partial_t W = 2B_0 \partial_z H - \frac{2\eta}{D^2} \int d^2x \langle j^2 \rangle - \frac{2\nu_1}{D^2} \int d^2x \langle \omega^2 \rangle \quad (2.3.10a)$$

$$\partial_t A = \frac{B_0}{D^2} \int d^2x \langle a \partial_z \psi \rangle - 2\eta W_B \quad (2.3.10b)$$

$$\partial_t H = \frac{B_0}{2} \partial_z W - \frac{\eta + \nu_1}{2D^2} \int d^2x \langle j\omega \rangle \quad (2.3.10c)$$

De manera que, al menos en teoría, existe la posibilidad de alcanzar estados de equilibrio toda vez que los términos de fuerza externa ( $B_0 \partial_z$ ) resulten comparables a aquellos términos que describen la disipación de los invariantes ideales.

Para modos Fourier cuyas longitudes de onda resulten muy inferiores al tamaño del sistema ( $k \gg 2\pi/D$ ), podemos hacer la suposición de turbulencia isotrópica (Kraichnan y Montgomery 1980), de manera que los promedios sobre el ensemble solo dependan de  $|\mathbf{k}|$ . Definimos entonces invariantes ideales por unidad de número de onda

$$W(k) = \frac{D^2 k}{4\pi} \langle |u_k|^2 + |b_k|^2 \rangle \quad (2.3.11a)$$



$$A(k) = \frac{D^2 k}{4\pi \ell_p^2} \langle |a_k|^2 \rangle \quad (2.3.11b)$$

$$H(k) = \frac{D^2 k}{8\pi} \langle u_k \cdot b_k^* + b_k \cdot u_k^* \rangle \quad (2.3.11c)$$

Las ecuaciones de evolución para estas cantidades son

$$\partial_t W(k) + 2k^2 [\eta W^B(k) + \nu_1 W^U(k)] = 2B_0 \partial_z H(k) + T_W(k) \quad (2.3.12a)$$

$$(\partial_t + 2\eta k^2) A(k) = \frac{D^2 k}{4\pi \ell_p^2} B_0 \langle a_k^* \partial_z \psi_k + a_k \partial_z \psi_k^* \rangle + T_A(k) \quad (2.3.12b)$$

$$(\partial_t + (\nu_1 + \eta) k^2) H(k) = \frac{B_0}{2} \partial_z W(k) + T_H(k) \quad (2.3.12c)$$

donde los términos T expresan la tasa promedio de excitación de modos con  $|k|=k$  debido a interacciones no lineales con los demás

$$T_W(k) = i \left(\frac{D}{2\pi}\right)^4 k^3 d^2 k_1 d^2 k_2 \delta(k-k_1-k_2) \langle b_k^* \cdot k \times (u_{k_1} \times b_{k_2}) + u_k^* \cdot (k_1 \times b_{k_1}) \times b_{k_2} \rangle \quad (2.3.13a)$$

$$T_A(k) = \left(\frac{D}{2\pi}\right)^4 \ell_p^{-2} k^3 d^2 k_1 d^2 k_2 \delta(k-k_1-k_2) \langle a_k^* \cdot u_{k_1} \times b_{k_2} \rangle \quad (2.3.13b)$$

$$T_H(k) = i \left(\frac{D}{2\pi}\right)^4 k^3 d^2 k_1 d^2 k_2 \delta(k-k_1-k_2) \langle b_k^* \cdot (k_1 \times b_{k_1}) \times b_{k_2} \rangle \quad (2.3.13c)$$

En la Figura 10 mostramos el espectro estacionario de energía, el cual se deriva a partir de argumentos similares a los empleados por Kolmogorov en la turbulencia de Navier-Stokes tridimensional, aunque también existen

versiones más rigurosas (Kraichnan y Montgomery 1980).

La turbulencia es excitada a una escala espacial  $k_p = 2\pi/\ell_p$ , que corresponde al tamaño característico de los vórtices subfotosféricos. La energía inyectada en este número de onda, es transportada hacia números de onda cada vez mayores hasta una escala  $k_d$  donde este proceso de cascada es balanceado por disipación resistiva o viscosa.

Por otra parte, la helicidad  $A$  sufre una cascada inversa desde  $k_p$  hacia

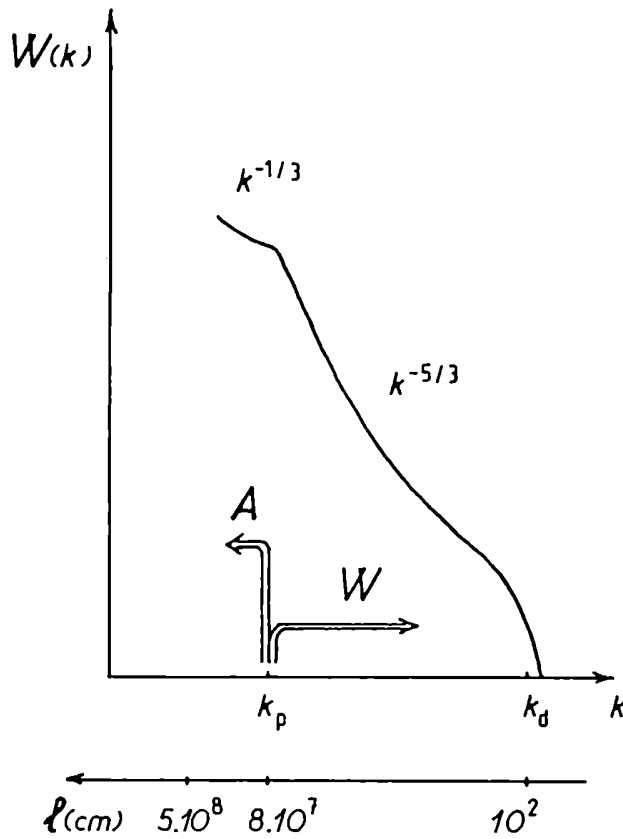


FIGURA 10: Espectro isótropo y estacionario de energía de turbulencia MHD bidimensional. Las flechas indican la dirección de las cascadas de  $A$  y  $W$  en sus correspondientes rangos inerciales. En la coordenada  $\ell$  se indican longitudes típicas.

números de onda menores, en un proceso de autoorganización que puede interpretarse como formación de estructuras macroscópicas o islas magnéticas. No obstante, debe recordarse que nuestra suposición de turbulencia isótropa deja de ser válida a escalas espaciales comparables al diámetro del loop, y en consecuencia la evolución de estas islas magnéticas no puede ser correctamente descripta. Hossain, Matthaeus y Montgomery (1983) hallan numericamente que esta condensación de estructura magnética en los números de onda menores, es saturada por disipación Joule de la cantidad A. El tiempo característico para este proceso de saturación es  $\tau \approx D^2/8\pi^2\eta$ , que para un loop coronal típico corresponde a  $10^4$  años. Este tiempo es marcadamente superior a la vida media de loops coronales, lo cual indica que el rango inercial de A es una región no estacionaria pero muy debilmente creciente. La energía turbulenta que es transferida hacia la macroescala es solo una ínfima fracción de la energía liberada durante una fulguración. Luego, a pesar de nuestras expectativas, esta cascada inversa de helicidad no parece tener vinculación con los procesos explosivos de liberación de energía que tienen lugar en la corona solar.

Usaremos ahora algunos argumentos heurísticos para derivar el espectro estacionario que es válido en el rango inercial de energía ( $k_p \ll k \ll k_d$ ). Esta región es caracterizada por la ausencia de fuentes o sumideros de excitaciones turbulentas, de manera que el flujo de energía resulte constante a lo largo del espectro. Entonces

$$kT_w(k) = \text{cte.} \quad (2.3.14)$$

lo cual implica (Kraichnan y Montgomery 1980)

$$W(k) = C.k^{-5/3} \quad (2.3.15)$$

que es el conocido espectro de potencias de Kolmogorov. Denotaremos con  $\varepsilon$  la energía inyectada por unidad de tiempo en la escala  $k_p$ . Esta cantidad  $\varepsilon$  puede estimarse como  $k_p$  veces el término de fuente  $2B_o \partial_z H(k)$  en la ecuación (2.3.12a), y puede interpretarse como el trabajo realizado por los movimientos convectivos sobre el campo magnético coronal en un tiempo  $\tau_p$ , dividido por este tiempo de excitación característico. Obtenemos

$$\varepsilon = u_p^2 \tau_p / \tau_A^2 \quad (2.3.16)$$

Igualando este flujo de energía que ingresa al sistema con la cascada no lineal (es decir igualando los dos términos del miembro derecho de (2.3.12a)) en el número de onda  $k_p$ , podemos hallar el valor de la constante C de (2.3.15) de manera tal que el espectro de energía expresado en términos de parámetros conocidos resulta

$$W(k) = \pi(\varepsilon/2\alpha)^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.3.17)$$

A escalas suficientemente microscópicas existe un número de onda  $k_d$  donde la cascada de energía resulta comparable al término de disipación Joule (es decir,  $T_w(k) = 2\eta k^2 W^B(k)$ )

$$k_d = (\alpha^2 \varepsilon / 2\pi^3 \eta^3)^{1/4} \quad (2.3.18)$$

Llegados a este punto, deseamos comentar algunas diferencias entre nuestros resultados (2.3.16) y (2.3.18) y las correspondientes predicciones de van Ballegoijen (1986), las cuales fueron presentadas en la sección 2.2. Primeramente queremos recordar que van Ballegoijen calcula la

evolución de un campo magnético libre de fuerzas, mientras que nosotros consideramos el conjunto completo de ecuaciones MHD. El establece que el régimen estacionario es alcanzado cuando la cascada alcanza el número de onda cuyo tiempo característico de disipación es del orden de  $\tau_p$ . Como consecuencia de ello, su tasa de calentamiento resulta dependiente de la resistividad, lo cual no es razonable por tratarse de un estado estacionario en el cual la tasa de calentamiento debe ser igual al trabajo realizado desde el exterior por unidad de tiempo. En virtud de esta diferencia, el valor de  $k_d$  que obtuvimos resulta mucho mayor que el derivado por van Ballegooijen.

La disipación viscosa es despreciable en comparación con el efecto Joule, aún teniendo en cuenta que los coeficientes  $\nu_1$  y  $\eta$  son comparables. Esto es consecuencia del hecho que  $u/b \approx \alpha \ll 1$ . Deseamos aclarar sin embargo, que la tasa de calentamiento viscoso resulta fuertemente dependiente de la geometría del campo de velocidades cuando hay campos magnéticos presentes. Por este motivo, otras configuraciones de plasma pueden presentar efectos viscosos importantes, como en el caso de capas neutras (Gratton et al. 1987) o en ciertas regiones de la corona (Hollweg 1986b).

El espectro estacionario de energía turbulenta es alcanzado en un tiempo  $\tau \approx W/\varepsilon \approx \tau_p$ , y a partir de allí el trabajo realizado por la convección subfotosférica balancea la energía disipada por efecto Joule. Por esta razón, es lícito afirmar que la cantidad  $\varepsilon$  calculada en (2.3.16) es la tasa de calentamiento del plasma coronal. Este resultado no es nuevo en realidad, algunas veces simplemente se lo ha postulado (Sturrock y Uchida 1981) y otras se han propuesto diversos mecanismos de disipación (Parker 1983a-b, Heyvaerts y Priest 1984). Lo que sí resulta novedoso, es

la descripción de las etapas intermedias que atraviesa la energía desde que es inyectada en la escala macroscópica de los vórtices subfotosféricos hasta que es disipada en la microescala. La tasa de calentamiento obtenida, expresada como flujo de energía por unidad de tiempo resulta

$$F = \rho.L.\varepsilon = 8.10^5 . \mathcal{B}_2^2 . L_{10}^{-1} \quad (\text{erg/cm}^2 \text{s}) \quad (2.3.19)$$

donde  $\mathcal{B}_2$  es el campo magnético en unidades de  $10^2$  Gauss y  $L_{10}$  es la longitud del loop en unidades de  $10^{10}$  cm. Este flujo es absolutamente comparable al obtenido por mediciones indirectas de flujo conductivo hacia la fotosfera (término de enfriamiento del plasma), que es de  $10^{5-7} \text{ erg.cm}^{-2} . \text{s}^{-1}$  (Withbroe y Noyes 1977). Queremos remarcar que tanto la expresión (2.3.19) como el flujo conductivo observado son solo crudas estimaciones, de manera que deben admitirse amplios márgenes de tolerancia al intentar su comparación. Por ejemplo Dowdy, Rabin y Moore (1985) encuentran que la geometría de la estructura magnética en la región de transición puede reducir las pérdidas coronales por conducción hasta en un orden de magnitud. También debe aclararse que un mejor conocimiento del espectro de turbulencia hidrodinámica de la subfotosfera, si bien no afectaría la validez de nuestro modelo, podría alterar significativamente la estimación formulada en (2.3.19).

### 3. ESTABILIDAD TERMICA

#### 3.1. EQUILIBRIO TERMICO Y ANALISIS LINEALES DE ESTABILIDAD

El desarrollo de modelos de equilibrio estático con el objeto de explicar las estructuras observadas en rayos X blandos, ha sido llevado a cabo por varios autores (Rosner, Tucker y Vaiana 1978, Craig, McClymont y Underwood 1978, Vesecky, Antiochos y Underwood 1979). La hipótesis de equilibrio encuentra su justificación en la larga vida media de los loops en comparación con los tiempos característicos de enfriamiento radiativo y conductivo. En estos modelos se supone un loop de semilongitud  $L$  como el de la Figura 11, con simetría tanto geométrica como dinámica con respecto al vértice.

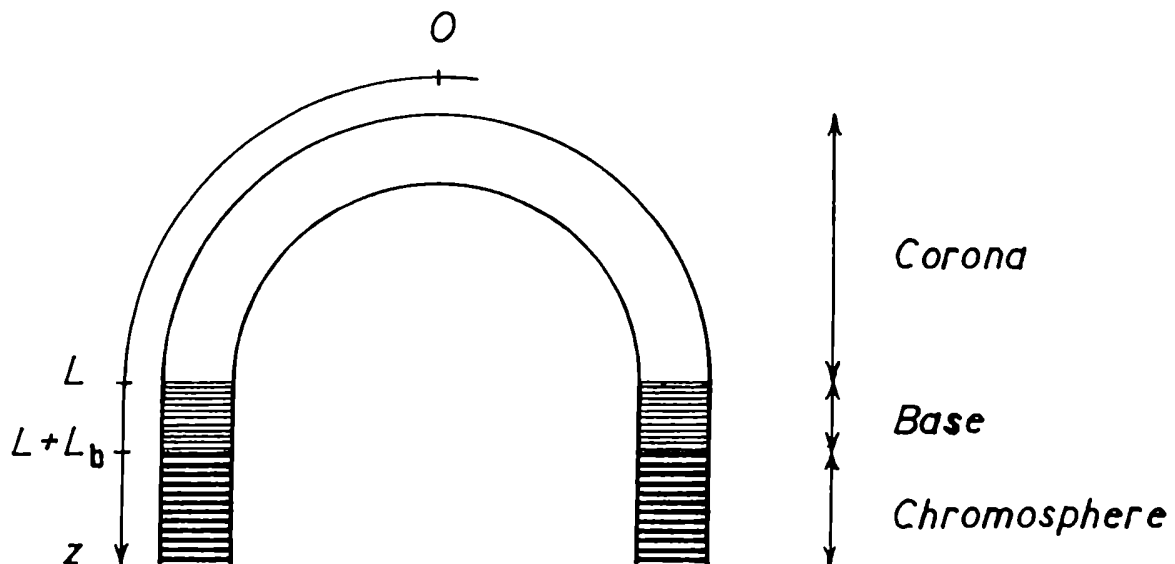


FIGURA 11: Vista esquemática de un loop coronal.

Las ecuaciones hidrodinámicas unidimensionales que describen el comportamiento del plasma confinado en el loop son, en el caso estático (es decir  $\partial_t = 0 = u$ )

$$\partial_z P_o = m_i n_o g \quad (3.1.1a)$$

$$\partial_z Q = E - P_o^2 \phi(T_o) \quad (3.1.1b)$$

donde

$$Q = -K_o T_o^{5/2} \partial_z T_o \quad (3.1.1c)$$

es la expresión de la conductividad térmica de Spitzer (válida para  $T > 1.5 \cdot 10^4 K$ ) con  $K_o = 10^{-6} \text{erg.K}^{-7/2} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  (Spitzer 1962). La cantidad  $P_o$  es la presión del fluido,  $n_o$  es el número de electrones (o de iones) por unidad de volumen,  $m_i$  es la masa del protón y  $g$  es la aceleración de la gravedad en la dirección paralela al loop.  $E$  es la tasa de calentamiento del plasma y  $\phi(T)$  es la función de pérdidas radiativas de un plasma a la temperatura  $T$  y presión constante. Hemos empleado el subíndice  $o$  para indicar que las funciones corresponden al estado de equilibrio. Estas ecuaciones se complementan con la ecuación de estado para el gas,

$$P_o = 2n_o k_B T_o \quad (3.1.2)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann.

El término  $P_o^2 \phi(T_o)$  en (3.1.1b) representa las pérdidas de energía por emisión de fotones en un plasma ópticamente delgado, es decir, en el caso en que los fotones emitidos no son reabsorbidos por el material y por lo



tanto la evolución de la radiación se desacopla de la evolución del fluido. El plasma que constituye la atmósfera solar puede considerarse ópticamente delgado en aquellas capas que se encuentran encima de la cromósfera, tales como la región de transición y la corona. La función  $\phi(T)$ , o equivalentemente la función  $\psi(T) = 4k_B^2 T^2 \phi(T)$ , ha sido calculada por varios autores (Cox y Tucker 1969, Mc Whirter, Thoneman y Wilson 1975, Raymond, Cox y Smith 1976) y a menos de detalles puntuales, se obtiene un comportamiento como el que muestra la Figura 12. Es usual, a fin de avanzar

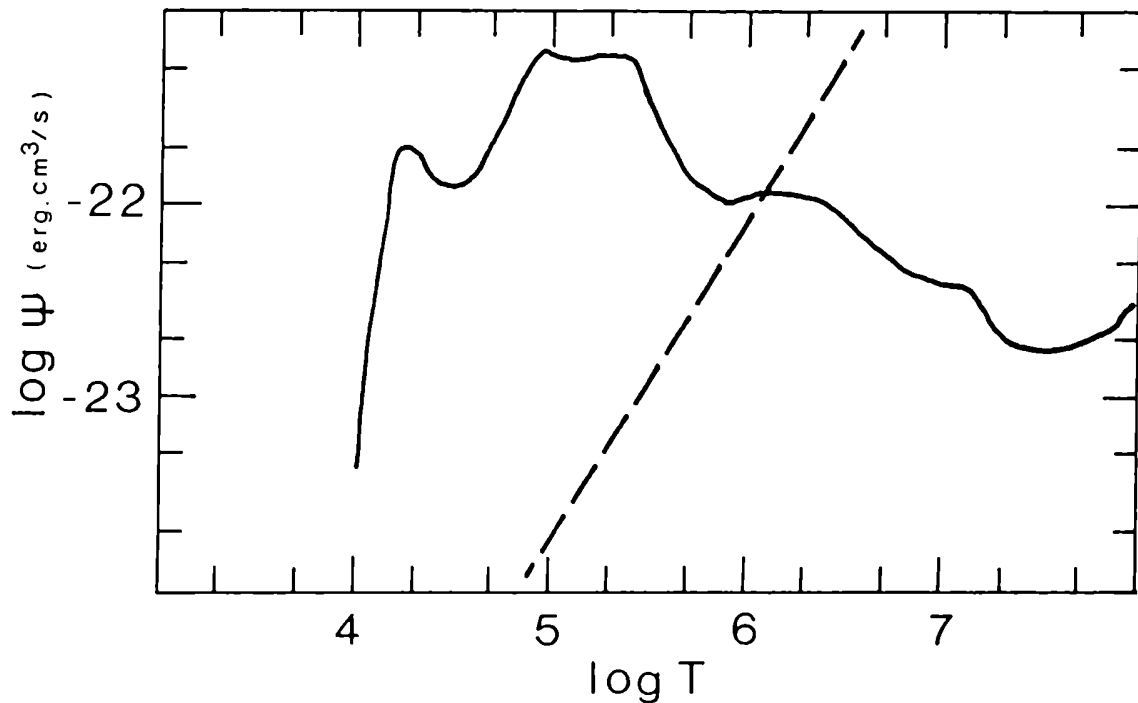


FIGURA 12: Función de pérdidas radiativas  $\psi(T)$  extraída de Rosner et al. (1978). El trazo punteado corresponde a la función  $E/n^2(T)$ .

en el cálculo analítico tanto del equilibrio como de su estabilidad, aproximar esta función por una secuencia continua de leyes de potencias definidas por tramos (Rosner, Tucker y Vaiana 1978, Hildner 1974, Craig y McClymont 1986). Se ha intentado extender la aplicabilidad de esta función a la región cromosférica ( $T \leq 2 \cdot 10^4 K$ ), definiendo una función ópticamente delgada efectiva, donde se incluyen efectos de plasma ópticamente grueso (McClymont y Canfield 1983). A pesar de que la validez de esta función efectiva parece bastante cuestionable (Athay 1986), su utilización en cálculos de equilibrio y estabilidad se ha extendido (McClymont y Craig 1986, Klimchuk, Antiochos y Mariska 1987, Gómez, Sicardi Schifino y Ferro Fontán 1988a), debido a que de otro modo se deberían resolver las ecuaciones de transporte radiativo consistentemente con las ecuaciones hidrodinámicas, aumentando enormemente la complejidad del problema.

Las ecuaciones (3.1.1-2) son relativamente sencillas de integrar en tres situaciones asintóticas, que no obstante son aplicables con buena aproximación a varias regiones de la superficie solar: la fotosfera, la cromósfera y la corona (incluida la región de transición). En la fotosfera se supone que la conductividad térmica es despreciable y que en cada punto se alcanza un equilibrio entre la materia y el campo de radiación (equilibrio termodinámico local), de forma tal que la fotosfera puede considerarse esencialmente isotérmica. Esta hipótesis permite integrar trivialmente la ecuación (3.1.1a) obteniendo

$$P_o(z) = P_o(L) \cdot \exp\left(\frac{m_i g(z-L)}{2k_B T_o}\right) \quad z > L \quad (3.1.3a)$$

$$T_o(z) = T_o = \text{const.} \quad (3.1.3b)$$

que indica un fuerte incremento de presión y densidad a profundidades

características de

$$H = \frac{2k_B T_0}{m_i g} \approx 300 \text{ km} \quad (3.1.4)$$

La magnitud  $H$  es la denominada escala de alturas y, como vimos, crece proporcionalmente a la temperatura del gas. Tanto en la cromósfera ( $T \approx 3 \cdot 10^4 \text{ K}$ ) como en la corona ( $T \approx 10^6 \text{ K}$ ), las correspondientes escalas de altura son superiores a las dimensiones de dichas regiones. Esto permite, en primera aproximación, despreciar el término gravitatorio en (3.1.1a), reduciendo la ecuación de equilibrio dinámico a

$$P_0(z) = P_0 = \text{const.} \quad (3.1.5)$$

tanto en la cromósfera como en la corona. En cambio, en estas regiones, el plasma resulta prácticamente transparente a la radiación, de manera que los fotones son incapaces de homogeneizar el campo de temperaturas y debe resolverse en cambio la ecuación de balance energético (3.1.1b). En la cromósfera la conductividad térmica es prácticamente despreciable, razón por la cual vale aproximadamente un equilibrio entre la tasa de calentamiento y las pérdidas radiativas. En la Figura 12 mostramos que una vez fijados los valores de tasa de calentamiento y presión, se obtiene el valor de equilibrio de temperatura cromosférica. Como para temperaturas típicas de la cromósfera, la función  $\psi(T)$  es monótona creciente, se puede inferir que la cromósfera es estable frente a perturbaciones en su temperatura. Un eventual incremento (reducción) de temperatura cromosférica origina un aumento (disminución) de pérdidas por radiación, produciendo así un efecto tendiente a reestablecer el equilibrio perturbado. En cambio, a través del mismo razonamiento, es fácil comprender que la corona es

intrinsecamente inestable (ver Figura 12), es decir que es incapaz de mantener un equilibrio entre la tasa de calentamiento del plasma y la función de pérdidas radiativas (Field 1965). En la corona, como veremos a continuación, el rol del flujo conductivo es entonces de capital importancia.

Las ecuaciones (3.1.1b-c) presentan una completa analogía con la ecuación de Newton que describe la dinámica de una partícula de "masa"  $\frac{2}{7} K_o$ , donde  $T^{7/2}$  cumple el rol de la "posición", la coordenada  $z$  hace las veces de "tiempo" y el miembro derecho de (3.1.1b) se comporta como "suma de fuerzas" derivables de un potencial. En virtud de esta analogía, resulta inmediato obtener una primera integral de (3.1.1b), que corresponde a la conservación de la "energía" y que permite conocer el flujo conductivo (velocidad) en función de la temperatura (posición)

$$\frac{1}{2} Q^2(T_o) = K_o \int_{T_o(L)}^{T_o} (P_o^2 \phi(T) - E) T^{5/2} dT \quad (3.1.6)$$

Debido a la simetría del loop respecto de su vértice, resulta  $Q(z=0)=0$ , siendo  $Q(z=L)=0$  una condición que hemos impuesto para obtener un buen empalme con la solución cromosférica

$$P_o^2 \phi(T_o(L)) = E \quad (3.1.7)$$

De la condición  $Q(z=0)=0$ , es decir

$$\int_{T_o(L)}^{T_o(0)} (P_o^2 \phi(T) - E) T^{5/2} dT = 0 \quad (3.1.8)$$

podemos obtener el valor correspondiente a la temperatura del vértice ( $T_o(z=0)$ ). Utilizando la expresión (3.1.1c), puede al menos formalmente completarse la integración del problema

$$z = L - K_o \int_{T_o(L)}^{T_o(z)} dT \cdot \frac{T^{5/2}}{Q(T)} \quad (3.1.9)$$

de la cual obtenemos una condición extra

$$L = K_o \int_{T_o(L)}^{T_o(0)} dT \cdot \frac{T^{5/2}}{Q(T)} \quad (3.1.10)$$

que fija el valor de la presión (que es constante a lo largo del loop) para una dada tasa de calentamiento. Esta es solo una de las posibles elecciones de condiciones de contorno (ver otras en Rosner, Tucker y Vaiana 1978, Withbroe 1981), pero presenta la ventaja (que explotaremos en 3.5.) de definir una familia de equilibrios cromósfera-corona con la tasa de calentamiento como único parámetro externo.

En general, en los equilibrios de loops termicamente aislados (es decir que satisfacen  $Q(L)=0$ ) y como consecuencia de las ecuaciones (3.1.8) y (3.1.10), los parámetros clave tales como la presión, temperatura en el vértice y tasa de calentamiento, se vinculan entre si a través de dos ecuaciones llamadas leyes de escala. Rosner, Tucker y Vaiana (1978) obtuvieron

$$T_o(0) = 1.37 \cdot 10^3 \text{K} \cdot \text{erg}^{-1/3} \cdot \text{cm}^{-2/3} (P_o L)^{1/3} \quad (3.1.11a)$$

$$E = 9.8 \cdot 10^4 \text{erg}^{-1/6} \cdot \text{cm}^{4/3} \cdot \text{s}^{-1} \cdot P_o^{7/6} \cdot L^{-5/6} \quad (3.1.11b)$$

Estas leyes de escala son muy robustas en el sentido de que permanecen esencialmente inalteradas frente a cambios en la condición de contorno cromosférica o en la función de pérdidas radiativas, variabilidad en la sección del tubo magnético u otras variantes sugeridas por distintos autores (Craig, McClymont y Underwood 1978, Antiochos, Vesecky y Underwood 1979, Gómez, Sicardi Schifino y Ferro Fontán 1988a). La relación (3.1.11a) coincide además satisfactoriamente con resultados observacionales obtenidos en un amplio rango de valores de los parámetros intervinientes (Withbroe 1981).

Debe tenerse en cuenta que aún en el caso que una solución estática sea matemáticamente posible, la misma no será físicamente realizable a menos que resulte estable frente a pequeñas perturbaciones. Es bien sabido que el plasma coronal es susceptible de sufrir inestabilidades térmicas debido (como dijimos) a la forma en que la función de pérdidas radiativas depende de la temperatura (Field 1965). La teoría lineal de estabilidad térmica de equilibrios estáticos, ha sido investigada por varios autores, aunque con conclusiones no siempre coincidentes. Antiochos (1979) y posteriormente Hood y Priest (1980) hallaron que los equilibrios estáticos resultan térmicamente inestables. Sin embargo, Chiuderi, Einaudi y Torricelli-Ciamponi (1981), Craig y McClymont (1981) y McClymont y Craig (1985a-b) encontraron que estos equilibrios son o bien estables o presentan inestabilidades con tiempos de crecimiento extremadamente largos.

La diferencia en los resultados de estos estudios reside en el distinto comportamiento que sugirieron para las bases de los loops. Ni Antiochos (1979) ni Hood y Priest (1980) incluyeron material frío ( $T < 10^5$  K) en sus respectivos modelos, y además Antiochos (1979) considera perturbaciones con flujo conductivo nulo en las bases. Tanto Chiuderi, Einaudi y Torricelli-Ciamponi (1981) como Craig y McClymont (1981) advierten acerca

de la importancia que estas suposiciones tienen sobre el cálculo del tiempo de crecimiento de inestabilidades. El problema podría incluso tornarse estable ya sea incorporando material cromosférico en el modelo (Craig y McClymont 1981) o cambiando las condiciones de contorno de manera que las perturbaciones térmicas se anulen en la base (Chiuderi, Einaudi y Torricelli-Ciamponi 1981).

En trabajos más recientes (Antiochos et al. 1985, McClymont y Craig 1985a-b) se analizaron las condiciones de contorno en mayor profundidad. Antiochos et al. (1985), suponiendo que todas las variables hidrodinámicas son de la forma

$$f(z,t) = f_0(z) + e^{\nu t} f_1(z) \quad (3.1.12)$$

y que el tiempo de crecimiento de inestabilidades ( $1/\nu$ ) es largo comparado con el tiempo de viaje de una onda acústica en el loop (es decir  $(L\nu)^2 \ll T/m_1$ ), obtienen

$$\nu n_1 + \partial_z (n_0 u_1) = 0 \quad (3.1.13a)$$

$$\partial_z P_1 = m_1 n_1 g \quad (3.1.13b)$$

$$\frac{3}{2}(\nu P_1 + u_1 \partial_z P_0) - \frac{5}{2} \frac{P_0}{n_0} (\nu n_1 + u_1 \partial_z n_0) + \partial_z Q_1 = -2n_0 n_1 \psi(T_0) - n_0^2 \frac{d\psi}{dT_0} T_1 \quad (3.1.13c)$$

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{n_1}{n_0} + \frac{T_1}{T_0} \quad (3.1.13d)$$

donde

$$Q_1 = -K_0 \partial_z (T_0^{5/2} T_1) \quad (3.1.13e)$$

Resulta evidente en estas ecuaciones, que las mismas requieren la fijación de cuatro condiciones de contorno sobre las perturbaciones  $f_1(z)$ . Una de estas condiciones está generalmente vinculada a propiedades térmicas de la base: por ejemplo, con respecto a la perturbación coronal la base puede actuar como baño térmico, en cuyo caso la condición de contorno adecuada es  $T_{1b} = 0$ , o puede actuar como aislante térmico de manera que la condición sea entonces  $Q_{1b} = 0$ . La otra condición generalmente se refiere a propiedades inerciales de la base: por ejemplo, puede actuar como una pared rígida con respecto a la perturbación de manera que  $u_{1b} = 0$ , o como una superficie libre y por lo tanto  $P_{1b} = 0$ . Si bien a lo largo de la literatura la discusión se ha centrado sobre estas condiciones de contorno, es necesario recordar que hay un número infinito de condiciones de contorno posibles, y que a priori son igualmente aceptables. La pregunta es ¿Qué elección de condiciones de contorno representa mejor el comportamiento de las bases del loop? Resulta razonable pensar que tales condiciones no afecten las propiedades de estabilidad de la corona, y la forma más intuitiva de lograr esto consiste en ubicar las bases suficientemente debajo de la región de transición de manera que en tiempos característicos de cualquier inestabilidad, sus efectos no lleguen a propagarse hasta las bases. Sin embargo, el tiempo de tránsito de ondas acústicas en la corona, cromósfera y aún en la fotosfera es muy corto comparado con escalas térmicas características. En estas escalas temporales, el material de las bases del loop está siempre en contacto con el plasma coronal, aún suponiendo que dichas bases se encuentren en la fotosfera. Nótese que el haber despreciado el término de aceleración en (3.1.13b) corresponde a suponer velocidad del sonido infinita. Veremos a continuación que a pesar de esta situación,



afortunadamente el efecto de las bases sobre el análisis de estabilidad coronal puede resultar despreciable en ciertas condiciones.

A fin de determinar las condiciones de contorno físicamente adecuadas, se requiere definir un modelo que describa el comportamiento de las bases frente a perturbaciones coronales. Supongamos que la cromósfera es aproximadamente isotérmica con temperatura  $T_b$ , se encuentra en equilibrio hidrostático y es térmicamente estable. La forma de las condiciones de contorno se obtiene del simple requisito de que las perturbaciones que tienen lugar en la corona decaigan a cero o al menos se conserven acotadas en la cromósfera. Combinando (3.1.13b) y (3.1.13d) puede obtenerse una expresión para la perturbación en la presión, en términos de la perturbación en la temperatura

$$\frac{P_1(z)}{P_0(z)} = \frac{P_1(0)}{P_0(0)} - \int_0^z \frac{T_1}{T_0} \frac{dz}{H(T_0)} \quad (3.1.14)$$

donde  $H(T)$  es la escala de alturas gravitatoria definida en (3.1.4). Es evidente en la ecuación (3.1.14) que para conservar acotado  $P_1(z)$  en el límite  $z \rightarrow \infty$ , la perturbación térmica debe tender a cero. La perturbación  $T_1(z)$  debe decaer considerablemente en distancias del orden de una escala de alturas cromosférica ( $H(T_b)$ ) debido a que la presión de equilibrio  $P_0$  crece exponencialmente en dicha escala. Puede concluirse entonces, que la condición de contorno adecuada para la perturbación térmica resulta ser  $T_{1b} = 0$ , lo cual es físicamente razonable. Cualquier perturbación en la temperatura implica una alteración de la escala de alturas. Si la perturbación térmica se extendiera en la cromósfera a lo largo de varias escalas de altura, originaría importantes perturbaciones en la presión como consecuencia de la variación en  $H(T)$ .

Para fijar las condiciones de contorno inerciales, integramos la ecuación de continuidad (3.1.13a) y obtenemos una expresión para el flujo de partículas  $n_o u_1$  en términos de la perturbación de densidad  $n_1$

$$n_o(z)u_1(z) = n_o(0)u_1(0) - \nu \int_0^z n_1 dz \quad (3.1.15)$$

Con razonamientos similares a los empleados para (3.1.14), obtenemos que para que  $n_o u_1$  se mantenga acotado para  $z \rightarrow \infty$ ,  $n_1$  debe decaer a cero con la profundidad. Si la perturbación de densidad se extendiera a grandes profundidades, la variación en el número total de partículas en estas regiones sería muy grande, indicando que debería existir un importante flujo de partículas.

Las condiciones de contorno apropiadas resultan ser entonces  $T_{1b} = 0 = n_{1b}$ . Si bien las perturbaciones de temperatura, presión y densidad deben cancelarse en las bases, no necesariamente debe ocurrir lo mismo con el flujo de masa. Usando (3.1.13a-b), podemos vincular el flujo de masa a la perturbación de presión

$$n_o(z)u_1(z) = n_o(0)u_1(0) - \frac{\nu}{mg}(P_1(z) - P_1(0)) \quad (3.1.16)$$

Puesto que la perturbación decae con la profundidad, el flujo de masa tenderá en general a cierta constante finita, indicando un flujo cromosférico estacionario. Por supuesto,  $u_1$  debe decrecer con la profundidad en forma exponencial, para compensar el crecimiento de  $n_o$ .

Examinemos ahora el efecto que produce utilizar distintas condiciones de contorno, en particular la condición de pared rígida. Queremos hallar como depende la presión coronal de estas condiciones, por ejemplo, como

depende  $P_1(0)$  de  $n_{ob} u_{1b}$ . De la ecuación (3.1.16) se sigue que especificar el flujo de masa en la base equivale a especificar la perturbación de presión en dicho extremo, pero debido a (3.1.14)

$$P_1(0) = \frac{P_o(0)}{P_{ob}} P_{1b} + P_o(0) \int_0^L \frac{T_1}{T_o} \frac{dz}{H(T_o)} \quad (3.1.17)$$

El efecto sobre la perturbación coronal  $P_1(0)$  de suponer  $P_{1b}$  no nulo, está dado por el primer término del miembro derecho de (3.1.17). Este término es de orden  $P_o(0)/P_{ob}$  para perturbaciones de temperatura que decrecen fuertemente en la cromósfera, de manera que la perturbación de presión es proporcional al valor de equilibrio. Sin embargo si la base se halla a suficiente profundidad, el cociente  $P_o(0)/P_{ob}$  es muy pequeño y entonces la perturbación coronal  $P_1(0)$  se vuelve insensible a la elección de  $P_{1b}$ .

Una vez analizado el efecto de las condiciones de contorno, Antiochos et al. (1985) calcularon tasas de crecimiento de inestabilidades y autofunciones del problema en forma numérica. Encuentran que si las bases del loop son ubicadas a suficiente profundidad en la cromósfera, cualquier condición de contorno es adecuada. Sin embargo, las condiciones  $T_{1b} = 0 = n_{1b}$  impuestas en ambas bases tienen la ventaja de que aún cuando solo se incluya una delgada capa cromosférica en el modelo, se obtiene la tasa de crecimiento y autofunciones correctas. Contrariamente a las conclusiones de otros autores (Habbal y Rosner 1979, Chiuderi, Einaudi y Torricelli-Ciamponi 1981, Craig y McClymont 1981), la mera presencia de material radiativamente estable en la base del loop no estabiliza los modelos estáticos. Si se utilizan condiciones de contorno incorrectas, entonces la base puede tanto estabilizar como desestabilizar los equilibrios estáticos. En cambio, si se emplean condiciones de contorno

adecuadas, el material de la base no cumple un papel decisivo en la estabilidad (Antiochos et al. 1985). Estos autores hallan numericamente que, para las suposiciones que ellos realizaron, los equilibrios estáticos de loops coronales son termicamente inestables.

McClymont y Craig (1985a-b), para poder avanzar analíticamente en el cálculo de estabilidad, desprecian efectos gravitatorios en la corona y región de transición así como también la conductividad térmica en la cromósfera. El empalme de las soluciones entre estas regiones resulta posible porque existe una región de la alta cromósfera donde tanto la gravedad como la conductividad pueden despreciarse en primera aproximación. Dado que la escala en la cual los efectos gravitatorios resultan apreciables ( $H(T_b) \approx 300$  km) es mucho mayor que el rango de influencia de la conductividad en la cromósfera ( $\approx 1$  km según estos autores, ver también Gómez, Sicardi Schifino y Ferro Fontán 1988a), la base puede ubicarse en cualquier punto de la alta cromósfera, situado a una profundidad intermedia entre 1km y 300 km. Los estudios numéricos de McClymont y Craig (1985a) indican que las tasas de crecimiento y autofunciones alcanzan expresiones asintóticas a una profundidad de  $\approx 10$  km, en este punto el cociente entre el flujo conductivo y las pérdidas radiativas es de alrededor de  $10^{-4}$ . Estos autores también encuentran que si las bases se sitúan a esta profundidad, la condición de pared rígida resulta bastante adecuada. Encuentran además situaciones en las cuales el equilibrio estático resulta estable, aunque para una tasa de calentamiento proporcional a la densidad (es decir calentamiento por partícula constante). Afirman también, a diferencia de Antiochos et al. (1985), que la inclusión de material termicamente estable en las bases resulta trascendente en el estudio de estabilidad coronal. Parte de la diferencia en las predicciones de ambos autores, es seguramente motivada por las distintas expresiones de tasa de

calentamiento y de pérdidas radiativas empleadas. Pero fundamentalmente, si bien ambos analizan la importancia del material cromosférico en la estabilidad de la corona, sus requerimientos acerca de la profundidad de las bases de los loops son cuantitativamente diferentes.

### 3.2. ANALISIS NO LINEALES

Varios autores desarrollaron simulaciones numéricas de loops de la corona solar (Craig, Robb y Rollo 1982, Peres et al. 1982, Oran, Mariska y Boris 1982, Klimchuk, Antiochos y Mariska 1987), las cuales no muestran síntomas evidentes de inestabilidades térmicas. Probablemente se debe a que el tratamiento de las condiciones de contorno en todos estos modelos resulta muy simplificadorio.

Klimchuk, Antiochos y Mariska (1987) investigan la estabilidad frente a perturbaciones de amplitud finita de loops de distintos tamaños. Encuentran que para loops grandes ( $L > 8000$  km), la temperatura de equilibrio es de  $10^6$  K y resultan estables frente a todas las perturbaciones razonables incluyendo aquellas de gran amplitud y longitud de onda larga. En cambio, para loops pequeños ( $L < 2000$  km), aún las perturbaciones de baja amplitud crecen en el tiempo sin saturación. Así un loop de baja altura, inicialmente caliente y compacto, evoluciona hacia un estado que puede describirse como de cromósfera extendida (con  $T < 10^5$  K). Este último resultado coincide con recientes predicciones acerca de la existencia de una solución fría de las ecuaciones de equilibrio estático (Antiochos y Noci 1986, Martens y Kuin 1982, Hood y Priest 1979). Ambas soluciones coexisten para un dado valor de la tasa de calentamiento, pero mientras que en la solución fría el enfriamiento radiativo se balancea con el

calentamiento punto a punto, en la solución caliente buena parte de la energía es transportada conductivamente hacia la región de transición donde se escapa eficientemente por radiación.

El código numérico empleado por estos autores (descrito en Mariska et al. 1982) integra consistentemente las ecuaciones MHD de un plasma confinado en un tubo magnético (ver ecuaciones (3.5.1)), con resolución espacial variable y creciente hacia la región de transición. Supusieron simetría respecto del vértice del loop y condiciones de contorno de pared rígida ( $u_b = 0$ ) y temperatura constante ( $T_b(t) = T_{ob}$ ). La base está ubicada a una profundidad de más de tres escalas de altura cromosféricas, razón por la cual también otras condiciones de contorno resultan igualmente aceptables (Antiochos et al. 1985). Consideran además una tasa de calentamiento espacialmente uniforme y la función de pérdidas radiativas de Craig y McClymont (1986) que tiene en cuenta efectos de plasma cromosférico ópticamente grueso (McClymont y Canfield 1983a-b). La condición de temperatura cromosférica constante (fuente térmica) puede simularse provocando un abrupto decrecimiento (cut-off) de la función de pérdidas radiativas a una temperatura de  $2 \cdot 10^4$  K. Para evitar efectos espurios, en lugar de suponer que las pérdidas radiativas sufren una discontinuidad, hacen decrecer dicha función linealmente a cero en un rango de 500 K alrededor de  $2 \cdot 10^4$  K. Como veremos más adelante (sección 3.5.), la pendiente de la función de pérdidas radiativas a temperaturas cromosféricas tiene una fuerte incidencia sobre la estabilidad en modelos globales de la corona. Debe mencionarse que las hipótesis formuladas por Klimchuk, Antiochos y Mariska (1987) son cada una de ellas estabilizantes, de manera que si bien el modelo puede hacer predicciones suficientes sobre inestabilidades, no es capaz en cambio de asegurar la estabilidad en situaciones más realistas que se aparten parcialmente de dichas hipótesis. Los autores no tienen una

respuesta satisfactoria a la aparente contradicción entre la predicción de inestabilidad lineal de Antiochos et al. (1985) y la de estabilidad no lineal que ellos obtienen para loops grandes (ver discusión en Klimchuk, Antiochos y Mariska 1986).

Otros modelos numéricos desarrollados anteriormente (Peres et al. 1982, Craig, Robb y Rollo 1982), también predicen que los loops de longitudes mayores que 8000 km son estables. Craig, Robb y Rollo (1982) utilizan una formulación lagrangiana e investigan el comportamiento transitorio de loops inicialmente sobrecalentados por un pulso de calor. Peres et al. (1982) utilizan en cambio la formulación euleriana para analizar la estabilidad no lineal de equilibrios coronales estáticos acoplados con modelos semiempíricos de equilibrio cromosférico desarrollados por Vernazza, Avrett y Loeser (1980). La función de pérdidas radiativas que utilizan es, por lo tanto, el ajuste por leyes de potencias elaborado por Rosner, Tucker y Vaiana (1978) para  $T > 2 \cdot 10^4 \text{K}$ , acoplado con un ajuste de las mismas características a resultados de uno de los modelos de Vernazza, Avrett y Loeser (1980).

Como puede advertirse, si bien el estudio no lineal de estabilidad de loops coronales es un área de investigación muy activa (ver también en Oran, Mariska y Boris 1982, Dahlburg et al. 1987 otro tipo de inestabilidades que conducen a la formación de estructuras frías dentro del plasma caliente), los resultados obtenidos hasta el presente son aún muy preliminares. Las limitaciones de tiempo computacional obligan a hacer suposiciones que siguen resultando excesivas teniendo en cuenta la alta complejidad del problema a describir. Por tal motivo, una serie de modelos globales (es decir donde se promedia espacialmente el problema real) se han desarrollado recientemente (Kuin y Martens 1982, Martens y Kuperus 1982, Martens y Kuin 1983), en los cuales a cambio de la fuerte simplificación

introducida en la dependencia espacial, es posible profundizar en el efecto de las no linealidades en forma prácticamente analítica. Detallamos algunos de estos modelos en la siguiente sección y en las secciones (3.4. y 3.5.) desarrollamos un modelo propio (Gómez, Sicardi Schifino y Ferro Fontán 1988a-b) que predice la aparición, en ciertas circunstancias, de ciclos límites estables en el diagrama densidad-temperatura de loops coronales.

### 3.3. ESTUDIOS GLOBALES DE ESTABILIDAD

En un excelente trabajo de revisión, Martens (1984) reseña algunos aspectos de métodos no lineales tales como la teoría de catástrofes, las bifurcaciones de soluciones de equilibrio o el desarrollo de caos o de turbulencia, con particular énfasis en aplicaciones a problemas astrofísicos. Se trata así brevemente la aparición de catástrofes (es decir el cambio abrupto de las variables del problema como respuesta a cambios suaves en los parámetros) en fulguraciones solares (van Tend y Kuperus 1978), en loops coronales de escasa altura (Martens y Kuin 1982) y de gran altura (Martens y Kuperus 1982, Martens y Kuin 1983) y en la evolución dinámica de un sistema estelar doble (Hut 1980). Asimismo, existen aplicaciones de teoría de bifurcaciones a la evolución dinámica de flúidos autogravitantes en rotación (Lebovitz 1977 y referencias allí citadas), y de bifurcaciones de Hopf tanto en estrellas pulsantes (Cox 1974) como en loops coronales (Kuin y Martens 1982). También se menciona como ejemplo típico del desarrollo de caos en sistemas conservativos, el atractor de Henón-Heyles (1964) vinculado a la dinámica de galaxias, o el problema del dínamo solar (Zeldovich y Ruzmaikin 1984) como ejemplo de atractor extraño en sistemas disipativos.



Restringiéndonos nuevamente al problema del calentamiento de arcos magnéticos coronales, Martens y Kuin (1982) elaboraron un modelo que predice la transición catastrófica de loops de un estado frio a un estado caliente cuando la altura de los mismos supera cierto valor crítico. Puesto que es el campo magnético el que define la geometría del loop, es la evolución de este la que decide el disparo de la mencionada catástrofe térmica. El equilibrio estático de loops fríos es determinado por

$$E = P_o^2 \phi(T_o) \quad (3.3.1a)$$

$$\frac{\partial P_o}{\partial h} = - \frac{P_o}{H(T_o)} \quad (3.3.1b)$$

donde hemos empleado la misma notación que en la sección 3.1., excepto por la introducción de la coordenada espacial  $h = L - z$ , que mide la altura a lo largo del loop y respecto de la base del mismo. La función de pérdidas radiativas  $\phi(T)$  es la calculada por Raymond, Cox y Smith (1976).

La ecuación (3.3.1a) expresa una relación entre la presión y la temperatura de equilibrio, la cual ha sido representada en la Figura 13a. Esta curva contiene un punto de retorno correspondiente al máximo de la función de pérdidas radiativas a alrededor de  $2 \cdot 10^4$  K. La ecuación (3.3.1b) en cambio representa el bien conocido decrecimiento de la presión con la altura en un fluido isotérmico. Existe entonces un valor mínimo de presión (indicado en la Figura 13a), tal que cuando la altura del loop supera el valor crítico correspondiente a dicha presión, el equilibrio frío ya no resulta posible porque las ecuaciones (3.3.1) no pueden satisfacerse simultáneamente. El plasma en el tope del loop se calentará pues la tasa de calentamiento superará al enfriamiento radiativo, lo cual reduce a su vez dicho enfriamiento favoreciendo aún más el sobrecalentamiento. Al no haber

otros equilibrios entre calentamiento y pérdidas radiativas a temperaturas mayores, el incremento térmico continuará hasta que nuevos términos entren en juego en el balance de energía tales como el flujo conductivo. Esta nueva configuración de equilibrio es la descrita por las leyes de escala (3.1.11) y se muestra en la Figura 13a. La descrita en esta Figura es entonces una catástrofe imperfecta, puesto que si bien se predice la pérdida de equilibrio, el nuevo equilibrio al cual se arriba no está contenido en el mismo sistema de ecuaciones.

Los cambios de longitud ( $L$ ) o de intensidad magnética ( $B_0$ ) de un loop coronal, también pueden originar transiciones catastróficas entre distintos estados calientes del plasma. Basándose en las ideas de Ionson descritas en la sección 1.2. (también en Ionson 1985) acerca de una analogía entre el

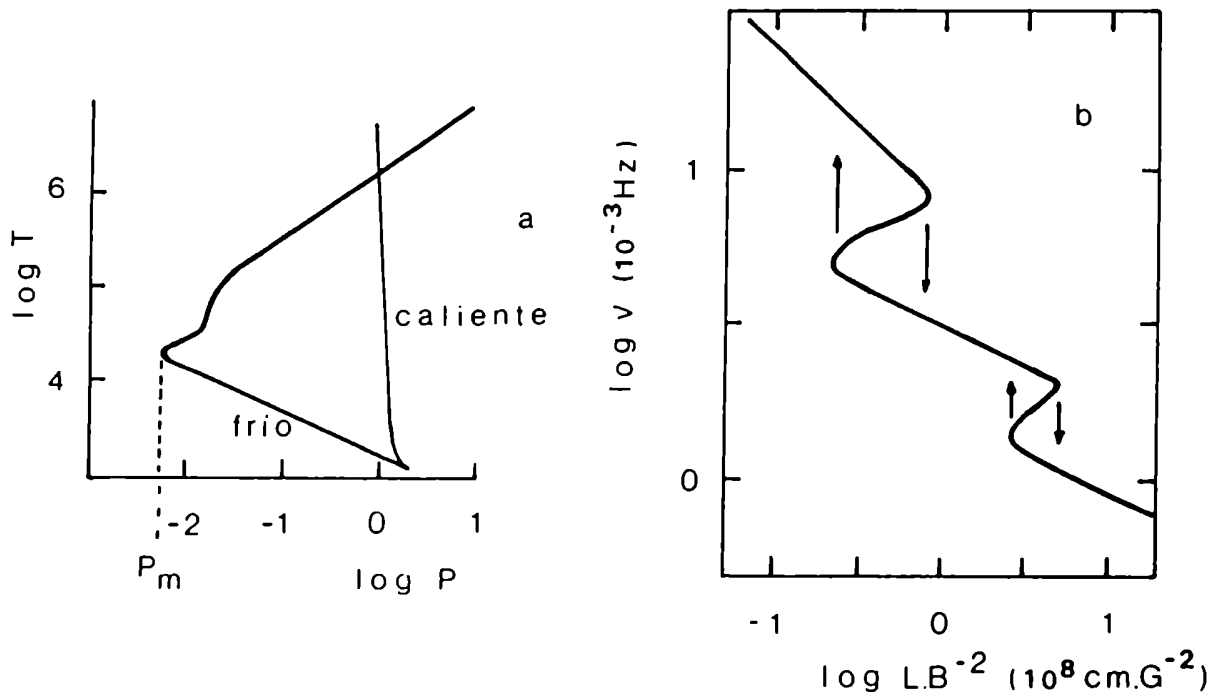


FIGURA 13: (a) Diagrama  $\log(P)$ - $\log(T)$  correspondiente a tasa de calentamiento  $E = 4 \cdot 10^{-4} \text{erg.cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$  obtenido por Martens y Kuin (1982). (b) Frecuencia de resonancia en función del parámetro de control  $L/B^2$ . Las flechas indican catástrofes térmicas (Martens y Kuperus (1982)).

calentamiento de loops y circuitos RLC, Martens y Kuperus (1982) desarrollan un modelo que predice ciertas catástrofes que pueden vincularse a eventos impulsivos observados.

De acuerdo al modelo de Ionson (1985), de toda la energía disponible en la convección subfotosférica, el loop solo absorbe una delgada banda de frecuencias alrededor del valor de resonancia  $\nu_0 \approx B_0/4L$ . La tasa de calentamiento coronal resulta (Ionson 1982)

$$E(\nu) \approx 10^{13} S(\nu)/L^2 \quad (3.3.2)$$

donde  $S(\nu)$  es el espectro de potencias de la turbulencia subfotosférica y las cantidades están expresadas en unidades c.g.s. En virtud de esta proporcionalidad entre tasa de calentamiento y espectro de potencias de la región convectiva, se espera que aquellos loops que resuenen con los máximos de la función  $S(\nu)$  serán más claramente visibles en rayos X. A partir de las escasas observaciones de movimientos convectivos, Ionson infirió la existencia de dos picos en  $S(\nu)$ , uno vinculado a las oscilaciones solares de cinco minutos y otro relacionado con la escala de granulación ( $\tau_p \approx 800$  s).

Por otra parte, Martens y Kuperus (1982) usando las leyes de escala (3.1.11), la ecuación de estado del gas y la definición de la frecuencia de resonancia del loop, consiguen expresar la función de pérdidas radiativas en la corona en términos de la frecuencia de resonancia

$$E_R(\nu) = P_0^2 \phi(T_0) \quad 730 \cdot B_0^{7/2} \cdot L^{-15/4} \cdot \nu^{-7/2} \quad (3.3.3)$$

En los equilibrios de loops termicamente aislados, es decir de conductividad nula hacia las bases, el efecto del flujo conductivo se

reduce a redistribuir la energía dentro del loop. Por lo tanto, en modelos globales, la ecuación de balance energético resulta

$$E(\nu) = E_R(\nu) \quad (3.3.4)$$

En la Figura 13b se muestra la dependencia de la frecuencia de resonancia con quien cumple el papel de parámetro de control, que es la combinación  $L/B^2$ . Para poder analizar cualitativamente la estabilidad de este equilibrio es necesario razonar en términos de procesos de evaporación y condensación de material cromosférico como consecuencia de perturbaciones térmicas en la corona. De acuerdo a este escenario, un crecimiento de temperatura coronal es seguido de un exceso de flujo conductivo hacia la región de transición. Este flujo alcanza la base del loop, pero no penetra en la cromósfera debido a la baja conductividad allí. Una delgada capa de la alta cromósfera es entonces calentado y se expande aumentando la densidad del loop (evaporación). Este aumento de densidad incrementa las pérdidas radiativas, devolviendo al sistema al equilibrio por enfriamiento radiativo. El proceso opuesto al descrito corresponde a condensación de material coronal en las bases del loop. Estos razonamientos pueden resumirse en las siguientes relaciones de signos

$$\text{sgn}(\partial_t n) = \text{sgn}(E - E_R) \quad (3.3.5a)$$

$$\text{sgn}(\partial_t \nu) = \text{sgn}(E_R - E) \quad (3.3.5b)$$

las cuales definen el sentido de la evolución como indican las flechas en la Figura 13b. Tanto las catástrofes que implican brillantamiento de loops como las que corresponden a un debilitamiento en su intensidad en rayos X

pueden asociarse a eventos observados y descritos en la literatura (Howard y Svestka 1977, Levine y Withbroe 1977), dado que el tiempo característico de los mismos ( $\approx 20$  minutos) es comparable a la escala temporal térmica en la cual las citadas catástrofes se producen.

Kuin y Martens (1982), a partir de un modelo global para describir la evolución de un loop coronal y consideraciones fenomenológicas acerca del proceso de evaporación-condensación, encuentran que es teóricamente posible que se desarrollen soluciones cíclicas estables o ciclos límites en el diagrama densidad-temperatura de dicho loop. Aproximan la función de pérdidas radiativas por una ley de potencias, válida a temperaturas coronales ( $\psi \approx T^{-1/2}$ ). Consideran loops simétricos y las condiciones de contorno del equilibrio corresponden a la de loop térmicamente aislado (es decir  $Q(z=L) = 0$ ). Bajo estas hipótesis obtienen una solución estática  $T_0(z)$  integrando analíticamente las ecuaciones de equilibrio. A fin de elaborar un modelo que describa adecuadamente las situaciones de no equilibrio, efectúan un análisis de tiempos característicos que detallaremos en la sección 3.5. (ecuaciones (3.5.10-12)). Como consecuencia de dicho análisis concluyen que el loop puede considerarse con presión uniforme y con todas sus partes fuertemente ligadas por un eficiente flujo conductivo, a la vez que mantiene con las bases un débil intercambio de calor y materia. La ecuación global de energía resulta

$$\frac{3}{2} \frac{dP}{dt} = E - P^2 \phi(T) \quad (3.3.6)$$

El citado intercambio de materia y calor con la cromósfera, es tenido en cuenta a partir de una relación fenomenológica, a través de la cual se intenta modelar el proceso de evaporación-condensación

$$f K_o T_o^{5/2} \frac{T-T_o}{L^2} = \frac{3}{2} k_B T \frac{dn}{dt} \quad (3.3.7)$$

El miembro izquierdo de (3.3.7) es esencialmente el flujo conductivo hacia las bases, mientras que el miembro derecho representa el flujo de energía transportado por el material que se evapora. El coeficiente  $f$  (definido entre cero y uno) es un parámetro libre del modelo que mide la fracción de flujo conductivo que vuelve al sistema en forma de material evaporado. El juego de ecuaciones (3.3.6-7) rigen entonces la evolución global de loops coronales. Adimensionalizándolas convenientemente se obtiene

$$\partial_\tau \delta n = f \alpha_{KM} \frac{\delta T}{1+\delta T} \quad (3.3.8a)$$

$$\partial_\tau \delta p = 1 - (1+\delta p)^2 (1+\delta T)^\gamma \quad (3.3.8b)$$

donde para las variables hemos adoptado la notación  $P = P_o(1+\delta p)$  (idem  $n$  y  $T$ ), el tiempo adimensional resulta  $\tau = 2Et/3P_o$  y  $\gamma$  es el exponente de la función  $\phi(T)$  a temperaturas coronales. El coeficiente  $\alpha_{KM}$  resulta

$$\alpha_{KM} = \frac{K_o T_o^{7/2}}{E L^2} \quad (3.3.9)$$

Del análisis lineal de estabilidad resulta el siguiente par de autovalores

$$2\lambda_{1,2} = (\gamma - f\alpha_{KM}) \pm \sqrt{(\gamma - f\alpha_{KM})^2 - 8f\alpha_{KM}} \quad (3.3.10)$$

de donde se deduce inmediatamente que la condición necesaria y suficiente

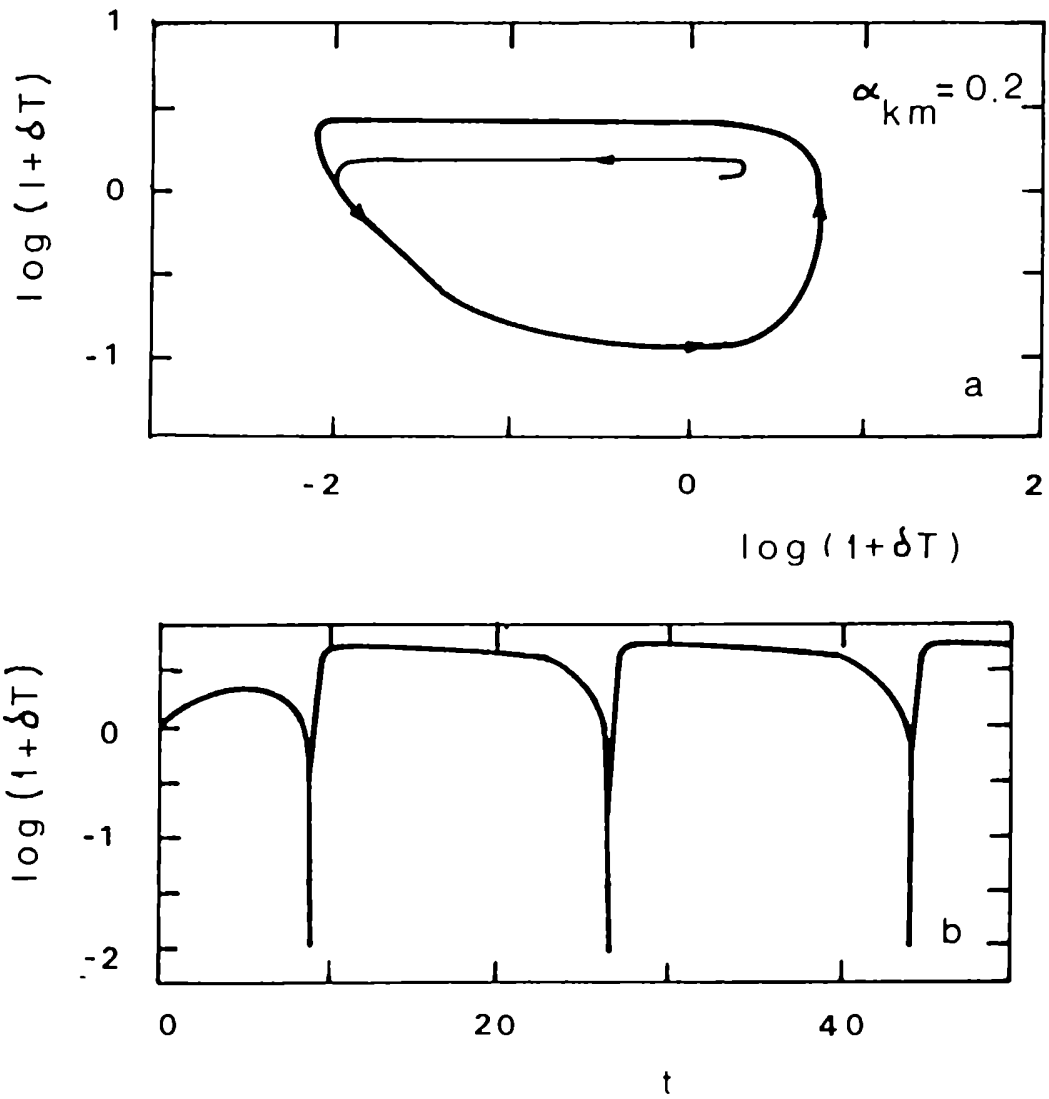


FIGURA 14: (a) Ciclo límite obtenido por Kuin y Martens (1982) en el caso  $f = 1$  y  $\alpha_{km} = 0.2$ . (b) Evolución temporal de  $\log(1+\delta T)$  para el mismo caso.

de estabilidad es

$$f\alpha_{KM} \geq \gamma \quad (3.3.11)$$

En el caso crítico  $f\alpha_{KM} = \gamma$ , los autovalores (3.3.10) constituyen un par de complejos conjugados con parte real nula y parte imaginaria  $\omega_0 = (8f\alpha_{KM})^{1/2}$ , lo cual indica la aparición de ciclos límites de frecuencia  $\omega_0$ . Para corroborar la existencia y estabilidad de estos equilibrios dinámicos, Kuin y Martens (1982) integran numericamente las ecuaciones (3.3.8) usando la función de pérdidas radiativas de Hildner (1974). En la Figura 14a se muestra un ciclo límite de gran amplitud obtenido por estos autores para el caso  $f=1$  y  $\alpha_{KM}=0.2$ . En la Figura 14b se muestra la evolución temporal de la temperatura para la misma elección de parámetros.

Craig y Schulkes (1985) estiman bajo ciertas hipótesis un valor para el coeficiente  $f$ , que es un parámetro libre en el modelo de Kuin y Martens (1982). Encuentran que en condiciones típicas de la corona solar,  $f$  es suficientemente grande como para garantizar que se cumpla (3.3.11) y por lo tanto el loop resulte estable. De esta manera, si bien los ciclos límites resultan teóricamente posibles, no describirían un comportamiento frecuente en la corona solar. Sin embargo, veremos a continuación (secciones 3.4. y 3.5.) como a partir de un modelo más riguroso, derivado a partir de las ecuaciones hidrodinámicas adecuadamente promediadas espacialmente, es posible recuperar a los ciclos límites como equilibrios estables y realizables en arcos magnéticos coronales (Gómez, Sicardi Schifino y Ferro Fontán 1988a-b).



### 3.4. ESTABILIDAD DE CICLOS LIMITES

Describimos a continuación la técnica perturbativa empleada para obtener la solución asintótica de un conjunto de ecuaciones no lineales acopladas, en las proximidades de un punto de bifurcación. Si bien este método está basado fundamentalmente en el desarrollado en Iooss y Joseph (1980), lo hemos generalizado de manera de obtener no solo las ramas de equilibrio sino además la relajación no lineal hacia aquellas que resulten estables.

Dado un problema que puede ser descrito por un vector bidimensional  $y$  que evoluciona en el tiempo de acuerdo con

$$\partial_t v_i = \mathcal{F}_i(y, E) \quad (3.4.1)$$

donde  $E$  es un parámetro de control, los equilibrios estáticos son aquellos  $y_0(E)$  que satisfacen

$$\mathcal{F}_i(y_0(E), E) = 0 \quad (3.4.2)$$

Linealizando (3.4.1) alrededor de  $y_0(E)$ , es posible hallar la estabilidad de estos equilibrios para cada valor de  $E$ . Toda vez que el signo de la parte real de uno de los autovalores de la matriz  $\partial_j \mathcal{F}_i(y_0(E), E)$  resulte positivo, el equilibrio  $y_0(E)$  será inestable. Si los autovalores resultan uno el complejo conjugado del otro, una bifurcación de Hopf tendrá lugar para cada  $E_*$  donde la parte real de dichos autovalores cambie de signo. De aquí en más nos limitaremos a estudiar este tipo de bifurcaciones. Como es usual, escribimos la ecuación (3.4.1) en forma local

$$\partial_i \psi_i = \mathcal{F}_i(\psi, \mu) \quad (3.4.3a)$$

donde el nuevo campo vectorial es

$$\underline{\psi} = \underline{y} - \underline{y}_0(E) \quad (3.4.3b)$$

y el parámetro de control E es reemplazado por

$$\mu = (E_* - E)/E_* \quad (3.4.3c)$$

Puesto que estamos interesados en la búsqueda de nuevos equilibrios cercanos a  $\underline{y}_0(E)$ , podemos trabajar con los primeros términos de la expansión de Taylor de la función  $\mathcal{F}_i$  alrededor de  $\psi_i=0$  ( $i=1,2$ ). Entonces

$$\partial_i \psi_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial_{j_1, \dots, j_n}^{(n)} \mathcal{F}_i(\underline{y}_0(E), E) \psi_{j_1} \dots \psi_{j_n} \quad (3.4.4)$$

donde ha sido aplicada la convención de suma para  $j_k=1,2$ . Como veremos más adelante (sección 3.5.), en las ecuaciones (3.5.22) de nuestro modelo debemos retener términos hasta de quinto orden para obtener un nuevo equilibrio estable en aquellos casos en que  $\underline{y}_0(E)$  resulta linealmente inestable.

Como hemos supuesto, los autovalores de la matriz  $L_{ij} = \partial_j \mathcal{F}_i$  son un par de complejos conjugados

$$\lambda = \xi + i\eta = \frac{L_{11} + L_{22}}{2} + i \sqrt{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} - \frac{(L_{11} - L_{22})^2}{4}} \quad (3.4.5)$$

En el punto de bifurcación ( $E=E_*$ ), la traza de L cambia de signo (para  $E < E_*$

la traza resulta positiva indicando inestabilidad) mientras que el determinante se mantiene positivo. El conjunto de autovectores es

$$\underline{L} \cdot \underline{\zeta} = \lambda \cdot \underline{\zeta} \quad (3.4.6)$$

y

$$\underline{L}^T \cdot \underline{\hat{\zeta}} = \lambda^* \underline{\hat{\zeta}} \quad (3.4.7)$$

donde  $\underline{L}^T$  es el operador adjunto de  $\underline{L}$  y  $\underline{\hat{\zeta}}$  es el autovector del problema adjunto. Estos autovectores satisfacen las siguientes relaciones de ortonormalidad

$$\underline{\zeta}_k \underline{\hat{\zeta}}_k^* = 1 \quad (3.4.8a)$$

$$\underline{\zeta}_k \underline{\hat{\zeta}}_j = 0 \quad (3.4.8b)$$

y pueden expresarse en términos de las componentes de  $\underline{L}$  (evaluadas en el punto crítico) como

$$\underline{\zeta} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda - L_{11}}{(-L_{12} L_{21})^{1/2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda - L_{11}}{L_{12}} \end{pmatrix} \quad (3.4.9a)$$

$$\underline{\hat{\zeta}} = \frac{-1}{1 + \frac{\lambda + L_{11}}{(-L_{12} L_{21})^{1/2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda + L_{11}}{L_{21}} \end{pmatrix} \quad (3.4.9b)$$

Dado que  $\underline{\zeta}$  y  $\underline{\zeta}^*$  son autovectores independientes, cualquier vector  $\underline{\psi}$  puede descomponerse como

$$\psi_i = a(t) \cdot \zeta_i + a^*(t) \cdot \zeta_i^* \quad (3.4.10)$$

En forma completamente general, podemos reemplazar (3.4.10) en (3.4.4) y usar las relaciones de ortonormalidad (3.4.8), a fin de obtener una ecuación de evolución para la amplitud  $a(t)$

$$\partial_t a = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sigma_k^{(n)} a^{n-k} (a^*)^k \quad (3.4.11)$$

donde

$$\sigma_k^{(n)} = \frac{1}{n!} \partial_{j_1, \dots, j_n}^{(n)} \hat{\mathcal{F}}_i \cdot \zeta_i^* \cdot \zeta_{j_1}^* \cdots \zeta_{j_k}^* \cdot \zeta_{j_{k+1}} \cdots \zeta_{j_n} \quad (3.4.12)$$

Buscaremos ahora soluciones de pequeña amplitud de tipo ciclo límite, en las proximidades del punto de bifurcación. Entonces expandimos tanto la variable como el parámetro  $\mu$ , en potencias de un pequeño parámetro  $\varepsilon$

$$a(t) = A(t) \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s) \varepsilon^k, \quad = \omega(\varepsilon)t \quad (3.4.13a)$$

$$\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{2k} \varepsilon^{2k} \quad (3.4.13b)$$

$$\partial_t A = \sum_{k=1}^{\infty} A'_{2k} \varepsilon^{2k} \quad (3.4.13c)$$

$$\mu(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{2k} \varepsilon^{2k} \quad (3.4.13d)$$

y definimos  $\varepsilon$  como la amplitud del ciclo límite

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi A} \int_0^{2\pi} ds e^{-is} a = [a] \quad (3.4.14)$$

Nótese que  $A(t)$  es una función lentamente variable con  $t$  ( $\partial_t A \propto \varepsilon^2$ ) y en consecuencia la integral en (3.4.14) puede efectuarse suponiendo  $A = \text{constante}$ . Más aún,  $A$  es definida de manera que  $A \rightarrow 1$  para  $t \rightarrow \infty$ , recuperándose en dicho límite las expresiones de Iooss y Joseph (1980). Deseamos aclarar que en el caso de bifurcaciones de Hopf, tanto  $\omega$  como  $\mu$  y  $\partial_t A$  son funciones pares de  $\varepsilon$  (ver (3.4.13b-d)) como ha sido rigurosamente probado por Hassard, Kazarinoff y Wan (1981).

La ecuación (3.4.11) se convierte en una igualdad entre polinomios en  $\varepsilon$  y por lo tanto debe valer para todo orden en  $\varepsilon$ . A primer orden

$$\omega_0 \partial_s a_1 = i\eta_* a_1 \quad (3.4.15)$$

donde de aquí en adelante emplearemos el subíndice \* para indicar que la función esta evaluada en el punto de bifurcación. Elegimos  $\omega_0 = \eta_*$  y obtenemos entonces

$$a_1 = a_{10} e^{is} \quad (3.4.16)$$

De acuerdo a la condición (3.4.14), se tiene que  $[a_1] = a_{10} = 1$ . A segundo orden

$$\omega_0 A (\partial_s a_2 - i\alpha_2 a_2) = \sigma_0^{(2)} A^2 a_1^2 + 2\sigma_1^{(2)} |A|^2 + \sigma_2^{(2)} (A^* a_1^*)^2 \quad (3.4.17)$$

La condición (3.4.14) es automáticamente satisfecha por (3.4.17). Nótese

que para todo  $k > 1$ , dicha condición resulta  $[a_k] = 0$ , de lo cual se deduce que las ecuaciones del tipo de (3.4.17) tienen solución toda vez que su miembro derecho no contenga términos proporcionales a  $e^{is}$ . Esta condición de resolubilidad, también llamada alternativa de Fredholm, al ser aplicada a los sucesivos órdenes en  $\varepsilon$ , proveerá ecuaciones de las cuales pueden obtenerse expresiones para  $\omega_{2k}$ ,  $A'_{2k}$  y  $\mu_{2k}$ . Siguiendo a órdenes superiores

$$\omega_{\circ} A (\partial_{\varepsilon} a_k - i a_k) = \sum_{j=-k/2}^{k/2} \Lambda_{2j}^{(k)}(A, A^*) e^{2ij s} \quad (3.4.18)$$

donde la condición de Fredholm implica  $\Lambda_1^{(k)} = 0$ . Las expresiones de los  $\Lambda_j^{(k)}$  figuran en el Apéndice B. La ecuación (3.4.18) es inmediatamente integrable, obteniéndose

$$a_k(s) = \frac{1}{i \omega_{\circ} A} \sum_{j=-k/2}^{k/2} \Lambda_{2j}^{(k)}(A, A^*) \frac{e^{2ij s}}{2j-1} \quad (3.4.19)$$

Para valores pares de  $k$ , la condición  $\Lambda_1^{(k)} = 0$  se cumple automáticamente, mientras que para valores impares, dicha condición de resolubilidad puede formalmente escribirse como

$$\frac{A'_{2k}}{A} = \Gamma^{(2k)} - \sum_{j=1}^k \Gamma_{2j}^{(2k)} |A|^{2j} \quad (3.4.20a)$$

donde

$$\Gamma^{(2k)} = \sum_{j=1}^k \Gamma_{2j}^{(2k)} \quad (3.4.20b)$$

como consecuencia de haber definido  $A$  de modo que  $A \rightarrow 1$  para  $t \rightarrow \infty$ . La expresión explícita de los coeficientes  $\Gamma_j^{(2)}$  and  $\Gamma_j^{(4)}$  también figura en el

Apéndice B.

La ecuación de evolución para la amplitud lentamente variable  $A$ , resulta entonces

$$\partial_t \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma^{(2k)} \varepsilon^{2k} A - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \Gamma_{z_j}^{(2k)} |A|^{2j} \varepsilon^{2k} A \quad (3.4.21)$$

y se puede verificar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Gamma^{(2k)} \varepsilon^{2k} = \lambda - i.\omega = \xi + i.(\eta - \omega) \quad (3.4.22)$$

Es asimismo sencillo construir una función que nos permita analizar la estabilidad de la solución de ciclo límite. Descomponiendo los coeficientes  $\Gamma$  y la variable  $A$  como

$$\Gamma_{z_j}^{(2k)} = \gamma_{z_j}^{(2k)} + i.\gamma_{z_j}^{(2k)} \quad (3.4.23a)$$

$$A = |A| . e^{i\phi} \quad (3.4.23b)$$

y considerando la parte real de la ecuación (3.4.21) obtenemos

$$\partial_t |A| = \xi |A| - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \gamma_{z_j}^{(2k)} |A|^{2j+1} \varepsilon^{2k} \quad (3.4.24)$$

Podemos reescribir esta ecuación en la forma

$$\partial_t |A| = - \frac{\partial S}{\partial |A|} \quad (3.4.25)$$

donde

$$S(|A|) = -\frac{\xi}{2}|A|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \gamma_{z_j}^{(2k)} \frac{|A|^{2j+2}}{2j+2} \varepsilon^{2k} \quad (3.4.26)$$

es un potencial generalizado o función de Lyapunov puesto que los equilibrios del sistema corresponden a los extremos de esta función y además los mínimos representan los equilibrios estables (Haken 1983). Esto se debe a que (3.4.25) implica  $\partial_t S \leq 0$  para cualquier valor de  $|A|$ .

En la sección 3.5. expondremos una aplicación del método recientemente descrito, destinada al estudio de la estabilidad de ciclos límites en la corona solar.

### 3.5. BIFURCACIONES DE HOPF EN LA CORONA SOLAR

Desarrollamos a continuación un modelo de estabilidad global para el plasma confinado en los loops coronales (ver Gómez, Sicardi Schifino y Ferro Fontán 1988a-b). Dicho modelo es derivado a partir de las ecuaciones hidrodinámicas promediadas espacialmente, con un adecuado tratamiento de los flujos que atraviesan la región de transición.

En virtud de que el campo magnético coronal es suficientemente intenso, parece razonable proponer una descripción hidrodinámica unidimensional a lo largo de cada línea magnética. Consideremos un loop coronal de semilongitud  $L$ , a lo largo del cual definimos una coordenada  $z$  como indica la Figura 11. Las ecuaciones hidrodinámicas resultan

$$\partial_t n = -\partial_z (nv) \quad (3.5.1a)$$

$$\partial_t (nv) = -\partial_z \left( \frac{P}{m_i} + nv^2 \right) + ng \quad (3.5.1b)$$



$$\frac{3}{2} \partial_t P = \partial_z (K_0 T^{5/2} \partial_z T - \frac{5}{2} P v) + v \partial_z P - P^2 \phi(T) + E \quad (3.5.1c)$$

y la ecuación de estado que relaciona presión (P), densidad de partículas ( $n_e = n_i = n$ ) y temperatura (T)

$$P = 2nk_B T \quad (3.5.2)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $m_i$  la masa iónica. La cantidad  $v$  es la velocidad del fluido,  $g$  es la aceleración gravitatoria a lo largo del loop,  $Q$  es el flujo de calor clásico

$$Q = -K_0 T^{5/2} \partial_z T \quad (3.5.3)$$

$K_0 = 10^{-6} \text{erg.K}^{-7/2} \text{cm}^{-1} \text{s}^{-1}$  es el coeficiente de conductividad térmica (Spitzer 1962),  $\phi(T)$  es la función de pérdidas radiativas a presión constante (ver Martens y Kuin 1982) y  $E$  es la tasa de calentamiento por unidad de volumen que supondremos constante. Empleamos unidades cgs para todas las magnitudes excepto la temperatura, la cual está expresada en Kelvin.

Hemos utilizado la siguiente función de pérdidas radiativas ( $T_\sigma$  es la temperatura en Megakelvin)

$$\phi(T) = \begin{cases} 2.295 \cdot 10^{19} \cdot (T_\sigma)^{0.7} & T_\sigma < 8 \cdot 10^{-3} \\ 1.313 \cdot 10^1 \cdot (T_\sigma) & 8 \cdot 10^{-3} < T_\sigma < 10^{-1} \\ 1.313 \cdot 10^{-3} \cdot (T_\sigma)^{-3} & 10^{-1} < T_\sigma \end{cases} \quad (3.5.4)$$

donde acoplamos la curva de Peres et al. (1982) para  $T < 8 \cdot 10^3 \text{K}$  con la función de Craig y Mc Clymont (1986). También utilizamos

$$\phi(T) = \begin{cases} 2.295 \cdot 10^{19} \cdot (T_{\odot})^{9.7} & T_{\odot} < 8 \cdot 10^{-3} \\ 5.290 \cdot 10^7 \cdot (T_{\odot})^{4.15} & 8 \cdot 10^{-3} < T_{\odot} < 2 \cdot 10^{-2} \\ 2.209 \cdot 10^{-1} \cdot (T_{\odot})^{-0.77} & 2 \cdot 10^{-2} < T_{\odot} < 10^{-1} \\ 1.313 \cdot 10^{-3} \cdot (T_{\odot})^{-3} & 10^{-1} < T_{\odot} \end{cases} \quad (3.5.5)$$

a fin de chequear la influencia de las pérdidas por Ly $\alpha$  en nuestros resultados.

Consideramos tanto la parte cromosférica como coronal del loop, con tamaños muy inferiores a las respectivas escalas de altura ( $H=2k_B T/m_i g$ ). De este modo, podemos despreciar efectos gravitatorios, y en consecuencia equilibrio de presión se reduce a  $P=\text{cte.}$  a lo largo del loop. Las ecuaciones de equilibrio estático correspondientes a (3.5.1-3) son

$$v = 0 = \partial_z P_{\odot} \quad (3.5.6)$$

$$\partial_z Q = E - P_{\odot}^2 \phi(T_{\odot}) \quad (3.5.7a)$$

$$Q = -K_{\odot} T_{\odot}^{5/2} \partial_z T_{\odot} \quad (3.5.7b)$$

donde  $\phi(T)$  es la función detallada en (3.5.4). Debido a la simetría supuesta para los loops, consideramos  $Q(z=0)=0$ . La otra condición de contorno necesaria para resolver (3.5.7) es  $Q(z=L)=0$ . Este tipo de equilibrio es habitualmente llamado de loop aislado, y se ha mostrado (Antiochos 1979) que resulta inestable en el caso en que las mismas condiciones de contorno sean impuestas a la perturbación. Extendemos este equilibrio coronal a la cromósfera a temperatura constante  $T_{\odot 0}$ , la cual debe satisfacer

$$E = P_o^2 \phi(T_{ob}) \quad (3.5.8)$$

Este equilibrio involucra entonces a la corona, región de transición y cromósfera, sin necesidad de suponer una tasa de calentamiento espacialmente discontinua. Estos equilibrios son equivalentes a los modelos  $\gamma^* \rightarrow 0$  descritos por Mc Clymont y Craig (1985a).

Las consideraciones que hemos hecho, definen una familia de equilibrios con solamente dos parámetros libres (E y L). Por esta razón, de aquí en adelante consideraremos a E como el parámetro de control para un dado loop de longitud L. De acuerdo a nuestro modelo, el equilibrio estático y su estabilidad pueden obtenerse univocamente una vez fijado un valor para E.

Integrando, como es habitual (Rosner, Tucker y Vaiana 1978, Withbroe 1981), las ecuaciones (3.5.7), obtenemos leyes de escala comparables a las obtenidas por Rosner, Tucker y Vaiana (1978, ver tambien ecs. (3.1.11)) o Craig, Mc Clymont y Underwood (1978). Nuestras leyes de escala (ver Figura 15) son

$$P_o L = C_p (EL^2)^{\beta_p} = 0.029 \text{ erg.cm}^{-3} (EL^2)^{0.911} \quad (3.5.9a)$$

$$T_o = C_T (EL^2)^{\beta_T} = 0.575 \cdot 10^6 \text{ K} (EL^2)^{0.296} \quad (3.5.9b)$$

$$T_{ob} = C_b (EL^2)^{\beta_b} = 8.21 \cdot 10^3 \text{ K} (EL^2)^{-0.085} \quad (3.5.9c)$$

donde E está expresado en unidades de  $(1/9000)\text{erg.cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$  y L en unidades de  $3 \cdot 10^9 \text{cm}$ . Chequeamos que el exceso de pérdidas radiativas debido a la transición Ly $\alpha$  no altera apreciablemente nuestros equilibrios (el apartamiento relativo se mantiene debajo del 5%). Tambien observamos que

aún cuando el perfil de temperaturas se torna muy abrupto hacia la región de transición, el flujo conductivo nunca excede el 1% del valor de flujo saturado correspondiente al valor local de la temperatura ( $Q_{\text{sat}} = \frac{1}{4} n m_e (k_B T / m_e)^{3/2}$ ,  $m_e$ : masa del electrón). Este resultado coincide con una conclusión similar de Somov (1978) en relación con las fulguraciones solares, y muestra que la fórmula de conductividad de Spitzer sigue siendo aproximadamente válida.

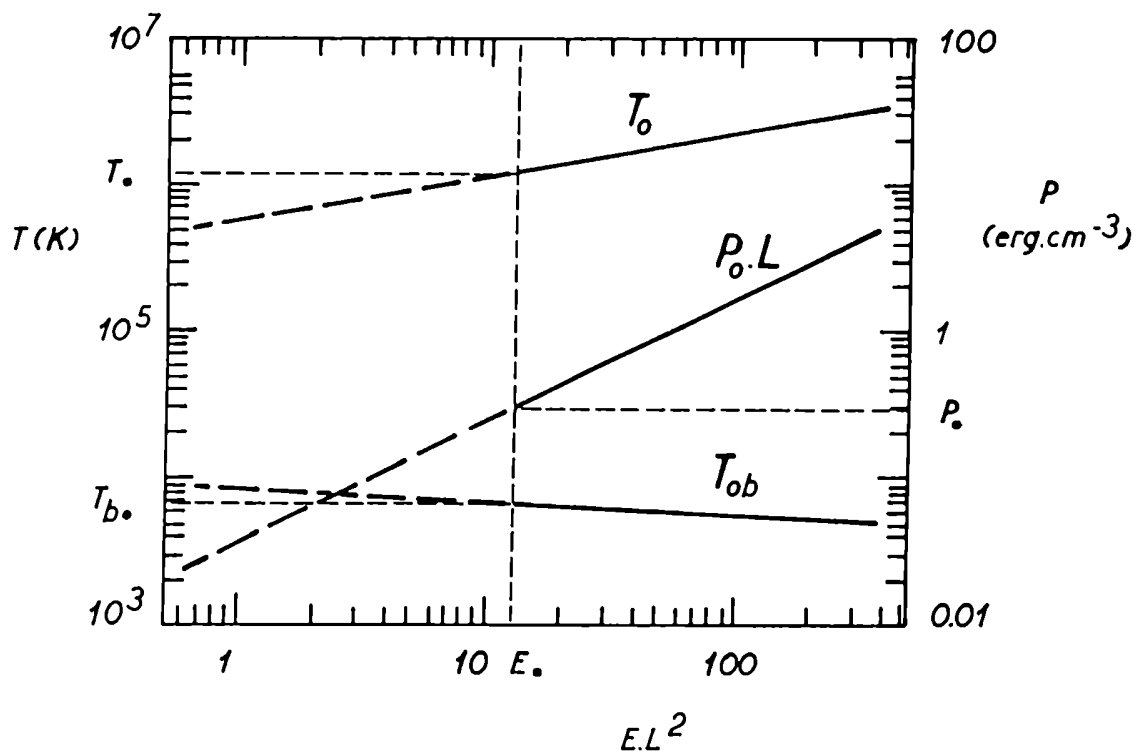


FIGURA 15: Leyes de escala derivadas de nuestro modelo de equilibrio estático. Las cantidades  $T_o$ ,  $T_{ob}$  y  $P_o.L$  son graficadas en función de  $EL^2$ . La línea punteada indica equilibrios estáticos inestables.

De la misma forma que Kuin y Martens (1982), definimos tres escalas temporales asociadas al problema. Una escala dinámica

$$\tau_d = \Delta z / c_s \quad (3.5.10)$$

(donde  $c_s$  es la velocidad del sonido y  $\Delta z$  una longitud característica) durante la cual relajan las inhomogeneidades en la presión, una escala temporal radiativa

$$\tau_r = \frac{3}{2.P.\phi(T)} \quad (3.5.11)$$

en la cual se alcanza el equilibrio térmico debido al efecto de pérdidas radiativas, y una escala temporal conductiva

$$\tau_c = \frac{3P(\Delta z)^2}{2K_c T^{7/2}} \quad (3.5.12)$$

a lo largo de la cual se suavizan las inhomogeneidades térmicas. Para condiciones coronales  $\tau_d^{cor} \ll \tau_c^{cor} \ll \tau_r^{cor}$ , mientras que en la cromósfera estas relaciones se alteran significativamente, resultando  $\tau_r^{chr} \ll \tau_d^{chr} \ll \tau_c^{chr}$  y  $\tau_d^{chr} \cong \tau_d^{cor}$ . Entonces, si estamos interesados en la evolución del sistema en tiempos del orden de  $\tau_r^{cor}$ , podemos suponer equilibrio de presiones ( $\tau_d \ll \tau_r^{cor}$ ) y además equilibrio térmico en la cromósfera ( $\tau_r^{chr} \ll \tau_r^{cor}$ ). En virtud de su rápida relajación, el balance térmico cromosférico inmediatamente se adapta a los cambios producidos en la corona. Podemos decir que la temperatura cromosférica se encuentra esclavizada a las perturbaciones coronales.

Debido a las consideraciones que hemos hecho, creemos que es posible

construir un modelo sencillo que no obstante retiene algunas de las características relevantes del problema verdadero. Dicho modelo consiste en una corona espacialmente uniforme en contacto con una delgada región (también uniforme) de la alta cromósfera, a la que llamaremos base. Las ecuaciones de evolución para las cantidades hidrodinámicas de cada una de estas regiones, se obtienen a través de promedios espaciales de las ecuaciones hidrodinámicas exactas modelando adecuadamente los flujos entre dichas regiones. Consideramos que las variables hidrodinámicas resultan de la forma

$$f(z,t) = f_0(z)(1 + \delta f(t)) \quad (3.5.13)$$

siendo  $f_0(z)$  el equilibrio estático y  $\delta f(t)$  el apartamiento no lineal del valor de equilibrio. Reemplazando esta forma funcional en las ecuaciones (3.5.1) y promediando espacialmente a lo largo de la corona

$$n_0 \partial_t \delta n = - \frac{1}{L} (1 + \delta n_b) n_{0b} v_L \quad (3.5.14a)$$

$$0 = \partial_z P_0 \quad (3.5.14b)$$

$$\frac{3}{2} P_0 \partial_t \delta p = - \frac{Q_L}{L} - \frac{5}{2} P_0 (1 + \delta p) \frac{v_L}{L} + E(1 - (1 + \delta p)^2 (1 + \delta T)^\gamma) \quad (3.5.14c)$$

donde el subíndice  $b$  significa base y  $Q_L$  y  $v_L$  son respectivamente el flujo de calor y la velocidad a través de la interfase cromósfera-corona ( $z=L$ ). El exponente  $\gamma$  es la potencia de la función  $\phi(T)$  a temperatura coronal ( $\gamma=-3$  según la ecuación (3.5.4)). Hemos empleado la notación

$$f_o = \int_0^L \frac{dz}{L} f_o(z) \quad (3.5.15)$$

Puesto que los equilibrios que vamos a considerar son aquellos cuyo flujo conductivo hacia las bases del loop es nulo,  $Q_L$  solo será diferente de cero si hay perturbaciones presentes. Como consideramos la posición  $z=L$  ubicada justo debajo de la región de transición de estos equilibrios, proponemos la siguiente expresión para  $Q_L$

$$Q_L = \frac{1}{L_b} K_o T_{ob}^{5/2} T_o \delta T \quad (3.5.16)$$

donde  $L_b$  es el tamaño de la base. Definimos base como aquella región de la alta cromósfera que reacciona frente a perturbaciones térmicas en la corona. Si desarrollamos perturbativamente nuestra solución de equilibrio  $T_o(z)$  alrededor de  $z=L$  (ver Apéndice C), encontramos (usando las ecuaciones (3.5.7)) que en la baja región de transición la temperatura se aproxima exponencialmente al valor  $T_{ob}$  en una longitud característica que identificaremos con  $L_b$

$$L_b = 1.38 \left( \frac{K_o T_{ob}^{7/2}}{E} \right)^{1/2} \quad (3.5.17)$$

Consideremos ahora consistentemente la evolución temporal del material contenido en la base y el que constituye la corona. Debido a la larga escala temporal conductiva de la cromósfera, vamos a suponer que la base se encuentra energeticamente balanceada a cada instante. En virtud de la corta escala temporal dinámica, supondremos que la cromósfera instantaneamente alimenta o evacúa la base de material en función de los requerimientos del proceso de evaporación-condensación. De esta manera, la base es mantenida a

densidad constante a lo largo de su evolución ( $\delta n_b = 0$ ). Esta condición es en realidad satisfecha solo si el fluido que atraviesa esta región se comporta en forma incompresible. En el Apéndice A mostramos que la condición de incompresibilidad se cumple satisfactoriamente en la baja región de transición ( $T < 4 \cdot 10^5 \text{K}$ ).

Promediando espacialmente la ecuación (3.5.1c) a lo largo de la base

$$0 = \frac{Q}{L_b} + \frac{5}{2} \frac{P_o}{P_o} (1 + \delta p) \frac{1}{L_b} (v_L - v_b) + E(1 - (1 + \delta p)^2 (1 + \delta T_b)^{\gamma_b}) \quad (3.5.18)$$

La ecuación de continuidad en la cromósfera implica  $n_{ob} v_b = n_L v_L$ , y dado que  $L_b$  fue definida como la longitud a lo largo de la cual la temperatura se incrementa  $e$  ( $e = 2.718 \dots$ ) veces, obtenemos

$$v_b \cong \frac{1}{e} v_L \quad (3.5.19)$$

Reemplazando esta relación en (3.5.18), derivamos una expresión para  $v_L$  en términos de las perturbaciones

$$= -\frac{2}{5} \frac{e}{e-1} \left[ \frac{K_o T_{ob}^{5/2} T_o}{P_o L_b} \frac{\delta T}{1 + \delta p} + \frac{E L_b}{P_o} \frac{1 - (1 + \delta p)^{\gamma_b + 2}}{1 + \delta p} \right] \quad (3.5.20)$$

Las perturbaciones en la temperatura pueden calcularse con ayuda de la ecuación de estado (3.5.2)

$$\delta T = (\delta p - \delta n) / (1 + \delta n) \quad (3.5.21a)$$

$$\delta T_b = \delta p \quad (3.5.21b)$$



Usando las ecuaciones (3.5.16-21) y reemplazando en (3.5.14), obtenemos

$$\partial_{\tau} \delta n = \frac{1}{1+\delta p} (\alpha \cdot \delta T + \beta \frac{h}{\theta} (1-(1+\delta p)^{\gamma} b^{+2})) \quad (3.5.22a)$$

$$\partial_{\tau} \delta p = 1-(1+\delta p)^2 (1+\delta T)^{\gamma} + \frac{5}{3} \beta h (1-(1+\delta p)^{\gamma} b^{+2}) + \frac{5}{3e} \alpha \cdot \theta \cdot \delta T \quad (3.5.22b)$$

$$\alpha = \beta \frac{K_o T_o^{3/2} T_o^2}{EL^2 h}, \quad \beta = \frac{3}{5} \frac{e}{e-1} \cong 0.95 \quad (3.5.22c)$$

y  $\tau = \frac{2E}{3P_o} t$  es aproximadamente el tiempo en unidades de  $\tau_r^{cor}$ ,  $h = \frac{L}{L_o}$  y  $\theta = \frac{T}{T_o}$  son funciones adimensionales de E de orden mucho menor que la unidad. Las relaciones (3.5.21-22) conforman el conjunto completo de ecuaciones que describen la evolución no lineal de nuestro sencillo modelo de cromósfera-corona.

De acuerdo a lo enunciado en la sección 3.4., comenzamos linealizando las ecuaciones (3.5.22) con respecto a las perturbaciones  $\delta n$  y  $\delta p$

$$\partial_{\tau} \psi = L \cdot \psi \quad (3.5.23)$$

donde

$$\psi = \begin{pmatrix} \delta n \\ \delta p \end{pmatrix} \quad (3.5.24)$$

y

$$L = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \beta \frac{h}{\theta} (\gamma_b + 2) \\ \gamma - \frac{5}{3e} \alpha \cdot \theta & -\gamma - 2 - \frac{5}{3} \beta h (\gamma_b + 2) + \frac{5}{3e} \alpha \cdot \theta \end{pmatrix} \quad (3.5.25)$$

Como es bien sabido, la estabilidad o inestabilidad de los equilibrios considerados está vinculada con el signo de la parte real de los autovalores de la matriz  $L$

$$\lambda_{1,2} = \frac{L_{11} + L_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(L_{11} + L_{22})^2}{4} - (L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21})} \quad (3.5.26)$$

Calculamos numericamente estos autovalores para  $E$  variando en el rango  $10^{-1} - 10^{-5} \text{ erg.cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$  y hallamos que siempre satisfacen  $\lambda_2^* = \lambda_1$ . Como ya dijéramos en la sección anterior (también Iooss y Joseph 1980), cada vez que la parte real de un par de autovalores complejos conjugados cambia su signo de negativo a positivo, se produce una bifurcación de Hopf. Mirando atentamente la expresión (3.5.26) se concluye que solo se producirá una bifurcación de Hopf si la traza de  $L$  se anula mientras el determinante permanece positivo. A partir de (3.5.25), encontramos que la traza de  $L$  resulta positiva si y solo si

$$\alpha < 1 \quad (3.5.27)$$

Reemplazando las leyes de escala (3.5.9) en la expresión de  $\alpha$  (3.5.22c), la condición (3.5.27) resulta

$$EL^2 < 12.46 \quad (3.5.28)$$

mientras que para  $\alpha \approx 1$ , el determinante de  $L$  es

$$\det(L) \approx 2 \quad (3.5.29)$$

De manera pues, que se satisfacen las condiciones para que una bifurcación

de Hopf tenga lugar. Para un loop típico ( $L \approx 3 \cdot 10^9 \text{ cm}$ ), el equilibrio estático descrito por las leyes de escala (3.5.9) se vuelve inestable para valores de la tasa de calentamiento inferiores a  $1.38 \cdot 10^{-9} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ . Para tasas de calentamiento menores pero cercanas a esta, el sistema comienza a espiralar en el plano  $(\delta n, \delta p)$  alejándose del equilibrio  $(0,0)$  con un período

$$\tau_0 = 2\pi \cdot \frac{3P}{2E_0} \cdot \det^{-1/2}(L) \cong 25 \text{ minutos} \quad (3.5.30)$$

El sistema es entonces atraído hacia un ciclo límite estable como muestra esquemáticamente la Figura 16. La amplitud de este ciclo es función de la tasa de calentamiento. Los valores de las magnitudes hidrodinámicas

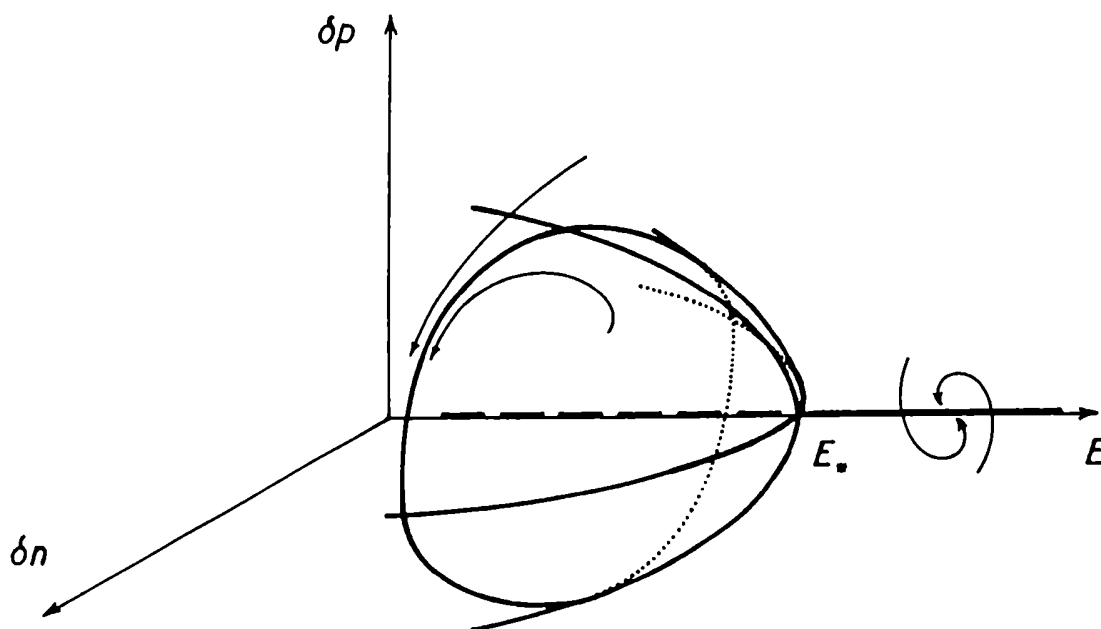


FIGURA 16: Diagrama esquemático mostrando los equilibrios estático y de ciclo límite. La línea punteada indica equilibrios inestables.

correspondientes al punto crítico son

$$T_* = 1.2 \cdot 10^6 \text{ K} \quad (3.5.31a)$$

$$T_{b*} = 6.6 \cdot 10^3 \text{ K} \quad (3.5.31b)$$

$$P_* L = 0.3 \text{ erg.cm}^{-3} \quad (3.5.31c)$$

$$L_{b*} = 1.8 \text{ km} \quad (3.5.31d)$$

$$E_* = 1.38 \cdot 10^{-9} \text{ erg.cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1} \quad (3.5.31e)$$

A partir de (3.5.20) podemos establecer el orden de magnitud del campo de velocidades que atraviesa las bases del loop cuando el sistema se encuentra próximo al punto crítico. De esta manera obtenemos una cota inferior para  $v_L$ , ya que la misma es una función decreciente de  $EL^2$ . Conservando solo términos lineales en  $\delta n$  y  $\delta p$ , hallamos que el segundo término en (3.5.20) resulta despreciable en comparación con el primero, luego

$$= -0.54 \text{ km.s}^{-1} \cdot \delta p \quad (3.5.32)$$

Como se muestra en el Apéndice A, este flujo puede considerarse incompresible ( $nv=\text{cte.}$ ). Puesto que la presión es constante a lo largo del loop, encontramos que la velocidad crece linealmente con la temperatura. Entonces, si imaginamos al loop como un manojo de tubos de flujo térmicamente independientes describiendo ciclos límites con fases iniciales distribuidas aleatoriamente, podemos estimar el ensanchamiento Doppler de

una línea que se forma en una región de temperatura T como

$$\Delta v(T) = 1.08 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \frac{T}{T_b} \delta p_{\text{max}} \quad (3.5.33)$$

donde hemos aplicado un factor 2 a (3.5.32) para tener en cuenta los flujos ascendentes y descendentes y  $\delta p_{\text{max}}$  es la amplitud de  $\delta p(t)$ . Veremos más adelante como se compara este ancho Doppler teórico con mediciones efectuadas sobre líneas del rango espectral ultravioleta (Cheng, Doschek y Feldman 1976, Feldman y Doschek 1977), pero previamente debemos realizar el análisis no lineal de estabilidad para poder obtener (entre otras cosas) un valor de  $\delta p_{\text{max}}$ .

Nos proponemos ahora aplicar el análisis no lineal descrito en la sección 3.4. a las ecuaciones de nuestro modelo. Para ello definimos el nuevo parámetro de control

$$\mu = (E_* - E)/E_* \quad (3.5.34)$$

de manera tal que el equilibrio estático resulta inestable para  $\mu > 0$ . A fin de encontrar nuevas soluciones estables de las ecuaciones (3.5.22), fue necesario expandir el cálculo perturbativo de las mismas hasta el quinto orden. La primera condición de Fredholm no trivial aparece a orden  $\epsilon^3$ , donde la expresión (3.4.20a) resulta

$$\frac{A'}{A} = \Gamma_2^{(2)} - \Gamma_2^{(2)} |A|^2 \quad (3.5.35)$$

donde

$$\Gamma_2^{(2)} = \mu_2 \frac{\partial}{\partial \mu} \lambda - i\omega_2 \quad (3.5.36)$$

$$\Gamma_2^{(2)} = \frac{2\sigma_0^{(2)}\sigma_1^{(2)} - 4|\sigma_1^{(2)}|^2 - \frac{2}{3}|\sigma_2^{(2)}|^2}{i\omega_0} - 3\sigma_1^{(3)} \quad (3.5.37)$$

como tambien figura en el Apéndice B. Imponiendo la condición (3.4.20b), obtenemos valores numéricos para  $\mu_2$  y  $\omega_2$

$$\mu_2 = -5.1, \quad \omega_2 = -17.4 \quad (3.5.38)$$

y tambien

$$\gamma^{(2)} = \gamma_2^{(2)} = -0.29 \quad (3.5.39)$$

Por un lado,  $\mu_2 < 0$  significa que existe una nueva rama de equilibrio  $\mu = \mu_2 \varepsilon^2$  para valores negativos del parámetro de control. Por otro lado, de (3.4.26) obtenemos la expresión del potencial generalizado a orden  $\varepsilon^3$

$$S \cong -\frac{\gamma^{(2)}}{2} \varepsilon^2 |A|^2 \left(1 - \frac{1}{2}|A|^2\right) \quad (3.5.40)$$

Esta función presenta dos extremos, un mínimo en  $|A|=0$  indicando que el equilibrio estático es estable, y un máximo en  $|A|=1$  lo cual implica que la nueva rama de equilibrio es inestable. Este comportamiento es característico de las bifurcaciones subcríticas (ver Figura 17b), a diferencia de las bifurcaciones supercríticas (Figura 17a) en las cuales una nueva rama estable aparece justo cuando el equilibrio estático se vuelve inestable.

A orden  $\varepsilon^5$  la condición  $\Lambda^{(5)}=0$  se escribe

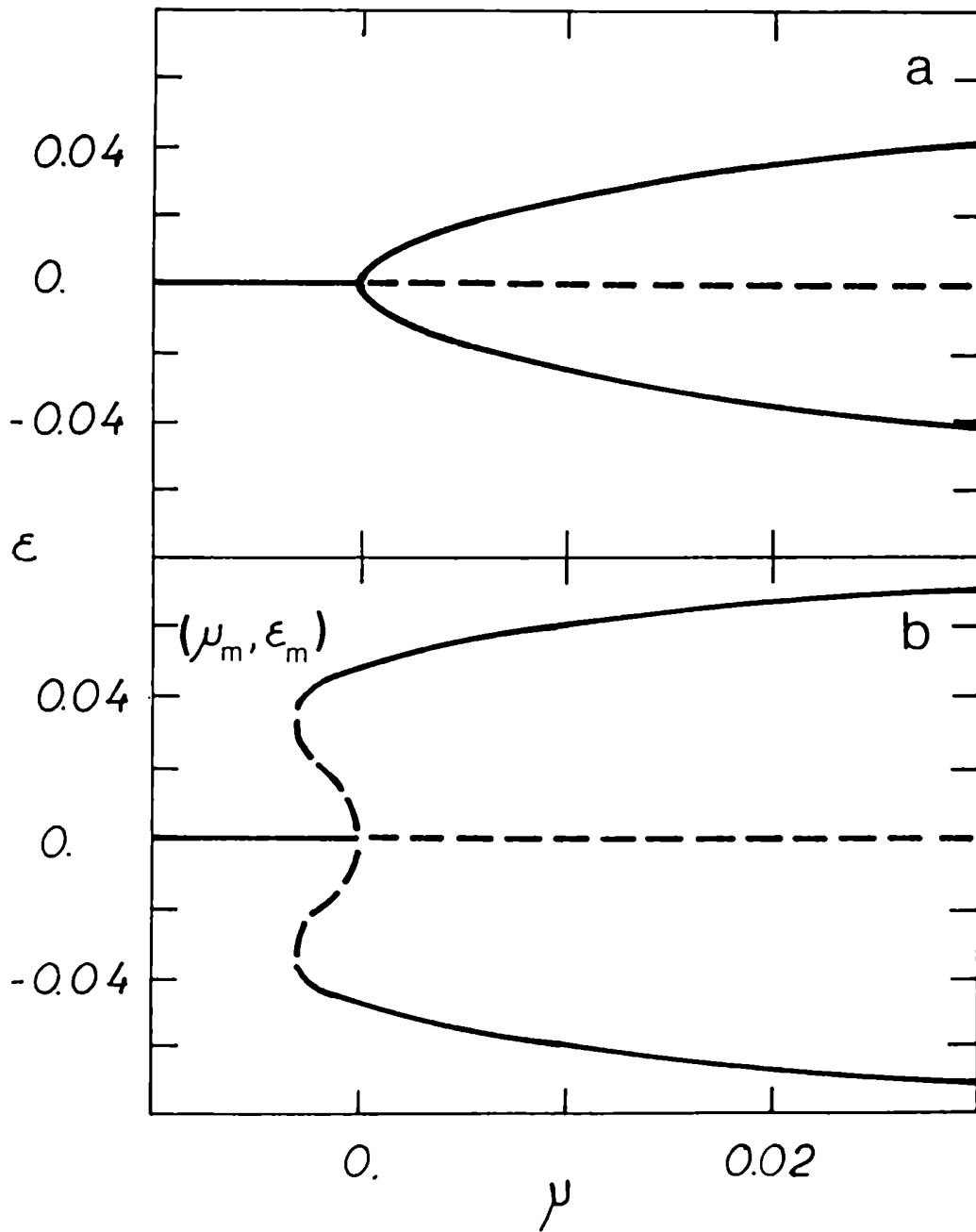


FIGURA 17: (a) Bifurcación de Hopf supercrítica. (b) Bifurcación de Hopf subcrítica derivada perturbativamente de nuestras ecuaciones. La línea punteada representa equilibrios inestables.

$$\frac{\dot{A}_4}{A} = \Gamma^{(4)} - \Gamma_2^{(4)} |A|^2 - \Gamma_4^{(4)} |A|^4 \quad (3.5.41)$$

donde la expresión para  $\Gamma^{(4)}$ ,  $\Gamma_2^{(4)}$  y  $\Gamma_4^{(4)}$  puede hallarse en el Apéndice B. La función S a quinto orden es

$$S(|A|) = -\frac{1}{2}(\gamma^{(2)} \varepsilon^2 + \gamma^{(4)} \varepsilon^4) |A|^2 + \frac{1}{4}(\gamma_2^{(2)} \varepsilon^2 + \gamma_2^{(4)} \varepsilon^4) |A|^4 + \frac{1}{6} \gamma_4^{(4)} \varepsilon^4 |A|^6 \quad (3.5.42)$$

donde

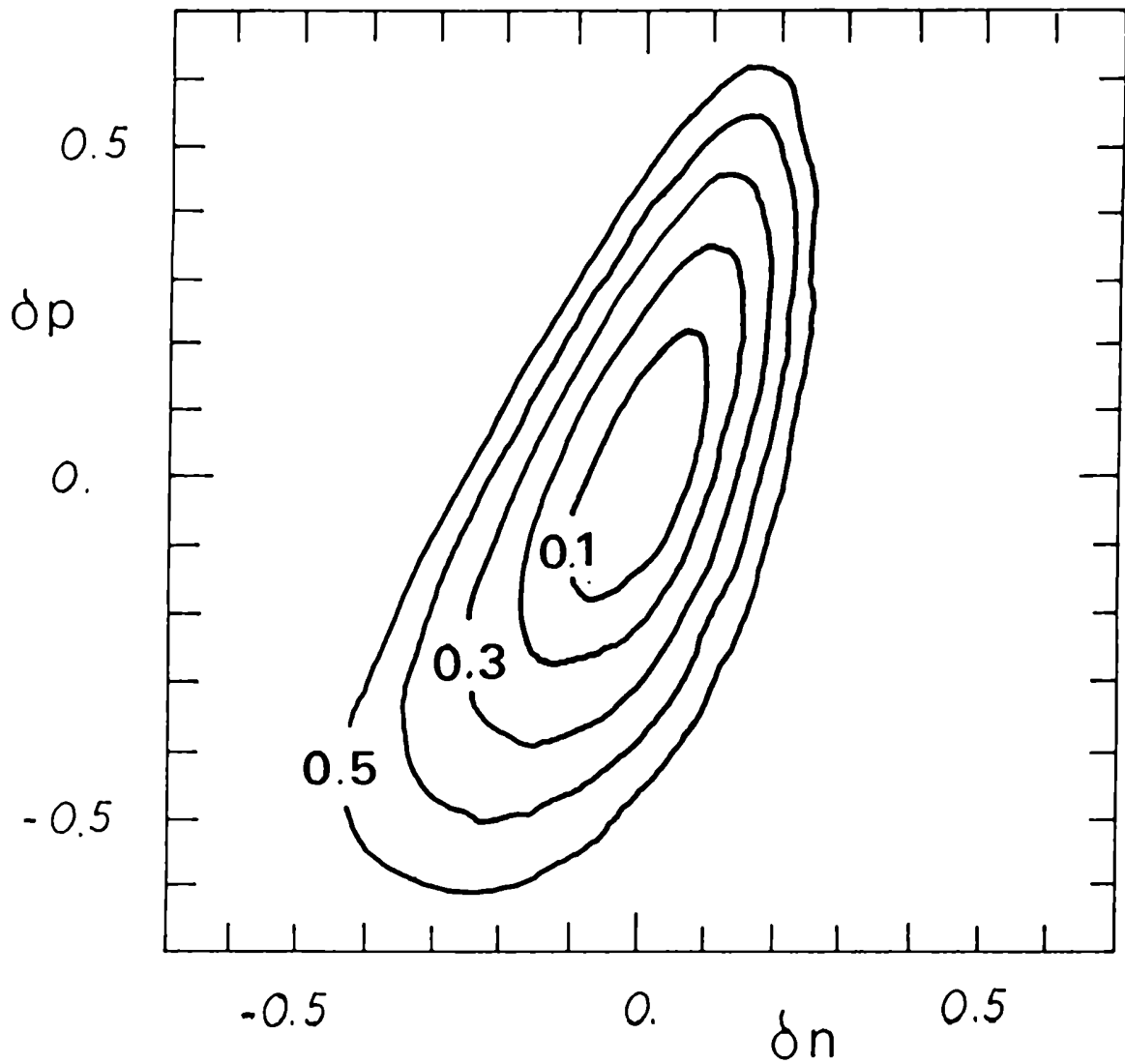
$$\gamma_2^{(4)} = -7.9 \quad \gamma_4^{(4)} = 131.7 \quad (3.5.43)$$

La nueva rama de equilibrio es descrita ahora por  $\mu = \mu_2 \varepsilon^2 + \mu_4 \varepsilon^4$ , donde

$$\mu_4 = 2197.6 \quad (3.5.44)$$

por aplicación de la condición (3.4.20b). Como  $S(|A|)$  es función de  $\varepsilon$  y a su vez  $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$ , la estabilidad del nuevo equilibrio puede cambiar a medida que varía el parámetro de control. Los resultados del análisis de estabilidad se muestran en la Figura 17b, donde la línea punteada indica que el equilibrio es inestable. La trayectoria del sistema en el plano  $(\delta n, \delta p)$  puede ser construida utilizando las definiciones (3.4.10) y (3.4.13a) y las soluciones (3.4.19) para  $k \leq 4$ . Hemos verificado que estas trayectorias comparan muy bien con nuestras trayectorias numéricas (como la que se muestra en la Figura 18) siempre que el parámetro  $\mu$  se encuentre suficientemente próximo a su valor crítico ( $\mu = 0$ ). Para  $\mu > 0.2$  las trayectorias perturbativas comienzan a resultar pequeñas en comparación con





*FIGURA 18: Ciclos límites (señalando el correspondiente valor de  $\mu$ ) obtenidos por integración numérica de nuestras ecuaciones.*

las obtenidas numericamente.

Podemos también investigar de que manera el tiempo de relajación al ciclo límite depende del parámetro  $\mu$ , integrando analíticamente la ecuación (3.4.24) para  $k \leq 4$ . En la Figura 19 mostramos  $|A(t)|$  para diferentes valores de  $\mu$ , normalizando en cada caso con el correspondiente valor de  $\delta p_{\max}$  a fin de poder establecer una comparación con nuestros resultados numéricos (líneas de puntos en la Figura 19).

Resolvimos numericamente las ecuaciones (3.5.22) usando un método Runge-Kutta de cuarto orden para distintos valores de  $\mu$  y diferentes condiciones iniciales. En la Figura 18 graficamos las soluciones de tipo ciclo límite, cada una de las cuales está etiquetada con el correspondiente valor de  $\mu$ .

A fin de chequear la relajación hacia los ciclos límites expuestos en la Figura 18, computamos cada cruce de la trayectoria con el semieje  $\delta p > 0$  tanto para condiciones iniciales internas como externas al atractor como se puede ver en los trazos punteados de la Figura 19. La separación temporal entre dos puntos consecutivos (Figura 19) se aproxima asintóticamente al período del correspondiente ciclo límite.

Nótese que la relajación se vuelve terriblemente lenta a medida que el parámetro de control se aproxima al valor crítico. En efecto, podemos advertir en (3.4.24) que el tiempo de relajación es proporcional a  $\xi^{-1}$  y por lo tanto tiende a infinito al aproximarnos al punto de bifurcación. En virtud de este resultado general, creemos que los dos ciclos límites estables hallados por Craig y Schulkes (1985, ver su Fig. 3a) para las ecuaciones de Kuin y Martens (1982) en el punto  $\mu = 0$ , pueden no ser reales sino una consecuencia de la muy lenta relajación.

En la Figura 20 graficamos la evolución temporal de la perturbación térmica para el ciclo límite correspondiente a  $\mu = 0.5$ . Puede advertirse

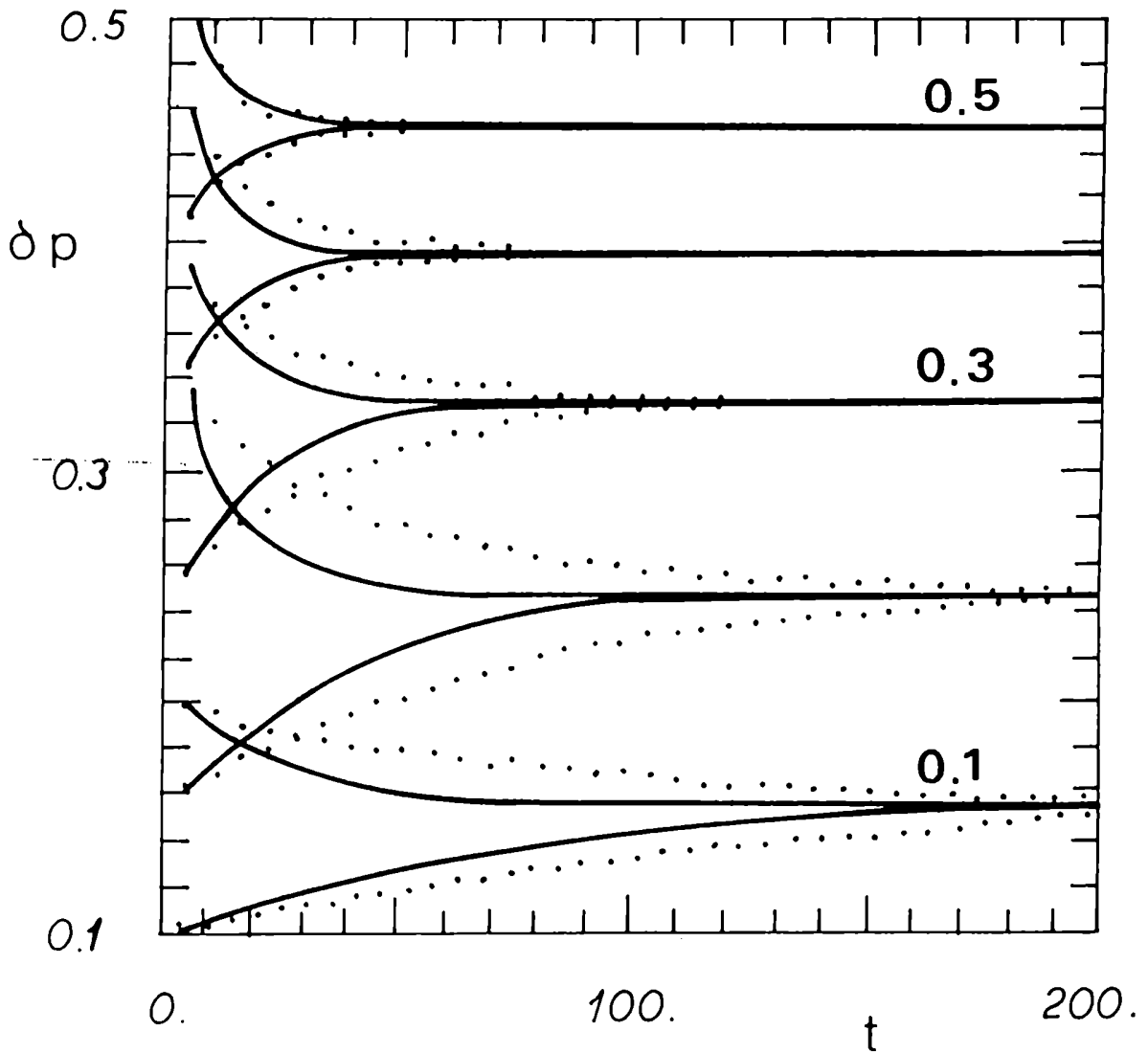


FIGURA 19: Relajación hacia ciclos límites estables para diferentes valores (convenientemente indicados) del parámetro de control. El trazo continuo corresponde a la evolución analítica de  $A(t)$  normalizada con  $\delta p_{\max}$ , mientras que los puntos indican los sucesivos cruces de la trayectoria con el semieje  $\delta p$  positivo. La separación temporal entre puntos coincide con el período del ciclo límite.

una cierta preferencia del sistema a permanecer en el tramo caliente del ciclo, lo cual habia ya sido notado por Kuin y Martens (1982). Hemos calculado el valor medio temporal de  $\delta T(t)$  y obtuvimos para este ciclo limite un valor de 0.16. Esto significa que al mirar globalmente un loop, al cual suponemos formado por un haz de tubos magnéticos cada uno de los cuales sufre un ciclo limite sin correlación de fase con el resto, mediremos una temperatura de  $1.16.T_0$  constante en el tiempo. Este

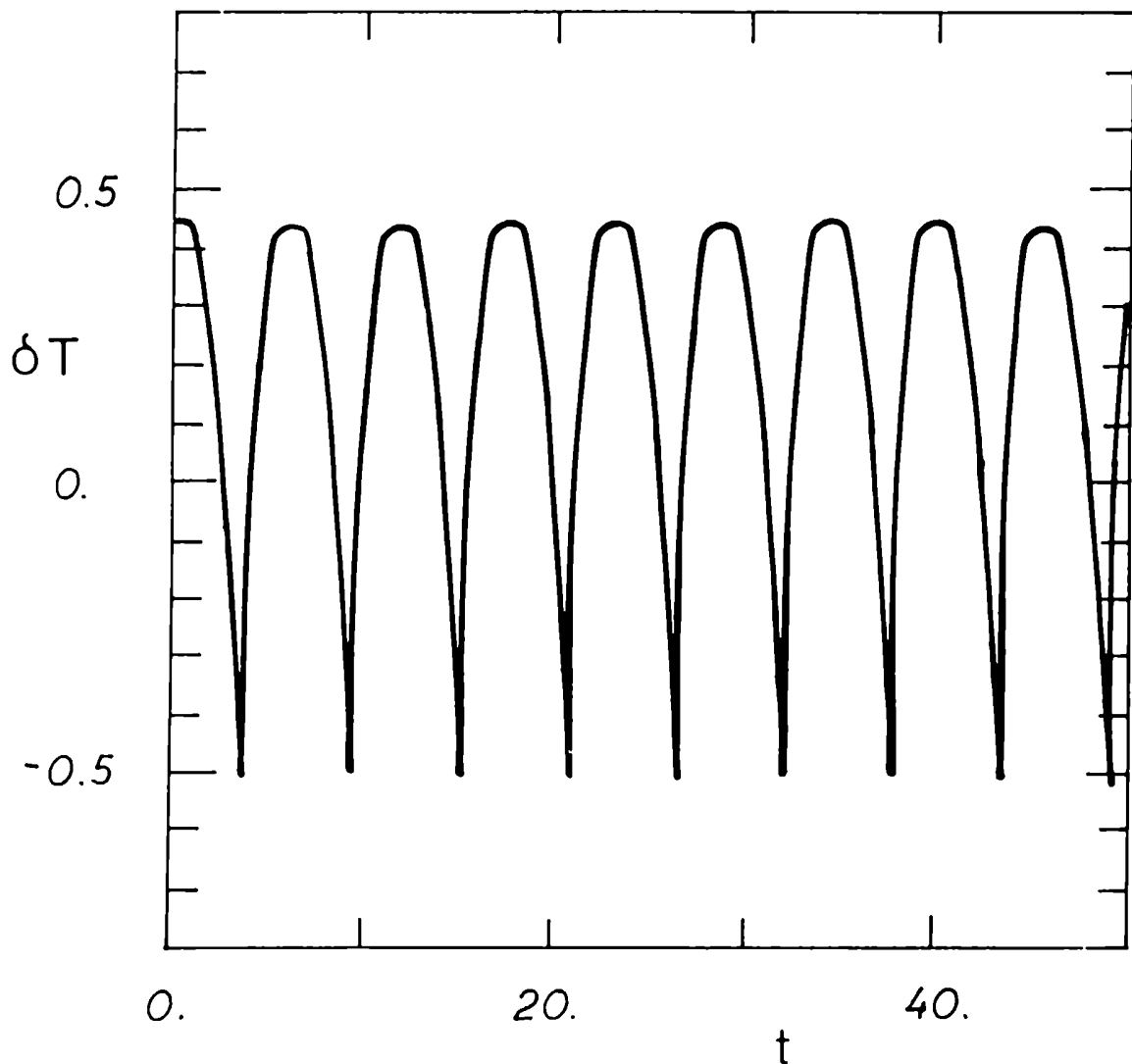


FIGURA 20: Comportamiento temporal de la temperatura para  $\mu = 0.5$ .

incremento de temperatura con respecto al equilibrio estático (sin ciclo límite) es imperceptible para las actuales técnicas de medición de temperatura. Vemos además que si bien los ciclos límites son equilibrios eminentemente dinámicos, el aspecto global (promediado espacialmente) de la densidad y temperatura coronales permanecerá invariable en el tiempo.

Sin embargo, existe un indicador medible que pone de manifiesto la presencia de ciclos límites en la corona solar: es el ensanchamiento Doppler de líneas ultravioleta que se forman en la región de transición. Tal ensanchamiento (no explicable como ensanchamiento Doppler térmico) podría ser producido por el campo de velocidades asociado a la evolución del mencionado ensemble de ciclos límites. En la Figura 21 comparamos la correlación velocidad-temperatura hallada observacionalmente por Cheng, Doschek y Feldman (1976) midiendo anchos de líneas que se forman a diferentes alturas en la región de transición, con nuestra relación teórica (3.5.33) evaluada en diferentes valores del parámetro de control  $\mu$ .

Otro resultado interesante que hemos obtenido, está vinculado con la dependencia  $L^{-2}$  de la tasa de calentamiento crítico con la longitud del loop (ver (3.5.28)). Si sugerimos la expresión para la tasa de calentamiento derivada en la sección 2.2. (también Gómez y Ferro Fontán 1988), es decir

$$E = \frac{u_p^2 \tau_p \mathcal{B}_o^2}{4\pi L^2} \quad (3.5.45)$$

donde  $u_p$  y  $\tau_p$  recordemos que son la velocidad y el tiempo típicos de la convección subfotosférica. Entonces, mirando simultáneamente las ecuaciones (3.5.28) y (3.5.45) se advierte claramente que la estabilidad o inestabilidad del sistema resulta independiente de la longitud del loop. La condición de inestabilidad del equilibrio estático (o de existencia de ciclo límite), resulta

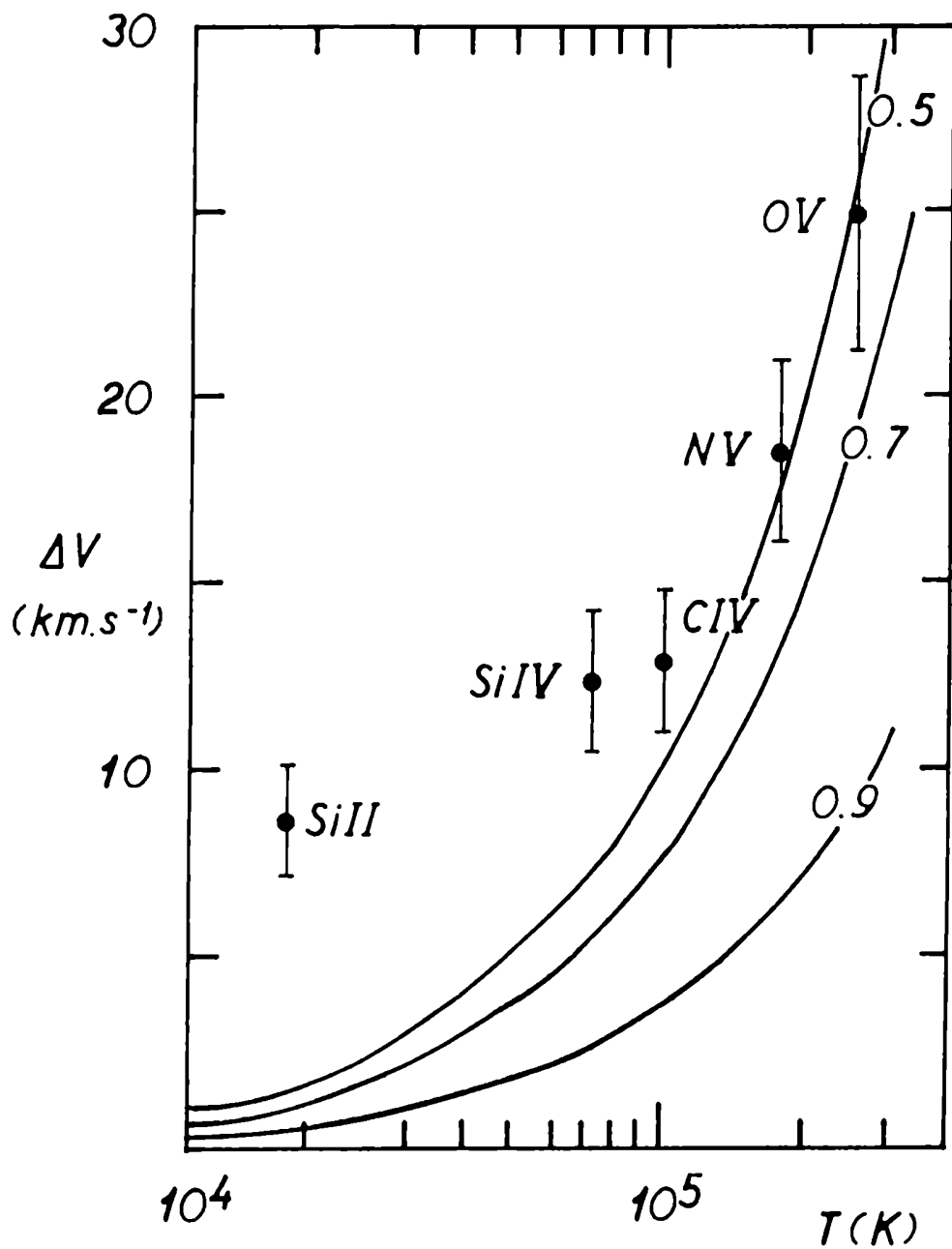


FIGURA 21: Los puntos con sus correspondientes barras de error son mediciones de anchos Doppler no térmicos hechas por Cheng, Doschek y Feldman (1976) sobre líneas que se forman a distintas temperaturas. El trazo continuo corresponde a nuestra estimación teórica para distintos valores de tasa de calentamiento. El número a la derecha de cada una de estas curvas es  $E/E_*$ .

$$u_{p5} \tau_{p3} \mathcal{B}_2^2 < 1.5 \quad (3.5.46)$$

donde  $u_{p5}$  es  $u_p$  en unidades de  $10^5 \text{ cm.s}^{-1}$ ,  $\tau_{p3}$  es  $\tau_p$  en unidades de  $10^3 \text{ s}$  y  $\mathcal{B}_2$  es el campo  $\mathcal{B}_0$  en unidades de  $10^2 \text{ Gauss}$ . Este resultado indica que los ciclos límites existen preferentemente en regiones de relativamente escasa actividad magnética, independientemente del tamaño de los loops que la constituyen. Dicha conclusión concuerda magníficamente con la observada reducción en el ensanchamiento no térmico de líneas ultravioleta en ciertas regiones magnéticamente activas como prominencias quiescentes y manchas solares (Feldman y Doschek 1977). En estas regiones de intenso campo magnético, seguramente no se cumple la desigualdad (3.5.46) y en consecuencia no hay ciclos límites que produzcan el citado ensanchamiento Doppler anómalo.

#### 4. COLCLUSIONES

A lo largo del presente trabajo de investigación, tres objetivos fundamentales han orientado el desarrollo de nuestra tarea:

1- Un análisis crítico de revisión bibliográfica, no solo de los modelos teóricos y resultados observacionales del tema concreto del calentamiento de la corona solar, sino también de temas más generales que de una u otra forma pudieran permitir el planteo del problema con un enfoque original. En este sentido, se ha profundizado en el estudio de turbulencias tanto cinéticas como de fluidos, en virtud de la importancia que ambas tienen al incrementar la eficiencia de la disipación Joule de corrientes eléctricas en plasmas. También nos hemos interesado en el análisis de estabilidad de equilibrios de ecuaciones no lineales, a través del desarrollo de métodos perturbativos. A lo largo de nuestro relevamiento de la literatura específica del tema, hemos advertido una desvinculación entre los modelos de calentamiento y los estudios de estabilidad térmica. Intentamos en esta tesis ofrecer una visión unificada entre el proceso dinámico que transforma la energía mecánica en calor y su impacto en el balance energético del plasma.

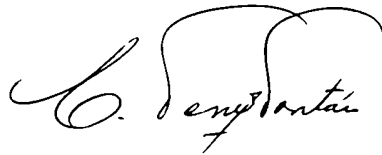
2- Debido al fuerte comportamiento no lineal del plasma coronal ( $\mathcal{R}_m \approx 10^{12}$ ) y a la presencia de la región convectiva como fuente de excitación de una compleja distribución de corrientes eléctricas en la corona, el desarrollo de turbulencia MHD resulta fuertemente probable. Suponiendo que dicha turbulencia alcanza un régimen estacionario, podemos predecir una tasa de




calentamiento coronal que es del mismo orden que las tasas de enfriamiento más relevantes, es decir, el flujo conductivo hacia la cromósfera y las pérdidas por emisión de radiación. En nuestro modelo, el proceso completo de generación de energía magnética en la macroescala, eficiente transporte hacia la microescala por un mecanismo de cascada y disipación por efecto Joule en dicha región espectral es consistentemente descrito en el marco de una teoría global de la turbulencia MHD.

3- El estudio analítico de la estabilidad térmica no lineal del plasma coronal es posibilitado a partir de una fuerte reducción en los grados de libertad del problema, la cual se logra promediando espacialmente las ecuaciones a lo largo de la corona. Con un modelo de tales características hemos logrado predecir la existencia de soluciones cíclicas estables en el plano definido por la densidad y temperatura promedio de una línea magnética. Suponiendo que un loop coronal está formado por un manojo de líneas magnéticas, en cada una de las cuales se desarrolla un ciclo límite que no guarda relación de fase con las demás, es posible estimar el ensanchamiento Doppler de líneas espectrales del rango ultravioleta que se forman en la región de transición. Dicha estimación coincide apreciablemente con los anchos no térmicos observados. Más aún, si combinamos nuestro modelo de ciclos límites con un mecanismo de calentamiento por disipación de esfuerzos magnéticos como el descrito en el punto 2, es posible explicar la reducción observada en estos anchos de líneas espectrales en regiones de intensa actividad magnética. En tales regiones, la tasa de calentamiento (que es proporcional al cuadrado de la intensidad magnética) es suficientemente elevada como para que el ciclo límite, que es quien provee el ensanchamiento, ya no resulte estable.

En síntesis, más allá de las fuertes simplificaciones que hemos realizado para desarrollar nuestros modelos (secciones 2.3. y 3.5.), las que de alguna manera se ven justificadas por la buena correspondencia con algunos resultados observacionales, consideramos que nuestro aporte más importante a la investigación del calentamiento coronal es haber participado en la introducción de conceptos nuevos en la literatura del tema como son la turbulencia magnetohidrodinámica y la existencia de ciclos límites como equilibrios estables alternativos.



C. Denker



Handwritten signature

## APENDICES

### A. CONDICIONES DE INCOMPRESIBILIDAD

De acuerdo con Landau (1959), consideraremos a un flujo como incompresible, toda vez que se satisfagan simultaneamente

$$\sqrt{\frac{k_B T}{m_i}} \quad (\text{A.1})$$

$$\ell/\tau \ll \sqrt{\frac{k_B T}{m_i}} \quad (\text{A.2})$$

donde  $\tau$  y  $\ell$  son respectivamente el tiempo y la longitud característica del problema. Por ejemplo en nuestro caso (sección 3.5.),  $\tau$  será el período del ciclo límite y  $\ell$  será el espesor de la región de transición. Debido a (3.5.33), resulta

$$v(T) = v_L \left( \frac{T}{T_{ob}} \right) \quad (\text{A.3})$$

Para  $T_{ob} = 6.6 \cdot 10^3 \text{K}$ ,  $v_L = 1 \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\tau = 1500 \text{s}$  y  $\ell = 3 \cdot 10^7 \text{cm}$ , la condición (A.1) resulta

$$T \ll \frac{k_B T_{ob}^2}{m_i v_L^2} \cong 4 \cdot 10^5 \text{K} \quad (\text{A.4})$$

Es sencillo verificar que (A.2) siempre se satisface. Entonces, tanto en la base como en la baja región de transición ( $T < 4 \cdot 10^5 \text{K}$ ), el material que se

evapora y condensa se comporta como incompresible.

## B. EXPRESIONES DE LOS COEFICIENTES $\Lambda$ Y $\Gamma$

$$\Lambda_{-3}^{(3)} = \left[ \sigma_3^{(3)} - \frac{2}{3i\omega_0} (\sigma_1^{(2)} \sigma_2^{(2)} + 3\sigma_0^{(2)*} \sigma_1^{(2)}) \right] (A^*)^3$$

$$\Lambda_{-1}^{(3)} = \left[ 3\sigma_2^{(3)} - \frac{2}{3i\omega_0} (\sigma_0^{(2)} \sigma_2^{(2)} + 3\sigma_0^{(2)*} \sigma_1^{(2)} + 6(\sigma_1^{(2)})^2 - 6\sigma_1^{(2)*} \sigma_2^{(2)}) \right] |A|^2 A^*$$

$$\Lambda_3^{(3)} = \left[ \sigma_0^{(3)} + \frac{2}{3i\omega_0} (3(\sigma_0^{(2)})^2 + \sigma_1^{(2)} \sigma_2^{(2)*}) \right] A^3$$

$$\Lambda_{-4}^{(4)} = \left[ \sigma_4^{(4)} - \frac{1}{6i\omega_0} (2\sigma_2^{(3)} \sigma_2^{(2)} + 18\sigma_3^{(3)} \sigma_0^{(2)*} + 3\sigma_1^{(2)} \Lambda_{-3}^{(3)} + 6\sigma_2^{(2)} \Lambda_3^{(3)*}) - \frac{\sigma_2^{(2)}}{9\omega_0^2} (\sigma_0^{(2)} \sigma_2^{(2)} + 9(\sigma_0^{(2)*})^2 + 6\sigma_0^{(2)*} \sigma_1^{(2)}) \right] (A^*)^4$$

$$\Lambda_{-2}^{(4)} = \left[ \mu_2 \partial_{\mu_2} \sigma_2^{(2)} - \frac{\omega_2}{\omega_0} \sigma_2^{(2)} \right] (A^*)^2 + \left[ 4\sigma_3^{(4)} - \frac{1}{6i\omega_0} (2\sigma_2^{(2)} \Gamma_2^{(2)} + 4\sigma_1^{(3)} \sigma_2^{(2)} + 12\sigma_2^{(3)} (\sigma_1^{(2)} + \sigma_0^{(2)*}) - 36\sigma_3^{(3)} \sigma_1^{(2)*} + 3\sigma_0^{(2)} \Lambda_{-3}^{(3)} + 6\sigma_1^{(2)} (\Lambda_{-1}^{(3)} + \Lambda_3^{(3)*})) + \frac{1}{3\omega_0^2} (6\sigma_0^{(2)*} \sigma_1^{(2)*} \sigma_2^{(2)} + 4|\sigma_1^{(2)}|^2 \sigma_2^{(2)} - 2\sigma_0^{(2)} \sigma_1^{(2)} \sigma_2^{(2)} - 4\sigma_0^{(2)*} (\sigma_1^{(2)})^2) \right] |A|^2 (A^*)^2$$

$$\Lambda_0^{(4)} = 2 \left[ \mu_2 \partial_{\mu_1} \sigma_1^{(2)} - \frac{\omega_2}{\omega_0} \sigma_1^{(2)} \right] |A|^2 + \left[ 6\sigma_2^{(4)} - \frac{1}{i\omega_0} (2\sigma_1^{(2)} \Gamma_2^{(2)} + \sigma_0^{(3)} \sigma_2^{(2)} + \sigma_1^{(3)} \sigma_0^{(2)*} + 4\sigma_1^{(3)} \sigma_1^{(2)} - \sigma_2^{(3)} \sigma_0^{(2)} - 4\sigma_2^{(3)} \sigma_1^{(2)*} - \sigma_3^{(3)} \sigma_2^{(2)*} + \sigma_0^{(2)} \Lambda_{-1}^{(3)} - \sigma_2^{(2)} \Lambda_{-1}^{(3)*}) + \frac{1}{3\omega_0^2} ((\sigma_0^{(2)})^2 \sigma_2^{(2)} - 12\sigma_0^{(2)} (\sigma_1^{(2)})^2 + \sigma_0^{(2)*} |\sigma_2^{(2)}|^2 - 12(\sigma_1^{(2)*})^2 \sigma_2^{(2)} + 6\sigma_1^{(2)} (|\sigma_0^{(2)}|^2 + 4|\sigma_1^{(2)}|^2 + \frac{1}{9}|\sigma_2^{(2)}|^2)) \right] |A|^4$$

$$\Lambda_2^{(4)} = [\mu_2 \partial_\mu o_0^{(2)} - \frac{\omega_2}{\omega_0} o_0^{(2)}] A^2 + [4o_1^{(4)} - \frac{1}{6i\omega_0} (36o_0^{(3)} o_1^{(2)} - 6o_0^{(2)} \Gamma_2^{(2)} - 3o_1^{(3)} o_1^{(2)*} - 12o_1^{(3)} o_0^{(2)} - 2o_2^{(3)} o_2^{(2)*} - 3o_2^{(2)} \Lambda_3^{(3)*} - 6o_1^{(2)} (\Lambda_3^{(3)} + \Lambda_{-1}^{(3)*})) + \frac{1}{3\omega_0^2} (6(o_0^{(2)})^2 o_1^{(2)} - 2o_1^{(2)*} |o_2^{(2)}|^2 + 4(o_1^{(2)})^2 o_2^{(2)*} - 12o_0^{(2)} |o_1^{(2)}|^2)] |A|^2 A^2$$

$$\Lambda_4^{(4)} = [o_0^{(4)} + \frac{1}{6i\omega_0} (18o_0^{(3)} o_0^{(2)} + 2o_1^{(3)} o_2^{(2)*} + 6o_0^{(2)} \Lambda_3^{(3)} + 3o_1^{(2)} \Lambda_{-3}^{(3)*}) - \frac{1}{9\omega_0^2} (9(o_0^{(2)})^3 + |o_2^{(2)}|^2 o_2^{(2)*} + 6o_0^{(2)} o_1^{(2)} o_2^{(2)*})] A^4$$

$$\Gamma_2^{(2)} = \mu_2 \partial_\mu \lambda \quad \Gamma_2^{(2)} = \frac{2o_0^{(2)} o_1^{(2)} - 4|o_1^{(2)}|^2 - 2|o_2^{(2)}|^2}{i\omega_0} - 3o_1^{(3)}$$

$$\Gamma_4^{(4)} = \frac{1}{2} \mu_2^2 \partial_{\mu_4}^2 \lambda + \mu_4 \partial_{\mu_4} \lambda$$

$$\Gamma_2^{(4)} = \frac{2}{i\omega_0} [2o_0^{(2)} (\mu_2 \partial_\mu o_1^{(2)} - \frac{\omega_2}{\omega_0} o_1^{(2)}) - 2o_1^{(2)} (\mu_2 \partial_\mu o_0^{(2)} - \frac{\omega_2}{\omega_0} o_0^{(2)*}) - o_1^{(2)} (\mu_2 \partial_\mu o_0^{(2)} - \frac{\omega_2}{\omega_0} o_0^{(2)}) - \frac{1}{3} o_2^{(2)} (\mu_2 \partial_\mu o_2^{(2)} - \frac{\omega_2}{\omega_0} o_2^{(2)*})]$$

$$\Gamma_4^{(4)} = -\Gamma_2^{(4)} - 10o_2^{(5)} + \frac{2}{i\omega_0} [o_0^{(2)} \Lambda_0^{(4)} - o_1^{(2)} (\Lambda_0^{(4)*} + \Lambda_2^{(4)}) - \frac{1}{3} o_2^{(2)} \Lambda_{-2}^{(4)*} + \frac{3}{4} (o_0^{(3)} \Lambda_{-1}^{(3)} - o_2^{(3)} (\Lambda_3^{(3)} + 2\Lambda_{-1}^{(3)*}) - \frac{1}{2} o_3^{(3)} \Lambda_{-3}^{(3)*}) + \frac{2}{3} o_0^{(4)} o_2^{(2)} + 2o_1^{(4)} o_0^{(2)*} + 12o_1^{(4)} o_1^{(2)} - 12o_2^{(4)} o_1^{(2)*} - 6o_2^{(4)} o_0^{(2)} - 2o_3^{(4)} o_2^{(2)*}] - \frac{1}{\omega_0^2} [o_0^{(2)} (o_0^{(2)} \Lambda_{-1}^{(3)} + \frac{1}{3} o_2^{(2)} \Lambda_3^{(3)}) + 2o_1^{(2)} (\frac{1}{2} o_0^{(2)*} \Lambda_3^{(3)} + o_1^{(2)} \Lambda_{-1}^{(3)*} + \frac{1}{12} o_2^{(2)} (\Lambda_{-3}^{(3)*} + 2\Lambda_{-1}^{(3)})) + 2o_2^{(2)} (\frac{1}{4} o_0^{(2)*} \Lambda_{-3}^{(3)} - o_1^{(2)*} \Lambda_{-1}^{(3)*}) + o_0^{(3)} (o_0^{(2)} o_2^{(2)} - 12(o_1^{(2)})^2) - 6o_1^{(3)} (|o_0^{(2)}|^2 + 4|o_1^{(2)}|^2 + \frac{1}{9}|o_2^{(2)}|^2 + o_0^{(2)} o_1^{(2)}) + o_2^{(3)} (o_0^{(2)} o_2^{(2)} - 12(o_1^{(2)})^2 + 4o_1^{(2)*} o_2^{(2)} - 12o_0^{(2)*} o_1^{(2)*}) - 2o_3^{(3)} o_1^{(2)*} o_2^{(2)*}]$$

Los coeficientes  $\Lambda$  en la expresión de  $\Gamma_4^{(4)}$  están evaluados en  $A = 1$ . Todos los coeficientes  $\Lambda$  y  $\Gamma$  están computados en el punto crítico ( $E = E_*$ ).

### C. ESTIMACION DEL ANCHO DE LA BASE

Expresamos la temperatura de equilibrio en las proximidades de la base ( $z \approx L$ ) como

$$T(z) = T_{ob}(1 + f(z)) \quad (C.1)$$

donde  $f(z)$  debe satisfacer la ecuación de equilibrio

$$\partial_{\xi}((1+f)^{5/2} \partial_{\xi} f) = (1+f)^{\gamma_b - 1} \quad \xi = z \sqrt{\frac{E}{K_o T_{ob}^{7/2}}} \quad (C.2)$$

y las condiciones de contorno

$$f(0) = 0 = \partial_{\xi} f(0) \quad (C.3)$$

Suponiendo  $f = \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) y conservando términos hasta primer orden en  $\varepsilon$

$$\partial_{\xi\xi} f_1 = \gamma_b f_1 \quad (C.4)$$

luego

$$f_1 = A \exp(\gamma_b^{1/2} \xi) + B \exp(-\gamma_b^{1/2} \xi) \quad (C.5)$$

Pero  $f_1$  no puede satisfacer las condiciones de contorno (C.3) y además crece con  $\xi$  más abruptamente que nuestras integraciones numéricas. Calculamos entonces hasta orden  $\varepsilon^2$

$$\partial_{\xi\xi} f_2 - \gamma_b f_2 = -\frac{5}{4} \partial_{\xi\xi} f_1^2 + \frac{\gamma_b(\gamma_b - 1)}{2} f_1^2 \quad (\text{C.6})$$

La solución de (C.1-2) a segundo orden en  $\varepsilon$  resulta

$$T(\xi) = T_{ob} \left[ \frac{6}{\gamma_b + 4} \text{ch}(\gamma_b^{1/2} \xi) - \frac{6(11 - \gamma_b)}{(\gamma_b + 4)^2} \text{ch}^2(\gamma_b^{1/2} \xi) + 1 - \frac{6(2\gamma_b - 7)}{(\gamma_b + 4)^2} \right] \quad (\text{C.7})$$

Esta función crece con  $\xi$  aproximadamente como

$$T(\xi) \cong T_{ob} \exp(\gamma_b^{1/2} \xi / 1.38) \quad (\text{C.8})$$

y se ajusta mejor a nuestros resultados numéricos. En consecuencia, derivamos una longitud característica de incremento exponencial para  $T(z)$

$$L_b = 1.38 \sqrt{\frac{K_o T_{ob}^{7/2}}{E}} \quad (\text{C.9})$$

## REFERENCIAS

- Antiochos, S.K. 1979, Ap. J., 232, L125.
- Antiochos, S.K. 1987, Ap. J., 312, 886.
- Antiochos, S.K., y Noci, G. 1986, Ap. J., 301, 440.
- Antiochos, S.K., Shoub, E.C., An, C.H., y Emslie, A.G. 1985, Ap. J., 298, 876.
- Athay, R.G. 1976, *The Solar Chromosphere and Corona: Quiet Sun*, D. Reidel, Dodrecht, Holland.
- Athay, R.G. 1986, Ap. J., 308, 975.
- Athay, R.G., y White, S. 1979, Ap. J., 226, 1135.
- Baum, P.J., y Bratenahl, A. 1982, Geoph. Res. Lett., 9, 435.
- Belcher, J.W. y Davis, L. 1971, J. Geophys. Res., 76, 3534.
- Bergé, P., Pomeau, Y., y Vidal, C. 1984, *L'ordre dans le chaos* (Herman-Paris).
- Bhattacharjee, A., Brunel, F., y Tajima, T. 1983, Phys. Fluids, 26, 226.
- Bhattacharjee, A., y Dewar, R.L. 1982, Phys. Fluids, 25, 887.
- Bichenkhov, V., Gradov, O.M. y Silin, V.P. 1982, JETP, 56, 1202.
- Bichenkhov, V., Gradov, O.M. y Silin, V.P. 1984, Sov. J. Plasma Phys., 10, 17.
- Bichenkhov, V., y Silin, V.P. 1982, JETP, 55, 1086.
- Bichenkhov, V., Silin, V.P. y Uryupin, S.A. 1984a, Sov. J. Plasma Phys., 10, 139.
- Bichenkhov, V., Silin, V.P. y Uryupin, S.A. 1984b, Sov. J. Plasma Phys., 10, 434.
- Braginskii, S.I. 1965, Rev. Plasma Phys., 1, 205.



- Bretherton, F.P., y Haidvogel, D.B. 1976, *J. Fluid Mech.*, 78, 129.
- Browning, P.K., Sakurai, T., y Priest, E.R. 1986, *Astron. Ap.*, 158, 217.
- Costa, A., Gómez, D., Ponce Dawson, S., Ferro Fontán, C., y Sicardi Schifino, A. 1988, *Phys. Rev. A*, 38, 2037.
- Cox, J.P. 1974, *Rep. Progr. Phys.*, 37, 563.
- Cox, D.P., y Tucker, W.H. 1969, *Ap. J.*, 157, 1157.
- Craig, I.J.D., y McClymont, A.N. 1981, *Nature*, 294, 333.
- Craig, I.J.D., y McClymont, A.N. 1986, *Ap.J.*, 307, 367.
- Craig, I.J.D., McClymont, A.N., y Underwood, J.H. 1978, *Astron. Ap.*, 70, 1.
- Craig, I.J.D., Robb, T.D., y Rollo, M.D. 1982, *Solar Phys.*, 76, 331.
- Craig, I.J.D., y Schulkes, R.M.S.M. 1985, *Ap.J.*, 296, 710.
- Cheng, C., Doschek, G.A., y Feldman, U. 1976, *Ap. J.*, 210, 836.
- Cheng, C., Doschek, G.A., y Feldman, U. 1979, *Ap. J.*, 227, 1037.
- Chiuderi, C., Einaudi, G., y Torricelli-Ciamponi, G. 1981, *Astron. Ap.*, 97, 27.
- Chouduri, A.R., y Königl, A. 1986, *Ap. J.*, 310, 96.
- Dahlburg, J., Montgomery, D., Doolen, G.D., y Turner, L. 1987, *J. Plasma Phys.*, 37, 299.
- Davis, J.M., Gerassimenko, M., Krieger, A.S., y Vaiana, G.S. 1975, *Solar Phys.*, 45, 393.
- Dobrowolny, M., Mangeney, A., y Veltri, P. 1980, *Phys. Rev. Lett.*, 45, 144.
- Dowdy, J.F., Rabin, D., y Moore, R.L. 1985, *Solar Phys.*, 99, 35.
- Drake, V., y Lee, Y.C. 1977, *Phys. Fluids*, 20, 1341.
- Eckmann, J.P., y Ruelle, D. 1985, *Rev. Mod. Phys.*, 57, 617.
- Esser, R., Leer, E., Habbal, S.R., y Withbroe, G.L. 1986, *J. Geoph. Res.*, 91, 2950.
- Feldman, U., y Doschek, G.A. 1977, *Ap. J.*, 216, L119.

- Field, G.B. 1965, *Ap. J.*, 142, 531.
- Forster, D., Nelson, D., y Stephen M. 1977, *Phys. Rev. A*, 16, 732.
- Friedman, H. 1963, *Ann. Rev. Astron. Ap.*, 1, 59.
- Fukao, S., y Tsuda, T. 1973, *Planet. Sp. Sci.*, 21, 1151.
- Furth, H.P. 1964, *Plasma Instabilities in Astrophysics* (eds. D.G. Wentzel y D.A. Tidman), 33.
- Furth, H.P., Killeen, J., y Rosenbluth, M.N. 1963, *Phys. Fluids*, 6, 459.
- Fyfe, D., Joyce, G., y Montgomery, D. 1977, *J. Plasma Phys.*, 17, 317.
- Fyfe, D., y Montgomery, D. 1976, *J. Plasma Phys.*, 16, 181.
- Fyfe, D., Montgomery, D. y Joyce, G. 1977, *J. Plasma Phys.*, 17, 369.
- Galeev, A.A., Rosner, R., y Vaiana, G.S. 1979, *Ap. J.*, 229, 318.
- Gekelman, W., y Stenzel, R.L. 1981, *J. Geoph. Res.*, 86, 659.
- Gekelman, W., y Stenzel, R.L. 1985, *Phys. Rev. Lett.*, 54, 2414.
- Gekelman, W., Stenzel, R.L. y Wild, N. 1982, *J. Geoph. Res.*, 87, 101.
- Gómez, D., y Ferro Fontán, C. 1988, *Solar Phys.*, 116,
- Gómez, D., Sicardi Schifino, A., y Ferro Fontán, C. 1988a, *Ap. J.*, enviado.
- Gómez, D., Sicardi Schifino, A., y Ferro Fontán, C. 1988b, *Ap. J.*, enviado.
- Grant H.L., Stewart, R.W., y Moilliet, A. 1962, *J. Fluid Mech.*, 12, 241.
- Grappin, R. 1986, *Phys. Fluids*, 29, 2433.
- Grappin, R., Frisch, U., Leorat, J., y Pouquet, A. 1982, *Astron. Ap.*, 105,  
6.
- Grappin, R., y Leorat, J. 1987, *Phys. Rev. Lett.*, 59, 1100.
- Habbal, S.R., y Rosner, R. 1979, *Ap. J.*, 234, 1113.
- Haken, H. 1983, *Advanced Synergetics* (Springer Verlag-Berlín).
- Hasegawa, A. 1985, *Adv. in Phys.*, 35, 1.
- Hasegawa, A., y Kodama, Y. 1978, *Phys. Rev. Lett.*, 41, 1470.
- Hasegawa, A., y Mima, K. 1978, *Phys. Fluids*, 21, 87.

- Hassard, B.D., Kazarinoff, N.D., y Wan, W.H. 1981, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation* (Cambridge Univ. Press).
- Hayashi, T., y Sato, T. 1978, *J. Geoph. Res.*, 83, 217.
- Hénon, M., y Heiles, C. 1964, *Astron. J.*, 69, 73.
- Herring, J. y Kraichnan, R.H. 1972, in *Statistical Models and Turbulence*, eds. M. Rosenblatt and C. von Atta (Springer).
- Herring, J. y Kraichnan, R.H. 1979, *J. Fluid Mech.*, 91, 581.
- Heyvaerts, J. 1983, *Adv. Space Res.*, 2, 21.
- Heyvaerts, J., y Priest, E.R. 1976, *Solar Phys.*, 47, 223.
- Heyvaerts, J., y Priest, E.R. 1983, *Astron. Ap.*, 117, 220.
- Heyvaerts, J., y Priest, E.R. 1984, *Astron. Ap.*, 137, 83.
- Heyvaerts, J., Priest, E.R., y Rust, D.M. 1977, *Ap. J.*, 216, 123.
- Hildner, 1974.
- Hollweg, J.V. 1982, *Ap. J.*, 254, 806.
- Hollweg, J.V. 1983, *Solar Wind V* (ed. M. Neugebauer), 5.
- Hollweg, J.V. 1986a, *J. Geophys. Res.*, 91, 4111.
- Hollweg, J.V. 1986b, *Ap. J.*, 306, 730.
- Hood, A.W. 1983, *Solar Phys.*, 87, 279.
- Hood, A.W., y Priest, E.R. 1979, *Astron. Ap.*, 77, 233.
- Hood, A.W., y Priest, E.R. 1980, *Solar Phys.*, 66, 113.
- Hossain, M., Matthaeus, W.H., y Montgomery, D. 1983, *J. Plasma Phys.*, 30, 479.
- Howard, R., y Svestka, Z. 1977, *Solar Phys.*, 54, 65.
- Hut, P. 1980, *Astron. Ap.*, 92, 167.
- Ionson, J.A. 1978, *Ap. J.*, 226, 650.
- Ionson, J.A. 1982, *Ap. J.*, 254, 318.
- Ionson, J.A. 1985, *Solar Phys.*, 100, 289.

- Iooss, G., y Joseph, D.D. 1980, *Elementary Stability and Bifurcation Theory* (Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Berlín).
- Joyce, G., y Montgomery, D. 1973, *J. Plasma Phys.*, 10, 107.
- Kadomtsev, B.B. 1976, *Phenomenes collectifs dans les plasmas* (Mir-Moscú).
- Kaplan, S.A., y Tsytovitch, V.N. 1973, *Plasma Astrophysics* (Pergamon, New York), 134.
- Kaufman, A.N. 1960, *Phys. Fluids*, 3, 610.
- Klimchuk, J.A., Antiochos, S.K., y Mariska, J. 1987, *Ap. J.*, 320, 409.
- Kolmogorov, A.N. 1941, *C.R. Acad. Sci. URSS*, 30, 201.
- Kraichnan, R.H. 1959, *J. Fluid Mech.*, 5, 497.
- Kraichnan, R.H. 1964, *Phys. Fluids*, 7, 1030.
- Kraichnan, R.H. 1965, *Phys. Fluids*, 8, 575.
- Kraichnan, R.H. 1966, *Phys. Fluids*, 9, 1728.
- Kraichnan, R.H. 1967, *Phys. Fluids*, 10, 1385.
- Kraichnan, R.H. 1987, *Phys. Fluids*, 30, 2400.
- Kraichnan, R.H. y Montgomery, D. 1980, *Rep. Prog. Phys.*, 43, 547.
- Krieger, A.S., Vaiana, G.S., y van Speybroeck, L.P. 1971, *IAU Symp.*, 43, 397.
- Kuin, N.P.M., y Martens, P.C.H. 1982, *Astron. Ap.*, 108, L1.
- Kuin, N.P.M., y Martens, P.C.H. 1986, in *Coronal and Prominence Plasmas* (NASA CP 2442), ed. A. Poland, p. 241.
- Kuperus, M., y Ionson, J.A. 1985, *Astron. Ap.*, 148, 309.
- Kuperus, M., Ionson, J.A., y Spicer, D. 1981, *Ann. Rev. Astron. Ap.*, 19, 7.
- Landau, L.D., and Lifshitz, E. 1959, *Fluid Mechanics* (Pergamon-London).
- Landini, M., Monsignori-Fossi, B.C., Krieger, A.S., y Vaiana, G.S. 1975, *Solar Phys.*, 44, 69.
- Lebovitz, N.R. 1977, in *Applications of Bifurcation Theory*, ed. P.H.

- Rabinovitz (Acad. Press- New York), p. 259.
- Levine, R.H., y Withbroe, G.L. 1977, *Solar Phys.*, 51, 83.
- Lilly, D.K. 1969, *Phys. Fluids*, 12, 240.
- Lyons, L.R., y Speiser, T.W. 1985, *J. Geoph. Res.*, 90, 8543.
- Ma, S.K., y Mazenko, G. 1975, *Phys. Rev.*, 11, 4077.
- Mariska, J., Boris, J.P., Oran, E.S., Young, T.R., y Doschek, G.A. 1982, *Ap. J.*, 255, 783.
- Martens, P.C.H. 1984, *Phys. Rep.*, 115, 315.
- Martens, P.C.H. 1986, *Coronal and Prominence Plasmas* (NASA CP 2442), ed. A. Poland, p. 407.
- Martens, P.C.H. 1987, *Solar Phys.*, 107, 95.
- Martens, P.C.H., y Kuin, N.P.M. 1982, *Astron. Ap.*, 112, 366.
- Martens, P.C.H., y Kuin, N.P.M. 1983, *Astron. Ap.*, 123, 216.
- Martens, P.C.H., y Kuperus, M. 1982, *Astron. Ap.*, 113, 324.
- Martens, P.C.H., van den Oord, G., y Hoyng, P. 1985, *Solar Phys.*, 96, 253.
- Matthaeus, W.H., Ambrosiano, J.J., y Goldstein, M.L. 1984, *Phys. Rev. Lett.*, 53, 1449.
- Matthaeus, W.H., y Goldstein, M.L. 1982, *J. Geophys. Res.*, 87, 6011.
- Matthaeus, W.H., Goldstein, ., y Montgomery, D. 1982, *Trans. AGU*, 63, 5532.
- Matthaeus, W.H., Goldstein, M.L., y Montgomery, D. 1983, *Phys. Rev. Lett.*, 51, 1484.
- Matthaeus, W.H., y Lamkin, S.L. 1986, *Phys. Fluids*, 29, 2513.
- Matthaeus, W.H., y Montgomery, D. 1981, *J. Plasma Phys.*, 25, 11.
- McClymont, A.N., y Canfield, R.C. 1983a, *Ap. J.*, 265, 483.
- McClymont, A.N., y Canfield, R.C. 1983b, *Ap. J.*, 265, 497.
- McClymont, A.N., y Craig, I.J.D. 1985a, *Ap. J.*, 289, 820.

- McClymont, A.N., y Craig, I.J.D. 1985b, *Ap. J.*, 289, 843.
- McClymont, A.N., y Craig, I.J.D. 1987, *Ap. J.*, 312, 402.
- McWhirter, R.W.P., Toneman, P.C., y Wilson, R. 1975, *Astron. Ap.*, 40, 63.
- Meneguzzi, M., Frisch, U., y Pouquet, A. 1981, *Phys. Rev. Lett.*, 47, 1060.
- Montgomery, D. 1983, in *Solar Wind V*, ed. M. Neugebauer, (NASA Conf. Publ. 2280), p. 107.
- Montgomery, D., Turner, L., y Vahala, G. 1978, *Phys. Fluids*, 21, 757.
- Norman, C.A., y Heyvaerts, J. 1983, *Astron. Ap.*, 124, L1.
- Oran, E.S., Mariska, J., y Boris, J.P. 1982, *Ap. J.*, 254, 349.
- Papadopoulos, K. 1977, *Rev. Geoph. Sp. Phys.*, 15, 113.
- Parker, E.N. 1963, *Ap. J. Suppl.*, 8, 177.
- Parker, E.N. 1972, *Ap. J.*, 174, 499.
- Parker, E.N. 1981a, *Ap. J.*, 244, 631.
- Parker, E.N. 1981b, *Ap. J.*, 244, 644.
- Parker, E.N. 1983a, *Ap. J.*, 264, 635.
- Parker, E.N. 1983b, *Ap. J.*, 264, 642.
- Parker, E.N. 1986, *Ap. J.*, *Geoph. Ap. Fluid Dyn.*, 34, 243.
- Parker, E.N. 1987, *Phys. Today* (July), 36.
- Peres, G., Rosner, R., Serio, S., y Vaiana, G.S. 1982, *Ap. J.*, 252, 791.
- Petschek, H.E. 1964, *AAA-NASA Symp. on Phys. of Solar Flares*, 425.
- Poletto, G., Vaiana, G.S., Zombeck, M.V., Krieger, A.S., y Timothy, A.F. 1975, *Solar Phys.*, 44, 83.
- Priest, E.R. 1982, *Solar Magnetohydrodynamics* (D. Reidel - Holland).
- Priest, E.R. 1985, *Rep. Progr. Phys.*, 48, 955.
- Raymond, J.C., Cox, D.P., y Smith, B.W. 1976, *Ap. J.*, 204, 290.
- Riyopoulos, S., Bondeson, A., y Montgomery, D. 1982, *Phys. Fluids*, 25, 107.
- Rosner, R., Golub, L., Coppi, B., y Vaiana, G.S. 1978, *Ap. J.*, 222, 317.

- Rosner, R., y Hartquist, T.W. 1979, *Ap. J.*, 231, L83.
- Rosner, R., Tucker, W.H. y Vaiana, G.S. 1978, *Ap. J.*, 220, 643.
- Roudier, T., y Muller, R. 1986, *Solar Phys.*, 107, 11.
- Sato, T. 1979, *J. Geoph. Res.*, 84, 7177.
- Sato, T. 1985, *IAU Symp.*, 107, 211.
- Sato, T., Walker, R.S., y Ashour-Abdalla, M. 1984, *J. Geophys. Res.*, 89, 9761.
- Schatten, K.H., Wilcox, J.M., y Ness, N.F. 1969, *Solar Phys.*, 6, 442.
- Seehafer, N. 1986, *Solar Phys.*, 107, 73.
- Smith, D.F. 1977, *J. Geoph. Res.*, 82, 704.
- Sommeria, J. 1986, *J. Fluid Mech.*, 170, 139.
- Somov, B.V. 1979, *Bull. Acad. Sci. USSR Phys. Ser.*, 43, 28.
- Somov, B.V., y Titov, V.S. 1985, *Solar Phys.*, 95, 141.
- Sonnerup, B.U.O. 1970, *J. Plasma Phys.*, 4, 161.
- Soward, A., y Priest, E.R. 1977, *Phil. Trans. R. Soc.*, A284, 369.
- Soward, A., y Priest, E.R. 1982, *J. Plasma Phys.*, 28, 335.
- Spitzer, L. 1962, *Physics of Fully Ionized Gases* (New York: Interscience).
- Stenzel, R.L., y Gekelman, W. 1981, *J. Geoph. Res.*, 86, 649.
- Stenzel, R.L., Gekelman, W., y Wild, N. 1982, *J. Geophys. Res.*, 87, 111.
- Stenzel, R.L., Gekelman, W., y Wild, N. 1983a, *J. Geoph. Res.*, 88, 4783.
- Stenzel, R.L., Gekelman, W., y Wild, N. 1983b, *Phys. Fluids*, 26, 1949.
- Sturrock, P.A., y Stern, R. 1980, *Ap. J.*, 238, 98.
- Sturrock, P.A., y Uchida, Y. 1981, *Ap. J.*, 246, 331.
- Svestka, Z. 1976, *Solar Flares*, D. Reidel, Dodrecht, Holland.
- Sweet, P.A. 1958, *IAU Symp.*, 6, 123.
- Syrovatsky, S.I. 1982, *Solar Phys.*, 76, 3.
- Tsyrovitch, V.N. 1977, *Theory of Turbulent Plasma* (Consultants Bureau - New

York).

- Taylor, J.B. 1974, *Phys. Rev. Lett.*, 33, 1139.
- Taylor, J.B. 1975, in *Proc. V Int. Conf. Plasma Phys. Contr. Nuclear Fusion Res.* (IAEA-Viena), 1, 161.
- Taylor, J.B. 1976, in *Proc. III Topical Conf. Pulsed High Beta Plasmas*, ed. A. Evans (Pergamon-New York), p. 59.
- Ting, A.C., Matthaeus, W.H., y Montgomery, D. 1986, *Phys. Fluids*, 29, 3261.
- Tucker, W.H. 1973, *Ap. J.*, 186, 285.
- Tur, T.J., y Priest, E.R. 1978, *Solar Phys.*, 58, 181.
- Uchida, Y., y Kaburaki, O. 1974, *Solar Phys.*, 35, 451.
- Uchida, Y., y Sakurai, T. 1977, *Solar Phys.*, 51, 413.
- Ugai, M. 1984, *Plasma Phys. Contr. Fusion*, 26, 1549.
- Ugai, M. 1985, *J. Geoph. Res.*, 90, 9576.
- Ugai, M., y Tsuda, T. 1977, *J. Plasma Phys.*, 17, 337.
- Vaiana, G.S., Krieger, A.S., y Timothy, A.F. 1973, *Solar Phys.*, 32, 81.
- Vaiana, G.S., y Rosner, R. 1978, *Ann. Rev. Astron. Ap.*, 16, 393.
- Vaiana, G.S., y 15 coautores 1981, *Ap. J.*, 245, 163.
- van Ballegooijen, A.A. 1985, *Ap. J.*, 298, 421.
- van Ballegooijen, A.A. 1986, *Ap. J.*, 311, 1001.
- van Tend, W., y Kuperus, M. 1978, *Solar Phys.*, 59, 115.
- Vasyliunas, V.M. 1975, *Rev. Geoph. Sp. Phys.*, 13, 303.
- Vernazza, J.E., Avrett, E.H., y Loeser, R. 1980, *Ap. J. Suppl.*, 45, 635.
- Verron, J., y Sommeria, J. 1984, *Phys. Fluids*, 27, 1918.
- Vesecky, J.F., Antiochos, S.K., y Underwood, J.H. 1979, *Ap. J.*, 233, 987.
- Wentzel, D.G. 1974, *Solar Phys.*, 39, 128.
- Wentzel, D.G. 1976, *Solar Phys.*, 50, 343.
- Wiehr, E., y Kneer, F. 1988, *Astron. Ap.*, 195, 310.



- Withbroe, G.L. 1981, in *Solar Active Regions*, ed. F.Q. Orrall (Boulder: Colorado Univ. Press), p. 199.
- Withbroe, G.L., y Noyes, R.W. 1977, *Ann. Rev. Astron. Ap.*, 15, 363.
- Woltjer, L. 1958, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 44, 489.
- Yakhot, V. 1981, *Phys. Rev. A*, 23, 1486.
- Yakhot, V. y Orszag, S.A. 1986, *Phys. Rev. Lett.*, 57, 1722.
- Yang, C.K., y Sonnerup, B.U.O. 1976, *Ap. J.*, 206, 570.
- Yeh, T., y Axford, W.J. 1970, *J. Plasma Phys.*, 4, 207.
- Zel'dovich, Y.B., y Ruzmaikin, A.A. 1984, in *Astrophysics and Space Phys. Reviews*, ed. R.A. Sunyaev (Harwood Acad. Publ.), p. 333.
- Zhou, Y., Vahala, G. y Hossain, M. 1988, *Phys. Rev. A*, 37, 2590.

## AGRADECIMIENTOS

▶ A mi director de tesis, Prof. Dr. Constantino Ferro Fontán, por sus fructíferos comentarios y orientación, los cuales contribuyeron positivamente a esta etapa de mi formación.

▶ A los Dres. Alberto Verga y Petrus Martens, quienes a pesar de la distancia, aportaron interesantes ideas al presente trabajo de investigación.

▶ Al grupo de Física Solar del IAFE, por sus valiosas sugerencias e informaciones acerca de la bibliografía específica del tema.

▶ Muy especialmente a mis compañeros del grupo de Plasmas Astrofísicos, Silvina Ponce Dawson, Andrea Costa y Anibal Sicardi Schifino, por las interminables charlas y discusiones que condujeron al esclarecimiento de algunas de mis muchas dudas.

▶ A mis compañeros del IAFE, por haber sabido crear en el Instituto un muy placentero ambiente de trabajo.

▶ Al IAFE, por haberme brindado lugar de trabajo, acceso a bibliografía y facilidades de cómputo. Mi más sincero reconocimiento al grupo de Astronomía por permitirme procesar el presente texto en su computadora.

▶ Al CONICET, por haber financiado este trabajo de tesis a través del otorgamiento de becas internas y subsidios para investigación.