

Tesis de Posgrado

Visibilidad afín en dimensión finita

Forte, Ana María

1988

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Forte, Ana María. (1988). Visibilidad afín en dimensión finita. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2159_Forte.pdf

Cita tipo Chicago:

Forte, Ana María. "Visibilidad afín en dimensión finita". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1988.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2159_Forte.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

Tesis
2159

ef. 2

107

Universidad Nacional de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

VISIBILIDAD AFIN EN DIMENSION FINITA

Autor

Ana Marla Forte

Director de Tesis

Dr. F. A. Toranzos

- 2.159 -

ef 2

Tesis para optar al título de
Doctor en Ciencias Matemáticas

~ 1988 ~

Quiero expresar mi mayor agradecimiento al Dr. Fausto A. Toranzos, Director de esta tesis, quien me brindó un con tínuo y valiosísimo apoyo a lo largo de todo el trabajo. Agradezco también a la Sra. María Angélica Tancredi el mecano grafiado del mismo.

I N D I C E

1. INTRODUCCION

<i>1.1. Geometría de la convexidad</i>	5
<i>1.2. Extensiones de la noción de convexidad</i>	7
<i> Estudio geométrico de la visibilidad</i>	
<i>1.3. Planteo de los problemas a estudiar</i>	10

2. RESULTADOS AUXILIARES

<i>2.1. Algunas definiciones y notaciones básicas</i>	13
<i>2.2. Teorema de Tietze y sus consecuencias</i>	15
<i>2.3. Teoremas de tipo Helly</i>	16
<i>2.4. Otros resultados necesarios</i>	17

3. VISIBILIDAD EN UN DOMINIO DE JORDAN SUAVE

<i>3.1. Objetivos de este capítulo</i>	19
<i>3.2. Puntos de inflexión</i>	
<i> 3.2.1. Clasificación afín de puntos de la frontera.</i>	20
<i> 3.2.2. Geometría local afín en la frontera</i>	22
<i>3.3. Los teoremas previos y el teorema principal</i>	28
<i>3.4. Teorema de tipo Krassnoselsky</i>	30

4. PUNTOS DE MAXIMA VISIBILIDAD

<i>4.1. Introducción</i>	35
<i>4.2. Descripción de la región factible de desplazamiento</i>	39
<i>4.3. Diversos tipos de óptimos</i>	51
<i>4.4. Descripción del algoritmo</i>	65
<i>4.4.1. Formulación del diagrama de flujo del algoritmo</i>	65
<i>4.4.2. Factibilidad del algoritmo</i>	68
<i>4.4.3. Finitud del algoritmo</i>	68

5. LA FUNCION DE VISIBILIDAD

<i>5.1. Resultados de G.Beer</i>	72
<i>5.2. Continuidad en la frontera</i>	77
<i>5.3. Existencia del dominio de normalidad (N)</i>	80
<i>5.4. Definiciones y enunciados</i>	80
<i>5.5. Demostración de los lemas previos</i>	82
<i>5.6. El teorema principal y sus consecuencias</i>	98
<i>5.7. Corolarios del teorema principal</i>	101

6. BIBLIOGRAFIA

1. INTRODUCCION

1.1. Geometría de la Convexidad

La Geometría de Convexidad tiene dos características que la destacan del resto de las áreas de estudio de la Geometría. Una es netamente técnica y se refiere a su característica de *geometría global*, es decir, la convexidad de un conjunto se refiere a propiedades que ligan entre sí a todos los puntos del mismo; difiere en ese aspecto de todas aquellas áreas de la Geometría en las que el aspecto local es el predominante. La segunda característica importante de la Convexidad es histórica. Todo el desarrollo de esta disciplina desde su fundación hasta su culminación transcurre en el presente siglo.

Podemos distinguir en el desarrollo cronológico de la Geometría de Convexidad cinco etapas diferenciadas por sus motivaciones y sus conexiones con otras áreas de las Matemáticas. Esta separación en etapas no es nítida sino que abunda en áreas grises.

La primera etapa, que podríamos llamar *etapa fundacional* comienza en los últimos años del siglo XIX, a partir de problemas propuestos por el Análisis Clásico y el Cálculo Funcional (por ejemplo promedios ponderados, centros de gravedad...). La figura predominante en esta etapa es Herman Minkovsky. El resultado más destacado es el llamado Teorema de Minkovski, predecesor finitodimensional del famoso teorema de Krein y Milman.

La *segunda etapa*, desarrollada cronológicamente en un entorno de la Primera Guerra Mundial, tiene como protagonistas a varios participantes de un famoso seminario de Geometría de la Universidad de Hamburgo. Los nombres más destacados son Blaschke, Helly, Radón y Carathéodory. Los resultados contienen un énfasis predominante en Combinatoria Geométrica y se ubican en espacios euclidianos de dimensión finita.

La *tercera etapa* notable en el desarrollo de la Convexidad surge en la década del 30 como respuesta a problemas planteados por la Topología y el Análisis Funcional, en consecuencia su énfasis principal está en el estudio de características geométricas en dimensión infinita. Las figuras destacadas de esta etapa son Bourbaki, Krein, Smullyan y colaboradores de éstos.

A comienzos de la década del 60, V. Klee sintetiza y resuelve los principales problemas de esta etapa.

La Investigación Operativa y más particularmente la Optimización experimentan un notable crecimiento a partir de la década del 50. Contemporáneamente la Convexidad sufre un vuelco en sus problemas ante el requerimiento de esta nueva disciplina constituyendo así la *cuarta etapa* de nuestro análisis. Una vez más el énfasis se transfiere a los temas combinatorios en dimensión finita. Surge en esta etapa el estudio no diferencial de funciones convexas. Las figuras predominantes son T. Rockafellar y B. Grünbaum.

Podemos distinguir una *quinta etapa*, actualmente en desarrollo, cuyo énfasis radica en temas combinatorios y generalizaciones de la Convexidad. Precisamente dentro de esta idea se insertan la teoría de Conjuntos Estrellados y la teoría de la Visibilidad. Esta última será el tema central del presente trabajo.

En los próximos párrafos de este capítulo analizaremos en detalle estos últimos temas mencionados.

1.2. Extensiones de la noción de convexidad.

Estudio geométrico de la Visibilidad

La noción de convexidad se ha extendido dando lugar a generalizaciones. Dado un conjunto convexo, dos puntos cualesquiera pueden unirse por un segmento íntegramente contenido en él. Una generalización de esto surge al considerar los conjuntos L_n .

Un conjunto S es L_n si todo par de puntos puede conectarse mediante una poligonal de no más de n tramos y cuyos segmentos están contenidos en S . Es posible probar que un conjunto compacto, simplemente conexo y L_2 es unión de conjuntos convexos tales que la intersección de cada par de ellos sea no vacía.

Como otra generalización aparecen los *conjuntos estrellados*. Diremos que el conjunto S es *estrellado* si $\forall x \in S$ existe un punto $y \in S$ tal que el segmento que une x e y esté contenido en S .

La idea de que todos los puntos entre otros dos estén contenidos en el conjunto da origen también a la noción de *visibilidad*. Diremos que x ve a y vía S si el segmento $[x y]$ está contenido en S . Esta es una relación idéntica y simétrica pero no transitiva, de donde surge la definición de *estrella de un punto x en el conjunto S* que será el conjunto $st(x, S) = \{t \in S / x \text{ ve a } t \text{ vía } S\}$; este concepto a su vez origina el de *punto radiante en S* que será un punto $x \in S$ tal que $st(x, S) = S$. Notemos que los puntos radiantes son los que tienen visibilidad total o universal y que en los conjuntos convexos todos los puntos lo son, mientras que los conjuntos estrellados son aquellos en los cuales el conjunto de puntos radiantes es no vacío. A partir del concepto de punto radiante podemos definir para un conjunto S el *mirador de S* como el conjunto $mir S = \{x \in S / x \text{ es punto radiante de } S\}$, y notar que si S es convexo, $S = mir S$, mientras que para que S sea estrellado es necesario que el $mir S$ sea no vacío. Para todo conjunto S resulta $mir S$ convexo.

Será importante en el desarrollo del presente trabajo poder evaluar cuándo un punto tiene mayor visibilidad que otro. Diremos que x tiene mayor visibilidad que y en S ($x \succ_S y$) si $st(x, S) \supsetneq st(y, S)$.

Esto dará una relación \succ transitiva e idéntica pero no antisimétrica ya que por ejemplo dos puntos distintos del mirador tienen la misma estrella.

La relación \succ es entonces un preorden parcial, "pre" por

la falta de antisimetría y "parcial" dado que es posible que dos puntos cualesquiera no estén relacionados. Las clases de equivalencias generadas por Y_S serán subconjuntos convexos de S .

Surge a partir de esto y bastante naturalmente la *célula de visibilidad* de un punto x en S definiendo $\text{vis}(x,S) = \{t \in S / t Y_S x\}$. Resulta $\text{vis}(x,S)$ la intersección de todas las componentes convexas de S que incluyen a x y es por lo tanto un conjunto convexo.

Podemos hacer además una clasificación de los puntos dentro del conjunto de acuerdo a la visibilidad de éstos con respecto a un entorno. Diremos que x_0 es un *punto de convexidad local* de S ($x_0 \in \text{lc } S$) si existe un entorno U de x_0 tal que $U \cap S$ es convexo; estos puntos tienen visibilidad universal en un entorno de sí mismos. En caso contrario x_0 es un *punto de no convexidad local* de S ($x_0 \in \text{inc } S$); existen restricciones a la visibilidad tan cerca de x_0 como se quiera.

Obviamente los puntos interiores a S son puntos de convexidad local, luego los puntos de no convexidad local de S estarán ubicados en la frontera de S , y puede verse fácilmente que son un conjunto cerrado en la topología relativa.

Por último, es importante notar que no todos los puntos pertenecientes a $\text{st}(x,S)$ son vistos por el punto x de la misma manera; diremos que x *ve claramente a y* en S si existe un entorno U de y contenido en S tal que

$U \subset \text{st}(x, S)$; en caso contrario x ve críticamente a y en S y diremos que $y \in \text{cv}(x, S)$.

1.3. Planteo de los problemas a estudiar

Este trabajo en su conjunto trata acerca del estudio de la visibilidad. Salvo afirmación en contrario, todos los puntos y conjuntos aquí considerados estarán contenidos en el espacio euclídeo E_2 .

En el capítulo 3 se estudia la visibilidad en un conjunto conexo del plano cuya frontera presenta un comportamiento relativamente bueno. Se utilizan herramientas afines o localmente afines. El objetivo es estudiar el mirador de un dominio de Jordan suave, cosa anteriormente realizada por B. Halpern con una metodología diferencial en [10].

Se mejora el teorema principal del trabajo anteriormente mencionado, ya que éste aporta una descripción parcial de la frontera del mirador de S , bajo la suposición de que S sea un conjunto estrellado. El resultado obtenido en este capítulo es más fuerte; aparece una descripción del mirador como intersección de estrellas de puntos de inflexión, sin la restricción de que el conjunto sea estrellado. Se hace también un estudio detallado de los puntos frontera de un dominio de Jordan suave como así también de sus estrellas. A partir del teorema principal se deducen tres teoremas de tipo Krassnoselsky.

El capítulo 4 surge como respuesta a una pregunta. Dado

un punto en un conjunto, contando solamente con el conocimiento de su estrella, ¿es posible realizar desplazamientos que aseguren alcanzar puntos de máxima visibilidad? Se realiza entonces la búsqueda de estos puntos mediante un *enfoque algorítmico* del problema. Trabajando en un dominio de Jordan suave, a partir de un punto y su estrella se construye una región factible de desplazamientos y se indican los movimientos necesarios para la obtención de un óptimo en el sentido allí descrito. La región factible resulta un conjunto convexo que coincide con la célula de visibilidad del punto en el conjunto. El algoritmo permite a su vez determinar si el conjunto es estrellado o si no lo es, a través de una clasificación y estudio de los diferentes tipos de óptimos posibles.

Por último, en el capítulo 5 se intensifica el estudio de la función de visibilidad, que asigna a cada punto la medida de Lebesgue de su estrella en el conjunto. Ya definida y tratada por G. Beer en [1], [2] y [3], este autor, en esos trabajos, estudia la función en conjuntos abiertos o bien en el interior de los mismos. Estudiaremos entonces su comportamiento en la frontera de conjuntos de Jordan con la condición de que ésta tenga a lo sumo un número finito de puntos de inflexión o de discontinuidades. Dado el carácter global del problema, la evaluación de la medida de las estrellas de los puntos era de muy difícil concreción. Se intentó entonces un estudio local (aparece el do-

minio de normalidad), para luego generalizar los resultados usando el hecho de que las estrellas son fans o abanicos con centro en el punto en cuestión. Se lograron condiciones necesarias y suficientes para la continuidad de la función de visibilidad en la frontera de un dominio de Jordan, sin la restricción de suavidad de ésta, y accesoriamente resultados interesantes que relacionan los conceptos de visibilidad clara y de inner stem.

2. RESULTADOS AUXILIARES

En este capítulo presentaremos un conjunto de resultados que serán necesarios a lo largo de todo el trabajo. No se incluyen las demostraciones de los mismos ya que éstas figuran en las bibliografías citadas. Se agregan también algunas definiciones y notaciones imprescindibles para la comprensión de dichos enunciados como así también para los capítulos subsiguientes.

2.1. Algunas definiciones y notaciones básicas

El complemento, interior, clausura, frontera y cápsula convexa de un conjunto S serán notados por CS , $\text{int } S$, $\text{cl } S$, $\text{front } S$ y $\text{conv } S$ respectivamente.

El segmento abierto que une los puntos x e y se notará $(x y)$ y el segmento cerrado $[x y]$.

$[x y)$ será el segmento que incluye al punto x y excluye al punto y , $y(x y]$ el que excluye al punto x e incluye al y .

El rayo con origen en el punto x que pasa por el punto y se notará $R(x \rightarrow y)$, mientras que $R(y \leftarrow x)$ será la notación del rayo que parte del punto x en dirección opuesta a aquella de $R(x \rightarrow y)$. Los rayos serán siempre cerrados. Diremos que x ve a y via S si $[x y] \subset S$. La estrella de x en S es el conjunto $st(x, S)$ de todos aquellos puntos vistos por x via S .

El mirador de S es el conjunto $\text{mir } S$ de todos los puntos

$x \in S$ que cumplen $st(x, S) = S$.

S será un *conjunto estrellado* si $int S \neq \emptyset$.

El *disco abierto* de centro x y radio ϵ será notado $U(x, \epsilon)$ y el *disco cerrado* de centro x y radio ϵ como $B(x, \epsilon)$.

Diremos que $S \subset E^2$ es un *dominio de Jordan* si S es un conjunto compacto y conexo del plano cuya frontera es homeomorfa al disco unitario.

S será un *dominio de Jordan suave* si es un dominio de Jordan cuya frontera es una curva continuamente diferenciable.

Un punto $x \in S$ será un *punto de convexidad local* si existe $\epsilon > 0$ tal que $S \cap B(x, \epsilon)$ es un conjunto convexo. Escribiremos $x \in lc S$. En caso contrario, x será un *punto de no convexidad local* y notaremos $x \in lnc S$.

Es necesario notar que esta distinción es significativa solamente para puntos en la frontera ya que los puntos interiores son trivialmente puntos de convexidad local. Será muy fácil probar que $lc S$ es un conjunto abierto en la topología relativa de $front S$, y por lo tanto $lnc S$ resulta un conjunto cerrado en dicha topología.

Sea $y \in front S$, $x \in st(y, S)$. Diremos que el rayo $R(x \rightarrow y)$ es un *rayo entrante por y* si $\exists t \in R(xy \rightarrow)$ tal que $(yt) \subset int S$.

En caso contrario diremos que $R(x \rightarrow y)$ es un *rayo saliente por y* .

El *inner stem* de x respecto de S es el conjunto $ins(x,S)$ formado por x y todos los puntos de $st(x,S)$ que emiten rayos salientes por y .

Si S es un conjunto cerrado con interior no vacío y $x \in S$, el *conjunto de visibilidad crítica de x en S* será el conjunto $cv(x,S) = int S \cap front st(x,S)$. Cada punto de este conjunto es un *punto de visibilidad crítica de x en S* .

Un punto $x \in S$ es *claramente visible* desde y vía S si existe un entorno U_x del punto x tal que $U_x \cap S \subset st(y,S)$. Diremos que y *ve claramente a x* .

2.2. Teorema de Tietze y sus consecuencias

Teorema 2.2.1 (Tietze) [16]

Sea S un conjunto cerrado y conexo en E_r tal que todos sus puntos son de convexidad local. Entonces S es convexo.

Corolario 2.2.2. (Valentine) [20]

Sea S cerrado en E_r . Supongamos $x \in S$, $y \in S$, $z \in S$ con $(xy) \subset S$, $(yz) \subset S$. Si el conjunto triangular $\Delta = conv(x \cup y \cup z)$ determinado por x, y, z no contiene puntos de $lnc S$, entonces $\Delta \subset S$.

Corolario 2.2.3. (Valentine) [20]

Sea S cerrado en E_r . Supongamos $x \in S$, $y \in S$ con $xy \subset S$, $yz \subset S$. Si los únicos posibles puntos de $lnc S$ en $\Delta = conv(x \cup y \cup z)$ son x y z , entonces $\Delta \subset S$.

Lema 2.2.4.

Sea S cerrado en el plano, $x \in S$, $y \in S$, $z \in S$ con $[xy] \cup [yz] \subset S$. Sea $\Delta = \text{conv}(x \cup y \cup z)$ con la condición de que $\Delta \cap \text{Int } S \subset \{t\}$ donde $t \in (xz)$. Entonces $\Delta \subset S$.

Demostración

Una ligera variación en la demostración del corolario 2.2.3 asegura la tesis.

2.3. Teoremas de tipo HellyTeorema 2.3.1. (Helly) [10]

Sea F una familia de conjuntos convexos en \mathbb{R}^n , tal que toda subfamilia de $(n+1)$ miembros de F tiene intersección no vacía. Supongamos además que F es finita, o bien que todos los miembros de F son compactos. Entonces la intersección de todos los miembros de F es no vacía.

Teorema 2.3.2. (Grünbaum) [6]

Sea $g(n,0) = n+1$, $g(n,1) = 2n$, $g(n,j) = 2n-j$ para $1 < j < n$, y $g(n,n) = 1$. Si F es una familia finita de por lo menos $g(n,j)$ conjuntos convexos en \mathbb{R}^n y cada $g(n,j)$ miembros de F tienen una intersección por lo menos j -dimensional, entonces la intersección de todos los miembros de F es por lo menos j -dimensional.

Teorema 2.3.3. (Klee) [12]

R_1 , R_2 y R_3 significarán (respectivamente) "interseca",

"está contenido en" y "contiene". Supongamos Γ es una familia de conjuntos convexos en E^n , K es un conjunto convexo en E^n , y para cada $n+1$ conjuntos de Γ existe un trasladado de K que R_j esos $n+1$ conjuntos. Más aún supongamos que ocurre al menos una de las siguientes

- i) Γ es finita
- ii) K y los conjuntos de Γ son todos acotados y cerrados
- iii) $j = 2$, K es abierto y todos los conjuntos de Γ son acotados.

Entonces algún trasladado de K R_j todos los conjuntos de Γ .

Teorema 2.3.4. (Krassnoselsky) [14]

Sea S un conjunto compacto y conexo en R^n tal que para todo subconjunto de $n+1$ puntos existe un punto de S que ve a los $(n+1)$ simultáneamente. Entonces S es estrellado.

2.4. Otros resultados necesarios

Lema 2.4.1.

Sea S un dominio de Jordan y $x \in \text{lc } S$.

Entonces x ve via S puntos interiores de S .

Demostración

Existe $\epsilon > 0$ tal que $K = B(x, \epsilon) \cap S$ es convexa. Es fácil verificar que $S = \text{cl}(\text{int } S)$, luego $K \cap \text{int } S \neq \emptyset$. Más aún, $K = \text{st}(x, K) \subset \text{st}(x, S)$.

Definición 2.4.1.

Un *dominio regular* es un conjunto S tal que $\text{int } S$ es conexo y $S = \text{cl}(\text{int } S)$.

Teorema 2.4.2. (Toranzos) [17]

El mirador de un dominio regular no convexo es la intersección de los inner stems de sus puntos de no convexidad local.

Corolario 2.4.3.

El mirador de un dominio de Jordan no convexo es la intersección de los inner stems de sus puntos de no convexidad local.

Teorema 2.4.3. (Toranzos) [17]

Sea S un conjunto cerrado con interior no vacío, y un punto de convexidad local de S y p un punto de visibilidad crítica de y .

Entonces (p, y) contiene puntos de no convexidad local de S .

Teorema 2.4.4. (Toranzos) [17]

Sea S un dominio regular, y $y \in S$ un punto de S tal que $\text{st}(y, S) \neq S$ pero que ve al menos un punto interior de S via S . Entonces $\text{cv}(y, S)$ es no vacía.

3. VISIBILIDAD EN UN DOMINIO DE JORDAN SUAVE

3.1. Objetivos de este capítulo

Uno de los propósitos de este capítulo es un objetivo técnico, el de estudiar la visibilidad en un conjunto conexo del plano cuya frontera tenga un comportamiento relativamente bueno.

Por otro lado tenemos un propósito metodológico que es el de realizar lo anterior con herramientas afines o localmente afines, o sea, usando conceptos como los de conjunto convexo, estrellado y visibilidad, que son invariantes por transformaciones afines.

El problema que trataremos ya fue estudiado por B. Halpern en [9] usando una metodología diferencial. Su principal teorema tiene el siguiente enunciado.

Teorema 3.1.1. (B. Halpern) [9]

Sea $S \subset E^2$ un conjunto estrellado cerrado y $\text{front } S$ una curva simple, cerrada y continuamente diferenciable. Entonces $\text{front}(\text{mir } S)$ está contenida en la unión de $\text{front } S$ y de las rectas tangentes a los puntos de inflexión de $\text{front } S$.

Si además suponemos que $\text{front } S$ es una curva simple cerrada con un número finito m de puntos de inflexión y que $\text{front } S \cap \text{front}(\text{mir } S) = \emptyset$ entonces $\text{front}(\text{mir } S)$ es un polígono con a lo sumo m lados.

Este teorema aporta una descripción parcial de $\text{front}(\text{mir } S)$

bajo la suposición de que S sea un conjunto estrellado. Obtendremos un resultado más fuerte, con una descripción del mirador y sin la restricción sobre el conjunto. Con el tratamiento afín del problema intentaremos futuras generalizaciones, ya sea para el caso no suave o para espacios de mayor dimensión. Salvo afirmación en contrario, todos los puntos y conjuntos considerados en este trabajo estarán contenidos en el espacio euclídeo E_2 .

3.2. Puntos de inflexión

3.2.1. Clasificación afín de puntos de la frontera

La frontera de un dominio de Jordan S admite una partición en cuatro subconjuntos disjuntos:

- i) El conjunto de los *puntos convexos* ($cxp S$)
donde $cxp S = lc S \cap lnc CS$
- ii) El conjunto de los *puntos cóncavos* ($ccp S$)
donde $ccp S = lnc S \cap lc CS$
- iii) El conjunto de los *puntos chatos* ($flp S$)
donde $flp S = lc S \cap lc CS$
- iv) El conjunto de *puntos de inflexión propios* ($pif S$) donde $pif S = lnc S \cap lnc CS$

Existe además otra clase de puntos frontera que comparte las mismas propiedades con los puntos de inflexión propios. Tendremos entonces

- v) El conjunto de *puntos de inflexión extraordinarios* (xif). Diremos que x es un xif si es un punto cóncavo y acumulación de puntos chatos. $xif S = ccp S \cap cl(flps)$.

El conjunto de *puntos de inflexión* de S (ifp S) será la unión de los puntos de inflexión propios y de los puntos de inflexión extraordinarios

$$\text{ifp } S = \text{pif } S \cup \text{xif } S.$$

A esta altura, es necesario hacer una distinción entre dos clases diferentes de puntos de inflexión. Sea $x \in \text{ifp } S$. Diremos que x_0 es un *punto de inflexión manejable* si $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \cap \text{front } S$ no contiene otro punto de inflexión distinto de x_0 . En caso contrario diremos que x_0 es un *punto de inflexión inmanejable*. Es claro que los puntos de inflexión inmanejables son puntos de acumulación del conjunto de puntos de inflexión manejable.

No se ha podido lograr el estudio de los puntos de inflexión inmanejables mediante técnicas afines o localmente afines, por lo tanto nos restringiremos al estudio de conjuntos del plano en los que esa configuración esté ausente. Dado que la frontera de S es un conjunto compacto, esto implicará que el número de puntos de inflexión en S deberá ser finito. Tendremos entonces la siguiente definición:

Definición 3.2.1.

Un conjunto $S \subset E^2$ es un *dominio de Jordan suave y regular* si:

- i) S es un dominio de Jordan;
- ii) la aplicación homeomórfica $\gamma: C \rightarrow \text{front } S$ es continuamente diferenciable;
- iii) $\text{front } S$ tiene un número finito de puntos de inflexión.

Definición 3.2.2.

Una zona de obstrucción Γ contenida en front S será una componente conexa de $\text{Int } S$.

Escribiremos Γ es una z.0 de S .

3.2.2. Geometría local afín en la frontera

En los próximos dos lemas veremos que nuestra definición local afín de punto de inflexión preserva las propiedades geométricas observadas en la definición diferencial clásica.

Lema 3.2.1.

Sea S un dominio de Jordan suave y regular y $p \in S$ un punto de inflexión. Entonces existe un arco abierto $\Gamma \subset \text{front } S$ tal que $p \in \Gamma$ y la recta tangente $T(p)$ que pasa por p separa Γ en dos subarcos Γ_1 y Γ_2 ; ambos subarcos tienen al punto p como un extremo, $\Gamma_1 \subset \text{Int } S$ y $\Gamma_2 \subset \text{Ext } S$.

Si $p \in \text{pif } S$ la separación es estricta.

Demostración

a) Supongamos $p \in \text{pif } S$. Sea $N(p)$ la recta normal a la front S en p , y definamos:

$$\epsilon_1 = \inf \{ |p-t| / t \in \text{Int } S, t \neq p \}$$

$$\epsilon_2 = \inf \{ |p-q| / q \in (N(p) \cap \text{front } S), q \neq p \}$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \inf \{ \epsilon_1; \epsilon_2 \}$$

Resulta $\epsilon > 0$.

Sea $U = U(p, \epsilon)$ el disco abierto de centro p y radio ϵ , y Γ la componente conexa de $(U \cap \text{front } S)$ que contiene

a p. Γ es por lo tanto un arco abierto de extremos $\{x;y\}$. Llamemos Γ_x y Γ_y a los subarcos abiertos de extremos $\{x;p\}$ y $\{p;y\}$ respectivamente. Claramente $N(p)$ separa Γ_x de Γ_y y ni x ni y resultan puntos de inflexión.

Si $x \in \text{lc } S$ entonces $\Gamma_x \subset \text{lc } S$, ya que de lo contrario existiría un punto de inflexión en Γ_x . Lo mismo ocurre para y y Γ_y , e igual conclusión obtenemos cambiando $\text{lc } S$ por $\text{ccp } S$.

Luego cada uno de los subarcos tiene el mismo tipo de curvatura que su extremo exterior. Más aún, si $x \in \text{lc } S$ entonces $y \in \text{ccp } S$ y viceversa, porque en caso contrario todo el arco Γ tendría el mismo tipo de curvatura y p no sería un punto de inflexión.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x \in \text{lc } S$ e $y \in \text{ccp } S$. Afirmamos que Γ_x está incluido en el interior de uno de los dos semiplanos en que $T(p)$ divide al plano, ya que si Γ_x atravesara $T(p)$ debería previamente atravesar $N(p)$, lo que está prohibido por la definición del ϵ . Análogamente, Γ_y está incluido en el interior del otro semiplano determinado por $T(p)$, y esta recta separa estrictamente ambos subarcos.

- b) Sea ahora p un punto de inflexión extraordinario. Como señaláramos anteriormente, $\text{flp } S$ es abierto en la topología relativa de la front S . Llamemos I a la componente conexa de $\text{flp } S$ tal que $p \in \text{cl } I$.

Resulta I un intervalo abierto que tiene el punto p como uno de sus extremos, e $I \subset T(p)$. El resto de la

demostración es exactamente igual que en (a), con la sola excepción de que el subarco "convexo" resulta incluido en el semiespacio cerrado y no es el abierto.

Lema 3.2.2.

Si S es un dominio de Jordan suave y regular, una zona de obstrucción de front S es un arco de puntos cóncavos cuyos extremos son puntos de inflexión.

Demostración

Sea Γ una zona de obstrucción; Γ es entonces un subconjunto conexo y cerrado de front S y por lo tanto un arco cerrado o un punto. Esta última alternativa no es posible dada la diferenciabilidad de front S . Los puntos interiores a Γ deben ser cóncavos, mientras que sus extremos serán puntos de inflexión, propios o extraordinarios, ya sea que el arco contiguo está formado por puntos convexos o por puntos chatos.

Corolario 3.2.3.

Un dominio de Jordan suave y regular tiene un número finito de zonas de obstrucción.

Demostración

Inmediata usando el resultado anterior y el hecho de que el conjunto de puntos de inflexión es finito.

En el resto de este párrafo intentaremos describir las estrellas y los inner stems de los puntos convexos, cóncavos y de inflexión. Para ello necesitamos las siguientes definiciones:

Definición 3.2.1.

Un cono de vértice v es un conjunto C unión de rayos salientes desde v .

Definición 3.2.2.

Sea S un conjunto cerrado, $p \in \text{front } S$ y R un rayo saliente desde p . El segmento maximal determinado por R en S es la componente conexa de $R \cap S$ que incluye a p .

Definición 3.2.3.

Sean S un conjunto cerrado, $p \in \text{front } S$ y $C = \cup\{R_j / j \in J\}$ un cono con vértice p . El fan determinado por C en S es el conjunto $\text{fan}(C, S) = \cup\{I_j / j \in J\}$, donde I_j es el segmento maximal determinado por R_j en S .

Como lo hicimos anteriormente, llamaremos $T(p)$ a la recta tangente a $\text{front } S$ en p , H_p^+ y H_p^- serán los semiplanos abiertos determinados por $T(p)$, \bar{H}_p^+ y \bar{H}_p^- los semiplanos cerrados. Además

$$H_p^- = C(\bar{H}_p^+) \quad \text{y} \quad \bar{H}_p^- = C(H_p^+)$$

Teorema 3.2.4.

Si S es un dominio de Jordan suave y regular y p un punto de inflexión de S , entonces $\text{ins}(p, S) = \text{st}(p, S) = \text{fan}(\bar{H}_p^+, S)$

Demostración

El lema 3.2.1. asegura que existe un $\epsilon > 0$ tal que el conjunto $V = CS \cap U(p, \epsilon) \cap H_p^-$ sea convexo.

Sea $x \in H_p^- \cap S$, entonces $(x, p) \cap V \neq \emptyset$ de lo contrario

$T(p)$ no sería tangente. Luego $x \notin \text{st}(p, S)$, por lo tanto $\text{st}(p, S) \subset \overline{H_p^+}$.

Elijamos ahora $\alpha > 0$ tal que $U = S \cap U(p, \alpha) \cap \overline{H_p^+}$ sea convexo. Nuevamente la existencia de α está asegurada por el lema 3.2.1. Tomemos $t \in \text{st}(p, S)$.

Existe $s \in (t, p) \cap U$, y $R(tp \rightarrow) = R(sp \rightarrow)$; además este rayo debe ser saliente respecto de S ya que de lo contrario, la existencia de un intervalo de puntos interiores a S en H_p^- , contiguos a p , contradiría la condición de que $\text{st}(p, S) \subset \overline{H_p^+}$. Luego hemos probado

$$\text{st}(p, S) \subset \text{ins}(p, S) \subset \overline{H_p^+}$$

El resto de la demostración es trivial.

Teorema 3.2.5.

Si S es un dominio de Jordan suave y regular y p un punto cóncavo de front S que no sea un punto de inflexión extraordinario, entonces

$$\text{st}(p, S) = \text{fan}(\overline{H_p^+}, S) \qquad \text{ins}(p, S) = \text{fan}(H_p^+, S)$$

Demostración

Sea Γ una zona de obstrucción de S que contiene a p y $K = \text{conv } \Gamma$. Es claro que $\text{int } K \neq \emptyset$ y que $T(p)$ es la única recta de apoyo de K en p .

Sea $z \in H_p^- \cap S$. $(z, p) \cap \text{int } K \neq \emptyset$ de lo contrario la recta que contiene a los puntos z y p sería también soporte de K en p . Luego $z \notin \text{st}(p, S)$ y

$$\text{st}(p, S) \subset \overline{H_p^+} \qquad (1)$$

Tomemos ahora $x \in \text{st}(p, S)$ y $x \notin T(p)$.

Llamemos L la recta que pasa por x y p . Como L no es una recta de apoyo de K en p , existe $t \in L \cap \text{int } K$.

Más aún, una conocida propiedad topológica de los conjuntos convexos asegura que $(t, p) \subset \text{int } K \subset CS$.

Luego el rayo $R(x \rightarrow p)$ es saliente y $x \in \text{ins}(p, S)$.

Hemos demostrado que

$$\text{st}(p, S) \cap H_p^+ \subset \text{ins}(p, S) \quad (2)$$

Por otro lado, tomemos $q \in T(p) \cap \text{st}(p, S)$, $q \neq p$. Dado que los ifp S son finitos, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon)$ no contiene puntos de inflexión, Tomemos $s \in B(p, \epsilon) \cap (p, q)$ y $t = 2p - s$. Es claro que $t \in B(p, \epsilon)$ y que $(t, p) \subset \text{int } S$. Luego $R(q \rightarrow p)$ es entrante y $q \notin \text{ins}(p, S)$. Como q es cualquier punto en $T(p) \cap \text{st}(p, S)$ hemos probado

$$\text{ins}(p, S) \subset \text{st}(p, S) \cap H_p^+ \quad (3)$$

Ambas igualdades de la tesis se obtienen directamente de las inclusiones (1), (2) y (3).

Teorema 3.2.6.

Si S es un dominio de Jordan suave y regular y p es un punto convexo de S entonces

$$\text{ins}(p; S) = \text{st}(p, S) = \overline{\text{fan}(H_p^+; S)}$$

Demostración

Como $p \in \text{lc } S$ que es un conjunto abierto en $\text{front } S$, $\exists \Gamma$ arco de front de S tal que $p \in \Gamma$ y $\Gamma \subset \text{lc } S \cap \text{inc } CS$.

Sean $K = \text{conv } \Gamma$ y $T(p)$ la tangente a $\text{front } S$ en p . Claramente $T(p)$ es la única recta de apoyo a K en p . Supongamos

$K \subset \overline{H_p^+}$. Si $\omega \in H_p^-$ es claro que $(\omega p) \cap CS \neq \emptyset$ de lo contrario $T(p)$ no sería de apoyo a K en p , luego $st(p, S) \subset \overline{H_p^+}$.

Tomemos $t \in st(p, S)$; $\exists s \in K$ tal que $s \in (tp)$.

$R(sp \rightarrow)$ es saliente respecto de S ya que, si $s \in T(p)$,

$R(sp \rightarrow)$ es saliente por ser $T(p)$ de apoyo de K en p , y si $s \in H_p^+$, $R(sp \rightarrow)$ no coincide con $T(p)$ luego la existencia

de un intervalo de puntos interiores a S en H_p^- contiguos a p contradiría la condición de que $st(p, S) \subset \overline{H_p^+}$.

Luego si $t \in st(p, S)$, $t \in ins(p, S)$ y hemos probado que $st(p, S) \subset ins(p, S)$.

El resto de la demostración es trivial.

3.3. Los teoremas previos y el teorema principal

Teorema 3.3.1.

Sea K un cuerpo convexo plano, L_1 y L_2 dos rectas de apoyo de K , no paralelas, que lo intersecan en p y q respectivamente, y solamente en esos puntos.

Sean x el punto en el que ambas rectas se cortan, A la región angular convexa limitada por $R(px \rightarrow)$ y $R(qx \rightarrow)$, Γ el arco abierto de front K limitado por p y q visible desde x via CK .

Si t es un punto de Γ y L es la recta de apoyo de K que pasa por t , L separa estrictamente $int K$ de A .

Demostración

Sean $C = conv(K \cup \{x\})$ y $\Gamma' = front K \sim (\Gamma \cup \{p; q\})$.

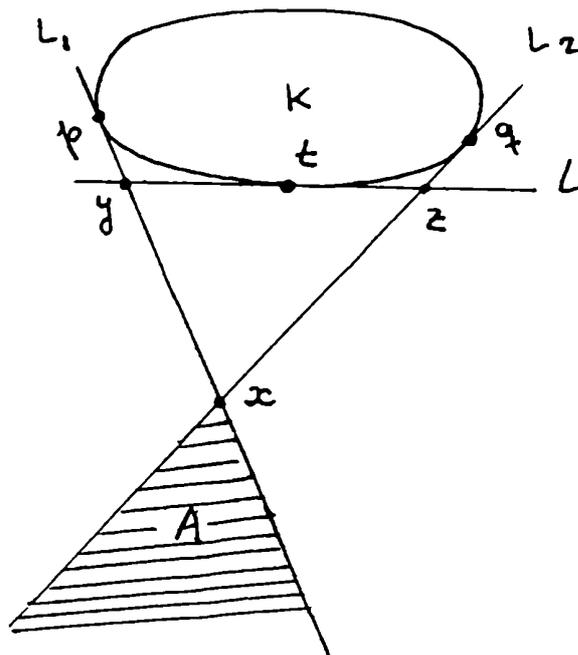


FIG. 3.3.1.

Es claro que

$$\text{front } C = \Gamma' \cup [xp] \cup [xq].$$

Luego $t \in \text{int } C$ y por lo

tanto el conjunto

$L \cap \text{front } C$ consiste exactamente de dos puntos, "y" y "z".

Ninguno de estos puntos puede pertenecer a Γ' , de lo contrario L separaría p de q ; tampoco pueden ambos pertenecer a un mismo

segmento $[xp]$ o $[xq]$ porque esto implicaría que $t \in L_1$ o $t \in L_2$, y en ambos casos llegaríamos a una contradicción. Luego $y \in (xp)$, $z \in (xq)$ y $L \cap A = \emptyset$

Teorema 3.3.2.

Sea S un dominio de Jordan suave y regular y Γ una zona de obstrucción de front S con extremos $\{p; q\}$.

La intersección de los inner stems de todos los puntos de Γ es la intersección de las estrellas de p y q .

Demostración

Definamos $K = \text{conv } \Gamma$ y sean p, q y A como en el teorema 3.3.1. El teorema 3.2.4 asegura que $\text{st}(p, S) \cap \text{st}(q, S) \subset A$. Sea $t \in \Gamma$, $t \neq p$ y $t \neq q$, y L la recta tangente a Γ en el punto t .

Para todo $z \in \text{st}(p,S) \cap \text{st}(q,S)$, sean $\{x\} = [zp] \cap L$, $\{y\} = [zq] \cap L$ y $T = \text{conv}\{x;y;z\}$. $\text{int } T \cap \text{Int } S = \emptyset$ ya que de lo contrario la conexi3n de front S implicarfa la existencia de una obstrucci3n ya sea en $[zp]$ o en $[zq]$. El lema 2.2.4 asegura que $z \in \text{st}(t,S)$; Ésto unido a los teoremas 3.3.1 y 3.2.5 asegura que $z \in \text{int}(t,S)$. Hemos probado que $\text{st}(q,S) \cap \text{st}(p,S) \subset \bigcap_{t \in \Gamma} \text{ins}(t,S)$. La otra inclusi3n es trivial ya que si $\omega \in \text{ins}(t,S) \quad \forall t \in \Gamma$, en particular $\omega \in \text{ins}(p,S) \cap \text{ins}(q,S)$ donde p y q son los puntos de inflexi3n extremos de Γ . El teorema 3.2.4 indica que $\omega \in \text{st}(p,S) \cap \text{st}(q,S)$.

El teorema principal

Teorema 3.3.3.

El mirador de un dominio de Jordan suave, regular y no convexo es la intersecci3n de las estrellas de sus puntos de inflexi3n.

Demostraci3n

Este resultado es una consecuencia inmediata del teorema 2.4.2 y del teorema 3.3.2.

3.4. Teoremas de tipo Krassnoselsky

Una vez obtenida la descripci3n del mir S como intersecci3n de ciertos subconjuntos de S , es natural buscar teoremas de tipo Krassnoselsky que establezcan si S es estrellado por medio del teorema de Helly.

Se presenta aquí un problema técnico: las estrellas de los puntos de la frontera de S no son, en general, convexas y por lo tanto el teorema de Helly se torna inaplicable. El siguiente lema nos ayudará a sortear ese obstáculo.

Lema 3.4.1.

Sea S un dominio de Jordan suave, $x \in S$ y $x \notin \text{mir } S$. Entonces existe un punto de inflexión $p \in S$ tal que $x \notin \text{conv}(\text{st}(p, S))$.

Demostración

Consideremos las siguientes alternativas:

a) $x \in \text{lc } S$.

Por el teorema 2.4.4, existe $z \in \text{cv}(x, S)$ y por el teorema 2.4.3, podemos encontrar $y \in \text{inc } S \cap (xz)$.

Sea Γ la zona de obstrucción de S que incluye a y , y sea t un extremo de Γ (punto de inflexión) que esté del mismo lado que z respecto a y .

b) $x \in \text{inc } S$.

Sea Γ la zona de obstrucción que contiene a x y t un extremo de Γ distinto de x .

En ambos casos está claro que $x \notin \text{st}(t, S)$.

Es más, si x no está contenido en la cápsula convexa de esa estrella, bastará tomar $p = t$ y el lema estará probado.

Supongamos entonces que $x \in \text{conv}(\text{st}(t, S))$.

Podemos encontrar a y b en $\text{st}(t, S)$ tal que $x \in (ab)$. Es más, podemos pedir que este segmento $[ab]$ sea mínimo,

eligiendo a como el primer punto de $R(x \rightarrow a)$ que es visible desde t , y b con la misma condición respecto de $R(x \rightarrow b)$.

Esta situación provocará, a causa del fenómeno de visibilidad crítica, un par de puntos $\{u;v\}$ de no convexidad local de S , dentro del triángulo $T = \text{conv}\{t;a;b\}$. Supongamos que u es el primero de estos dos puntos que encontramos cuando recorremos la front S desde t en la dirección del arco convexo contiguo a t . Como $u \in \text{lnc } S$, existe un primer punto $p \in \text{ifp } S$ en el arco de extremos $\{t;u\}$, en el recorrido a partir de t .

Es fácil mostrar que p verifica la tesis ya que si su tangente T_p separa $\text{st}(p,S)$ y por lo tanto t de x , obviamente $x \notin \text{conv}(\text{st}(p,S))$. Si x y t están del mismo lado de $T(p)$, $[xt]$ corta la frontera en el arco de convexidad local \overline{tp} . Sea ω el punto intersección. $T(\omega)$ separa $\text{conv}(\text{st}(p,S))$ de x .

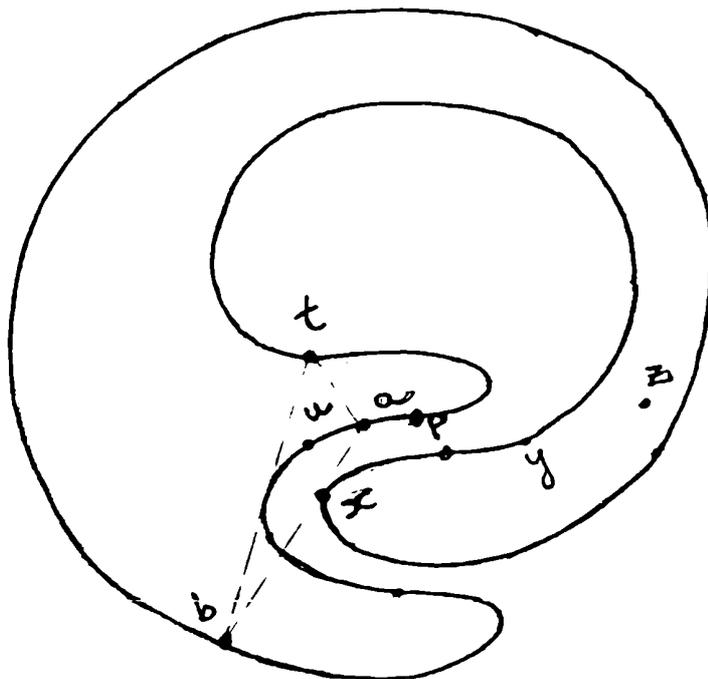


FIG. 3.4.1.

- Teorema de tipo Krassnoselsky usando el teorema de Helly:

Teorema 3.4.2.

Un dominio de Jordan suave y simple S es estrellado si y sólo si para cada k puntos de inflexión de S con $k \geq 3$, existe un punto de S que los ve simultáneamente.

Demostración

Para cada $t \in \text{ifp } S$ definamos $K_t = \text{conv}(\text{st}(t, S))$. El teorema 3.3.3 y el lema 3.4.1 aseguran que $\text{mir } S = \bigcap \{K_t / t \in \text{ifp } S\}$. Aplicando el teorema de Helly (teorema 2.3.1) a esta familia finita de conjuntos convexos obtendremos la tesis.

- Teorema de tipo Krassnoselsky usando el teorema de Grünbaum:

Teorema 3.4.3.

El mirador de un dominio de Jordan suave y simple S tiene dimensión por lo menos 1 si y sólo si para cada conjunto de k puntos de inflexión de S , con $k \geq 4$, existe un segmento que está incluido simultáneamente en la estrella de cada uno de ellos.

- Teorema de tipo Krassnoselsky usando el teorema de Klee.

Teorema 3.4.4.

El mirador de un dominio de Jordan suave y simple S contiene un disco de radio $\lambda > 0$ si y sólo si para cada k puntos de inflexión de S , con $k \geq 0$, existe un disco de radio λ

contenido en la estrella de cada uno de ellos.

Las demostraciones de los teorema 3.4.4 y 3.4.5 son totalmente análogas a la del teorema 3.4.3, pero basadas en las generalizaciones del teorema de Helly hechas por Grünbaum y Klee respectivamente.

4. PUNTOS DE MAXIMA VISIBILIDAD

4.1. Introducción

Definición 4.1.1.

Sea S un conjunto conexo y cerrado, $p \in S$ y $q \in S$. Diremos que " p tiene mayor visibilidad que q vta S " si $st(p,S) \supseteq st(q,S)$. Notación: $p Y_S q$

Observación:

" Y_S " es un preorden parcial por ser una relación transitiva e idéntica pero no antisimétrica ya que dos puntos distintos pueden tener la misma estrella.

Definición 4.1.2.

La célula de visibilidad de x en S será el conjunto $vis(x,S) = \{y \in S / y Y_S x\}$.

Teorema 4.1.1.

$vis(x,S)$ es la intersección de todas las componentes convexas de S que contienen a x .

Demostración

Sea $F = \{C_x \subset S : C_x \text{ es componente convexa y } x \in C_x\}$.

Veamos que $vis(x,S) = \bigcap_{C_x \in F} C_x$

Sean $p \in vis(x,S)$ y K una componente convexa que contiene a x .

$$K \subset st(x,S) \subset st(p,S), \quad \text{luego}$$

$$K' = \text{conv}(\{p\} \cup K) \subset S$$

Por la maximalidad de K será $K' = K$, y por lo tanto $p \in K$; pero K era un elemento cualquiera de F , entonces $p \in C_x \forall C_x \subset F$, luego $p \in \bigcap_{C_x \in F} C_x$ con lo que probamos que $\text{vis}(x, S) \subset \bigcap_{C_x \in F} C_x$.
 Recíprocamente sean $t \in \bigcap_{C_x \in F} C_x$ y $z \in \text{st}(x, S)$. Existe una componente K_0 en F tal que $[z, x] \subset K_0$. Como $t \in K_0$, t ve a z vía S , y ésto ocurre $\forall z \in \text{st}(x, S)$, luego $\text{st}(x, S) \subset \text{st}(t, S)$ y resulta $t \in \text{vis}(x, S)$.

Corolario 4.1.1.

$\text{vis}(x, S)$ es convexa.

Teorema 4.1.2.

Todo punto de un conjunto compacto S ve, vía S , al menos un punto de máxima visibilidad de S .

Demostración

Por la transitividad de la relación Y_S , la inclusión $\text{vis}(x, S) \subset \text{vis}(y, S)$ equivale a $x Y_S y$, luego $\text{st}(x, S) \supset \text{st}(y, S)$.

Sea $x_0 \in S$. Consideremos la familia

$$K = \{\text{vis}(x, S) / x \in \text{vis}(x_0, S)\}$$

que está formada por conjuntos compactos ya que las componentes convexas lo son en un conjunto compacto. Aplicaremos el lema de Zorn a K .

Sea $C = \{\text{vis}(x_\lambda, S) / \lambda \in L\}$ una cadena en K , o sea

$$\dots \subset \text{vis}(x_{\lambda(n)}, S) \subset \text{vis}(x_{\lambda(n-1)}, S) \subset \dots \subset \text{vis}(x_0, S).$$

Veamos que efectivamente todos los elementos de esta cade
na están contenidos en $\text{vis}(x_0, S)$.

Sea $z \in \text{vis}(x, S)$; como $x \in \text{vis}(x_0, S)$ resulta
 $\text{st}(x, S) \supset \text{st}(x_0, S)$, pero además $\text{st}(z, S) \supset \text{st}(x, S)$.

Entonces $\text{st}(x_0, S) \subset \text{st}(z, S)$ y $\therefore z \in \text{vis}(x_0, S)$, luego
 $\text{vis}(x, S) \subset \text{vis}(x_0, S)$.

Sea $C_0 = \bigcap_{\lambda \in L} \text{vis}(x_\lambda, S)$

- i) $C_0 \neq \emptyset$ por ser intersección de conjuntos compactos
que cumplen la propiedad de intersección finita.
- ii) Si $z_0 \in C_0$, $\text{st}(z_0, S) \supset \text{st}(x_0, S) \therefore z_0 \in \text{vis}(x_0, S)$.
- iii) Sea $z_0 \in C_0$. Consideremos $\text{vis}(z_0, S)$. Por ii),
 $\text{vis}(z_0, S) \subset K$.

Es necesario probar que $\text{vis}(z_0, S) \subset \text{vis}(x_\lambda, S) \forall \lambda \in L$.

Sea entonces $t \in \text{vis}(z_0, S)$; $\text{st}(t, S) \supset \text{st}(z_0, S)$.

Como $z_0 \in \text{vis}(x_\lambda, S) \forall \lambda \in L$ resulta $\text{st}(z_0, S) \supset \text{st}(x_\lambda, S)$
 $\forall \lambda \in L$, luego $\text{st}(t, S) \supset \text{st}(x_\lambda, S) \forall \lambda \in L$

$t \in \text{vis}(x_\lambda, S) \forall \lambda \in L$ y $\text{vis}(z_0, S) \subset \text{vis}(x_\lambda, S) \forall \lambda \in L$.

Estamos en condiciones de aplicar el "Principio Mini
mal": una familia A de conjuntos tiene un elemento mi
nimal siempre que para cada cadena en A haya un elemen
to de A que esté contenido en todos los elementos de
la cadena.

Resulta entonces que K tiene un elemento minimal y

Éste produce al menos un punto de máxima visibilidad.

La hipótesis de compacidad de S es esencial en el teorema
4.1.2 como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.1.

Sea $S \subset \mathbb{R}^2$

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, x^2 \geq y \geq -x^2\}$$

S es cerrado y $st(0,0)$ incluye puntos interiores y una dirección de incremento de la visibilidad pero no puntos de máxima visibilidad.

Objetivo del capítulo 4

El teorema 4.1.2 indica que los puntos de máxima visibilidad de un conjunto S pueden ser alcanzados desde otro punto del conjunto por un desplazamiento apropiado a través de él, pero no provee una manera de descubrir, basándose solamente en la forma de la estrella del punto original, la dirección de este desplazamiento óptimo.

Si S es un dominio de Jordan suave y regular (def. 3.2.1) y $x \in S$ ve al menos un punto distinto de sí mismo intentaremos:

- a) Determinar la dirección de un desplazamiento a través de S que incremente estrictamente la visibilidad basándonos solamente en el conocimiento de $st(x,S)$.
- b) Mostrar que el paso a) puede ser iterado hasta que un punto de máxima visibilidad sea alcanzado.
- c) Reconocer si ese punto está en el mirador de S o no lo está.

El conjunto S resultará estrellado o no, según que la respuesta a c) sea afirmativa o negativa.

Observemos que en un conjunto estrellado un punto es de máxima visibilidad si y sólo si está en el mirador.

4.2. Descripción de la región factible de desplazamiento

En todo este capítulo consideraremos que $S \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio de Jordan suave y regular, es decir, S es homeomorfo al disco unitario; su frontera es una curva continuamente diferenciable y carece de puntos singulares o lo que es lo mismo, puntos de acumulación de puntos de inflexión.

Nota acerca de la terminología

A lo largo de este capítulo y del siguiente haremos algunos cambios terminológicos; nos referiremos a los puntos cóncavos como puntos de no convexidad local de S ($\text{lnc } S$) y a los puntos convexos como puntos de convexidad local de S ($\text{lc } S$). Los puntos chatos, si bien son de convexidad local de S , mantendrán su denominación, como también los puntos de inflexión a los que seguiremos llamando así a pesar de su condición de puntos de no convexidad local de S .

Observemos que si $x \in \text{int } S$ entonces $x \in \text{lc } S$, luego $\text{lnc } S \subset \text{front } S$.

Definición 4.2.2.

Una zona de obstrucción Γ de S es una componente conexa de $\text{lnc } S$.

(Notación: Γ es una z.o de S)

Es de notar que si S es un dominio de Jordan regular, cada z_0 es un arco en front S , eventualmente reducido a un punto.

Definición 4.2.3.

Si S es un dominio de Jordan regular, $x_0 \in S$ y Γ es una z_0 de S , Γ será una z_0 pasiva para x_0 si $\forall p \in \Gamma$ el rayo $R(x_0 \rightarrow p)$ es saliente o bien si $\Gamma \cap \text{st}(x_0, S) = \emptyset$. De otra manera Γ será una z_0 activa para x_0 .

Definición 4.2.4.

Si front S es una curva simple cerrada y diferenciable e $y \in \text{front } S$ es un punto de inflexión, diremos que L_y es una *recta de inflexión* si es la recta tangente a front S en y .

Definición 4.2.5.

Sea Γ una z_0 activa para x_0 , $y \in \Gamma \cap \text{st}(x_0, S)$. Diremos que la recta L_y determinada por x_0 e y es una *recta crítica* si $R(x_0 \rightarrow y)$ no es un rayo saliente.

Definición 4.2.6.

Sean S un dominio de Jordan suave y regular, S_a el semiespacio cerrado determinado por la tangente a Γ en a que no contiene a Γ y S_b el determinado por la tangente a Γ en b de la misma manera.

Definimos $A_\Gamma = S_a \cap S_b \cap S$ como el *cono mejorante* para x_0 respecto de Γ .

Buscaremos construir, para cada punto x_0 , la región de $st(x_0, S)$ tal que un desplazamiento hacia cualquiera de sus puntos no empeore la visibilidad. Además, la construcción de dicha región $R(x_0)$ deberá realizarse con la información en $st(x_0, S)$.

Para ello necesitamos los siguientes resultados:

Lema 4.2.1.

Sean $S \subset \mathbb{R}^2$ un dominio de Jordan suave y regular, $x_0 \in S$ y Γ una z.0 visible desde x_0 .

Entonces $\Gamma \cap st(x_0, S)$ es un arco \widehat{ab} , eventualmente $a = b$.

Demostración

i) Supongamos $x_0 \notin \Gamma$, $a \neq b$, $a \in st(x_0, S)$ y $b \in st(x_0, S)$.

Si \widehat{ab} es el arco de Γ entre a y b sea $t \in \widehat{ab}$, $t \neq a$ y $t \neq b$.

Llamemos T_t a la tangente a Γ por t ; T_t resulta una recta de apoyo de $\text{conv } \Gamma$ en t por ser Γ un trozo de la curva frontera compuesto por puntos de $\text{inc } S$. Esta tangente divide el plano en dos semiplanos abiertos que llamaremos H_t^+ y H_t^- . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\text{conv } \Gamma \subset \text{cl } H_t^+$.

Intentaremos probar que T_t separa estrictamente x_0 y $\text{conv } \Gamma$.

$H_t \cap S$ tiene por lo menos dos componentes conexas; pertenece a una de ellas y b a otra.

Si x_0 perteneciera a H_t^+ debería estar en alguna de estas componentes conexas o en ninguna. En cualquier caso no

podría ver a "a" y a "b" simultáneamente, $\therefore x_0 \notin H_t^+$.

Si x_0 perteneciera a T_t , $R(x_0 \rightarrow t)$ sería un rayo entrante y tendríamos la misma conclusión anterior

$\therefore x_0 \notin T_t$.

Entonces $x_0 \in H_t^-$ y T_t separa estrictamente $\text{conv } \Gamma$ de x_0 .

Sean $T_t \cap [x_0 a] = a'$ y $T_t \cap [x_0 b] = b'$

$x_0 \in \text{st}(a, S) \cap \text{st}(b, S)$ por hipótesis, luego

$\text{int conv}(a', x_0, b') \cap \text{Int } S = \emptyset$ ya que la frontera

no puede penetrar en esta cápsula convexa ni por

$[x_0 a']$ ni por $[x_0 b']$ porque x_0 dejaría de ver a "a"

o a "b" en ese caso.

Aplicando entonces el lema 2.2.4 a la $\text{conv}(a', x_0, b')$

resulta $t \in \text{st}(x_0, S)$.

Esto sucede $\forall t \in \widehat{ab}$, $\therefore \widehat{ab} \subset \text{st}(x_0, S)$.

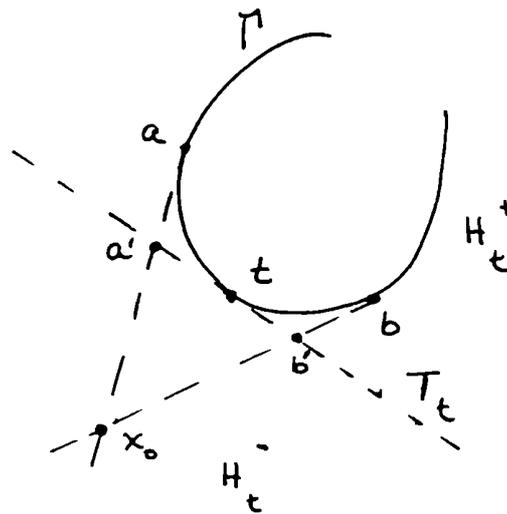


FIG. 4.2.1.

ii) Si $x_0 \in \Gamma$, $st(x_0, S) \cap \Gamma = \{x_0\}$ por el teorema 3.2.5 ya que todos los puntos de Γ son de no convexidad local de S .

Lema 4.2.2

Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un dominio de Jordan suave y regular, $x_0 \in S$, entonces si $R(x_0) = \bigcap A_{\Gamma}$ donde la intersección se extiende a todas las $z \in \Gamma$ visibles desde x_0 , vale $R(x_0) = vis(x_0, S)$

Demostración

Sea $t \in vis(x_0, S)$, entonces $st(t, S) \supset st(x_0, S)$.

Supongamos Γ_0 una $z \in \Gamma$ visible desde x_0 ; $\Gamma_0 \cap st(x_0, S) = \widehat{ab}$, luego $t \in st(a, S) \cap st(b, S)$.

Por el teorema 3.2.5, $st(a, S) \subset S_a$ y $st(b, S) \subset S_b$ luego $t \in S_a \cap S_b \cap S = A_{\Gamma_0}$.

Hemos probado entonces que $vis(x_0, S) \subset R(x_0)$.

Probaremos la otra inclusión suponiendo que $t \notin vis(x_0, S)$ y encontrando entonces una $z \in \Gamma_0$ visible desde x_0 pero tal que $t \notin A_{\Gamma_0}$.

Sea $t \in st(x_0, S)$ y $t \notin vis(x_0, S)$. Entonces existe z tal que $z \in st(x_0, S)$ y $z \notin st(t, S)$.

$[z t] \cap CS \neq \emptyset$, luego $[z t] \cap front S \neq \emptyset$. Sea $p \in [z t] \cap front S \cap st(z, S)$.

Existen las siguientes alternativas

i) $p \in st(x_0, S) \cap inc S$. En este caso $\exists \Gamma_0$ visible desde x_0 tal que $p \in \Gamma_0$. Sea entonces $st(x_0, S) \cap \Gamma_0 = \widehat{ab}$.

Sea $a \neq b$.

Debemos probar que $t \notin S_a$ o bien $t \notin S_b$.

Sea $A = \text{conv}(a, x_0, b)$; $p \in \text{int } A$ pues $\Gamma_0 \in \text{Int } S$ y $[ab]$ resulta entonces una cuerda exterior a Γ_0 ; entonces $L(x_0, p) \cap (ab) \neq \emptyset$ (*)

$L(x_0, p)$ divide \mathbb{R}^2 en dos semiespacios que llamaremos H^+ y H^- ; supongamos sin pérdida de generalidad que $a \in H^+$, entonces por (*) $b \in H^-$ (Fig. 4.2.2)

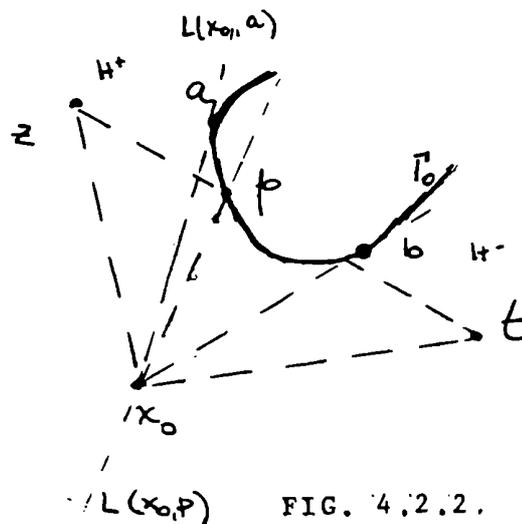


FIG. 4.2.2.

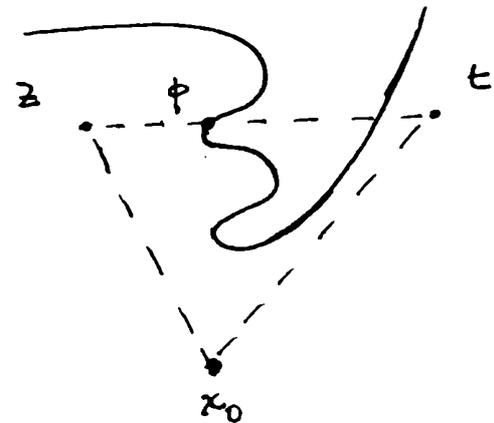


FIG. 4.2.2'.

$z \notin L(x_0, p)$ sino resultaría $t \in L(x_0, p)$ y un absurdo pues esto implicaría $z \in \text{st}(t, S)$.

Si $z \in H^+$ elijamos a . Si $L(x_0, a)$ es una recta crítica, z pertenece a uno de los semiespacios por ella determinados y p y t pertenecen al otro.

$p \notin S_a$ por estar en Γ_0 , luego $t \notin S_a$. $\therefore t \notin A_{\Gamma_0}$

Si a es un punto de inflexión y la recta de inflexión no separa z de t , de todas maneras deja a t fuera de S_a .

Si $\text{st}(x_0, S) \cap \Gamma_0 = \{p\}$ (Fig. 4.2.2), $L(x_0, p)$ es una recta crítica; $z \in S_p$ pues $z \in \text{st}(p, S)$. $\therefore t \notin S_p \Rightarrow t \notin A_{\Gamma_0}$

ii) $p \in \text{st}(x_0, S) \cap \text{lc } S$

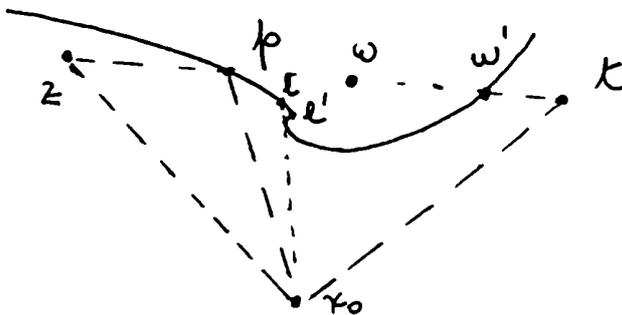


FIG. 4.2.3

Sea $B = \text{conv}(p, x_0, t)$; $\exists \omega \in (p, t) \cap CS$ ya que $t \notin \text{st}(p, S)$. Por el lema 2.2.4, $\text{int } B \cap \text{inc } S \neq \emptyset$. Sea entonces $l' \in \text{int } B \cap \text{inc } S$. Si $l' \in \text{st}(x_0, S)$ bastará considerar este punto y la $z.0 \Gamma_0$ a la que pertenece y es visible desde x_0 para aplicar la parte i). Si $l' \notin \text{st}(x_0, S)$ consideremos $(\widehat{p, l'})$ el arco de frontera contenido en B . $(\widehat{p, l'}) \cap \text{st}(x_0, S) = \widehat{p, l}$. Si $l \in \text{inc } S$, como es visible desde x_0 bastará aplicar la parte i) usando este punto. Si $l \in \text{lc } S$, como $l \in \text{cv}(x_0, S)$ y considerando que esta visibilidad crítica no puede ser ocasionada por x_0 (de lo contrario x_0 no sería a t o a z), resulta por el teorema 2.4.3 $(l, x_0) \cap \text{inc } S \neq \emptyset$. Tomemos un punto en esta intersección y razonemos como en la parte i).

En las alternativas i) y ii), el hecho de que p sea igual a z no modificará la conclusión.

iii) Si $p \notin \text{st}(x_0, S)$, $p \neq z$, sea $[z, p] \cap \text{st}(x_0, S) = [z, \omega]$ donde eventualmente $z = \omega$. Sea $B' = \text{conv}(\omega, x_0, t)$.

Una demostración similar a la de la parte ii) usando B' conduce a la tesis.

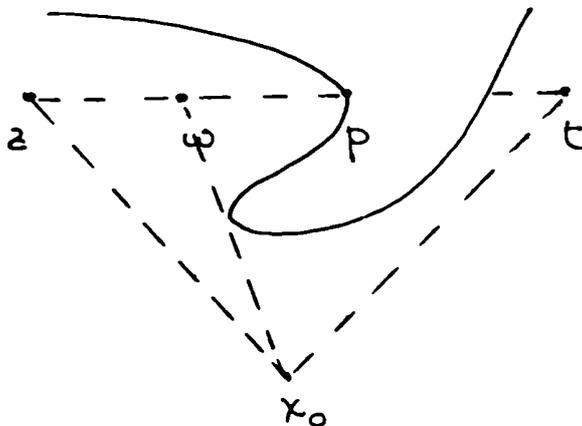


FIG. 4.2.4.

Lema 4.2.3.

Sean $t \in \text{front } S$, $x_0 \in \text{int } S$; t ve claramente a x_0 y $R(x_0 \rightarrow t)$ es saliente. Entonces x_0 ve claramente a t .

Demostración

- i) Si $t \in \text{lnc } S$, $\exists \Gamma \subset \text{lnc } S$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ donde Γ_1 y Γ_2 son dos arcos de no convexidad local unidos en t . Por el lema 5.4.4, parte iii) cuya demostración es totalmente independiente del presente desarrollo, sabemos que $R(x_0 \rightarrow t)$ separa localmente Γ_1 de Γ_2 , luego existe un entorno de t , que llamaremos $U(t)$ tal que si $L(x_0, t)$ separa el plano en H^+ y H^- , $\Gamma_1' = \Gamma_1 \cap U(t) \subset H^+$ y $\Gamma_2' = \Gamma_2 \cap U(t) \subset H^-$ (Fig. 4.2.5).

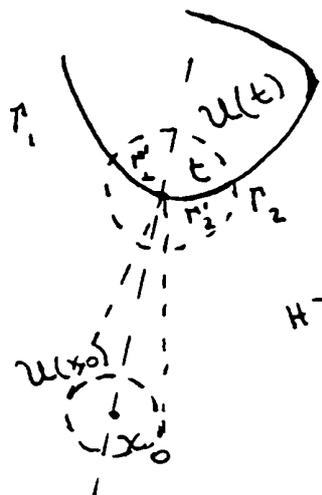


FIG. 4.2.5

Afirmamos que $\exists t_2$ en Γ_2' , $t_2 \in \text{st}(x_0, S)$. Si esto no ocurriera existiría una sucesión en Γ_2' , $\{t'_n\} \rightarrow t$ y $t'_n \notin \text{st}(x_0, S) \forall n$, luego, como $x_0 \in \text{int } S$, también existiría otra sucesión $\{u_n\}$ cuyos elementos $u_n \in (t'_n, x_0) \cap \text{st}(x_0, S) \cap \text{front } S$, y $u_n \in H^- \forall n$.

Será entonces $u_n = \lambda_n t'_n + (1-\lambda_n)x_0$ $0 < \lambda_n < 1$; $\{\lambda_n\}$ es una sucesión contenida en $[0, 1]$, luego existe una subsucesión convergente $\{\lambda_{n_i}\} \rightarrow \lambda$ $0 \leq \lambda \leq 1$.

Tomemos $u_{n_i} = \lambda_{n_i} t'_{n_i} + (1-\lambda_{n_i})x_0$; $\{u_{n_i}\} \rightarrow u$ donde $u = \lambda t + (1-\lambda)x_0$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

De lo anterior obtenemos las siguientes conclusiones $u \in \text{front } S$ por ser ésta cerrada.

$u \neq t$ porque de lo contrario se contradice la simplicidad de $\text{front } S$ ya que además de Γ_1' y Γ_2' unidas en t habría otro pedazo de frontera distinto del que forman parte los u_{n_i} que ya vimos no pertenecen a Γ_2' , y tampoco a Γ_1' por estar en H^- , que se uniría a Γ_1' y Γ_2' en t .

$u \neq x_0$ por ser x_0 un punto interior.

Resultaría entonces $u \in (x_0, t)$. Pero $(x_0, t) \cap \text{front } S = \emptyset$ pues t ve claramente a x_0 .

Entonces esta sucesión $\{t'_n\}$ no puede existir, luego $\exists t_2' \in \Gamma_2' \cap \text{st}(x_0, S)$. Por el lema 4.2.1 $t_2' \in \text{st}(x_0, S)$.

Con igual demostración vemos que $\exists t'_1 \subset \text{st}(x_0, S) \cap \Gamma'_1$
y que $\overset{\curvearrowright}{t} t_1 \subset \text{st}(x_0, S)$.

Hemos probado que x_0 ve claramente a t .

- ii) Si $t \in \text{lc } S$, suponiendo que existe una sucesión $\{t_n\} \rightarrow t$, $t_n \in \text{front } S \cap C(\text{st}(x_0, S))$ y con el mismo procedimiento que en i) se prueba que x_0 ve claramente a t .
- iii) Si $t \in \text{flex } S$, basta aplicar a un lado la parte i) y al otro la ii) para llegar a la tesis.

Lema 4.2.4.

$x_0 \in \text{int } R(x_0) \Rightarrow x_0 \in \text{mir } S$

Demostración

- i) Si $t \in \text{st}(x_0, S) \Rightarrow t$ ve claramente a x_0 . Como $x_0 \in \text{int } R(x_0)$, existe un entorno de x_0 que llamaremos $\varepsilon(x_0)$ tal que $\varepsilon(x_0) \subset R(x_0)$.
Si $\omega \in \varepsilon(x_0)$, $\omega \in \text{vis}(x_0, S)$ (Lema 4.2.2), luego $\text{st}(x_0, S) \subset \text{st}(\omega, S)$ y por lo tanto $t \in \text{st}(\omega, S)$ y $\omega \in \text{st}(t, S) \forall \omega \in \varepsilon(x_0)$; resulta $\varepsilon(x_0) \subset \text{st}(t, S)$.
- ii) Si $t \in \text{front } S \cap \text{st}(x_0, S)$, $R(x_0 \rightarrow t)$ es saliente.
Basta probarlo para los puntos de no convexidad local ya que tanto si $t \in \text{lc } S \cap \text{front } S$ o si $t \in \text{flex } S \cap \text{front } S$ resulta $\text{st}(t, S) = \text{ins}(t, S)$ (teoremas 3.2.4 y 3.2.6).
Supongamos entonces $t \in \Gamma_0$ donde Γ_0 es un arco de $\text{inc } S$.
Si $R(x_0 \rightarrow t)$ fuera un rayo entrante, $L(x_0 \rightarrow t)$ sería tangente a Γ_0 en t .
Como $L(x_0 \rightarrow t)$ divide al plano en dos semiespacios que

llamaremos H^+ y H^- , por el teorema 3.2.5 podemos suponer sin pérdida de generalidad que $st(x_0, S) \subset H^+$. Pero como cualquier entorno de x_0 tiene intersección no vacía con H^- , esto significa que t no puede ver claramente a x_0 . Luego $R(x_0 \rightarrow t)$ debe ser un rayo saliente. Las afirmaciones i) y ii) junto con el lema 4.2.3 prueban que todo $t \in \text{front } S \cap st(x_0, S)$ es claramente visible desde x_0 .

Supongamos ahora que existiera $\omega \in S$, $\omega \notin st(x_0, S)$, entonces $(x_0 \omega) \cap CS \neq \emptyset$. Sean $m \in CS \cap (x_0, \omega)$, $m_1 \in (x_0 m) \cap \text{front } S$ y más próximo a x_0 y $m_2 \in \text{front } S \cap (m \omega)$.

$m_1 \in st(x_0, S)$ y $m_2 \notin st(x_0, S)$.

Sea $\widehat{m_1 m_2}$ el arco de frontera, entre estos puntos. $\widehat{m_1 m_2} \cap st(x_0, S) = \widehat{m_1 m'_1}$ que está contenido estrictamente en $\widehat{m_1 m_2}$; m'_1 es entonces el último punto de este arco de frontera visto por x_0 . Obviamente x_0 no puede ver claramente a m'_1 . La contradicción provino de suponer que $st(x_0, S) \neq S$, luego $st(x_0, S) = S$ y por lo tanto $x_0 \in \text{mir } S$.

Lema 4.2.5.

Sea $G = \{\Gamma/\Gamma \text{ es una z.o visible desde } x_0\}$.

$\forall \Gamma \in G$ sean $st(x_0, S) \cap \Gamma = \widehat{a_\Gamma b_\Gamma}$ un arco de front S y $L(a_\Gamma)$ y $L(b_\Gamma)$ las tangentes a Γ en a_Γ y b_Γ respectivamente. Entonces $\text{front } R(x_0) \subset \bigcup_{\Gamma \in G} (L(a_\Gamma) \cup L(b_\Gamma) \cup \text{front } S)$

Demostración

Sean $\Gamma \in G$, $S(a_\Gamma)$ el semiespacio cerrado definido por la

tangente a Γ en a que no contiene a Γ y $S(b_\Gamma)$ el definido por la tangente a Γ en b en las mismas condiciones.

$$R(x_0) = \bigcap_{\Gamma \in G} (S(a_\Gamma) \cap S(b_\Gamma) \cap S)$$

luego

$$\begin{aligned} \text{front } R(x_0) &\subset \bigcup_{\Gamma \in G} (\text{front } S(a_\Gamma) \cup \text{front } S(b_\Gamma) \cup \text{front } S) \\ &\subset \bigcup_{\Gamma \in G} (L(a_\Gamma) \cup L(b_\Gamma) \cup \text{front } S) \end{aligned}$$

Definición 4.2.7.

Diremos que T es un *lado de* $R(x_0)$ si es un subconjunto conexo maximal contenido en $L(a_\Gamma) \cap R(x_0)$ para alguna $L(a_\Gamma)$ o bien contenido en $\text{front } S \cap R(x_0)$.

Definición 4.2.8.

Diremos que v es un *vértice de* $R(x_0)$ si es el extremo de un lado.

Definición 4.2.9.

V_1 y V_2 son *vértices adyacentes* de $R(x_0)$ si son extremos de un mismo lado.

Lema 4.2.6.

$R(x_0)$ tiene un número finito de lados.

Demostración

Los lados de $R(x_0)$ pueden ser segmentos de rectas críticas o de inflexión o arcos conexos de $\text{front } S$. Los segmentos son un número finito ya que provienen de intersecciones con rectas críticas o de inflexión, y de éstas hay un número finito por serlo las z_0 .

Los arcos conexos de front S deben ser finitos ya que están determinados por las intersecciones de la front S con uno o dos semiespacios determinados por las rectas críticas o de inflexión.

Estas intersecciones deben ser finitas ya que dichas rectas lo son.

Corolario 4.2.1.

$R(x_0)$ tiene un número finito de vértices.

4.3. Diversos tipos de óptimos

En el proceso de alcanzar un punto de visibilidad máxima a partir de un punto dado es necesario reconocer cuándo hemos alcanzado un óptimo, o sea cuándo cualquier otro movimiento permitido no mejora la visibilidad. Para ello definiremos tres tipos de óptimos; una vez reconocido cualquiera de ellos el proceso deberá detenerse.

Definición 4.3.1.

Diremos que x_0 es un *óptimo radiante* si toda z_0 visible desde x_0 es pasiva.

Veamos en el siguiente lema que estas condiciones indican que efectivamente estamos en presencia de un óptimo.

Lema 4.3.1.

Toda Γz_0 en S tal que $\Gamma \cap \text{st}(x_0, S) \neq \emptyset$ es pasiva para $x_0 \Leftrightarrow x_0 \in \text{mir } S$.

(\Rightarrow)

i) Si $t \in \text{st}(x_0, S) \cap \text{front } S$, x_0 emite rayos salientes por t .

Por la definición 4.2.3, toda $\Gamma z.0$ visible desde x_0 es totalmente visible ya que al ser pasiva x_0 emite rayos salientes por todos sus puntos; luego x_0 emite rayos salientes por todos los puntos de no convexidad local de su estrella.

Si $t \in \text{lc } S \cap \text{front } S \cap \text{st}(x_0, S)$ o bien si $t \in \text{flex } S \cap \text{st}(x_0, S)$, x_0 emite rayos salientes por t ya que por los teoremas 3.2.4 y 3.2.6, $\text{st}(t, S) = \text{ins}(t, S)$ para esos puntos.

ii) Bajo las condiciones de la hipótesis, $x_0 \in \text{lc } S$.

Si x_0 fuera un punto de no convexidad local, estaría en una $z.0$ visible, luego esta $z.0$ debería ser totalmente visible por hipótesis. Pero esto es absurdo por el teorema 3.2.5 que caracteriza la estrella de un punto de no convexidad local.

Si x_0 fuera un punto de inflexión no podría ver la $z.0$ de la que es extremo, por el teorema 3.2.4 que caracteriza la estrella de un punto de inflexión.

Luego $x_0 \in \text{lc } S$.

iii) Supongamos que $t \in \text{front } S$, $t \notin \text{st}(x_0, S)$.

Tomemos $\omega \in [x_0 t) \cap \text{front } S \cap \text{st}(x_0, S)$.

Sea $\overset{\frown}{t \omega}$ un arco de $\text{front } S$ entre ω y t y $\overset{\frown}{t' \omega}$ un arco conexo de $\text{front } S$ contenido en $\overset{\frown}{t \omega} \cap \text{st}(x_0, S)$.

Supongamos que en t' se unen dos arcos de $\text{front } S$ que

llamaremos Γ_1 y Γ_2 . Por i), $R(x_0 \rightarrow t')$ es saliente, luego si $L(x_0 t')$ separa el plano en dos semiespacios que llamaremos H^+ y H^- , y $R(x_0 \rightarrow t')$ separa localmente Γ_1 de Γ_2 , o sea existe un entorno de t' , $\epsilon(t')$ tal que $\Gamma_1' = \Gamma_1 \cap \epsilon(t') \subset H^+$ y $\Gamma_2' = \Gamma_2 \cap \epsilon(t') \subset H^-$. Esto es demostrado detalladamente en el próximo capítulo, lema 5.4.4. Dicha demostración es totalmente independiente del presente desarrollo. Algunos de estos arcos, Γ_1' o Γ_2' no es visto en su totalidad por x_0 . Supongamos que sea Γ_1' ; entonces en Γ_1' existe una sucesión $t_n \rightarrow t'$, $t_n \notin \text{st}(x_0, S) \quad \forall n$.

Sea $y_n \in [t_n, x_0] \cap \text{front } S \cap \text{st}(x_0, S)$

$$y_n \in H^+ \quad \forall n \quad \text{e} \quad y_n = \lambda_n x_0 + (1-\lambda_n)t_n \quad \lambda_n \in [0, 1]$$

Por la compacidad de $[0, 1]$, existe un λ y una subsucesión $\lambda_{n(i)}$ tal que $\lambda_{n(i)} \rightarrow \lambda$

Sea $y = \lim_{n(i) \rightarrow \infty} y_{n(i)}$. $y = \lambda x_0 + (1-\lambda)t' \quad \lambda \in [0, 1]$

y $\in \text{front } S \cap \text{st}(x_0, S)$ por ser ambas cerradas.

$y \neq t'$, de lo contrario la curva frontera no resultaría simple en t' ya que en ese punto se unirían Γ_1' , Γ_2' y otro pedazo de frontera distinto de Γ_1' por construcción y de Γ_2' por estar en otro semiespacio.

$y \neq x_0$

Si $y = x_0$ y T_{x_0} es la tangente a $\text{front } S$ en x_0 , como

$y_n \rightarrow x_0$, $L(y_n x_0) = L(y_n y) \xrightarrow{y_n \rightarrow y} T_{x_0}$ por definición

de la tangente a una curva en un punto.

Por otro lado, $L(x_0 t_n) = L(x_0 y_n)$, y como $L(x_0 t_n) \rightarrow L(x_0 t')$ resulta $L(x_0 t') = T_{x_0}$

Por ii), $x_0 \in \text{lc } S$.

Si x_0 fuera un punto chato, los y_n y por lo tanto los t_n deberían estar alineados con x_0 y con t' , lo que no puede ocurrir.

Si $x_0 \in \text{lc } S$ pero no es un punto chato, existe un arco de convexidad local que llamaremos W que lo contiene. T_{x_0} es una recta de apoyo de la cápsula convexa de W y por lo tanto la deja de lado; por esta razón x_0 no podría ver a t' . Debemos suponer entonces que $y \in (x_0 t')$.

Como $(x_0 t') \subset S$ pues $t' \in \text{st}(x_0, S)$, si $R(x_0 \rightarrow y)$ fuera un rayo saliente, al no poder penetrar en CS debería continuar se entre y y t' por un segmento de frontera. Si este segmento llegara efectivamente hasta t' , coincidiría en su parte final con Γ_2' ya que Γ_1' no era visible desde x_0 .

Supongamos entonces que este segmento coincide con Γ_2' en su parte final; es de notar que el segmento no puede continuar también desde y hacia x_0 ya que si y estuviera en el mismo contenido en el interior de un segmento llegarían a él los dos trozos de segmento contenidos en $L(x_0 t')$ y también la curva contenida en H^+ de cuyos puntos es límite, lo que contradiría la simplicidad de la frontera.

La frontera que continúa a partir de y en dirección opuesta a t' debe entonces quedar contenida en H^- ya que no puede atravesar ($y x_0$) pues $y \in \text{st}(x_0, S)$. El punto y resulta de todas maneras un punto múltiple; en él se unen un pedazo de

frontera que proviene de H^- , otro que proviene de H^+ y un segmento contenido en $L(x_0, t')$.

Entonces este trozo de frontera formado por un segmento a partir de y no puede continuarse hasta t' , luego existen $\omega' \in [y, t') \cap \text{front } S$ y $t'' \in (y, t')$ tales que $(\omega', t'') \subset \text{int } S$.
 $\omega' \in \text{front } S$ y x_0 no emite rayos salientes por él.

Esta contradicción proviene de suponer que $\exists t \in \text{front } S$,
 $t \notin \text{st}(x_0, S)$; luego $\text{front } S \subset \text{st}(x_0, S)$.

x_0 ve entonces todos los puntos de inflexión de S ;

$x_0 \in \text{st}(p, S) \forall p$ punto de inflexión.

Por el teorema 3.3.3 $x_0 \in \text{mir } S$.

(\Leftarrow)

Sea $x_0 \in \text{mir } S \Rightarrow$ toda $\Gamma z.0$ es trivialmente visible.

Es necesario probar que x_0 emite rayos salientes por todo punto de Γ .

Supongamos lo contrario, entonces $\exists y \in \Gamma z.0$ tal que $R(x_0 \rightarrow y)$ es entrante, luego $\exists \omega \in R(x_0 y \rightarrow)$ tal que $(y, \omega) \subset \text{int } S$.

Sea $y' \in (y, \omega)$. Por ser y' un punto interior existe un en torno de y' , que llamaremos $\epsilon(y')$, contenido en S .

x_0 no ve en su totalidad ningún entorno de y' contenido en $\epsilon(y')$, ya que de lo contrario x_0 vería claramente a y' y entonces $(x_0, y') \cap \text{front } S = \emptyset$, en contradicción con el hecho de que $y \in (x_0, y') \cap \text{front } S$.

Luego en todo entorno de y' contenido en S hay puntos que no están en la $\text{st}(x_0, S)$, por lo tanto $x_0 \notin \text{mir } S$.

Luego x_0 deberá emitir rayos salientes por todo punto de no convexidad local.

Definición 4.3.2.

Diremos que el punto x_0 es un *óptimo aislado* si $R(x_0) = \{x_0\}$ ■

El lema 4.2.2 demuestra que $R(x_0) = \text{vis}(x_0, S)$.

Por la definición de $\text{vis}(x_0, S)$, resulta trivialmente que si ésta coincide con el punto x_0 cualquier desplazamiento empeorará la visibilidad.

Definición 4.3.3.

Diremos que el punto x_0 es un *óptimo indiferente* si los desplazamientos hacia cada uno de los vértices adyacentes de la región factible no mejoran la visibilidad. Supondremos además que x_0 y sus vértices adyacentes no están alineados. ■

En este punto es necesario aclarar porque basta que los desplazamientos hacia los vértices adyacentes de la región factible no mejoren la visibilidad para asegurar que cualquier otro desplazamiento dentro de la región factible tampoco la mejorará.

Para ello necesitamos un lema que asegura que dados tres puntos no alineados x_0 , x_1 y x_2 con la condición de que $\text{st}(x_0, S) = \text{st}(x_1, S) = \text{st}(x_2, S)$, los puntos pertenecientes a los segmentos de frontera del triángulo del cual ellos son vértices también tienen la misma estrella.

Basta entonces considerar el triángulo formado por x_0 y sus vértices adyacentes x_1 y x_2 ; si $\text{st}(x_0, S) = \text{st}(x_1, S) = \text{st}(x_2, S)$, entonces $\omega \in [x_1, x_2]$ implica $\text{st}(\omega, S) = \text{st}(x_1, S) = \text{st}(x_2, S)$. Considerando ahora un desplazamiento sobre el

segmento $[x_0 \omega]$ se ve, aplicando el lema ahora al triángulo A de vértices x_0 , ω y x_1 que si $t \in (x_0 \omega)$, $st(t, S) = st(x_0, S)$.

Queda entonces probado que la condición de óptimo indiferente es suficiente para que cualquier movimiento dentro de $conv(x_0 x_1 x_2)$ no mejore la estrella.

Veamos ahora que no puede existir un $y \in R(x_0)$ tal que $st(y, S)$ incluya estrictamente a $st(x_0, S)$. Para esto necesitamos otro lema que asegure que si $st(y, S)$ incluye estrictamente a $st(x_0, S)$ e $y' \in (y x_0) \cap \text{int } S$, entonces $st(y', S)$ incluye estrictamente a $st(x_0, S)$.

En efecto, si dicho punto y existiera, podríamos encontrar un $y' \in conv(x_0 x_1 x_2) \cap \text{int } S$ tal que $st(y', S)$ incluyera estrictamente a $st(x_0, S)$ contra lo visto en el párrafo anterior.

Veamos ahora la demostración de los dos lemas anteriormente citados.

Lema 4.3.2.

$st(x_1, S)$ incluye estrictamente a $st(x_0, S)$, $t \in (x_1, x_0) \cap \text{int } S \Rightarrow st(t, S)$ incluye estrictamente a $st(x_0, S)$.

Demostración

Como $st(x_1, S)$ incluye estrictamente a $st(x_0, S)$, $\exists p \in st(x_1, S)$, $p \notin st(x_0, S)$.

Sea p_0 el último punto de $(x_1 p)$ visto desde x_0 .

Obviamente si $t \in (x_1 x_0)$, $p_0 \in st(t, S)$ ya que $t \in \text{vis}(x_0, S)$ por ser ésta convexa.

Consideremos dos casos:

i) $x_1 \neq p_0$

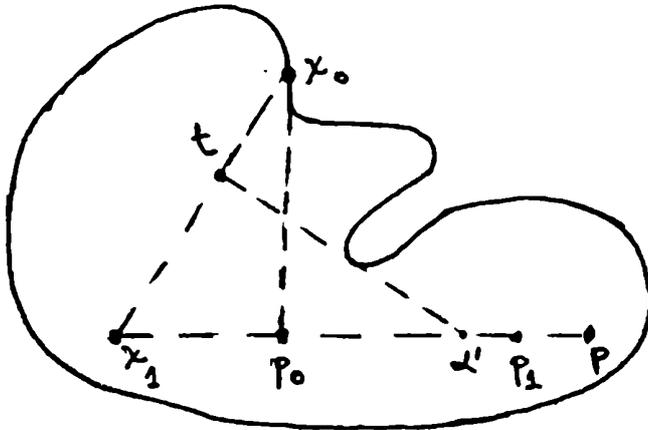


FIG. 4.3.1.

Como $t \in \text{vis}(x_0, S)$, t ve íntegramente los segmentos $[x_1, p_0]$ y $[x_0, p_0]$. Entonces $(t \cap p_0) \cap \text{Int } S = \emptyset$; de lo contrario $\text{Int conv}(x_1, x_0, p) \cap \text{Int } S \neq \emptyset$ lo que contradiría la afirmación anterior.

Notar que $(t \cap p_0) \subset \text{Int conv}(x_1, x_0, p)$ pues esa cápsula convexa es un simplex y $(t \cap p_0)$ no forma parte de ninguna de sus caras.

Sea $p_1 \in (p_0, p)$. Si $p_1 \in \text{st}(t, S)$, como $p_1 \notin \text{st}(x_0, S)$ resulta $\text{st}(t, S)$ incluye estrictamente a $\text{st}(x_0, S)$.

Si $p_1 \notin \text{st}(t, S)$, $\text{Int conv}(t \cap p_0, p_1) \cap \text{Int } S \neq \emptyset$ por el lema 2.2.4. Luego $\text{Int conv}(t \cap p_0, p_1)$ tiene intersección no vacía con un número finito de z.o que llamaremos $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$.

Sean T_1, \dots, T_{2n} las tangentes a las z.o Γ_i desde t

$$T_i \cap (p_0, p_1) = \begin{cases} \emptyset \\ \alpha_i \end{cases}$$

Sea $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ con $\alpha_i \in (p_0, p_1)$ $i = 1, \dots, k$.

Si $B = \emptyset$ no habría para t visibilidad crítica en (p_0, p_1) y tendríamos la tesis.

Como de todas formas hay un número finito de z.o en S ,

B será un conjunto finito.

Sea $\alpha' \in B$, $d(\alpha', p_0) < d(\alpha_i, p_0) \forall \alpha_i \in B$.

Resulta $\alpha' \neq p_0$ pues $(t p_0) \cap \text{Int } S = \emptyset$

Como $\text{Int conv}(t p_0 \alpha') \cap \text{Int } S = \emptyset$ tenemos $(p \alpha')$

$\subset \text{st}(t, S)$, luego $\text{st}(t, S)$ incluye estrictamente a $\text{st}(x_0, S)$.

ii) $x_1 = p_0$

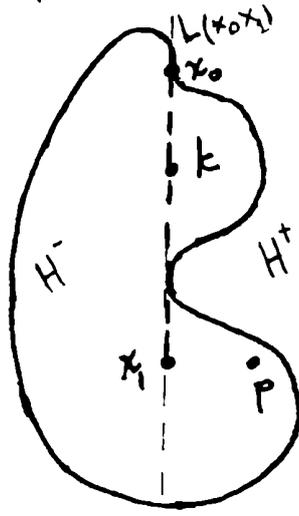


FIG. 4.3.2.

En este caso, $x_1 \in \text{cv}(x_0, S)$
 Veamos que $t \in \text{cv}(x_0, S)$ y tendremos la tesis puesto que al ser $t \in \text{Int } S$, $\exists U(t)$ entorno de t , $U(t) \subset \text{Int } S \cap \text{st}(t, S)$.
 Si $t \in \text{cv}(x_0, S)$, ningún entorno de t está contenido en $\text{st}(x_0, S)$ y por lo tanto $\text{st}(t, S)$ incluye estrictamente a $\text{st}(x_0, S)$.

$L(x_0, x_1)$ separa el plano en dos

semiplanos que llamaremos H^+ y H^- . Como $\text{st}(x_1, S)$ incluye estrictamente a $\text{st}(x_0, S)$, $\exists p \in \text{st}(x_1, S)$, $p \notin \text{st}(x_0, S)$.
 Supongamos que $p \in H^+$ y consideremos el segmento $[x_1, p]$. Sabemos que $[x_1, p] \cap \text{st}(x_0, S) = \{x_1\}$ luego $\exists x'_n \in (x_1, p)$, $x'_n \rightarrow x_1$ y $x'_n \notin \text{st}(x_0, S) \forall n$.

Sea $y_n \in (x_0, x'_n) \cap \text{front } S \cap \text{st}(x'_n, S)$.

$y_n = \lambda_n x'_n + (1 - \lambda_n)x_0$, $\lambda_n \in [0, 1]$.

Obviamente $y_n \in H^+ \forall n$ e $y_n \notin \text{st}(x_0, S)$ de lo contrario x_0 vería a x'_n por estar alineados x_0, x'_n e y_n .

Por la compacidad del segmento $[0, 1]$, existe una subsucesión $\lambda_{n_i} \rightarrow \lambda$ con $\lambda \in [0, 1]$, luego existe una subsucesión

$y_{n_i} \rightarrow y$ donde $y = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_0$, $\lambda \in [0,1]$ e $y \in \text{front } S$ por ser ésta cerrada.

Si $y \in (x_0 x_1)$, como $(x_0 x_1) \subset S$ y la frontera no puede atravesarlo resulta $L(x_0 x_1) = T_y$ donde T_y es la tangente a $\text{front } S$ en el punto y , y además y un punto de no convexidad local.

Si $y \in (x_0 t)$, $t \in \text{cv}(x_0, S)$ y tenemos la tesis.

Si $y \in (t x_1)$, $t \in \text{cv}(x_1, S)$ luego x_1 no ve claramente a t ; con más razón, dada la hipótesis de que $\text{st}(x_1, S) \supset \text{st}(x_0, S)$, x_0 no ve claramente a t .

Si $y = x_0$, $L(x_0 y_n) \rightarrow T_{x_0}$ cuando $y_n \rightarrow x_0$, siendo T_{x_0} la tangente a $\text{front } S$ en x_0 , luego t está sobre T_{x_0} por lo que x_0 ve críticamente a t y tenemos la tesis.

$y \neq x_1$, de lo contrario al estar los y_n contenidos en $\text{conv}(x_1 p x_0)$ resultaría que esta frontera atravesaría $[x_1 p]$ en x_1 con lo cual p no pertenecería a $\text{st}(x_1, S)$ contra lo supuesto.

Por todo lo anterior resulta $\text{st}(t, S)$ incluye estrictamente $\text{st}(x_0, S)$.

Nota 4.3.1.

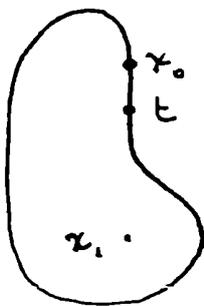


FIG. 4.3.3.

La figura 4.3.3. muestra la necesidad de que $t \in \text{int } S$.

En este caso $t \in (x_0 x_1)$, $\text{st}(x_1, S)$ incluye estrictamente a $\text{st}(x_0, S)$ pero $\text{st}(t, S) = \text{st}(x_0, S)$.

Lema 4.3.2.

Sean x_1, x_2 y $x_3 \in S$ no alineados; $st(x_1, S) = st(x_2, S) = st(x_3, S)$. Entonces si $t \in (x_1, x_2)$, $st(t, S) = st(x_1, S) = st(x_2, S)$.

Demostración

Como $st(x_1, S) = st(x_2, S) = st(x_3, S)$ resulta $[x_3, x_1] \subset st(x_2, S)$, $[x_1, x_2] \subset st(x_3, S)$, $[x_2, x_3] \subset st(x_1, S)$. Por el lema 2.2.4 $int\ conv(x_1, x_2, x_3) \cap lnc\ S = \emptyset$.

Supongamos primero que $t \in int\ S$. Entonces

i) x_1, x_2 y x_3 ven claramente a t .

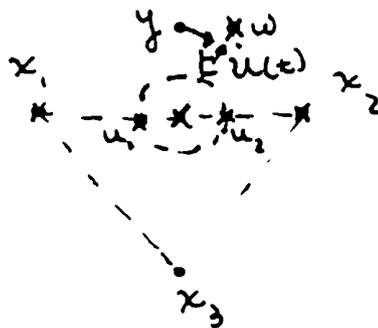


FIG. 4.3.4.

Sea $t \in (x_1, x_2) \cap int\ S$;

$t \in lc\ S$.

$\exists U(t)$ entorno de t ,

$U(t) \subset int\ S$. Sea $U'(t) \subset U(t)$

con la condición

$U'(t) \cap (x_1, x_2) = (u_1, u_2)$;

$(u_1, u_2) \subset st(x_3, S)$, luego

$U'(t) \subset st(x_3, S)$ ya que de lo contrario existiría en $U'(t)$

un punto u_3 no visto desde x_3 y entonces (u_3, x_3)

$\cap front\ S \neq \emptyset$ contra lo supuesto.

x_3 ve claramente a t , luego x_1, x_2 y x_3 ven claramente a t .

ii) x_1, x_2 y $x_3 \in lc\ S$.

Supongamos $x_1 \in lnc\ S$; \exists entonces Γ_1 z.0 de S tal que

$x_1 \in \Gamma_1$. Sea T_{x_1} la tangente a Γ_1 en x_1 . T_{x_1} divide el plano en dos semiplanos que llamaremos H^+ y H^- .

Por el teorema 3.2.5 que caracteriza la estrella de un punto de no convexidad local, x_1 , x_2 y x_3 deben estar en un mismo semiespacio, supongamos H^+ .

Como los tres puntos no están alineados supongamos que por lo menos $x_2 \notin T_{x_1}$; entonces por el mismo teorema recién citado, $x_2 \in \text{ins}(x_1, S)$.

Sea $t \in (x_1 x_2) \cap \text{int } S$. x_1 ve claramente a t y $t \in \text{ins}(x_1, S)$ pues $x_2 \in \text{ins}(x_1, S)$ y éste es un fan. Por el lema 4.2.3, t ve claramente a x_1 . Como x_2 ve claramente a t , tomando un entorno más chico podemos probar que x_2 ve claramente a x_1 . Pero esto es absurdo pues x_1 no se ve claramente por ser un punto de lnc S .

Luego $x_1 \in \text{lc } S$.

La misma demostración se aplica para x_2 .

Supongamos ahora que $x_3 \in \text{lnc } S$. Si probamos que $(x_1 x_3) \cap \text{int } S \neq \emptyset$ o bien $(x_2 x_3) \cap \text{int } S \neq \emptyset$, un punto interior t' en alguno de estos segmentos basta para aplicar el razonamiento anterior y asegurar que $x_3 \notin \text{lnc } S$.

Si $x_3 \in \text{lnc } S$, $\exists \Gamma_3$ z.o tal que $x_3 \in \Gamma_3$. Sea T_{x_3} la tangente a Γ_3 en x_3 que divide el plano en H^+ y H^- y supongamos x_1, x_2 y $x_3 \in H^+$. Como los tres puntos no están alineados supongamos $x_1 \notin T_{x_3}$.

Si $[x_1 x_3] \subset \text{front } S$, como $[x_1 x_3) \subset \text{int } H^+$ y $\Gamma_3 \subset H^-$ resulta que en x_3 convergen por lo menos tres arcos distintos de $\text{front } S$ contra la hipótesis de simplicidad de esta curva frontera.

Luego $x_3 \in \text{lc } S$.

iii) Supongamos ahora que existe $\omega \in \text{st}(t, S)$, $\omega \notin \text{st}(x_i, S)$

$i = 1, 2, 3$

Sea $[t y] = [t \omega] \cap \text{st}(x_i, S)$ $i = 1, 2, 3$.

$y \neq t$ pues los x_i ven claramente a t .

Veamos que x_3 ve claramente a y .

Probemos primero que $y \in \text{int } S$.

En efecto, tanto ω como x_1 , x_2 y x_3 pertenecen a $\text{st}(y, S)$.

Consideremos $K = \text{conv}(x_1, x_2, x_3, \omega)$.

$y \in \text{int } K$ por ser combinación convexa entre t que es un punto interior a K y ω que es un punto frontera de K (es el bien conocido lema topológico). Si y perteneciera a $\text{front } S$, $T(y)$ su tangente debería atravesar alguno de los lados de K con la consiguiente pérdida de visibilidad para y de alguno de sus vértices.

Luego $y \in \text{int } S$. $\therefore y \in \text{lc } S$.

Este hecho, unido a que por el lema 2.2.4 es

$\text{int conv}(x_1, x_2, x_3, y) \cap \text{lnc } S = \emptyset$ y por lo tanto

$(x_3, y) \cap \text{lnc } S = \emptyset$ y que por ii) $x_3 \in \text{lc } S$ permiten aplicar el teorema 2.4.3 y asegurar que x_3 ve claramente a y ,

lo que contradice el hecho de que y fuera el último punto visto por los x_i sobre $[t \omega]$. La contradicción proviene de

suponer que existía $\omega \in \text{st}(t, S)$, $\omega \notin \text{st}(x_i, S)$ $i = 1, 2, 3$,

luego $\text{st}(t, S) \subset \text{st}(x_i, S)$ $i = 1, 2, 3$

Ahora bien, $x_1 \in \text{vis}(x_1, S)$, $x_2 \in \text{vis}(x_1, S)$.

Por ser $\text{vis}(x_1, S)$ convexa resulta $t \in \text{vis}(x_1, S)$ y por lo tanto $\text{st}(t, S) \supset \text{st}(x_1, S)$.

De ambas inclusiones se obtiene

$$\text{st}(t, S) = \text{st}(x_i, S) \quad i = 1, 2, 3$$

Supongamos ahora que $t \in \text{front } S$. $t \notin \text{lc } S \cap \text{inc } S$

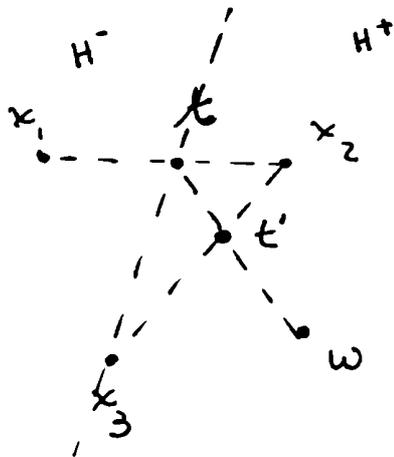


FIG. 4.3.5.

puesto que $\text{conv}(x_1, x_2, x_3) \subset S$;
 $t \notin \text{inc } S \cap \text{lc } CS$ porque en
 caso contrario en $(x_1 t)$ habría
 puntos interiores que serían
 vistos claramente por x_3 pero
 no por x_2 ; $t \notin \text{inc } S \cap \text{inc } CS$
 o sea $t \notin \text{flex } S$ ya que si lo
 fuera dejaría de ver a x_1 o bien
 a x_2 .

Luego t es un punto chato y $[x_1 x_2] \subset \text{front } S$.

Supongamos ahora existe $\omega \in \text{st}(t, S)$, $\omega \notin \text{st}(x_i, S)$

$i = 1, 2, 3$; ω pertenece al mismo semiespacio que x_3 respecto de $L(x_1 x_2)$.

Por otra parte $L(t x_3)$ divide al plano en dos semiespacios que llamaremos H^+ y H^- .

$\omega \notin L(t x_3)$ sino ω sería visto por x_3 .

Sean, sin pérdida de generalidad, $\omega \in H^+$ y $x_2 \in H^+$

$\omega \notin \text{conv}(x_1, x_2, x_3)$, de lo contrario sería visto por estos tres puntos.

Sea $t' = (t \omega) \cap (x_3 x_2)$.

$\omega \in \text{st}(t', S)$

$t' \notin \text{front } S$ sino resultaría un punto chato entre x_2 y x_3 ; luego $t' \in \text{int } S$ y estamos en las condiciones de la primera parte del lema.

Nota 4.3.2.

Es necesario que exista un tercer punto x_3 no alineado con x_1 y x_2 y con la misma estrella que estos últimos, como lo muestra la siguiente figura.

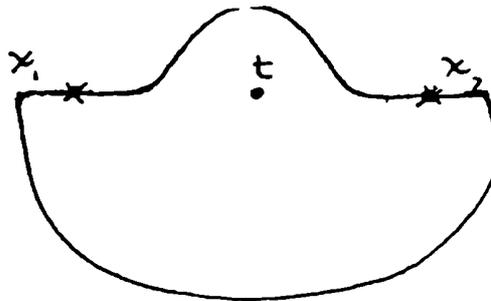


FIG. 4.3.5.

En este caso $t \in (x_1, x_2) \nrightarrow st(t, S) = st(x_1, S) = st(x_2, S)$.

4.4. Descripción del algoritmo4.4.1. Formulación del diagrama de flujo del algoritmo

A partir de un punto $x_0 \in S$, debemos buscar en qué dirección desplazarnos para alcanzar un punto de mayor visibilidad, y continuar los desplazamientos hasta alcanzar alguno de los tres tipos de óptimo descritos en 4.3. El lema 4.2.2 indica que el primer paso a realizar será el cálculo de $R(x_0)$. Una vez hecho esto podemos preguntarnos si $x_0 \in \text{int } R(x_0)$. Si la respuesta es afirmativa, el lema 4.2.4 asegura que $x_0 \in \text{mir } S$ con lo cual ya tenemos un óptimo y el proceso termina allí. Si la respuesta es negativa nos preguntaremos entonces si $R(x_0) = \{x_0\}$. Una respuesta afirmativa a esta nueva pregunta asegurará que x_0 es un óptimo aislado (def. 4.3.2);

caso contrario es necesario analizar los vértices adyacentes (def. 4.2.9) que llamaremos x_1 y x_2 . Pasemos entonces a x_1 por ejemplo y preguntemos si $st(x_1, S) \supsetneq st(x_0, S)$. Si esto es así un movimiento hacia x_1 mejorará la visibilidad y comenzaremos entonces el mismo proceso a partir de x_1 . En caso negativo debemos analizar el otro vértice adyacente x_2 . Si $st(x_2, S)$ contiene estrictamente a $st(x_0, S)$ recomenzaremos a partir de x_2 , caso contrario, si x_0 , x_1 y x_2 no están alineados estaremos en presencia de un óptimo indiferente (lema 4.3.3) y terminaremos allí.

La fig. 4.4.1 muestra que es necesario un estudio especial en el caso en que los puntos estén alineados, ya que el algoritmo hasta este punto no detectaría t de mayor visibilidad que x_0 . Si $R(x_0)$ tiene algún otro vértice x_3 deberemos pasar a él y comparar su estrella con las de x_1 y x_2 . Si las tres coinciden, aplicando el lema 4.3.3 estamos en presencia de un óptimo indiferente. Caso contrario continuaremos el algoritmo a partir de x_3 .

Si $R(x_0)$ no tuviera otro vértice distinto de x_1 y x_2 , tomaremos $x_3 \in \text{front } R(x_0)$ no alineado con los anteriores y resolveremos como en el párrafo precedente.

FIG. 4.3.5.

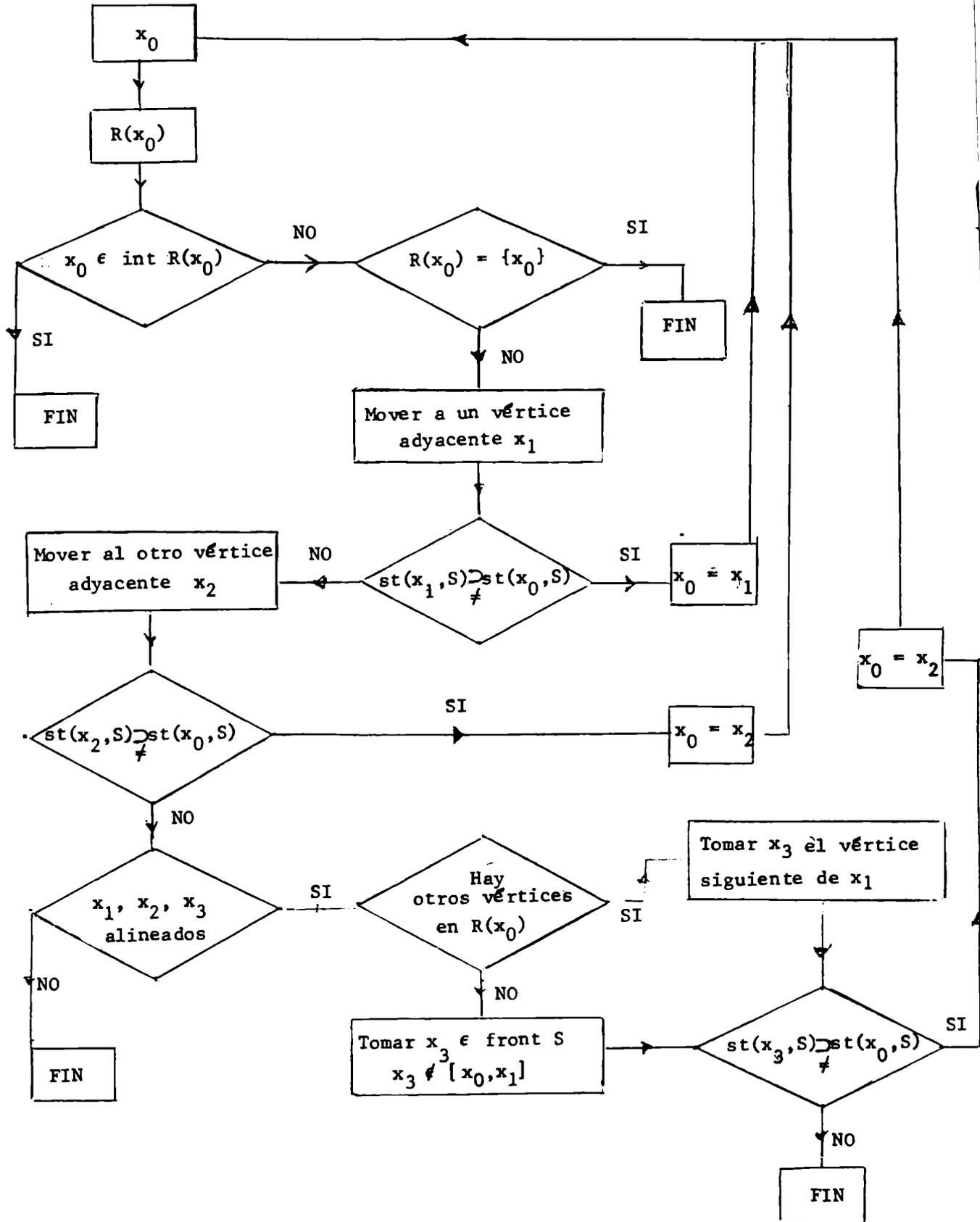


FIG. 4.3.5.

4.4.2. Factibilidad del algoritmo

Notemos que cada paso del algoritmo descrito en 4.4.1 es posible ya que hemos visto que la construcción de la región factible $R(x_0)$ puede realizarse con solamente el conocimiento de $st(x_0, S)$, que $R(x_0)$ tiene un número finito de lados y de vértices (Lema 4.2.6 y Corolario 4.2.1) y que los vértices adyacentes a uno dado están bien definidos en cada caso.

4.4.3. Finitud del algoritmo

Lema 4.4.1.

El número de rectas de inflexión que interviene en la formación de los lados de una región factible $R(x_0)$ es finito.

Demostración

Resulta de que el número de puntos de inflexión es finito.

Lema 4.4.2.

El número de lados curvos de una región factible $R(x_0)$ es finito.

Demostración

Estos lados curvos están limitados por rectas críticas o de inflexión. Puede provenir a lo sumo uno de cada arco de convexidad de la frontera (dos arcos están separados sólo si en el medio hay una z_0), y éstos son finitos ya que lo son los puntos de inflexión. ■

Diremos que el algoritmo *desactiva parcialmente* una $z_0 \in \Gamma$ si al pasar al nuevo punto éste ve un punto de

inflexión que antes era invisible.

Lema 4.4.3.

Cada dos pasos, siempre que alguno de ellos no sea el último el algoritmo elimina una recta de inflexión o un lado curvo o bien desactiva parcialmente una z.0.

Demostración

Sea $x_0 \in S$. Consideremos $R(x_0)$ y supongamos x_1 y x_2 los vértices adyacentes a x_0 en $R(x_0)$ no alineados con x_0 . Los lados $[x_0 x_1]$ y $[x_0 x_2]$ pueden pertenecer o no a rectas críticas. Si alguno de ellos, o am bos pertenecieran, serían los únicos lados en esas condiciones ya que cada región factible puede tener a lo sumo dos lados provenientes de rectas críticas dado que todas éstas pasan por x_0 . Luego todos los otros lados de $R(x_0)$ formarían parte de rectas de inflexión o bien serán arcos de frontera.

Supongamos $st(x_1, S) \not\supseteq st(x_0, S)$ y elijamos x_1 como punto siguiente en el algoritmo. Por x_1 pasa una rec ta de inflexión o bien un arco de frontera que también forman parte de la frontera de $R(x_0)$.

Calculemos $R(x_1)$. Otra vez $R(x_1)$ tiene a lo sumo dos rectas críticas que se unen en x_1 . Pueden ocurrir las siguientes alternativas.

- i) En $R(x_1)$ no aparece como lado el segmento contenido en la recta de inflexión o bien el arco de cur va que pasabañ por x_1 en $R(x_0)$. Quedan entonces eli mi na dos de $R(x_1)$ y por lo tanto de todas las regiones factibles siguientes.

ii) Un segmento contenido en la recta de inflexión antes nombrada o bien un lado contenido en el lado curvo son también lado de $R(x_1)$.

Sea x'_1 el vértice adyacente correspondiente a este lado. Si x'_1 no era el vértice en $R(x_0)$ proviene de la intersección con un lado de inflexión lo que implica que x_1 desactivó parcialmente una z.0, o sea vio un punto de inflexión no visto por x_0 .

Si x'_1 era también el vértice en $R(x_0)$ y x'_2 es el otro vértice adyacente a x_1 en $R(x_1)$,

supongamos x'_1 , x_1 y x_2 no alineados.

Si $st(x_1, S) = st(x'_1, S) = st(x'_2, S)$ estamos en presencia de un óptimo.

Si $st(x_1, S) = st(x'_1, S)$ pero $st(x'_2, S) \neq st(x_1, S)$ deberemos recorrer $[x_1 \ x'_2]$. Es obvio que como x_1 y x'_1 tienen menor visibilidad que x'_2 estos puntos no pertenecerán a $R(x'_2)$. Si todo el lado de extremos a x_1 y x'_1 no pertenece a $R(x'_2)$ habremos eliminado un lado de inflexión o un lado curvo. Si este lado no es eliminado, el lado de extremos $[x_1 \ x'_2]$ debe ser parte de una recta de inflexión o un lado curvo ya que si esta recta fuera crítica deberían estar x_1 , x'_1 y x'_2 alineados por tener x_1 y x'_1 la misma estrella. La recta de inflexión que pasa por x_1 y x'_2 se pierde en este paso.

Si $st(x'_1, S) \supsetneq st(x_1, S)$, consideremos $R(x'_1)$.

Si el lado que contiene a x_1 y x'_1 aparece como lado

de $R(x_1')$ nuevamente, y $x_1'' \in (x_1, x_1')$ y el nuevo lado será $[x_1'' x_1']$. x_1'' proviene de una recta de inflexión dada por un punto de inflexión visto por x_1' pero no por x_1 , luego se desactivó parcialmente una z.0.

Consideremos ahora $R(x_0)$ y los vértices adyacentes x_1 y x_2 alineados con x_0 . Si $st(x_0, S) = st(x_1, S) = st(x_2, S)$ o bien estamos en presencia de un óptimo o bien el algoritmo descartará el lado al que pertenecen los tres puntos continuando por otro punto de mayor estrella.

Si alguno de los vértices adyacentes tiene estrella mayor que el otro, el algoritmo continuará a partir de este vértice descartando los otros dos y tampoco variará a partir de este punto la demostración del lema.

Nota

Llamaremos *progreso* en el desarrollo del algoritmo alguna de estas 3 alternativas.

- i) Descartar definitivamente una recta de inflexión a un lado curvo.
- ii) Ver un punto de inflexión hasta entonces invisible.
- iii) Llegar al óptimo.

De acuerdo al lema anterior, como máximo en dos pasos del algoritmo se produce por lo menos un progreso.

5. LA FUNCION DE VISIBILIDAD

5.1. Resultados de G.Beer

Partamos de una definici3n de G.Beer [1].

Definici3n 5.1.1.

La funci3n de visibilidad asigna a cada punto de un conjunto medible S de un espacio eucl3deo E^n , la medida exterior de Lebesgue de $st(x,S)$.

Notaremos en adelante a la funci3n de visibilidad como $v(x)$. Tambi3n en [1], entre otros resultados, G. Beer obtiene los siguientes, de los cuales omitir3 las demostraciones.

Teorema 5.1.1.

Si $O \subset E^n$ es abierto, entonces v es semicontinua inferiormente en O .

Teorema 5.1.2.

Sea $K \subset E^n$, K compacto, entonces v es semicontinua superiormente en K .

Ejemplo 5.1.1.

La condici3n de compacidad de K es esencial en el teorema 5.1.2.

Beer muestra que si tomamos el siguiente conjunto

$$E = (0,1) \cup cl \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv} \left(\left(\frac{1}{n}, 1 \right) \cup \{ (r,0), r \geq n \} \right) \right)$$

que es evidentemente cerrado, resulta

$$v(0,1) = 0 \quad \text{y} \quad v\left(\frac{1}{n}, 1\right) = \dots \quad \forall n$$

Corolario 5.1.1.

La función de visibilidad en un compacto alcanza su máximo.

Teorema 5.1.3.

Sea $E \subset E_n$, E compacto. Si $x \in E$, el conjunto de los puntos finales de todos los segmentos en $st(x, E)$ con un extremo en x es medible y tiene medida nula. *

En [2], G. Beer obtiene resultados acerca de v para conjuntos estrellados.

Teorema 5.1.4.

Sea $E \subset E_n$, E compacto y estrellado con $\text{int } E \neq \emptyset$. Supongamos $\dim(\text{mir } E) \geq n-1$. Entonces v es continua en $\text{int } E$.

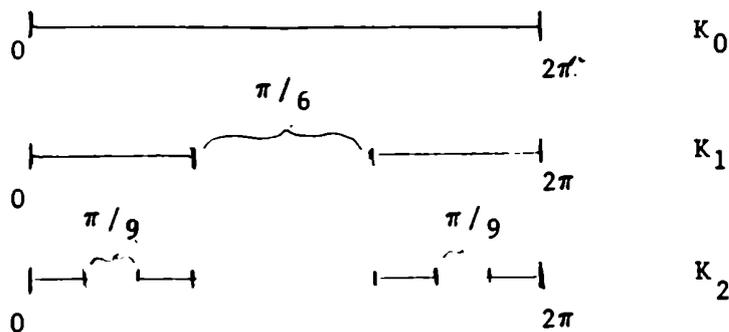
Nota 5.1.1.

La función de visibilidad puede ser discontinua en el interior de un compacto estrellado de E_n si la dimensión del mirador no supera $n-2$.

Para proveer un contraejemplo, G. Beer construye en el intervalo $[0, 2\pi]$ un conjunto de Cantor de medida no nula, de la siguiente forma:

$$K_n = [0, 2\pi] \sim \cup 0_n$$

donde los 0_n son 2^{n-1} intervalos abiertos centrales de longitud $\frac{2\pi}{2 \cdot 3^n}$



Es evidente que, si $K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$

$$m(\text{CK}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i \cdot 2\pi}{2 \cdot 3^{i+1}} = \frac{\pi}{3} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{\pi}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \pi.$$

por lo tanto $m(K) = \pi$.

Ejemplo 5.1.2.

Aquí se muestra un conjunto compacto y estrellado en E^2 en cuyo interior v no resulta continua; (evidentemente por ser compacto v va a resultar semicontinua superiormente, pero no así semicontinua inferiormente). Sea K el conjunto de Cantor de medida no nula construído en la nota 5.1.1.

$$E = \{(r, \varphi), r \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi]\} \cup \{(r, \varphi): 1 < r \leq 2, \varphi \in K\}$$

E es evidentemente estrellado, mir $E = \{(0,0)\}$ y v no resulta semicontinua inferiormente en $(0,0)$ ya que este punto resulta ser el único que ve el conjunto $\{(r, \varphi): 1 < r \leq 2, \varphi \in K\}$ que tiene medida no nula.

Nota 5.1.2.

Si $E \subset E^n$ es compacto y $\dim(\text{min } E) \geq n-2$ resulta que $\text{front } E$ tiene medida nula. Se podría suponer lo siguiente:

Si $E \subset E_n$ es compacto y su frontera tiene medida nula, entonces v es continua en $\text{int } E$.

Veremos más adelante que esta conjetura es falsa. (ejemplo 5.1.4.).

Teorema 5.1.5.

Sea O un conjunto acotado, abierto y estrellado de E_2 . Entonces v es continua en $\text{int } O$. ■

En [3] G. Beer trata acerca de las propiedades de continuidad de la función de visibilidad y da algunos contraejemplos interesantes.

Teorema 5.1.6. (Dini)

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones semicontinuas superiormente y no negativas definidas en un conjunto $K \subset E_n$, K compacto. Supongamos que para cada $x \in K$, la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge monótonamente a 0. Entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función 0 en K .

Teorema 5.1.7.

Sea K compacto en R^n y para cada $m \in Z^+$, sea v_m la función de visibilidad del $\frac{1}{m}$ -paralelo de K . Entonces v es continua en K si y sólo si $\{v_m/K\}$ converge uniformemente a v .

Definición 5.1.1.

$S \subset E^2$ es una región *simplemente conexa* si $\forall \Gamma$ curva de Jordan en S , la región interior a Γ es también un subconjunto de S .

Teorema 5.1.8.

Sea K un compacto en R^2 cuyas componentes sean simplemente conexas y cuya frontera sea localmente conexa. Entonces v es continua en $\text{int}(K)$.

Ejemplo 5.1.3.

Tanto en este ejemplo como en el siguiente se usa el conjunto de Cantor de medida no nula construido en la nota 5.1.1.

Representando los puntos del plano en coordenadas polares, sea

$$E_0 = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq 1\} \cup \{(r, \theta) : 1 < r \leq 2, \theta \in$$

Notar que $A = \{(r, \theta) : 1 < r \leq 2, \theta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\}$ es un conjunto nunca denso, luego la frontera de E_0 no puede ser localmente conexa; $\text{St}((r, \theta), E_0)$, si $r \leq 1$ consiste en el disco unitario más a lo sumo dos segmentos del conjunto A ; E_0 es estrellado y $\text{mir}(E_0) = (0, 0)$. La función de visibilidad resulta discontinua en $(0, 0)$ que es un punto interior

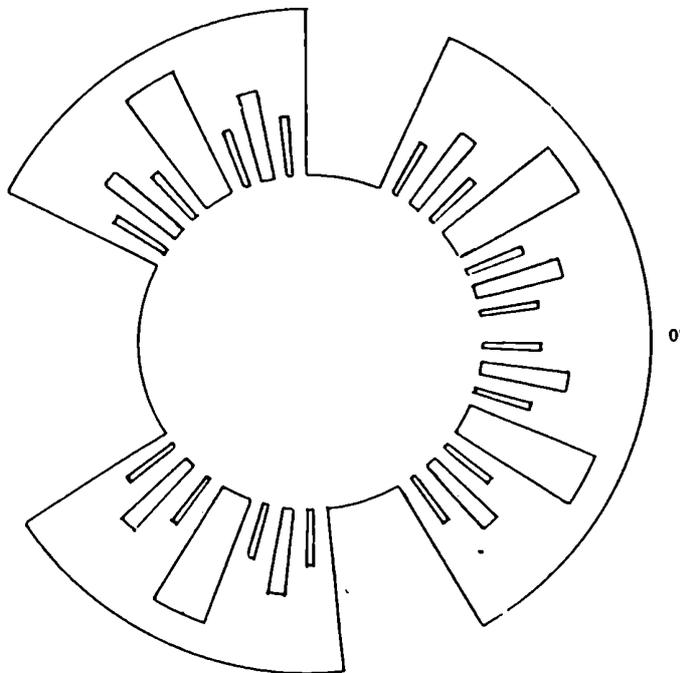
Ejemplo 5.1.4.

Sea ρ_n las tres medias partes de la longitud de uno de los intervalos cerrados que forman el conjunto K_n . Obviamente $\rho_n \rightarrow 0$.

Sean

$$O'_n = \{(r, \theta) : \theta \in O_n, 1 < r < 1 + \sqrt{\rho_n}\}$$

$$E = \{(r, \theta) : r \leq 2\} \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} O'_n$$



E no es simplemente conexo, tiene una frontera localmente conexa. La función de visibilidad no resulta continua en $(0,0)$. Para ésto basta probar que si $(r_1, \theta_1) \neq (0,0)$ y (r_2, θ_2) , $r_2 > 1$ no es colineal con (r_1, θ_1) y con $(0,0)$, entonces (r_1, θ_1) no ve a (r_2, θ_2) .

Teorema 5.1.9.

Sea $E \subset \mathbb{R}^2$, E abierto y acotado, con CE localmente conexo. Entonces v es continua en E.

5.2. Continuidad en la frontera

Introducción:

Los teoremas (5.1.4), (5.1.5), (5.1.8), (5.1.9) anteriormente

citados muestran que todos los resultados obtenidos por G. Beer apuntan al estudio de la continuidad de la función de visibilidad en conjuntos abiertos o bien en el interior de los conjuntos estudiados. Surgió entonces la pregunta acerca de qué comportamiento podría esperarse de esta función en la frontera de ellos.

Pedimos como primera condición que el conjunto a estudiar fuera un *dominio de Jordan* (§ 2.1). Esto iba a impedir situaciones como las presentadas en los ejemplos (5.1.2), (5.1.3) y (5.1.4).

Por otro lado, los dominios de Jordan tienen la propiedad de ser clausura de su interior; por los teoremas (5.1.1) y (5.1.2) anteriormente citados, la función de visibilidad resultará continua en el interior de ellos. Fue necesario pedir además que la curva frontera tuviera un número finito de puntos de inflexión en el caso suave (§ 2.1), o de puntos angulosos, (puntos de discontinuidad de la derivada primera) en el caso no suave, ya que un número infinito de cualquiera de ellos, por ser la curva compacta, haría aparecer puntos de acumulación llamados "*puntos singulares*", haciendo inmanejable el estudio de sus estrellas. En un primer momento se pensó que para el caso suave bastaba pedir a la curva que tuviera grado finito (es decir que cualquier recta la cortara en a lo sumo un número finito de puntos), pero esto no era suficiente como lo muestran curvas del tipo $x^{2n} \sin \frac{2}{x} + x^{2n}$ ($n > 2$), que

son continuas en el origen, con derivadas primera y segunda continuas en todo su dominio. Estas curvas tienen grado finito y sin embargo el origen es un punto de acumulación de puntos de inflexión.

Por todo esto, de ahora en adelante S será un dominio de Jordan regular, es decir un dominio de Jordan cuya frontera carece de puntos singulares.

El concepto de *inner stem* de un punto (2.1) fue de enorme importancia en la clarificación de los pasos a seguir y del resultado mismo, y resulta interesante su relación con otro concepto, el de *visibilidad clara* (2.1), como se demuestra en el lema (5.4.4).

El problema más complicado de resolver en un principio fue la evaluación de la medida de las estrellas, dado que el único dato disponible sobre el conjunto S era su condición de dominio de Jordan regular; el hecho de notar que éstas son un *fan* (def. 3.2.3) sugirió la idea de intentar resolver el problema localmente. Es por eso que se comenzó a trabajar en un entorno del punto con características que simplificaran el problema, y luego se generalizaron los resultados. Este entorno, que de ahora en más se llamará "*dominio de normalidad*" y se notará N , debía reunir las siguientes características: i) que su centro fuera el punto en estudio; ii) que no tuviera puntos de inflexión afín o de discontinuidad de la frontera salvo eventualmente el punto central y iii) que de ello resultara que los trozos de frontera de S contenidos en él y unidos en x_0 conservarían cada cual su curvatura.

5.3. Existencia del dominio de normalidad (N)

Sean $x_0 \in \text{front } S$, $K = \{z \in \text{front } S / z \text{ es un punto de inflexión afín o un punto anguloso}\}$, $\delta = d(x_0, K \setminus \{x_0\})$. $\delta > 0$ pues K es un conjunto finito ya que de lo contrario tendríamos puntos singulares.

Sea $\Gamma \subset \text{front } S \cap B(x_0, \delta/2)$ la componente conexa de $\text{front } S$ que contiene a x_0 . Γ estará formada por dos arcos de frontera que llamaremos Γ_1 y Γ_2 , unidos en x_0 y tal que cada uno de ellos mantiene una determinada curvatura, o sea, cada uno de estos arcos es o bien de puntos de convexidad local, o bien de puntos de no convexidad local o bien un segmento. Consideremos $B_n = B(x_0, \delta/2n)$, Γ_{1n} la componente conexa de $\Gamma_1 \cap B_n$ que contiene a x_0 , Γ_{2n} la de $\Gamma_2 \cap B_n$ que contiene a x_0 .

Tomemos $\bar{\Gamma}_n = \Gamma \setminus (\Gamma_{1n} \cup \Gamma_{2n})$.

Debe existir un n_0 tal que $B_{n_0} \cap \bar{\Gamma}_{n_0} = \emptyset$, de lo contrario x_0 sería un punto de acumulación de puntos de $\text{front } S$ distintos de aquellos de Γ_{1n_0} y Γ_{2n_0} , lo que contradiría la simplicidad de $\text{front } S$.

B_{n_0} resulta entonces el dominio de normalidad buscado.

5.4. Definiciones y enunciados

Definición 5.4.1.

Sean $N_1 = \text{front } N$ y F un fan en x_0 . Se define la *amplitud angular de F* como la medida de Lebesgue sobre N_1 de la proyección de F sobre N_1 con centro en x_0 .

Notación: $a(F)$.

Definición 5.4.2.

Sea F un fan en x_0 ; F es un fan angularmente conexo si la proyección de F sobre N_1 con centro en x_0 resulta conexa en N_1 .

Lema 5.4.1.

$\text{ins}(x_0, S)$ y $\text{st}(x_0, S)$ son fans en x_0 .

Lema 5.4.2.

$\text{ins}(x_0, S) \cap N$ es un fan angularmente conexo.

Lema 5.4.3.

$\text{st}(x_0, S) \cap N$ es un fan angularmente conexo.

Lema 5.4.4.

Si $x \in \text{ins}(x_0, S) \cap N$, entonces x ve claramente a x_0 .

Lema 5.4.5.

Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $x_n \in S \forall n$. Entonces $\text{ins}(x_0, S \cap N) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \text{st}(x_j, S \cap N) \cup \{x_0\}$.

Lema 5.4.6.

Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $x_n \in S \forall n$. Entonces $\text{ins}(x_0, S) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \text{st}(x_j, S) \cup \{x_0\} \cup Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{st}(x_n, S) \cup \{x_0\} \cup Q$,

donde Q está incluido en la unión de un número finito de segmentos maximales respecto de x_0 . En particular $m(Q) = 0$

Lema 5.4.7.

Sea F un fan conexo en x_0 y $m(F)$ su medida de Lebesgue en

el plano. Entonces $m(F) > 0 \Leftrightarrow a(F) > 0$.

Lema 5.4.8.

Sean M y L fans conexos en x_0 sobre S , $M \subset L$. Entonces $m(M) < m(L) \Leftrightarrow a(M) < a(L)$.

Lema 5.4.9.

$m(\text{ins}(x_0, S) \cap N) < m(\text{st}(x_0, S \cap N))$
 $\Rightarrow m(\text{ins}(x_0, S)) < m(\text{st}(x_0, S))$

5.5. Demostración de los lemas previos

Lema 5.4.1.

$\text{ins}(x_0, S)$ y $\text{st}(x_0, S)$ son fans en x_0 .

Demostración

Sean $x \in \text{ins}(x_0, S)$ y $[m, x_0]$ el segmento maximal en S que incluye a x_0 . Es necesario probar que $[m, x_0] \subset \text{ins}(x_0, S)$.

$$[m, x_0] = [m, x] \cup [x, x_0]$$

Si $t \in [x, x_0]$, $t \in \text{ins}(x_0, S)$ por ser éste estrellado.

Si $t \in [m, x]$, $t \in \text{st}(x_0, S)$ pues $[m, x_0] \subset S$.

Trivialmente $R(t \rightarrow x_0)$ es saliente por serlo $R(x \rightarrow x_0)$.

La demostración para $\text{st}(x_0, S)$ es del mismo tipo e igualmente trivial.

Lema 5.4.2.

$\text{ins}(x_0, S) \cap N$ es un fan angularmente conexo.

Demostración

Sea $I = \text{ins}(x_0, S) \cap N$

i) Sean $u \in I$, $r \in I$ no alineados con x_0 .

Existen $u' \in R(u \rightarrow x_0) \cap N$, $r' \in R(r \rightarrow x_0) \cap N$

tales que $(x_0, u'] \cap \text{int } S = \emptyset$, $(x_0, r'] \cap \text{int } S = \emptyset$.

Sean $\beta = \min\{d(x_0, u'); d(x_0, r'); d(x_0, u); d(x_0, r)\}$

$B' = B(x_0, \beta/2)$, $B'_1 = \text{front } B'$, $u_1 \in [x_0, u] \cap B'_1$,

$r_1 \in [x_0, r] \cap B'_1$, $u'_1 = [x_0, u'] \cap B'_1$ y $r'_1 = [x_0, r'] \cap B'_1$

Supongamos $(x_0, u'_1] \subset CS$, $(x_0, r'_1] \subset CS$ (Fig. 5.5.1)

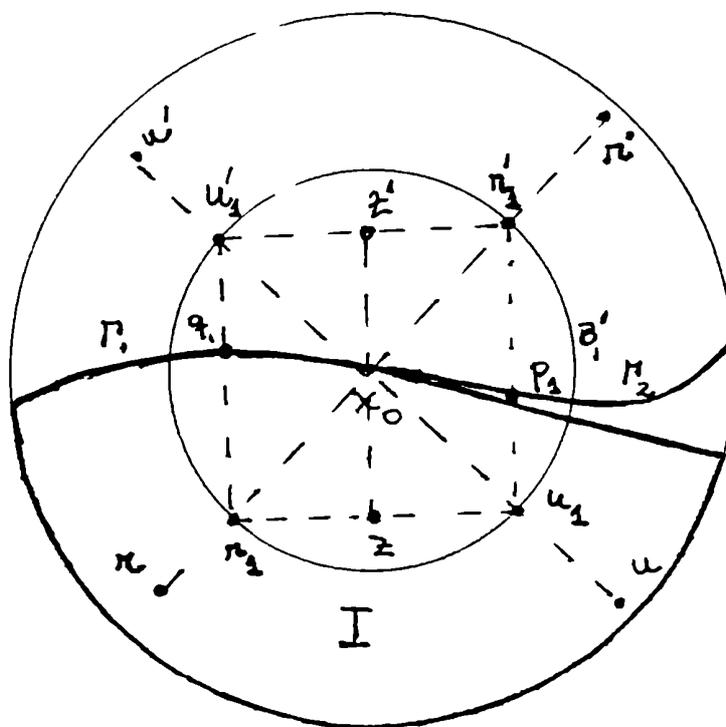


FIG. 5.5.1.

$r_1 \notin L(x_0, u'_1)$ porque de lo contrario estaría alineado con u'_1 , luego $[r_1, u'_1] \cap \text{front } S \neq \emptyset$ ya que $u'_1 \notin \text{st}(r_1, S)$
 Por una razón similar resulta $[u_1, r'_1] \cap \text{front } S \neq \emptyset$

Sean $p_1 \in [u_1, r_1'] \cap \text{front } S$, $q_1 \in [u_1', r_1] \cap \text{front } S$

Resulta

$$p_1 \neq x_0 \quad \text{pues} \quad x_0 \notin L(u_1, r_1')$$

$$q_1 \neq x_0 \quad \text{pues} \quad x_0 \notin L(u_1', r_1)$$

$(x_0, r_1') \cap \text{front } S = \emptyset$, $(x_0, u_1') \cap \text{front } S = \emptyset$ por estar los segmentos contenidos en CS . Por otro lado, $\text{front } S$ no puede atravesar (x_0, u_1) ni (x_0, r_1) por estar estos segmentos contenidos en S . Por construcción de N , existen en ella sólo dos arcos de frontera (llamémoslos Γ_1 y Γ_2), que se unen en x_0 .

Sean $S_1 = (r_1 \ x_0 \ u_1')$ y $S_2 = (u_1 \ x_0 \ r_1')$ sectores circulares tales que $q_1 \in S_1$ y $p_1 \in S_2$.

Entonces $\Gamma_1 \subset S_1$ y $\Gamma_2 \subset S_2$. (*)

Resulta $\text{int}(\text{conv}(u_1, r_1, x_0)) \cap \text{front } S = \emptyset$.

Por el lema (2.2.4), si $z \in [u_1, r_1]$ entonces

$$(z, x_0] \subset S \quad \therefore \quad z \in \text{st}(x_0, S).$$

Falta probar que $z \in \text{ins}(x_0, S) \cap N$.

Con un simple cálculo podemos hallar $z' \in (r_1' \ u_1') \cap R(z \rightarrow x_0)$

Por (*) $\text{int}(\text{conv}(r_1' \ x_0 \ u_1')) \cap \text{front } S = \emptyset$.

Por el lema (2.2.4), $(x_0 \ z') \subset CS$ y entonces

$$z \in \text{ins}(x_0, S) \cap N.$$

Si $[x_0 \ r_1'] \subset \text{front } S$ o bien $[x_0 \ u_1'] \subset \text{front } S$ no se modifican las conclusiones anteriores.

Hemos probado que dados dos puntos en $\text{ins}(x_0, S) \cap N$, todo el segmento comprendido está también allí. Su proyección sobre N' con centro en x_0 resultará conexa.

ii) Supongamos ahora $x_0 \in [u, r]$, $u \in I$, $r \in I$. Por ser los rayos salientes deben ser $[x_0, u]$ y $[x_0, r]$ partes de ambos arcos de frontera que salen de x_0 en N . Por las condiciones impuestas a N resultan Γ_1 y Γ_2 dos segmentos y $S \cap N$ una semicircunferencia, luego $S \cap N'$ es trivialmente conexa sobre N' .

Lema 5.4.3.

$st(x_0, S) \cap N$ es un fan angularmente conexo.

Demostración

El hecho de ser un fan resulta directamente de la aplicación del lema 5.4.1.

i) Sean $u \in st(x_0, S) \cap N$, $r \in st(x_0, S) \cap N$ y supongamos $u \in st(r, S) \cap N$, $x_0 \notin [u, r]$ (Fig. 5.5.2).

Resulta entonces $[x_0, u] \subset S \cap N$, $[x_0, r] \subset S \cap N$ y $[u, r] \subset S \cap N$, luego front S no puede atravesar ninguno

de estos tres segmentos.

Sea $A = (r, x_0, u)$ el triángulo que tiene a los puntos x_0 , u y r como vértices. Entonces tendremos

$\text{int } A \cap \text{front } S = \emptyset$ y

$A \subset S \cap N$.

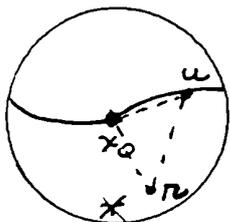
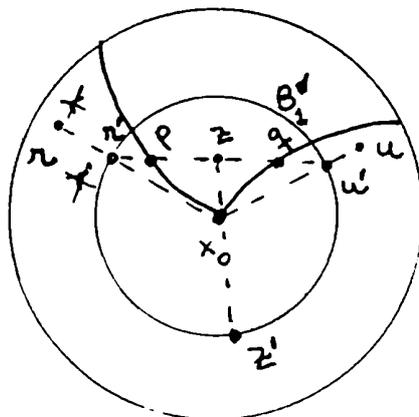


FIG. 5.5.2

Si $z \in [u, r]$, por el lema (2.2.4), $z \in st(x_0, S) \cap N$. La proyección sobre N' con centro en x_0 del segmento $[u, r]$ resultará conexa.

ii) Sean $u \in \text{st}(x_0, S) \cap N$, $r \in \text{st}(x_0, S) \cap N$,



$$u \notin \text{st}(r, S) \cap N$$

$$\delta = \min\{d(u, x_0); d(r, x_0)\}$$

$$B' = B(x_0, \delta/2), B_1' = \text{front } B',$$

$$u' = [x_0, u] \cap B_1' \text{ y}$$

$$r' = [x_0, r] \cap B_1' \quad (\text{Fig. 5.5.3})$$

Obviamente $u' \in \text{st}(x_0, S) \cap N$

y $r' \in \text{st}(x_0, S) \cap N$.

Si $u' \in \text{st}(r', S) \cap N$ estamos

FIG. 5.5.3.

en las condiciones de la parte i.

Supongamos entonces $u' \notin \text{st}(r', S) \cap N$. Entonces

$$(r' u') \cap CS \neq \emptyset.$$

Sean $z \in (r' u') \cap CS$, $p \in [r', z) \cap \text{front } S \cap (\text{st}(r', S) \cap N)$,

$q \in [u', z) \cap \text{front } S \cap (\text{st}(u', S) \cap N)$ (Fig. 5.5.3)

$p \neq q$ pues $[r', z) \cap [u', z) = \emptyset$

$p \neq x_0$ porque si coincidieran u' no vería a x_0 .

Análogamente $q \neq x_0$.

Es necesario probar que p y q pertenecen a distintos arcos de frontera.

Podría ocurrir que p coincidiera con r' o q con u' . En este caso alguno de los arcos de frontera sería un segmento y como p y q no están alineados con x_0 es obvio que p y q pertenecerán a distintos arcos. Podemos suponer entonces que $p \neq u'$ y $q \neq r'$.

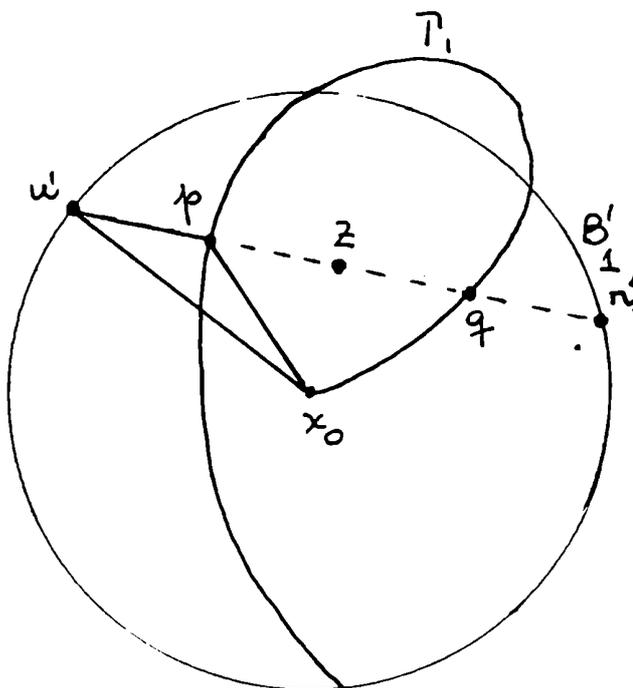


FIG. 5.5.4.

Supongamos que p y q pertenecieran a un mismo arco de frontera, por ejemplo a Γ_1 , y $q \in \overset{\curvearrowright}{x_0 p} \subset \Gamma_1$ (Fig. 5.5.4) p no es el último punto de Γ_1 en B'_1 pues $d(p, x_0) < \delta/2$. Luego $\exists \omega \in \Gamma_1 \cap B'_1$

Sea $A = (u' p x_0)$ el triángulo con vértices en u' , p y x_0 .

Puede ocurrir que Γ_1 penetre en A o no lo haga. Si Γ_1 no penetrara en A , debería hacerlo en la cápsula convexa del trozo de curva entre x_0 y p lo que generaría un punto doble de la curva, o bien debería recorrer $[p u']$, o bien continuar por sobre $L(p, q)$. Estos últimos dos casos implicarían un cambio de curvatura en Γ_1 lo que está prohibido porque $B' \subset N$.

Si Γ_1 penetrara en A ya vimos que no puede recorrer $(u' p)$ ni $(p x_0)$ porque implicaría un cambio de curvatura (notar que x_0 , p y q no están alineados), no puede atravesar $[p x_0]$ porque penetraría en la cápsula convexa del trozo de curva entre x_0 y p , no puede atravesar $[u' x_0]$ puesto que $u' \in \text{st}(x_0, S)$, no puede atravesar p ni x_0 pues se generaría un punto doble y por último no puede atravesar $(u' p)$ porque cambiaría la curvatura.

Por todo lo expuesto, p debe pertenecer a uno de los arcos de frontera que salen de x_0 y q debe pertenecer al otro.

Sean $S_1 = (r' x_0 u')$ el sector circular de B' que contiene a z y S_2 el complemento de S_1 en B' .

$\text{Front } S \cap B' \subset S_1$ por lo antes expuesto y porque la frontera no puede atravesar $(r' x_0)$ ni $(x_0 u')$.

Sea $z' = R(z \rightarrow x_0) \cap B'_1$; $z' \in \text{st}(x_0, S) \cap N$ pues $z' \in S \cap N$ y $(z' x_0) \cap \text{front } S = \emptyset$ por estar $(z' x_0)$ contenido en $\text{int } S_2$.

Además $z' \in \text{st}(u', S) \cap \text{st}(r', S) \cap N$ ya que $(z' u') \subset S_2$ y $(z' r') \subset S_2$.

Con iguales argumentos que en la parte i) de este lema se demuestra que

$[z' u'] \cup [z' r'] \subset \text{st}(x_0, S) \cap N$ con lo cuál la proyección de la unión de estos segmentos sobre N' con centro x_0 resulta un arco conexo sobre N' .

iii) Sean $u \in \text{st}(x_0, S) \cap N$, $r \in \text{st}(x_0, S) \cap N$, $x_0 \in [u r]$. Este es un caso particular de la parte ii), donde si p, q y x_0 están alineados resulta $S \cap B'$ una semicircunferencia y si $x_0 \notin [p q]$ estamos exactamente en el caso ii).

Lema 5.4.4.

Sea $t \in \text{ins}(x_0, S) \cap N$. Entonces t ve claramente a x_0 .

Demostración

i) Si $t \notin \text{front } S \Rightarrow (x_0 t) \subset \text{int } S$

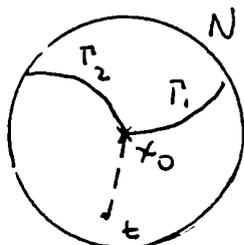


FIG. 5.5.5.

$i_1) (x_0 t) \cap \text{inc } S = \emptyset$.

Supongamos lo contrario.

Entonces $\exists t' \in (x_0 t) \cap \text{inc } S$; sin pérdida de generalidad supongamos que $t' \in \Gamma_1$.

Como x_0 también es un punto de $\Gamma_1 \subset \text{inc } S$ resulta $[x_0 t']$

cuerda exterior a Γ_1 $(x_0 t') \subset \text{CS}$.

Absurdo pues $t' \in [x_0 t]$ y $t \in \text{st}(x_0, S)$.

$i_2) (x_0 t) \cap \text{front } S = \emptyset$.

Supongamos $\exists t' \in (x_0 t)$, $t' \in \text{lc } S \cap \text{front } S$.

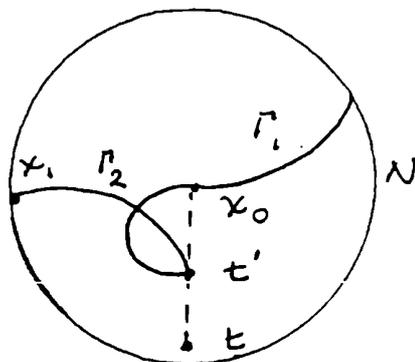


FIG. 5,5.6.

Podemos suponer $t' \in \Gamma_2$. Como $d(x_0, t') < d(x_0, t) \leq \text{radio de } N$, t' no es el último punto de Γ_2 en $N \cap S$. Sea x_1 este punto. Γ_2 no puede cambiar su curvatura, entonces debe penetrar en la cápsula convexa del trozo de curva entre x_0 y t' . (Fig. 5.5.6).

Como $d(x_0, x_1) = \text{radio de } N'$, la curva deberá cortarse a sí misma en algún punto de esta cápsula convexa, lo que contradice el hecho de que la curva sea simple.

Es de notar que Γ_2 no puede atravesar (t, x_0) pues $t \in \text{st}(x_0, S)$ y tampoco continuar fuera de la cápsula convexa del trozo de Γ_2 entre x_0 y t' , porque t' se convertiría en un punto de $\text{Int } S$.

Luego $(t, x_0) \subset \text{Int } S$.

ii) Si $t \in \text{front } S \cap \text{Int}(x_0, S) \cap N$, $t \notin \text{Int } S$.

Si $t \in \text{Int } S$, como x_0 pertenece al mismo arco resulta $\widehat{x_0 t}$ un arco de $\text{Int } S$, luego $t \notin \text{st}(x_0, S) \cap N$.

iii) $R(t, x_0)$ separa localmente Γ_1 de Γ_2 .

Sean $B_0 = B(x_0, \epsilon_0)$ con $\epsilon_0 < \text{radio de } N$, Γ'_1 la componente conexa de Γ_1 en B_0 que contiene a x_0 y Γ'_2 la de Γ_2 en B_0 que contiene a x_0 .

Consideremos $B_n = B(x_0, \epsilon/n)$ y Γ'_{1n} y Γ'_{2n} las componentes conexas respectivas en las mismas condiciones anteriores.

Tomemos $\bar{\Gamma}_n = \Gamma \cap (\Gamma'_{1n} \cup \Gamma'_{2n})$

Debe existir un n_0 tal que $B_{n_0} \cap \Gamma'_{n_0} = \emptyset$, de lo contrario x_0 sería un punto de acumulación de puntos de $\text{front } S$ distintos de aquéllos de Γ'_{1n_0} y Γ'_{2n_0} , lo que contradiría la simplicidad de $\text{front } S$.

En principio, $L(t, x_0)$ divide al plano en dos semiplanos que llamaremos H^+ y H^- .

Veamos que $R(t, x_0) \cap B_{n_0}$ separa Γ'_{1n_0} de Γ'_{2n_0} .

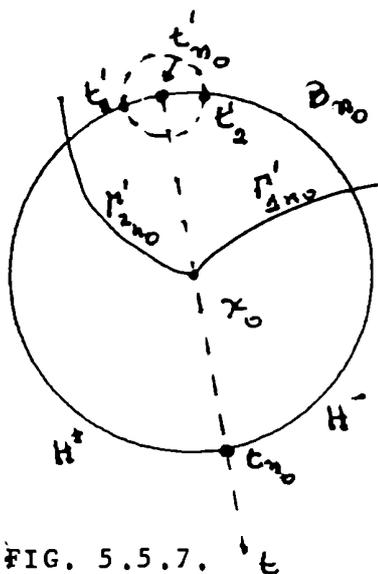


FIG. 5.5.7.

Sean $t_{n_0} = [x_0, t] \cap B_{n_0}$ y
 $t_{n_0}' = R(t_{n_0} \rightarrow x_0) \cap B_{n_0}$
 (Fig. 5.5.7).

Por ser $R(t \rightarrow x_0)$ un rayo saliente puede lograrse $(x_0, t_{n_0}') \subset CS$ o bien coincidente con un trozo de frontera.

En el caso en que $(x_0, t_{n_0}') \subset CS$, $t_{n_0}' \subset CS$ que es un abierto implica que existe una $B(t_{n_0}', \delta) \subset CS$.

Sean $t_1' \in B(t_{n_0}', \delta) \cap B_{n_0} \cap H^+$ y $t_2' \in B(t_{n_0}', \delta) \cap B_{n_0} \cap H^-$.

Un razonamiento similar al empleado en el lema 5.4.3 parte ii) entre los puntos t_{n_0} por un lado y t_1' y t_2' por el otro, y el hecho de que Γ_{1n_0}' y Γ_{2n_0}' no pueden atravesar (t_{n_0}, x_0) pues $t \in st(x_0, S) \cap N$, da como resultado que $\Gamma_{1n_0}' \subset H^+ \cap B_{n_0}$ y $\Gamma_{2n_0}' \subset H^- \cap B_{n_0}$.

Si $[x_0, t_{n_0}']$ coincide con un trozo de frontera, por ser ésta simple el otro trozo estará contenido en $H^+ \cap B_{n_0}$, $H^- \cap B_{n_0}$ o coincidirá con (t_{n_0}, x_0) en cuyo caso la conclusión es la misma.

iv) Veamos ahora que t ve claramente a x_0 .

Por parte iii) $R(t \rightarrow x_0)$ separa localmente Γ_1 de Γ_2 , luego $\exists U(x_0) = B(x_0, \delta')$ con $\delta' < \varepsilon$ (donde ε es el radio de N) tal que sin pérdida de generalidad $\Gamma_1' = \Gamma_1 \cap U(x_0)$ y $\Gamma_2' = \Gamma_2 \cap U(x_0)$ están en H^+ y H^- respectivamente respecto de $L(t, x_0)$.

Sea $t' = [x_0, t] \cap \text{front}(U(x_0))$. Se presentan dos alternativas:

a. Si $t' \in \text{front } S \Rightarrow [t, x_0]$ es un arco de puntos chatos y t ve $(t' x_0)$. Falta ver que t ve el otro arco que supondremos es Γ_2' .

Pensemos primero que $\omega \in \Gamma_2'$ arco de $lc S$.

Afirmo que t ve $(x_0 \omega)$.

Si $\omega \notin \text{st}(t, S) \cap N$, $\exists \omega' \in (t \omega) \cap \text{front } S$, $\omega' \notin \Gamma_1'$ pues no está alineado con x_0 y t , luego $\omega' \in \Gamma_2'$ y $\therefore \omega' \in lc S$. Con el mismo razonamiento empleado en la parte $i_2)$ resultaría que Γ_2' se cortarfa a si misma y por lo tanto un absurdo. Luego

$\omega \in \text{st}(t, S) \cap N \quad \forall \omega \in \Gamma_2'$.

Sea ahora $\omega \in \Gamma_2'$ y $\Gamma_2' \subset \text{inc } S$.

Podemos suponer que existe ω no alineado con x_0 y t pues si todos los puntos de Γ_2' estuvieran alineados con éstos resultaría Γ_2' también un arco de puntos chatos y obviamente visible desde t .

Si $\omega \in \text{st}(t, S)$ por el lema 4.2.1 resulta

$(x_0 \omega) \in \text{st}(t, S)$.

Si $\omega \notin \text{st}(t, S)$, $\exists \omega' \in \text{front } S$, $\omega' \in (t, \omega)$ y obviamente no alineado con t y x_0 , $\therefore \omega' \notin \Gamma_1'$.

Sea ω_0 el primer punto en las condiciones de ω' visto desde t ; $\omega_0 \in \Gamma_2'$ luego $(x_0 \omega_0) \subset \text{st}(t, S)$ por el mismo lema anteriormente citado.

b. Si $t' \notin \text{front } S$, $t' \in lc S$; por parte $i)$,

$(t t') \cap \text{inc } S = \emptyset$.

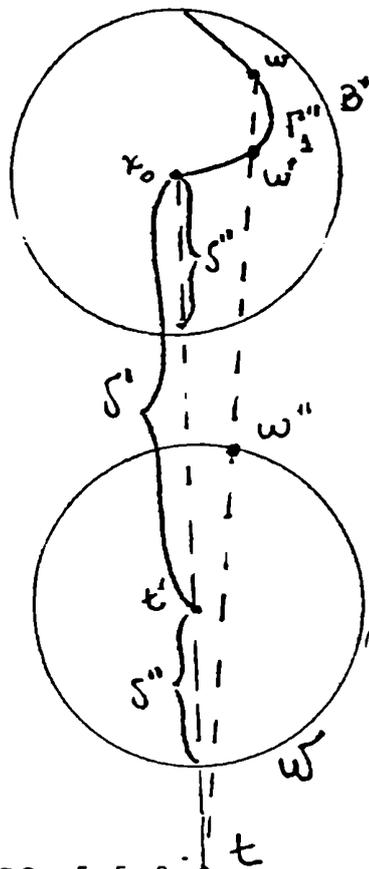


FIG. 5.5.8.

Por ii) y teorema 2.4.3, t ve claramente a t' . $\therefore \exists$

$$W(t', \delta'') \subset \text{st}(t, S) \cap N.$$

Sean $B' = B(x_0, \min(\delta'', \delta'))$,

$$\Gamma_1'' = \Gamma_1' \cap B', \quad \Gamma_2'' = \Gamma_2' \cap B'.$$

Supongamos $\Gamma_1' \subset \text{Int } S$, $\omega \in \Gamma_1''$,

$$\omega \notin L(t, x_0).$$

Sea ω' el primer punto sobre

$(t, \omega] \cap \text{front } S$ visto por t .

$$\omega' \neq x_0 \text{ pues } x_0 \notin [t, \omega].$$

Si $\omega' \in \Gamma_1'$ por el lema 4.2.1. antes citado, resulta (x_0, ω') visible desde t .

Veamos que efectivamente $\omega' \in \Gamma_1'$ y para ello que $d(\omega', x_0) < \delta' = d(t', x_0)$.

Sea $\omega'' \in ([\omega', t] \cap \text{front}(B(t', \delta'')))$ y más próximo a ω' . t ve a ω'' pues ve todo ese entorno.

$d(\omega'', x_0) < d(t', x_0) < \delta'$. (Para demostrar esto basta usar el triángulo con vértices en x_0 , ω'' y t).

Luego ω'' pertenece al entorno en que $R(t + x_0)$ separa Γ_1' de Γ_2' . Con más razón pertenece a este entorno ω' ya que $\omega' = \lambda\omega + (1-\lambda)\omega''$, $0 < \lambda < 1$ y $d(\omega, x_0) < \delta'$, $d(\omega'', x_0) < \delta'$.

Luego ω' está en el mismo semiespacio que ω respecto a $R(t + x_0)$. $\therefore \omega' \in \Gamma_1'$.

Supongamos ahora $\Gamma_2' \subset \text{Int } S$ y $\omega_2 \in \Gamma_2''$.

Veremos que todo punto ω_2 de Γ_2'' resulta visible desde t .

Sea $\omega_2' \in (\omega_2 \cap t) \cap W$. $\omega_2' \in \text{st}(t, S)$, luego si $\omega_2 \notin \text{st}(t, S)$ existiría $\omega_2'' \in \text{front } S \cap [\omega_2' \omega_2)$ ω_2'' sería por lo tanto un punto de convexidad local por estar en $B(x_0, \delta')$ y en el mismo semiplano que ω_2 respecto de $L(t, x_0)$. Con los mismos argumentos desarrollados en la parte i) resultaría Γ_2 no simple, luego toda Γ_2'' es visible desde t .

Hemos probado entonces que si $t \in \text{ins}(x_0, S) \cap N$, t ve claramente a x_0 .

Lema 5.4.5.

Sea $\text{lím } x_n = x_0$, $x_n \in S \quad \forall n$. Entonces

$$\text{ins}(x_0, S) \cap N \subset \underbrace{\text{lím}}_{x_n \rightarrow x_0} (\text{st}(x_n, S) \cap N) \cup \{x_0\} =$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} (\text{st}(x_j, S) \cap N) \cup \{x_0\}$$

Demostración

Sean $\{x_n\} \rightarrow x_0$, $x_n \in S \quad \forall n$, $z \in \text{ins}(x_0, S) \cap N$, $z \neq x_0$.

Por el lema 5.4.4 z ve claramente a x_0 , luego \exists

$U(x_0) \cap S \cap N$ tal que $U(x_0) \cap S \cap N \subset \text{st}(z, S) \cap N$.

Si $x_n \rightarrow x_0$, para $n > n_0$ resulta

$$x_n \subset U(x_0) \cap S \cap N$$

$$x_n \in \text{st}(z, S) \cap N \quad \forall n > n_0$$

$$z \in \text{st}(x_n, S) \cap N \quad \forall n > n_0$$

$$\text{luego } z \in \bigcap_{j=n_0}^{\infty} \text{st}(x_j, S) \cap N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \text{st}(x_j, S) \cap N$$

Entonces

$$\text{ins}(x_0, S) \cap N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \text{st}(x_j, S) \cap N =$$

$$\underbrace{\text{lím}}_{x_n \rightarrow x_0} (\text{st}(x_n, S) \cap N) \cup \{x_0\}$$

Lema 5.4.6.

Sean $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $x_n \in S \quad \forall n$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{ins}(x_0, S) &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \text{st}(x_j, S) \cup \{x_0\} \cup Q \\ &= \lim_{x_n \rightarrow x_0} \text{st}(x_n, S) \cup \{x_0\} \cup Q \end{aligned}$$

donde Q está incluido en la unión de un número finito de segmentos maximales respecto de x_0 .

En particular $m(Q) = 0$.

Demostración

Como $\text{ins}(x_0, S) \subset \text{st}(x_0, S)$, $p \in \text{ins}(x_0, S)$ implica p ve a x_0 . Sea $p \neq x_0$.

a) Si p ve claramente a x_0 una demostración similar a la del lema 5.4.5 implica que $p \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \text{st}(x_j, S)$

b) Si p no ve claramente a x_0 , $(p x_0) \cap \text{Int } S \neq \emptyset$ (razonamiento análogo al de la demostración del Teorema 2.4.3).

Sea $z \in (p x_0) \cap \text{Int } S$. Puede ocurrir que $z \in \Gamma$ o bien z sea un punto de no suavidad de la curva.

En este último caso es de notar que por ser S un dominio de Jordan regular, los puntos de no suavidad de la curva son finitos por lo cuál proveen un número finito de segmentos maximales respecto de x_0 en los cuales puede haber puntos para los que x_0 es visto críticamente.

Si z es un punto de suavidad de la frontera entonces $\exists \Gamma$ zona de obstrucción, $\Gamma \subset \text{Int } S$.

Consideremos $\text{conv } \Gamma$. Desde x_0 hay a lo sumo dos semirrectas de apoyo a $\text{conv } \Gamma$. Como el número de zonas de obstrucción es finito, resulta que cada una de ellas aporta a lo

más dos segmentos maximales en los que puede haber visibilidad crítica.

Luego los segmentos maximales que contienen puntos que ven críticamente a x_0 son un fan de medida nula.

Lema 5.4.7.

Sea F un fan conexo en x_0 y $m(F)$ su medida de Lebesgue en el plano. Entonces $m(F) > 0 \Leftrightarrow a(F) > 0$

Demostración

Por ser F un fan en x_0 , si consideramos este último punto como origen de coordenadas, el área de F estará dada por una función radial que depende de un ángulo que varía entre los extremos de la proyección de F sobre N' con centro en x_0 . Sean m y n dichos extremos y $A = (m x_0 n)$ el triángulo con vértices en m , x_0 y n . (Fig. 5.5.9)

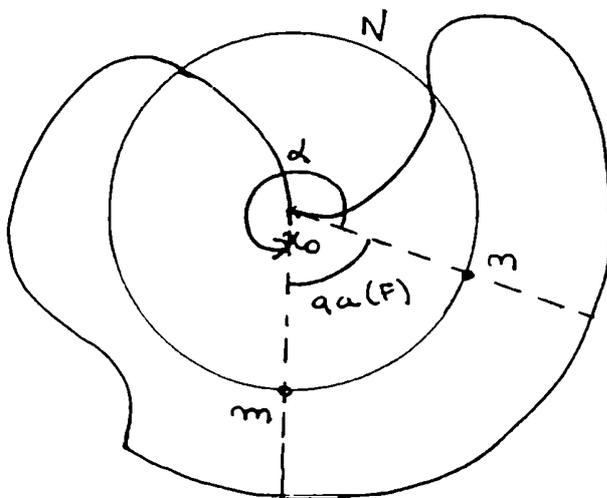


FIG. 5.5.9.

$aa(F)$ coincide con el ángulo correspondiente a x_0 en A .

Si α es el ángulo formado entre $R(x_0 \rightarrow n)$ y $R(x_0 \rightarrow m)$

exterior a A , resulta $aa(F) = 2\pi - \alpha$ y

$$m(F) = \int_{\alpha}^{2\pi} \int_0^{r(\theta)} r \, dr \, d\theta$$

Sea $m(F) > 0$. Aplicando la fórmula anterior resulta

$$\begin{aligned} m(F) &= \int_{\alpha}^{2\pi} \int_0^{r(\theta)} r \, dr \, d\theta = \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{(r(\theta))^2}{2} \, d\theta \leq \\ &\leq \sup_{\theta \in [\alpha, 2\pi]} r(\theta) (2\pi - \alpha) \end{aligned}$$

$$\text{Luego } 0 < \sup_{\theta \in [\alpha, 2\pi]} r(\theta) (2\pi - \alpha).$$

Como $\sup r(\theta) > 0$ resulta $2\pi - \alpha > 0$.'. $aa(F) > 0$.

Recíprocamente, si $aa(F) > 0$, usando la misma fórmula

$$m(F) = \int_{\alpha}^{2\pi} \int_0^{r(\theta)} r \, dr \, d\theta = \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{[r(\theta)]^2}{2} \, d(\theta) \geq \epsilon (2\pi - \alpha)$$

donde $\epsilon = \text{radio de } N$.

Resulta entonces que si $2\pi - \alpha = aa(F) > 0$, será $m(F) > 0$.

Lema 5.4.8.

Sean M y L fans conexos en x_0 sobre S , $M \subset L$. Entonces

$$m(M) < m(L) \Leftrightarrow aa(M) < aa(L)$$

Demostración

En las condiciones del enunciado, $(L \sim M) \cup \{x\}$ resulta un fan en x_0 . Si bien su proyección con centro en x_0 sobre N' no es necesariamente conexa, tiene a lo sumo dos componentes conexas, cada una de ellas un fan en x_0 , y alguna de

ellas de medida no nula.

Con una demostración similar a la del lema 5.4.7 se demuestran ambas implicaciones.

Lema 5.4.9.

$$m(\text{ins}(x_0, S) \cap N) < m(\text{st}(x_0, S) \cap N)$$

$$\Rightarrow m(\text{ins}(x_0, S)) < m(\text{st}(x_0, S))$$

Demostación

$$\text{ins}(x_0, S) \cap N \subset \text{st}(x_0, S) \cap N$$

$$aa((\text{ins}(x_0, S) \cap N) \leq aa((\text{st}(x_0, S) \cap N)$$

$$\text{Si } aa((\text{ins}(x_0, S) \cap N) = \beta - \alpha$$

y $aa(\text{st}(x_0, S) \cap N) = \beta' - \alpha'$, por lo visto anteriormente

resulta $\alpha' \leq \alpha \leq \beta \leq \beta'$

$$m(\text{st}(x_0, S)) = m(\text{st}(x_0, S) \cap N) + \int_{\alpha'}^{\beta'} \int_{\epsilon}^{r(\theta)} r \, dr \, d\theta$$

$$m(\text{ins}(x_0, S)) = m(\text{ins}(x_0, S) \cap N) + \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\epsilon}^{r(\theta)} r \, dr \, d\theta$$

donde $\epsilon = \text{radio de } N$.

Resulta obviamente

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\epsilon}^{r(\theta)} r \, dr \, d\theta \leq \int_{\alpha'}^{\beta'} \int_{\epsilon}^{r(\theta)} r \, dr \, d\theta$$

luego la desigualdad estricta se mantiene e implica

$$m(\text{ins}(x_0, S)) < m(\text{st}(x_0, S))$$

5.6. El teorema principal y sus consecuencias

Teorema (5.6.1)

Sea S un dominio de Jordan en E^2 ; $x_0 \in \text{front } S$.

Entonces son equivalentes:

$$i) m(st(x_0, S)) = m(ins(x_0, S))$$

ii) v es continua en x_0

i) \Rightarrow ii)

Probaremos $\sim ii) \Rightarrow \sim i)$

Supongamos v no continua en x_0 , entonces $\exists x_n \rightarrow x_0$,

$x_n \in S \quad \forall n$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(x_n) < v(x_0)$$

por ser v semicontinua superiormente (Teo. 5.1.2). Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(st(x_n, S)) < m(st(x_0, S))$$

Por el lema 5.4.6

$$\begin{aligned} ins(x_0, S) &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} st(x_j, S) \cup \{x_0\} \cup Q \\ m(ins(x_0, S)) &\leq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} st(x_j, S)\right) + m\{x_0\} + m(Q) \\ &= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} st(x_j, S)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m\left[\bigcap_{j=n}^{\infty} st(x_j, S)\right] \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} m(st(x_n, S)) \end{aligned}$$

Esto ocurre por ser $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} st(x_j, S)$ una unión de conjuntos

crecientes ($B_i = \bigcap_{j=i}^{\infty} st(x_j, S)$, $B_i \subset B_j$ si $i \leq j$) y porque

$\bigcap_{j=n}^{\infty} st(x_j, S) \subset st(x_n, S)$, Entonces $m(ins(x_0, S)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m(st(x_n, S)) < m(st(x_0, S))$. Luego $m(ins(x_0, S)) < m(st(x_0, S))$.

ii) \Rightarrow i)

v continua en $x_0 \Rightarrow m(st(x_0, S)) = m(ins(x_0, S))$.

Veamos

Si $m(st(x_0, S)) \neq m(ins(x_0, S))$ entonces v no es continua en x_0 .

Es claro que $m(st(x_0, S)) - m(ins(x_0, S)) > 0$ pues

$\text{ins}(x_0, S) \subset \text{st}(x_0, S)$ y que por lo tanto $\text{st}(x_0, S) \sim \text{ins}(x_0, S)$ es un fan en x_0 de medida no nula.

Por el lema 5.4.8, $aa(\text{st}(x_0, S)) > aa(\text{ins}(x_0, S))$ y por los lemas 5.4.1 y 5.4.2 $\text{ins}(x_0, S) \cap N$ y $\text{st}(x_0, S) \cap N$ son angularmente conexos.

Entonces la proyección sobre N_1 con centro en x_0 de $\text{st}(x_0, S) \sim \text{ins}(x_0, S)$ tiene a lo sumo dos componentes conexas sobre N_1 , al menos una de éstas de medida no nula por tratarse de un fan de medida no nula.

De acuerdo a esto podemos razonar en N y deducir que $m(\text{st}(x_0, S) \cap N) > m(\text{ins}(x_0, S) \cap N)$ y que existe un conjunto A contenido en $(\text{st}(x_0, S) \sim \text{ins}(x_0, S)) \cap N$ con medida no nula e interior no vacío.

Sean entonces $t \in \text{int } A$ y $\omega \in \text{ins}(x_0, S)$. $L(\omega, x_0)$ divide el plano en dos semiplanos que llamaremos H^+ y H^- . Como $t \notin L$ pues $t \notin \text{ins}(x_0, S)$ supongamos entonces que $t \in H^+$.

$\exists \epsilon'$ tal que $B(t, \epsilon') \subset A \subset (\text{st}(x_0, S) \sim \text{ins}(x_0, S)) \cap N$.

Como t no emite rayos salientes por ser $R(t \rightarrow x_0)$ un rayo entrante, $\exists t' \in R(t \rightarrow x_0) \cap H^- \cap S \cap N$, $(t' x_0) \subset \text{int } S$.

Es de notar que $t' \notin \text{ins}(x_0, S)$ y que no puede ver claramente a t pues se lo impide x_0 ; de hecho t' no ve la parte superior de $B(t, \epsilon')$ que sí es vista por x_0 .

Sea $t_n = \frac{1}{n} t' + \frac{n-1}{n} x_0$; $t_n \in (t' x_0)$ y $t_n \rightarrow x_0$.

Los puntos de esta sucesión están en S pues $(t' x_0) \subset \text{int } S$ y tienen las mismas condiciones de visibilidad que t' respecto a t .

En efecto, sea $L = L(t, x_0)$ la recta por t y x_0 y sea U el

subconjunto de S limitado por la recta L e invisible vfa S desde t (a fortiori invisible desde cada uno de los t_n). Llamemos $\tilde{S} = S \sim U$ y designemos con \tilde{v} a la función de visibilidad de \tilde{S} . Por construcción resulta que $n \geq 1$ vale $\tilde{v}(t_{n-}) = v(t_n)$ pero $\tilde{v}(x_0) < v(x_0)$. Por la semicontinuidad superior de la función de visibilidad [1], teorema 5.1.2 vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{v}(t_n) \leq \tilde{v}(x_0) < v(x_0)$$

de donde resulta la discontinuidad de v en x_0 .

5.7. Corolarios del teorema principal

Definición 5.7.1.

$x_0 \in \text{front } S$ es un punto cónico si existe una recta L que contiene a x_0 y $\text{st}(x_0, S)$ está contenida en uno de los dos semiplanos en que L divide al plano.

Teorema 5.7.1.

La función de visibilidad es continua en $x_0 \in \text{front } S$ si y sólo si x_0 es un punto cónico.

Demostración

(\Leftarrow) Sea x_0 un punto cónico; entonces existe L tal que $x_0 \in L$, L divide al plano en H^+ y H^- y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\text{st}(x_0, S) \subset \text{cl}(H^+)$. Obviamente $\text{ins}(x_0, S) \subset \text{cl}(H^+)$.

Veremos que $\text{st}(x_0, S) \sim \text{ins}(x_0, S) \subset L$ con lo cual aplicando el teorema 5.6.1 resultará

$m(\text{st}(x_0, S)) - m(\text{ins}(x_0, S)) = 0$ por estar la diferencia de conjuntos contenida en otro de medida nula.

Veamos que si $u \in \text{st}(x_0, S) \sim L$ entonces $u \in \text{ins}(x_0, S)$.

Como $u \notin L$, $\exists u' \in R(ux_0 \rightarrow) \cap H^-$, $(x_0 u') \subset H^-$

$\therefore u' \notin \text{st}(x_0, S)$.

Si $(x_0 u') \subset CS$ o si $[x_0 u'] \subset \text{front } S$ por definición u emite rayos salientes por x_0 luego $u \in \text{ins}(x_0, S)$

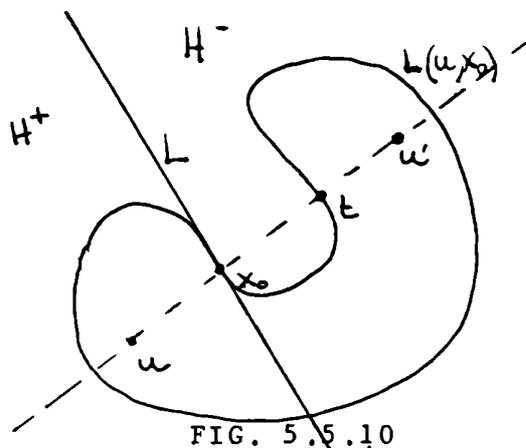


FIG. 5.5.10

Si nada de ésto ocurre, como $u' \notin \text{st}(x_0, S)$,

$(x_0 u') \cap \text{front } S \neq \emptyset$.

Sea $t \in \text{front } S \cap (x_0 u')$ y más próximo a x_0 .

(Fig. 5.5.10)

$t \in H^- \therefore t \notin \text{st}(x_0, S)$ y $(x_0 t) \subset CS$ ya que si

$(x_0 t) \cap S \neq \emptyset$, existiría $z \in (x_0 t) \cap S$. Repitiendo el

razonamiento anterior con este z en lugar del u' , aparecería un $t' \in (x_0 t) \cap \text{front } S$ lo que contradiría el hecho de que t fuera el punto de $\text{front } S$ más próximo a x_0 sobre ese segmento.

Luego $u \in \text{st}(x_0, S) \sim L \Rightarrow u \in \text{ins}(x_0, S)$, es decir que

$\text{st}(x_0, S) \sim \text{ins}(x_0, S) \subset L$ y por ende

$m(\text{st}(x_0, S)) = m(\text{ins}(x_0, S))$.

El teorema 5.6.1 asegura la continuidad de la función de visibilidad en x_0 .

(\Rightarrow) Sea v continua en x_0 ; entonces x_0 es un punto cónico.

Si v es continua en x_0 , por el teorema 5.6.1 resulta $m(\text{st}(x_0, S)) = m(\text{ins}(x_0, S))$.

Pueden presentarse dos casos.

a) $\text{st}(x_0, S) = \text{ins}(x_0, S)$

Consideremos en este caso la proyección sobre N_1 con centro en x_0 del $\text{ins}(x_0, S)$. Por el lema 5.4.2 esta proyección resulta un arco sobre N_1 ; tomemos entonces sus puntos extremos, sean ellos x_1 y x_2 .

Si x_0 , x_1 y x_2 están alineados, ellos dan la recta L necesaria ya que tanto $\text{ins}(x_0, S)$ como $\text{st}(x_0, S)$ quedan en uno de los dos semiespacios determinados por L y resulta entonces x_0 un punto cónico.

Si x_0 , x_1 y x_2 no están alineados, sea A el triángulo con vértices en estos tres puntos.

Obviamente los puntos interiores a A emiten rayos salientes por x_0 . Por ser $\text{ins}(x_0, S)$ un fan resulta que cualquier recta de apoyo por x_0 de A (están bien definidas por ser A un convexo), dejan en uno de los semiespacios determinados $\text{ins}(x_0, S)$ y por lo tanto $\text{st}(x_0, S)$. También en este caso x_0 es un punto cónico.

b) $\text{st}(x_0, S) \neq \text{ins}(x_0, S)$

Como $m(\text{st}(x_0, S) \setminus \text{ins}(x_0, S)) = 0$ resulta

$\text{st}(x_0, S) \setminus \text{ins}(x_0, S)$ un fan en x_0 de medida nula. Por el lema 5.4.7 su amplitud angular es 0. Por otro lado, los lemas 5.4.2 y 5.4.3 aseguran que su proyección desde x_0 sobre N_1 tiene una o dos componentes conexas, luego ésta debe ser un punto o dos puntos.

Si son dos puntos, llamémoslos x_1 y x_2 y tomemos $\{x_0, x_1, x_2\}$. Si estos tres puntos están alineados forman la recta L necesaria ya que contiene a x_0 y obviamente $st(x_0, S)$ queda en uno de los semiespacios por ella determinados. x_0 resulta entonces un punto cónico.

Si los tres puntos no están alineados forman un triángulo A . Con un razonamiento igual al de la parte a) de esta implicación, cualquier recta de apoyo a A por x_0 demuestra que x_0 es un punto cónico.

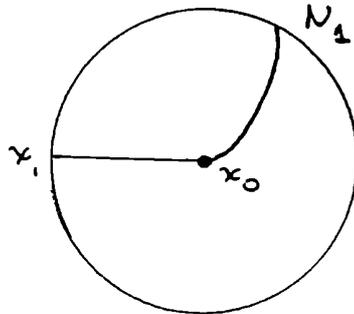


FIG. 5.5.11.

Si la proyección sobre N_1 es un único punto, sea éste por ejemplo x_1 , $L(x_0, x_1)$ es la recta buscada ya que obviamente deja en un semiplano al $ins(x_0, S)$ y sobre su borde al resto de la $st(x_0, S)$.

x_0 es entonces también un punto cónico.

Teorema 5.7.2.

$x_0 \in \text{front } S$ y $\text{front } S$ suave en $x_0 \Rightarrow v$ es continua en x_0 .

Demstración

Este teorema es en parte una conclusión directa de tres teoremas del capítulo 3 unidos al teorema 5.6.1.

Si x_0 es un punto de inflexión de $\text{front } S$, basta aplicar el teorema 3.2.4 que asegura que $ins(x_0, S) = st(x_0, S)$.

Si x_0 es un punto de no convexidad local de $\text{front } S$ pero

además no es un punto de inflexión extraordinario (3.2.1), el teorema 3.2.5 asegura que $st(x_0, S)$ e $ins(x_0, S)$ difieren a lo sumo en un conjunto contenido en una recta.

Si x_0 es un punto de inflexión extraordinario (punto de no convexidad local y de acumulación de puntos chatos), una demostración similar a la de la última parte del teorema 5.7.1 asegura que es también un punto cónico.

Si x_0 es un punto de convexidad local pero no un punto chato, por el teorema 3.2.6 $ins(x_0, S) = st(x_0, S)$.

Por último, si x_0 es un punto chato, existe un segmento $[ab] \subset \text{front } S$ tal que $x_0 \in (ab)$, y una recta L tal que $(ab) \subset L$.

Si $t \in st(x_0, S) \cap L$ una demostración similar a la del teorema 3.2.6 asegura que $t \in ins(x_0, S)$.

Si $t \in [ab]$, $R(t, x_0 \rightarrow)$ es obviamente un rayo saliente. Luego si x_0 es un punto chato, $st(x_0, S) = ins(x_0, S)$.

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Beer, G.: The index of Convexity and the Visibility function - Pacific J. 44 (1973) 59-67.
- [2] Beer, G.: The continuity of the Visibility function on a starshaped set. Canadian J. 24 (1972) 989-992.
- [3] Beer, G.: Continuity properties of the Visibility function. Michigan Math. J. 20 (1973) 297-302.
- [4] Bragard, L.: Ensembles étoilés et irradiés de R^n . Bull. Soc..Roy. SC. Liège 36 (1967) 238-243.
- [5] Eggleston, H.G.: Convexity. Cambridge University Press - 1969.
- [6] Fava, N.A.: Keilhauer, G. y Larotonda, A.R.: Cursos y seminarios de Matemática (Fascículo 38) Depto. de Matemática (1980) Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
- [7] Grünbaum, B.: The dimension of intersections of convex sets. Pacific J. of Math. 12 (1962) 197-202.
- [8] Grünbaum, B.: Convex Polytopes - Interscience Publishers (1967).

- [9] Hadwiger; Debrunner and Klee: Combinatorial Geometry in the plane. Holt, Rinehart and Winston 1964.
- [10] Halpern, B.: The kernel of a starshaped subset of the plane, Proceedings of the Amer. Math. Soc. 23 (1969) 692-696.
- [11] Helly, E.: Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten, Jber. Deutsch Math. Verein 32 (1923) 175-176.
- [12] Horn, Alfred; Valentine, F.A.: Some properties of L sets in the plane. Duke Math. J. 16 (1949) 131-140.
- [13] Kelley, J.L.: Topologia General. Eudeba (1962).
- [14] Klee, V.L.: The critical set of a convex body, Amer. J of Math. 75 (1953), 178-188.
- [15] Kolmogorov, A.N.; Fomin, S.V.: Elementos de la teoría de funciones y del Análisis Funcional. Ed. Mir. Moscú (1978).
- [16] Krassnoselsky, M.A.: Sur un critère pour qu' un domaine soit étoilé. Math. Sb. (61) 19 (1946) 309-310.
- [17] Stavrakas, N.M.: The dimension of the convex kernel and points of local nonconvexity, Proc. of the Amer. Math. Soc. 34 (1972), 222-224.

- [18] Tietze, H.: Über Konvexheit im kleinen und im grossen und über gewisse den Punkten einer Menge zugeordnete Dimensionszahlen, Math. z., 28 (1928), 697-707.
- [19] Toranzos, F.A.: Critical visibility and outward rays, a aparecer en J. of Geometry.
- [20] Toranzos, F.A.: Points of local nonconvexity and starshaped sets - Pacific Journal 101 (1982) 209-213.
- [21] Toranzos, F.A.; Nanclares, J.H.: Convexidad. Cursos seminarios y tesis del P.E.A.M. Universidad de Zulia, (1978).
- [22] Valentine, F.A.: Local convexity and L_n sets, Proceedings of the Amer. Math. Soc. 16 (1965) 1305-1310.
- [23] Valentine, F.A.: Convex Sets. New York, (1964).
- [24] Valentine, F.A.: Local convexity and starshaped set. Israel J. of Math. 3 (1965) 39-42. .