

## Tesis de Posgrado

# Valores medios relacionados con puntos aleatorios dados en un cuerpo convexo y en particular en la esfera

Affentranger, Fernando

1988

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Affentranger, Fernando. (1988). Valores medios relacionados con puntos aleatorios dados en un cuerpo convexo y en particular en la esfera. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2088\\_Affentranger.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2088_Affentranger.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Affentranger, Fernando. "Valores medios relacionados con puntos aleatorios dados en un cuerpo convexo y en particular en la esfera". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1988.

[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2088\\_Affentranger.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2088_Affentranger.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

TESIS:

Nº 2088

Ej. 2

Universidad Nacional de Buenos Aires  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

VALORES MEDIOS RELACIONADOS CON PUNTOS ALEATORIOS DADOS EN UN CUERPO CONVEXO  
Y EN PARTICULAR EN LA ESFERA

Autor

*Fernando Affentranger*

Director de Tesis

*Dr. L.A. Santaló*

Tesis para optar al título de  
Doctor en Ciencias Matemáticas

1988

- 2088 -  
y. 2

I N D I C E

I INTRODUCCION

II PRELIMINARES

Capítulo 1	Notaciones . . . . .	12
Capítulo 2	Teorema de Crofton de Puntos Fijos . . . . .	14
2.1	<i>Demostración clásica del Teorema de Crofton.</i> . . . . .	14
2.2	<i>Contraejemplo de la generalización de Geciauskas</i> . . . . .	18
2.3	<i>El método modificado de Crofton.</i> . . . . .	19
Capítulo 3	Generalización de una fórmula de Efron . . . . .	25
Capítulo 4	Dos generalizaciones de una fórmula de C. Buchta . . . . .	28
4.1	<i>La configuración estocástica <math>S(K;n,0)</math></i> . . . . .	28
4.2	<i>La configuración estocástica <math>S(K;d+2-i,i)</math></i> . . . . .	32

III VALORES MEDIOS RELACIONADOS CON LA CONFIGURACION  $S(B_d;n-i,i)$

Capítulo 5	El valor medio del volumen de $H_{n-i,i}$ . . . . .	35
5.1	<i>Representación integral del valor medio del volumen</i> . . . . .	35
5.2	<i>Casos particulares</i> . . . . .	43
5.3	<i>Observaciones</i> . . . . .	46
Capítulo 6	El valor medio de la superficie de $H_{n-i,i}$ . . . . .	51
6.1	<i>Representación integral del valor medio de la superficie</i> . . . . .	51
6.2	<i>Casos particulares</i> . . . . .	54
6.3	<i>Observaciones</i> . . . . .	58

Capítulo 7	El valor medio de la anchura media de $H_{n-i,i}$ . . . . .	60
7.1	<i>Representación integral del valor medio de la anchura media</i> . . . . .	60
7.2	<i>Casos particulares</i> . . . . .	62
7.3	<i>Observaciones</i> . . . . .	64
Capítulo 8	El valor medio del número de vértices de $H_{n-i,i}$ . . . . .	65
8.1	<i>Representación integral del valor medio del número de vértices</i> . . . . .	65
8.2	<i>Casos particulares</i> . . . . .	66
Capítulo 9	El valor medio del número de facetas de $H_{n-i,i}$ . . . . .	68
9.1	<i>Representación integral del valor medio del número de facetas</i> . . . . .	68
9.2	<i>Casos particulares</i> . . . . .	70
9.3	<i>Observaciones</i> . . . . .	74

IV PROBLEMA DE SYLVESTER

Capítulo 10	Reseña histórica del problema . . . . .	76
Capítulo 11	La generalización de R.E. Miles . . . . .	82
11.1	<i>Planteamiento del problema</i> . . . . .	82
11.2	<i>Polítopos del "tipo de Sylvester"</i> . . . . .	83
11.2.1	<i>Fórmulas generales</i> . . . . .	83
11.2.2	<i>Caso particular <math>d = 2</math></i> . . . . .	85
11.2.3	<i>Caso particular <math>d = 3</math></i> . . . . .	86
11.3	<i>La configuración <math>S(B_d; d+3-i, i)</math></i> . . . . .	87
11.3.1	<i>Fórmulas generales</i> . . . . .	87
11.3.2	<i>Caso particular <math>d = 2</math></i> . . . . .	89
11.3.3	<i>Caso particular <math>d = 3</math></i> . . . . .	90

11.4	<i>La configuración</i> $S(B_d; d+4-i, i)$ . . . . .	91
11.4.1	<i>Fórmulas generales</i> . . . . .	91
11.4.2	<i>Caso particular</i> $d = 2$ . . . . .	96
11.4.3	<i>Caso particular</i> $d = 3$ . . . . .	97
11.5	<i>Observaciones</i> . . . . .	98

V UN PROBLEMA DE PROBABILIDADES GEOMETRICAS

Capítulo 12	Círculos aleatorios en la bola unidad $B_d$ . . . . .	103
-------------	---	-----

	<i>Bibliografía</i> . . . . .	107
--	-------------------------------	-----

**ODUCCIO**

A mediados del siglo pasado, el matemático inglés J.J. Sylvester propuso el siguiente problema relacionado con probabilidades geométricas:

*¿Cuál es la probabilidad  $p(K)$  de que cuatro puntos distribuidos independiente y uniformemente al azar en el interior de un conjunto convexo plano  $K$  formen un cuadrilátero convexo?*

Consideremos la probabilidad complementaria  $\bar{p}(K)$ , es decir, la probabilidad de que la cápsula convexa de los cuatro puntos en cuestión sea un triángulo. Se ve fácilmente que

$$\bar{p}(K) = \frac{4}{F(K)} v_3^{(2)}(K)$$

siendo  $F(K)$  el área de  $K$ , y  $v_3^{(2)}(K)$  el valor medio del área de un triángulo cuyos vértices se encuentran distribuidos independiente y uniformemente en el interior de  $K$ . Por consecuencia, posibles soluciones del, entretanto, considerado clásico Problema de Sylvester, dependerán directamente del conocimiento del invariante afín  $v_3^{(2)}(K)/F(K)$ .

Consideremos ahora en el espacio euclidiano  $E^d$  la configuración estocástica  $S(K;n-i,i)$  formada por  $n$  puntos aleatorios,  $n-i$  de los cuales se encuentran distribuidos en el interior, los  $i$  restantes sobre el contorno de un cuerpo convexo  $K$  de dimensión  $d$  ( $d \geq 2$ ,  $n \geq d$ ,  $0 \leq i \leq n$ ). Vamos a suponer que tanto los puntos interiores  $P_1, \dots, P_{n-i}$  como los puntos del contorno  $S_1, \dots, S_i$  estén distribuidos de manera independiente y uniforme en el interior y sobre el contorno de  $K$ , respectivamente. Con probabilidad 1, la cápsula convexa  $H_{n-i,i}(K)$  de  $P_1, \dots, P_{n-i}, S_1, \dots, S_i$  resulta ser un polígono aleatorio de por los menos  $d$  y a lo sumo  $n$  vértices.

Objeto de este Trabajo de Tesis es, por un lado, estudiar de manera detallada aspectos de ciertas variables aleatorias reales relacionadas con la cápsula convexa  $H_{n-i,i}(K)$ . Por otro lado, en los capítulos 10 y 11, retomaremos el clásico

Problema de Sylvester y, aplicando resultados obtenidos en los capítulos precedentes, extenderemos una generalización propuesta por R.E.Miles [1971].

El capítulo 1 contiene una lista de las principales notaciones utilizadas a lo largo del texto.

En el capítulo 2 presentamos primero la demostración clásica del Teorema de Crofton de Puntos Fijos. El teorema relaciona las configuraciones estocásticas  $S(K;n,0)$  y  $S(K;n-1,1)$ . Señalemos al respecto que muchos problemas vinculados a probabilidades geométricas admiten solución, puesto que la fórmula diferencial establecida por Crofton [1885] reduce el número de variables del problema en cuestión. En las secciones 2.2 y 2.3 mencionamos ciertos inconvenientes que se nos presentaron al intentar aplicar al Problema de Sylvester una generalización del Teorema de Crofton propuesta por Gečiauskas [1985].

En el capítulo 3 demostramos la fórmula

$$E_{n-i,i}^{(d)}(K) = n - \frac{(n-i)}{V(K)} V_{n-1-i,i}^{(d)}(K)$$

que expresa el valor medio del número de vértices de la cápsula convexa  $H_{n-i,i}(K)$  en función del valor medio del volumen de  $H_{n-1-i,i}(K)$ . Para el caso particular  $i = 0$ , es decir, todos los puntos en cuestión se encuentran distribuidos en el interior de  $K$ , obtenemos la fórmula demostrada por Efron [1965].

En el capítulo 4 consideramos dos generalizaciones de una fórmula de Buchta [1983], [1986a] relacionadas con las configuraciones  $S(K;n,0)$  y  $S(K;d+2-i,i)$ . Para demostrar la expresión

$$V_{d+2-i,i}^{(d)}(K) = \frac{1}{2} \sum_{r=\max\{0,i-1\}}^{\min\{i,d+1\}} \binom{d+2-i}{d+1-r} \binom{i}{r} V_{d+1-r,r}^{(d)}(K)$$

(comparar sección 4.2), utilizamos la misma argumentación seguida por Buchta [1986a] para el caso particular  $i = 0$ .

En la parte III estudiamos de manera sistemática los valores medios del volumen, la superficie, la anchura media, el número de vértices y el número de facetas de la cápsula convexa  $H_{n-i,i}$  para el caso particular de la bola unidad de dimensión  $d$ . En la primera sección de los capítulos 5 a 9 nos dedicamos a desarrollar fórmulas integrales que expresan los respectivos valores medios. La argumentación más detallada se encuentra en la sección 5.1 donde, considerando una descomposición simplicial adecuada de la cápsula convexa  $H_{n-i,i}$  y teniendo en cuenta resultados establecidos por Deltheil [1926] y Miles [1971], obtenemos una representación integral de  $V_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$  el valor medio del volumen de  $H_{n-i,i}$ .

En la segunda sección de cada capítulo ilustramos la utilidad de las fórmulas integrales obtenidas dando expresiones explícitas para ciertos casos particulares.

Deducimos, por ejemplo, que

$$V_{d+1-i,i}^{(d)}(B_d) = \frac{\rho_{d-1}^{d+1} 2\sqrt{\pi}}{d^i \rho_d^d (d+1)^{d+1-i}} \frac{\Gamma\left(\frac{d^2+2d-2i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2+2d-2i+2}{2}\right)}$$

y

$$S_{d+1-i,i}^{(d)}(B_d) = \frac{\rho_{d-1}^d \sqrt{\pi}}{(d+1)^{d-i} d^{i-2} \rho_d^{d-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{d^2+d-2i+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2+d-2i+1}{2}\right)} \left( \frac{d+1-i}{d} + \frac{i(d^2+d-2i+2)}{(d+1)(d^2+d-2i+1)} \right)$$

(comparar secciones 5.2 y 6.2). Establecemos asimismo tablas con valores numéricos para los casos particulares del plano euclidiano y el espacio de tres dimensiones. Los casos particulares  $i = 0$  e  $i = n$ , es decir, todos los puntos aleatorios

en cuestión están distribuidos en el interior o sobre el contorno de la bola unidad  $B_d$ , han sido tratados recientemente por Buchta, Müller y Tichy [1984], [1985], quienes obtienen expresiones "explícitas" de los valores medios de la superficie, la anchura media y el número de facetas de las cápsulas convexas  $H_{n,0}$  y  $H_{0,n}$ , respectivamente. Observemos al respecto que la descomposición simplicial utilizada por Buchta, Müller y Tichy [1984], [1985] no permite un tratamiento de los valores medios del volumen  $V_{n,0}^{(d)}(B_d)$  y  $V_{0,n}^{(d)}(B_d)$ . Estos dos casos particulares los hemos desarrollado de manera detallada en las notas [1987b] y [1987c].

El valor medio del volumen  $V_{n,0}^{(d)}(K)$  aparece asimismo en el siguiente contexto. Generalizando un teorema de Blaschke [1917], Groemer [1973], [1974] demuestra que, entre todos los cuerpos convexos  $K$  de igual volumen, el valor medio del volumen  $V_{n,0}^{(d)}(K)$  es mínimo únicamente si  $K$  es un elipsoide. Por consiguiente, dado que  $V_{n,0}^{(d)}(K)/V(K)$  es un invariante afín, las fórmulas integrales establecidas en la sección 5.1 permiten determinar la cota inferior de Groemer para valores arbitrarios de  $d$  y  $n$ . Finalmente hacemos brevemente mención de la manera en que intervienen los valores medios  $V_{n-i,i}^{(d)}(K)$  y  $S_{n-i,i}^{(d)}(K)$  en el problema de la aproximación aleatoria de cuerpos convexos. Se tiene, por ejemplo, que el valor medio de la distancia, en el sentido de la métrica de diferencia simétrica  $\delta^S$ , entre la bola unidad  $B_3$  y un poliedro aleatorio con vértices sobre el contorno de  $B_3$ , es igual a

$$E(\delta^S(B_3, H_{0,n})) = \frac{4\pi}{3} \left( 1 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right)$$

Otros resultados relacionados con la cápsula convexa de puntos aleatorios y con la aproximación de cuerpos convexos, pueden ser consultados en los resúmenes de Buchta [1985] y Gruber [1983].

La parte IV está dedicada de manera exclusiva al Problema de Sylvester. En el capítulo 10 damos una reseña histórica del problema y mencionamos los resultados que han sido obtenidos hasta el momento.

Una generalización del Problema de Sylvester consiste en determinar las probabilidades

$$p_{d+1}^{(d)}(K; d+m-i, i) \quad , \quad , \quad p_{d+m}^{(d)}(K; d+m-i, i)$$

$d \geq 2$  ,  $m \geq 2$  ,  $0 \leq i \leq d+m$  , de que la cápsula convexa  $H_{d+m-i, i}(K)$  relacionada con la configuración estocástica  $S(K; d+m-i, i)$  tenga  $d+1, \dots, d+m$  vértices. Kingman [1969] resuelve el problema para el caso particular  $K \equiv B_d$  ,  $m = 2$  ,  $i = 0$  . Poco más tarde Miles [1971] hace lo mismo para  $K \equiv B_d$  ,  $m = 3$  ,  $i = 0$  .

En un trabajo reciente Buchta [1986a] expresa las probabilidades

$$p_{d+1}^{(d)}(K; d+3, 0) \quad p_{d+2}^{(d)}(K; d+3, 0) \quad \text{y} \quad p_{d+3}^{(d)}(K; d+3, 0)$$

en función del primer y segundo momento del volumen de un simple aleatorio cuyos vértices se encuentran distribuídos independiente y uniformemente en el interior de un cuerpo convexo  $K$  de dimensión  $d$  (comparar capítulo 10, expresiones (10.9) - (10.11)

En el capítulo 11, aplicando resultados obtenidos en las partes II y III, establecemos fórmulas explícitas para las probabilidades

$$p_{d+j}^{(d)}(B_d; d+m-i, i) \quad , \quad d \geq 2 \quad , \quad m = 2, 3, 4 \quad , \quad 1 \leq j \leq m \quad , \quad 0 \leq i \leq d+m$$

Para los casos particulares  $m = 2$  y  $m = 3$  ilustramos el Problema de Sylvester dando todos los valores posibles para el plano y el espacio de tres dimensiones (comparar tablas 11.1 - 11.4 ).

En el caso particular  $m = 4$  aparece un nuevo invariante  $M_{2, d+2}^{(d)}(B_d; d+2-i, i)$  , el segundo momento del volumen del polítopo aleatorio de dimensión  $d$  vinculado a la configuración estocástica  $S(B_d; d+2-i, i)$  para el cual, desafortunadamente, las cuentas parecen ser inaccesibles. De todas maneras, en las tablas 11.5 y 11.6 , mencionamos los resultados "calculables".

Finalmente, en el capítulo 12, tratamos un típico problema de probabilidades geométricas. Consideremos tres puntos aleatorios  $P$ ,  $P_1$  y  $P_2$  distribuidos independiente y uniformemente en el interior de la bola unidad  $B_d$ .

*¿Cuál es la probabilidad  $p(B_d; 2)$  de que la circunferencia que pasa por  $P$ ,  $P_1$  y  $P_2$  esté completamente contenida en  $B_d$ ?*

### Agradecimientos

Quisiera finalmente expresar en este lugar mi mayor agradecimiento al Dr. L.A. Santaló quien, como Director de Tesis, me brindó un continuo y valioso apoyo a lo largo del trabajo. Agradezco asimismo al Dr. C. Buchta (Viena/Austria) quien, en el transcurso de nuestra correspondencia, me facilitó ejemplares de sus últimas publicaciones motivándome así a considerar parte de los problemas tratados en este Trabajo de Tesis.

Las labores se realizaron en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Buenos Aires con el apoyo económico del CONICET (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas).

Por último, doy gracias a mi familia, amigos y en especial a mi señora, Sybille Oetliker, por el apoyo moral que me ofrecieron durante los últimos tres años.



## CAPITULO 1 NOTACIONES

En este capítulo definimos los conceptos fundamentales que vamos a usar a lo largo del trabajo.

Si  $d$  es un entero,  $d \geq 1$ , indicamos con  $E^d$  el *espacio euclidiano* de dimensión  $d$ . Llamamos *cuerpo convexo*  $K$  de dimensión  $d$  a un conjunto convexo y compacto tal que su interior no sea vacío.

La *configuración estocástica*  $S(K; n-i, i)$  consiste en un conjunto de  $n$  puntos aleatorios,  $n-i$  de los cuales se encuentran distribuidos independiente y uniformemente en el interior, los restantes  $i$  sobre el contorno de un cuerpo convexo  $K$  de dimensión  $d$  ( $n \geq d$ ,  $0 \leq i \leq n$ ). Indicamos con  $P_h$  ( $1 \leq h \leq n-i$ ) los *puntos interiores*, con  $S_j$  ( $1 \leq j \leq i$ ) los *puntos del contorno* de  $K$ . Asimismo indicamos el *elemento de volumen* de  $K$  en el punto  $P_h$  y el *elemento de superficie* del contorno de  $K$  en el punto  $S_j$  con  $dP_h$  y  $dS_j$ , respectivamente.

Nótese que, con probabilidad 1, la *cápsula convexa*  $H_{n-i, i}(K)$  del conjunto de puntos  $\{P_1, \dots, P_{n-i}, S_1, \dots, S_i\}$  es un *polígono simplicial*, es decir, todas las facetas de  $H_{n-i, i}(K)$  son simples de dimensión  $d-1$ .

Muchos ejemplos y valores numéricos que aparecen en el trabajo están relacionados con la *bola unidad*  $B_d$  en  $E^d$ , o sea el conjunto  $B_d = \{X \in E^d : |X| \leq 1\}$  y con su contorno  $\partial B_d = \{X \in E^d : |X| = 1\}$ . Indicamos con  $\rho_d$  y  $\omega_{d-1}$  el *volumen* y la *superficie* de  $B_d$  y  $\partial B_d$ , respectivamente (obsérvese que el índice en  $\omega_{d-1}$  indica la dimensión de  $\partial B_d$  como variedad métrica).

Llamamos *hiperplano*  $L_{d-1}$  en  $E^d$  a una variedad lineal de dimensión  $d-1$ . Si  $p$ ,  $p > 0$ , es la distancia del origen de coordenadas  $O$  al hiperplano  $L_{d-1}$ , se tiene que la única densidad (salvo un factor constante) de hiperplanos invariante por movimientos rígidos en  $E^d$  es igual a  $dL_{d-1} = dp d\omega_{d-1}$ .

Para no sobrecargar las expresiones integrales indicamos el campo de integración sólo en los casos en que el contexto lo requiere. Eludimos asimismo introducir más índices en las abreviaciones  $I(p)$ ,  $\alpha$  y  $\beta_r$  (capítulos 5 a 9) observando que se refieren únicamente a las fórmulas en que aparecen.

Damos a continuación una lista de las notaciones que con mayor frecuencia aparecen a lo largo del texto.

$\rho_r$	volumen de la bola unidad de dimensión $r$ en $E^r$
$\omega_{r-1}$	superficie de la esfera unidad de dimensión $r-1$ en $E^r$
$H_{n-i,i}(K)$	cápsula convexa definida por la configuración $S(K;n-i,i)$
$V_{n-i,i}^{(d)}(K)$	valor medio del volumen de $H_{n-i,i}(K)$
$S_{n-i,i}^{(d)}(K)$	valor medio de la superficie de $H_{n-i,i}(K)$
$W_{n-i,i}^{(d)}(K)$	valor medio de la anchura media de $H_{n-i,i}(K)$
$E_{n-i,i}^{(d)}(K)$	valor medio del número de vértices de $H_{n-i,i}(K)$
$F_{n-i,i}^{(d)}(K)$	valor medio del número de facetas de $H_{n-i,i}(K)$
$p_{d+j}^{(d)}(K;d+m-i,i)$	probabilidad de que la cápsula convexa definida por la configuración estocástica $S(K;d+m-i,i)$ tenga $d+j$ vértices, $1 \leq j \leq m$ .
$M_r^{(d)}(K;d+1-i,i)$	$r$ -ésimo momento del volumen del simple aleatorio definido por la configuración estocástica $S(K;d+1-i,i)$ .
$M_{r,d+2}^{(d)}(K;d+2-i,i)$	$r$ -ésimo momento del volumen del polítopo aleatorio de dimensión $d$ definido por la configuración estocástica $S(K;d+2-i,i)$

## CAPITULO 2    TEOREMA DE CROFTON DE PUNTOS FIJOS

### 2.1. Demostración clásica del Teorema de Crofton

Consideremos la configuración estocástica  $S(K;n,0)$  formada por  $n$  puntos aleatorios  $P_1, \dots, P_n$  distribuidos independiente y uniformemente en el interior de un cuerpo convexo  $K$  en  $E^d$  ( $d \geq 1$ ).

Nuestra intención es determinar la probabilidad  $p$  de que la configuración  $S(K;n,0)$  verifique cierta propiedad intrínseca, es decir, la propiedad en cuestión depende únicamente de la posición relativa de los puntos  $P_1, \dots, P_n$  y no del cuerpo convexo  $K$  o de la posición relativa de  $S(K;n,0)$  respecto de  $K$ . Por ejemplo, dados 3 puntos aleatorios  $P_1, P_2$  y  $P_3$  distribuidos independiente y uniformemente en el interior de una figura convexa plana  $K$ , la probabilidad de que  $P_1, P_2$  y  $P_3$  formen un triángulo agudo depende únicamente de la posición relativa de  $P_1, P_2$  y  $P_3$ . En cambio, la probabilidad de que la circunferencia que pasa por  $P_1, P_2$  y  $P_3$  esté completamente contenida en  $K$ , dependerá decisivamente de la forma de la figura convexa plana  $K$  (comparar capítulo 12).

Volviendo al caso general podemos afirmar que

$$(2.1) \quad p = \frac{U}{V^n}$$

donde  $V = V(K)$  es el volumen del cuerpo convexo  $K$  y  $U$  la medida del conjunto de casos favorables. Sea  $K'$  otro cuerpo convexo que contiene a  $K$  y tal que

$$(2.2) \quad V' = V + \Delta V \quad \text{y} \quad U' = U + \Delta U$$

siendo  $V'$  el volumen de  $K'$ , y  $U'$  la medida del conjunto de casos favorables para el caso en que los puntos  $P_1, \dots, P_n$  estén distribuidos en el interior de  $K'$ . La probabilidad de que la configuración  $S(K'; n, 0)$  verifique la propiedad en cuestión es igual a

$$(2.3) \quad p + \Delta p = \frac{U'}{V'^n} = \frac{U + \Delta U}{(V + \Delta V)^n}$$

Sea ahora  $p_j$  la probabilidad de que la propiedad se cumpla en el caso de que  $n-j$  puntos estén distribuidos en  $K$  y los restantes  $j$  en  $K' - K$ . La medida del conjunto de casos favorables es

$$(2.4) \quad U + \Delta U = U + U_1 + \dots + U_j + \dots + U_n,$$

donde

$$(2.5) \quad U_j = \binom{n}{j} p_j V^{n-j} (\Delta V)^j$$

y, por lo tanto,

$$(2.6) \quad (p + \Delta p) (V + \Delta V)^n = p V^n + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} p_j V^{n-j} (\Delta V)^j$$

o

$$(2.7) \quad \Delta p (V + \Delta V)^n = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (p_j - p) V^{n-j} (\Delta V)^j$$

Supongamos ahora que  $\Delta V$  es un incremento infinitesimal del volumen de  $K$ . Considerando únicamente los términos de primer grado, e identificando incrementos infinitesimales con diferenciales, obtenemos finalmente

$$(2.8) \quad dp = n(p_1 - p) \frac{dV}{V} ,$$

es decir, obtenemos una relación diferencial entre  $p$ , la probabilidad de que la configuración estocástica  $S(K;n,0)$  verifique una cierta propiedad intrínseca, y  $p_1$ , la misma probabilidad vinculada a la configuración  $S(K;n-1,1)$ . La expresión (2.8) es conocida como "Teorema de Crofton de Puntos Fijos".

### Observación 2.1

Los mismos argumentos aquí desarrollados se pueden extender sin mayores dificultades a dominios medibles y a configuraciones con distribuciones más generales que la uniforme (comparar Kendall y Moran [1963] y Deltheil [1926]).

### Observación 2.2

Exactamente el mismo método se puede aplicar para demostrar la siguiente relación diferencial

$$(2.9) \quad d\mu = n(\mu_1 - \mu) \frac{dV}{V} ,$$

donde  $\mu$  es el valor medio de cierta variable aleatoria intrínseca vinculada a la configuración  $S(K;n,0)$  y  $\mu_1$  el mismo valor medio relacionado con  $S(K;n-1,1)$  (comparar Kendall y Moran [1963] y Deltheil [1926]).

### Observación 2.3

Para el caso de la bola de dimensión  $d$  y de radio  $R$ , integrando (2.9), obtenemos

$$(2.10) \quad \mu = \frac{dn}{R \, d\tilde{n}} \int_0^R \mu_1(\tilde{R}) \tilde{R}^{dn-1} d\tilde{R}$$

Observación 2.4

Muchos problemas relacionados con probabilidades geométricas pueden ser resueltos en virtud del Teorema de Crofton de Puntos Fijos, ya que pasar de la configuración  $S(K;n,0)$  a la configuración  $S(K;n-1,1)$  significa reducir el número de variables.

Observación 2.5

Supongamos que para  $j = 1, \dots, k$ ,  $D_j$  sea un dominio de dimensión  $d_j$  y volumen  $V_j$ . Supongamos además que  $n_j$  puntos aleatorios se encuentren distribuidos en el interior de  $D_j$ . Ruben y Reed [1973] demuestran la siguiente generalización del Teorema de Crofton:

$$(2.11) \quad d\mu = \sum_{j=1}^k n_j (\mu_j^* - \mu) \frac{dV_j}{V_j}$$

donde  $d\mu$  es el incremento de  $\mu$  que se obtiene al incrementar cada dominio  $D_j$  por  $dV_j$ , y  $\mu_j^*$  el valor medio de la variable aleatoria en cuestión que se obtiene al fijar un punto en el contorno de  $D_j$ . Cada dominio tiene que ser incrementado de tal manera que se conserve equivalencia afín con la situación original.

Reed [1974] utiliza la forma generalizada (2.11) del Teorema de Crofton de Puntos Fijos para determinar los momentos del área de un triángulo formado por tres puntos distribuidos en el interior de un triángulo y de un paralelogramo.

Observación 2.6

Geciauskas [1985] propone la siguiente generalización del Teorema de Crofton de Puntos Fijos. Sea  $S(D;n-i,i)$  la configuración estocástica formada por un dominio medible  $D$  de dimensión  $d$  y  $n$  puntos aleatorios,  $n-i$  de los cuales están distribuidos independientemente en el interior y los restantes  $i$  en el contorno del dominio  $D$ . Sea  $\mu_i(r)$ ,  $0 \leq i \leq n$ , el  $r$ -ésimo momento de cierta variable aleatoria intrínseca relacionada con la configuración  $S(D;n-i,i)$ . Se tiene que

$$(2.12) \quad \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n}{i} \frac{d^{k-i} \mu_0(r)}{dV^{k-i}} V^{n-i} i! \quad \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \binom{n}{i} \frac{d^{k-i} \mu_i(r)}{dV^{k-i}} V^{n-i} i! \quad , 1 \leq k \leq n$$

siendo  $V$  la medida del dominio  $D$ .

Objeto de las secciones 2.2 y 2.3 es presentar un contraejemplo de la generalización propuesta por Geciauskas, como asimismo mostrar dónde, a mi parecer, falla el "método modificado de Crofton" utilizado por el autor en la demostración de la fórmula (2.12).

2.2. Contraejemplo de la generalización de Geciauskas

Consideremos en el plano euclidiano  $E^2$  la configuración estocástica  $S(B_2(R);2-i,i)$ ,  $0 \leq i \leq 2$ , formada por un círculo de radio  $R$  y dos puntos aleatorios,  $2-i$  de los cuales están distribuidos independiente y uniformemente en el interior y los restantes  $i$  en el contorno de  $B_2(R)$ . Sea  $\mu_i(R)$  el valor medio de la distancia entre los puntos dados relacionado con la configuración  $S(B_2(R);2-i,i)$ . Los valores de  $\mu_i(R)$ ,  $0 \leq i \leq 2$ , se calculan fácilmente (comparar, por ejemplo, Santaló [1976]) :

$$(2.13) \quad \mu_0(R) = \frac{128}{45\pi} R, \quad \mu_1(R) = \frac{32}{9\pi} R \quad \text{y} \quad \mu_2(R) = \frac{4}{\pi} R,$$

o, en función del área  $F$  de  $B_2(R)$ ,

$$(2.14) \quad \mu_0(F) = \frac{128}{45} \pi^{-3/2} F^{1/2}, \quad \mu_1(F) = \frac{32}{9} \pi^{-3/2} F^{1/2} \quad \text{y} \quad \mu_2(F) = 4\pi^{-3/2} F^{1/2}$$

Remplazando en la fórmula (2.12) se verifica rápidamente que

$$(2.15) \quad F^2 \frac{d^2 \mu_0}{dF^2} + 4F \frac{d\mu_0}{dF} + 2\mu_0 \neq 4F \frac{d\mu_1}{dF} + 2\mu_2$$

### 2.3 El método modificado de Crofton

La demostración de Gečiauskas sigue exactamente el mismo razonamiento desarrollado por Crofton [1885] hasta llegar a la expresión

$$(2.16) \quad (\mu + \Delta\mu)(V + \Delta V)^n = \mu V^n + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \mu_j V^{n-j} (\Delta V)^j$$

Aquí el autor propone el siguiente camino. Sea  $t$ ,  $t \geq 0$ , un parámetro que describe el crecimiento del dominio  $D$ . Se tiene que

$$(2.17) \quad \mu + \Delta\mu = \mu_t \quad \text{y} \quad V + \Delta V = V_t$$

Remplazando en (2.16) obtenemos

$$(2.18) \quad \mu_t V_t^n = \mu V^n + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \mu_j(V_t) V^{n-j} (V_t - V)^j$$

y, diferenciando respecto de  $V_t$ ,

$$(2.19) \quad \frac{d\mu_t}{dV_t} V_t^n + \mu_t n V_t^{n-1} = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{d\mu_j(V_t)}{dV_t} V_t^{n-j} (V_t - V)^j$$

$$\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \mu_j(V_t) V_t^{n-j} j (V_t - V)^{j-1}$$

Haciendo ahora tender  $V_t \rightarrow V$  obtenemos la clásica fórmula de Crofton:

$$(2.20) \quad V \frac{d\mu}{dV} + n\mu = n\mu_1$$

Derivando sucesivamente respecto del volumen incrementado  $V_t$ , y haciendo tender  $V_t \rightarrow V$ , se obtiene finalmente la expresión (2.12).

A continuación demostramos que, en general, aparecen ciertos inconvenientes en estas dos últimas operaciones. En particular, vamos a ver que para el contraejemplo presentado en la sección 2.2, se tiene que

$$(2.21) \quad \lim_{F_t \rightarrow F} \frac{d\mu_1(F_t)}{dF_t} \neq \frac{d\mu_1}{dF}$$

es decir, los términos que aparecen en la expresión (2.19) no tienen por qué ser continuos, con lo cual la derivación sucesiva respecto de  $V_t$ , como asimismo el paso al límite  $V_t \rightarrow V$ , se verían altamente afectados.

*Demostración de (2.21).* Retomemos el contraejemplo de la sección 2.2. Sea  $B_2(R)$  un círculo de radio  $R$ ,  $B_2(R,t)$  otro círculo concéntrico de radio  $R+t$  ( $t > 0$  chico)

y área  $F_t$ . Para el valor medio de la distancia de  $P_1$  a  $P_2$  obtenemos (comparar figura 2.1 ) :

$$(2.22) \quad \mu_1(F_t) = \frac{1}{(F_t - F) F} \iint_{\substack{P_2 \in B_2(R) \\ P_1 \in B_2(R,t) - B_2(R)}} \|P_1 - P_2\| dP_1 dP_2$$

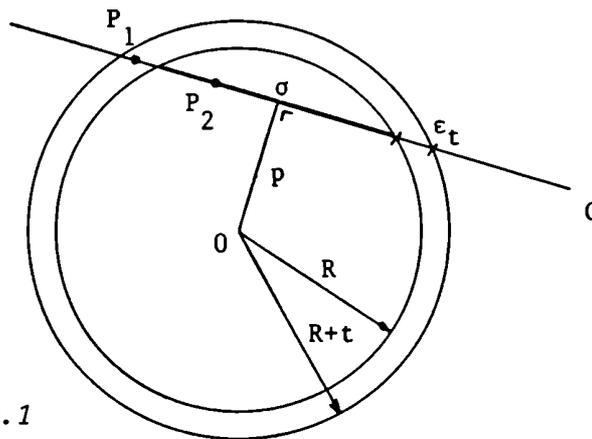


Figura 2.1

o, utilizando la conocida densidad de par de puntos (comparar Santaló [1976], p.46),

$$(2.23) \quad \mu_1(F_t) = \frac{1}{(F_t - F) F} \int_{G + B_2(R)} \left[ 2 \int_0^{\epsilon_t} \int_0^{\epsilon_t + \sigma} |t_1 - t_2|^2 dt_1 dt_2 \right] dG$$

donde  $t_1$  y  $t_2$  son las abscisas de los puntos  $P_1$  y  $P_2$  sobre la recta  $G$  determinada por  $P_1$  y  $P_2$ . Integrando obtenemos

$$(2.24) \quad \mu_1(F_t) = \frac{1}{(F_t - F) F} \int_{G + B_2(R)} \left[ \frac{2}{3} \epsilon_t^3 \sigma + \epsilon_t^2 \sigma^2 + \frac{2}{3} \epsilon_t \sigma^3 \right] dG$$

donde  $\sigma = \sigma(p) = 2(R^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}$  es la longitud de la cuerda  $G \cap B_2(R)$ ,  $p$  la distancia de  $G$  al centro  $O$  de  $B_2(R)$  y  $\epsilon_t = \epsilon_t(F_t) = \left(\frac{F_t}{\pi} - p^2\right)^{\frac{1}{2}} - \sigma/2$  (comparar figura 2.1).  
 Teniendo en cuenta que  $F_t - F = \pi(\epsilon_t^2 + \epsilon_t \sigma)$ , se obtiene

$$(2.25) \quad \mu_1(F_t) = \frac{1}{\pi F} \int_{G \cap B_2(R)} \left[ \frac{\frac{2}{3} \epsilon_t^3 \sigma + \epsilon_t^2 \sigma^2 + \frac{2}{3} \epsilon_t \sigma^3}{\epsilon_t^2 + \epsilon_t \sigma} \right] dG$$

Diferenciamos ahora (2.25) respecto del incremento del área  $F_t$  (aplicando el teorema de Leibniz sobre integrales dependientes de un parámetro) :

$$(2.26) \quad \frac{d\mu_1(F_t)}{dF_t} = \frac{1}{2\pi^2 F} \int_{G \cap B_2(R)} \left[ \frac{\frac{2}{3} \epsilon_t^4 \sigma + \frac{4}{3} \epsilon_t^3 \sigma^2 + \frac{1}{3} \epsilon_t^2 \sigma^3}{(\epsilon_t^2 + \epsilon_t \sigma)^2 (\epsilon_t + \sigma/2)} \right] dG$$

Para valores lo suficientemente chicos de  $t$  podemos escribir  $\epsilon_t \cong \frac{2Rt}{\sigma}$  (parte lineal del desarrollo en serie de Taylor), de donde resulta que

$$(2.27) \quad \frac{d\mu_1(F_t)}{dF_t} \cong \frac{1}{2\pi^2 F} \int_{G \cap B_2(R)} \left[ \frac{\frac{32}{3} R^4 \sigma^{-3} t^4 + \frac{32}{3} R^3 \sigma^{-1} t^3 + \frac{4}{3} R^2 \sigma t^2}{\frac{32 R^5 t^5}{\sigma^5} + \frac{40 R^4 t^4}{\sigma^3} + \frac{16 R^3 t^3}{\sigma} + 2 R^2 \sigma t^2} \right] dG$$

Estamos ahora en condiciones de pasar al límite  $F_t \rightarrow F$  :

$$(2.28) \quad \lim_{F_t \rightarrow F} \frac{d\mu_1(F_t)}{dF_t} \cong \frac{1}{2\pi^2 F} \int_{G+B_2(R)} \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{\frac{32}{3} R^4 \sigma^{-3} t^4 + \frac{32}{3} R^3 \sigma^{-1} t^3 + \frac{4}{3} R^2 \sigma t^2}{\frac{32 R^5 t^5}{\sigma^5} + \frac{40 R^4 t^4}{\sigma^3} + \frac{16 R^3 t^3}{\sigma} + 2R^2 \sigma t^2} \right] dG ,$$

y por lo tanto

$$(2.29) \quad \lim_{F_t \rightarrow F} \frac{d\mu_1(F_t)}{dF_t} \cong \frac{1}{3\pi^2 F} \int_{G+B_2(R)} dG$$

Obsérvese que en (2.28) hemos utilizado el teorema de convergencia monótona de Lebesgue. Finalmente, recordando que la medida del conjunto de rectas que intersecan a una figura convexa plana es igual al perímetro del contorno, obtenemos

$$(2.30) \quad \lim_{F_t \rightarrow F} \frac{d\mu_1(F_t)}{dF_t} = \frac{2}{3} \pi^{-3/2} F^{-1/2}$$

Pero, por otro lado, se tiene que

$$(2.31) \quad \frac{d\mu_1(F)}{dF} = \frac{d}{dF} \left( \frac{32}{9} \pi^{-3/2} F^{-1/2} \right) = \frac{16}{9} \pi^{-3/2} F^{-1/2}$$

Observación 2.7

El hecho de obtener correctamente la clásica fórmula de Crofton utilizando el "método modificado de Crofton" propuesto por Gečiauskas, ha de considerarse fortuito ya que en la expresión (2.19) se tiene que

$$\frac{d\mu_j(V_t)}{dV_t} (V_t - V)^j \xrightarrow{V_t \rightarrow V} 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

y, por lo tanto, la discontinuidad de  $d\mu_j(V_t)/dV_t$  no afecta el valor del límite final.

CAPITULO 3 GENERALIZACION DE UNA FORMULA DE EFRON

Consideremos en el espacio euclidiano  $E^d$  ( $d \geq 1$ ) la configuración estocástica  $S(K;n-i,i)$  formada por  $n-i$  puntos  $P_1, \dots, P_{n-i}$  del interior e  $i$  puntos  $S_1, \dots, S_i$  del contorno de un cuerpo convexo  $K$  de dimensión  $d$ . Supongamos que tanto  $P_1, \dots, P_{n-i}$  como  $S_1, \dots, S_i$  estén distribuidos independiente y uniformemente en el interior y sobre el contorno de  $K$ , respectivamente. Sea  $H_{n-i,i}$  la cápsula convexa generada por los puntos  $P_1, \dots, P_{n-i}, S_1, \dots, S_i$ . Objeto de este capítulo es generalizar una fórmula de Efron [1965] que relaciona el valor medio del número de vértices de  $H_{n-i,i}$  con el valor medio del volumen de  $H_{n-i-1,i}$ , la cápsula convexa generada por los puntos  $P_1, \dots, P_{n-i-1}, S_1, \dots, S_i$ . Para el valor medio del número de vértices  $E_{n-i,i}^{(d)}(K)$  podemos escribir

$$(3.1) \quad E_{n-i,i}^{(d)}(K) = \frac{\int (\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n-i} + \epsilon'_1 + \dots + \epsilon'_i) dP_1 \dots dP_{n-i} dS_1 \dots dS_i}{[V(K)]^{n-i} [S(K)]^i}$$

donde

$$\epsilon_j \quad \begin{cases} 1 & \text{si } P_j \text{ es vértice de } H_{n-i,i} \\ 0 & \text{si } P_j \text{ no es vértice de } H_{n-i,i} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n-i \quad \text{y}$$

$$\epsilon'_h \quad \begin{cases} 1 & \text{si } S_h \text{ es vértice de } H_{n-i,i} \\ 0 & \text{si } S_h \text{ no es vértice de } H_{n-i,i} \end{cases} \quad h = 1, 2, \dots, i$$

Puesto que los puntos  $P_1, \dots, P_{n-i}$  y  $S_1, \dots, S_i$  están distribuidos idénticamente en el interior y sobre el contorno del cuerpo convexo  $K$ , respectivamente, se obtiene

$$(3.2) \quad E_{n-i,i}^{(d)}(K) = \frac{(n-i) \int \epsilon_{n-i} dP_1 \dots dP_{n-i} dS_1 \dots dS_i}{[V(K)]^{n-i} [S(K)]^i} + \frac{i \int \epsilon_i' dP_1 \dots dP_{n-i} dS_1 \dots dS_i}{[V(K)]^{n-i} [S(K)]^i},$$

y por lo tanto,

$$(3.3) \quad E_{n-i,i}^{(d)}(K) = (n-i) \tilde{p}(K) + i \hat{p}(K)$$

siendo

$$\tilde{p}(K) = p(P_{n-i} \text{ sea vértice de } H_{n-i,i}) \quad y$$

$$\hat{p}(K) = p(S_i \text{ sea vértice de } H_{n-i,i})$$

Con probabilidad 1 todos los puntos del contorno son vértices de la cápsula convexa  $H_{n-i,i}$ . Obtenemos entonces

$$(3.4) \quad E_{n-i,i}^{(d)}(K) = i + (n-i) \tilde{p}(K)$$

$$(3.5) \quad E_{n-i,i}^{(d)}(K) = i + (n-i) [1 - \bar{p}(K)]$$

donde  $\bar{p}(K)$  es la probabilidad de que  $P_{n-i}$  no sea vértice de  $H_{n-i,i}$ . Con probabilidad 1,  $P_{n-i}$  no es vértice de  $H_{n-i,i}$  si y sólo si está contenido en la cápsula convexa  $H_{n-i-1,i}$  generada por los puntos  $P_1, \dots, P_{n-i-1}, S_1, \dots, S_i$ . Por consiguiente deducimos que

$$(3.6) \quad E_{n-i,i}^{(d)}(K) = i + (n-i) \left( 1 - \frac{v_{n-i-1,i}^{(d)}(K)}{V(K)} \right),$$

y finalmente

$$(3.7) \quad E_{n-i,i}^{(d)}(K) = n - \frac{(n-i)}{V(K)} v_{n-i-1,i}^{(d)}(K)$$

Observación 3.1

Para el caso particular  $i = 0$ , es decir todos los puntos se encuentran distribuidos en el interior de  $K$ , obtenemos reemplazando en (3.7)

$$(3.8) \quad E_{n,0}^{(d)}(K) = n - \frac{n}{V(K)} v_{n-1,0}^{(d)}(K)$$

en coincidencia con lo establecido por Efron [1965].

Observación 3.2

Para el caso particular  $i = n$ , es decir todos los puntos se encuentran distribuidos sobre el contorno de  $K$ , obtenemos

$$(3.9) \quad E_{0,n}^{(d)}(K) =$$

en coherencia con los argumentos utilizados en la demostración de la fórmula (3.7).

4.1 La configuración estocástica  $S(K;n,0)$

Consideremos primero en el espacio euclidiano  $E^d$  ( $d \geq 1$ ) la configuración estocástica  $S(K;n,0)$  formada por  $n$  puntos aleatorios  $P_1, \dots, P_n$  distribuidos independiente y uniformemente en el interior de un cuerpo convexo  $K$  de dimensión  $d$ . Sea  $V_{n,0}^{(d)}(K)$  el valor medio del volumen de  $H_{n,0}$ , la cápsula convexa de los puntos  $P_1, \dots, P_n$ .

Para figuras convexas planas y cuerpos convexas de 3 dimensiones, Buchta [1983] demuestra las siguientes relaciones:

$$(4.1) \quad V_{4,0}^{(2)}(K) = 2 V_{3,0}^{(2)}(K)$$

y

$$(4.2) \quad V_{5,0}^{(3)}(K) = \frac{5}{2} V_{4,0}^{(3)}(K)$$

Objeto de esta sección es generalizar las expresiones (4.1) y (4.2) en el siguiente sentido:

Teorema 4.1. Sea  $K$  una figura convexa plana. Se tiene que

$$(4.3) \quad V_{2m,0}^{(2)}(K) = \sum_{k=1}^{m-1} C_{2(m-k)+1} V_{2(m-k)+1,0}^{(2)}(K) \quad m = 2, 3, \dots$$

donde  $C_{2(m-k)+1}$  son constantes definidas por la fórmula recursiva:

$$C_{2m-1} = m$$

$$C_{2(m-k)+1} = \frac{m}{2(m-k)+1} \left( \binom{2m-1}{2k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2m-2i+1}{2m} \binom{2m-2i}{2k-2i} C_{2(m-i)+1} \right)$$

para  $k = 2, 3, \dots, m-1$ .

Teorema 4.2. Sea  $K$  un cuerpo convexo de dimensión 3 en  $E^3$ . Se tiene que

$$(4.4) \quad v_{2m+1,0}^{(3)}(K) = \sum_{k=1}^{m-1} C'_{2(m-k)+2} v_{2(m-k)+2,0}^{(3)}(K) \quad m = 2, 3, \dots$$

donde  $C'_{2(m-k)+2}$  son constantes definidas por la fórmula recursiva:

$$C'_{2m} = \frac{2m+1}{2}$$

$$C'_{2(m-k)+2} = \frac{m(2m+1)}{(2m-2k+1)(2m-2k+2)} \left( \binom{2m-1}{2k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(2m-2i+1)(2m-2i+2)}{2m(2m+1)} \times \binom{2m-2i}{2k-2i} C'_{2(m-i)+2} \right)$$

para  $k = 2, 3, \dots, m-1$ .

*Ilustración de la demostración del teorema 4.1.* Presentamos a continuación la demostración de la expresión (4.3) para el caso particular  $m = 3$ .

Dado que el cociente  $v_{n,0}^{(2)}(K) / F(K)$  es un invariante afín, podemos suponer que el área de  $K$  sea igual a 1. Rényi y Sulanke [1963], p.76, demuestran que

$$(4.5) \quad E_{n+1,0}^{(2)}(K) = \binom{n+1}{2} \int (\hat{v}^{n-1} + (1-\hat{v})^{n-1}) dP_1 dP_2$$

donde  $E_{n+1,0}^{(2)}(K)$  es el valor medio del número de vértices de  $H_{n+1,0}$ , la cápsula convexa de  $P_1, \dots, P_{n+1}$ , y  $\hat{V} = \hat{V}(P_1, P_2)$  el área de la más chica de las dos partes en que queda dividida la figura convexa  $K$  por la recta determinada por  $P_1$  y  $P_2$ . Utilizando la fórmula de Efron (3.8) obtenemos

$$(4.6) \quad v_{n,0}^{(2)}(K) = 1 - \frac{n}{2} \int (\hat{V}^{n-1} + (1-\hat{V})^{n-1}) dP_1 dP_2,$$

y para  $n = 6$

$$\begin{aligned} v_{6,0}^{(2)}(K) &= 1 - 3 \int (\hat{V}^5 + (1-\hat{V})^5) dP_1 dP_2 \\ &= 1 - 15 \int (\hat{V}^4 - 2\hat{V}^3 + 2\hat{V}^2 - \hat{V} + \frac{1}{5}) dP_1 dP_2 \\ &= 1 - 15 \int (\hat{V}^4 - 2\hat{V}^3 + 3\hat{V}^2 - 2\hat{V} + \frac{1}{2}) dP_1 dP_2 + 15 \int (\hat{V}^2 - \hat{V} + \frac{3}{10}) dP_1 dP_2 \\ &= 3v_{5,0}^{(2)}(K) - 2 + 15 \int (\hat{V}^2 - \hat{V} + \frac{1}{2}) dP_1 dP_2 - 3 \int dP_1 dP_2 \\ &= 3v_{5,0}^{(2)}(K) - 5v_{3,0}^{(2)}(K) \end{aligned}$$

en coincidencia con (4.3) para  $m = 3$ .

#### Observación 4.1

Las demostraciones rigurosas de los teoremas 4.1 y 4.2 pueden ser consultadas en la nota "Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points" [1987a].

Observación 4.2

Sustituyendo  $m = 2$  en las expresiones (4.3) y (4.4) obtenemos

$$v_{4,0}^{(2)}(K) = 2 v_{3,0}^{(2)}(K) \quad y$$

$$v_{5,0}^{(3)}(K) = \frac{5}{2} v_{4,0}^{(3)}(K) \quad ,$$

en coincidencia con las relaciones (4.1) y (4.2) de Buchta [1983].

Observación 4.3

Algunos valores numéricos para el caso de figuras convexas planas:

$$v_{4,0}^{(2)}(K) = 2 v_{3,0}^{(2)}(K)$$

$$v_{6,0}^{(2)}(K) = 3 v_{5,0}^{(2)}(K) - 5 v_{3,0}^{(2)}(K) \quad y$$

$$v_{8,0}^{(2)}(K) = 4 v_{7,0}^{(2)}(K) - 14 v_{5,0}^{(2)}(K) + 28 v_{3,0}^{(2)}(K)$$

Observación 4.4

Algunos valores numéricos para el caso de cuerpos convexas en  $E^3$  :

$$v_{5,0}^{(3)}(K) = \frac{5}{2} v_{4,0}^{(3)}(K)$$

$$v_{7,0}^{(3)}(K) = \frac{7}{2} v_{6,0}^{(3)}(K) - \frac{35}{4} v_{4,0}^{(3)}(K) \quad y$$

$$v_{9,0}^{(3)}(K) = \frac{9}{2} v_{8,0}^{(3)}(K) - 21 v_{6,0}^{(3)}(K) + 63 v_{4,0}^{(3)}(K)$$

#### 4.2. La configuración estocástica $S(K;d+2-i,i)$

Consideremos ahora la configuración estocástica  $S(K;d+2-i,i)$  formada por  $d+2-i$  puntos  $P_1, \dots, P_{d+2-i}$  del interior e  $i$  puntos  $S_1, \dots, S_i$  del contorno de  $K$ , un cuerpo convexo de dimensión  $d$  en  $E^d$ . Supongamos que tanto  $P_1, \dots, P_{d+2-i}$  como  $S_1, \dots, S_i$  estén distribuidos independiente y uniformemente en el interior y sobre el contorno de  $K$ , respectivamente.

Recientemente, de nuevo Buchta [1986a] generaliza las expresiones (4.1) y (4.2) para el caso de  $d$  dimensiones, obteniendo la siguiente relación:

$$(4.7) \quad v_{d+2,0}^{(d)}(K) = \frac{d+2}{2} v_{d+1,0}^{(d)}(K)$$

Objeto de esta sección es generalizar la fórmula (4.7) de Buchta en el siguiente sentido:

Teorema 4.3. El valor medio del volumen  $v_{d+2-i,i}^{(d)}(K)$  de la cápsula convexa  $H_{d+2-i,i}$  vinculada a la configuración estocástica  $S(K;d+2-i,i)$  satisface la siguiente relación

$$(4.8) \quad v_{d+2-i,i}^{(d)}(K) = \frac{1}{2} \sum_{r=\max\{0,i-1\}}^{\min\{i,d+1\}} \binom{d+2-i}{d+1-r} \binom{i}{r} v_{d+1-r,r}^{(d)}(K)$$

*Demostración del teorema 4.3.* Utilizamos el mismo razonamiento seguido por Buchta [1986a]. Consideremos la cápsula convexa  $H_{d+2-i,i}$  como un simple de dimensión  $d+1$  contenido en un hiperplano de dimensión  $d$ . El volumen de dimensión  $d$  de un tal simple es igual a dos veces su superficie de dimensión  $d$ , que a su vez es igual a la suma de los volúmenes de dimensión  $d$  de sus facetas.

La configuración estocástica  $S(K; d+2-i, i)$  determina

$$\binom{d+2-i}{d+1-r} \binom{i}{r} \quad r = \max\{0, i-1\}, \dots, \min\{i, d+1\}$$

simples del tipo  $H_{d+1-r, r}$ , es decir simples de dimensión  $d$  con  $d+1-r$  vértices distribuidos en el interior y  $r$  vértices distribuidos sobre el contorno del cuerpo convexo  $K$ .

Observación 4.5

Para el caso particular  $i = 0$ , es decir, los  $d+2$  puntos en cuestión se encuentran distribuidos en el interior de  $K$ , obtenemos

$$\begin{aligned} v_{d+2,0}^{(d)}(K) &= \frac{1}{2} \binom{d+2}{d+1} v_{d+1,0}^{(d)}(K) \\ &= \frac{d+2}{2} v_{d+1,0}^{(d)}(K) \quad , \end{aligned}$$

en coincidencia con la fórmula (4.7) de Buchta.

PARTE II

LA ORE DEL NORD O NAD-O

DE CONFERENZA O S(B<sub>d</sub>; n-1, 1)

CAPITULO 5 EL VALOR MEDIO DEL VOLUMEN DE  $H_{n-i,i}$

5.1. Representación integral del valor medio del volumen  $V_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$

Consideremos en el espacio euclidiano  $E^d$  ( $d \geq 2$ ) la configuración estocástica  $S(B_d; n-i, i)$  formada por  $n-i$  puntos  $P_1, \dots, P_{n-i}$  ( $n \geq d+1, i \geq 1$ ) del interior e  $i$  puntos  $S_1, \dots, S_i$  del contorno de  $B_d$ , la bola unidad de dimensión  $d$ . Supongamos que tanto  $P_1, \dots, P_{n-i}$  como  $S_1, \dots, S_i$  estén distribuidos independiente y uniformemente en el interior y en el contorno de  $B_d$ , respectivamente. En esta sección nos proponemos desarrollar fórmulas integrales que expresen el valor medio del volumen  $V_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$  de  $H_{n-i,i}$ , la cápsula convexa de los puntos  $P_1, \dots, P_{n-i}, S_1, \dots, S_i$ .

Con probabilidad 1 el contorno de la cápsula convexa  $H_{n-i,i}$  es la unión de un cierto número de facetas (simples de dimensión  $d-1$ ). Teniendo en cuenta que  $S_1, \dots, S_i$  son vértices de  $H_{n-i,i}$  podemos elegir  $S \equiv S_i$  y, uniendo los vértices restantes de  $H_{n-i,i}$  con  $S$ , obtenemos así una descomposición de la cápsula convexa  $H_{n-i,i}$  en un cierto número de simples de dimensión  $d$ . Del conjunto de puntos

$$\{P_1, \dots, P_{n-i}, S_1, \dots, S_{i-1}\}$$

elegimos ahora un subconjunto de  $d$  puntos. Con probabilidad

$$(5.1) \quad \frac{\binom{n-i}{d-r} \binom{i-1}{r}}{\binom{n-1}{d}}$$

obtenemos el siguiente subconjunto de puntos

$$\{P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r\} \quad ,$$

donde

$$r = \max \{0, d+i-n\}, \dots, \min\{d, i-1\} \quad .$$

El hiperplano  $L_{d-1}$  generado por  $P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r$  divide a  $B_d$  en dos partes.

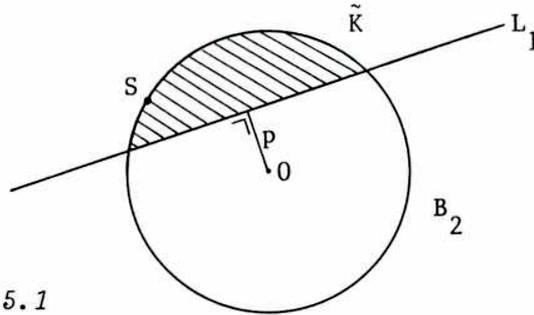


Figura 5.1

La cápsula convexa de  $P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r$  coincide con una faceta de  $H_{n-i, i}$  (una faceta que no contiene el punto  $S$ ), únicamente si los puntos  $P_{d-r+1}, \dots, P_{n-i}$  y  $S_{r+1}, \dots, S_{i-1}$  están contenidos en  $\tilde{K}$ , la parte de  $B_d$  determinada por  $L_{d-1}$  que contiene el punto  $S$  (comparar figura 5.1).

La probabilidad de que ocurra este evento es igual a

$$(5.2) \quad \left(\frac{\tilde{V}}{\rho_d}\right)^{n-i-d+r} \left(\frac{\tilde{S}}{\omega_{d-1}}\right)^{i-r-1}$$

donde  $\tilde{V} = \tilde{V}(P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r, S)$  es el volumen de  $\tilde{K}$  y  $\tilde{S} = \tilde{S}(P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r, S)$

la superficie de  $\tilde{K} \cap \partial B_d$ .

El volumen del simple de dimensión  $d$  determinado por  $P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r, S$  es

$$(5.3) \quad \frac{\delta(S, L_{d-1}) T}{d}$$

siendo  $\delta(S, L_{d-1})$  la distancia del punto  $S$  al hiperplano  $L_{d-1}$  y

$T = T(P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r)$  el volumen del simple de dimensión  $d-1$  formado por  $P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r$ .

Dado que  $P_1, \dots, P_{n-i}$  y  $S_1, \dots, S_{i-1}$  están distribuidos idénticamente en el interior y en el contorno de  $B_d$ , existen  $\binom{n-1}{d}$  posibilidades de elegir el subconjunto de  $d$  puntos

$$\{P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r\}$$

Después de todo esto, teniendo en cuenta las expresiones (5.1)-(5.3), podemos afirmar que el valor medio del volumen  $v_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$  es igual a

$$(5.4) \quad v_{n-i,i}^{(d)}(B_d) = \binom{n-1}{d} \sum_{r=\max\{0, d+i-n\}}^{\min\{d, i-1\}} (1/d \rho_d^{n-i} \omega_{d-1}^i) \int \delta(S, L_{d-1}) \tilde{V}^{n-i-d+r} \tilde{S}^{i-r-1} \times$$

$$\times \frac{\binom{n-1}{d-r} \binom{i-1}{r}}{\binom{n-1}{d}} T dP_1 \dots dP_{d-r} dS_1 \dots dS_r dS$$

Recordando que  $L_{d-1}$  es el hiperplano generado por los puntos  $P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r$ , aplicamos ahora la siguiente equivalencia estocástica demostrada por Miles [1971].

Resulta equivalente :

- (1) Elegir independiente y uniformemente al azar  $d-r$  puntos  $P_1, \dots, P_{d-r}$  del interior y  $r$  puntos  $S_1, \dots, S_r$  del contorno de  $B_d$
- (2) Elegir primero un hiperplano aleatorio  $L_{d-1}$  cuyo vector normal unidad esté distribuído uniformemente y tal que la distancia  $p$  del centro  $O$  de  $B_d$  a  $L_{d-1}$  tenga la siguiente función de densidad

$$\left( \frac{2}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{d^2-2r+1}{2}\right)} \right) (1-p^2)^{\frac{d^2-2r-1}{2}} \quad (0 \leq p \leq 1)$$

siendo  $B(x,y)$  la función beta. Elegir después  $d-r$  puntos  $P'_1, \dots, P'_{d-r}$  en  $L_{d-1} \cap B_d$  y  $r$  puntos  $S'_1, \dots, S'_r$  en  $L_{d-1} \cap \partial B_d$  de tal manera que la distribución conjunta sea la distribución uniforme de  $P'_1, \dots, P'_{d-r}, S'_1, \dots, S'_r$  ponderada por el siguiente factor

$$\left( \frac{(d-1)!}{(1-p^2)^{\frac{d-1}{2}}} \right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{d^2-2r+1}{2}\right) (d/(d-1))^{d-r} T \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)^{d-1}}{\left(\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\right)^d}$$

De (1) y (2) deducimos que

$$(5.5) \quad dP_1 \dots dP_{d-r} dS_1 \dots dS_r = \left( \frac{(d-1)!}{(1-p^2)^{r/2}} \right) T dP'_1 \dots dP'_{d-r} dS'_1 \dots dS'_r dp d\omega_{d-1}$$

Utilizando las nuevas coordenadas se tiene que

$$(5.6) \quad v_{n-i,i}^{(d)}(B_d) = \left( (d-1)! / d \rho_d^{n-i} \omega_{d-1}^i \right) \sum_{r=\max\{0, d+i-n\}}^{\min\{d, i-1\}} \binom{n-i}{d-r} \binom{i-1}{r} \int \delta(S, L_{d-1}) (1-p^2)^{-r/2} \times \\ \times \tilde{v}^{n-i-d+r} \tilde{s}^{i-r-1} \left( \int_{T^2} dP'_1 \dots dP'_{d-r} dS'_1 \dots dS'_r \right) dp d\omega_{d-1} dS$$

Miles [1971] obtiene el k-ésimo momento del volumen de un simple aleatorio  $H_{d-r,r}$  de dimensión  $d-1$  formado por  $d-r$  puntos interiores y  $r$  puntos del contorno de una bola de dimensión  $d-1$  y radio  $R$ . Utilizando el resultado de Miles [1971] (teorema 2, p.362) deducimos que

$$(5.7) \quad \int_{T^2} dP'_1 \dots dP'_{d-r} dS'_1 \dots dS'_r = (1-p^2)^{\frac{d^2+d-r-2}{2}} \rho_{d-1}^d \frac{d^{d^2+d-2r}}{(d-1)! (d+1)^{d-r}}$$

Remplazando en (5.6) se obtiene

$$(5.8) \quad v_{n-i,i}^{(d)}(B_d) = \frac{1}{d \rho_d^{n-i} \omega_{d-1}^i} \sum_{r=\max\{0, d+i-n\}}^{\min\{d, i-1\}} \binom{n-i}{d-r} \binom{i-1}{r} \frac{d^{d^2+d-2r}}{(d+1)^{d-r}} \rho_{d-1}^d \times \\ \int \delta(S, L_{d-1}) \tilde{v}^{n-i-d+r} \tilde{s}^{i-r-1} (1-p^2)^{\frac{d^2+d-2-2r}{2}} dp dS$$

Para la densidad del punto  $S$  podemos aplicar la siguiente fórmula diferencial (comparar Deltheil [1926], p.109) :

$$(5.9) \quad dS = d\omega_{d-1} = \sin^{d-2} \theta d\theta d\omega_{d-2} \quad (0 \leq \theta \leq \pi) ,$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por el vector unidad  $e_d$  ortogonal a  $L_{d-1}$  y orientado hacia el semiespacio determinado por  $L_{d-1}$  que no contiene el centro  $O$  de  $B_d$ , y el vector  $\overrightarrow{OS}$  (comparar Figura 5.2).

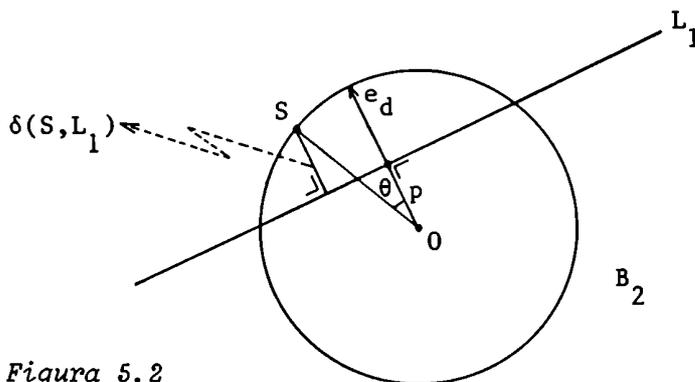


Figura 5.2

Utilizando la expresión diferencial (5.9) obtenemos para el valor medio del volumen

$$(5.10) \quad v_{n-i,i}^{(d)}(B_d) = \tilde{\alpha}(d,n,i) \sum_{r=\max\{0,d+i-n\}}^{\min\{d,i-1\}} \beta_r(d,n,i) \int_0^1 \tilde{I}(p) (1-p^2)^{\frac{d^2+d-2-2r}{2}} dp$$

donde

$$\tilde{\alpha}(d,n,i) = \rho_{d-1}^d / (d \rho_d^{n-1} \omega_{d-1}^{i-1})$$

$$\beta_r(d,n,i) = \binom{n-i}{d-r} \binom{i-1}{r} \frac{d^2+d-2r}{(d+1)^{d-r}}$$

y

$$\tilde{I}(p) = \int \delta(S, L_{d-1}) \tilde{V}^{n-i-d+r} \tilde{S}^{i-r-1} \sin^{d-2} \theta d\theta d\omega_{d-2}$$

Para calcular la distancia del punto  $S$  al hiperplano  $L_{d-1}$  resulta conveniente elegir el siguiente sistema de coordenadas: supongamos que  $L_{d-1}$  es el hiperplano generado por el sistema ortonormal  $(O'; e_1, \dots, e_{d-1})$ . Completamos este sistema de coordenadas con  $e_d$ , el vector unidad normal a  $L_{d-1}$  que introducimos antes para definir el ángulo  $\theta$ . Se ve fácilmente que para la distancia del punto  $S$  al hiperplano  $L_{d-1}$  resulta

$$(5.11) \quad \delta(S, L_{d-1}) = \begin{cases} \cos \theta - p & \text{para } 0 \leq \theta \leq \arccos p \\ p - \cos \theta & \text{para } \arccos p \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Nótese que la distancia  $\delta(S, L_{d-1})$  no varía si fijamos el ángulo  $\theta$  y extendemos la integración de  $S$  a  $\partial B_d \cap L'_{d-1}$ , siendo  $L'_{d-1}$  el hiperplano paralelo a  $L_{d-1}$  que pasa por  $S$ .

Quedan por expresar  $\tilde{V}(p, \theta)$ , el volumen de  $\tilde{K}$ , y  $\tilde{S}(p, \theta)$ , la superficie de  $\partial B_d \cap \tilde{K}$ . Se verifica fácilmente que

$$(5.12) \quad \hat{V}(p) = \rho_{d-1} \int_p^1 (1-q^2)^{\frac{d-1}{2}} dq = \begin{cases} \tilde{V}(p, \theta) & \text{para } 0 \leq \theta \leq \arccos p \\ \rho_d - \tilde{V}(p, \theta) & \text{para } \arccos p \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

donde  $\hat{V}(p)$  indica el volumen de la menor de las dos partes en que queda dividida la bola unidad  $B_d$  por el hiperplano  $L_{d-1}$ . De la misma manera tenemos

$$(5.13) \quad \hat{S}(p) = \omega_{d-2} \int_p^1 (1-q^2)^{\frac{d-3}{2}} dq = \begin{cases} \tilde{S}(p, \theta) & \text{para } 0 \leq \theta \leq \arccos p \\ \omega_{d-1} - \tilde{S}(p, \theta) & \text{para } \arccos p \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

donde  $\hat{S}(p)$  indica la superficie de la menor de las dos partes en que queda dividido el contorno de la bola unidad  $B_d$  por el hiperplano  $L_{d-1}$ .

Finalmente, teniendo en cuenta las expresiones (5.10) - (5.13), obtenemos la siguiente expresión integral del valor medio del volumen de  $H_{n-i, i}$

$$(5.14) \quad V_{n-i, i}^{(d)}(B_d) = \alpha(d, n, i) \sum_{r=\max\{0, d+i-n\}}^{\min\{d, i-1\}} \beta_r(d, n, i) \int_0^1 I(p) (1-p^2)^{\frac{d^2+d-2-2r}{2}} dp$$

donde

$$(5.15) \quad I(p) = \hat{V}^{n-i-d+r} \hat{S}^{i-r-1} \int_0^{\arccos p} (\cos \theta - p) \sin^{d-2} \theta d\theta + \\ + (\rho_d - \hat{V})^{n-i-d+r} (\omega_{d-1} - \hat{S})^{i-r-1} \int_{\arccos p}^{\pi} (p - \cos \theta) \sin^{d-2} \theta d\theta$$

y

$$\alpha(d, n, i) = \frac{(d-1) \rho_{d-1}^{d+1}}{d^i \rho_d^{n-1}} \quad \beta_r = \binom{n-i}{d-r} \binom{i-1}{r} \frac{d^2+d-2-2r}{(d+1)^{d-r}}$$

5.2. Casos particulares

(a)  $i = 0$ . Nos encontramos frente al caso en que los  $n$  puntos aleatorios en cuestión son puntos interiores de  $B_d$ . En el desarrollo de las fórmulas (5.14) y (5.15) vimos que, en cierto momento, es necesario fijar un punto del contorno de  $B_d$ . Por lo tanto, para no excluir este importante caso particular, podemos aplicar el teorema de Crofton de puntos fijos (comparar capítulo 2) y el valor de  $V_{n,0}^{(d)}(B_d)$  se obtiene directamente a partir del valor de  $V_{n-1,1}^{(d)}(B_d)$ . Buchta [1984a], siguiendo otro método, obtiene para el plano y el espacio de tres dimensiones las siguientes expresiones:

$$(5.16) \quad V_{n,0}^{(2)}(B_2) = (1/\pi^n) + \frac{2}{3(2\pi^2)^n} \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^n \sin t \, dt$$

y

$$(5.17) \quad V_{n,0}^{(3)}(B_3) = (3/4\pi)^n - \frac{2}{n+1}(3/4\pi)^n - 21(n-1)n(3/4\pi)^n \sum_{k=0}^{n-2} (-2)^k \times \\ \times 3^{n-k-2} \binom{n-2}{k} \binom{2n+k+5}{5}^{-1}$$

(b)  $i = n$ . Es el caso en que todos los puntos se encuentran en el contorno de  $B_d$ . Sustituyendo  $i = n$  en las expresiones (5.14) y (5.15) obtenemos

$$(5.18) \quad V_{0,n}^{(d)}(B_d) = \alpha(d,n,n) \beta_d(d,n,n) \int_0^1 I(p) (1-p^2)^{\frac{d^2-d-2}{2}} dp \quad ,$$

donde

$$\alpha(d,n,n) \beta_d(d,n,n) = \binom{n-1}{d} \frac{(d-1)^2}{d^{d-1}} \left( \rho_{d-1}^{d+1} / \rho_d^{n-1} \right) \quad y$$

$$(5.19) \quad I(p) = \hat{S}^{n-d-1} \int_0^{\arccos p} (\cos \theta - p) \sin^{d-2} \theta \, d\theta + (\omega_{d-1} - \hat{S})^{n-d-1} \int_{\arccos p}^{\pi} (p - \cos \theta) \sin^{d-2} \theta \, d\theta .$$

Para el plano y el espacio de 3 dimensiones obtenemos por integración las siguientes expresiones explícitas:

$$(5.20) \quad v_{0,n}^{(2)}(B_2) = (n! / 4\pi) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2\pi)^{-2k}}{(n-2k-2)!} \quad y$$

$$(5.21) \quad v_{0,n}^{(3)}(B_3) = (4\pi/3) \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

(c)  $n = d+1$ . Con probabilidad 1 la cápsula convexa  $H_{d+1-i,i}$  resulta ser un simple aleatorio de dimensión  $d$ . Sustituyendo  $n = d+1$  en las expresiones (5.14) y (5.15) obtenemos

$$(5.22) \quad v_{d+1-i,i}^{(d)}(B_d) = \alpha(d,d+1,i) \beta_{i-1}(d,d+1,i) \int_0^1 I(p) (1-p^2)^{\frac{d^2+d-2i}{2}} \, dp$$

donde

$$\alpha(d,d+1,i) \beta_{i-1}(d,d+1,i) = \frac{(d-1)}{d^i} \left( \rho_{d-1}^{d+1} / \rho_d^d \right) \frac{d^2+d-2i+2}{(d+1)^{d-i+1}} \quad y$$

$$(5.23) \quad I(p) = \int_0^{\arccos p} (\cos \theta - p) \sin^{d-2} \theta \, d\theta + \int_{\arccos p}^{\pi} (p - \cos \theta) \sin^{d-2} \theta \, d\theta$$

Cuentas algo engorrosas, pero en lo esencial elementales, muestran que

$$(5.24) \quad v_{d+1-i, i}^{(d)}(B_d) = \frac{\rho_{d-1}^{d+1} 2\sqrt{\pi}}{d^i \rho_d^d (d+1)^{d+1-i}} \frac{\Gamma\left(\frac{d^2+2d-2i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2+2d-2i+2}{2}\right)}$$

(d)  $d = 2$ . A partir de las expresiones (5.14) y (5.15) obtenemos para el plano la siguiente tabla de valores numéricos:

$\begin{matrix} i \\ n \end{matrix}$	0	1	2	3	4
3	$\frac{35}{48\pi}$ (0.232)	$\frac{35}{36\pi}$ (0.309)	$\frac{5}{4\pi}$ (0.398)	$\frac{3}{2\pi}$ (0.477)	X
4	$\frac{35}{24\pi}$ (0.464)	$\frac{175}{96\pi}$ (0.580)	$\frac{20}{9\pi}$ (0.707)	$\frac{21}{8\pi}$ (0.836)	$\frac{3}{\pi}$ (0.955)

Tabla 5.1 Algunos valores numéricos de  $v_{n-i, i}^{(2)}(B_2)$

(\*) Estos valores también han sido determinados por Miles [1971] y Buchta [1984a]. Los restantes son nuevos.

(e)  $d = 3$ . Análogamente, a partir de las expresiones (5.14) y (5.15) obtenemos para el espacio de 3 dimensiones la siguiente tabla de valores numéricos:

$n \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
4	$\frac{12\pi}{715}$ (*) (0.053)	$\frac{3\pi}{143}$ (*) (0.066)	$\frac{2\pi}{77}$ (*) (0.082)	$\frac{2\pi}{63}$ (*) (0.100)	$\frac{4\pi}{105}$ (*) (0.120)		
5	$\frac{6\pi}{143}$ (*) (0.132)	$\frac{36\pi}{715}$ (0.158)	$\frac{60\pi}{1001}$ (0.188)	$\frac{7\pi}{99}$ (0.222)	$\frac{26\pi}{315}$ (0.259)	$\frac{2\pi}{21}$ (0.314)	
6	$\frac{2070\pi}{29393}$ (*) (0.221)	$\frac{345\pi}{4199}$ (0.258)	$\frac{1620\pi}{17017}$ (0.299)	$\frac{548\pi}{5005}$ (0.344)	$\frac{268\pi}{2145}$ (0.392)	$\frac{14\pi}{99}$ (0.444)	$\frac{10\pi}{63}$ (0.499)

Tabla 5.2 Algunos valores numéricos de  $V_{n-i,i}^{(3)}(B_3)$

(\*) Estos valores también han sido determinados por Miles [1971] y Buchta [1984a]. Los restantes son nuevos.

### 5.3. Observaciones

#### Observación 5.1

Las tablas de valores numéricos 5.1 y 5.2 sugieren que, fijando el número  $n$  de puntos aleatorios, el valor medio del volumen  $V_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$  crece a medida que aumentamos el número de puntos del contorno. Por lo tanto,  $V_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$  resultaría maximal para  $i = n$  y minimal para  $i = 0$ . Parece razonable conjeturar que el mismo comportamiento se observará en el caso más general de un cuerpo convexo cualquiera de dimensión  $d$ .

### Obsevación 5.2

Los valores de  $v_{4-i,i}^{(2)}(B_2)$ ,  $0 \leq i \leq 4$ , y de  $v_{5-i,i}^{(3)}(B_3)$ ,  $0 \leq i \leq 5$ , que figuran en las tablas 5.1 y 5.2 se pueden obtener directamente utilizando la segunda generalización de la fórmula de Buchta desarrollada en el capítulo anterior (comparar fórmula (4.8)). Por ejemplo se tiene que:

$$v_{2,2}^{(2)}(B_2) = \frac{1}{2} (2 v_{2,1}^{(2)}(B_2) + 2 v_{1,2}^{(2)}(B_2)) = \frac{1}{2} (2 \frac{35}{36\pi} + 2 \frac{5}{4\pi}) = \frac{20}{9\pi}$$

y

$$v_{1,4}^{(3)}(B_3) = \frac{1}{2} (4 v_{1,3}^{(3)}(B_3) + v_{0,4}^{(3)}(B_3)) = \frac{1}{2} (4 \frac{2\pi}{63} + \frac{4\pi}{105}) = \frac{26\pi}{315}$$

de acuerdo con los correspondientes valores obtenidos a partir de las expresiones integrales (5.14) y (5.15).

### Observación 5.3

Miles [1971] obtiene una expresión explícita del  $k$ -ésimo momento del volumen del simple aleatorio de dimensión  $r$  definido por la configuración estocástica  $S(B_d; r+1-i, i)$ ,  $1 \leq r \leq d$ ,  $0 \leq i \leq r+1$ . Nuestra fórmula (5.24) coincide con el resultado de Miles (p.363, fórmula (29)) para el caso  $k = 1$  y  $r = d$ .

### Observación 5.4

Las dificultades para obtener valores explícitos de  $v_{n-i,i}^{(d)}(K)$  aumentan considerablemente cuando  $K$  es un cuerpo convexo distinto de la bola unidad  $B_d$ . Reed [1974] considera el caso de puntos aleatorios en un simple y obtiene los momentos del área de un triángulo cuyos vértices están distribuidos en el interior

de un triángulo o un paralelogramo. Buchta [1984c] desarrolla un método para calcular  $V_{n,0}^{(2)}(P_m)$ , donde  $P_m$  es un polígono convexo de  $m$  lados y área 1. Buchta obtiene, por ejemplo

$$(5.25) \quad V_{n,0}^{(2)}(\text{triángulo de área 1}) = 1 - \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

#### Observación 5.5

Rényi y Sulanke [1963] y [1964] inician un nuevo camino en el estudio de la cápsula convexa de puntos aleatorios. Los autores mencionados hacen tender el número de puntos aleatorios a infinito y estudian el comportamiento asintótico del valor medio del área, perímetro y número de vértices de  $H_{n,0}$  para el caso de una figura convexa plana cuyo contorno es lo suficientemente suave. El caso de un polígono convexo ha sido tratado por Buchta [1984b]. Otros resultados relacionados con el comportamiento asintótico del valor medio del volumen  $V_{n,0}^{(d)}(K)$  pueden encontrarse en Wieacker [1978] y Buchta [1984b].

#### Observación 5.6

El valor medio del volumen de la cápsula convexa de puntos aleatorios distribuidos en una variedad métrica compacta ha sido considerado por Cover y Efron [1967] (puntos aleatorios en una hiperesfera) y por Buchta y Tichy [1985] (puntos aleatorios en el toro).

#### Observación 5.7

El valor medio del volumen de la cápsula convexa de puntos aleatorios está estrechamente vinculado al problema de la aproximación aleatoria de cuerpos convexos

por medio de polítopos aleatorios. Consideremos en el espacio de cuerpos convexos del espacio euclidiano  $E^d$  de  $d$  dimensiones la métrica de diferencia simétrica  $\delta^S$  definida por

$$(5.26) \quad \delta^S(K_1, K_2) = V(K_1 \cup K_2) - V(K_1 \cap K_2)$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son cuerpos convexos en  $E^d$ . La configuración estocástica  $S(K; n-1, i)$  define polítopos aleatorios inscritos  $H_{n-1, i}$  de a lo sumo  $n$  vértices. Para tales polítopos se tiene que

$$(5.27) \quad \delta^S(K, H_{n-1, i}) = V(K) - V(H_{n-1, i}),$$

y para el valor medio de la distancia en el sentido de la métrica de diferencia simétrica  $\delta^S$

$$(5.28) \quad E(\delta^S(K, H_{n-1, i})) = V(K) - V_{n-1, i}^{(d)}(K)$$

Por lo tanto, conociendo el valor de  $V_{n-1, i}^{(d)}(K)$  conoceremos también el valor medio de la distancia de la cápsula convexa  $H_{n-1, i}$  al cuerpo convexo  $K$  en el sentido de la métrica de diferencia simétrica  $\delta^S$ . El valor de  $E(\delta^S(K, H_{n-1, i}))$  nos da cierta información sobre la calidad de la aproximación. Por ejemplo, teniendo en cuenta uno de los resultados obtenidos en la sección 5.2, caso particular (b), vemos que el valor medio de la distancia en el sentido de la métrica de diferencia simétrica  $\delta^S$  de la bola unidad  $B_3$  a un poliedro aleatorio con vértices en el contorno de  $B_3$  es igual a

$$(5.29) \quad E(\delta^S(B_3, H_{0,n})) = \frac{4\pi}{3} \left( 1 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right)$$

El tema de la aproximación de cuerpos convexos ha sido tratado por varios autores (comparar el resumen de Gruber [1983]).

CAPITULO 6 EL VALOR MEDIO DE LA SUPERFICIE DE  $H_{n-i,i}$

6.1. Representación integral del valor medio de la superficie  $S_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$

Consideremos en el espacio euclidiano  $E^d$  ( $d \geq 2$ ) la configuración estocástica  $S(B_d; n-i, i)$  formada por  $n-i$  puntos  $P_1, \dots, P_{n-i}$  ( $n \geq d$ ) del interior e  $i$  puntos  $S_1, \dots, S_i$  del contorno de  $B_d$ , la bola unidad de dimensión  $d$ . Supongamos nuevamente que tanto  $P_1, \dots, P_{n-i}$  como  $S_1, \dots, S_i$  estén distribuidos independiente y uniformemente en el interior y en el contorno de  $B_d$ , respectivamente. En esta sección nos proponemos desarrollar fórmulas integrales que expresen el valor medio de la superficie  $S_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$  de  $H_{n-i,i}$ , la cápsula convexa de los puntos  $P_1, \dots, P_{n-i}, S_1, \dots, S_i$ .

Con probabilidad 1 el contorno de la cápsula convexa  $H_{n-i,i}$  es la unión de un cierto número de facetas (simples de dimensión  $d-1$ ). Del conjunto de puntos

$$\{P_1, \dots, P_{n-i}, S_1, \dots, S_i\}$$

elegimos un subconjunto de  $d$  puntos. Con probabilidad

$$(6.1) \quad \frac{\binom{n-i}{d-r} \binom{i}{r}}{\binom{n}{d}}$$

obtenemos el siguiente subconjunto de puntos

$$\{P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r\}$$

donde

$$r = \max\{0, d+i, n\}, \dots, \min\{d, i\}$$

El hiperplano  $L_{d-1}$  generado por  $P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r$  divide a  $B_d$  en dos partes. La cápsula convexa de  $P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r$  coincide con una faceta de  $H_{n-i, i}$ , únicamente si los puntos  $P_{d-r+1}, \dots, P_{n-i}$  y  $S_{r+1}, \dots, S_i$  están contenidos en una de las dos partes de  $B_d$  determinadas por el hiperplano  $L_{d-1}$ . La probabilidad de que ocurra este evento es igual a

$$(6.2) \quad \left(\frac{\hat{V}}{\rho_d}\right)^{n-i-d+r} \left(\frac{\hat{S}}{\omega_{d-1}}\right)^{i-r} + \left(1 - \frac{\hat{V}}{\rho_d}\right)^{n-i-d+r} \left(1 - \frac{\hat{S}}{\omega_{d-1}}\right)^{i-r}$$

donde  $\hat{V} = \hat{V}(P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r)$  es el volumen de la menor de las dos partes en que queda dividida la bola unidad  $B_d$ , y  $\hat{S} = \hat{S}(P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r)$  la superficie de la menor de las dos partes en que queda dividido el contorno de  $B_d$  por el hiperplano  $L_{d-1}$ .

Dado que  $P_1, \dots, P_{n-i}$  y  $S_1, \dots, S_i$  están distribuidos idénticamente en el interior y en el contorno de  $B_d$ , existen  $\binom{n}{d}$  posibilidades de elegir el subconjunto de  $d$  puntos

$$\{P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r\}$$

Después de todo esto, teniendo en cuenta las expresiones (6.1) y (6.2), podemos afirmar que el valor medio de la superficie de  $H_{n-i, i}$  es igual a

$$(6.3) \quad S_{n-i,i}^{(d)}(B_d) = \binom{n}{d} \sum_{r=\max\{0, d+i-n\}}^{\min\{d, i\}} (1/\rho_d^{n-i} \omega_{d-1}^i) \frac{\binom{n-i}{d-r} \binom{i}{r}}{\binom{n}{d}} \times$$

$$\int (\hat{V}^{n-i-d+r} \hat{S}^{i-r} + (\rho_d - \hat{V})^{n-i-d+r} (\omega_{d-1} - \hat{S})^{i-r}) T dP_1 \dots dP_{d-r} dS_1 \dots dS_r$$

donde  $T = T(P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r)$  es el volumen del simple de dimensión  $d-1$  determinado por los puntos  $P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r$ .

Estamos ahora en condiciones de aplicar la equivalencia estocástica de Miles [1971] descrita en la sección 5.1. Reemplazando la expresión (5.5) en (6.3) se obtiene

$$(6.4) \quad S_{n-i,i}^{(d)}(B_d) = \frac{(d-1)!}{\rho_d^{n-i} \omega_{d-1}^i} \sum_{r=\max\{0, d+i-n\}}^{\min\{d, i\}} \binom{n-i}{d-r} \binom{i}{r} \int \frac{I(p)}{(1-p^2)^{r/2}} \left( \int_T^2 dP'_1 \dots dP'_{d-r} dS'_1 \dots dS'_r \right) \times dp d\omega_{d-1}$$

siendo

$$I(p) = \hat{V}^{n-i-d+r} \hat{S}^{i-r} + (\rho_d - \hat{V})^{n-i-d+r} (\omega_{d-1} - \hat{S})^{i-r}$$

Las expresiones integrales de  $\hat{V}(p)$  y  $\hat{S}(p)$  están dadas en la sección 5.1, fórmulas (5.12) y (5.13).

Utilizando la expresión del segundo momento del volumen del simple de dimensión  $d-1$  determinado por los puntos  $P'_1, \dots, P'_{d-r}, S'_1, \dots, S'_r$  (comparar sección 5.1, fórmula (5.7)) obtenemos finalmente

$$(6.5) \quad S_{n-i,i}^{(d)}(B_d) = \alpha(d,n,i) \sum_{r=\max\{0,d+i-n\}}^{\min\{d,i\}} \beta_r(d,n,i) \int_0^1 I(p) (1-p^2)^{\frac{d^2+d-2-2r}{2}} dp ,$$

donde

$$(6.6) \quad I(p) = \hat{V}^{n-i-d+r} \hat{S}^{i-r} + (\rho_d - \hat{V})^{n-i-d+r} (\omega_{d-1} - \hat{S})^{i-r} \quad y$$

$$\alpha(d,n,i) = \left( \rho_{d-1}^d / d^{i-1} \rho_d^{n-1} \right) , \quad \beta_r(d,n,i) = \binom{n-i}{d-r} \binom{i}{r} \frac{d^2+d-2r}{(d+1)^{d-r}}$$

## 6.2. Casos particulares

(a)  $i = 0$ . Es el caso en que todos los puntos se encuentran distribuidos en el interior de  $B_d$ . Reemplazando los correspondientes valores en las expresiones integrales (6.5) y (6.6) obtenemos

$$(6.7) \quad S_{n,0}^{(d)}(B_d) = \alpha(d,n,0) \beta_0(d,n,0) \int_0^1 I(p) (1-p^2)^{\frac{d^2+d-2}{2}} dp$$

donde

$$(6.8) \quad I(p) = \hat{V}^{n-d} + (\rho_d - \hat{V})^{n-d} \quad y$$

$$\alpha(d,n,0) \beta_0(d,n,0) = \binom{n}{d} \frac{d^2 \rho_{d-1}^d}{\rho_d^{n-1} (d+1)^{d-1}}$$

Este caso particular ha sido tratado recientemente de forma más detallada por Buchta y Müller [1984].

(b)  $i = n$ . Todos los puntos aleatorios se encuentran en el contorno de  $B_d$ .  
Sustituyendo  $i = n$  en las expresiones (6.5) y (6.6) obtenemos

$$(6.9) \quad S_{0,n}^{(d)}(B_d) = \alpha(d,n,n) \beta_d(d,n,n) \int_0^1 I(p) (1-p^2)^{\frac{d^2-d-2}{2}} dp$$

donde

$$(6.10) \quad I(p) = \hat{S}^{n-d} + (\omega_{d-1} - \hat{S})^{n-d} \quad y$$

$$\alpha(d,n,n)\beta_d(d,n,n) = \binom{n}{d} \frac{\rho_{d-1}^d (d-1)}{d^{n-2} \rho_d^{n-1}}$$

Este caso particular ha sido tratado recientemente de forma más detallada por Buchta, Müller y Tichy [1985].

(c)  $n = d$ . La cápsula convexa  $H_{d-i,i}$  es considerada como un cuerpo aplastado en  $E^d$ .  
Sustituyendo  $n = d$  en las expresiones (6.5) y (6.6) obtenemos

$$(6.11) \quad S_{d-i,i}^{(d)}(B_d) = \alpha(d,d,i)\beta_i(d,d,i) \int_0^1 2 (1-p^2)^{\frac{d^2+d-2i-2}{2}} dp$$

donde

$$\alpha(d,d,i)\beta_i(d,d,i) = \frac{\rho_{d-1}^d (d^2 + d - 2i)}{\rho_d^{d-1} d^{i-1} (d+1)^{d-1}}$$

Integrando (6.11) obtenemos la siguiente expresión explícita para el valor medio de la superficie de  $H_{d-i,i}$

$$(6.12) \quad S_{d-i,i}^{(d)}(B_d) = \frac{2\sqrt{\pi}\rho_{d-1}^d}{d^{i-1}(d+1)^{d-1}\rho_d^{d-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{d^2+d-2i+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2+d-2i+1}{2}\right)}$$

Buchta y Müller [1984, sección 3, corolario 1] obtienen una expresión equivalente a (6.12) para el caso  $i = 0$ .

(d)  $n = d+1$ . Con probabilidad 1 la cápsula convexa  $H_{d+1-i,i}$  resulta ser un simple aleatorio de dimensión  $d$ . Sustituyendo  $n = d+1$  en las expresiones (6.5) y (6.6) e integrando se obtiene

$$(6.13) \quad S_{d+1-i,i}^{(d)}(B_d) = \frac{\Gamma(1/2)\rho_{d-1}^d}{(d+1)^{d-i} d^{i-2} \rho_d^{d-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{d^2+d-2i+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2+d-2i+1}{2}\right)} \left( \frac{d+1-i}{d} + \frac{i(d^2+d-2i+2)}{(d+1)(d^2+d-2i+1)} \right).$$

Buchta y Müller [1984, sección 3, corolario 2] obtienen una expresión equivalente a (6.13) para el caso  $i = 0$ .

(e)  $d = 2$ . A partir de las expresiones integrales (6.5) y (6.6) obtenemos para el plano la siguiente tabla de valores numéricos:

$\begin{matrix} i \\ n \end{matrix}$	0	1	2	3	4
2	$\frac{256}{45\pi}$ (*) (1.811)	$\frac{64}{9\pi}$ (2.264)	$\frac{8}{\pi}$ (*) (2.547)		
3	$\frac{128}{15\pi}$ (*) (2.716)	$\frac{448}{45\pi}$ (3.169)	$\frac{100}{9\pi}$ (3.537)	$\frac{12}{\pi}$ (*) (3.820)	
4	$\frac{256}{15\pi} - \frac{11075584}{165375\pi^3}$ (*) (3.273)	$\frac{96}{5\pi} - \frac{1384448}{18375\pi^3}$ (3.682)	$\frac{64}{3\pi} - \frac{2240}{27\pi^3}$ (4.115)	$\frac{68}{3\pi} - \frac{2432}{27\pi^3}$ (4.310)	$\frac{24}{\pi} - \frac{96}{\pi^3}$ (*) (4.543)

Tabla 6.1 Algunos valores numéricos de  $S_{n-i,i}^{(2)}(B_2)$

(\*) Estos valores también han sido determinados por Buchta, Müller y Tichy [1984], [1985]. Los restantes son nuevos.

(f)  $d = 3$ . A partir de (6.5) y (6.6) obtenemos para el espacio de 3 dimensiones:

$\begin{matrix} i \\ n \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6
3	$\frac{18\pi}{77}$ (*) (0.734)	$\frac{2\pi}{7}$ (0.898)	$\frac{12\pi}{35}$ (1.077)	$\frac{2\pi}{5}$ (*) (1.257)			
4	$\frac{36\pi}{77}$ (*) (1.469)	$\frac{6\pi}{11}$ (1.714)	$\frac{22\pi}{35}$ (1.975)	$\frac{5\pi}{7}$ (2.244)	$\frac{4\pi}{5}$ (*) (2.513)		
5	$\frac{11448\pi}{17017}$ (*) (2.113)	$\frac{3816\pi}{5005}$ (2.396)	$\frac{582\pi}{715}$ (2.557)	$\frac{157\pi}{165}$ (2.989)	$\frac{22\pi}{21}$ (3.291)	$\frac{8\pi}{7}$ (*) (3.590)	
6	$\frac{1314\pi}{1547}$ (*) (2.668)	$\frac{1460\pi}{1547}$ (2.965)	$\frac{744\pi}{715}$ (3.269)	$\frac{74\pi}{65}$ (3.577)	$\frac{68\pi}{55}$ (3.884)	$\frac{28\pi}{21}$ (4.189)	$\frac{10\pi}{7}$ (*) (4.488)

Tabla 6.2 Algunos valores numéricos de  $S_{n-i,i}^{(3)}(B_3)$

(\*) Estos valores también han sido determinados por Buchta, Müller y Tichy [1984], [1985]. Los restantes son nuevos.

### 6.3. Observaciones

#### Observación 6.1

Las tablas de valores numéricos 6.1 y 6.2 sugieren nuevamente que, fijando el número  $n$  de puntos aleatorios, el valor medio de la superficie  $S_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$  crece a medida que vamos aumentando el número de puntos del contorno. Por lo tanto,  $S_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$  resultaría maximal para  $i = n$  y minimal para  $i = 0$ . Conjeturamos que el mismo comportamiento se observará en el caso más general de un cuerpo convexo cualquiera de dimensión  $d$ .

#### Observación 6.2

Valores explícitos del valor medio de la superficie  $S_{n-i,i}^{(d)}(K)$  no aparecen en la literatura relacionada con el problema de puntos aleatorios para el caso en que  $K$  es un cuerpo convexo distinto de la bola unidad  $B_d$ .

#### Observación 6.3

Resultados relacionados con el comportamiento asintótico del valor medio de la superficie  $S_{n-i,i}^{(d)}(K)$  pueden ser consultados en Rényi y Sulanke [1963], [1964], Wiacker [1978] y Buchta [1984b].

#### Observación 6.4

Sean  $K_1$  y  $K_2$  dos cuerpos convexos en  $E^d$ . Consideremos la desviación de la superficie  $\delta^P$  (nótese que  $\delta^P$  no es una métrica) entre  $K_1$  y  $K_2$  definida por

$$(6.14) \quad \delta^P(K_1, K_2) = S(K_1 \cup K_2) - S(K_1 \cap K_2)$$

donde  $S(K)$  es la superficie del cuerpo convexo  $K$ .

La configuración estocástica  $S(K;n-i,i)$  define polítopos aleatorios inscritos  $H_{n-i,i}$  de a lo sumo  $n$  vértices. Para tales polítopos se tiene que

$$(6.15) \quad \delta^P(K, H_{n-i,i}) = S(K) - S(H_{n-i,i}),$$

y para el valor medio de  $\delta^P$

$$(6.16) \quad E(\delta^P(K, H_{n-i,i})) = S(K) - S_{n-i,i}^{(d)}(K)$$

Por lo tanto, conociendo el valor de  $S_{n-i,i}^{(d)}(K)$  conoceremos también el valor medio de la desviación de superficie entre la cápsula convexa  $H_{n-i,i}$  y el cuerpo convexo  $K$ . Por ejemplo, integrando las expresiones (6.9) y (6.10) obtenemos el valor medio de la desviación de superficie entre la bola unidad  $B_3$  y un poliedro aleatorio con vértices distribuídos independiente y uniformemente en el contorno de  $B_3$

$$(6.17) \quad E(\delta^P(B_3, H_{0,n})) = 4\pi \left( 1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{n(n+1)(n+2)} \right)$$

Más detalles acerca de la aproximación de cuerpos convexos y una lista completa de referencias pueden ser consultados en el resumen de Gruber [1983].

CAPITULO 7 EL VALOR MEDIO DE LA ANCHURA MEDIA DE  $H_{n-i,i}$

7.1. Representación integral del valor medio de la anchura media  $W_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$

Consideremos en el espacio euclidiano  $E^d$  ( $d \geq 2$ ) la configuración estocástica  $S(B_d; n-i, i)$  formada por  $n-i$  puntos  $P_1, \dots, P_{n-i}$  ( $n \geq d$ ) del interior e  $i$  puntos  $S_1, \dots, S_i$  del contorno de  $B_d$ , la bola unidad de dimensión  $d$ . Volvemos a suponer que tanto  $P_1, \dots, P_{n-i}$  como  $S_1, \dots, S_i$  estén distribuidos independiente y uniformemente en el interior y en el contorno de  $B_d$ , respectivamente. En esta sección nos proponemos desarrollar fórmulas integrales que expresen el valor medio de la anchura media  $W_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$  de  $H_{n-i,i}$ , la cápsula convexa de los puntos  $P_1, \dots, P_{n-i}, S_1, \dots, S_i$ .

La anchura media de un cuerpo convexo  $K$  en  $E^d$  puede ser descrita por los llamados "quermassintegrales" introducidos por Minkowski. Para el valor medio de la anchura de  $H_{n-i,i}$  obtenemos

$$(7.1) \quad W_{n-i,i}^{(d)}(B_d) = \frac{2d}{\rho_d^{n-i} \omega_{d-1}^{i+1}} \int W_{d-1}(H_{n-i,i}) dP_1 \dots dP_{n-i} dS_1 \dots dS_i$$

donde  $W_{d-1}(H_{n-i,i})$  es el  $(d-1)$ -ésimo "quermassintegral" de  $H_{n-i,i}$  (comparar, por ejemplo, Santaló [1976, fórmula (13.11)]). Teniendo en cuenta que, salvo un factor constante, el  $r$ -ésimo "quermassintegral" de un cuerpo convexo  $K$  es igual a la medida del conjunto de  $r$ -planos  $L_r$  que intersecan a  $K$ , podemos escribir para el valor medio de la anchura media de  $H_{n-i,i}$

$$(7.2) \quad W_{n-i,i}^{(d)}(B_d) = \frac{2}{\rho_d^{n-i} \omega_{d-1}^{i+1}} \int_{L_{d-1} \cap H_{n-i,i}} (dL_{d-1}) dP_1 \dots dP_{n-i} dS_1 \dots dS_i$$

Utilizando el teorema de Fubini podemos cambiar el orden de integración.

El hiperplano  $L_{d-1}$  interseca a la cápsula convexa  $H_{n-i,i}$  únicamente si no todos los  $n$  puntos  $P_1, \dots, P_{n-i}, S_1, \dots, S_i$  están contenidos en una de las dos partes de  $B_d$  determinadas por el hiperplano  $L_{d-1}$ . La probabilidad de que ocurra este evento es igual a

$$(7.3) \quad 1 - \left( \frac{\hat{V}^{n-i} \hat{S}^i}{\rho_d^{n-i} \omega_{d-1}^i} + \frac{(\rho_d - \hat{V})^{n-i} (\omega_{d-1} - \hat{S})^i}{\rho_d^{n-i} \omega_{d-1}^i} \right)$$

donde  $\hat{V} = \hat{V}(p)$  es el volumen de  $\hat{K}$ , la menor de las dos partes en que queda dividida la bola unidad  $B_d$  por el hiperplano  $L_{d-1}$ , y  $\hat{S} = \hat{S}(p)$  la superficie de  $\hat{K} \cap \partial B_d$ . Para el valor medio de la anchura media de  $H_{n-i,i}$  obtenemos

$$(7.4) \quad W_{n-i,i}^{(d)}(B_d) = 2 - \frac{2}{\rho_d^{n-i} \omega_{d-1}^i} \int_0^1 I(p) dp$$

donde

$$(7.5) \quad I(p) = \hat{V}^{n-i} \hat{S}^i + (\rho_d - \hat{V})^{n-i} (\omega_{d-1} - \hat{S})^i$$

Las expresiones integrales de  $\hat{V}(p)$  y  $\hat{S}(p)$  están dadas en la sección 5.1, fórmulas (5.12) y (5.13).

7.2. Casos particulares

(a)  $i = 0$ . Todos los puntos aleatorios se encuentran distribuidos en el interior de  $B_d$ . Este caso particular ha sido tratado con más detalles recientemente por Buchta y Müller [1984].

(b)  $i = n$ . Todos los puntos aleatorios se encuentran distribuidos en el contorno de  $B_d$ . Este caso particular ha sido tratado con más detalles recientemente por Buchta, Müller y Tichy [1985].

(c)  $d = 2$ . El perímetro de una figura convexa plana  $K$  es igual a su anchura media multiplicada por  $\pi$  (comparar Santaló [1976], p.6). Tenemos por lo tanto

$$(7.6) \quad W_{n-i,i}^{(2)}(K) = (1/\pi) S_{n-i,i}^{(2)}(K)$$

$n \setminus i$	0	1	2	3	4
2	$\frac{256}{45\pi^2}$ (*) (0.576)	$\frac{64}{9\pi^2}$ (0.721)	$\frac{8}{\pi^2}$ (*) (0.811)		
3	$\frac{128}{15\pi^2}$ (*) (0.865)	$\frac{448}{45\pi^2}$ (1.009)	$\frac{100}{9\pi^2}$ (1.126)	$\frac{12}{\pi^2}$ (*) (1.216)	
4	$\frac{256}{15\pi^2} - \frac{11075584}{165375\pi^4}$ (*) (1.042)	$\frac{96}{5\pi^2} - \frac{1384448}{18375\pi^4}$ (1.172)	$\frac{64}{3\pi^2} - \frac{2240}{27\pi^4}$ (1.310)	$\frac{68}{3\pi^2} - \frac{2432}{27\pi^4}$ (1.372)	$\frac{24}{\pi^2} - \frac{96}{\pi^4}$ (*) (1.446)

Tabla 7.1 Algunos valores numéricos de  $W_{n-i,i}^{(2)}(B_2)$

(\*) Estos valores también han sido determinados por Buchta, Müller y Tichy [1984], [1985]. Los restantes son nuevos.

(d)  $d = 3$ . Sustituyendo  $d = 3$  en las expresiones (7.4) y (7.5) obtenemos para el espacio de 3 dimensiones

$$(7.7) \quad W_{n-i,i}^{(3)}(B_3) = 2 - \frac{3^{n-i}}{2^{2n-1} \pi^n} \int_0^1 I(p) dp$$

donde

$$(7.8) \quad I(p) = \frac{2^i \pi^n}{3^{n-i}} \left( (1-p)^{2n-i} (2+p)^{n-i} + (1+p)^{2n-i} (2-p)^{n-i} \right),$$

y reemplazando (7.8) en (7.7)

$$(7.9) \quad W_{n-i,i}^{(3)}(B_3) = 2 - 2^{i-2n+1} \int_0^1 \left( (1-p)^{2n-i} (2+p)^{n-i} + (1+p)^{2n-i} (2-p)^{n-i} \right) dp$$

$\begin{matrix} i \\ n \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6
3	$\frac{27}{35} (*)$ (0.771)	$\frac{6}{7}$ (0.857)	$\frac{14}{15}$ (0.933)	1 (*) (1)			
4	$\frac{666}{715} (*)$ (0.931)	$\frac{111}{110}$ (1.009)	$\frac{68}{63}$ (1.079)	$\frac{8}{7}$ (1.143)	$\frac{6}{5} (*)$ (1.2)		
5	$\frac{1044}{1001} (*)$ (1.043)	$\frac{5568}{5005}$ (1.112)	$\frac{194}{165}$ (1.176)	$\frac{37}{30}$ (1.233)	$\frac{9}{7}$ (1.286)	$\frac{4}{3} (*)$ (1.333)	
6	$\frac{33102}{29393} (*)$ (1.126)	$\frac{1839}{1547}$ (1.189)	$\frac{18706}{15015}$ (1.246)	$\frac{928}{715}$ (1.298)	$\frac{74}{55}$ (1.346)	$\frac{25}{18}$ (1.389)	$\frac{10}{7} (*)$ (1.429)

Tabla 7.2 Algunos valores numéricos de  $W_{n-i,i}^{(3)}(B_3)$

(\*) Estos valores también han sido determinados por Buchta, Müller y Tichy [1984], [1985]. Los restantes son nuevos.

### 7.3. Observaciones

#### Observación 7.1

Las tablas de valores numéricos 7.1 y 7.2 sugieren que, fijando el número  $n$  de puntos aleatorios, el valor medio de la anchura media  $W_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$  crece a medida que vamos aumentando el número de puntos del contorno. Por lo tanto,  $S_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$  resultaría maximal para  $i = n$  y minimal para  $i = 0$ . Conjeturamos que el mismo comportamiento se observará en el caso de un cuerpo convexo cualquiera de dimensión  $d$ .

#### Observación 7.2

En el espacio euclidiano  $E^3$  la anchura media  $b(K)$  de un cuerpo convexo  $K$  está directamente relacionada con el integral de curvatura media  $M(\partial K)$  del contorno  $\partial K$ . Se deduce fácilmente que

$$(7.10) \quad M(\partial K) = 2\pi b(K)$$

(comparar, por ejemplo, Santaló [1976, capítulo 13]).

#### Observación 7.3

Resultados relacionados con el comportamiento asintótico del valor medio de la anchura media  $W_{n-i,i}^{(d)}(K)$  pueden ser consultados en Wieacker [1978], Schneider y Wieacker [1978] y Buchta, Müller y Tichy [1985].

CAPITULO 8 EL VALOR MEDIO DEL NUMERO DE VERTICES DE  $H_{n-i,i}$

8.1. Representación integral del valor medio del número de vértices  $E_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$

En el capítulo 3 vimos que el valor medio del número de vértices de la cápsula convexa  $H_{n-i,i}$  relacionada con la configuración estocástica  $S(K;n-i,i)$  y el valor medio del volumen  $V_{n-i-1,i}^{(d)}(K)$  de la cápsula convexa  $H_{n-i-1,i}$  relacionada con la configuración  $S(K;n-i-1,i)$ , están vinculados por la siguiente fórmula

$$(8.1) \quad E_{n-i,i}^{(d)}(K) = n - \frac{(n-i)}{V(K)} V_{n-i-1,i}^{(d)}(K)$$

siendo  $K$  un cuerpo convexo de dimensión  $d$  en  $E^d$  y  $V(K)$  el volumen de  $K$ . Por lo tanto, para  $K \equiv B_d$ , las expresiones integrales del valor medio del número de vértices de  $H_{n-i,i}$  se obtienen directamente a partir de las fórmulas (5.14) y (5.15) establecidas en la sección 5.1 del capítulo 5:

$$(8.2) \quad E_{n-i,i}^{(d)}(B_d) = n - \alpha(d,n,i) \sum_{r=\max\{d+i+1-n,0\}}^{\min\{d,i-1\}} \beta_r(d,n,i) \int_0^1 I(p) (1-p^2)^{\frac{d^2+d-2-2r}{2}} dp,$$

$$(8.3) \quad I(p) = \hat{V}^{n-1-i-d+r} \hat{S}^{i-r-1} \int_0^{\arccos p} (\cos \theta - p) \sin^{d-2} \theta d\theta$$

$$(\rho_d - \hat{V})^{n-1-i-d+r} (\omega_{d-1} - \hat{S})^{i-r-1} \int_{\arccos p}^{\pi} (p - \cos \theta) \sin^{d-2} \theta d\theta$$

$$\alpha(d,n,i) = \frac{(n-i)(d-1) \rho_{d-1}^{d+1}}{d^i \rho_d^{n-1}} \quad \beta_r(d,n,i) = \binom{n-i-1}{d-r} \binom{i-1}{r} \frac{d^2+d-2r}{(d+1)^{d-r}}$$

Las expresiones integrales de  $\hat{V}(p)$  y  $\hat{S}(p)$  están dadas por las fórmulas (5.12) y (5.13) de la sección 5.1 .

### 8.2. Casos particulares

(a)  $i = 0$ . Los  $n$  puntos se encuentran distribuidos en el interior de  $B_d$ .

De (8.1) se obtiene que

$$(8.4) \quad E_{n,0}^{(d)}(B_d) = n - \frac{n}{\rho_d} v_{n-1,0}^{(d)}(B_d)$$

(b)  $i = n$ . Los  $n$  puntos se encuentran distribuidos sobre el contorno de  $B_d$  .

Obviamente tenemos que

$$(8.5) \quad E_{0,n}^{(d)}(B_d) =$$

dado que todos los puntos resultan ser vértices de la cápsula convexa  $H_{0,n}$  .

(c)  $n = d+1$ . Con probabilidad 1 la cápsula convexa  $H_{d+1-i,i}$  resulta ser un simple aleatorio de dimensión  $d$  . Por lo tanto, independientemente del valor de  $i$ , tenemos que

$$(8.6) \quad E_{d+1-i,i}^{(d)}(B_d) = d + 1$$

(d)  $n = d+2$ . La cápsula convexa  $H_{d+2-i,i}$  resulta ser un polígono del "tipo de Sylvester", es decir, con probabilidad 1 tendremos siempre  $d+1$  ó  $d+2$  vértices. Este caso particular será tratado con más detalles en el capítulo 11.

(e)  $d = 2$ . Aplicando la fórmula (8.1) al caso del círculo unidad  $B_2$ , y teniendo en cuenta los resultados numéricos obtenidos en la sección 5.2, caso particular (d), obtenemos sin mayores dificultades la siguiente tabla de valores:

$\begin{matrix} i \\ n \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5
4	$4 - \frac{35}{12\pi^2}$ (3.704)	$4 - \frac{35}{12\pi^2}$ (3.704)	$4 - \frac{5}{2\pi^2}$ (3.747)	$4 - \frac{3}{2\pi^2}$ (3.848)	4 (4)	X
5	$5 - \frac{175}{24\pi^2}$ (4.261)	$5 - \frac{175}{24\pi^2}$ (4.261)	$5 - \frac{20}{3\pi^2}$ (4.324)	$5 - \frac{21}{4\pi^2}$ (4.468)	$5 - \frac{3}{\pi^2}$ (4.696)	5 (5)

Tabla 8.1 Algunos valores numéricos de  $E_{n-i,i}^{(2)}(B_2)$

(f)  $d = 3$ . Aplicando la fórmula (8.1) al caso de la bola unidad  $B_3$ , y teniendo en cuenta los resultados numéricos obtenidos en la sección 5.2, caso particular (e), resulta la siguiente tabla de valores:

$\begin{matrix} i \\ n \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7
5	$\frac{706}{143}$ (4.937)	$\frac{706}{143}$ (4.937)	$\frac{761}{154}$ (4.942)	$\frac{104}{21}$ (4.952)	$\frac{174}{35}$ (4.971)	5 (5)	X	X
6	$\frac{831}{143}$ (5.811)	$\frac{831}{143}$ (5.811)	$\frac{5826}{1001}$ (5.820)	$\frac{257}{44}$ (5.841)	$\frac{617}{105}$ (5.876)	$\frac{83}{14}$ (5.929)	6 (6)	X
7	$\frac{55681}{8398}$ (6.630)	$\frac{55681}{8398}$ (6.630)	$\frac{113044}{17017}$ (6.643)	$\frac{33391}{5005}$ (6.672)	$\frac{4804}{715}$ (6.719)	$\frac{224}{33}$ (6.788)	$\frac{289}{42}$ (6.881)	7 (7)

Tabla 8.2 Algunos valores numéricos de  $E_{n-i,i}^{(3)}(B_3)$

CAPITULO 9 EL VALOR MEDIO DEL NUMERO DE FACETAS DE  $H_{n-i,i}^{(d)}$

9.1. Representación integral del valor medio del número de facetas  $F_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$

Consideremos en el espacio euclidiano  $E^d$  ( $d \geq 2$ ) la configuración estocástica  $S(B_d; n-i, i)$  formada por  $n-i$  puntos  $P_1, \dots, P_{n-i}$  ( $n \geq d$ ) del interior e  $i$  puntos  $S_1, \dots, S_i$  del contorno de  $B_d$ , la bola unidad de dimensión  $d$ . Supongamos que tanto  $P_1, \dots, P_{n-i}$  como  $S_1, \dots, S_i$  estén distribuidos independiente y uniformemente en el interior y en el contorno de  $B_d$ , respectivamente. Análogamente a los argumentos desarrollados en la sección 6.1 obtenemos, reemplazando  $T$ , el volumen de dimensión  $d-1$  del simple formado por los puntos  $P_1, \dots, P_{d-r}, S_1, \dots, S_r$ , por 1 en la fórmula (6.3)

$$(9.1) \quad F_{n-i,i}^{(d)}(B_d) = \binom{n}{d} \sum_{r=\max\{0, d+i-n\}}^{\min\{i, d\}} \left(1/\rho_d^{n-i} \omega_{d-1}^i\right) \int \binom{n-i}{d-r} \binom{i}{r} \binom{n}{d}^{-1} \times \\ \times \left(\hat{V}^{n-i-d+r} \hat{S}^{i-r} + (\rho_d - \hat{V})^{n-i-d+r} (\omega_{d-1} - \hat{S})^{i-r}\right) dP_1 \dots dP_{d-r} dS_1 \dots dS_r .$$

Aplicando la equivalencia estocástica de Miles [1971] descrita en la sección 5.1 obtenemos

$$(9.2) \quad F_{n-i,i}^{(d)}(B_d) = \frac{(d-1)!}{\rho_d^{n-i} \omega_{d-1}^i} \sum_{r=\max\{0, d+i-n\}}^{\min\{i, d\}} \binom{n-i}{d-r} \binom{i}{r} \int I(p) (1-p^2)^{-\frac{r}{2}} \left( \int T dP'_1 \dots dP'_{d-r} dS'_1 \dots dS'_r \right) dp d\omega_{d-1}$$

siendo

$$(9.3) \quad I(p) = \hat{V}^{n-i-d+r} \hat{S}^{i-r} + (\rho_d - \hat{V})^{n-i-d+r} (\omega_{d-1} - \hat{S})^{i-r}$$

Necesitamos ahora el primer momento del volumen de dimensión  $d-1$  del simple generado por los puntos  $P'_1, \dots, P'_{d-r}, S'_1, \dots, S'_r$ . Según Miles [1971] se ve que

$$(9.4) \quad \int T dP'_1 \dots dP'_{d-r} dS'_1 \dots dS'_r \frac{2 \omega_{d-1}^{d-1}}{\Gamma(1/2) d^{d-r}} \frac{\Gamma\left(\frac{d^2-2r+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2-2r+1}{2}\right)} (1-p^2)^{\frac{d^2-r-1}{2}}$$

Para el valor medio de número de facetas de  $H_{n-1,i}$  obtenemos finalmente la siguiente representación integral:

$$(9.5) \quad F_{n-i,i}^{(d)}(B_d) = \alpha(d,n,i) \sum_{r=\max\{0,d+i-n\}}^{\min\{i,d\}} \beta_r(d,n,i) \int_0^1 I(p) (1-p^2)^{\frac{d^2-2r-1}{2}} dp$$

siendo

$$(9.6) \quad I(p) = \hat{V}^{n-i-d+r} \hat{S}^{i-r} + (\rho_d - \hat{V})^{n-i-d+r} (\omega_{d-1} - \hat{S})^{i-r} \quad y$$

$$\alpha(d,n,i) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \rho_d^{n-d}} \quad \beta_r(d,n,i) = \frac{\binom{n-i}{d-r} \binom{i}{r} \Gamma\left(\frac{d^2-2r+2}{2}\right)}{d^{i-r} \Gamma\left(\frac{d^2-2r+1}{2}\right)}$$

Las expresiones integrales de  $\hat{V}(p)$  y  $\hat{S}(p)$  están dadas por las fórmulas (5.12) y (5.13) de la sección 5.1 .

9.2. Casos particulares

(a)  $i = 0$ . Los  $n$  puntos aleatorios en cuestión se encuentran distribuídos en el interior de  $B_d$ . Reemplazando los correspondientes valores en las expresiones integrales (9.5) y (9.6) obtenemos

$$(9.7) \quad F_{n,0}^{(d)}(B_d) = \alpha(d,n,0) \beta_0(d,n,0) \int_0^1 I(p) (1-p^2)^{\frac{d^2-1}{2}} dp$$

siendo

$$(9.8) \quad I(p) = \hat{V}^{n-d} + (\rho_d - \hat{V})^{n-d} \quad y$$

$$\alpha(d,n,0) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \rho_d^{n-d}} \quad \beta_0(d,n,0) = \binom{n}{d} \frac{\Gamma(\frac{d^2+2}{2})}{\Gamma(\frac{d^2+1}{2})}$$

Este caso ha sido tratado con más detalles por Buchta y Müller [1984].

(b)  $i = n$ . Los  $n$  puntos aleatorios en cuestión se encuentran distribuídos sobre el contorno de  $B_d$ . Reemplazando los correspondientes valores en las expresiones integrales (9.5) y (9.6) obtenemos

$$(9.9) \quad F_{0,n}^{(d)}(B_d) = \alpha(d,n,n) \beta_d(d,n,n) \int_0^1 I(p) (1-p^2)^{\frac{d^2-2d-1}{2}} dp$$

donde

$$(9.10) \quad I(p) = \hat{S}^{n-d} + (\omega_{d-1} - \hat{S})^{n-d} \quad y$$

$$\alpha(d,n,n) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \rho_d^{n-d}} \quad \beta_d(d,n,n) = \binom{n}{d} \frac{\Gamma\left(\frac{d^2 - 2d + 2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2 - 2d + 1}{2}\right)}$$

Este caso particular ha sido tratado con más detalles por Buchta, Müller y Tichy [1985].

(c)  $n = d$ . Se considera la cápsula convexa  $H_{n-i,i}$  como un cuerpo aplastado en  $E^d$ . Sustituyendo  $n = d$  en las expresiones (9.5) y (9.6) se verifica fácilmente que

$$\begin{aligned} F_{d-i,i}^{(d)}(B_d) &= \alpha(d,d,i) \beta_i(d,d,i) \int_0^1 2(1-p^2)^{\frac{d^2-2i-1}{2}} dp \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{d^2-2i+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2-2i+1}{2}\right)} 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{d^2-2i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2-2i+2}{2}\right)} = 2, \end{aligned}$$

como era de esperar.

(d)  $n = d+1$ . Con probabilidad 1 la cápsula convexa  $H_{d+1-i,i}$  resulta ser un simple aleatorio de dimensión  $d$ . Por lo tanto, independientemente del valor de  $i$ , hemos de obtener  $F_{d+1-i,i}^{(d)}(B_d) = d+1$ . Supongamos primero que  $1 \leq i \leq d$ . Remplazando en la expresión (9.5) se tiene que

$$\begin{aligned}
F_{d+1-i,i}^{(d)}(B_d) &= \alpha(d,d+1,i) \beta_{i-1}(d,d+1,i) \int_0^1 \omega_{d-1} (1-p^2)^{\frac{d^2-2i+1}{2}} dp \\
&\quad + \alpha(d,d+1,i) \beta_i(d,d+1,i) \int_0^1 \rho_d (1-p^2)^{\frac{d^2-2i-1}{2}} dp \\
&= \frac{2}{d\sqrt{\pi} \rho_d} \binom{d+1-i}{d-i+1} \binom{i}{i-1} \frac{\Gamma(\frac{d^2-2i+4}{2})}{\Gamma(\frac{d^2-2i+3}{2})} \frac{\omega_{d-1} \sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{d^2-2i+3}{2})}{\Gamma(\frac{d^2-2i+4}{2})} + \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{\pi} \rho_d} \binom{d+1-i}{d-i} \frac{\Gamma(\frac{d^2-2i+2}{2})}{\Gamma(\frac{d^2-2i+1}{2})} \frac{\rho_d \sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{d^2-2i+1}{2})}{\Gamma(\frac{d^2-2i+2}{2})} \\
&= \binom{i}{i-1} + \binom{d+1-i}{d-i} \\
&= d+1
\end{aligned}$$

Para los casos particulares  $i = 0$  e  $i = d+1$  se verifica fácilmente que

$$F_{d+1,0}^{(d)} = \binom{d+1}{d} = d+1 \quad \text{y}$$

$$F_{0,d+1}^{(d)} = \binom{d+1}{d} = d+1$$

(e)  $d = 2$ . En el caso particular de la configuración estocástica  $S(B_2; n-i, i)$  tenemos que el valor medio de lados de la cápsula convexa  $H_{n-i, i}$  es igual al valor medio de vértices de  $H_{n-i, i}$ . Por lo tanto, la tabla de valores numéricos se obtiene directamente del caso particular (e) de la sección 8.2 :

$n \backslash i$	0	1	2	3	4	5
4	$4 - \frac{35^{(*)}}{12\pi^2}$ (3.704)	$4 - \frac{35}{12\pi^2}$ (3.704)	$4 - \frac{5}{2\pi^2}$ (3.747)	$4 - \frac{3}{2\pi^2}$ (3.848)	4 (*) (4)	
5	$5 - \frac{175^{(*)}}{24\pi^2}$ (4.261)	$5 - \frac{175}{24\pi^2}$ (4.261)	$5 - \frac{20}{3\pi^2}$ (4.324)	$5 - \frac{21}{4\pi^2}$ (4.468)	$5 - \frac{3}{\pi^2}$ (4.696)	5 (*) (5)

Tabla 9.1 Algunos valores numéricos de  $F_{n-i, i}^{(2)}(B_2)$

(\*) Estos valores también han sido determinados por Buchta, Müller y Tichy [1984], [1985]. Los restantes son nuevos.

(f)  $d = 3$ . Con probabilidad 1 las caras de la cápsula convexa  $H_{n-i, i}$  son triángulos. Por lo tanto, en virtud del teorema de Euler, se tiene que

$$(9.11) \quad F_{n-i, i}^{(3)}(B_3) = 2E_{n-i, i}^{(3)}(B_3) - 4$$

$$(9.12) \quad F_{n-i, i}^{(3)}(B_3) = 2n - 4 - \frac{3(n-i)}{2\pi} V_{n-1-i, i}^{(3)}(B_3)$$

La tabla de valores numéricos se obtiene directamente de la sección 5.2, caso particular (e) o también de la sección 8.2, caso particular (f).

$\begin{matrix} i \\ n \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7
5	$\frac{840}{143}$ (*) (5.874)	$\frac{840}{143}$ (5.874)	$\frac{906}{154}$ (5.883)	$\frac{124}{21}$ (5.905)	$\frac{208}{35}$ (5.943)	$\frac{6}{7}$ (*) (6)		
6	$\frac{1090}{143}$ (*) (7.622)	$\frac{1090}{143}$ (7.622)	$\frac{7648}{1001}$ (7.640)	$\frac{169}{22}$ (7.682)	$\frac{814}{105}$ (7.752)	$\frac{55}{7}$ (7.857)	$\frac{8}{8}$ (*) (8)	
7	$\frac{38885}{4199}$ (*) (9.261)	$\frac{38885}{4199}$ (9.261)	$\frac{158020}{17017}$ (9.286)	$\frac{46762}{5005}$ (9.343)	$\frac{6748}{715}$ (9.438)	$\frac{316}{33}$ (9.576)	$\frac{205}{21}$ (9.762)	$\frac{10}{10}$ (*) (10)

Tabla 9.2 Algunos valores numéricos de  $F_{n-i,i}^{(3)}(B_3)$

(\*) Estos valores también han sido determinados por Buchta, Müller y Tichy [1984], [1985]. Los restantes son nuevos.

### 9.3. Observaciones

#### Observación 9.1

Las tablas de valores numéricos 9.1 y 9.2 sugieren nuevamente que, fijando el número  $n$  de puntos aleatorios, el valor medio del número de facetas  $F_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$  crece a medida que vamos aumentando el número de puntos del contorno. Por lo tanto,  $F_{n-i,i}^{(d)}(B_d)$  resultaría maximal para  $i = n$  y minimal para  $i = 0$ . Conjeturamos que el mismo comportamiento se observará en el caso de un cuerpo convexo cualquiera.

#### Observación 9.2

Resultados relacionados con el comportamiento asintótico del valor medio de facetas  $F_{n-i,i}^{(d)}(K)$  pueden ser consultados en Raynaud [1970] y Wieacker [1978].



## CAPITULO 10 RESEÑA HISTORICA DEL PROBLEMA

La Parte IV la dedicaremos de manera exclusiva al clásico problema de probabilidades geométricas propuesto por el matemático inglés J.J. Sylvester a mediados del siglo pasado:

*¿Cuál es la probabilidad  $p_4^{(2)}(K;4,0)$  de que cuatro puntos aleatorios, distribuidos independiente y uniformemente al azar en el interior de un conjunto convexo plano  $K$ , formen un cuadrilátero convexo?*

Se ve fácilmente que la probabilidad complementaria  $p_3^{(2)}(K;4,0)$ , la probabilidad de que la cápsula convexa de los cuatro puntos en cuestión sea un triángulo, es igual a

$$(10.1) \quad p_3^{(2)}(K;4,0) = \frac{4}{F(K)} v_{3,0}^{(2)}(K)$$

donde  $F(K)$  es el área de  $K$ , y  $v_{3,0}^{(2)}(K)$  el valor medio del área de un triángulo con vértices distribuidos independiente y uniformemente en el interior de  $K$ . Se ve, por consecuencia, que el Problema de Sylvester está directamente ligado al conocimiento del invariante afín  $v_{3,0}^{(2)}(K) / F(K)$ .

Primeros resultados fueron obtenidos por Woolhouse [1867], Crofton [1885], Czuber [1903] y Deltheil [1926]. La herramienta fundamental utilizada por estos autores es el Teorema de Crofton de Puntos Fijos (comparar capítulo 2). Valores explícitos de  $v_{3,0}^{(2)}(K)$ , y por lo tanto soluciones del Problema de Sylvester, se conocen para un reducido número de casos particulares. Por ejemplo, para figuras convexas planas de área 1, se tiene que

$$(10.2) \quad v_{3,0}^{(2)}(\text{elipse}) = \frac{35}{48\pi^2} \quad v_{3,0}^{(2)}(\text{triángulo}) = \frac{1}{12} \quad y$$

$$v_{3,0}^{(2)}(\text{polígono regular de } r \text{ lados}) = \frac{9 \cos^2 \alpha + 52 \cos \alpha + 44}{36 r^2 \sin^2 \alpha}$$

donde  $\alpha = \frac{2\pi}{r}$ . Este último resultado fue establecido por Alikoski [1939].

Las siguientes propiedades extremales del Problema de Sylvester, conjeturadas por varios autores, fueron demostradas por primera vez de manera rigurosa por Blaschke [1917]:

$$(10.3) \quad p_3^{(2)}(\text{elipse}; 4, 0) \leq p_3^{(2)}(K; 4, 0) \leq p_3^{(2)}(\text{triángulo}; 4, 0)$$

es decir, entre todas las figuras convexas planas  $K$  de igual área, la probabilidad  $p_3^{(2)}(K; 4, 0)$  es mínima para la elipse y máxima para el triángulo.

Una primera generalización del Problema de Sylvester consiste en determinar

$$p_{d+1}^{(d)}(K; d+2, 0) \quad y \quad p_{d+2}^{(d)}(K; d+2, 0) \quad ,$$

las probabilidades de que la cápsula convexa de  $d+2$  puntos aleatorios, distribuidos independiente y uniformemente en el interior de un cuerpo convexo  $K$ , tenga  $d+1$  y  $d+2$  vértices, respectivamente. Se verifica fácilmente que

$$(10.4) \quad p_{d+1}^{(d)}(K; d+2, 0) = \frac{d+2}{V(K)} v_{d+1,0}^{(d)}(K) \quad y$$

$$(10.5) \quad p_{d+2}^{(d)}(K; d+2, 0) = 1 - \frac{d+2}{V(K)} v_{d+1,0}^{(d)}(K)$$

donde  $v_{d+1,0}^{(d)}(K)$  es el valor medio del volumen de un simple aleatorio con vértices

distribuidos en el interior de  $K$ , y  $V(K)$  el volumen de dimensión  $d$  de  $K$ . Obsérvese que el cociente  $V_{d+1,0}^{(d)}(K)/V(K)$  es nuevamente un invariante afín, y que, por lo tanto, para determinar valores explícitos de las probabilidades  $p_{d+1}^{(d)}(K;d+2,0)$  y  $p_{d+2}^{(d)}(K;d+2,0)$ , basta hacerlo para una imagen afín adecuada de  $K$ . De todas maneras la determinación de valores explícitos de  $V_{d+1,0}^{(d)}(K)$  resulta ser poco accesible. Klee [1969], por ejemplo, propuso el siguiente problema que aún se mantiene abierto:

*¿Cuál es el valor medio del volumen de un tetraedro con vértices distribuidos al azar en el interior de un tetraedro de volumen 1?*

(comparar también Buchta [1986b]).

Kingman [1969] determina de manera elegante el valor explícito de  $V_{d+1,0}^{(d)}(K)$  para el caso particular de la bola de dimensión  $d$  y volumen 1:

$$(10.6) \quad V_{d+1,0}^{(d)}(\text{bola de volumen 1}) = \gamma_{d+1}^{d+1} \gamma_{(d+1)^2}^{-1},$$

donde

$$\gamma_i = 2^{-(i+1)} \Gamma(i+1) \left( \Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right) \right)^{-2}$$

Groemer [1973], [1974] extiende la cota inferior de (10.3) a  $d$  dimensiones. Primero demuestra que, entre todos los cuerpos convexos  $K$  de igual volumen, el valor medio del volumen  $V_{d+1,0}^{(d)}(K)$  del simple aleatorio  $H_{d+1}$  es mínimo únicamente para elipsoides. En el segundo trabajo el autor demuestra que la afirmación también es válida para el valor medio del volumen de polítopos aleatorios  $H_n$  ( $n \geq d+1$ ). Tanto Blaschke como Groemer utilizan en las respectivas demostraciones una propiedad extremal de la simetrización de Steiner de un cuerpo convexo  $K$ .

Miles [1971] generaliza el Problema de Sylvester en el sentido de determinar

$$p_{d+1}^{(d)}(B_d; d+3, 0) \quad p_{d+2}^{(d)}(B_d; d+3, 0) \quad \text{y} \quad p_{d+3}^{(d)}(B_d; d+3, 0)$$

las probabilidades de que la cápsula convexa de  $d+3$  puntos aleatorios, distribuidos independiente y uniformemente en el interior de la bola unidad  $B_d$ , tenga  $d+1$ ,  $d+2$  y  $d+3$  vértices, respectivamente.

Miles introduce los llamados "m-filled d-simplices". Dados  $n$  ( $n \geq d+1$ ) puntos aleatorios en el interior de  $B_d$ , existen  $\binom{n}{d+1}$  posibilidades de formar un simple de dimensión  $d$ . Miles llama a un tal simple "m-filled" si esté último contiene exactamente  $m$  de los restantes  $n-d-1$  puntos. Para el plano y el espacio de tres dimensiones obtiene

$$(10.7) \quad p_3^{(2)}(B_2; 5, 0) = \frac{15}{16\pi^2} \quad p_4^{(2)}(B_2; 5, 0) = \frac{65}{12\pi^2} \quad p_5^{(2)}(B_2; 5, 0) = 1 - \frac{305}{48\pi^2}$$

y

$$(10.8) \quad p_4^{(3)}(B_3; 6, 0) = \frac{9}{200\pi^2} \quad , \quad p_5^{(3)}(B_3; 6, 0) = \frac{27}{143} - \frac{9}{100\pi^2} \quad , \quad p_6^{(3)}(B_3; 6, 0) = \frac{116}{143} + \frac{9}{200\pi^2} \cdot$$

Finalmente, Buchta expresa en un reciente trabajo [1986a] las probabilidades

$$p_{d+1}^{(d)}(K; d+3, 0) \quad p_{d+2}^{(d)}(K; d+3, 0) \quad \text{y} \quad p_{d+3}^{(d)}(K; d+3, 0)$$

en función de  $M_1^{(d)}(K; d+1, 0)$  y  $M_2^{(d)}(K; d+1, 0)$ , el primer y segundo momento del volumen de un simple aleatorio de dimensión  $d$  con vértices distribuidos en el interior de un cuerpo convexo  $K$  de volumen 1.

Buchta prueba que

$$(10.9) \quad p_{d+1}^{(d)}(K;d+3,0) = \binom{d+3}{2} M_2^{(d)}(K;d+1,0)$$

$$(10.10) \quad p_{d+2}^{(d)}(K;d+3,0) = \binom{d+3}{2} (M_1^{(d)}(K;d+1,0) - 2M_2^{(d)}(K;d+1,0)) \quad y$$

$$(10.11) \quad p_{d+3}^{(d)}(K;d+3,0) = 1 - \binom{d+3}{2} (M_1^{(d)}(K;d+1,0) - M_2^{(d)}(K;d+1,0))$$

De acuerdo con resultados establecidos por Kingman [1969] y Miles [1971] los valores de

$$p_{d+1}^{(d)}(B_d;d+3,0) \quad , \quad p_{d+2}^{(d)}(B_d;d+3,0) \quad y \quad p_{d+3}^{(d)}(B_d;d+3,0)$$

se determinan de manera explícita para cualquier  $d$ .

Si  $m$  es un entero,  $m \geq 2$ , la expresión (10.9) se puede generalizar a

$$(10.12) \quad p_{d+1}^{(d)}(K;d+m,0) = \binom{d+m}{m-1} M_{m-1}^{(d)}(K;d+1,0)$$

(comparar Buchta [1986a], observación 5).

Reed [1974] obtiene las expresiones de  $M_1^{(2)}(K;3,0)$  y  $M_2^{(2)}(K;3,0)$  para los casos particulares del triángulo y el paralelogramo.

Por lo tanto, para el triángulo  $T$  de área 1, se deduce que

$$(10.13) \quad p_3^{(2)}(T;5,0) = \frac{5}{36} \quad p_4^{(2)}(T;5,0) = \frac{20}{36} \quad p_5^{(2)}(T;5,0) = \frac{11}{36}$$

y para el paralelogramo  $P$  de área 1

$$(10.14) \quad p_3^{(2)}(P;5,0) = \frac{15}{144} \quad p_4^{(2)}(P;5,0) = \frac{80}{144} \quad p_5^{(2)}(P;5,0) = \frac{49}{144}$$

En el mismo trabajo Reed determina el segundo momento del volumen de un simple aleatorio para el caso de un simple  $S_d$  de dimensión  $d$  y volumen  $1$  :

$$(10.15) \quad M_2^{(d)}(S_d; d+1, 0) = \frac{d!}{(d+1)^d (d+2)^d}$$

De un teorema de Blaschke el cual afirma que, entre todas las figuras convexas planas  $K$  de área  $1$ , el valor medio de una función continua, positiva y monótona creciente del área de un triángulo aleatorio con vértices distribuidos en el interior de  $K$ , es mínimo únicamente si  $K$  es una elipse y máximo si  $K$  es un triángulo, Buchta [1986a] deduce que

$$(10.16) \quad p_3^{(2)}(\text{elipse}; 2+m, 0) \leq p_3^{(2)}(K; 2+m, 0) \leq p_3^{(2)}(\text{triángulo}; 2+m, 0), \quad m \geq 2$$

Usando el segundo resultado de Groemer [1974] el mismo autor generaliza la cota inferior de (10.16) a  $d$  dimensiones, es decir, la probabilidad  $p_{d+1}^{(d)}(K; d+m, 0)$  expresada por (10.12) es mínima entre todos los cuerpos convexas  $K$  de volumen  $1$ , únicamente si  $K$  es un elipsoide.

11.1. Planteamiento del problema

Volvamos a la configuración estocástica  $S(B_d; n-i, i)$  formada por  $n-i$  puntos  $P_1, \dots, P_{n-i}$  ( $n \geq d+1$ ) del interior e  $i$  puntos  $S_1, \dots, S_i$  del contorno de  $B_d$ , la bola unidad de dimensión  $d$  en  $E^d$  ( $d \geq 2$ ). Supongamos nuevamente que tanto  $P_1, \dots, P_{n-i}$  como  $S_1, \dots, S_i$  estén distribuidos independiente y uniformemente en el interior y sobre el contorno de  $B_d$ , respectivamente.

En el capítulo 10 vimos que Miles [1971] generaliza el problema de Sylvester en el sentido de determinar

$$p_{d+j}^{(d)}(B_d; d+3, 0) \quad j = 1, 2, 3$$

la probabilidad de que la cápsula convexa determinada por la configuración  $S(B_d; d+3, 0)$  tenga  $d+j$  vértices. El autor observa asimismo que su argumentación puede ser extendida a configuraciones  $S(B_d; d+3-i, i)$  con  $i > 0$ .

Objeto de este capítulo es obtener de manera explícita las fórmulas generales relacionadas con las configuraciones estocásticas

$$S(B_d; d+2-i, i) \quad \text{y} \quad S(B_d; d+3-i, i)$$

es decir, pretendemos obtener fórmulas explícitas para las probabilidades

$$p_{d+j}^{(d)}(d+m-i, i) \equiv p_{d+j}^{(d)}(B_d; d+m-i, i)$$

donde  $i = 0, 1, \dots, d+m$ ,  $m = 2, 3$  y  $j = 1, 2, \dots, m$

Ilustraremos las fórmulas generales dando en cada sección todos los valores numéricos para los casos particulares del plano y el espacio de 3 dimensiones.

En la sección 11.4 intentamos acercarnos a la configuración  $S(B_d; d+4-i, i)$ .

En nuestras consideraciones evitamos la noción de "m-filled simplices" introducida por Miles [1971] aplicando directamente lo establecido en los capítulos 3, 5 y 8.

## 11.2. Polítopos del "tipo de Sylvester"

### 11.2.1. Fórmulas generales

Consideremos la configuración estocástica  $S(B_d; d+2-i, i)$  formada por  $d+2$  puntos aleatorios,  $d+2-i$  de los cuales se encuentran distribuidos en el interior, los restantes  $i$  sobre el contorno de la bola unidad  $B_d$  de dimensión  $d$ . Con probabilidad 1 la cápsula convexa  $H_{d+2-i, i}$  definida por  $S(B_d; d+2-i, i)$  tendrá  $d+1$  ó  $d+2$  vértices. Las dos siguientes ecuaciones nos proporcionan una respuesta completa al problema

$$(11.1) \quad p_{d+1}^{(d)}(d+2-i, i) + p_{d+2}^{(d)}(d+2-i, i) = 1$$

y

$$i = 0, 1, \dots, d+2$$

$$(11.2) \quad (d+1) p_{d+1}^{(d)}(d+2-i, i) + (d+2) p_{d+2}^{(d)}(d+2-i, i) = E_{d+2-i, i}^{(d)}(B_d)$$

siendo  $E_{d+2-i, i}^{(d)}(B_d)$  el valor medio del número de vértices de la cápsula convexa  $H_{d+2-i, i}$  (comparar capítulo 8). Por lo tanto, para las probabilidades en cuestión se tiene que

$$(11.3) \quad p_{d+1}^{(d)}(d+2-i, i) = d + 2 - E_{d+2-i, i}^{(d)}(B_d)$$

$$y \quad i = 0, 1, \dots, d+2$$

$$(11.4) \quad p_{d+2}^{(d)}(d+2-i, i) = E_{d+2-i, i}^{(d)}(B_d) - d - 1 ,$$

o, en función del valor medio del volumen de  $H_{d+1-i, i}$  ,

$$(11.3') \quad p_{d+1}^{(d)}(d+2-i, i) = \frac{d+2-i}{\rho_d} v_{d+1-i, i}^{(d)}(B_d)$$

$$y \quad i = 0, 1, \dots, d+1$$

$$(11.4') \quad p_{d+2}^{(d)}(d+2-i, i) = 1 - \frac{d+2-i}{\rho_d} v_{d+1-i, i}^{(d)}(B_d) ,$$

donde

$$v_{d+1-i, i}^{(d)}(B_d) = \frac{\rho_{d-1}^{d+1} 2 \sqrt{\pi}}{d^i \rho_d^d (d+1)^{d+1-i}} \frac{\Gamma\left(\frac{d^2+2d-2i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2+2d-2i+2}{2}\right)}$$

(comparar capítulo 3, fórmula (3.7) y sección 5.2 , caso particular (c)).

Para el caso particular  $i = d+2$  , es decir todos los puntos se encuentran distribuidos sobre el contorno de  $B_d$  , sustituyendo en (11.3) y (11.4) se tiene que

$$p_{d+1}^{(d)}(0, d+2) = 0 \quad y \quad p_{d+2}^{(d)}(0, d+2) = 1 ,$$

como era de esperar.

11.2.2. Caso particular  $d = 2$

Sustituyendo  $d = 2$  en las expresiones (11.3') y (11.4') obtenemos para el caso particular de puntos aleatorios distribuidos en el círculo unidad  $B_2$  las siguientes expresiones

$$(11.5) \quad p_3^{(2)}(4-i,i) = \frac{(4-i) 2^{4-i} \Gamma\left(\frac{11-2i}{2}\right)}{3^{3-i} \pi^{5/2} (4-i)!}$$

y  $i = 0, 1, 2, 3$

$$(11.6) \quad p_4^{(2)}(4-i,i) = 1 - \frac{(4-i) 2^{4-i} \Gamma\left(\frac{11-2i}{2}\right)}{3^{3-i} \pi^{5/2} (4-i)!},$$

y por consiguiente la tabla con todos los posibles valores numéricos:

$i$	0	1	2	3	4
$p_3^{(2)}(4-i,i)$	$\frac{35}{12\pi^2}$ (0.296) <sup>(*)</sup>	$\frac{35}{12\pi^2}$ (0.296)	$\frac{5}{2\pi^2}$ (0.253)	$\frac{3}{2\pi^2}$ (0.152)	0
$p_4^{(2)}(4-i,i)$	$1 - \frac{35}{12\pi^2}$ (0.704) <sup>(*)</sup>	$1 - \frac{35}{12\pi^2}$ (0.704)	$1 - \frac{5}{2\pi^2}$ (0.747)	$1 - \frac{3}{2\pi^2}$ (0.848)	1

Tabla 11.1 Valores numéricos de las probabilidades  $p_j^{(2)}(B_2; 4-i, i)$ ,  $j = 3, 4$

(\*) Estos valores también han sido determinados por Kingman [1969].  
Los restantes son nuevos.

11.2.3. Caso particular  $d = 3$

Sustituyendo  $d = 3$  en las expresiones (11.3') y (11.4') obtenemos para el caso particular de puntos aleatorios distribuidos en la bola unidad  $B_3$  las siguientes expresiones:

$$(11.7) \quad p_4^{(3)}(5-i,i) = \frac{2\sqrt{\pi} 3^{4-i} (5-i)(8-i)!}{4^{8-i} \Gamma\left(\frac{17-2i}{2}\right)}$$

y

$$i = 0,1,2,3,4$$

$$(11.8) \quad p_5^{(3)}(5-i,i) = 1 - \frac{2\sqrt{\pi} 3^{4-i} (5-i)(8-i)!}{4^{8-i} \Gamma\left(\frac{17-2i}{2}\right)}$$

y por consiguiente la tabla con todos los posibles valores numéricos:

$i$	0	1	2	3	4	5
$p_4^{(3)}(5-i,i)$	$\frac{9}{143}$ (*) (0.063)	$\frac{9}{143}$ (0.063)	$\frac{9}{154}$ (0.058)	$\frac{1}{21}$ (0.048)	$\frac{1}{35}$ (0.029)	0
$p_5^{(3)}(5-i,i)$	$\frac{134}{143}$ (*) (0.937)	$\frac{134}{143}$ (0.937)	$\frac{145}{154}$ (0.942)	$\frac{20}{21}$ (0.952)	$\frac{34}{35}$ (0.971)	1

Tabla 11.2 Valores numéricos de las probabilidades  $p_j^{(3)}(B_3; 5-i, i)$   $j = 4, 5$

(\*) Estos valores también han sido determinados por Kingman [1969].  
Los restantes son nuevos.

11.3. La configuración  $S(B_d; d+3-i, i)$

11.3.1. Fórmulas generales

Consideremos ahora la configuración estocástica  $S(B_d; d+3-i, i)$  formada por  $d+3$  puntos aleatorios,  $d+3-i$  de los cuales se encuentran distribuidos en el interior, los restantes  $i$  sobre el contorno de la bola unidad  $B_d$  de dimensión  $d$ . Con probabilidad 1 la cápsula convexa  $H_{d+3-i, i}$  definida por  $S(B_d; d+3-i, i)$  tendrá  $d+1$ ,  $d+2$  ó  $d+3$  vértices. Las tres siguientes ecuaciones nos proporcionan una respuesta completa al problema

$$(11.9) \quad p_{d+1}^{(d)}(d+3-i, i) = (1 / \rho_d^2) \binom{d+3-i}{2} M_2^{(d)}(d+1-i, i)$$

$$(11.10) \quad p_{d+1}^{(d)}(d+3-i, i) + p_{d+2}^{(d)}(d+3-i, i) + p_{d+3}^{(d)}(d+3-i, i) = 1 \quad y$$

$$(11.11) \quad (d+1) p_{d+1}^{(d)}(d+3-i, i) + (d+2) p_{d+2}^{(d)}(d+3-i, i) + (d+3) p_{d+3}^{(d)}(d+3-i, i) = E_{d+3-i, i}^{(d)}(B_d) ,$$

siendo  $M_2^{(d)}(d+1-i, i)$  el segundo momento del volumen del simple aleatorio de dimensión  $d$  relacionado con la configuración estocástica  $S(B_d; d+1-i, i)$ .

Para la expresión (11.9) observemos que la cápsula convexa  $H_{d+3-i, i}$  generada por los puntos  $P_1, \dots, P_{d+3-i}, S_1, \dots, S_i$  es un simple de dimensión  $d$  si y sólo si dos puntos interiores están contenidos en el simple generado por los restantes  $d+1$  puntos (nótese que todos los puntos del contorno resultan ser vértices de  $H_{d+3-i, i}$ ). La probabilidad de que ocurra este evento es igual a

$$\frac{M_2^{(d)}(d+1-i, i)}{\rho_d^2}$$

y teniendo en cuenta que existen  $\binom{d+3-i}{2}$  posibilidades de elegir dos puntos interiores de los  $d+3-i$  en cuestión, la expresión (11.9) queda demostrada.

De Miles [1971] se concluye que

$$(11.12) \quad M_2^{(d)}(d+1-i, i) = \frac{d^2 + 3d - 2i + 2}{d! d^i (d+2)^{d+1-i}}$$

y por lo tanto para las probabilidades en cuestión se tiene que

$$(11.13) \quad p_{d+1}^{(d)}(d+3-i, i) = (1/\rho_d^2) \binom{d+3-i}{2} M_2^{(d)}(d+1-i, i)$$

$$(11.14) \quad p_{d+2}^{(d)}(d+3-i, i) = d + 3 - E_{d+3-i, i}^{(d)}(B_d) - \frac{2}{\rho_d^2} \binom{d+3-i}{2} M_2^{(d)}(d+1-i, i) \quad y$$

$$(11.15) \quad p_{d+3}^{(d)}(d+3-i, i) = E_{d+3-i, i}^{(d)}(B_d) + \binom{d+3-i}{2} \frac{2}{\rho_d^2} M_2^{(d)}(d+1-i, i)$$

para  $i = 0, 1, \dots, d+1$ .

Obsérvese que utilizando las fórmulas (3.7) y (4.8) podemos expresar el valor medio del número de vértices  $E_{d+3-i, i}^{(d)}(B_d)$  en función del valor medio del volumen  $V_{d+1-i, i}^{(d)}(B_d)$  cuyo valor explícito se puede encontrar en el caso particular (c) de la sección 5.2.

Para  $i = d+2$ , es decir un punto está distribuido en el interior, los restantes  $d+2$  sobre el contorno de  $B_d$ , se tiene que

$$(11.16) \quad p_{d+1}^{(d)}(1, d+2) = 0$$

$$(11.17) \quad p_{d+2}^{(d)}(1, d+2) = d + 3 - E_{1, d+2}^{(d)}(B_d) \quad y$$

$$(11.18) \quad p_{d+3}^{(d)}(1, d+2) = E_{1, d+2}^{(d)}(B_d) - d - 2$$

Para  $i = d+3$ , es decir todos los  $d+3$  puntos se encuentran distribuidos sobre el contorno de  $B_d$ , obtenemos obviamente

$$(11.19) \quad p_{d+1}^{(d)}(0, d+3) = 0, \quad p_{d+2}^{(d)}(0, d+3) = 0 \quad y \quad p_{d+3}^{(d)}(0, d+3) = 1$$

### 11.3.2. Caso particular $d = 2$

Sustituyendo  $d = 2$  en las expresiones (11.12) - (11.19) obtenemos todos los posibles valores numéricos para el caso de puntos distribuidos en el círculo unidad  $B_2$ :

$i$	0	1	2	3	4	5
$p_3^{(2)}(5-i, i)$	$\frac{15}{16\pi^2}^{(*)}$ (0.095)	$\frac{15}{16\pi^2}$ (0.095)	$\frac{3}{4\pi^2}$ (0.076)	$\frac{3}{8\pi^2}$ (0.038)	0	0
$p_4^{(2)}(5-i, i)$	$\frac{65}{12\pi^2}^{(*)}$ (0.549)	$\frac{65}{12\pi^2}$ (0.549)	$\frac{31}{6\pi^2}$ (0.523)	$\frac{9}{2\pi^2}$ (0.456)	$\frac{3}{\pi^2}$ (0.304)	0
$p_5^{(2)}(5-i, i)$	$1 - \frac{305}{48\pi^2}^{(*)}$ (0.356)	$1 - \frac{305}{48\pi^2}$ (0.356)	$1 - \frac{71}{12\pi^2}$ (0.401)	$1 - \frac{39}{8\pi^2}$ (0.506)	$1 - \frac{3}{\pi^2}$ (0.696)	1

Tabla 11.3 Valores numéricos de las probabilidades  $p_j^{(2)}(B_2; 5-i, i)$   $j = 3, 4, 5$

(\*) Estos valores también han sido determinados por Miles [1971].  
Los restantes son nuevos.

11.3.3. Caso particular  $d = 3$

Sustituyendo  $d = 3$  en las expresiones (11.12) - (11.19) obtenemos todos los posibles valores numéricos para el caso de puntos aleatorios distribuidos en la bola unidad  $B_3$  :

i	0	1	2	3	4	5	6
$p_4^{(3)}(6-i,i)$	$\frac{9}{200\pi^2}$ (0.005) (*)	$\frac{9}{200\pi^2}$ (0.005)	$\frac{1}{25\pi^2}$ (0.004)	$\frac{7}{240\pi^2}$ (0.003)	$\frac{1}{72\pi^2}$ (0.001)	0	0
$p_5^{(3)}(6-i,i)$	$\frac{27}{143} - \frac{9}{100\pi^2}$ (0.180) (*)	$\frac{27}{143} - \frac{9}{100\pi^2}$ (0.180)	$\frac{180}{1001} - \frac{2}{25\pi^2}$ (0.172)	$\frac{7}{44} - \frac{7}{120\pi^2}$ (0.153)	$\frac{13}{105} - \frac{1}{36\pi^2}$ (0.121)	$\frac{1}{14}$ (0.071)	0
$p_6^{(3)}(6-i,i)$	$\frac{116}{143} + \frac{9}{200\pi^2}$ (0.815) (*)	$\frac{116}{143} + \frac{9}{200\pi^2}$ (0.815)	$\frac{821}{1001} + \frac{1}{25\pi^2}$ (0.824)	$\frac{37}{44} + \frac{7}{240\pi^2}$ (0.844)	$\frac{92}{105} + \frac{1}{72\pi^2}$ (0.878)	$\frac{13}{14}$ (0.929)	1

Tabla 11.4 Valores numéricos de las probabilidades  $p_j^{(3)}(B_3; 6-i, i)$   $j = 4, 5, 6$

(\*) Estos valores también han sido determinados por Miles [1971].  
Los restantes son nuevos.

## 11.4. La configuración $S(B_d; d+4-i, i)$

### 11.4.1. Fórmulas generales

Consideremos finalmente la configuración estocástica  $S(B_d; d+4-i, i)$  formada por  $d+4$  puntos aleatorios,  $d+4-i$  de los cuales se encuentran distribuidos en el interior, los restantes  $i$  sobre el contorno de la bola unidad  $B_d$  de dimensión  $d$ . Supongamos primero que  $1 \leq i \leq d+1$ . Con probabilidad 1 la cápsula convexa  $H_{d+4-i, i}$  definida por  $S(B_d; d+4-i, i)$  tendrá  $d+1$ ,  $d+2$ ,  $d+3$  ó  $d+4$  vértices. Las cuatro siguientes ecuaciones nos proporcionan una respuesta completa al problema

$$(11.20) \quad p_{d+1}^{(d)}(d+4-i, i) = (1/\rho_d^3) \binom{d+4-i}{3} M_3^{(d)}(d+4-i, i)$$

$$(11.21) \quad p_{d+2}^{(d)}(d+4-i, i) = \binom{d+4-i}{2} \left\{ (1/\rho_d^2) M_{2, d+2}^{(d)}(d+4-i, i) - \frac{(d+2-i)}{\rho_d^3} M_3^{(d)}(d+4-i, i) \right\}$$

$$(11.22) \quad p_{d+1}^{(d)}(d+4-i, i) + p_{d+2}^{(d)}(d+4-i, i) + p_{d+3}^{(d)}(d+4-i, i) + p_{d+4}^{(d)}(d+4-i, i) = 1 \quad \text{y}$$

$$(11.23) \quad (d+1) p_{d+1}^{(d)}(d+4-i, i) + \quad + \quad (d+4) p_{d+4}^{(d)}(d+4-i, i) = E_{d+4-i, i}^{(d)}(B_d)$$

siendo  $M_3^{(d)}(d+4-i, i)$  el tercer momento del volumen del simple aleatorio  $H_{d+4-i, i}$  y  $M_{2, d+2}^{(d)}(d+4-i, i)$  el segundo momento del volumen del polítopo aleatorio de dimensión  $d$  definido por la configuración estocástica  $S(B_d; d+4-i, i)$ .

Para la expresión (11.20) observemos que la cápsula convexa  $H_{d+4-i,i}$  generada por los puntos  $P_1, \dots, P_{d+4-i}, S_1, \dots, S_i$  es un simple de dimensión  $d$  si y sólo si tres puntos interiores están contenidos en el simple generado por los restantes  $d+1$  puntos (nótese que todos los puntos del contorno resultan ser vértices de  $H_{d+4-i,i}$ ). La probabilidad de que ocurra este evento es

$$\frac{M_3^{(d)}(d+1-i,i)}{\rho_d^3}$$

y teniendo en cuenta que existen  $\binom{d+4-i}{3}$  posibilidades de elegir tres puntos interiores de los  $d+4-i$  en cuestión, la expresión (11.20) queda demostrada. De Miles [1971] se concluye que

$$(11.24) \quad M_3^{(d)}(d+1-i,i) = \frac{2^d d^{d+2-i}}{\pi(d!)^3 (d+1)(d+3)^{d+1-i}} \frac{(\Gamma(\frac{d}{2}))^{d+2}}{(\Gamma(\frac{d+3}{2}))^{d+1}} \frac{\Gamma(\frac{d^2+4d-2i+5}{2})}{\Gamma(\frac{d^2+4d-2i+2}{2})}$$

Para la expresión (11.21) consideremos el siguiente razonamiento.

Para calcular el segundo momento del volumen del polítopo aleatorio  $H_{d+2-i,i}$  definido por  $S(B_d; d+2-i, i)$

$$(11.25) \quad M_{2,d+2}^{(d)}(d+2-i,i) = \frac{1}{\rho_d^{d+2-i} \omega_{d-1}^i} \int (V(H_{d+2-i,i}))^2 dP_1 \dots dP_{d+2-i} dS_1 \dots dS_i$$

fijamos primero todos los puntos del contorno  $S_1, \dots, S_i$  y los completamos (si resulta necesario) con  $d+1-i$  puntos interiores para así formar un simple  $H_{d+1-i,i}$  de dimensión  $d$ . Podemos afirmar entonces que

$$(11.26) \quad M_{2,d+2}^{(d)}(d+2-i,i) = \frac{1}{\rho_d^{d+2-i} \omega_{d-1}^i} \int_{P_{d+2-i} \in B_d} (V(H_{d+2-i,i}))^2 dP_{d+2-i} \int dP_1 \dots dP_{d+1-i} dS_1 \dots dS_i$$

Dividimos ahora el dominio de integración de  $P_{d+2-i}$  como sigue. El simple  $H_{d+1-i,i}$  generado por los puntos  $P_1, \dots, P_{d+1-i}, S_1, \dots, S_i$  divide a la bola unidad  $B_d$  en los siguientes subdominios:

$H_{d+1-i,i}$  El simple generado por  $P_1, \dots, P_{d+1-i}, S_1, \dots, S_i$ .

$R_j$  Sean  $F_1, \dots, F_d$  las facetas de  $H_{d+1-i,i}$  que intersecan en el punto  $P_j$  ( $1 \leq j \leq d+1-i$ ). Cada faceta  $F_k$  ( $1 \leq k \leq d$ ) está contenida en un hiperplano  $L_{d-1,k}$ . Sea  $K_k$  la parte de  $B_d$  determinada por  $L_{d-1,k}$  que no contiene la cápsula convexa  $H_{d+1-i,i}$ . Definimos finalmente  $R_j$  como la intersección de todos los  $K_k$  ( $1 \leq k \leq d$ ).

$R$   $B_d - H_{d+1-i,i} - (R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_{d+1-i})$ .

Ilustramos a continuación la división de  $B_d$  en los mencionados subdominios para dos configuraciones del plano.

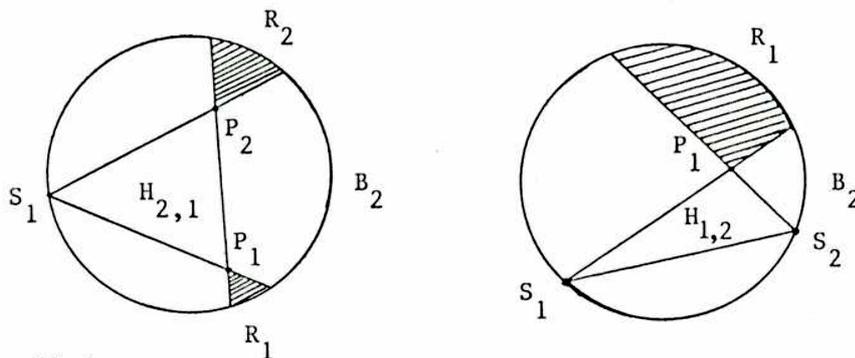


Figura 12.1

Teniendo en cuenta la división en subdominios se tiene que

$$\begin{aligned}
 (11.27) \quad M_{2,d+2}^{(d)}(d+2-i,i) &= \frac{1}{\rho_d^{d+2-i} \omega_d^i} \int_{P_{d+2-i} \in H_{d+1-i,i}} (V(H_{d+2-i,i}))^2 dP_{d+2-i} \int dP_1 \dots dP_{d+1-i} dS_1 \dots dS_i + \\
 &+ \frac{(d+1-i)}{\rho_d^{d+2-i} \omega_d^i} \int_{P_{d+2-i} \in R_j} (V(H_{d+2-i,i}))^2 dP_{d+2-i} \int dP_1 \dots dP_{d+1-i} dS_1 \dots dS_i \\
 &+ \frac{1}{\rho_d^{d+2-i} \omega_d^i} \int_{P_{d+2-i} \in R} (V(H_{d+2-i,i}))^2 dP_{d+2-i} \int dP_1 \dots dP_{d+1-i} dS_1 \dots dS_i
 \end{aligned}$$

Si  $P_{d+2-i}$  está en  $H_{d+1-i,i}$  tenemos que  $V(H_{d+2-i,i}) = V(H_{d+1-i,i})$ , y por lo tanto obtenemos

$$(11.28) \quad \frac{1}{\rho_d^{d+2-i} \omega_d^i} \int_{P_{d+2-i} \in H_{d+1-i,i}} (V(H_{d+2-i,i}))^2 dP_1 \dots dP_{d+2-i} dS_1 \dots dS_i = \frac{M_3^{(d)}(d+1-i,i)}{\rho_d}$$

Si  $P_{d+2-i}$  está en  $R_j$ , usando el teorema de Fubini, cambiamos el orden de integración y obtenemos

$$(11.29) \quad \frac{1}{\rho_d^{d+2-i} \omega_d^i} \int_{P_{d+2-i} \in R_j} (V(H_{d+2-i,i}))^2 dP_1 \dots dP_{d+2-i} dS_1 \dots dS_i = \frac{M_3^{(d)}(d+1-i,i)}{\rho_d}$$

para  $1 \leq j \leq d+1-i$ .

Si extendemos la integración de  $P_{d+2-i}$  al subdominio  $R$  tendremos siempre un polítopo de  $d+2$  vértices. Por lo tanto, llamando

$$(11.30) \quad A(d,i) = \frac{1}{\rho_d^{d+2-i} \omega_{d-1}} \int_{P_{d+2-i} \in R} (V(H_{d+2-i,i}))^2 dP_1 \dots dP_{d+2-i} dS_1 \dots dS_i$$

se ve fácilmente que

$$(11.31) \quad p_{d+2}^{(d)}(d+4-i,i) = \binom{d+4-i}{2} \frac{A(d,i)}{\rho_d^2}$$

y, teniendo en cuenta las expresiones (11.27) - (11.30), obtenemos finalmente

$$(11.32) \quad p_{d+2}^{(d)}(d+4-i,i) = \binom{d+4-i}{2} \left( \frac{M_{2,d+2}^{(d)}(d+2-i,i)}{\rho_d^2} - \frac{d+2-i}{\rho_d^3} M_3^{(d)}(d+1-i,i) \right),$$

de acuerdo con la expresión (11.21).

Las probabilidades en cuestión se obtienen a partir de las cuatro ecuaciones (11.20) - (11.23). Las fórmulas integrales que permiten calcular valores explícitos de  $E_{d+4-i,i}^{(d)}(B_d)$  están dadas en la sección 8.1. El cálculo de  $M_{2,d+2}^{(d)}(d+2-i,i)$  parece ser inaccesible.

Quedan por estudiar los casos en que  $i$  es igual a  $d+2$ ,  $d+3$  ó  $d+4$ .

Si  $i = d+2$ , observando que entonces  $p_{d+1}^{(d)}(2,d+2) = 0$ , las ecuaciones (11.21) - (11.23) nos proporcionan las probabilidades en cuestión.

Si  $i = d+3$ , observando que entonces  $p_{d+1}^{(d)}(1,d+3) = p_{d+2}^{(d)}(1,d+3) = 0$ , las ecuaciones (11.22) y (11.23) nos proporcionan las probabilidades en cuestión.

Finalmente, si  $i = d+4$ , es decir los  $d+4$  puntos en cuestión están distribuidos sobre el contorno de  $B_d$ , concluimos obviamente

$$p_{d+1}^{(d)}(0, d+4) = p_{d+2}^{(d)}(0, d+4) = p_{d+3}^{(d)}(0, d+4) = 0 \quad \text{y}$$

$$p_{d+4}^{(d)}(0, d+4) = 1$$

11.4.2. Caso particular  $d = 2$

Para el caso particular de puntos aleatorios distribuidos en el círculo unidad  $B_2$ , utilizando las expresiones (11.20) - (11.23) y lo establecido en el capítulo 8, damos a continuación los resultados "calculables" de las probabilidades  $p_{2+j}^{(2)}(6-i, i)$ ,  $1 \leq j \leq 4$ ,  $0 \leq i \leq 6$ .

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$p_3^{(2)}(6-i, i)$	$\frac{1001}{320\pi^4}$ (0.032) (*)	$\frac{1001}{320\pi^4}$ (0.032)	$\frac{77}{32\pi^4}$ (0.025)	$\frac{35}{32\pi^4}$ (0.011)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
$p_4^{(2)}(6-i, i)$		?	?			0 (0)	0 (0)
$p_5^{(2)}(6-i, i)$		?	?	?	?	$\frac{5}{\pi^2} - \frac{15}{2\pi^4}$ (0.430)	0 (0)
$p_6^{(2)}(6-i, i)$	?	?	?	?	?	$1 - \frac{5}{\pi^2} + \frac{15}{2\pi^4}$ (0.570)	1 (1)

Tabla 11.5 Valores conocidos de  $p_{2+j}^{(2)}(B_2; 6-i, i)$   $j = 1, 2, 3, 4$

(\*) Este resultado también ha sido determinado por Miles [1971]. Los restantes son nuevos.

11.4.3. Caso particular  $d = 3$

Para el caso particular de puntos aleatorios distribuidos en la bola unidad  $B_3$ , utilizando las expresiones (11.20) - (11.23) y lo establecido en el capítulo 8, damos a continuación los valores "calculables" de las probabilidades  $p_{3+j}^{(3)}(7-i, i)$ ,  $1 \leq j \leq 4$ ,  $0 \leq i \leq 7$ .

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$p_4^{(3)}(7-i, i)$	$\frac{15}{4199 \pi^2}$ (*) (0.0004)	$\frac{15}{4199 \pi^2}$ (0.0004)	$\frac{15}{4862 \pi^2}$ (0.0003)	$\frac{3}{1430 \pi^2}$ (0.0002)	$\frac{1}{1144 \pi^2}$ (0.00009)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
$p_5^{(3)}(7-i, i)$							0 (0)	0 (0)
$p_6^{(3)}(7-i, i)$		?	?		?		$\frac{5}{42}$ (0.119)	0 (0)
$p_7^{(3)}(7-i, i)$		?	?				$\frac{37}{42}$ (0.881)	1 (1)

Tabla 11.6 Valores conocidos de las probabilidades  $p_{3+j}^{(3)}(B_3; 7-i, i)$   $j = 1, 2, 3, 4$

(\*) Este resultado también ha sido determinado por Miles [1971].  
Los restantes son nuevos.

### 11.5. Observaciones

#### Observación 11.1

El mismo razonamiento seguido a través de todo el capítulo 11 puede ser extendido sin mayores dificultades al caso de un cuerpo convexo  $K$  en  $E^d$ , pero, puesto que los invariantes

$$V_{d+1-i,i}^{(d)}(K) , M_2^{(d)}(K;d+1-i,i) , M_3^{(d)}(K;d+1-i,i) , M_{2,d+2}^{(d)}(K;d+2-i,i) , \\ E_{d+3-i,i}^{(d)}(K) \text{ y } E_{d+4-i,i}^{(d)}(K)$$

que aparecen en el contexto se conocen de manera casi exclusiva sólo para el caso particular de la bola unidad  $B_d$  de dimensión  $d$ , hemos concentrado nuestro interés en la configuración estocástica  $S(B_d;d+m-i,i)$ ,  $m \geq 2$ ,  $0 \leq i \leq d+m$ , introducida por Miles [1971].

#### Observación 11.2

Las probabilidades  $p_{d+j}^{(d)}(K;d+m,0)$ ,  $m \geq 2$ ,  $1 \leq j \leq m$ , son invariantes intrínsecas, es decir, dependen únicamente de la forma del cuerpo convexo  $K$ . Por lo tanto, en virtud del Teorema de Crofton de Puntos Fijos (comparar fórmula (2.8)), se verifica fácilmente que

$$(11.33) \quad p_{d+j}^{(d)}(B_d;d+m,0) = p_{d+j}^{(d)}(B_d;d+m-1,1)$$

para  $m \geq 2$ ,  $1 \leq j \leq m$ , en coincidencia con los valores numéricos establecidos en las tablas 11.1 - 11.6 .

Observación 11.3

Las expresiones explícitas obtenidas para las probabilidades

$$p_{d+1}^{(d)}(B_d; d+2-i, i) \quad , \quad p_{d+1}^{(d)}(B_d; d+3-i, i) \quad \text{y} \quad p_{d+1}^{(d)}(B_d; d+4-i, i)$$

admiten sin mayores dificultades la siguiente generalización:

$$(11.34) \quad p_{d+1}^{(d)}(B_d; d+m-i, i) = \frac{1}{\rho_d^{m-1}} \binom{d+m-i}{m-1} M_{m-1}^{(d)}(B_d; d+1-i, i) \quad 0 \leq i \leq d+m \quad , \quad m \geq 2 \quad .$$

La argumentación es análoga a la utilizada en la demostración de las expresiones (11.3') , (11.9) y (11.20) .

Para el caso particular  $i = 0$  , la expresión (11.34) ha sido demostrada también por Buchta [1986a, observación 5] y por Miles [1971, teorema 7] .

Observación 11.4

El mismo razonamiento utilizado en la demostración de la expresión (11.21) puede ser generalizado al caso de  $d+m$  ( $m \geq 2$ ) puntos aleatorios. Se verifica fácilmente que

$$(11.35) \quad p_{d+2}^{(d)}(B_d; d+m-i, i) = \frac{1}{\rho_d^{m-2}} \binom{d+m-i}{m-2} M_{m-2, d+2}^{(d)}(B_d; d+2-i, i) - \frac{1}{\rho_d^{m-1}} \binom{d+m-i}{m-1} M_{m-1}^{(d)}(B_d; d+1-i, i) \quad .$$

Para el caso particular  $m = 2$  ,  $i = 0$  , se tiene que

$$(11.36) \quad p_{d+2}^{(d)}(B_d; d+2, 0) = 1 - \frac{d+2}{\rho_d} M_1^{(d)}(B_d; d+1, 0) \quad ,$$

en coincidencia con lo establecido por Kingman [1969].

Asimismo, para el caso particular  $m = 3$ ,  $i = 0$ , se tiene que

$$(11.37) \quad p_{d+2}^{(d)}(B_d; d+3, 0) = \frac{d+3}{\rho_d} M_{1, d+2}^{(d)}(B_d; d+2, 0) - \frac{2}{\rho_d^2} \binom{d+3}{2} M_2^{(d)}(B_d; d+1, 0)$$

y, teniendo en cuenta la expresión (4.7),

$$(11.38) \quad p_{d+2}^{(d)}(B_d; d+3, 0) = \frac{1}{\rho_d} \binom{d+3}{2} M_1^{(d)}(B_d; d+1, 0) - \frac{2}{\rho_d^2} \binom{d+3}{2} M_2^{(d)}(B_d; d+1, 0)$$

en coincidencia con el resultado obtenido por Buchta [1986a].

Observación 11.5

Consideremos la configuración estocástica  $S(B_d; 1, d+m-1)$ ,  $m \geq 2$ . Con probabilidad 1 la cápsula convexa  $H_{1, d+m-1}$  tendrá  $d+m-1$  ó  $d+m$  vértices. Para este caso particular se obtiene fácilmente

$$(11.39) \quad p_{d+m-1}^{(d)}(B_d; 1, d+m-1) = d + m - E_{1, d+m-1}^{(d)}(B_d) \quad y$$

$$(11.40) \quad p_{d+m}^{(d)}(B_d; 1, d+m-1) = 1 - d - m + E_{1, d+m-1}^{(d)}(B_d)$$

Por lo tanto, utilizando las expresiones integrales de la sección 8.1, obtenemos las probabilidades en cuestión para cualquier valor de  $m$ ,  $m \geq 2$ .

Observación 11.6

Argumentos similares a los utilizados en el capítulo 11 permiten establecer cuatro de las cinco ecuaciones necesarias para determinar las probabilidades relacionadas con la configuración estocástica  $S(B_d; d+5-i, i)$ :

$$(11.41) \quad p_{d+1}^{(d)}(d+5-i,i) + p_{d+2}^{(d)}(d+5-i,i) + \dots + p_{d+5}^{(d)}(d+5-i,i) = 1$$

$$(11.42) \quad (d+1) p_{d+1}^{(d)}(d+5-i,i) + \dots + (d+5) p_{d+5}^{(d)}(d+5-i,i) = E_{d+5-i,i}^{(d)}$$

$$(11.43) \quad p_{d+1}^{(d)}(d+5-i,i) = \frac{1}{\rho_d} \binom{d+5-i}{4} M_4^{(d)}(d+1-i,i)$$

$$(11.44) \quad p_{d+2}^{(d)}(d+5-i,i) = \frac{1}{\rho_d} \binom{d+5-i}{3} M_{3,d+2}^{(d)}(d+2-i,i) - \frac{4}{\rho_d} \binom{d+5-i}{4} M_4^{(d)}(d+1-i,i)$$

Observación 11.7

El caso asintótico en que la dimensión  $d$  del espacio euclidiano  $E^d$  tiende a infinito ha sido tratado por Miles [1971] y Buchta [1986a], quien demuestra que

$$(11.45) \quad \lim_{d \rightarrow \infty} p_{d+j}^{(d)}(B_d; d+m, 0) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m-1 \quad y$$

$$(11.46) \quad \lim_{d \rightarrow \infty} p_{d+m}^{(d)}(B_d; d+m, 0) = 1$$

Conjeturamos que el mismo comportamiento se observará para el caso general de la configuración estocástica  $S(B_d; d+m-i, i)$ , es decir, conjeturamos que

$$(11.47) \quad \lim_{d \rightarrow \infty} p_{d+j}^{(d)}(B_d; d+m-i, i) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m-1 \quad y$$

$$(11.48) \quad \lim_{d \rightarrow \infty} p_{d+m}^{(d)}(B_d; d+m-i, i) = 1$$

para  $i = 1, 2, \dots, d+m$

LA Santaló

  
(FERNANDO A. FERRER)

PARTE V

---

UN PROBLEMA DE PROBABILIDADES  
GEOMETRICAS

CAPITULO 12 CIRCULOS ALEATORIOS EN LA BOLA UNIDAD  $B_d$

Consideremos la configuración estocástica  $S(B_d;3,0)$  formada por tres puntos  $P, P_1$  y  $P_2$  distribuidos de manera uniforme en el interior de la bola unidad  $B_d$  en  $E^d$  ( $d \geq 2$ ). Con probabilidad 1, existe un único círculo  $B_2(R)$  de radio  $R$  tal que los puntos  $P, P_1$  y  $P_2$  estén contenidos en la circunferencia  $\partial B_2(R)$ .

El objeto principal de este capítulo es encontrar una respuesta al siguiente problema relacionado con probabilidades geométricas:

*¿Cuál es la probabilidad  $p(B_d;2)$  de que el círculo  $B_2(R)$  esté completamente contenido en  $B_d$ ?*

Para la medida del conjunto de casos favorables  $m(B_d;2)$  consideremos el siguiente razonamiento. Se tiene que

$$(12.1) \quad m(B_d;2) = \int_{\text{casos favorables}} dP dP_1 dP_2$$

Utilizamos primero la siguiente fórmula diferencial de Blaschke (comparar Santaló [1976], p. 201)

$$(12.2) \quad dP dP_1 dP_2 = (2T)^{d-2} dP' dP'_1 dP'_2 dL_2$$

donde  $T$  es el área del triángulo formado por  $P, P_1$  y  $P_2$ ,  $L_2$  la variedad lineal de dimensión 2 que pasa por  $P, P_1$  y  $P_2$ , y  $dP', dP'_1$  y  $dP'_2$  las respectivas densidades de  $P, P_1$  y  $P_2$  en  $L_2$  (es decir, elementos de área).

Combinando la expresión (12.2) con otra fórmula diferencial desarrollada por Miles (comparar Santaló [1976], p. 17), deducimos que

$$(12.3) \quad dP_1 dP_2 = (2T)^{d-1} dS'_1 dS'_2 \frac{dR}{R^2} dC' dL_2$$

siendo  $dS'$ ,  $dS'_1$  y  $dS'_2$  los elementos de arco en  $P'$ ,  $P'_1$  y  $P'_2$  de la circunferencia de radio  $R$  y centro  $C'$  determinada por los puntos  $P'$ ,  $P'_1$  y  $P'_2$ .

Pasemos ahora a la medida del conjunto de casos favorables:

$$(12.4) \quad m(B_d; 2) = 2^{d-1} \int \left( \int_T^{d-1} dS'_1 dS'_2 \right) \frac{dR}{R^2} dC' dL_2$$

El  $(d-1)$ -ésimo momento del área de un triángulo formado por tres puntos distribuidos independiente y uniformemente en una circunferencia de radio  $R$ , ha sido calculado por Miles [1971], de donde deducimos que

$$(12.5) \quad \int_T^{d-1} dS'_1 dS'_2 = \frac{\pi^3 \Gamma\left(\frac{3d-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2^{d-4} \Gamma(1/2) \Gamma(d) \left(\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\right)^2} R^{2d+1} = \alpha(d) R^{2d+1}$$

y por lo tanto,

$$(12.6) \quad m(B_d; 2) = 2^d \pi \alpha(d) \int_{L_2 \cap B_d} \left( \int_0^r \int_0^{r-\rho} R^{2d-1} dR \right) \rho d\rho dL_2$$

donde  $\rho$  indica la distancia de  $C'$  al centro del círculo  $B_d \cap L_2$  de radio  $r = (1-p^2)^{\frac{1}{2}}$ . Integrando se tiene que

$$(12.7) \quad m(B_d; 2) = \frac{\pi 2^{d-1} \alpha(d)}{d(2d+1)(2d+2)} \int_{L_2 \cap B_d} (1-p^2)^{d+1} dL_2$$

siendo  $p$  la distancia de  $L_2$  a  $O$ , el centro de la bola unidad  $B_d$ .  
 De Petkantschin [1936], p. 283, deducimos la siguiente fórmula diferencial

$$(12.8) \quad dL_2 = p^{d-3} dp dL_1^*[0] dL_2^{(d-1)}[0]$$

donde  $dL_1^*[0]$  indica la densidad de rectas orientadas alrededor de  $O$  determinadas por  $O$  y  $O'$ , siendo este último el punto en  $L_2$  que realiza la distancia de  $O$  a  $L_2$ , y  $dL_2^{(d-1)}[0]$  la densidad de la variedad lineal  $L_2$ , pero ahora considerada en el complemento ortogonal de  $L_1$  y alrededor del punto  $O'$ .

Observando que  $p$  no varía si integramos respecto de  $dL_1^*[0]$  y  $dL_2^{(d-1)}[0]$ , obtenemos para la medida del conjunto de casos favorables:

$$(12.9) \quad m(B_d; 2) = \frac{\omega_{d-1} \omega_{d-2} \omega_{d-3} 2^{d-4} \alpha(d) \Gamma(d+2) \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{d(2d+1)(2d+2) \Gamma\left(\frac{3d+2}{2}\right)},$$

de donde resulta la probabilidad en cuestión:

$$(12.10) \quad p(B_d; 2) = \frac{\pi (d-1) d^2 \left(\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\right)^3 \Gamma\left(\frac{3d-1}{2}\right)}{6 (2d+1) \left(\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\right)^3 \Gamma\left(\frac{3d}{2}\right)}$$

Observación 12.1

Damos a continuación algunos valores numéricos de  $p(B_d; 2)$ :

$$p(B_2;2) = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$p(B_3;2) = \frac{12\pi^2}{245} = 0.483$$

$$p(B_4;2) = \frac{14}{27} = 0.519$$

Observación 12.2

Consideremos, finalmente, el comportamiento asintótico de la expresión (12.10) cuando la dimensión  $d$  del espacio tiende a infinito. Teniendo en cuenta que

$$\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \quad (d/2)^{\frac{1}{2}}$$

se verifica fácilmente que

$$p(B_d;2) \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0.605$$

Observación 12.3

Más difícil se presenta la siguiente generalización. Consideremos la configuración estocástica  $S(B_d; s+1, 0)$  formada por  $s+1$  puntos  $P, P_1, \dots, P_s$  distribuidos independiente y uniformemente en el interior de la bola unidad  $B_d$  en  $E^d$  ( $d \geq 2$ ). Con probabilidad 1, existe una única bola  $B_s(R)$  de dimensión  $s$  y radio  $R$  de tal manera que  $P, P_1, \dots, P_s$  estén contenidos sobre el contorno de  $B_s(R)$ . Pregunta:

*¿Cuál es la probabilidad  $p(B_d; s)$  de que  $B_s(R)$  esté completamente contenida en  $B_d$ ?*

Serios inconvenientes aparecen al intentar generalizar al espacio euclidiano de dimensión  $d$  ( $d \geq 2$ ) la fórmula diferencial de Miles que interviene en la expresión (12.3).

B I B L I O G R A F I A

AFFENTRANGER, F.

- 1987a *Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points.* Por aparecer en Elem. Math. .
- 1987b *The expected volume of a random polytope in a ball.*  
Impresiones Previas N° 71 , Departamento de Matemática, F.C.E.y N. ,  
Universidad de Buenos Aires.
- 1987c *The expected volume of the convex hull of  $n$  random points on the unit sphere.* Trabajos de Matemática, preprint 123, I.A.M., CONICET.

ALIKOSKI, H.A.

- 1939 *Ueber das Sylvestersche Vierpunktproblem.* Ann. Acad. Sci. Fennicae  
51, 1 - 10.

BLASCHKE, W.

- 1917 *Lösung des "Vierpunktproblems" von Sylvester aus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten.* Leipziger Berichte 69, 436 - 453.

BUCHTA, C.

- 1983 *Ueber die konvexe Hülle von Zufallspunkten in Eibereichen.*  
Elem. Math. 38, 153 - 156.
- 1984a *Das Volumen von Zufallspolyedern im Ellipsoid.* Anz. Oesterr. Akad.  
Wiss. Math. - Natur. Kl.
- 1984b *Stochastische Approximation konvexer Polygone.* Z. Wahrsch. verw. Geb.  
67, 283 - 304.
- 1984c *Zufallspolygone in konvexen Vielecken.* J. reine angew. Math.  
347, 212 - 220.
- 1985 *Zufällige Polyeder - Eine Uebersicht.* En: Zahlentheoretische Analysis  
(Hlawka, E. , ed.). Lect. Notes Math. 1114, 1 - 13. Berlin - Heidelberg -  
New York - Tokyo. Springer.
- 1986a *On a conjecture of R.E. Miles about the convex hull of random points.*  
Mh. Math. 102, 91 - 102.

BUCHTA, C. (continuación)

1986b *A note on the volume of a random polytope in a tetrahedron.*  
Illinois J. of Math. 30, 4, 653 - 659.

BUCHTA, C. y MUELLER, J.

1984 *Random polytopes in a ball.* J. Appl. Prob. 21, 753 - 762.

BUCHTA, C. y TICHY, R.F.

1985 *Random polytopes on the torus.* Proc. Amer. Math. Soc. 93, 312 - 316.

BUCHTA, C. , MUELLER, J. y TICHY, R.F.

1985 *Stochastical approximation of convex bodies.* Math. Ann. 271, 225 - 235.

COVER, T.M y EFRON, B.

1967 *Geometrical probability and random points on a hypersphere.*  
Ann. Math. Statist. 38, 213 - 220.

CROFTON, M.W.

1885 *Probability.* Encyclopaedia Britannica 19, 768 - 788.

CZUBER, E.

1903 *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung,  
Statistik und Lebensversicherung I.* Teubner, Berlin.

DELTHEIL, R.

1926 *Probabilités géométriques. Traité du calcul des probabilités et de  
ses applications.* Gauthier - Villars, Paris.

EFRON, B.

1965 *The convex hull of a random set of points.* Biometrika 52, 331 - 343.

GECIAUSKAS, E.P.

1985 *Generalization of the Crofton Formula.* Litovsk. Mat. Sb. 25, 58 - 63.

GROEMER, H.

- 1973 *On some mean values associated with a randomly selected simplex in a convex set.* Pacific J. Math. 45, 525 - 533.
- 1974 *On the mean value of the volume of a random polytope in a convex set.* Arch. Math. 25, 86 - 90.

GRUBER, P.M.

- 1983 *Approximation of convex bodies.* En: Convexity and its applications (Gruber, P.M. y Wills, J.M. , eds.) 131 - 162. Birkhäuser, Basel.

KENDALL, M.G. y MORAN, P.A.P.

- 1963 *Geometrical probability.* Griffin, London.

KINGMAN, J.F.C.

- 1969 *Random secants of a convex body.* J. Appl. Prob. 6, 660 - 672.

KLEE, V.

- 1969 *What is the expected volume of a simplex whose vertices are chosen at random from a given convex body?* Amer. Math. Monthly 76, 286 - 288.

MILES, R.E.

- 1971 *Isotropic random simplices.* Adv. Appl. Prob. 3, 353 - 382.

PETKANTSCHIN, B.

- 1936 *Zusammenhänge zwischen den Dichten der linearen Unterräume im n-dimensionalen Raume.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11, 249 - 310.

RAYNAUD, H.

- 1970 *Sur l'enveloppe convexe des nuages des points aléatoires dans  $R^n$ .* J. Appl. Prob. 7, 35 - 48.

REED, W.J.

- 1974 *Random points in a simplex.* Pacific J. Math. 54, 183 - 198.

RENYI, A. y SULANKE, R.

1963 *Ueber die konvexe Hülle von  $n$  zufällig gewählten Punkten.*  
Z. Wahrsch. verw. Geb. 2, 75-84.

1964 *Ueber die konvexe Hülle von  $n$  zufällig gewählten Punkten II.*  
Z. Wahrsch. verw. Geb. 3, 138-147.

RUBEN, H. y REED, W.J.

1973 *A more general form of a theorem of Crofton.* J. Appl. Prob. 10, 479-482.

SANTALO, L.A.

1976 *Integral geometry and geometrical probability.* Addison-Wesley,  
Reading, Massachusetts.

SCHNEIDER, R. y WIEACKER, J.A.

1980 *Random polytopes in a convex body.* Z. Wahrsch. verw. Geb. 52, 69-73.

WIEACKER, J.A.

1978 *Einige Probleme der polyedrischen Approximation.* Diplomarbeit,  
Freiburg im Breisgau.

WOOLHOUSE, W.

1867 *Educational Times.*