Geometría integral de grupos triangulares y algunos casos del grupo proyectivo

Guerrero G., Ana Berenice

1987

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

"GEOMETRIA INTEGRAL DE GRUPOS TRIANGULARES Y ALGUNOS CASOS DEL GRUPO PROYECTIVO"

por

Ana Berenice Guerrero G.

Director de Tesis: Dr. Luis A. Santaló

Tesis presentada para optar al título de

Doctor en Ciencias Matemáticas

Diciembre de 1987

A G R A D E C I M I E N T O

"... nada hay que depende enteramente de nosotros, salvo nuestros pensamientos".

Descartes
"Discurso del Método"

Gracias al asesoramiento en los estudios y a la permanente y valiosa guía que me brindó el doctor Luis A. Santaló, fue posible desarrollar lo aquí expuesto. Expreso mi profundo reconocimiento dedicando a su nombre este trabajo.

Berenice Guerrero.

R E C O N O C I M I E N T O

Es preciso agradecer al ingeniero Orlando Villamayor, quien con su solicitud y constante ayuda en todo lo relacionado con el convenio suscripto entre la Universidad Nacional de Colombia y el CONICET, hizo más fácil mi estadía en la ciudad de Buenos Aires.

También debo un especial reconocimiento a la Universidad Nacional de Colombia y al CONICET por haberme dado la posibilidad de dedicarme por completo a mi formación, sin apremios económicos.

P R O L O G O

El estudio de la Geometría Integral de grupos de Lie se ocupa de encontrar conjuntos de elementos geométricos, en el espacio de definición del grupo, que admiten una medida invariante respecto de este. La base de este estudio reposa principalmente en la teoría del método de referencia móvil desarrollado por Elie Cartan (Ver [1] y [2]). Utilizando este método Luis A. Santaló realiza el estudio de la Geometría Integral de grupos de Lie de transformaciones, esto es, de grupos de Lie que tienen una representación matricial (ver [19]), para luego abordar el estudio de grupos particulares, como el grupo Proyectivo, grupo Afin, grupo de Movimientos, etc. (ver de [14] a [19]). De manera análoga en este trabajo se estudia la Geometría Integral del grupo triangular especial $ST(n)$, es decir, del grupo de Lie de transformaciones definido por las matrices triangulares $((a_{ij}))$, con $a_{ij} = 0$ para $j < i$, $i,j = 1,\dots,n$, con determinante igual a uno.

Ya desde S Lie se conoce también un método para calcular todos los subgrupos (en número finito), de un grupo dado. M. Stoka en 1967 ([21]) halla los subgrupos del grupo Afin. Más tarde Greco Angela ([7]) determina los subgrupos de 5 parámetros del subgrupo triangular del espacio proyectivo P_3 . Siguiendo esos trabajos, aquí se hallan los subgrupos de 4, 3 y 2 parámetros del grupo triangular $ST(3)$ en el plano proyectivo.

El grupo proyectivo en el espacio proyectivo P_3 ha sido bastante estudiado por L.A. Santaló [16], M. Stoka [22], Luccione [10] y Mariscalco [11]. Ellos han encontrado condiciones de medibilidad de subespacios o directamente han hallado subespacios que admiten una medida invariante respecto de este grupo. Sin embargo, son muchos los subespacios de P_3 que quedan por fuera de esas consideraciones; aquí se estudia la medibilidad de algunos de estos subespacios, sin agotar las posibilidades de encontrar otros.

El trabajo está dividido en cuatro capítulos, los tres primeros dedicados al estudio de la Geometría Integral de grupos triangulares, el cuarto a la búsqueda de subespacios medibles respecto del grupo proyectivo P_3 .

En el Capítulo Uno se desarrolla el caso particular del grupo $ST(3)$ operando en el plano proyectivo P_2 . Este capítulo consta de cuatro partes. La primera dedicada al estudio de la Geometría Integral del grupo to-tal ST(3), la segunda parte al estudio de los subgrupos dependientes de 4 parámetros del grupo ST(3), la tercera a los subgrupos dependientes de 3 parámetros, y la cuarta a los subgrupos de 2 parámetros. En cada una de estas partes primero se hallan los subgrupos mencionados, para proceder luego a estudiar la Geometría Integral de cada uno de ellos. Aquí los conjuntos de elementos geométricos considerados son: conjuntos de puntos, conjuntos de rectas, conjuntos de pares de elementos (punto y recta, pares de puntos y pares de rectas), dando una interpretación geométrica de la densidad, para aquellos conjuntos que admitan una medida invariante. Al finalizar cada una de las partes aparece un cuadro de los resultados obtenidos.

En el Capítulo Dos se toma al grupo triangular ST(3), esta vez como grupo de transformaciones afines en el espacio. Los subespacios estudiados aquí son: conjuntos de puntos, de rectas, de planos, conjuntos de pares de elementos (punto y recta, punto y plano), dando una expresión geométrica de la densidad para aquellos conjuntos que admiten una medida invariante.

El Capítulo Tres aborda el estudio del grupo triangular especial $ST(n+1)$ operando en el espacio proyectivo P_n. En él se establecen condiciones sobre los subespacios lineales y suma de subespacios de P_n para que admitan una medida invariante respecto de $ST(n+1)$.

El Capítulo Cuarto se propone ampliar el estudio de la Geometría Integral del grupo proyectivo en el espacio P_3. En este capítulo se estudia la medibilidad de familias de subespacios sin puntos comunes y con puntos comunes no contempladas en los trabajos mencionados de Santaló, Stoka, Luccioni, etc.

I N D I C E

CAPITULO CUATRO

GENERALIDADES

Dado un grupo de Lie de transformaciones G, el cual opera sobre un espacio E, la Geometría Integral se ocupa del estudio de medidas invariantes respecto de G, de objetos geométricos contenidos en E, los cuales son transformados transitivamente por el grupo (ver [2]). En este trabajo los grupos de Lie considerados son grupos isomorfos a grupos de matrices.

Resumimos a continuación la teoría que necesitamos sobre estos grupos, para la realización del trabajo.

Grupo de Lie de transformaciones. Sea G un grupo de matrices $n \times n$ de dimensión r, esto es, cada matriz depende de r parámetros independientes $a_1 \ldots a_r$ (más precisamente cada matriz A de G está determinada por un punto $a = (a_1 \ldots a_r)$ de una variedad diferenciable, denotada por G). Si G opera sobre un espacio E_n, n-dimensional, y si $x_1 \ldots x_n$ son las coordenadas en E_n, entonces G define un grupo de Lie de transformaciones dado por las ecuaciones:

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
x'_1 &= \phi_1(x_1 \ldots x_n \, , \, a_1 \ldots a_r) \\
x'_2 &= \phi_2(x_1 \ldots x_n \, , \, a_1 \ldots a_r) \\
&\;\;\vdots \\
x'_n &= \phi_n(x_1 \ldots x_n \, , \, a_1 \ldots a_r)
\end{aligned}
$$

donde las funciones ϕ_i son C^∞ en los $n+r$ argumentos (ver [5], pág. 100).

Transformaciones Infinitesimales. Dado el grupo de Lie de transformaciones definido por las ecuaciones

$$x'_i = \phi_i(x_1 \ldots x_n \, , \, a_1 \ldots a_r) \qquad i = 1 \ldots n$$

una transformación infinitesimal del grupo es un campo vectorial, que asocia a una función $f(x_1 \ldots x_n)$ diferenciable, la función

$$(2) \qquad X_k f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial a_k}\right)_I \frac{\partial f(x_1 \ldots x_n)}{\partial x_i}$$

(I la identidad del grupo).

Una transformación infinitesimal es entonces un operador lineal y homogéneo. Toda combinación lineal y homogénea de transformaciones infinitesimales es una transformación infinitesimal del grupo.

Si G es un grupo de transformaciones de r parámetros, las r transformaciones infinitesimales de G son linealmente independientes (ver [1], pág. 82..) y satisfacen las ecuaciones de estructura de Lie:

$$(3) \qquad [X_i,X_j] = X_iX_j - X_jX_i = \sum_{s=1}^{r} C_{ij}^{s} X_s \qquad i,j = 1,2,\ldots,k$$

donde $[X_i,X_j]$ se llama el producto de Lie y C_{ij}^{s} son constantes (constantes de estructura).

Se sabe entonces que el grupo (1) lo podemos definir por las r transformaciones infinitesimales $X_1 \ldots X_r$ dadas por (2), con estructura (3) (ver [1], pág. 250).

Subgrupos de un grupo dado. Considerando el grupo G definido por sus transformaciones infinitesimales $X_1 \ldots X_r$ con estructura (3), un subgrupo de G dependiente de s parámetros $(s < r)$, está engendrado por s transformaciones infinitesimales linealmente independientes, las cuales son combinaciones lineales de las $X_1 \ldots X_r$ y verifican el producto de Lie (3) (ver [1], pág. 250). Es decir, todo subgrupo de G de s parámetros $(s < r)$, está dado por s transformaciones $Y_1 \ldots Y_s$ tal que

$$(4) \qquad Y_j\, f = \sum_{k=1}^{r} \mu_{jk} X_k\, f \qquad j = 1\ldots s$$

con $[Y_i,Y_j] = \sum_{k=1}^{s} C_{ij}^{k} Y_k$ con C_{ij}^{k} constantes.

Grupo transitivo. Un grupo G se llama transitivo respecto a un conjunto de figuras H del espacio E (que en general van a ser subespacios lineales de E, o conjuntos de subespacios lineales), si dos objetos cualesquiera de H pueden superponerse por una transformación de G. Cuando esta transformación es única, el grupo se llama simplemente transitivo respecto del conjunto de figuras H (ver [1], pág. 114).

Formas de Maurer-Cartan para grupos de Matrices. Sea G un grupo de matrices $n \times n$ de dimensión r, esto es, cada matriz $A \in G$ está determinada por r parámetros independientes $a_1 \ldots a_r$. Si dA denota la diferencial de la matriz A, y A^{-1} su inversa, la matriz

(5) $$\Omega = A^{-1}\, dA$$

de 1-formas diferenciables es llamada la matriz de Maurer-Cartan de G. Los elementos ω_i de Ω, tienen la forma

$$\omega_i = \alpha_{i1}\, da_1 + \alpha_{i2}\, da_2 + \ldots + \alpha_{ir}\, da_r$$

donde los coeficientes son funciones de los parámetros $a_1, a_2 \ldots a_r$. De esas n^2 1-formas ω_i, existen r linealmente independientes (base del espacio vectorial dual, del espacio tangente de G) las cuales son llamadas las <u>formas de Maurer-Cartan de G</u> y están definidas salvo una combinación lineal con coeficientes constantes. La propiedad principal de la matriz Ω, es ser invariante a la izquierda respecto de G; como consecuencia, las r formas de Maurer-Cartan también son invariantes a la izquierda respecto de G (ver [19], pág. 153). En forma similar las 1-formas definidas por la matriz

(6) $$\Omega^* = dA\, A^{-1}$$

son <u>1-formas invariantes a la derecha</u> respecto de G, y si G depende de r parámetros, existen r de ellas linealmente independientes (base del espacio vectorial de 1-formas invariantes a la derecha).
Diferenciando exteriormente $\Omega = A^{-1}\, dA$ obtenemos 2-formas invariantes a la izquierda $d\omega_i$, dadas por los elementos de la ecuación matricial

(7) $$d\Omega = -\Omega \wedge \Omega$$

las cuales tienen la forma:

(8) $$d\omega_i = \sum_{k.j=1}^{r} C^i_{kj}\, \omega_k \wedge \omega_j \qquad i = 1 \ldots r$$

con C^i_{kj} constantes, con $C^i_{kj} = -C^i_{jk}$.
Estas 2-formas $d\omega_i$ son las diferenciales de las formas de Maurer-Cartan. Sus expresiones dadas por (8) son llamadas las <u>ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan</u> para el grupo G, y las constantes C^i_{kj} las <u>constantes de estructura del grupo</u>. De la misma manera las 2-formas invariantes a la derecha $d\omega^*_i$, obtenidas al diferenciar $\Omega^* = dA\, A^{-1}$ tienen la forma

$$d\omega^*_i = + \sum C^{i*}_{kj}\, \omega^*_k \wedge \omega^*_j$$

donde $C^{i*}_{kj} = - C^i_{kj}$ (ver [19], pág. 156).

Elementos de Volumen y Grupos Unimodulares. Sean $\{\omega_i\}$,$(i=1,\ldots,r)$ las r 1-formas de Maurer-Cartan del grupo G . El producto exterior

(9) $$d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_r$$

es una r-forma invariante a la izquierda respecto de G y es única salvo un factor constante. La r-forma $d_L V$ es llamada elemento de volumen de G o densidad cinemática de G . De la misma forma si $\{\omega_i^*\}$, $(i=1,\ldots,r)$ son las r 1-formas invariantes a la derecha por G , el producto exterior

(10) $$d_R V = \omega_1^* \wedge \omega_2^* \wedge \ldots \wedge \omega_r^*$$

es una r-forma invariante a la derecha, y es única salvo un factor constante. La llamamos el elemento de volumen invariante a la derecha. Integrando el elemento de volumen invariante a la izquierda (o invariante a la derecha) sobre todo el espacio (en el cual opera G), se obtiene una medida invariante a la izquierda (respectivamente invariante a la derecha). Esta medida coincide con la medida de Haar invariante a la izquierda definida para todo grupo topológico localmente compacto (respectivamente a derecha) (ver [13]).

Un grupo de Lie es llamado <u>unimodular</u> si su elemento de volumen invariante a la izquierda es también invariante a la derecha. En este caso $d_L V$ y $d_R V$ coinciden excepto por un factor constante.

Se sabe que un grupo de Lie es unimodular, si sólo sí, sus constantes de estructura verifican la ecuación (ver [19], pág. 158)

(11) $$\sum_{k=1}^{r} C_{jk}^{k} = 0 \qquad j = 1\ldots r$$

Densidad y medida en grupos de Matrices. Sea E_n el espacio de puntos en el cual opera un grupo de Lie G de matrices de dimensión r, engendrado por las transformaciones infinitesimales $X_1\ldots X_r$. Sea H un conjunto de elementos geométricos en E_n (que en general es un subespacio lineal de E , o conjuntos de subespacios) el cual es transformado transitivamente por G . Deseamos definir una medida para conjuntos H , invariante respecto a G .

Las transformaciones de G que dejan invariante un conjunto de elementos H forman un subgrupo S de G de dimensión, digamos $r-h$. Suponemos que S es a la vez isomorfo a un grupo de matrices. Entonces si S es engendrado por $r-h$ transformaciones infinitesimales

$$X_{h+1} \dots X_r$$

(que verifican las ecuaciones de estructura de Lie (3)), S está representado en el espacio de parámetros de G por una variedad integral del sistema (ver [16], pág. 251):

$$(12) \qquad \omega_1 = 0 \quad \omega_2 = 0 \qquad \omega_h = 0 \, .$$

La integral de la forma diferencial $\Omega_h = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h$ sobre H, es una medida invariante para H, si sólo sí, la diferencial

$$d\Omega = d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h) = 0$$

(ver [1], pág. 86).

En este caso llamamos $dH = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h$ la densidad invariante para los elementos H, la cual es única salvo un factor constante.

Si $h = r$, el subgrupo S se reduce a la identidad y $\Omega_r = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r = dH$ es la densidad cinemática del grupo, o elemento de volumen.

Si el grupo G es simplemente transitivo respecto de los elementos H, siempre existe una medida invariante, es la dada por la integral del producto exterior $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r$, es decir es la medida cinemática de G en E_n.

Si $h > r$ el grupo G no puede ser transitivo respecto a H y la medida invariante para H no está definida.

Grupo triangular especial

El grupo triangular especial $ST(n)$ con $n \geq 2$, es el grupo de todas las matrices $n \times n$ de determinante la unidad, tal que $ST(n) = ((a_{ij}))$ con $a_{ij} = 0$ para $1 \leq j < i \leq n$.

Los elementos a_{ij}, con $a_{ij} \neq 0$ son los parámetros del grupo, luego $ST(n)$ depende de $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ parámetros independientes. Es un grupo no unimodular (ver [13], pág. 64) y tiene un subgrupo invariante cerrado unimodular, el grupo $ST_1(n)$ de matrices $n \times n$ $((a_{ij}))$, con $a_{ij} = 0$ para $1 \leq j < i \leq n$ y $a_{ii} = 1$.

Grupo Proyectivo

Sea P_n el espacio proyectivo n-dimensional; todo punto x de P_n está representado por $n+1$ coordenadas homogéneas $x_0 \ldots x_n$ (punto analítico). El grupo proyectivo G_r $(r=n(n+2))$ es el grupo definido por las transformaciones:

$$x'_k = \sum_{i=0}^{n} a_i^k x_i \qquad (k=0\ldots n)$$

con la condición $|a_i^k| = 1$ (ver [14]).

Grupos Isomorfos

Si G es un grupo de Lie de transformaciones, dos transformaciones de G se dicen <u>homólogas</u> cuando una es la transformada de la otra por una transformación de G.

Dos subgrupos de un grupo de Lie G se dicen homólogos, cuando uno de ellos es el transformado del otro por una transformación de G.

Dos grupos de Lie homólogos son isomorfos, es decir, son geométricamente iguales (estudiar uno es estudiar el otro). (Ver [1] pág. 103).

NOTACION

Ω	matriz de 1-formas invariantes a izquierda
Ω^*	matriz de 1-formas invariantes a derecha
ω_i	1-formas invariantes a izquierda
ω_i^*	1-formas invariantes a derecha
$d_L V$	elemento de volumen invariante a izquierda
$d_R V$	elemento de volumen invariante a derecha
C_{ij}^k	constantes de estructura
$X_k f$	o simplemente X_k, transformaciones infinitesimales
P	puntos
dP	densidad para puntos
G	rectas
dG	densidad para rectas
$(P+G)$	pares de punto y recta
$d(P+G)$	densidad para pares de punto y recta
$G_1+G_2+\ldots+G_k$	suma de rectas
$d(G_1+G_2)$	densidad para pares de rectas
$G_1 /\!/ G_2$	rectas paralelas
$P_1+P_2+\ldots+P_k$	suma de puntos
$d(P_1+P_2)$	densidad para pares de puntos
(p_i,θ_i)	coordenadas normales de la recta G_i
$dp_i \wedge d\theta_i = dG_i$	
(x_i,y_i)	coordenadas cartesianas del punto P_i
$dP_i = dx_i \wedge dy_i$	
$dP_1 \wedge dP_2 = (dx_1 \wedge dy_1)\wedge(dx_2 \wedge dy_2)$	
$dG_1 \wedge dG_2 = (dp_1 \wedge d\theta_1)\wedge(dp_2 \wedge d\theta_2)$	
H_i^k	grupo (número) i , de k parámetros
δ	distancia de la recta G_i a la recta G_j
E_i	plano i
$E_1+E_2+\ldots+E_k$	suma de planos

CAPITULO UNO

EL GRUPO TRIANGULAR ESPECIAL ST(3) *COMO GRUPO DE TRANSFORMACIONES EN EL PLANO.*

"Para un ser completamente inmóvil no habría ni espacio ni geometría".

Henri Poincaré
"El valor de la Ciencia".

PRIMERA PARTE: El grupo triangular ST(3)

1. *Estructura del grupo* ST(3)

El grupo triangular especial ST(3) es el grupo formado por las matrices

$$(13)\qquad H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & h \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

con determinante H = a e r = 1 , donde a, b, c, e, h, r son los parámetros del grupo . Debido a la condición a e r = 1 se trata de un grupo de 5 parámetros.

El grupo ST(3) puede considerarse que opera en el espacio E_3 mediante las transformaciones centro-afines

$$(14)\qquad \begin{aligned} x' &= ax + by + cz \\ y' &= ey + hz \\ z' &= rz \end{aligned}$$

como estudiaremos en el capítulo dos. También puede considerarse como operando en el plano proyectivo, en cuyo caso x, y, z (y las x', y', z') de (14) son coordenadas homogéneas.

En este capítulo vamos a considerar esta realización de ST(3) como grupo de transformaciones del plano proyectivo en sí mismo.

En coordenadas no-homogéneas ($\xi = x/z$, $\eta = y/z$) las transformaciones (14) se escriben:

$$(15)\qquad \begin{aligned} \xi' &= \frac{a}{r}\xi + \frac{b}{r}\eta + \frac{c}{r} \\ \eta' &= \frac{e}{r}\eta + \frac{h}{r} \end{aligned}$$

Como no puede dar lugar a confusión pues siempre vamos a utilizar coordenadas no homogéneas podemos volver a utilizar x, y en vez de ξ, η . Así las ecuaciones (15) pueden escribirse

$$x' = \frac{a}{r} x + \frac{b}{r} y + \frac{c}{r}$$
$$y' = \frac{e}{r} y + \frac{h}{r}$$

con $a\,e\,r = 1$.

O bien (a causa de que $a\,e\,r = 1$)

$$\begin{aligned} x' &= a^2 e x + a b e y + a c e \\ y' &= a e^2 y + a e h \end{aligned} \qquad (16)$$

donde aparecen únicamente los 5 parámetros independientes.

Transformaciones Infinitesimales. Dado el grupo de transformaciones (16) y considerando las funciones $\phi_i(x, y, a, b, c, e, h)$ definidas por

$$x' = \phi_1(x, y, a, b, c, e, h) = a^2 e x + b e a y + a c e$$
$$y' = \phi_2(x, y, a, b, c, e, h) = a e^2 y + a e h$$

con $(a = e = 1,\ b = c = h = 0) = I$ la identidad del grupo ($\phi_1(x, y, I) = x$, $\phi_2(x, y, I) = y$), las transformaciones infinitesimales de este grupo están dadas por los 5 campos vectoriales siguientes (ver (2)):

$$\begin{aligned} X_1 f &= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial a}\right)_I p + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial a}\right)_I q = 2 x p + y q \\ X_2 f &= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial b}\right)_I p + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial b}\right)_I q = y p \\ X_3 f &= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial c}\right)_I p + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial c}\right)_I q = p \\ X_4 f &= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial e}\right)_I p + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial e}\right)_I q = x p + 2 y q \\ X_5 f &= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial h}\right)_I p + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial h}\right)_I q = q \end{aligned} \qquad (17)$$

poniendo como es costumbre, $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Los 5 campos vectoriales $X_1 f, X_2 f, X_3 f, X_4 f, X_5 f$ son linealmente independientes y satisfacen el producto de Lie $[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$. Luego:

$$(18)\quad \begin{aligned} &[X_1,X_2] = -X_2 \;, && [X_1,X_3] = -2X_3 \;, && [X_1,X_4] = 0 \\ &[X_1,X_5] = -X_5 \;, && [X_2,X_3] = 0 \;, && [X_2,X_4] = -X_2 \\ &[X_2,X_5] = -X_3 \;, && [X_3,X_4] = X_3 \;, && [X_3,X_5] = 0 \\ &[X_4,X_5] = -2X_5 \end{aligned}$$

Con todo esto, podemos decir que el grupo de las transformaciones (15) o (16) está definido por las transformaciones infinitesimales (17)

$$\{p,\ q,\ yp\,,\ 2xp + yq\,,\ xp + 2yq\}$$

con estructura (18).

Estas transformaciones infinitesimales (17) con (18) van a ser útiles para calcular los subgrupos del grupo (15) o (16) siguiendo los trabajos de M. Stoka ([21]).

Ahora necesitamos algunas características del grupo ST(3) , o sea, matrices de la forma (13) operando sobre el plano proyectivo P_2 .

2. *Geometría Integral de* ST(3).

El grupo triangular ST(3) dependiente de 5 parámetros

$$H_5 = \{p,\ q,\ yp,\ 2xp+yq\,,\ xp + 2yq\}$$

es el grupo de las transformaciones en el plano proyectivo, definido por las ecuaciones

$$(19)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{ax+by+c}{r} \\[2mm] y' = \dfrac{ey+h}{r} \end{cases} \qquad \text{con } aer = 1$$

Formas de Maurer-Cartan. Considerando la matriz

$$H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & h \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \qquad \text{con } \det H = 1$$

las 1-formas invariantes a la izquierda o formas de Maurer-Cartan son los elementos linealmente independientes de la matriz (ver [5]):

$$\Omega = H^{-1}dH = \begin{pmatrix} 1/a & -b/ae & bh-ce \\ 0 & 1/e & -h/re \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da & db & dc \\ 0 & de & dh \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & \omega_4 & \omega_5 \\ 0 & 0 & \omega_6 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\omega_1 = \frac{da}{a} \qquad \omega_2 = \frac{db}{a} - \frac{b}{ae}\,de$$

(20) $$\omega_3 = \frac{dc}{a} - \frac{b}{ae}\,dh + (bh - ce)\,dr$$

$$\omega_4 = \frac{de}{e} \qquad \omega_5 = \frac{dh}{e} - \frac{h}{er}\,dr \qquad \omega_6 = \frac{dr}{r}$$

con $\omega_1 + \omega_4 + \omega_6 = 0$ (por ser $\det H = 1$).

De estas ecuaciones podemos escribir

(21) $$\begin{aligned} da &= a\omega_1 \\ db &= a\omega_2 + b\omega_4 \\ dc &= a\omega_3 + b\omega_5 + c\omega_6 \\ de &= e\omega_4 \\ dh &= e\omega_5 + h\omega_6 \\ dr &= r\omega_6 \end{aligned}$$

La densidad cinemática del grupo (19), elemento de volumen invariante a la izquierda es el producto exterior de las formas de Maurer-Cartan, esto es

(22) $$d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \wedge \omega_5 = \frac{da \wedge db \wedge dc \wedge de \wedge dh}{a^3\, e^2}$$

Formas invariantes a la derecha. Son las 1-formas determinadas por los elementos linealmente independientes de la matriz

$$\Omega^* = dH.H^{-1} = \begin{pmatrix} da & db & dc \\ 0 & de & dh \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & -b/ae & bh-ce \\ 0 & 1/e & -h/er \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix}$$

Luego, si $\Omega^* = \begin{pmatrix} \omega_1^* & \omega_2^* & \omega_3^* \\ 0 & \omega_4^* & \omega_5^* \\ 0 & 0 & \omega_6^* \end{pmatrix}$ estas formas están dadas por:

$$\omega_1^* = \frac{da}{a} \qquad \omega_2^* = -\frac{b}{ae}\,da + \frac{db}{e}$$

(23) $$\omega_3^* = (bh - ce)\,da - \frac{h}{er}\,db + \frac{dc}{r}$$

$$\omega_4^* = \frac{de}{e} \qquad \omega_5^* = -\frac{h}{er}\,de + \frac{dh}{r}$$

$$\omega_6^* = \frac{dr}{r}$$ Con $\omega_1^* + \omega_4^* + \omega_6^* = 0$ por ser $\det H = 1$.

El elemento de volumen invariante a la derecha será entonces el producto exterior de estas formas. Así

$$(24) \qquad d_R V = \omega_1^* \wedge \omega_2^* \wedge \omega_3^* \wedge \omega_4^* \wedge \omega_5^* = a \; da \wedge db \wedge dc \wedge de \wedge dh$$

Comparando (22) con (24) confirmamos que el grupo (20) no es unimodular, como lo afirma Reiter ([13], pág. 64).

Ecuaciones de estructura. Son las ecuaciones determinadas por la ecuación matricial $d\Omega = -\Omega \wedge \Omega$

Luego si $d\Omega = \begin{pmatrix} d\omega_1 & d\omega_2 & d\omega_3 \\ 0 & d\omega_4 & d\omega_5 \\ 0 & 0 & d\omega_6 \end{pmatrix}$

las ecuaciones de estructura son:

$$(25) \qquad \begin{aligned} d\omega_1 &= 0 \\ d\omega_2 &= -\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_2 \wedge \omega_4 \\ d\omega_3 &= -2\,\omega_1 \wedge \omega_3 - \omega_2 \wedge \omega_5 + \omega_3 \wedge \omega_4 \\ d\omega_4 &= 0 \\ d\omega_5 &= -2\,\omega_4 \wedge \omega_5 + \omega_5 \wedge \omega_1 \end{aligned}$$

Las constantes de estructura son los coeficientes de las ecuaciones, esto es:

$$C_{12}^2 = -1 \qquad C_{24}^2 = -1 \qquad C_{13}^3 = -2 \quad ; \quad C_{25}^3 = -1 \; ;$$
$$C_{34}^3 = 1 \qquad C_{45}^5 = -2 \qquad C_{51}^5 = 1 \; .$$

Se observa que

$$\sum_{k=1}^{5} C_{ik}^k = C_{12}^2 + C_{13}^3 + C_{14}^4 + C_{15}^5 = -4 \; ,$$

lo que confirma que el grupo no es unimodular.

3. *Densidades*

3.1. *Densidad para pares de rectas paralelas.*

Las rectas $x = 0$ y $x = 1$ son transformadas por el grupo H_5 en las rectas $G_1 : x' = \frac{b}{e} y' + \frac{c}{r} - \frac{bh}{er}$ y $G_2 : x' = \frac{b}{e} y' + \frac{c}{r} - \frac{bh}{er} + \frac{a}{r}$ respectivamente. Las condiciones para que el par $G_1 + G_2$ permanezca fijo bajo H_5 :

$$d = (\frac{b}{e}) = 0 \qquad d(\frac{c}{r} - \frac{bh}{er}) = 0 \qquad d(\frac{a}{r}) = 0$$

y (21) definen el sistema:

$$\omega_2 = 0 \quad , \quad \omega_3 = 0 \qquad 2\,\omega_1 + \omega_4 = 0$$

De (25) obtenemos: $d(\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge (2\omega_1 + \omega_4)) = 3\omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \neq 0$.
Luego la densidad invariante para pares de rectas paralelas no existe

3.2. *Densidad para pares de rectas.*

Las rectas $x = 0$ y $x = y$ son transformadas por el grupo H_5 en las rectas $G_1 : x' = \frac{b}{e} y' + \frac{c}{r} - \frac{bh}{er}$ y $G_2 : x' = \frac{a+b}{e} y' + \frac{c}{r} - \frac{(a+b)h}{er}$ respectivamente.

Las condiciones para que el par $G_1 + G_2$ permanezca fijo:

$$d(\tfrac{a}{e}) = 0 \qquad d(\tfrac{b}{e}) = 0' \qquad d(\tfrac{c}{r}) = 0 \qquad d(\tfrac{a}{r}) = 0$$

definen el sistema:

$$\omega_2 = 0 \qquad \omega_3 = 0 \qquad \omega_1 - \omega_4 = 0 \qquad \omega_5 = 0$$

De (25): $d(\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge (\omega_1 - \omega_4) \wedge \omega_5) = -6\,\omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \wedge \omega_5 \neq 0$.

Luego, la densidad invariante para pares de rectas no existe.

3.3. *Densidad para pares de puntos.*

Los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$ son transformados por el grupo H_5 en los puntos $P_1(\frac{c}{r}, \frac{h}{r})$ y $P_2(\frac{b+c}{r}, \frac{e+h}{r})$ respectivamente.

El par de puntos $P_1 + P_2$ define el sistema

$$\omega_2 = 0 \qquad \omega_3 = 0 \qquad \omega_5 = 0 \qquad 2\,\omega_4 + \omega_1 = 0 .$$

Por (25) se tiene $d(\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_5 \wedge (2\,\omega_4 + \omega_1)) = 4\,\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \wedge \omega_5 \neq 0$. Luego la densidad para pares de puntos no existe.

4. *Conclusiones.*

El grupo triangular especial $ST(3)$ como grupo de transformaciones en el plano está generado por las transformaciones infinitesimales (17) con estructura (18). Respecto de este grupo se ha probado el siguiente:

Teorema 1. Los conjuntos de pares de rectas, rectas paralelas y pares de puntos no admiten una medida invariante respecto del grupo H_5 .

Nota. Para la densidad de conjuntos de puntos, de rectas y conjuntos de pares de recta y punto ver capítulo tres.

SEGUNDA PARTE: Subgrupos de 4 parámetros del grupo triangular ST(3).

5. *Determinación de los subgrupos de 4 parámetros del grupo triangular* ST(3).

Dado el grupo triangular ST(3) definido por las transformaciones infinitesimales (17) con estructura (18), un subgrupo de 4 parámetros del grupo ST(3) está definido por las 4 transformaciones infinitesimales:

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 \\ Y_2 &= b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + b_5 X_5 \\ Y_3 &= c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + c_4 X_4 + c_5 X_5 \\ Y_4 &= d_1 X_1 + d_2 X_2 + d_3 X_3 + d_4 X_4 + d_5 X_5 \end{aligned} \tag{26}$$

si sólo sí, cada producto $[Y_i, Y_j]$ es una combinación lineal, con coeficientes constantes, de los Y_k , $k = 1, 2, 3, 4$.

Para determinar los diferentes subgrupos de 4 parámetros del grupo triangular ST(3), consideramos la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Con a_i, b_i, c_i, d_i constantes, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Se presentan los siguientes casos:

1) La matriz tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí: $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_2$, $Y_3 = X_3$, $Y_4 = X_4$.

Puesto que los productos $[Y_i, Y_j]$ son combinaciones lineales con coeficientes constantes de los Y_k , $k = 1,2,3,4$, las transformaciones

$$\{X_1, X_2, X_3, X_4\} = \{2\,xp + yq,\ yp,\ p,\ xp + 2\,yq\}$$

generan un subgrupo de ST(3).

2) La matriz (27) tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquí $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_2$, $Y_3 = X_3$, $Y_4 = d_4\, X_4 + X_5$.

Para que estos Y_i , $i = 1,2,3,4$ formen grupo debe ser $d_4 = 0$.

Se obtiene el grupo:

$$\{X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_5\} = \{2\,x\,p + y\,q\,,\, y\,p\,,\, p\,,\, q\}$$

3) La matriz (27) tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces: $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_2$, $Y_3 = c_3\, X_3 + X_4$, $Y_4 = d_3\, X_3 + X_5$

Estas transformaciones infinitesimales no forman grupo para ningún valor de c_3 y d_3 .

4) La matriz (27) tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 & 1 \\ 0 & 0 & d_3 & d_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces: $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_2$, $Y_3 = c_3\, X_3 + c_4\, X_4 + X_5$

$Y_4 = d_3\, X_3 + d_4\, X_4$.

Estas transformaciones infinitesimales forman grupo si $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, $d_4 = 0$.

Se obtiene el grupo $\{X_1,\, X_2,\, X_5,\, X_3\}$ ya obtenido en 2).

5) La matriz (27) tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $Y_1 = X_1$, $Y_2 = b_2 X_2 + X_3$, $Y_3 = c_2 X_2 + X_4$

$Y_4 = d_2 X_2 + X_5$

Estas transformaciones infinitesimales forman grupo si $b_2 = 0$, $c_2 = 0$, $d_2 = 0$. Se obtiene el grupo

$$\{X_1, X_3, X_4, X_5\} = \{2xp + yq , p , xp + 2yq , q\}$$

6) La matriz tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_4 & 1 \\ 0 & d_2 & 0 & d_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí: $Y_1 = X_1$, $Y_2 = b_2 X_2 + X_3$, $Y_3 = c_2 X_2 + c_4 X_4 + X_5$

$Y_4 = d_2 X_2 + d_4 X_4$.

Estas transformaciones forman grupo si:

$$b_2 = 0 \quad , \quad c_2 = 0 \quad , \quad c_4 = 0 \quad , \quad d_2 d_4 = 0$$

i) Si $d_2 = 0$ se obtiene el grupo $\{X_1, X_3, X_5, X_4\}$

ii) Si $d_4 = 0$ se obtiene el grupo $\{X_1, X_3, X_5, X_2\}$

grupos ya obtenidos.

7) La matriz tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & 1 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 & 0 & 1 \\ 0 & d_2 & d_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí: $Y_1 = X_1$, $Y_2 = b_2 X_2 + b_3 X_3 + X_4$

$Y_3 = c_2 X_2 + c_3 X_3 + X_5$, $Y_4 = d_2 X_2 + d_3 X_3$

Estas transformaciones infinitesimales forman grupo si: $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$, $d_2 = 0$.

Se obtiene el grupo $\{X_1, X_4, X_5, X_3\}$ ya obtenido en 5).

8) La matriz (27) tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquí $Y_1 = a_1 X_1 + X_2$, $Y_2 = b_1 X_1 + X_3$, $Y_3 = c_1 X_1 + X_4$

$Y_4 = d_1 X_1 + X_5$.

Se dan dos casos:

i) $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$, $d_1 = 0$

caso en el cual resulta el grupo

$$\{X_2, X_3, X_4, X_5\} = \{y\,p\,,\ p\ ,\ x\,p + 2\,y\,q\ ,\ q\}$$

ii) $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 \neq 0$, $d_1 = 0$

resulta el grupo

$\{X_2, X_3, k\,X_1 + X_4, X_5\} = \{y\,p\,,\ p\,,\ (2k+1)x\,p + (k+2)y\,q\,,\ q\}$.

9) La matriz (27) es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & c_4 & 1 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego: $Y_1 = a_1 X_1 + X_2$, $Y_2 = b_1 X_1 + X_3$, $Y_3 = c_1 X_1 + c_4 X_4 + X_5$

$Y_5 = d_1 X_1 + d_4 X_4$.

Estas transformaciones infinitesimales forman grupo si: $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$, $c_4 = 0$, $d_1 = k$, $d_4 = n$; k y n constantes

Se obtiene el grupo:

$\{X_2, X_3, X_5, k\,X_1 + n\,X_4\} = \{y\,p\,,\ p\,,\ q\,,(2k+n)x\,p + (k+2n)y\,q\}$

10) La matriz (27) es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_3 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 & 1 \\ d_1 & 0 & d_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí $Y_1 = a_1 X_1 + X_2$, $Y_2 = b_1 X_1 + b_3 X_3 + X_4$,

$$Y_3 = c_1 X_1 + c_3 X_3 + X_5 \quad , \quad Y_4 = d_1 X_1 + d_3 X_3$$

Estas transformaciones infinitesimales forman grupo si: $a_1 = 0$, $b_1 = b_3 = 0$, $c_1 = c_3 = 0$, $d_1 = 0$.

Se obtiene el grupo

$$\{X_2, X_4, X_5, X_3\} \quad \text{ya obtenido.}$$

11) La matriz (27) tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 1 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí: $Y_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + X_3$, $Y_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2 + X_4$

$$Y_3 = c_1 X_1 + c_2 X_2 + X_5 \quad , \quad Y_4 = d_1 X_1 + d_2 X_2$$

Se presentan dos casos:

i) $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 0$, $c_1 = c_2 = 0$, $d_2 = 0$

Resulta el grupo $\{X_3, X_4, X_5, X_1\}$ ya obtenido.

ii) $a_1 = a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $c_1 = c_2 = 0$, $d_1 = 0$.

Resulta el grupo

$$\{X_3, k X_1 + X_4, X_5, X_2\} \quad \text{ya obtenido}$$

Con todo lo anterior podemos enunciar el siguiente teorema demostrado:

Teorema 2. Los subgrupos de 4 parámetros del grupo triangular ST(3) definido por las transformaciones infinitesimales (17) con estructura (18) son los siguientes; salvo isomorfismos:

$$H_1^4 = \{X_2, X_3, X_5, k X_1 + n X_4\} = \{y p , p , q , (2k+n) x p + (k+2n) y q\}$$

$$H_2^4 = \{X_1, X_3, X_4, X_5\} = \{2 x p + y q , p , x p + 2 y q , q\}$$

$$H_3^4 = \{X_2, X_3, X_4, X_5\} = \{y p , p , x p + 2 y q , q\}$$

$$H_4^4 = \{X_1, X_2, X_3, X_4\} = \{2 x p + y q , y p , p , x p + 2 y q\}$$

6. *Geometría Integral de los Subgrupos de cuatro parámetros del grupo* ST(3).

6.1. El grupo

$H_1^4 = \{y\,p\,,\,p\,,\,q\,,(2k+n)\,x\,p+(2n+k)\,y\,q\} = \{X_2,\ X_3,\ X_5,\ k\,X_1 + n\,X_4\}$

es el grupo triangular dado por las transformaciones

$$(28)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{a^k x + by + c}{r} \\[2ex] y' = \dfrac{a^n y + h}{r} \end{cases}$$

con $a^{k+n} = 1/r$, k y n constantes.

Formas invariantes a la izquierda. Están dadas por los elementos de la matriz:

$$\Omega = A^{-1}\,d\,A \qquad \begin{pmatrix} 1/a^k & -b/a^{k+n} & bh-ca^n \\ 0 & 1/a^n & -h/a^n r \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ka^{k-1}da & db & dc \\ 0 & na^{n-1}da & dh \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix}$$

donde:

$$(29)\qquad \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{k}{a}\,da \\ \omega_2 &= \frac{1}{a^k}\ \left(db - \frac{bn}{a}\,da\right) \\ \omega_3 &= \frac{dc}{a^k} - \frac{b}{a^{k+n}}\,dh + (bh - ca^n)dr \\ \omega_4 &= \frac{n}{a}\,da = \frac{n}{k}\,\omega_1 \\ \omega_5 &= \frac{1}{a^n}\,(dh - \frac{h}{r}\,dr) \\ \omega_6 &= \frac{dr}{r} \end{aligned}$$

con la condición $\omega_1 + \omega_4 + \omega_6 = 0$

o $\quad (1 + \frac{n}{k})\,\omega_1 + \omega_6 = 0 \qquad k \neq 0$.

Elemento de volumen invariante a la izquierda:

Es el producto exterior de las formas de Maure-Cartan

$$(30)\qquad d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_5 = \frac{k}{a^{2k+n+1}}\,da \wedge db \wedge dc \wedge dh$$

Formas invariantes a la derecha. Están dadas por los elementos de

$$\Omega^* = dA.A^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_1^* & \omega_2^* & \omega_3^* \\ 0 & \omega_4^* & \omega_5^* \\ 0 & 0 & \omega_6^* \end{pmatrix}$$

donde: $\omega_1^* = \frac{k}{a}\, da$

$$\omega_2^* = \frac{1}{a^n}\left(-\frac{bk}{a}\, da + db\right)$$

(31) $$\omega_3^* = k\, a^{k-1}(bh - ca^n)\, da - \frac{h}{a^n r}\, db + \frac{dc}{r}$$

$$\omega_4^* = \frac{n}{a}\, da = \frac{n}{k}\, \omega_1^*$$

$$\omega_5^* = -\frac{nh}{ra}\, da + \frac{dh}{r}$$

$$\omega_6^* = \frac{dr}{r}$$

con $\omega_1^* + \omega_4^* + \omega_6^* = 0$, o $(1 + \frac{n}{k})\, \omega_1^* + \omega_6^* = 0$ y $k \neq 0$.

Elemento de volumen invariante a la derecha:

Está dado por el producto exterior de las 1-formas ω^*, independientes

(32) $$d_R V = \omega_1^* \wedge \omega_2^* \wedge \omega_3^* \wedge \omega_5^* = \frac{n}{a^{1-2k-n}}\, da \wedge db \wedge dc \wedge dh$$

Comparando (30) y (32) podemos decir: El grupo H_1^4 no es unimodular, salvo el caso $2k = -n$.

Ecuaciones de estructura. Son los elementos de la ecuación matricial

$$d\Omega = -\Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} d\omega_1 & d\omega_2 & d\omega_3 \\ 0 & d\omega_4 & d\omega_5 \\ 0 & 0 & d\omega_6 \end{pmatrix}$$

Luego $d\omega_1 = 0$

(33) $$d\omega_2 = (\frac{n}{k} - 1)\, \omega_1 \wedge \omega_2$$

$$d\omega_3 = -(2 + \frac{n}{k})\, \omega_1 \wedge \omega_3 - \omega_2 \wedge \omega_5$$

$$(33)\qquad \begin{aligned} d\omega_4 &= 0 \\ d\omega_5 &= -\left(1+\frac{2n}{k}\right)\omega_1\wedge\omega_5 \qquad\qquad k\neq 0 \end{aligned}$$

Los coeficientes de estas ecuaciones son las constantes de estructura. Así:

$$C^2_{12} = \frac{n}{k} - 1 \quad ; \quad C^3_{13} = -\left(2+\frac{n}{k}\right) \quad ; \quad C^3_{25} = -1 \quad ; \quad C^5_{15} = -\left(1+\frac{2n}{k}\right) .$$

Podemos verificar con estas constantes que el grupo H^4_1 no es unimodular, salvo cuando $2k = -n$.

En efecto , $\sum_{j=1}^{5} C^j_{ij} = \left(\frac{n}{k}-1\right) - \left(2+\frac{n}{k}\right) - \left(1+\frac{2n}{k}\right) = -\left(4+\frac{2n}{k}\right)$, y esta suma es cero sólo si $2k = -n$.

De las ecuaciones (29) podemos expresar:

$$(34)\qquad \begin{aligned} da &= \frac{a}{k}\,\omega_1 \\ db &= a^k\,\omega_2 + \frac{n}{k}\,b\,\omega_1 \\ dc &= a^k\,\omega_3 + b\,\omega_5 - \frac{k+n}{k}\,c\,\omega_1 \\ dh &= a^n\,\omega_5 - \frac{k+n}{k}\,h\,\omega_1 \\ dr &= -\frac{k+n}{k}\,r\,\omega_1 \end{aligned}$$

Densidad para puntos (P). El punto (0,0) es transformado por el grupo H^4_1 en el punto $P(c/r,\ h/r)$.

Las condiciones $d(c/r) = 0$, $d(h/r) = 0$ para que P permanezca fijo, y (34) definen el sistema: $\omega_5 = 0$, $\omega_3 = 0$ De (33):

$$(35)\qquad d(\omega_5\wedge\omega_3) = -3\left(\frac{k+n}{k}\right)\omega_1\wedge\omega_3\wedge\omega_5$$

luego podemos decir: El grupo H^4_1 tiene densidad invariante para puntos sólo si $k = -n$, con $k\neq 0$, en este caso la densidad está dad por la expresión $dP = dx\wedge dy$.

Densidad para rectas. La recta $x = 0$ es transformada por el grupo H^4_1 en la recta:

$$G : x' = b/a^n\, y' - a^k(bh - ca^n)$$

G permanece fija si $d(b/a^n) = 0$ y $d(a^k(bh - ca^n)) = 0$.

De (34) se obtiene:

$$(36) \qquad d(b/a^n) = a^{k-n}\,\omega_2 \qquad\qquad d(a^k(bh - ca^n)) = a^{2k+n}\,\omega_3$$

Luego G define el sistema: $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$.

De (33) obtenemos $d(\omega_2 \wedge \omega_3) = -3\,\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$. Esto prueba que el grupo H_1^4 no tiene densidad invariante para conjunto de rectas.

Densidad para pares de rectas (G) *y puntos* (P) *con* $P \in G$. El punto $(0,0)$ y la recta $x = 0$ son transformados por el grupo H_1^4 en el punto $P(c/r,\ h/r)$ y la recta $G : x' = b/a^n\, y' - a^k(bh - ca^n)$ respectivamente.

De (34) y (36) el par $P + G$ permanece fijo si

$$\omega_2 = 0 \qquad \omega_3 = 0 \qquad \omega_5 = 0 .$$

Aplicando (33) se tiene que la diferencial

$$(37) \qquad d(\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_5) = \frac{2(2k+n)}{k}\,\omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 \wedge \omega_5$$

esto nos asegura que el grupo H_1^4 tiene densidad para pares $P + G$, con $P \in G$, sólo si $2k = -n$, con $k \neq 0$, en este caso la densidad está dada por $d(P+G) = \dfrac{dP \wedge d\theta}{\cos^2\theta}$

Densidad para rectas paralelas. Las rectas $x = 0$ y $x = 1$ son transformadas en las rectas paralelas $G_1 : x' = b/a^n\, y - a^k(bh - ca^n)$ y $G_2 : x' = b/a^n\, y' - a^k(bh - ca^n - a^{n+k})$ respectivamente. El par de rectas $G_1 + G_2$ permanece fijo si:

$$d(b/a^n) = 0 \qquad d(a^k(bh - ca^n)) = 0 \quad , \quad d(a^{2k+n}) = 0 .$$

Por (34) y (36) estas ecuaciones definen el sistema

$$\omega_1 = 0 \quad , \quad \omega_2 = 0 \qquad \omega_3 = 0$$

Aplicando (33), $d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) = 0$. Esto prueba que la densidad invariante para pares de rectas paralelas existe. Está dada por $d(G_1 + G_2) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$.

Tomando coordenadas normales, (p_1,θ) para G_1 (p_2,θ) para G_2 y comparando con sus ecuaciones cartesianas obtenemos:

$$\frac{b}{a^n} = -\tan\theta \quad , \quad a^k(bh - ca^n) = -\frac{p_1}{\cos\theta} \quad , \quad a^{n+2k} = \frac{p_2 - p_1}{\cos\theta}$$

Diferenciando término a término y multiplicando exteriormente, se llega a la expresión:

$$a^{5k+n}\,\frac{(2k+n)}{k}\,\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = \frac{d\theta \wedge dp_1 \wedge dp_2}{\cos^4\theta}$$

Llamando $\delta = |p_2 - p_1|$ la distancia de G_1 a G_2 y reemplazando $a = (\delta/\cos\theta)^{1/n+2k}$ se obtiene:

$$(38) \qquad d(G_1 + G_2) = \frac{k}{2k+n}\,\frac{dG_1 \wedge dp_2}{\delta^{\frac{5k+n}{2k+n}}\cos^{\frac{3(k+n)}{2k+n}}\theta}$$

De (38) podemos observar que el grupo H_1^4 no tiene densidad invariante para pares de rectas paralelas, en el caso $2k = -$

Densidad para pares de rectas. Los pares de rectas $G_1 + G_2$ son transformados transitativamente por el grupo H_1^4 . Puesto que $G_1 + G_2$ depende de 4 parámetros su densidad es la densidad cinemática del grupo $d(G_1 + G_2) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_5$.

Para obtener una expresión geométrica de esta densidad, observemos que las rectas $x = 0$ y $x = y$ son transformadas por H_1^4 en las rectas:

$$G_1 : x' = b/a^n\, y' - a^k(bh - ca^n) \quad y \quad G_2 : x' = \left(\frac{a^k+b}{a^n}\right) y' - a^k(bh - ca^n + a^k h)$$

respectivamente.

Comparando estas ecuaciones con las ecuaciones en coordenadas normales, (p_1,θ_1) para G_1 y (p_2,θ_2) para G_2 se obtiene las igualdades:

$$(39) \qquad \begin{array}{ll} b/a^n = -\tan\theta_1 & a^k(bh - ca^n) = -\dfrac{p_1}{\cos\theta_1} \\[2ex] \dfrac{a^k + b}{a^n} = -\tan\theta_2 & a^k(bh - ca^n + a^k h) = -\dfrac{p_2}{\cos\theta_2} \end{array}$$

Diferenciando término a término y multiplicando exteriormente se obtiene:

$$\left(\frac{k-n}{k}\right) a^{6k}\,\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_5 = \frac{d\theta_1 \wedge dp_1 \wedge d\theta_2 \wedge dp_2}{\cos\theta_1 \cos\theta_2}$$

Por tanto

$$d(G_1 + G_2) = \frac{k}{k-n} \frac{dG_1 \wedge dG_2}{a^{6k} \cos^3 \theta_1 \cos^3 \theta_2}$$

De (39) $\quad a^{k-n} = \dfrac{\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_1 \cos \theta_2}$

Luego

$$(40) \quad d(G_1 + G_2) = \frac{k}{k-n} \frac{dG_1 \wedge dG_2}{[\operatorname{sen}^{6k}(\theta_1 - \theta_2) \cos^{-3(k+n)}\theta_1 \cos^{-3(k+n)}\theta_2]^{1/k-n}}$$

Que también podemos escribir

$$d(G_1 + G_2) = \frac{k}{k-n} \frac{dG_1 \wedge dG_2}{[\operatorname{sen}^{6k}(\theta_1 - \theta_2) \sec^{3(k+n)}\theta_1 \sec^{3(k+n)}\theta_2]^{1/k-n}}$$

De (40) observamos que el grupo H_1^4 no tiene densidad invariante para pares de rectas en el caso $k = n$.

Densidad para pares de puntos. Los pares de puntos son transformados transitativamente por el grupo H_1^4 . Como en el caso anterior, su densidad coincide con la densidad cinemática del grupo

$$d(P_1 + P_2) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_5$$

Para dar una interpretación geométrica de esta densidad, observamos que los puntos (0,0) y (0,1) son transformados en los puntos $P_1(c/r,\ h/r)$ y $P_2(\frac{b+c}{r}, \frac{a^n+h}{r})$ respectivamente.

Tomando coordenadas cartesianas (x_1,y_1) para P_1 y (x_2,y_2) para P_2 se obtienen las igualdades:

$$dx_1 = d(c/r) \qquad dx_2 = d(\frac{b+c}{r})$$

$$dy_1 = d(h/r) \qquad dy_2 = d(\frac{a^n+h}{r})$$

Reemplazando en las diferenciales de la derecha por (34) y multiplicando exteriormente término a término obtenemos:

$$dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 = \frac{2n+k}{k} a^{6(n+k)} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_5 \ .$$

Luego $\ dP_1 \wedge dP_2 = \dfrac{2n+k}{k} a^{6(n+k)} d(P_1 + P_2)$.

Reemplazando $a = (y_2 - y_1)^{1/2n+k}$ se llega a:

$$(41) \qquad d(P_1+P_2) = \frac{k}{2n+k} \frac{dP_1 \wedge dP_2}{(y_2-y_1)^{\frac{6(n+k)}{2n+k}}}$$

Por (41) observamos que el grupo H_1^4 no tiene densidad invariante para pares de puntos en el caso $2n=-k$.

6.2. $H_2^4 = \{p\ ,q\ ,xp+2yq\ ,2xp+yq\} = \{X_1,\ X_3,\ X_4,\ X_5\}$.

Es el grupo dado por las transformaciones:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{ax+c}{r} \\ y' = \dfrac{ey+h}{r} \end{cases}$$

Con $a\,e\,r = 1$.

Formas invariantes a la izquierda. Son los elementos de la matriz:

$$\Omega = A^{-1}\, dA = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & -ce \\ 0 & 1/e & -h/er \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da & 0 & dc \\ 0 & de & dh \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix}$$

Luego: $\omega_1 = \dfrac{da}{a}$ $\qquad$ $\omega_2 = \dfrac{dc}{a} - c\,e\,dr$

(42) $\omega_3 = \dfrac{de}{e}$ $\qquad$ $\omega_4 = \dfrac{dh}{e} - \dfrac{h}{er}\,dr$

$\omega_5 = \dfrac{dr}{r}$ $\qquad$ con $\omega_1 + \omega_3 + \omega_5 = 0$.

Elemento de volumen invariante a la izquierda, o densidad cinemática

$$(43) \qquad d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 = \frac{da \wedge dc \wedge de \wedge dh}{a^2\, e^2}$$

Formas invariantes a la derecha. Están dadas por los elementos de la matriz:

$$\Omega^* = dA\,.\,A^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_1^* & 0 & \omega_2^* \\ 0 & \omega_3^* & \omega_4^* \\ 0 & 0 & \omega_5^* \end{pmatrix}$$

Así:

$$\omega_1^* = \frac{da}{a} \qquad \omega_2^* = -\,c\,e\,da + \frac{dc}{r}$$

$$\omega_3^* = \frac{de}{e} \qquad \omega_4^* = -\frac{h}{er}\,de + \frac{dh}{r}$$

$$\omega_5^* = \frac{dr}{r} \qquad \text{con} \quad \omega_1^* + \omega_3^* + \omega_5^* = 0 \ .$$

Elemento de volumen invariante a la derecha:

$$d_R V = \omega_1^* \wedge \omega_2^* \wedge \omega_3^* \wedge \omega_4^* = \frac{da \wedge dc \wedge de \wedge dh}{1/ae} \tag{44}$$

De (43) y (44) el grupo no es unimodular.

Ecuación de estructura.

$$d\Omega = -\Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} d\omega_1 & 0 & d\omega_2 \\ 0 & d\omega_3 & d\omega_4 \\ 0 & 0 & d\omega_5 \end{pmatrix}$$

donde: $d\omega_1 = 0 \qquad d\omega_2 = -\,\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_2 \wedge \omega_5$

$d\omega_3 = 0 \qquad d\omega_4 = -\,\omega_3 \wedge \omega_4 - \omega_4 \wedge \omega_5$

Puesto que $\omega_5 = -(\omega_1 + \omega_3)$ se puede escribir:

$$\begin{aligned} d\omega_2 &= -2\,\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_2 \wedge \omega_3 \\ d\omega_4 &= -2\,\omega_3 \wedge \omega_4 - \omega_1 \wedge \omega_4 \end{aligned} \tag{45}$$

Constantes de estructura

$$C_{12}^2 = -\,2 \qquad C_{23}^2 = 1 \qquad C_{34}^4 = -\,2 \qquad C_{14}^4 = -\,1 \ .$$

De las igualdades (42) podemos establecer lo siguiente:

$$\begin{aligned} da &= a\omega_1 \\ de &= e\omega_3 \\ dr &= -\,r(\omega_1 + \omega_3) \\ dc &= a\omega_2 - c(\omega_1 + \omega_3) \\ dh &= e\omega_4 - h(\omega_1 + \omega_3) \end{aligned} \tag{46}$$

Densidad para puntos. El punto (0,0) es transformado por el grupo H_2^4 en el punto $P(c/r, h/r)$. Las condiciones para que P permanezca fijo bajo el grupo H_2^4

$$d(c/r) = 0 \qquad d(h/r) = 0 \quad y \quad (46)$$

definen el sistema:

$$\omega_2 = 0 \qquad \omega_4 = 0$$

Aplicando (45) a $d(\omega_2 \wedge \omega_4)$ obtenemos:

$$d(\omega_2 \wedge \omega_4) = d\omega_2 \wedge \omega_4 - \omega_2 \wedge d\omega_4 =$$

$$= 3\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 - 3\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_4 \neq 0 \ .$$

Luego la densidad invariante para conjuntos de puntos no existe.

Densidad para rectas. La recta $x = y$ es transformada por el grupo H_2^4 en la recta $G : x' = \frac{a}{e} y' + \frac{ce - ah}{er}$ Las condiciones para que G permanezca fija:

$$d\left(\frac{a}{e}\right) = \frac{a}{e} (\omega_1 - \omega_3) = 0 \qquad d\left(\frac{ce - ah}{er}\right) = \frac{\omega_2 - \omega_4}{er^2} = 0$$

definen el sistema: $\omega_1 - \omega_3 = 0$, $\omega_2 - \omega_4 = 0$.

Por (45) obtenemos:

$$d[(\omega_1 - \omega_3)\wedge(\omega_2 - \omega_4)] = d(\omega_1 - \omega_3)\wedge(\omega_2 - \omega_4) - (\omega_1 - \omega_3)$$

$$\wedge\, d(\omega_2 - \omega_4) = 3\omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 - 3\omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \neq 0 \ .$$

Luego, la densidad invariante para rectas no existe.

Densidad para pares de punto y recta con $P \in G$. El punto $(0,0)$ y la recta $y = x$ son transformados en el punto $P(c/r, h/r)$, y la recta $G : x' = \frac{a}{e} y' + \frac{ce - ah}{er}$ respectivamente.

Las condiciones para que el par $P + G$ permanezca fijo:

$$d(c/r) = 0 \qquad d(h/r) = 0 \qquad d(a/e) = 0$$

es un sistema de ecuaciones equivalente al sistema:

$$\omega_2 = 0 \qquad \omega_4 = 0 \qquad \omega_1 - \omega_3 = 0$$

De (45) obtenemos:

$$d(\omega_2 \wedge \omega_4 \wedge (\omega_1 - \omega_3)) = d\omega_2 \wedge \omega_4 \wedge (\omega_1 - \omega_3) - \omega_2 \wedge d\omega_4 \wedge (\omega_1 - \omega_3)$$

$$+ \omega_2 \wedge \omega_4 \wedge d(\omega_1 - \omega_3) = 6\, \omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \neq 0$$

y por tanto la densidad invariante para pares $P + G$, con $P \in G$, no existe.

Densidad para pares de rectas paralelas. Las rectas $x = y$ y $x = y+1$ son transformadas por el grupo H_2^4 en las rectas $G_1 : x' = \frac{a}{e} y' + \frac{ce-ah}{er}$ y $G_2 : x' = \frac{a}{e} y' + \frac{ae+ce-ah}{er}$ respectivamente. Las condiciones para que el par de rectas $G_1 + G_2$ permanezca fijo:

$$(47) \qquad d\left(\frac{a}{e}\right) = 0 \ , \quad d\left(\frac{ce-ah}{er}\right) = 0 \ , \quad d\left(\frac{a}{r}\right) = 0$$

y (46) definen el sistema

$$\omega_1 = 0 \qquad \omega_3 = 0 \qquad (\omega_2 - \omega_4) = 0$$

De (45) resulta:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_3 \wedge (\omega_2 - \omega_4)) = d\omega_1 \wedge \omega_3 \wedge (\omega_2 - \omega_4) - \omega_1 \wedge d\omega_3 \wedge (\omega_2 - \omega_4) + \omega_1 \wedge \omega_3 \wedge d(\omega_2 - \omega_4) = 0 \ .$$

Luego, la densidad invariante para pares de rectas paralelas existe y está dada por:

$$d(G_1 + G_2) = \omega_1 \wedge \omega_3 \wedge (\omega_2 - \omega_4) \ .$$

Tomando coordenadas normales para las rectas: (p_1, θ) para G_1 y (p_2, θ) para G_2 se obtiene:

$$(48) \qquad \frac{a}{e} = -\tan\theta \qquad \frac{ce-ah}{er} = \frac{p_1}{\cos\theta}$$

$$\frac{a}{r} = \frac{p_2 - p_1}{\cos\theta}$$

Llamamos $\delta = |p_2 - p_1|$ la distancia de G_1 a G_2.

Diferenciando y multiplicando exteriormente término a término las igualdades anteriores resulta:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{3}{e^2 r} \omega_1 \wedge \omega_3 \wedge (\omega_2 - \omega_4) = \frac{d\theta \wedge dp_1 \wedge dp_2}{\cos^4\theta}$$

Reemplazando $\frac{a}{r} = \frac{\delta}{\cos\theta}$ y $\frac{1}{e^2 r} = \frac{a}{e} = -\tan\theta$, resulta

$$(49) \qquad d(G_1 + G_2) = \frac{dG_1 \wedge dp_2}{3\,\delta^2 \cos\theta . \operatorname{sen}\theta}$$

Densidad para pares de rectas. El grupo H_2^4 no es transitivo para pares de rectas, luego su densidad invariante no está definida.

Densidad para pares de puntos. Los puntos (0,0) y (1,1) son transformados por el grupo H_2^4 en los puntos $P_1(c/r,\ h/r)$ y $P_2(\frac{a+c}{r}, \frac{e+h}{r})$ respectivamente. Tomando coordenadas $(x_1, y_1) = (c/r,\ h/r)$ y $(x_2, y_2) = (\frac{a+c}{r}, \frac{e+h}{r})$ resulta

$$dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(\frac{e}{r}\right)^2 \quad \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4$$

Luego

$$d(P_1 + P_2) = \frac{dP_1 \wedge dP_2}{(x_2 - x_1)^2\ (y_2 - y_1)^2} \tag{50}$$

6.3. $H_3^4 = \{p\ , q\ , yp\ , xp + 2yq\} = \{X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5\}$.

Es el grupo triangular dado por las transformaciones

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x + by + c}{r} \\ y' = \dfrac{ey + h}{r} \end{cases} \tag{51}$$

Con $e\,r = 1$.

Formas invariantes a la izquierda.

$$\Omega = A^{-1}\ dA = \begin{pmatrix} 1 & -b/e & bh-ec \\ 0 & 1/e & -h \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & db & dc \\ 0 & de & dh \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\omega_1 = db - \frac{b}{e}\, de \qquad && \omega_2 = dc - \frac{b}{e}\, dh + (bh - ec)\ dr \\ &\omega_3 = \frac{de}{e} \qquad \omega_4 = \frac{dh}{e} - h\ dr \qquad && \omega_5 = \frac{dr}{r} \end{aligned} \tag{52}$$

Puesto que $er = 1$ se tiene $\omega_3 + \omega_5 = 0$.

Elemento de volumen invariante a la izquierda.

$$d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4$$

$$d_L V = \frac{db \wedge dc \wedge de \wedge dh}{e^2} \tag{53}$$

Formas invariantes a la derecha.

$$\Omega^* = dA\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^* & \omega_2^* \\ 0 & \omega_3^* & \omega_4^* \\ 0 & 0 & \omega_5^* \end{pmatrix}$$

$$\omega_1^* = \frac{db}{e} \qquad \omega_2^* = -\,hdb + edc \qquad \omega_3^* = \frac{de}{e}$$

$$\omega_4^* = -\,hde + edh \qquad \omega_5^* = \frac{dr}{r}$$

con $\omega_3^* + \omega_5^* = 0$.

Elemento de volumen invariante a la derecha

$$d_R V = \omega_1^* \wedge \omega_2^* \wedge \omega_3^* \wedge \omega_4^*$$

(54) $$d_R V = db \wedge dc \wedge de \wedge dh$$

Por (53) y (54) el grupo H_3^4 no es unimodular.

Ecuaciones de estructura.

$$d\Omega = -\Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} 0 & d\omega_1 & d\omega_2 \\ 0 & d\omega_3 & d\omega_4 \\ 0 & 0 & d\omega_5 \end{pmatrix}$$

donde:

(55)
$$\begin{aligned} d\omega_1 &= -\omega_1 \wedge \omega_3 \\ d\omega_2 &= -\omega_1 \wedge \omega_4 - \omega_2 \wedge \omega_5 = \omega_1 \wedge \omega_4 + \omega_2 \wedge \omega_3 \\ d\omega_3 &= 0 \\ d\omega_4 &= -\omega_3 \wedge \omega_4 - \omega_4 \wedge \omega_5 = -2\omega_3 \wedge \omega_4 \\ d\omega_5 &= 0\ . \end{aligned}$$

Constantes de estructura:

$$C_{13}^1 = -1\ , \quad C_{14}^2 = -1\ , \quad C_{23}^2 = 1\ , \quad C_{34}^4 = -2\ .$$

De las ecuaciones (52) podemos establecer las siguientes igualdades:

(56)
$$\begin{aligned} db &= \omega_1 + b\omega_3 \\ dc &= \omega_2 + b\omega_4 - c\omega_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} de &= e\omega_3 \\ dh &= e\omega_4 - h\omega_3 \qquad (56) \\ dr &= r\omega_5 = - r\omega_3 \end{aligned}$$

Densidad para puntos. El punto $(0,0)$ es transformado por el grupo H_3^4 en el punto $(c/r,\ h/r)$. Las condiciones $d(c/r) = 0$, $d(h/r)= 0$ para que P permanezca fijo definen el sistema:

$$\omega_2 = 0 \qquad \omega_4 = 0$$

Por (55) se tiene: $d(\omega_2 \wedge \omega_4) = 2\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \neq 0$, luego la densidad invariante para puntos no existe.

Densidad para rectas. La recta $x = 0$ es transformada por el grupo H_3^4 en la recta $G : x' = \frac{b}{e} y' + ce - bh$.
Las condiciones: $d(\frac{b}{e}) = 0$, $d(ce - bh) = 0$ para que G permanezca fija, y (56) definen el sistema:

$$\omega_1 = 0 \qquad \omega_2 = 0$$

Por (55) resulta: $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = 0$, luego la densidad para rectas existe y está dada por el producto exterior: $dG = \omega_1 \wedge \omega_2$.
Dando a G las coordenadas normales de la recta (p,θ) se tiene:

$$\frac{b}{e} = - \tan\theta \qquad ce - bh = \frac{p}{\cos\theta}$$

Diferenciando y multiplicando exteriormente término a término obtenemos:

$$dG = \frac{dp \wedge d\theta}{\cos^3\theta} \tag{57}$$

la densidad para rectas en coordenadas normales.

Densidad para pares de recta y punto, con $P \in G$. El punto $(0,0)$ y la recta $x = 0$ son transformados por el grupo H_3^4 en el punto $P(c/r,\ h/r)$ y la recta $G : x' = b/e\ y' + ce - bh$ respectivamente.
El par $P + G$ define el sistema : $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_4 = 0$.
Por (55) resulta: $d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_4) = - 2\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \neq 0$, luego la densidad invariante para pares $P + G$ no existe.

Densidad para pares de rectas paralelas.

Las rectas $x = 0$ y $x = 1$ son transformadas por el grupo H_3^4 en las rectas $G_1 : x' = \frac{b}{e} y' + ce - bh$ y $G_2 : x' = \frac{b}{e} y' + ce + e - bh$ respectivamente.

Las condiciones para que el par $G_1 + G_2$ permanezca fijo bajo el grupo H_3^4 :

$$d(b/e) = 0 \qquad d(ce - bh) = 0 \qquad de = 0$$

definen el sistema:

$$\omega_1 = 0 \qquad \omega_2 = 0 \qquad \omega_3 = 0 .$$

De (55) se tiene: $d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) = 0$, luego la densidad para pares de rectas paralelas existe, y está dada por el producto exterior:

$$d(G_1 + G_2) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

Tomando coordenadas normales para las rectas (p_1,θ) para G_1 y (p_2,θ) para G_2 se obtiene:

$$\frac{b}{e} = - \tan \theta \quad , \quad bh - ce = \frac{p_1}{\cos \theta} \qquad e = \frac{p_2 - p_1}{\cos \theta}$$

Diferenciando término a término y usando (56) resulta:

$$e\, \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = \frac{d\theta \wedge dp_1 \wedge dp_2}{\cos^4 \theta}$$

Luego, si δ es la distancia entre G_1 y G_2 :

$$(58) \qquad d(G_1 + G_2) = \frac{dG_1 \wedge dp_2}{\delta \cos^3 \theta}$$

Densidad para pares de rectas.

Las rectas $x = 0$ y $x = y$ son transformadas por el grupo H_3^4 en las rectas $G_1 : x' = \frac{b}{e} y' + ce - bh$ y G_2: $x' = (\frac{1 + b}{e})\, y' + ce - bh - h$ respectivamente.

Puesto que la densidad para pares de rectas está dada por la densidad cinemática del grupo:

$$d(G_1 + G_2) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4$$

tomando coordenadas normales para las rectas: (p_1,θ_1) para G_1 y (p_2,θ_2) para G_2 obtenemos

$$\frac{b}{e} = - \tan \theta_1 \qquad\qquad \frac{1 + b}{e} = - \tan \theta_2$$

$$bh - ce = \frac{p_1}{\cos\theta_1} \qquad\qquad h = \frac{p_2}{\cos\theta_2} - \frac{p_1}{\cos\theta_1}$$

Diferenciando término a término y usando (56) resulta

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 = \frac{d\theta_1 \wedge dp_1 \wedge d\theta_2 \wedge dp_2}{\cos^3\theta_1 \cos^3\theta_2}$$

Luego

(59) $$d(G_1 + G_2) = \frac{dG_1 \wedge dG_2}{\cos^3\theta_1 \cos^3\theta_2}$$ es la

densidad para pares de rectas en coordenadas normales.

Densidad para pares de puntos. Los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$ son transformados por el grupo H_3^4 en los puntos $P_1(c/r, h/r)$ y $P_2(b+c/r, e+h/r)$ respectivamente. Puesto que la densidad para pares de puntos está dada por la densidad cinemática del grupo:

$$d(P_1 + P_2) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4$$

dando a P_1 y P_2 coordenadas (x_1,y_1) y (x_2,y_2) respectivamente, se tiene:

$$x_1 = \frac{c}{r} \qquad\qquad x_2 = \frac{b+c}{r}$$

$$y_1 = \frac{h}{r} \qquad\qquad y_2 = \frac{e+h}{r}$$

Luego:

$$dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 = \frac{2e^2}{r^4}\,\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4$$

y

(60) $$d(P_1 + P_2) = \frac{dP_1 \wedge dP_2}{2(y_2 - y_3)^3}$$ es la densidad para pares

de puntos.

6.4. $H_4^4 = \{p\ ,yp\ ,xp + 2yq\ ,2xp + yq\} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

Es el grupo dado por las transformaciones

(61) $$\begin{cases} x' = \dfrac{ax + by + c}{r} \\ y' = \dfrac{ey}{r} \end{cases}$$

Con $a\,e\,r = 1$.

Formas invariantes a la izquierda. Son los elementos de la matriz:

$$\Omega = A^{-1}\,dA = \begin{pmatrix} 1/a & -b/ae & -ce \\ 0 & 1/e & 0 \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da & db & dc \\ 0 & de & 0 \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix}$$

donde:

$$\omega_1 = \frac{da}{a} \qquad\qquad \omega_2 = \frac{db}{a} - \frac{b}{ae}\,de$$

$$(62) \quad \omega_3 = \frac{dc}{a} - c\,e\,d\,r \qquad\qquad \omega_4 = \frac{de}{e}$$

$$\omega_5 = \frac{dr}{r} \qquad\qquad \text{con} \quad \omega_1 + \omega_4 + \omega_5 = 0 \; .$$

Elemento de volumen invariante a la izquierda:

$$(63) \qquad d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 = \frac{da \wedge db \wedge dc \wedge de}{a^3\, e}$$

Formas invariantes a la derecha.

$$\Omega^* = d\,A A^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_1^* & \omega_2^* & \omega_3^* \\ 0 & \omega_4^* & 0 \\ 0 & 0 & \omega_5^* \end{pmatrix}$$

donde:

$$\omega_1^* = \frac{da}{a} \qquad\qquad \omega_2^* = -\frac{b}{ae}\,da + \frac{db}{e}$$

$$\omega_3^* = -\,c\,e\,da + \frac{dc}{r} \qquad\qquad \omega_4^* = \frac{de}{e}$$

$$\omega_5^* = \frac{dr}{r} \qquad\qquad \text{con} \quad \omega_1^* + \omega_4^* + \omega_5^* = 0 \; .$$

Elemento de volumen invariante a la derecha:

$$(64) \qquad d_R V = \omega_1^* \wedge \omega_2^* \wedge \omega_4^* = \frac{da \wedge db \wedge dc \wedge de}{e}$$

Por comparación de (63) y (64) el grupo H_4^4 no es unimodular.

Ecuaciones de estructura.

$$d\Omega = -\Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} d\omega_1 & d\omega_2 & d\omega_3 \\ 0 & d\omega_4 & 0 \\ 0 & 0 & d\omega_5 \end{pmatrix}$$

Con: $\quad d\omega_1 = 0 \qquad d\omega_2 = -\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_2 \wedge \omega_4$

(65) $\quad d\omega_3 = -2\,\omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_3 \wedge \omega_4$

$d\omega_4 = 0 \qquad d\omega_5 = 0\,.$

Constantes de estructura:

$$C^2_{12} = -1 \qquad C^2_{24} = -1 \qquad C^3_{13} = -2 \qquad C^3_{34} = 1\,.$$

De las ecuaciones (62) podemos escribir:

$$\begin{aligned} da &= a\omega_1 \\ db &= a\omega_2 + b\omega_4 \\ dc &= a\omega_3 - c(\omega_1 + \omega_4) \qquad (66) \\ de &= e\omega_4 \\ dr &= -r(\omega_1 + \omega_4) \end{aligned}$$

Densidad para puntos. El punto $(0,1)$ es transformado por el grupo H^4_4 en el punto $(b+c/r,\ e/r)$. Las condiciones para P permanecer fijo bajo el grupo: $d(\frac{b+c}{r}) = 0$, $d(e/r) = 0$ definen el sistema:

$$\omega_2 + \omega_3 = 0 \qquad\qquad 2\omega_4 + \omega_1 = 0\,.$$

De (65) obtenemos $d((\omega_2+\omega_3)\wedge(2\omega_4+\omega_1)) = d(\omega_2+\omega_3)\wedge(2\omega_4+\omega_1) = 3\omega_2\wedge\omega_1\wedge\omega_4 + 3\omega_3\wedge\omega_1\wedge\omega_4 \neq 0$. Luego la densidad invariante para conjunto de puntos no existe.

Densidad para rectas. La recta $x = 0$ es transformada por el grupo H^4_4 en la recta $G : x' = \frac{b}{e}y' + \frac{c}{r}$. Las condiciones para que G permanezca fija: $d(\frac{b}{e}) = 0$, $d = (\frac{c}{r}) = 0$ definen el sistema:

$$\omega_2 = 0 \quad , \quad \omega_3 = 0\,.$$

De (65) obtenemos:

$$d(\omega_3 \wedge \omega_2) = d\omega_3 \wedge \omega_2 - \omega_3 \wedge d\omega_2 = -3\,\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0\,.$$

Luego, la densidad invariante para conjunto de rectas no existe.

Densidad para pares de punto y recta, con $P \in G$.

El punto $(0,0)$ y la recta $x = 0$ son transformados por el grupo H_4^4 en el punto $P(b+c/r,\ e/r)$, y la recta $G : x' = \frac{b}{e} y' + \frac{c}{r}$ respectivamente. El sistema que define el par $P + G$:

$$d(b+c/r) = 0 \qquad d(b/e) = 0 \qquad d(e/r) = 0$$

es equivalente al sistema:

$$\omega_2 = 0 \qquad \omega_3 = 0 \qquad 2\omega_4 + \omega_1 = 0 \ .$$

De (65) obtenemos: $d(\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge (2\omega_4 + \omega_1) = d\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge (2\omega_4 + \omega_1) - \omega_2 \wedge d\omega_3 \wedge (2\omega_4 + \omega_1) = 6\ \omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \neq 0$. Luego la densidad invariante para pares $P+G$ con $P \in G$ no existe.

Densidad para rectas paralelas. Las rectas $x = 0$ y $x = 1$ son transformadas por el grupo H_4^4 en las rectas $G_1 : x' = \frac{b}{e} y' + \frac{c}{r}$, $G_2 : x' = \frac{b}{e} y' + \frac{a+c}{r}$ respectivamente.

El sistema que define el par de rectas $G_1 + G_2$:

$$d(\tfrac{b}{e}) = 0 \qquad d(\tfrac{c}{r}) = 0 \qquad d(\tfrac{a}{r}) = 0$$

es equivalente al sistema:

$$\omega_2 = 0 \qquad \omega_3 = 0 \qquad 2\omega_1 + \omega_4 = 0 \ .$$

De (65) obtenemos: $d(\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge (2\omega_1 + \omega_4)) = d\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge (2\omega_1 + \omega_4) - \omega_2 \wedge d\omega_3 \wedge (2\omega_1 + \omega_4) = -\ 4\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \neq 0$. Luego la densidad invariante para rectas paralelas no existe.

Densidad para pares de rectas. Las rectas $x = 1$ y $x = y$ son transformadas por el grupo en las rectas: $G_1 : x' = \frac{b}{e} y' + \frac{a+c}{r}$ y $G_2 : x' = \frac{a+b}{e} y' + \frac{c}{r}$.

Puesto que el grupo H_4^4 es transitivo para pares de rectas, esta densidad coincide con la densidad cinemática del grupo

$$d(G_1 + G_2) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4$$

Tomando coordenadas normales, (p_1, θ_1) para G_1 y (p_2, θ_2) para G_2

se tiene

$$\frac{b}{e} = -\tan\theta_1 \qquad \frac{a+c}{r} = \frac{p_1}{\cos\theta_1}$$

$$\frac{a+b}{e} = -\tan\theta_2 \qquad \frac{c}{r} = \frac{p_2}{\cos\theta_2}$$

Diferenciando y multiplicando término a término resulta:

$$\frac{d\theta_1 \wedge dp_1 \wedge d\theta_2 \wedge dp_2}{\cos^3\theta_1 \cos^3\theta_2} = \left(\frac{a^2}{er}\right)^2 \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4$$

Luego

$$(67) \qquad d(G_1 + G_2) = \frac{dG_1 \wedge dG_2}{\sec\theta_1 \sec\theta_2 \operatorname{sen}^2(\theta_1 - \theta_2)(p_1\cos\theta_2 - p_2\cos\theta_1)^2}$$

Densidad para pares de puntos. El grupo H_4^4 no es transitivo para pares de puntos, luego su densidad invariante no está definida.

7. *Conclusiones.* Como síntesis del estudio de los grupos triangulares de 4 parámetros en el plano se tiene el siguiente cuadro de resultados:

Densidades	H_1^4 $\{X_2, X_3, X_5, kX_1 + nX_4\}$ $\{yp, p, q, (2k+n)xp + (k+2n)yq\}$	H_2^4 $\{X_1, X_3, X_4, X_5\}$ $\{2xp+yq, p, xp+2yq, q\}$	H_3^4 $\{X_2, X_3, X_4, X_5\}$ $\{yp, p, xp+2yq, q\}$	H_4^4 $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ $\{2xp+yq, yp, p, xp+2yq\}$
Unimodular	Sólo si $2k = -n$	No	No	No
dP	Sólo si $k = -n$, $dx \wedge dy$	No existe	No existe	No existe
d(G)	No existe	No existe	$\dfrac{dp \wedge d\theta}{\cos^3 \theta}$	No existe
d(P + G) con $P \in G$	Sólo si $2k = -n$ $\dfrac{dP \wedge d\theta}{\cos^2 \theta}$	No existe	No existe	No existe
$d(G_1 + G_2)$ con $G_1 \parallel G_2$	$\dfrac{dG_1 \wedge dp_2}{\delta^{\frac{5k+n}{2k+n}} \cos^{\frac{3(k+n)}{2k+n}} \theta}$, $2k \neq -$	$\dfrac{dG_1 \wedge dp_2}{\delta^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}$	$\dfrac{dG_1 \wedge dp_2}{\delta \cos^3 \theta}$	No existe
$d(G_1 + G_2)$	$\dfrac{dG_1 \wedge dG_2}{[\operatorname{sen}^{6k}(\theta_1-\theta_2)\sec^{3(k+n)}\theta_1 \sec^{3(k+n)}\theta_2]^{1/k-n}}$ $k \neq n$	No transitivo	$\dfrac{dG_1 \wedge dG_2}{\cos^3\theta_1 \cos^3\theta_2}$	$\dfrac{dG_1 \wedge dG_2}{\sec\theta_1 \sec\theta_2 \operatorname{sen}^2(\theta_1-\theta_2)(p_1\cos\theta_2 - p_2\cos\theta_1)^2}$
$d(P_1 + P_2)$	$\dfrac{dP_1 \wedge dP_2}{(y_2 - y_1)^{\frac{6(n+k)}{2n+k}}}$ $2n + k \neq 0$	$\dfrac{dP_1 \wedge dP_2}{(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2}$	$\dfrac{dP_1 \wedge dP_2}{(y_2-y_1)^3}$	No transitivo

TERCERA PARTE. Subgrupos de tres parámetros del grupo triangular especial ST(3).

8. *Determinación de los grupos de tres parámetros del grupo triangular especial* ST(3).

Considerando el grupo triangular especial ST(3) en el plano, generado por las transformaciones infinitesimales (17) con estructura dada por (18), un subgrupo dependiente de tres parámetros de ST(3) está generado por tres transformaciones infinitesimales, combinaciones lineales de las (17)

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5 \\ Y_2 &= b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 + b_5X_5 \\ Y_3 &= c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4 + c_5X_5 \end{aligned} \tag{68}$$

siempre que los productos de Lie $[Y_i,Y_k]$ para $i=1,2,3$, $k=1,2,3$ sean combinaciones lineales de las transformaciones Y_j , $j=1,2,3$.

Con el fin de determinar todos los subgrupos de tres parámetros de ST(3) consideramos todos los casos posibles de las constantes a_i,b_i,c_i $(i=1,2,3,4,5)$ para que los Y_i , $i=1,2,3$ formen grupo. Tomando la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{pmatrix} \tag{69}$$

pueden presentarse los siguientes casos:

1) La matriz (69) es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se obtiene al comparar con (68) que:

$$Y_1 = X_1 \quad , \quad Y_2 = X_2 \qquad Y_3 = X_3 \, .$$

Transformaciones infinitesimales que verifican las ecuaciones (18). Luego

$$\{X_1,\ X_2,\ X_3\} = \{2xp + yq,\ yp,\ p\}$$

es un subgrupo de ST(3).

2) La matriz (69) es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí: $Y_1 = X_1$ $\quad Y_2 = X_2$, $Y_3 = c_3X_3 + X_4$.

Estas transformaciones forman grupo si $c_3 = 0$. Luego

$$\{X_1, X_2, X_4\} = \{2xp + yq, yp, xp + 2yq\}$$

es un subgrupo de ST(3)

3) La matriz (69) es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquí: $Y_1 = X_1$ $\quad Y_2 = X_2$ $\quad Y_3 = c_3X_3 + c_4X_4 + X_5$.

Estas transformaciones infinitesimales no forman grupo para ningún valor de c_3 y c_4 .

4) La matriz (69) es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí: $Y_1 = X_1$, $Y_2 = b_2X_2 + X_3$ $\quad Y_3 = c_2X_2 + X_4$.

Estas transformaciones infinitesimales forman grupo para $b_2 = c_2 = 0$. Luego

$$\{X_1, X_3, X_4\} = \{2xp + yq, p, xp + 2yq\}$$

es un subgrupo de ST(3).

5) La matriz (69) es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_4 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquí: $Y_1 = X_1$ $\quad Y_2 = b_2X_2 + X_3$ $\quad Y_3 = c_2X_2 + c_4X_4 + X_5$.

Hallando todos los productos $[Y_i, Y_j]$ y teniendo presente (18) se llega a $c_2 = c_4 = b_2 = 0$.

Así

$\{X_1, X_3, X_5\} = \{2xp+yq, p, q\}$

es el subgrupo que resulta.

6) La matriz (69) es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & 1 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquí: $Y_1 = X_1$, $Y_2 = b_2X_2 + b_3X_3 + X_4$, $Y_3 = c_2X_2 + c_3X_3 + X_5$.

Hallando todos los productos $[Y_i, Y_j]$, por (18), para que estos sean combinaciones de los Y_k , $k=1,2,3$ debe ser que $b_2 = b_3 = c_2 = c_3 = 0$. Luego se obtiene el grupo

$\{X_1, X_4, X_5\} = \{2xp+yq, xp+2yq, q\}$

7) La matriz (69) tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & 1 \\ 0 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí: $Y_1 = X_1$ $Y_2 = b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 + X_5$,

$Y_3 = c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4$.

Estos Y_i , $i=1,2,3$ forman grupo si:

i) $b_2 = b_3 = b_4 = 0$, $c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = k$ const

Resulta el grupo $\{X_1, X_5, X_4\}$ ya obtenido en (6).

ii) $b_2 = b_3 = b_4 = 0$, $c_2 = c_4 = 0$, $c_3 \neq 0$.

En este caso se obtiene el grupo $\{X_1, kX_3, X_5\}$ que es el obtenido en (5).

8) La matriz (69) es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí: $Y_1 = a_1X_1 + X_2$, $Y_2 = b_1X_1 + X_3$, $Y_3 = c_1X_1 + X_4$.

Hallando todos los productos $[Y_i, Y_j]$, para que estos sean combinaciones lineales de los Y_k , k=1,2,3 se dan dos casos:

i) $a_1 = b_1 = 0$, $c_1 \neq 0$.

Resulta el grupo

$\{X_2, X_3, kX_1 + X_4\} = \{yp, p, (2k+1)xp + (k+2)yq\}$

ii) $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$

Resulta el grupo

$\{X_2, X_3, X_4\} = \{yp, p, xp + 2yq\}$

9) La matriz (69) es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & c_4 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquí: $Y_1 = a_1X_1 + X_2$, $Y_2 = b_1X_1 + X_3$, $Y_3 = c_1X_1 + c_4X_4 + X_5$

Estas transformaciones forman grupo si

$$a_1 = b_1 = 0 \qquad c_1 = c_4 = 0$$

dando lugar al grupo

$\{X_2, X_3, X_5\} = \{yp, p, q\}$

10) La matriz (69) es de la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_3 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resultan las transformaciones:

$Y_1 = a_1X_1 + X_2$
$Y_2 = b_1X_1 + b_3X_3 + X_4$
$Y_3 = c_1X_1 + c_3X_3 + X_5$

Estas transformaciones no forman grupo para ningún valor de las constantes a_1, b_1, b_3, c_1, c_3 .

11) La matriz (69) es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_3 & b_4 & 1 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Las transformaciones son: $Y_1 = a_1X_1 + X_2$

$Y_2 = b_1X_1 + b_3X_3 + b_4X_4 + X_5$

$Y_3 = c_1X_1 + c_3X_3 + c_4X_4$

Estas transformaciones forman grupo para los valores de las constantes $a_1 = b_1 = b_3 = b_4 = 0$, $0 = c_1 = c_4$, $c_3 \neq 0$.

Resulta el grupo $\{X_2, X_5, X_3\}$ ya obtenido en 9).

12) La matriz (69) es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las transformaciones son:

$Y_1 = a_1X_1 + a_2X_2 + X_3$

$Y_2 = b_1X_1 + b_2X_2 + X_4$

$Y_3 = c_1X_1 + c_2X_2 + X_5$

Forman grupo si $a_1 = a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $c_1 = c_2 = 0$, resultando el grupo

$$\{X_3, kX_1 + X_4, X_5\} = \{p, (2k+1)\, xp + (k+2)\, yq, q\}$$

13) La matriz (69) es de la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & b_4 & 1 \\ c_1 & c_2 & 0 & c_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Resultan las transformaciones: $Y_1 = a_1X_1 + a_2X_2 + X_3$

$Y_2 = b_1X_1 + b_2X_2 + b_4X_4 + X_5$

$Y_3 = c_1X_1 + c_2X_2 + c_4X_4$

las cuales forman grupo si:

$$a_1 = a_2 = 0 \qquad b_1 = b_2 = b_4 = 0 \qquad c_2 = 0$$

Luego se obtiene el grupo

$$\{X_3, X_5, kX_1 + nX_4\} = \{p, q, (2k+n)\, xp + (k+2n)\, yq\}$$

14) La matriz (69) tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las transformaciones son:

$$Y_1 = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + X_4$$
$$Y_2 = b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + X_5$$
$$Y_3 = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$$

Estas transformaciones forman grupo si:

$b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $a_1 = a_2 = 0$, $c_1 = c_2 = 0$, $a_3 = k$,

luego resulta el grupo

(70) $\{kX_3 + X_4, X_5, X_3\}$.

Haciendo el cambio de variables dado por las ecuaciones:

$$\bar{x} = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3$$
$$\bar{y} = \beta_1 y + \beta_2$$

el grupo (70) es isomorfo al grupo

$$\{X_4, X_5, X_3\} = \{xp + 2yq, q, p\}$$

cuando

$$\lambda_2 = 0 \ , \ k = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \ , \ \beta_2 = 0 \ , \ \lambda_1 \neq 0$$

15) La matriz (69) es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Las transformaciones infinitesimales

$$Y_1 = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + X_5$$
$$Y_2 = b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4$$
$$Y_3 = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4$$

definen grupos ya obtenidos en los casos anteriores.

Hemos probado:

Teorema 3. Los subgrupos de tres parámetros del grupo triangular ST(3), dado por las transformaciones (17) con estructura (18) son, salvo isomorfismos:

$H_1^3 = \{X_2, X_3, X_5\} = \{yp, p, q\}$

$H_2^3 = \{X_1, X_4, X_5\} = \{2xp + yq, xp + 2yq, q\}$

$H_3^3 = \{X_1, X_2, X_4\} = \{2xp + yq, yp, xp + 2yq\}$

$H_4^3 = \{X_1, X_3, X_4\} = \{2xp + yq, p, xp + 2yq\}$

$H_5^3 = \{X_3, X_4, X_5\} = \{p, xp + 2yq, q\}$

$H_6^3 = \{X_2, X_3, X_4\} = \{yp, p, xp + 2yq\}$

$H_7^3 = \{X_2, X_3, X_1\} = \{yp, p, 2xp + yq\}$

$H_8^3 = \{X_3, X_5, kX_1 + nX_4\} = \{p, q, (2k+n)\ xp + (k+2n)\ yq\}$

$H_9^3 = \{X_2, X_3, kX_1 + X_4\} = \{yp, p, (2k+1)\ xp + (k+2)\ yq\}$

9. *Geometría Integral de los Subgrupos de tres parámetros del grupo triangular especial* ST(3).

9.1. $H_1^3 = \{p, yp, q\} = \{X_3, X_2, X_5\}$

Es el grupo definido por las transformaciones

$$\begin{cases} x' = x + by + c \\ y' = y + h \end{cases}$$

Formas de Maurer-Cartan: Son los elementos de la matriz

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -b & bh-c \\ 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & db & dc \\ 0 & 0 & dh \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto es:

(71) $\omega_1 = db \qquad \omega_2 = dc - b\ dh \qquad \omega_3 = dh$.

Podemos escribir:

(72) $db = \omega_1 \qquad dh = \omega_3 \quad ; \quad dc = \omega_2 + b\ \omega_3$.

Elemento de volumen invariante a la izquierda:

$$d_L V = db \wedge dc \wedge dh$$

Formas invariantes a la derecha: Son los elementos de la matriz

$$\Omega^* = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^* & \omega_2^* \\ 0 & 0 & \omega_3^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1^* = db \qquad \omega_2^* = -h\, db + dc \qquad \omega_3^* = dh \, .$$

Elemento de volumen invariante a la derecha:

$$d_R V = db \wedge dc \wedge dh$$

Comparando los elementos de volumen podemos decir que el grupo H_1^3 es unimodular.

Ecuaciones de estructura. Son las ecuaciones determinadas por

$$d\Omega = -\Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} 0 & d\omega_1 & d\omega_2 \\ 0 & 0 & d\omega_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego:

(73) $\qquad d\omega_2 = -\omega_1 \wedge \omega_3 \qquad d\omega_3 = 0 \qquad d\omega_1 = 0 \, .$

Densidad para puntos.

El punto (0,0) es transformado por el grupo H_1^3 en el punto (c,h). Las ecuaciones $dc = 0$, $dh = 0$ definen el sistema $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$. Por (73), $d(\omega_2 \wedge \omega_3) = 0$. Luego la densidad para puntos existe. Por ser H_1^3 un subgrupo del grupo H_1^4 esta densidad coincide para ambos grupos (aquí $k = -n = 0$), es decir:

(74) $\qquad dP = dx \wedge dy \qquad$ (ver cuadro pág. 38).

Densidad para rectas. El grupo H_1^3 es transitivo para conjuntos de rectas; por ser H_1^3 un subgrupo del grupo H_3^4 , la densidad para rectas en ambos grupos coincide. Esto es:

(75) $\qquad dG = \dfrac{d\theta \wedge dp}{\cos^3 \theta} \qquad$ (ver cuadro pág. 38).

Densidad para pares $P + G$ *con* $P \in G$. Por ser el grupo H_1^3 transitivo para pares de conjuntos de punto y recta, con el punto sobre la recta, y por ser subgrupo del grupo H_1^4 , la densidad para estos conjuntos $P+G$ está dada por (aquí $2k = -n = 0$)

(76) $$d(P+G) = \frac{dP \wedge d\theta}{\cos^2\theta}.$$ (ver Cuadro pág. 38).

Densidad para pares de rectas paralelas. El grupo H_1^3 no es transitivo para pares de rectas paralelas, luego su densidad no está definida.

9.2. $H_2^3 = \{q,\ xp+2yq,\ 2xp+yq\} = \{X_1, X_4, X_5\}$

Es el grupo dado por las transformaciones

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a}{r}x \\ y' = \dfrac{e}{r}y + \dfrac{h}{r} \end{cases}$$

Con $aer = 1$.

Formas invariantes a la izquierda: Son los elementos de:

$$\Omega = A^{-1}\,dA = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/e & -h/er \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} da & 0 & 0 \\ 0 & de & dh \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix}$$

Luego:

(77)
$$\omega_1 = \frac{da}{a} \qquad \omega_4 = \frac{dr}{r}$$
$$\omega_2 = \frac{de}{e} \qquad \omega_3 = \frac{dh}{e} - \frac{h}{er}\,dr$$

Con $\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 = 0$.

Elemento de volumen invariante a la izquierda:

(78) $$d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = \frac{da \wedge de \wedge dh}{ae^2}$$

Formas invariantes a la derecha: Son los elementos de:

$$\Omega^* = dA\, A^{-1} = \begin{pmatrix} da & 0 & 0 \\ 0 & de & dh \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/e & -h/er \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix}$$

$$\omega_1^* = \frac{da}{a} \qquad \omega_2^* = \frac{de}{e}$$

$$\omega_3^* = -\frac{h}{er}\, de + \frac{dh}{r} \qquad \omega_4^* = \frac{dr}{r}$$

Con $\omega_1^* + \omega_2^* + \omega_4^* = 0$.

Elemento de volumen invariante a la derecha:

(79) $$d_R V = \omega_1^* \wedge \omega_2^* \wedge \omega_3^* = da \wedge de \wedge dh$$

Se observa de (78) y (79) que el grupo H_2^3 no es unimodular.

Ecuaciones de estructura. Están dadas por los elementos de la ecuación matricial

$$d\Omega = -\Omega \wedge \Omega = -\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & \omega_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & \omega_4 \end{pmatrix}$$

Luego

(80) $$d\omega_1 = 0 \qquad d\omega_2 = 0$$
$$d\omega_3 = -2\omega_2 \wedge \omega_3 - \omega_1 \wedge \omega_3 \qquad d\omega_4 = 0$$

De las igualdades (77) podemos escribir

(81) $$da = a\omega_1 \qquad dr = -r(\omega_1 + \omega_2)$$
$$de = e\omega_2 \qquad dh = e\omega_3 - h(\omega_1 + \omega_2) \; .$$

Densidad para puntos. El punto (1,0) es transformado por el grupo H_2^3 en el punto $P(a/r,\ h/r)$.

Puesto que de (81) $d(a/r) = \frac{a}{r}(2\omega_1 + \omega_2)$ y $d(h/r) = \frac{e}{r}\omega_3$, el sistema que define los puntos P es :

$$2\omega_1 + \omega_2 = 0 \quad , \quad \omega_3 = 0 \; .$$

De (80) $$d((2\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3) = -3\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 \neq 0 \; .$$

Luego, la densidad invariante para puntos no existe.

Densidad para rectas. La recta $y = x$ es transformada por el grupo H_2^3 en la recta $G : x' = \frac{a}{e} y' - \frac{ah}{er}$

De (81) se obtiene $d(\frac{a}{e}) = \frac{a}{e}(\omega_1 - \omega_2)$ y $d(\frac{h}{r}) = \frac{e}{r}\omega_3$, luego el sistema que define la recta G es:

$$\omega_1 - \omega_2 = 0 \qquad\qquad \omega_3 = 0 .$$

Por (80) obtenemos: $d((\omega_1 - \omega_2)\wedge\omega_3) = (\omega_1 - \omega_2)\wedge d\omega_3 = -3\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3 \neq 0$. Luego la densidad invariante para rectas no existe.

Densidad para pares $P + G$ *con* $P \in G$. El par $P + G$ de punto y recta, con $P \in G$ es transformado transitivamente por el grupo H_2^3. Luego, la densidad para pares $P + G$ coincide con la densidad cinemática del grupo.

Para dar una interpretación geométrica a esta densidad, observemos que el punto (1,1) y la recta $y = x$ son transformados por el grupo H_2^3 en el punto $P(a/r, e+h/r)$ y la recta $G : x' = \frac{a}{e} y' - \frac{ah}{er}$ respectivamente.

Tomando coordenadas (x,y) para el punto P , y coordenadas normales (p,θ) para la recta G se obtiene:

$$x = a/r \qquad\qquad y = h+e/r \qquad\qquad \tan\theta = -a/e .$$

Diferenciando término a término y multiplicando exteriormente resulta:

$$\frac{dx\wedge dy\wedge d\theta}{\cos^2\theta} = (\frac{a}{r})^2\,\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3$$

Reemplazando (a/r) en (82) resulta:

$$(82) \qquad d(P+G) = \frac{dP\wedge d\theta}{x^2\cos^2\theta}$$

Densidad para pares de rectas paralelas.

El grupo H_2^3 es transitivo para pares de rectas paralelas, luego tiene densidad para $G_1 + G_2$. Las rectas $y = x$; $y = x + 1$ son transformadas en las rectas $G_1 : x' = \frac{a}{e} y' - a^2 h$ y $G_2 : x' = \frac{a}{e} y' - a^2(h + e)$. Tomando coordenadas normales para las rectas

(p_1,θ) para G_1 y (p_2,θ) para G_2 se obtiene

(83) $$d(G_1+G_2) = \frac{dG_1 \wedge dp_2}{\delta^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}$$

9.3. $H_3^3 = \{yp,\ 2xp+yq,\ xp+2yq\} = \{X_1,\ X_2,\ X_4\}$.

Es el grupo dado por las transformaciones

$$\begin{cases} x' = \dfrac{ax+by}{r} \\ y' = \dfrac{ey}{r} \end{cases}$$

Con $aer = 1$.

Formas invariantes a la izquierda. Están dadas por los elementos de

$$\Omega = A^{-1}\,dA = \begin{pmatrix} 1/a & -b/ae & 0 \\ 0 & 1/e & 0 \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} da & db & 0 \\ 0 & de & 0 \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix}$$

Luego

(84) $$\omega_1 = \frac{da}{a} \qquad \omega_2 = \frac{db}{a} - \frac{b}{ae}\,de$$
$$\omega_3 = \frac{de}{e} \qquad \omega_4 = \frac{dr}{r}$$

Con $\omega_1+\omega_3+\omega_4 = 0$.

Formas invariantes a la derecha. Son los elementos de

$$\Omega^* = dA\,A^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_1^* & \omega_2^* & 0 \\ 0 & \omega_3^* & 0 \\ 0 & 0 & \omega_4^* \end{pmatrix}$$

Con $$\omega_1^* = \frac{da}{a} \qquad \omega_2^* = -\frac{b}{ae}\,da + \frac{db}{e}$$
$$\omega_3^* = \frac{de}{e} \qquad \omega_4^* = \frac{dr}{r}$$

con $\omega_1^*+\omega_3^*+\omega_4^* = 0$.

Elemento de volumen invariante a la izquierda:

(85) $$d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = \frac{da \wedge db \wedge de}{a^2 e}$$

Elemento de volumen invariante a la derecha:

(86) $$d_R V = \omega_1^* \wedge \omega_2^* \wedge \omega_3^* = \frac{da \wedge db \wedge de}{a\ e^2}$$

De (85) y (86) observamos que el grupo H_3^3 no es unimodular.

De (84) podemos escribir las igualdades:

(87) $$\begin{array}{ll} da = a\omega_1 & dr = -r(\omega_1 + \omega_3) \\ de = e\omega_3 & db = a\omega_2 + b\omega_3 \end{array}$$

Ecuaciones de estructura.

$$d\Omega = -\Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} d\omega_1 & d\omega_2 & 0 \\ 0 & d\omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & d\omega_4 \end{pmatrix}$$

donde:

(88) $$\begin{aligned} d\omega_1 &= 0 \\ d\omega_2 &= -\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_2 \wedge \omega_3 \\ d\omega_3 &= 0 \\ d\omega_4 &= 0\ . \end{aligned}$$

Densidad para puntos. El punto (0,1) es transformado por el grupo en el punto $(b/r,\ e/r)$. Puesto que de (87) $d(b/r) = a/r\ \omega_2 + b/r(2\omega_3 + \omega_1)$ y $d(e/r) = e/r(2\omega_3 + \omega_1)$, las ecuaciones que definen el conjunto de puntos son:

$$2\omega_3 + \omega_1 = 0 \qquad \omega_2 = 0\ .$$

Por (88) resulta: $d((2\omega_3 + \omega_1) \wedge \omega_2) = -3\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$. Luego, la densidad invariante para conjunto de puntos no existe.

Densidad para rectas. La recta $x = 1$ es transformada por el grupo H_3^3 en la recta $G : x' = \frac{b}{e} y' + \frac{a}{r}$. Puesto que de (87) , $d(b/e) = \frac{a}{e}\omega_2$ y $d(a/r) = \frac{a}{r}(2\omega_1 + \omega_3)$, el conjunto de rectas definen el sistema:

$$\omega_2 = 0 \qquad 2\omega_1 + \omega_3 = 0$$

De (88) resulta: $d(\omega_2 \wedge (2\omega_1 + \omega_3)) = -3\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$. Luego, la densidad para conjunto de rectas, invariante bajo el grupo H_3^3 no existe.

Densidad para pares $P+G$ *, con* $P \in G$. El punto (1,1) y la recta $x = 1$ son transformados por el grupo H_3^3 en el punto $P(\frac{a+b}{r}, \frac{e}{r})$ y la recta G dada por $x' = \frac{b}{e} y' + \frac{a}{r}$.

Por ser el grupo transitivo para pares $P+G$, esta densidad existe y coincide con la densidad cinemática

$$d(P+G) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

Tomando coordenadas (x,y) para el punto P y (p,θ) para la recta G obtenemos:

$$(89) \qquad x = \frac{a+b}{r} \qquad y = \frac{e}{r} \qquad \frac{b}{e} = -\tan\theta$$

Diferenciando término a término y multiplicando exteriormente resulta:

$$\frac{dx \wedge dy \wedge d\theta}{\cos^2\theta} = \left(\frac{a}{r}\right)^2 3\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

Luego:

$$(90) \qquad d(P+G) = \frac{dP \wedge d\theta}{(x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta)^2}$$

es la densidad invariante para pares de punto y recta con $P \in G$ respecto del grupo H_3^3 .

Densidad para pares de rectas paralelas. El grupo H_3^3 no es transitivo para pares de rectas paralelas, luego su densidad invariante para $G_1 + G_2$ no está definida.

9.4. $H_4^3 = \{p,\ 2xp + yq,\ xp + 2yq\} = \{X_1, X_3, X_4\}$

Es el grupo dado por las transformaciones

$$\begin{cases} x' = \dfrac{ax + c}{r} \\ y' = \dfrac{ey}{r} \end{cases}$$

Con $aer = 1$.

Este grupo es isomorfo al grupo H_2^3 por el cambio de variables x por y , luego su comportamiento respecto a la Geometría Integral es el mismo. Es decir, es un grupo unimodular, que no admite densidad para puntos ni para rectas, mientras que la densidad para pares $P+G$, con $P \in G$ está dado por la expresión

$$d(P+G) = \frac{dP \wedge d\theta}{y^2 \operatorname{sen}^2 \theta}$$

y la densidad para pares de rectas paralelas está dada por la expresión

$$d(G_1 + G_2) = \frac{dG_1 \wedge dp_2}{\delta^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}$$

(ver (82) y (83) respectivamente).

9.5. $H_5^3 = \{p,\ q,\ xp + 2yq\} = \{X_3,\ X_4,\ X_5\}$

Es el grupo dado por las transformaciones

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x+c}{r} \\ y' = \dfrac{ey+h}{r} \end{cases}$$

Con $er = 1$.

Formas invariantes a la izquierda. Son los elementos de

$$\Omega = A^{-1}\, dA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -ce \\ 0 & 1/e & -h/er \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & dc \\ 0 & de & dh \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix}$$

Luego $\omega_1 = dc - ce\, dr$.

$$(96)\qquad \omega_2 = \frac{de}{e} \qquad \omega_3 = \frac{dh}{e} - \frac{h}{er}\,dr$$

$$\omega_4 = \frac{dr}{r} \qquad \text{con } \omega_2 + \omega_4 = 0\ ,$$

Elemento de volumen invariante a la izquierda:

$$(97)\qquad d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = \frac{dc \wedge de \wedge dh}{e^2}$$

Formas invariantes a la derecha. Son los elementos de

$$\Omega^* = dA\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_1^* \\ 0 & \omega_2^* & \omega_3^* \\ 0 & 0 & \omega_4^* \end{pmatrix}$$

donde: $\omega_1^* = \dfrac{de}{r}$ $\qquad \omega_2^* = \dfrac{de}{e}$

$\omega_3^* = -h\ de + \dfrac{dh}{r}$ $\qquad \omega_4^* = \dfrac{dr}{r}$

con $\omega_2^* + \omega_4^* = 0$.

Elemento de volumen invariante a la derecha:

$$(98)\qquad d_R V = \omega_1^* \wedge \omega_2^* \wedge \omega_3^* = \frac{dc \wedge de \wedge dh}{1/e}$$

Comparando (97) y (98) podemos decir que el grupo H_5^3 no es unimodular.

Ecuaciones de estructura.

$$d\,\Omega = -\,\Omega \wedge \Omega = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & \omega_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & \omega_4 \end{pmatrix}$$

$$d\,\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d\omega_1 \\ 0 & d\omega_2 & d\omega_3 \\ 0 & 0 & d\omega_4 \end{pmatrix}$$

donde: $d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_2$ $\qquad d\omega_2 = 0$

(99) $d\omega_3 = -2\omega_2 \wedge \omega_3$ $\qquad d\omega_4 = 0$

De las ecuaciones (96) podemos escribir:

$$(100) \qquad \begin{array}{ll} dc = \omega_1 - c\omega_2 & de = e\omega_2 \\ dh = e\omega_3 - h\omega_2 & dr = -r\omega_2 \end{array}$$

Densidad para puntos. El punto (0,0) es transformado por el grupo H_5^3 en el punto $(c/r,\ h/r)$. De (100) resulta $d(c/r) = \frac{\omega_1}{r}$, $d(h/r) = \frac{e}{r}\,\omega_3$, por tanto el sistema que define el conjunto de puntos es,

$$\omega_1 = 0 \qquad , \qquad \omega_3 = 0 \ .$$

De (99) obtenemos $d(\omega_1 \wedge \omega_3) = 3\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$, y por tanto la densidad para conjunto de puntos, invariante bajo el grupo H_5^3 no existe.

Densidad para rectas. El grupo H_5^3 es transitivo para rectas y por ser subgrupo de H_3^4 tiene la misma densidad para rectas de este último (ver Cuadro pág. 38).

En efecto:

$$dG = \frac{d\theta \wedge dp}{\cos^3 \theta}$$

Densidad para pares de punto y recta, con $P \in G$. El punto (0,0) y la recta $x = y$ son transformados por el grupo H_5^3 en el punto $P(c/r,\ h/r)$ y la recta $G : x' = \frac{y'}{e} + \frac{c}{r} - h$ respectivamente. Puesto que el conjunto $P + G$, con $P \in G$ depende del mismo número de parámetros que H_5^3 , la densidad para estos conjuntos coincide con la densidad cinemática

$$d(P + G) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

Tomando coordenadas normales (p,θ) para G y coordenadas (x,y) para P resulta:

$$x = \frac{c}{r} \qquad y = \frac{h}{r} \qquad - \tan\theta = \frac{1}{e}$$

Diferenciando y multiplicando exteriormente resulta:

$$\frac{dx \wedge dy \wedge d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{r^2}\ \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

Reemplazando $r^2 = \tan^2 \theta$ se obtiene:

$$d(G+P) = \frac{dP \wedge d\theta}{\cos^4\theta \operatorname{cosc}^2\theta}$$

Densidad para rectas paralelas. El grupo H_5^3 no es transitivo para pares de rectas paralelas, luego la densidad invariante para estos conjuntos no está definida.

9.6. $H_6^3 = \{p, yp, xp + 2yq\} = \{X_2, X_3, X_4\}$

Es el grupo definido por las transformaciones

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x + by + c}{r} \\ y' = \dfrac{ey}{r} \end{cases}$$

Con $er = 1$.

Formas invariantes a la izquierda.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -b/e & -ce \\ 0 & 1/e & 0 \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & db & dc \\ 0 & de & 0 \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_4 \end{pmatrix}$$

donde:

(101)
$$\omega_1 = db - \frac{b}{e}\,de \qquad \omega_2 = dc - ce\,dr$$
$$\omega_3 = \frac{de}{e} \qquad \omega_4 = \frac{dr}{r}$$

con $\omega_3 + \omega_4 = 0$.

Elemento de volumen invariante a la izquierda:

(102) $$d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = \frac{db \wedge dc \wedge de}{e}$$

Formas invariantes a la derecha.

$$\Omega^* = dA\, A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^* & \omega_2^* \\ 0 & \omega_3^* & 0 \\ 0 & 0 & \omega_4^* \end{pmatrix}$$

Con $\omega_1^* = \frac{db}{e}$ $\qquad \omega_2^* = \frac{dc}{r}$

$\omega_3^* = \frac{de}{e}$ $\qquad \omega_4^* = \frac{dr}{r}$

Elemento de volumen invariante a la derecha:

(103) $$d_R V = \omega_1^* \wedge \omega_2^* \wedge \omega_3^* = \frac{db \wedge dc \wedge de}{e}$$

De (102) y (103) el grupo H_6^3 es unimodular.

Ecuaciones de estructura.

$$d\,\Omega = -\Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_4 \end{pmatrix}$$

Luego:

(104)
$$\begin{aligned} d\omega_1 &= -\omega_1 \wedge \omega_3 \\ d\omega_2 &= -\omega_2 \wedge \omega_4 = \omega_2 \wedge \omega_3 \\ d\omega_3 &= 0 \\ d\omega_4 &= 0 \end{aligned}$$

De las igualdades (101) podemos escribir:

(105)
$$\begin{aligned} db &= \omega_1 + b\omega_3 & \qquad de &= e\omega_3 \\ dc &= \omega_2 - c\omega_3 & \qquad dr &= -r\omega_3 \end{aligned}$$

Densidad para puntos. El punto $(0,1)$ es transformado por el grupo H_6^3 en el punto $(b+c/r,\ e/r)$. Las ecuaciones que determina el conjunto de puntos

$$d\left(\frac{b+c}{r}\right) = 0 \qquad\qquad d\left(\frac{e}{r}\right) = 0$$

son equivalentes al sistema: $\omega_3 = 0$, $\omega_1 + \omega_2 = 0$.

Por (104) $d(\omega_3 \wedge (\omega_1 + \omega_2)) = 0$, luego la densidad invariante para puntos existe y está dada por el producto exterior:

$$dP = \omega_3 \wedge (\omega_1 + \omega_2)$$

Tomando coordenadas (x,y) para el punto $P(c+b/r,\ e/r)$ se obtiene:

$$x = \frac{c+b}{r} \qquad\qquad y = \frac{e}{r}$$

Diferenciando y multiplicando exteriormente resulta:

$$dx \wedge dy = 2\,\frac{e}{r^2}\,\omega_3 \wedge (\omega_1 + \omega_2)$$

Luego $$dP = \frac{dx \wedge dy}{2\,y^{3/2}}$$

Densidad para rectas. El grupo H_6^3 es transitivo para rectas. Su densidad para conjunto de rectas es igual a la densidad para rectas del grupo H_3^4 del cual es subgrupo, luego:

$$dG = \frac{d\theta \wedge dp}{\cos^3 \theta} \qquad \text{(ver cuadro pág. 38).}$$

Densidad para pares de punto y recta, con $P \in G$. El grupo H_6^3 es transitivo para pares de punto y recta con $P \in G$. Al punto $(0,1)$ lo envía en el punto $P(b+c/r,\ e/r)$ y a la recta $x = 0$ en la recta $G : x' = \frac{b}{e}\,y' + \frac{c}{r}$.

Tomando coordenadas (x,y) para P y (p,θ) para G se obtiene:

$$x = \frac{b+c}{r} \qquad y = \frac{e}{r} \quad , \quad -\tan\theta = \frac{b}{e}$$

Diferenciando y multiplicando exteriormente resulta:

$$e^2\,\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = \frac{dx \wedge dy \wedge d\theta}{\cos^2 \theta}$$

Luego: $$d(P+G) = \frac{dP \wedge d\theta}{y^2 \cos^2 \theta}$$

Densidad para pares de rectas paralelas. El grupo H_6^3 es transitivo para conjuntos de rectas paralelas y su densidad coincide con la densidad para pares de rectas paralelas del grupo H_3^4, del cual es subgrupo. Luego:

$$d(G_1 + G_2) = \frac{dG_1 \wedge dp_2}{\delta \cos^3 \theta}$$ (ver cuadro pág. 38).

9.7. $H_7^3 = \{p, yp, 2xp + yq\} = \{X_2, X_3, X_1\}$

Es el grupo dado por las transformaciones

$$\begin{cases} x' = \dfrac{ax + by + c}{r} \\ y' = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

con $ar = 1$.

Formas invariantes a la izquierda.

$$\Omega = A^{-1}\, dA = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a & -c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da & db & dc \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix}$$

Luego:

(106)
$$\omega_1 = \frac{da}{a} \qquad \omega_2 = \frac{db}{a}$$
$$\omega_3 = \frac{dc}{a} - c\, dr \qquad \omega_4 = \frac{dr}{r}$$

con $\omega_1 + \omega_4 = 0$.

Elemento de volumen invariante a la izquierda:

(107) $$d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = \frac{da \wedge db \wedge dc}{a^3}$$

Formas invariantes a la derecha.

$$\Omega^* = dA\, A^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_1^* & \omega_2^* & \omega_3^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_4^* \end{pmatrix}$$

Con
$$\omega_1^* = \frac{da}{a} \qquad \omega_2^* = -\frac{b}{a}\, da + db$$
$$\omega_3^* = -c\, da + \frac{dc}{r} \qquad \omega_4^* = \frac{dr}{r}$$

con $\omega_1^* + \omega_4^* = 0$.

Elemento de volumen invariante a la derecha

(108) $$d_R V = \omega_1^* \wedge \omega_2^* \wedge \omega_3^* = da \wedge db \wedge dc$$

De (107) y (108) el grupo H_7^3 no es unimodular.

Ecuaciones de estructura.

$$d\Omega = -\Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_4 \end{pmatrix}$$

(109) $$\begin{aligned} d\omega_1 &= 0 & d\omega_2 &= -\omega_1 \wedge \omega_2 \\ d\omega_3 &= -\omega_1 \wedge \omega_3 - \omega_3 \wedge \omega_4 = -2\omega_1 \wedge \omega_3 \\ d\omega_4 &= 0 \end{aligned}$$

De (106) podemos escribir las siguientes igualdades:

(110) $$\begin{aligned} da &= a\omega_1 & db &= a\omega_2 \\ dr &= r\omega_4 = -r\omega_1 & dc &= a\omega_3 - c\omega_1 \end{aligned}$$

Densidad para puntos. El punto (0,1) es transformado en el punto $(b+c/r,\ 1/r)$ por el grupo H_7^3. (El grupo H_7^3 es transitivo para conjunto de puntos excepto para los $y = 0$).

Las ecuaciones $d(\frac{b+c}{r}) = 0$, $d(\frac{1}{r}) = 0$ y (110) definen el sistema

$$\omega_1 = 0 \qquad , \qquad \omega_2 + \omega_3 = 0 .$$

De (109) $d(\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3)) = 0$ y por tanto la densidad invariante para puntos existe y está dada por el producto exterior:

$$dP = \omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3)$$

Tomando coordenadas (x,y) para el punto se obtiene:

$$x = a(b+c) \qquad y = a$$

Luego $$dx \wedge dy = a^3 \omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3)$$

y $$dP = \frac{dx \wedge dy}{y^3}$$

Densidad para rectas. La recta $x = 0$ es transformada por el grupo H_7^3 en la recta $G : x' = by' + ac$. Las condiciones $db = 0$, $d(ac) = 0$ para que G permanezca fija definen el sistema $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$. De (110) $d(\omega_2 \wedge \omega_3) = 3\,\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$ y por tanto la densidad invariante para rectas no existe.

Densidad para pares $P + G$ *con* $P \in G$. El grupo H_7^3 es transitivo para pares $P + G$, luego existe la densidad para estos conjuntos y ella coincide con la densidad cinemática del grupo

$$d(P + G) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

Puesto que el par $(0,1)$, $x = 0$ es transformado en el par $P(a(b+c), a)$, $G : x' = by' + ac$; tomando coordenadas (x,y) para P y (p,θ) para G resulta:

$$x = a(b + c) \qquad y = a \qquad -\tan\theta = ac$$

De donde: $$\frac{dx \wedge dy \wedge d\theta}{\cos^2\theta} = a^4\, \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

Luego: $$d(P + G) = \frac{dP \wedge d\theta}{y^4 \cos^2\theta}$$

Densidad para pares de rectas paralelas. El grupo H_7^3 es transitivo para pares de rectas paralelas, además es subgrupo del grupo H_1^4 cuando $n = 0$, $k = 1$, el cual tiene densidad para pares de rectas paralelas.

Las densidades en ambos grupos coinciden.

Luego: $$d(G_1 + G_2) = \frac{dG_1 \wedge dp_2}{2\,\delta^{5/2} \cos^{3/2}\theta}$$ (ver cuadro pág. 38)

9.8. $H_8^3 = \{p,\ q,\ (2k+n)xp + (k+2n)yq\} = \{X_3,\ X_5,\ kX_1 + nX_4\}$

Es el grupo dado por las transformaciones

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a^k x + c}{r} \\[2ex] y' = \dfrac{a^n y + h}{r} \end{cases}$$

con $a^{k+n}\ r = 1$, k y n constantes.

H_8^3 se obtiene del grupo H_1^4 cuando el parámetro b es cero.

Formas invariantes a la izquierda. Reemplazando a $b = 0$ en el grupo H_1^4 estas formas resultan ser (ver (29)):

$$
(111)\qquad
\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{k}{a}\, da \\
\omega_2 &= \frac{dc}{a^k} - ca^n\, dr \\
\omega_3 &= \frac{n}{a}\, da = \frac{n}{k}\, \omega_1 \\
\omega_4 &= \frac{1}{a^n}\left(dh - \frac{h}{r}\, dr\right) \\
\omega_5 &= \frac{dr}{r}
\end{aligned}
$$

con $\omega_1 + \omega_3 + \omega_5 = 0$, o sea $(1 + \frac{n}{k})\ \omega_1 + \omega_5 = 0$, $k \neq 0$.

Elemento de volumen invariante a la izquierda, o densidad cinemática:

$$
(112)\qquad d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_4 = \frac{k}{a^{k+1+n}}\, da \wedge dc \wedge dh \qquad , \ k \neq 0 .
$$

Formas invariantes a la derecha. De (31) y tomando $b = 0$ se obtiene:

$$
(113)\qquad
\begin{aligned}
\omega_1^* &= \frac{k}{a}\, da \\
\omega_2^* &= k\, a^{k-1}(-ca^n\, da) + \frac{dc}{r} = \frac{-\,k\ c}{a^{1-(k+n)}}\, da + \frac{dc}{r} \\
\omega_3^* &= \frac{n}{a}\, da = \frac{n}{k}\, \omega_1^* \qquad\qquad k \neq 0 \\
\omega_4^* &= -\,\frac{n}{ra}\, da + \frac{dh}{r} \\
\omega_5^* &= \frac{dr}{r}
\end{aligned}
$$

con $\omega_1^* + \omega_3^* + \omega_5^* = 0$, o,$(1 + \frac{n}{k})\ \omega_1^* + \omega_5^* = 0$, con $k \neq 0$.

Elemento de volumen invariante a la derecha:

(114) $$d_R V = \frac{k}{a^{1-2(k+n)}}\, da \wedge dc \wedge dh$$

De (112) y (114) el grupo H_8^3 es unimodular si sólo sí $k = -$

Ecuaciones de estructura. Son los elementos de la ecuación matricial:

$$d\,\Omega = -\Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} d\omega_1 & 0 & d\omega_2 \\ 0 & d\omega_3 & d\omega_4 \\ 0 & 0 & d\omega_5 \end{pmatrix}$$

Luego:

(115)
$$\begin{aligned} d\omega_1 &= 0 \\ d\omega_2 &= -\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_2 \wedge \omega_5 = (2 + \frac{n}{k})\ \omega_1 \wedge \omega_2 \\ d\omega_3 &= 0 \\ d\omega_4 &= -\omega_3 \wedge \omega_4 - \omega_4 \wedge \omega_5 = -\ (1 + \frac{2n}{k})\ \omega_1 \wedge \omega_4 \\ d\omega_5 &= 0 \end{aligned}$$

con $k \neq 0$.

Las constantes de estructura son:

$$C_{12}^2 = -(\frac{n}{k} + 2)$$

$$C_{14}^4 = -(1 + \frac{2n}{k}) \qquad k \neq 0\ .$$

Con estas ecuaciones podemos comprobar que H_8^3 es unimodular sólo si $k = -n$. En efecto, para que H_8^3 sea unimodular debe cumplirse

que $\sum_{k=1}^{3} C_{ik}^k = 0 \ \ \forall i$; pero $\sum_{\substack{k=1\\ i=1}}^{3} C_{ik}^k = -[\ \frac{n}{k} + 1 + (1 + \frac{2n}{k})\,] =$

$= \frac{-\ 3(n + k)}{k}$. Luego para $k = -n$ el grupo H_8^3 es unimodular,

$k \neq 0$.

De (111) podemos escribir:

(116)
$$\begin{aligned} da &= \frac{a}{k}\, \omega_1 \\ dh &= a^n\, \omega_4 - h(1 + \frac{n}{k})\ \omega_1 \end{aligned}$$

(116)
$$dc = a^k \omega_2 - c(1 + \frac{n}{k})\,\omega_1$$

$$dr = - r\,(1 + \frac{n}{k})\,\omega_1 \qquad \text{con} \quad k \neq 0\ .$$

Densidad para puntos. El punto $(0,0)$ es transformado por el grupo H_8^3 en el punto $(c/r,\ h/r)$. Las ecuaciones $d(c/r) = 0$, $d(h/r) = 0$ y (116) definen el sistema: $\omega_2 = 0$, $\omega_4 = 0$.

Diferenciando el producto exterior $\omega_2 \wedge \omega_4$ y reemplazando en (115) se obtiene

(117)
$$d(\omega_2 \wedge \omega_4) = - (3 + \frac{3n}{k})\,\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_4$$

Luego si $k = -n$ la densidad invariante para puntos respecto al grupo H_8^3 existe y está dada por

$$dP = dx \wedge dy$$

Densidad para rectas. La recta $x = y$ es transformada por el grupo H_8^3 en la recta G de ecuación

$$y' = a^{n-k}\,x' + h\,a^{n+k} - c\,a^{2n}$$

Las ecuaciones $d(a^{n-k}) = 0$, $d(h\,a^{n+k} - c\,a^{2n}) = 0$ y (116) definen el sistema: $\omega_1 = 0$, $\omega_4 - \omega_2 = 0$.

De (113) obtenemos

(118)
$$d(\omega_1 \wedge (\omega_4 - \omega_2)) = 0 \quad \text{para todo valor de } k \text{ y } n\ .$$

Luego la densidad invariante para rectas existe y está dada por $dG = \omega_1 \wedge (\omega_4 - \omega_2)$.

Tomando coordenadas normales (p,θ) para la recta G se tiene:

$$- \operatorname{cotg}\theta = a^{n-k} \qquad \frac{p}{\operatorname{sen}\theta} = h\,a^{n-k} - c\,a^{2n}$$

Diferenciando y multiplicando exteriormente resulta

$$\frac{d\theta \wedge dp}{\operatorname{sen}^3\theta} = \frac{n-k}{k}\,a^{3n}\,\omega_1 \wedge (\omega_4 - \omega_2)$$

Luego:

(119)
$$dG = \frac{k}{n-k}\ \frac{d\theta \wedge dp}{\operatorname{sen}^{\frac{3k}{k-n}}\theta\ \cos^{\frac{3n}{n-k}}\theta} \qquad \text{con} \quad n \neq k\ .$$

Observando (119) podemos decir: el grupo H_8^3 no tiene densidad invariante para rectas en el caso $k = n$, $(k \neq 0)$.

Densidad para pares $P + G$ *, con* $P \in G$. Puesto que el grupo H_8^3 es transitivo para pares de recta y punto, la densidad para estos conjuntos existe y coincide con la densidad cinemática del grupo.

Con el fin de dar una interpretación geométrica a esta densidad observamos que el punto $(0,0)$ y la recta $y = x$ son transformados por el grupo H_8^3 en el par: $P(c/r, h/r)$ y $G : y' = a^{n-k} x' + h a^{n+k} - c a^{2n}$.

Tomando coordenadas (x,y) para el punto, y (p,θ) para la recta G se tiene:

$$x = c/r \qquad y = h/r \qquad -\cot\theta = a^{n-k} .$$

Diferenciando y multiplicando exteriormente término a término resulta:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_4 = d(G + P) = \frac{k}{n-k} \frac{dx \wedge dy \wedge d\theta}{a^{2k+4n} \operatorname{sen}^2 \theta}$$

reemplazando el valor a^{2k+4n} se llega a la expresión

$$d(P + G) = \frac{k}{n-k} \frac{dP \wedge d\theta}{\operatorname{sen}^{\frac{2n+4k}{k-n}} \theta \cos^{\frac{2(2n+k)}{n-k}} \theta} \tag{120}$$

para la densidad de pares $P + G$, con $P \in G$.

De (120) observamos que esta densidad no existe cuando $n = k$.

Densidad para pares de rectas paralelas. El grupo H_8^3 no es transitivo para pares de rectas paralelas, así que la densidad invariante no está definida para estos conjuntos.

9.9. $H_9^3 = \{p, yp, (2k+1)xp + (k+2)yq\} = \{X_2, X_3, kX_1 + X_4\}$

Es el grupo triangular dado por las transformaciones

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a^k x + by + c}{r} \\ y' = \dfrac{ay}{r} \end{cases}$$

con $a^{k+1} r = 1$, con k = constante.

El grupo H_9^3 es un subgrupo del grupo de 4 parámetros H_1^4 . Se obtiene de H_1^4 si el parámetro h es cero $(h=0)$ y la constante n es uno.

Formas invariantes a la izquierda. Reemplazando en (29) a $h = 0$ y a $n = 1$, ellas son:

$$\omega_1 = \frac{k}{a}\, da$$

$$\omega_2 = \frac{1}{a^k}\left(db - \frac{b}{a}\, da\right)$$

(121) $$\omega_3 = \frac{dc}{a^k} - ca\, dr$$

$$\omega_4 = \frac{da}{a} = \frac{1}{k}\,\omega_1$$

$$\omega_5 = \frac{dr}{r}$$

con $\omega_1 + \omega_4 + \omega_5 = 0$, o $\omega_5 = -\left(1 + \frac{1}{k}\right)\omega_1$

Elemento de volumen invariante a la izquierda:

(122) $$d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = \frac{k}{a^{2k+1}}\, da \wedge db \wedge dc$$

Formas invariantes a la derecha. Se obtienen reemplazando los valores $h = 0$ y $n = 1$ en (31):

$$\omega_1^* = \frac{k}{a}\, da$$

$$\omega_2^* = \frac{1}{a}\left(db - \frac{b}{a}\, k\, da\right)$$

$$\omega_3^* = \frac{dc}{r} - k\, a^k\, c\, da$$

$$\omega_4^* = \frac{da}{a} = \frac{1}{k}\,\omega_1^*$$

$$\omega_5^* = \frac{dr}{r}$$

con $\omega_1^* + \omega_4^* + \omega_5^* = 0$, o $\omega_5^* = -\left(1 + \frac{1}{k}\right)\omega_1^*$, con $k \neq 0$.

Elemento de volumen invariante a la derecha

(123) $$d_R V = \frac{k}{a^{1-k}}\, da \wedge db \wedge dc \qquad k \neq 0$$

De (122) y (123) el grupo H_9^3 no es unimodular para ningún valor de k .

Ecuaciones de estructura. Son los elementos de la ecuación matricial

$$d\Omega = -\Omega \wedge \Omega = -\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & \omega_4 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & \omega_4 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_5 \end{pmatrix}$$

Esto es:

(124)
$$\begin{aligned} d\omega_1 &= 0 \\ d\omega_2 &= -(\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_2 \wedge \omega_4) = -(1 + \tfrac{1}{k})\, \omega_1 \wedge \omega_2 \\ d\omega_3 &= -\omega_1 \wedge \omega_3 - \omega_3 \wedge \omega_5 = -(2 + \tfrac{1}{k})\, \omega_1 \wedge \omega_3 \qquad , \; k \neq 0 \; . \end{aligned}$$

El grupo H_9^3 es unimodular siempre que $\sum_{k=1}^{3} C_{ik}^{k} = 0$ para cada $i = 1,2,3.$

Pero $\sum_{k=1}^{3} C_{1k}^{k} = -\,[\,(1 - \frac{1}{k})+(2 + \frac{1}{k})] = 3 \neq 0$, esto confirma que el grupo H_9^3 no es unimodular para ningún valor de k .

Con el fin de facilitar los cálculos de las densidades,de (121) pode mos escribir:

(125)
$$\begin{aligned} da &= \frac{a}{k}\, \omega_1 \\ db &= a^k\, \omega_2 + \frac{b}{k}\, \omega_1 \\ dc &= a^k\, \omega_3 + c\, \omega_5 = a^k\, \omega_3 - c(1 + \frac{1}{k})\, \omega_1 \\ dr &= r\, \omega_5 = -\, r(1 + \frac{1}{k})\, \omega_1 \end{aligned}$$

Densidad para puntos. El punto $(0,1)$ es transformado por el grupo H_9^3 en el punto $P(b+c/r,\ a/r)$. Las condiciones $d(\frac{b+c}{r}) = 0$, $d(\frac{a}{r}) = 0$ que dejan a P fijo, y (125) definen el sistema:

$$\omega_1 = 0 \qquad\qquad \omega_2 + \omega_3 = 0 \; .$$

De (124) $d(\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3)) = 0$ y por tanto la densidad invariante para puntos siempre existe.

Tomando coordenadas (x,y) para el punto P se obtiene:

$$x = \frac{b+c}{r} \qquad\qquad y = a^{k+2}$$

Diferenciando y multiplicando exteriormente término a término resulta:

$$dx \wedge dy = \frac{a^{2(k+1)}}{r^2} \left(\frac{k+2}{k}\right) \omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3)$$

Luego: $$dP = \frac{k}{k+2} \frac{1}{a^{3(k+1)}} dx \wedge dy$$

Reemplazando $a^{3(k+1)}$ se obtiene la expresión

(126) $$dP = \frac{k}{k+2} \frac{dx \wedge dy}{y^{\frac{3(k+1)}{k+2}}} \qquad\qquad k \neq -2$$

para la densidad invariante de puntos.

De (126) observamos que si $k = -2$ esta densidad no existe.

Densidad para rectas. La recta $x = 0$ es transformada por el grupo H_9^3 en la recta $G : x' = \frac{b}{a} y + \frac{c}{r}$.

Las condiciones para que G permanezca fija y (125) definen el sistema:

$$\omega_2 = 0 \qquad\qquad \omega_3 = 0$$

De (124) se tiene

(127) $$d(\omega_2 \wedge \omega_3) = -3\, \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$$

con lo cual la densidad invariante para rectas no existe para ningún valor de k .

Densidad para rectas paralelas. Las rectas paralelas tienen densidad invariante respecto al grupo H_9^3 , por ser este transitivo respecto a ellas. La densidad coincide con la densidad cinemática del grupo

$$d(G_1 + G_2) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

Por ser H_9^3 un subgrupo del grupo H_1^4 , las densidades para pares de rectas paralelas en ambos grupos coinciden. En este caso $n = 1$ y, por tanto su expresión es:

$$(128) \qquad d(G_1 + G_2) = \frac{k}{2k+1} \, \frac{dG_1 \wedge dp_2}{\delta^{\frac{5k+1}{2k+1}} \cos^{\frac{3(k+1)}{2k+1}} \theta} \qquad \text{(ver Cuadro pág. 38).}$$

Densidad para pares de punto y recta $(P + G)$ *con* $P \in G$. Por ser el grupo H_9^3 transitivo para pares $P + G$ con $P \in G$ existe la densidad invariante para estos conjuntos y está dada por la densidad cinemática del grupo

$$d(P + G) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

Puesto que el par de punto $(0,1)$ y recta $x = 0$ son transformados por el grupo H_9^3 en el par:

$$P\left(\frac{b+c}{r}, \frac{a}{r}\right) \quad y \quad G : \ ' = \frac{b}{a} y + \frac{c}{r}$$

tomando coordenadas (x,y) para el punto P y (p,θ) para la recta G se tiene:

$$x = \frac{b+c}{r} \qquad\qquad y = \frac{a}{r} \qquad\qquad -\tan\theta = \frac{b}{a}$$

Diferenciando y multiplicando exteriormente término a término se obtiene:

$$d(P + G) = \frac{k}{k+2} \cdot \frac{dP \wedge d0}{y^{\frac{2(2k+1)}{k+2}} \cos^2\theta} \qquad \text{para} \quad k \neq -2 .$$

10. *Conclusiones*

El siguiente cuadro resume los resultados obtenidos para los grupos triangulares de tres parámetros.

Nota: El grupo H_7^3 es un caso particular del grupo H_9^3 , por tanto su comportamiento geométrico es el mismo de este último. Esta es la razón por la cual no aparece en el cuadro.

Densidades	$H_1^3 = \{X_2, X_3, X_5\}$ $\{yp, p, q\}$	$H_2^3 = \{X_1, X_4, X_5\}$ $\{2xp + yq, xp + 2yq, q\}$	$H_3^3 = \{X_1, X_2, X_4\}$ $\{2xp + yq, yp, xp + 2yq\}$	$H_5^3 = \{X_3, X_4, X_5\}$ $\{p, xp + 2yq, q\}$
Unimodular	Si	No	No	No
dP	$dx \wedge dy$	No existe	No existe	No existe
dG	$\dfrac{dp \wedge d\theta}{\cos^3 \theta}$	No existe	No existe	$\dfrac{dp \wedge d\theta}{\cos^3 \theta}$
d(P + G) $P \in G$	$\dfrac{dP \wedge d\theta}{\cos^2 \theta}$	$\dfrac{dP \wedge d\theta}{x^2 \cos^2 \theta}$	$\dfrac{dP \wedge d\theta}{(x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta)^2}$	$\dfrac{dP \wedge d\theta}{\cos^4 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta}$
$d(G_1 + G_2)$ $G_1 \parallel G_2$	No transitivo	$\dfrac{dG_1 \wedge dp_2}{\delta^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}$	No transitivo	No transitivo

Densidades	$H_6^3 = \{X_2, X_3, X_4\}$ $\{yp, p, xp + 2yq\}$	$H_8^3 = \{X_3, X_5, kX_1 + nX_4\}$ $\{p, q, (2k+n)xp + (k+2n)yq\}$	$H_9^3 = \{X_2, X_3, kX_1 + X_4\}$ $\{yp, p, (2k+1)xp + (k+2)yq\}$
Unimodular	Si	Sólo si $k = -n$	No
dP	$\dfrac{dx \wedge dy}{y^{3/2}}$	Sólo si $k = -n$ $dx \wedge dy$	$\dfrac{dx \wedge dy}{y^{\frac{3(k+1)}{k+2}}}$
dG	$\dfrac{dp \wedge d\theta}{\cos^3 \theta}$	$\dfrac{dp \wedge d\theta}{\operatorname{sen}^{\frac{3k}{k-n}} \theta \cos^{\frac{3n}{n-k}} \theta}$ $n \neq k \neq 0$	No existe
d(P + G) $P \in G$	$\dfrac{dP \wedge d\theta}{y^2 \cos^2 \theta}$	$\dfrac{dP \wedge d\theta}{\operatorname{sen}^{\frac{2n+4k}{k-n}} \theta \cos^{\frac{2(2n+k)}{n-k}} \theta}$ $n \neq k \neq 0$	$\dfrac{dP \wedge d\theta}{y^{\frac{2(2k+1)}{k+2}} \cos^2 \theta}$ $k \neq -2$
$d(G_1 + G_2)$ $G_1 \parallel G_2$	$\dfrac{dG_1 \wedge dp_2}{\delta \cos^3 \theta}$	No transitivo	$\dfrac{dG_1 \wedge dp_2}{\delta^{\frac{5k+1}{2k+1}} \cos^{\frac{3(k+1)}{2k+1}} \theta}$ $2k + 1 \neq 0$

CUARTA PARTE: Subgrupos de dos parámetros del grupo triangular especial ST(3).

11. *Determinación de los Subgrupos de dos parámetros del grupo triangular* ST(3).

Los subgrupos de dos parámetros del grupo triangular ST(3) están generados por las transformaciones infinitesimales

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5 \\ Y_2 &= b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 + b_5X_5 \end{aligned} \tag{130}$$

siempre que el producto $[Y_i, Y_j]$ para $i,j = 1,2$ sea combinación lineal de los Y_k con $k = 1,2$.

Los X_i con $i = 1,2,3,4,5$ son las transformaciones infinitesimales que generan el grupo ST(3) dadas por (17), con estructura (18).

Considerando todos los casos posibles de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} \tag{131}$$

para las constantes a_i , $i = 1....5$ y b_j , $j = 1....5$ quedan determinados los diferentes subgrupos de dos parámetros de ST(3).

Se presentan los siguientes casos:

1) La matriz (131) tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $Y_1 = X_1$ $Y_2 = X_2$ y

$\{X_1, X_2\} = \{2xp + yq,\ yp\}$ es un subgrupo de ST(3).

2) La matriz (131) tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí $X_1 = Y_1$ $Y_2 = b_2X_2 + X_3$

$\{Y_1, Y_2\}$ forman grupo si $b_2 = 0$

entonces

$\{X_1, X_3\} = \{2xp + yp, p\}$ es un subgrupo de $ST(3)$.

3) La matriz (131) tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = X_1$$
$$Y_2 = b_2X_2 + b_3X_3 + X_4$$

$\{Y_1, Y_2\}$ forman grupo sí sólo si $b_2 = b_3 = 0$.

Resulta $\{X_1, X_4\} = \{2xp + yq, xp + 2yq\}$

4) La matriz (131) tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & 1 \end{pmatrix}$$ entonces

$$Y_1 = X_1$$
$$Y_2 = b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 + X_5$$

$\{Y_1, Y_2\}$ forma grupo si $b_2 = b_3 = b_4 = 0$.

Resulta $\{X_1, X_5\} = \{2xp + yq, q\}$

5) La matriz (131) tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ entonces

$$Y_1 = a_1X_1 + X_2$$
$$Y_2 = b_1X_1 + X_3$$

$\{Y_1, Y_2\}$ forman grupo si sólo si

$$a_1b_1 = 0$$

Se dan tres casos:

i) $a_1 = 0$ resulta el grupo $\{X_2, kX_1 + X_3\}$

Haciendo el cambio de parámetros

$$(132) \quad \begin{cases} \bar{x} = \lambda_1x + \lambda_2y + \lambda_3 \\ \bar{y} = \beta_1y + \beta_2 \end{cases}$$

$\{X_2, kX_1 + X_3\}$ es isomorfo al grupo $\{X_2, X_1\}$ (ya obtenido en 4)).

cuando $\beta_2 = 0$ $\lambda_2 = 0$ $2k = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}$

ii) $b_1 = 0$, resulta el grupo $\{kX_1 + X_2, X_3\}$

Haciendo el cambio de parámetro de (132) este grupo resulta isomorfo al grupo

$$\{X_1, X_3\} = \{2xp + yq, p\}$$

cuando $\beta_2 = 0$ $\lambda_3 = 0$ $k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

iii) Si $a_1 = b_1 = 0$, entonces resulta el grupo

$$\{X_2, X_3\} = \{yp, p\}$$

6) La matriz (131) es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí $Y_1 = a_1X_1 + X_2$

$Y_2 = b_1X_1 + b_3X_3 + X_4$.

$\{Y_1, Y_2\}$ forma grupo si:

i) $a_1 = 0$, caso en el cual resulta el grupo:

$\{X_2, kX_1 + nX_3 + tX_4\}$ con k, n y t constantes.

Haciendo el cambio de parámetros (132) este grupo es isomorfo al grupo

$$\{X_2, kX_1 + nX_4\} = \{yp, (2k+n)xp + (k+2n)yq\}$$

con $\beta_2 = 0$ $\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \frac{n}{2k+1}$ y $\lambda_2 = 0$.

ii) $a_1 = 0$, $b_1 = b_3 = 0$, resulta el grupo

$$\{X_2, X_4\} = \{yp, xp + 2yq\}$$

7) La matriz (131) es de la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_3 & b_4 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquí $\quad Y_1 = a_1X_1 + X_2$

$\quad\quad\quad Y_2 = b_1X_1 + b_3X_3 + b_4X_4 + X_5$

$\{Y_1, Y_2\}$ forma grupo si $b_1 = b_4 = b_3 = 0$

y $a_1 = k$ constante.

Resulta el grupo $\{kX_1 + X_2, X_5\}$

Haciendo el cambio de parámetros (132) este grupo es isomorfo al grupo

$\{X_1, X_5\} = \{2xp + yq, q\}$ ya calculado.

8) La matriz (131) es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & b_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí $\quad Y_1 = a_1X_1 + a_2X_2 + X_3$

$\quad\quad\quad Y_2 = b_1X_1 + b_2X_2 + b_4X_4$

Para que $\{Y_1, Y_2\}$ forme grupo debe ser que:

i) $a_1 = a_2 = 0$

Resulta $\{X_3, kX_1 + nX_2 + tX_4\}$ con k, n, t constantes.

Haciendo el cambio de parámetro (132) este grupo es isomorfo al grupo

$\{X_3, kX_1 + tX_4\} = \{p, (2k+t)xp + (k+2t)yq\}$,

cuando $\beta_3 = 0$ $\quad n/k = -\lambda_2/\lambda_1$, $\beta_2 = 0$ $\quad t = n$

ii) $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 0$, resulta el grupo

$\{X_3, X_4\} = \{p, xp + 2yq\}$.

La transformación triangular, con b y c parámetros del grupo

$$\begin{cases} \bar{x} = x - by + c \\ \bar{y} = y \end{cases}$$

transforma este grupo en el grupo $\{X_2, X_4\}$, luego ellos son isomorfos.

9) La matriz (131) es de la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & b_4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\{Y_1, Y_2\}$ forman grupo si:

i) $b_1 = b_2 = b_4 = 0 \qquad a_2 = 0$

Resulta el grupo

$$\{kX_1 + X_3, X_5\} .$$

Haciendo el cambio de parámetros (132) este grupo es isomorfo al grupo

$$\{X_1, X_5\} \quad \text{(ya obtenido en 7)),}$$

cuando $\beta_2 = 0 \qquad \lambda_2 = 0 \qquad 2k = \lambda_1/\lambda_3$

ii) Cuando $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = b_4 = 0$, resulta el grupo

$$\{X_3, X_5\} = \{p, q\}$$

10) La matriz (131) es de la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resulta $\quad Y_1 = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + X_4$

$\qquad\qquad Y_2 = b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + X_5$

$\{Y_1, Y_2\}$ forman grupo si:

i) $b_1 = b_2 = b_3 = 0 \qquad a_2 = 0$

O sea el grupo $\{kX_1 + nX_3 + X_4, X_5\}$, el cual es isomorfo al grupo

$$\{kX_1 + X_4, X_5\} = \{(2k+1)xp + (k+2)yq, q\}$$

por el cambio de parámetros dado por (132), cuando

$$\beta_2 = 0 \qquad \lambda_2 = 0 \qquad \frac{n}{2k+1} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$$

ii) $a_1 = a_2 = a_3 = 0$
$b_1 = b_2 = b_3 = 0$

Resulta el grupo

$$\{X_4, X_5\} = \{xp + 2yq, q\}$$

11) La matriz (131) es de la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + X_5$$
$$Y_2 = b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4$$

$\{Y_1, Y_2\}$ forman un subgrupo de ST(3) si

$$b_2 = 0 \qquad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

Resulta el grupo $\{kX_1 + nX_3 + tX_4, X_5\}$
Haciendo el cambio de parámetros (132) este grupo es isomorfo al grupo

$$\{kX_1 + nX_4, X_5\} = \{(2k+n)xp + (k+2n)yq, q\}$$

el cual a su vez es isomorfo al grupo obtenido en (8),i).

Con este caso hemos abarcado todas las posibilidades de la matriz inicial (131) para que $\{Y_1, Y_2\}$ formen subgrupo de ST(3).
Podemos enunciar el

<u>Teorema 4</u>. Los subgrupos de dos parámetros del grupo triangular ST(3) generado por las transformaciones infinitesimales $X_1f, X_2f, \ldots, X_5f$ dadas en (17), con estructura (18) son los siguientes, salvo isomorfismos:

$$H_1^2 = \{X_1, X_4\} = \{2xp + yq, xp + 2yq\}$$

$$H_2^2 = \{X_3, X_5\} = \{p, q\}$$

$$H_3^2 = \{X_2, X_3\} = \{yp, p\}$$

$$H_4^2 = \{X_4, X_5\} = \{xp + 2yq, q\}$$

$$H_5^2 = \{X_2, X_4\} = \{yp, xp + 2yq\}$$

$$H_6^2 = \{X_2, kX_1 + nX_4\} = \{yp, (2k+n)xp + (k+2n)yq\}$$

$$H_7^2 = \{X_3, kX_1 + nX_4\} = \{p, (2k+n)xp + (k+2n)yq\}$$

En todos los casos k y n son constantes.

12. *Geometría Integral de los Subgrupos de dos parámetros del grupo triangular* ST(3)

12.1. $H_1^2 = \{2xp + yq, xp + 2yq\} = \{X_1, X_4\}$

Grupo isomorfo al grupo proyectivo dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = A\,x \\ y' = E\,y \end{cases} \qquad \text{con } AE \neq 0 .$$

bajo el isomorfismo dado por el cambio de parámetros

$$a = \frac{A^{2/3}}{E^{1/3}} \qquad\qquad e = \frac{E^{2/3}}{A^{1/3}}$$

Este grupo ya ha sido estudiado por L. A. Santaló en [18]. Tiene densidad invariante para puntos dada por $dP = \dfrac{dx \wedge dy}{xy}$, y densidad para rectas dada por $dG = \dfrac{dp \wedge d\theta}{p \operatorname{sen}\theta \cos\theta}$. Además es un grupo unimodular.

12.2. $H_2^2 = \{p,q\} = \{X_3, X_5\}$

Este es el grupo proyectivo dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = x + c \\ y' = y + h \end{cases}$$

estudiado por L. A. Santaló en [18].

Tiene densidad para puntos $dP = dx \wedge dy$ y no para rectas.

12.3. $H_3^2 = \{p, yp\} = \{X_3, X_2\}$

Es el grupo dado por las transformaciones

$$\begin{cases} x' = x + by + c \\ y' = y \end{cases}$$

Formas invariantes a la izquierda.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -b & -c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & db & dc \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = db \qquad\qquad \omega_2 = dc$$

$$d_L V = db \wedge dc$$

Formas invariantes a la derecha.

$$\Omega^* = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^* & \omega_2^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .0 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1^* = db \qquad\qquad \omega_2^* = dc$$

El grupo es unimodular.

Densidad para puntos.

El grupo H_3^2 no es transitivo para puntos.

Densidad para rectas.

El grupo H_3^2 es transitivo para conjunto de rectas y por ser un subgrupo del grupo H_1^3 la densidad para rectas coincide en ambos grupos. Luego:

$$dG = \frac{d\theta \wedge dp}{\cos^3 \theta} \qquad \text{(ver Cuadro pág. 70).}$$

12.4. $H_4^2 = \{q,\ xp + 2yp\} = \{X_5,\ X_4\}$

Es el grupo dado por las transformaciones

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{r} \\ y' = \dfrac{ey + h}{r} \end{cases}$$

Con $er = 1$.

Formas invariantes a la izquierda. Son los elementos de

$$\Omega = A^{-1}\, dA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/e & -h \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & de & dh \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix}$$

(133) $\qquad \omega_1 = \dfrac{de}{e} \qquad \omega_2 = \dfrac{dh}{e} - h\, dr \qquad \omega_3 = \dfrac{dr}{r}$

Con $\omega_3 + \omega_1 = 0$.

De (133) se obtiene:

(134) $\qquad de = e\omega_1 \quad ; \quad dh = e\omega_2 - h\omega_1 \qquad dr = -r\omega_1$.

Elemento de volumen invariante a la izquierda:

(135) $\qquad d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 = \dfrac{de \wedge dh}{e^2}$

Formas invariantes a la derecha. Son los elementos de la matriz

$$\Omega^* = dA\, A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & de & dh \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/e & -h \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix}$$

$$\omega_1^* = \frac{de}{e} \qquad \omega_2^* = -h\, de + \frac{dh}{r} \qquad \omega_3^* = \frac{dr}{r}$$

Con $\omega_3^* + \omega_1^* = 0$

Elemento de volumen invariante a la derecha:

$$d_R V = \omega_1^* \wedge \omega_2^* = de \wedge dh$$

El grupo H_4^3 no es unimodular.

Densidad para puntos. El grupo H_4^2 es transitivo para puntos, luego la densidad dP existe y coincide con la densidad cinemática $dP = \omega_1 \wedge \omega_2$.

Puesto que el punto $(1,0)$ es transformado por H_4^2 en el punto $P(1/r,\ h/r)$, tomando coordenadas (x,y) para P se obtiene

$$dx \wedge dy = d(\frac{1}{r}) \wedge d(\frac{h}{r}) = (\frac{e}{r^2})\ \omega_1 \wedge \omega_2$$

Luego
$$dP = \frac{dx \wedge dy}{xy}$$

Densidad para rectas. El grupo H_4^2 es transitivo para rectas, luego $dG = \omega_1 \wedge \omega_2$. Por ser un subgrupo del grupo H_5^3 la densidad para rectas coincide con la de este último. Es decir

$$dG = \frac{d\theta \wedge dp}{\cos^3 \theta}$$ (ver Cuadro pág. 70).

12.5. $H_5^2 = \{yp,\ xp + 2yq\} = \{X_2,\ X_4\}$

Es el grupo dado por las transformaciones

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x + by}{r} \\ y' = \dfrac{e}{r}\, y \end{cases}$$

Con $er = 1$.

Formas invariantes a la izquierda.

$$\Omega = A^{-1}\, dA = \begin{pmatrix} 1 & -b/e & 0 \\ 0 & 1/e & 0 \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & db & 0 \\ 0 & de & 0 \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix}$$

(136) $\omega_1 = -\dfrac{b}{e}\, de + db \qquad \omega_2 = \dfrac{de}{e} \qquad \omega_3 = \dfrac{dr}{r}$

Con $\omega_2 + \omega_3 = 0$.

Elemento de volumen invariante a la izquierda:

(137) $d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 = \dfrac{db \wedge de}{e}$

Formas invariantes a la derecha.

$$\Omega^* = dA\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & db & 0 \\ 0 & de & 0 \\ 0 & 0 & dr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b/e & 0 \\ 0 & 1/e & 0 \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix}$$

$$\omega_1^* = \frac{db}{e} \qquad \omega_2^* = \frac{de}{e} \qquad \omega_3^* = \frac{dr}{r}$$

Con $\omega_2^* + \omega_3^* = 0$.

Elemento de volumen invariante a la derecha.

(138) $$d_R V = \omega_1^* \wedge \omega_2^* = \frac{db \wedge de}{e^2}$$

El grupo H_5^2 no es unimodular.

De (136) podemos escribir:

(139) $$de = e\omega_2 \quad , \quad dr = -r\omega_2 \qquad db = \omega_1 + b\omega_2$$

Densidad para puntos. El grupo H_5^2 es transitivo para puntos, luego $dP = \omega_1 \wedge \omega_2$.

La densidad para puntos está dada por la calculada para el grupo H_6^3 , del cual es subgrupo H_5^2 .

Luego

(140) $$dP = \frac{dx \wedge dy}{2\,y^{3/2}}$$ (ver Cuadro pág. 70).

Densidad para rectas. El grupo H_5^2 es transitivo para rectas. Luego $dG = \omega_1 \wedge \omega_2$. Por ser H_5^2 un subgrupo del grupo H_6^3 la densidad para rectas está dada por la expresión

(141) $$dG = \frac{d\theta \wedge dp}{\cos^3 \theta}$$ (ver Cuadro pág. 70).

12.6. $H_6^2 = \{X_2,\ kX_1 + nX_4\} = \{yp,\ (2k+n)xp + (k+2n)yq\}$

Este grupo es un subgrupo del grupo H_1^4 cuando los parámetros c y h son nulos (ver (28)).

Es el grupo dado por las transformaciones:

$$(144) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{a^k x + y}{r} \\ y' = \dfrac{a^n y}{r} \end{cases}$$

Con $a^{k+n} r = 1$, n y k constantes.

Formas invariantes a la izquierda. Estas las podemos obtener de (29) al reemplazar $c = h = 0$. Resultan:

$$(145) \qquad \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{k}{a}\, da \\ \omega_2 &= \frac{1}{a^k}\,(db - \frac{bn}{a}\, da) \\ \omega_3 &= \frac{n}{a}\, da = \frac{n}{k}\,\omega_1 \\ \omega_4 &= \frac{dr}{r} \end{aligned}$$

Con $\omega_1 + \omega_3 + \omega_4 = 0$. O sea, $\omega_4 = -(1 + \frac{n}{k})\omega_1$ y $k \neq 0$.

Elemento de volumen invariante a la izquierda: Está dado por el producto exterior

$$(146) \qquad d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 = \frac{k}{a^{k+1}}\, da \wedge db$$

Formas invariantes a la derecha. Reemplazando en el grupo H_1^4 , en (31) a $c = h = 0$, resulta:

$$(147) \qquad \begin{aligned} \omega_1^* &= \frac{k}{a}\, da \\ \omega_2^* &= \frac{1}{a^n}\,(db - \frac{kb}{a}\, da) \\ \omega_3^* &= \frac{n}{a}\, da = \frac{n}{k}\,\omega_1^* \\ \omega_4^* &= \frac{dr}{r} = -(1 + \frac{n}{k})\omega_1^* \end{aligned}$$

Elemento de volumen invariante a la derecha:

$$(148) \qquad d_R V = \omega_1^* \wedge \omega_2^* = \frac{k}{a^{n+1}}\, da \wedge db$$

De (146) y (148) observamos que el grupo H_6^2 es unimodular si $k = n$.

Ecuaciones de estructura. Son los elementos de la ecuación matricial:

$$d\Omega = -\Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} d\omega_1 & d\omega_2 & 0 \\ 0 & \alpha d\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta d\omega_1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } \alpha \text{ y } \beta \text{ constantes,}$$

de donde:

$$(149) \qquad \begin{aligned} d\omega_1 &= 0 \\ d\omega_2 &= -(1 - \frac{n}{k})\, \omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

Las constantes de estructura están dadas por

$$C_{12}^2 = -(1 - \frac{n}{k})$$

lo que confirma que el grupo H_6^2 es unimodular si $k = n$.
Por (145) se tiene

$$(150) \qquad \begin{aligned} da &= \frac{a}{k}\, \omega_1 \\ db &= a^k\, \omega_2 + \frac{n}{k}\, b\omega_1 \qquad\qquad k \neq 0 . \end{aligned}$$

Con estas ecuaciones facilitamos el cálculo de densidades.

Densidad para puntos. El conjunto H_6^2 es transitivo para puntos, así que su densidad es $dP = \omega_1 \wedge \omega_2$.
Para dar una interpretación geométrica observemos que el punto (0,1) es transformado por el grupo en el punto $P(b/r,\ a^n/r)$.
Llamando (x,y) las coordenadas de P obtenemos

$$x = b\, a^{k+n} \qquad\qquad y = a^{k+2n}$$

y $$dx \wedge dy = a^{3(k+n)}\, \frac{(k+2n)}{k}\, \omega_1 \wedge \omega_2 \qquad\qquad k \neq 0 .$$

Luego:

$$(151) \qquad dP = \frac{k}{(k+2n)} \; \frac{dx \wedge dy}{y^{\frac{3(k+n)}{2n+k}}}$$

Por tanto, si $k = -2n$ la densidad invariante para puntos no existe.

Densidad para rectas. El grupo H_6^2 es transitivo para rectas. Su densidad está dada por la densidad cinemática $dG = \omega_1 \wedge \omega_2$. Para dar una interpretación geométrica de esta densidad observemos que la recta $x = 1$ es transformada por el grupo, en la recta

$$G : x' = \frac{b}{a^n} y' + a^{2k+n}$$

Tomando coordenadas normales (p,θ) para la recta obtenemos:

$$- \tan\theta = \frac{b}{a^n} \qquad \frac{p}{\cos\theta} = a^{2k+n}$$

Luego $$\frac{d\theta \wedge dp}{\cos^3\theta} = a^{3k} \frac{(2k+n)}{k} \omega_1 \wedge \omega_2$$

de donde

$$(152) \qquad dG = \frac{k}{2k+n} \frac{d\theta \wedge dp}{p^{\frac{3k}{2k+n}} \cos^{\frac{3(k+n)}{2k+n}} \theta}$$

De (152) observamos que si $2k = -n$ la densidad invariante para rectas no existe respecto al grupo H_6^2.

12.7. $H_7^2 = \{X_3, kX_1 + nX_4\} = \{p, (2k+n)xp + (k+2n)yq\}$

Este grupo es un subgrupo del grupo H_1^4, cuando los parámetros $b = h = 0$.

Es el grupo dado por las transformaciones:

$$(153) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{a^k x + c}{r} \\ y' = \dfrac{a^n}{r} y \end{cases}$$

Con $a^{k+n} r = 1$, k y n constantes.

Formas invariantes a la izquierda. Están dadas por (29) cuando $b = 0$, $h = 0$. Resultan:

$$(154) \qquad \omega_1 = \frac{k}{a} da$$

$$\omega_2 = \frac{dc}{a^k} - c\, a^n\, dr$$

(154) $$\omega_3 = \frac{n}{a}\, da = \frac{n}{k}\, \omega_1$$

$$\omega_4 = \frac{dr}{r} = -(1 + \frac{n}{k})\, \omega_1 \qquad k \neq 0 .$$

Elemento de volumen invariante a la izquierda

(155) $$d_L V = \omega_1 \wedge \omega_2 = \frac{k}{a^{k+1}}\, da \wedge dc .$$

Formas invariantes a la derecha. Estan dadas por (31) cuando los parámetros $b = 0$, $h = 0$.

$$\omega_1^* = \frac{k}{a}\, da$$

$$\omega_2^* = k\, a^{k+n-1}\, c\, da + a^{n+k}\, dc$$

(156)

$$\omega_3^* = \frac{n}{a}\, da = \frac{n}{k}\, \omega_1^*$$

$$\omega_4^* = \frac{dr}{r} = -(1 + \frac{n}{k})\, \omega_1^*$$

Elementos de volumen invariante a la derecha:

(157) $$d_R V = \omega_1^* \wedge \omega_2^* = \frac{k}{a^{1-(n+k)}}\, da \wedge dc$$

De (155) y (157) el grupo H_7^2 es unimodular, sí sólo si, $2k = -n$.

Ecuaciones de estructura. Son los elementos de la ecuación matricial

$$\Omega = -\Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} d\omega_1 & 0 & d\omega_2 \\ 0 & \gamma d\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda d\omega_1 \end{pmatrix} \quad \text{con } \gamma \text{ y } \lambda \text{ constantes.}$$

Resulta

(158) $$\begin{aligned} d\omega_1 &= 0 \\ d\omega_2 &= -\left(\frac{2k+n}{n}\right) \omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

con constantes de estructura $C_{12}^{2} = -\frac{2k+n}{k}$, de donde confirmamos que el grupo es unimodular cuando $2k = -n$.

De (154) podemos escribir

$$da = \frac{a}{k}\,\omega_1 \qquad\qquad dc = a^k\,\omega_2 - c(1+\frac{n}{k})\,\omega_1$$

Densidad para puntos. El grupo H_7^2 es transitivo para puntos, su densidad coincide con la densidad cinemática $dP = \omega_1 \wedge \omega_2$.

El punto $(0,1)$ es transformado en el punto $P(c/r,\ a^n/r)$, tomando coordenadas (x,y) para el punto P se tiene

$$x = c\ a^{n+k} \qquad\qquad y = a^{2n+k}$$

Luego $\quad dx \wedge dy = \frac{2n+k}{k}\ a^{3(n+k)}\ \omega_1 \wedge \omega_2$, de donde

$$dP = \frac{k}{2n+k}\ \frac{dx \wedge dy}{y^{\frac{3(n+k)}{2n+k}}} \tag{159}$$

De (159) la densidad para puntos no existe en el caso $2n = -k$.

Densidad para rectas. El grupo H_7^2 es transitivo para conjuntos de rectas, luego la densidad para rectas está dada por $dG = \omega_1 \wedge \omega_2$. Por ser el grupo H_7^2 subgrupo de H_8^3 su densidad para rectas coincide con la dada para este último. Esto es:

$$dG = \frac{k}{k-n}\ \frac{d\theta \wedge dp}{\operatorname{sen}^{\frac{3k}{k-n}}\theta\ \cos^{\frac{3n}{n-k}}\theta} \tag{160}$$

(ver Cuadro pág. 70).

Por (160) el grupo H_7^2 no tiene densidad invariante para rectas cuando $k = n$.

13. *Conclusiones*

El cuadro que sigue resume el estudio realizado de los grupos triangulares de dos parámetros.

Densidades	H_1^2 $\{X_1, X_4\}$ $\{2xp+yq,\ xp+2yq\}$	H_2^2 $\{X_3, X_5\}$ $\{p,\ q\}$	H_3^2 $\{X_2, X_3\}$ $\{yp,\ p\}$	H_4^2 $\{X_4, X_5\}$ $\{xp+2yq,\ q\}$
Unimodular	Si	Si	Si	No
dP	$\frac{dx \wedge dy}{xy}$	$dx \wedge dy$	No existe	$\frac{dx \wedge dy}{xy}$
dG	$\frac{dp \wedge d\theta}{p \operatorname{sen}\theta \cos\theta}$	No existe	$\frac{dp \wedge d\theta}{\cos^3\theta}$	$\frac{dp \wedge d\theta}{\cos^3\theta}$

Densidades	H_5^2 $\{X_2, X_4\}$ $\{yp,\ xp+2yq\}$	H_6^2 $\{X_2,\ kX_1+nX_4\}$ $\{yp,\ (2k+n)xp+(k+2n)yq\}$	H_7^2 $\{X_3,\ kX_1+nX_4\}$ $\{p,\ (2k+n)xp+(k+2n)yq\}$
Unimodular	No	Sólo si $k = n$	Sólo si $2k+n=0$
dP	$\frac{dx \wedge dy}{y^{3/2}}$	$\frac{dx \wedge dy}{y^{\frac{3(k+n)}{2n+k}}}$ $k+2n \neq 0$	$\frac{dx \wedge dy}{y^{\frac{3(k+n)}{2n+k}}}$ $k \neq 0$ $2n+k \neq 0$
dG	$\frac{d\theta \wedge dp}{\cos^3\theta}$	$\frac{dp \wedge d\theta}{p^{\frac{3k}{2k+n}} \cos^{\frac{3(k+n)}{2k+n}}\theta}$ $2k+n \neq 0$	$\frac{dp \wedge d\theta}{\operatorname{sen}^{\frac{3k}{k-n}}\theta \cos^{\frac{3n}{n-k}}\theta}$ $k \neq 0$ $k-n \neq 0$

CAPITULO DOS

EL GRUPO TRIANGULAR ESPECIAL ST(3) *COMO GRUPO DE TRANSFORMACIONES EN EL ESPACIO*

> *"Tomar posesión del espacio es el primer gesto de los seres vivientes, de los hombres y de los animales, de las plantas y de las nubes, manifestación fundamental de equilibrio y de duración. La primera prueba de existencia es ocupar el espacio".*
>
> *Le Corbusier*
> *"Las grandes corrientes del Pensamiento Matemático"*

1. *Estructura del grupo* ST(3) *en el espacio.*

El grupo triangular especial ST(3) de las matrices (13) del Capítulo Uno con determinante uno, opera en el espacio mediante las transformaciones:

$$(169)\qquad \begin{cases} x' = ax + by + cz \\ y' = ey + hz \\ z' = rz \end{cases}$$

con $x, y, z, (x', y', z')$ coordenadas no homogéneas y $aer = 1$ (*).

Transformaciones Infinitesimales. Definiendo en (169) las funciones ϕ_i , $i = 1,2,3$, así: $\phi_1(x, y, a, b, c, e, h, r) = x'$; $\phi_2(x, y, a, b, c, e, h, r) = y'$; $\phi_3(x, y, a, b, c, e, h, r) = z'$; y tomando la identidad del grupo I, es decir $a = e = 1$, $b = h = 0$, $r = (ae)^{-1}$, las transformaciones infinitesimales del grupo (169) resultan:

$$(170)\qquad \begin{aligned} X_1 f &= \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial a}\right)_I p + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial a}\right)_I q + \left(\frac{\partial\phi_3}{\partial a}\right)_I s = 2xp + yq \\ X_2 f &= \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial b}\right)_I p + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial b}\right)_I q + \left(\frac{\partial\phi_3}{\partial b}\right)_I s = yp \end{aligned}$$

(*) Greco, Angela en [7] halla todos los subgrupos de 5 parámetros del grupo de transformaciones (169), con determinante diferente de cero.

$$X_3f = (\frac{\partial\phi_1}{\partial c})_I\ p + (\frac{\partial\phi_2}{\partial c})_I\ q + (\frac{\partial\phi_3}{\partial c})_I\ s = zp$$

$$(170)\qquad X_4f = (\frac{\partial\phi_1}{\partial e})_I\ p + (\frac{\partial\phi_2}{\partial e})_I\ q + (\frac{\partial\phi_3}{\partial e})_I\ s = xp + 2yq$$

$$X_5f = (\frac{\partial\phi_1}{\partial h})_I\ p + (\frac{\partial\phi_2}{\partial h})_I\ q + (\frac{\partial\phi_3}{\partial h})_I\ s = zq$$

donde $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ $\quad q = \frac{\partial f}{\partial y}$; $s = \frac{\partial f}{\partial z}$

Las transformaciones infinitesimales X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 son linealmente independientes y satisfacen las ecuaciones de Lie:

$$(171)\qquad \begin{array}{lll} [X_1, X_2] = - X_2 & ; [X_1, X_3] = -2\, X_3 & ; [X_1, X_4] = 0 \\ [X_2, X_3] = 0 & ; [X_1, X_5] = - X_5 & ; [X_2, X_4] = - X_2 \\ [X_2, X_5] = - X_3 & ; [X_3, X_4] = X_3 & ; [X_3, X_5] = 0 \\ [X_4, X_5] = - 2\, X_5\ . & & \end{array}$$

Luego, el grupo ST(3) operando sobre el espacio, está definido por las transformaciones infinitesimales

$$\{xp + 2yq,\ yp,\ yq + 2xp,\ zq,\ zp\}$$

con estructura (171).

2. *Geometría Integral del grupo* ST(3) *en el espacio.*

El grupo de transformaciones (169) tiene como matriz la matriz triangular H considerada en (13) del Capítulo Uno. Luego, los elementos de la Geometría Integral para el grupo (169) coinciden con los elementos ya hallados para la matriz H .

Esto es: las formas de Maurer-Cartan del grupo (169) están dadas por las 1-formas (21) del Capítulo Uno. Las ecuaciones de estructura del grupo (169) son las ecuaciones dadas en (25).

Las densidades invariantes para subespacios y sumas de subespacios pueden estudiarse con los datos ya obtenidos en el Capítulo Uno, teniendo presente las transformaciones (169).

3. *Densidades*

3.1. *Densidad para Puntos.* Con el fin de determinar si el grupo (169) admite una densidad invariante para puntos observamos que el punto (0,0,1) es transformado en el punto $P(c, h, r)$. Este punto permanece fijo si $dc = 0$, $dh = 0$, $dr = 0$, ecuaciones que por (21) del Capítulo Uno determinan el sistema:

$$\omega_3 = 0 \quad , \quad \omega_5 = 0 \quad , \quad \omega_1 + \omega_4 = 0 \, ;$$

Llamando $\Omega = \omega_3 \wedge \omega_5 \wedge (\omega_1 + \omega_4)$ y utilizando las ecuaciones de estructura (25) obtenemos $d\Omega = 0$, luego la densidad invariante para puntos existe y está dada por el producto exterior:

$$dP = \omega_3 \wedge \omega_5 \wedge (\omega_1 + \omega_4)$$

Para dar una interpretación geométrica de esta densidad suponemos que P tiene coordenadas (x, y, z). Esto es: $dx = dc$, $dy = dh$, $dz = dr$, de donde:

$$dP = dx \wedge dy \wedge dz \tag{172}$$

es la densidad invariante para puntos.

3.2. *Densidad para Rectas.* El grupo (169) es transitivo para rectas. A la recta de ecuaciones $x = z - 1 = y$, la transforma en la recta G de ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = \left(\dfrac{a+b+c}{r}\right) z' - (a+b) \\ y' = \left(\dfrac{e+h}{r}\right) z' - e \end{cases} \tag{173}$$

G permanece fija si:

$$d\left(\frac{a+b+c}{r}\right) = 0 \qquad d(a+b) = 0 \qquad d\left(\frac{e+h}{r}\right) = 0 \qquad de = 0 \, .$$

Estas ecuaciones y las relaciones (21) definen el sistema:

$$\omega_4 = 0 \ , \ \omega_1 + \omega_3 = 0 \ , \ \omega_1 + \omega_5 = 0 \ , \ \omega_1 + \omega_2 = 0 \, .$$

Llamando $\Omega = \omega_4 \wedge (\omega_1 + \omega_3) \wedge (\omega_1 + \omega_5) \wedge (\omega_1 + \omega_2)$ y utilizando las ecuaciones (25) resulta

$$d\Omega = - \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \wedge \omega_5 \neq 0 \ ,$$

luego la densidad invariante para rectas no existe.

3.3. *Densidad para pares de Punto y Recta, con* $P \in G$.

El grupo de transformaciones (169) es transitivo para pares $P + G$ (punto más recta) con $P \in G$. Puesto que el grupo (169) depende de 5 parámetros y el subespacio $P + G$, con $P \in G$ también depende de 5 parámetros, la densidad para estos subespacios es la densidad cinemática del grupo. Es decir

$$(174) \qquad d(P + G) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \wedge \omega_5 = \frac{da \wedge db \wedge dc \wedge de \wedge dh}{(ae)^3}$$

Con el fin de dar una interpretación geométrica de esta densidad, observamos que el punto $(0,0,1)$ y la recta de ecuaciones $x = z - 1 = y$ son transformados por el grupo (169) en el par $P + G$ con $P(c, h, r)$, y G de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = \left(\dfrac{a + b + c}{r}\right) z' - (a + b) \\ y' = \left(\dfrac{e + h}{r}\right) z' - e \end{cases}$$

(ver los numerales 3.1. y 3.2.).

Tomando coordenadas (x, y, z) para el punto P y expresando a G en la forma:

$$\begin{cases} x = \cos\phi \tan\theta \ z + p \\ y = \operatorname{sen}\phi \tan\theta \ z + q \end{cases}$$

con θ el ángulo entre la recta G y el eje z , ϕ el ángulo formado por la proyección de G sobre el plano xy , con el eje x , (p, q) las coordenadas de la intersección de la recta G con el plano $x y$, obtenemos las siguientes relaciones:

$$y = h \qquad z = r = \frac{1}{ae}$$

$$(175) \qquad \cos\phi \tan\theta = \frac{a + b + c}{r} = ae(a + b + c)$$

$$\operatorname{sen}\phi \tan\theta = \frac{e + h}{r} = ae(e + h)$$

$$(175) \qquad \begin{aligned} p &= -(a+b) \\ q &= -e . \end{aligned}$$

Diferenciando término a término en (175) y multiplicando exteriormente se obtiene:

$$\frac{dx \wedge dy \wedge dz \wedge d\phi \wedge d\theta}{[\tan \theta \sec^2 \theta]^{-1}} = e(dc \wedge dh \wedge de \wedge da \wedge db)$$

Comparando con (174) y reemplazando a e por $e = z \operatorname{sen} \phi \tan \theta - y$ resulta:

$$d(P+G) = \frac{z^3 \tan \theta \sec^2 \theta \, dx \wedge dy \wedge dz \wedge d\phi \wedge d\theta}{(z \operatorname{sen} \phi \tan \theta - y)}$$

Tomando $dP = dx \wedge dy \wedge dz$ y simplificando se puede escribir

$$(176) \qquad d(P+G) = \frac{z^3 \operatorname{sen} \theta \, dP \wedge d\phi \wedge d\theta}{\cos^2 \theta (z \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta - y \cos \theta)}$$

que es la densidad para pares $P+G$ con $P \in G$.

3.4. *Densidad para Planos.* El grupo (169) es transitivo para planos; al plano de ecuación $x+y+z = 1$ lo transforma en el plano E de ecuación

$$(177) \qquad \frac{x'}{a} + \left(\frac{a-b}{ae}\right) y' + (bh - ce - ha + ae) z' = 1$$

Este plano permanece fijo si

$$d\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \qquad d\left(\frac{a-b}{ae}\right) = 0 \qquad d(bh - ce - ha + ae) = 0$$

Estas ecuaciones y las relaciones dadas en (21) definen el sistema:

$$\omega_1 = 0 \qquad \omega_2 + \omega_4 = 0 \qquad \omega_3 + \omega_5 - \omega_4 = 0$$

La densidad invariante para planos existe si la diferencial del producto exterior

$$\Omega = \omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_4) \wedge (\omega_3 + \omega_5 - \omega_4)$$

es nula.

Utilizando las ecuaciones de estructura (25) se obtiene $d\Omega = 0$, luego la densidad existe y está dada por

$$dE = \omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_4) \wedge (\omega_3 + \omega_5 - \omega_4)$$

Expresando el plano E por la ecuación:

(178) $E : \cos\phi \operatorname{sen}\theta\, x + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\, y + \cos\theta\, z = p$

y comparándolo con la ecuación (177) resultan las igualdades

(179)
$$\frac{1}{a} = \frac{\cos\phi \operatorname{sen}\theta}{p}$$
$$\frac{a-b}{ae} = \frac{\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta}{p}$$
$$hb - ce - ha + ae = \frac{\cos\theta}{p}$$

Diferenciando (179) término a término y multiplicando exteriormente se obtiene:

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_4) \wedge (\omega_5 + \omega_3 - \omega_4) = \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta \wedge d\phi \wedge dp}{p^4}$$

Luego

$$dE = \frac{\operatorname{sen}\theta\ d\theta \wedge d\phi \wedge dp}{p^4}$$

Siendo $d\sigma = |\operatorname{sen}\theta|\ d\theta \wedge d\phi$ el elemento de área de la esfera unidad correspondiente al extremo del vector unitario perpendicular a E se obtiene

(180) $$dE = \frac{d\sigma \wedge dp}{p^4}$$

3.5. *Densidad para pares de punto y plano, con* $P \in E$. Por la misma razón del numeral (3.3.) la densidad para pares $P + E$ con $P \in E$ coincide con la densidad cinemática del grupo (169).

Para dar una interpretación geométrica de esta densidad tomamos el punto (0,0,1) y el plano de ecuación $x + y + z = 1$. Este par de subespacios son transformados por el grupo (169) en el punto P(c, h, r) y el plano $E : \frac{1}{a} x + (\frac{a-b}{ae}) y + (hb - ce - ha + ae) z = 1$.

Comparando a P en coordenadas (x, y, z) y a E con la ecuación (178) se obtienen las igualdades:

$$c = x \qquad h = y \qquad r = z$$

(181)
$$\frac{1}{a} = \frac{\cos\phi\cos\theta}{p} \qquad \frac{a-b}{ae} = \frac{\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta}{p}$$

$$(b-a)\,h + (a-c)\,e = \frac{\cos\theta}{p}$$

Diferenciando término a término en (181) y multiplicando exteriormente se obtiene:

$$\frac{da\wedge db\wedge dc\wedge dh\wedge de}{a^4\,e^3} = \frac{\operatorname{sen}\theta\,(x\cos\phi + z)\,d\theta\wedge d\phi\wedge dx\wedge dy\wedge dz}{[\cos\theta\,(x\cos\phi + z) + y\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta]^3}$$

Comparando con (174) y reemplazando a $dP = dx\wedge dy\wedge dz$ se puede escribir:

$$d(P+E) = \frac{p\operatorname{sen}\theta\,(x\cos\phi + z)\,d\theta\wedge d\phi\wedge dP}{\cos\phi\cos\theta[\cos\theta\,(x\cos\phi + z) + y\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta]^3}$$

De (181) podemos expresar p en la forma

$$p = \cos\theta\,(x\cos\phi + z) + y\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$$

Luego

(182)
$$d(P+E) = \frac{\operatorname{sen}\theta\,(x\cos\phi + z)\;d\theta\wedge d\phi\wedge dP}{\cos\phi\cos\theta[\cos\theta\,(x\cos\phi + z) + y\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta]^2}$$

Llamando $d\sigma = |\operatorname{sen}\theta|\;d\theta\wedge d\phi$ el elemento de área de la esfera unidad en el extremo del vector unitario perpendicular a E, podemos escribir

(183)
$$d(P+E) = \frac{(x\cos\phi + z)\;d\sigma\wedge dP}{\cos\phi\cos\theta[\cos\theta\,(x\cos\phi + z) + y\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta]^2}$$

para la densidad invariante de pares de punto y plano $P+E$, con $P\in E$, respecto al grupo (169).

3.6. *Densidad para pares de recta y plano, con* $G\subset E$. El grupo de transformaciones (169) no es transitivo para pares de recta y plano, con $G\subset E$, luego la densidad invariante para estos conjuntos no está definida.

4. *Conclusión*

Hemos probado:

Teorema 5. El grupo triangular definido por las transformaciones infinitesimales $\{xp + 2yq, yp, xp + 2yq, zq, zp\}$ admite una medida invariante para conjunto de puntos y para conjunto de planos. La densidad invariante para estos conjuntos están dadas por las expresiones (172) y (180) respectivamente.

Teorema 6. Los subespacios formados por pares de elementos: punto más recta con $P \in G$ y punto más plano, con $P \in E$, admiten una densidad invariante respecto del grupo $ST(3)$ en el espacio, con expresión geométrica dada por (176) y (183) respectivamente.

Teorema 7. El conjunto de rectas en el espacio no tiene una medida invariante respecto del grupo $ST(3)$.

CAPITULO TRES

GRUPO TRIANGULAR ESPECIAL ST(n + 1) *COMO GRUPO DE TRANSFORMACIONES EN EL ESPACIO PROYECTIVO* P_n

"Todas las intuiciones son cuantidades extensivas".

E. Kant
"Crítica de la razón pura"

1. *Preliminares*

El grupo triangular $ST(n+1)$ con $n>1$ es el grupo de las matrices triangulares $(n+1)\times(n+1)$ de determinante uno, tales que $ST(n+1) = ((a_{ij}))$ con $a_{ij} = 0$ para $0\leq j<i\leq n$ (ver [13], pág. 64).

Cuando el grupo triangular $ST(n+1)$ opera sobre el espacio proyectivo P_n puede ser representado por el sistema de ecuaciones

$$(184) \qquad x'_k = \sum_{i=k}^{n} a_{ki}\, x_i \qquad\qquad k = 0,1,\ldots$$

con $|a_{ki}| = 1$, siendo $x_0, x_1 \ldots x_n$ $(x'_0,\ldots x'_n)$ las coordenadas homogéneas en P_n.

Las ecuaciones (184) dan lugar a la representación matricial

$$X' = AX$$

donde A es la matriz triangular $((a_{ij}))$, con $a_{ij} = 0$ para $0\leq j<i\leq n$, $a_{ii}>0$, $i = 0,\ldots,n$, X' y X son matrices columnas cuyos elementos son las coordenadas homogéneas $x'_0 \ldots x'_n$ y $x_0 \ldots x_n$ respectivamente.

Esto significa que podemos considerar el grupo (184) como el grupo de transformaciones determinado por los $n+1$ puntos analíticos:

$$(185) \qquad \begin{aligned} A_0 &= (a_{00} \quad 0 \ . \ . \ . \ 0) \\ A_1 &= (a_{01} \quad a_{11} \quad 0 \ . \ . \ . \ 0) \\ A_2 &= (a_{02} \quad a_{12} \quad a_{22} \quad 0 \ . \ . \ . \ 0) \\ &\ \vdots \\ A_n &= (a_{0n} \quad a_{1n} \quad a_{2n} \ . \ . \ . \ . \ . \ a_{nn}) \end{aligned}$$

con (186) $\det(A_0\, A_1 \ldots A_n) = \det A = 1$.

Así considerado, el grupo (184) depende de $\frac{n(n+3)}{2}$ parámetros independientes.

2. *Geometría Integral de* ST(n + 1).

Formas de Maurer–Cartan. Son los elementos (1-formas) linealmente independientes de la matriz

$$(187) \qquad \Omega = A^{-1}\, dA$$

siendo A la matriz determinada por los puntos analíticos (185) y dA la diferencial de ésta.

Si ω_{ij} son las 1-formas de Maurer-Cartan, ellas (por (186) y (187)) satisfacen la relación

$$(188) \qquad d\,A_j = \sum_{k=0}^{j} A_k\, \omega_{kj} \qquad \begin{array}{l} k = 0,\ldots,n \\ k \leq j \end{array}$$

con

$$(189) \qquad \sum_{i=0}^{n} \omega_{ii} = 0$$

Diferenciando (188) y utilizando (188) y (189) obtenemos las ecuaciones

$$(190) \qquad d\,\omega_{ij} = \sum_{k=i}^{j} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \qquad \begin{array}{l} i,j = 0,\ldots,n \\ i < k \end{array}$$

llamadas las ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan del grupo (184).

El grupo (184) no es unimodular (ver [13] pág. 64), luego, para las constantes de estructura se tiene

$$\sum_{k=0}^{n} C_{ik}^{k} \neq 0 \qquad \text{(ver [19] pág. 178).}$$

Con estos elementos dados, procedemos al estudio de densidades invariantes, de subespacios del espacio proyectivo P_n , respecto del grupo (184).

3. *Densidades*

3.1. *Densidad para subespacios lineales* S . Sea S un subespacio lineal del espacio proyectivo P_n , de dimensión h , $h < n$. Suponemos

S está determinado por los puntos analíticos: A_n, A_{n-1}, $A_{n-2}, \ldots,$ A_{n-h} .

S permanece fijo si sólo si las diferenciales dA_i para $i = n,$ $n-1, \ldots, n-h$, son combinaciones lineales de los puntos A_i para $i = n, n-1, \ldots, n-h$. Dada la relación (188) esto quiere decir que S determina el sistema:

$$\omega_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad \begin{cases} i = 0,1,\ldots,n-(h+1) \\ j = n, n-1, \ldots, n-h \end{cases}$$

Llamando:

$$\Omega_0 = \bigwedge_{i=0}^{n-(h+1)} \omega_{in} \qquad \Omega_1 = \bigwedge_{i=0}^{n-(h-1)} \omega_{i\ n-1}, \ldots$$

$$\Omega_h = \bigwedge_{i=0}^{n-(h+1)} \omega_{i\ n-h} \qquad y \qquad \Omega = \Omega_0 \wedge \Omega_1 \wedge \ldots \wedge \Omega_h$$

se tiene que la $(h+1)(n-h)$-forma Ω es la densidad invariante para S, si sólo si, $d\Omega = 0$.

De la relación (190) se tiene para cada $j = 0,\ldots,h$

$$\text{(191)} \qquad d\,\Omega_j = \Omega_j \wedge \sum_{i=0}^{n-(h+1)} (\omega_{ii} - \omega_{n-j\ n-j})$$

Usando (191) la diferencial de Ω resulta:

$$d\Omega = (-1)^h\, \Omega \wedge \Big[\sum_{i=0}^{n-(h+1)} (\omega_{ii} - \omega_{nn}) + \ldots + (\omega_{ii} - \omega_{n-h\ n-h}) \Big]$$

Usando (189) y simplificando podemos escribir:

$$\text{(192)} \qquad d\Omega = (-1)^{h+1}(n+1)\, \Omega \wedge \sum_{n-h}^{n} \omega_{ii} \,.$$

Esta diferencial es cero sólo si $n - h = 0$ (ver (189)), es decir cuando S tiene dimensión n . Luego , podemos decir , el conjunto de subespacios lineales de dimensión $h < n$ no tiene densidad invariante respecto del grupo $ST(n+1)$.

3.2. *Densidad para pares de h-plano* S *y punto* P *, con* $P \notin S$, $h = 0,$ $1,2,\ldots,n-1$.

Tomamos el h-plano S generado por los puntos analíticos: A_n, A_{n-1}, $\ldots$, A_{n-h} (ver 3.1.) y el punto determinado por la suma $A_n + A_{n-(h+1)}$.

De (3.1.) sabemos que S determina el sistema:

$$\omega_{ij} = 0 \quad \text{para} \begin{cases} i = 0,1,\ldots,n-(h+1) \\ j = n,\ n-1,\ldots,\ n-h \end{cases}$$

y por (188) P determina el sistema:

$$\begin{cases} \omega_{i\ n-(h+1)} = 0 & \text{para} \quad i = 0,\ldots,n-(h+2) \\ \omega_{kn} = 0 & \text{para} \quad k = n-h,\ \ldots,n-1 \\ \omega_{nn} - \omega_{n-(h+1)\ n-(h+1)} = 0 & \end{cases}$$

Llamando

$$\Omega_1 = \bigwedge_{\substack{i=0 \\ j=n,n-1,..n-h}}^{n-(h+1)} \omega_{ij} \qquad \Omega_2 = \bigwedge_{i=0}^{n-(h+2)} \omega_{i\ n-(h+1)}$$

$$\Omega_3 = \bigwedge_{i=n-h}^{n-1} \omega_{in} \qquad \Omega_4 = (\omega_{nn} - \omega_{n-(h+1)\ n-(h+1)})$$

De (192) se tiene

$$d\Omega_1 = (-1)^{h+1}(n+1)\ \Omega_1 \wedge \sum_{i=n-h}^{n} \omega_{ii}$$

De (188) se obtiene:

$$d\Omega_2 = \Omega_2 \wedge \sum_{i=0}^{n-(h+2)} (\omega_{ii} - \omega_{n-(h+1)\ n-(h+1)})$$

$$d\Omega_3 = \Omega_3 \wedge [\sum_{i=n-h}^{n-1} \omega_{ii} - h\ \omega_{nn}]$$

$$d\Omega_4 = 0\ .$$

Llamando Ω el producto exterior:

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \Omega_3 \wedge \Omega_4$$

este será la densidad para $S+P$, con $P \notin S$, si sólo si $d\,\Omega = 0$.

Diferenciando Ω se llega a la expresión:

$$d\Omega = -(n+1)\ \Omega \wedge \sum_{i=n-(h+1)}^{n} \omega_{ii} \tag{193}$$

Puesto que las ω_{ij} están relacionadas únicamente por la ecuación

(189), esta diferencial es cero sólo en el caso $n-(h+1) = 0$, esto es, cuando $h = n-1$. Hemos probado: La suma de subespacio lineal más punto, con $P \notin S$, admite una densidad invariante respecto al grupo $ST(n+1)$ sólo si el subespacio es un hiperplano.

3.3. *Densidad para pares de h-plano* S *y punto* P *, con* $P \in S$, $h = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Sea S el h-plano determinado por los puntos $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_{n-h}$ y P el punto analítico A_n.

Por el numeral (3.1.) sabemos que S así definido determina el sistema:

$$\omega_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad \begin{cases} i = 0, \ldots, n-(h+1) \\ j = n, \ldots, n-h \end{cases}$$

Por el mismo numeral (3.1.) ($h = 0$) P define el sistema:

$$\omega_{in} = 0 \quad \text{para} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

Luego, el par $S+P$ con $P \in S$ define el sistema:

$$\begin{cases} \omega_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad \begin{cases} i = 0, \ldots, n-(h+1) \\ j = n, n-1, \ldots, n-h \end{cases} \\ \omega_{in} = 0 \quad \text{para} \quad i = n-h, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Llamando

$$\Omega_1 = \bigwedge_{\substack{i=0 \\ j=n,n-1\ldots n-h}}^{n-(h+1)} \omega_{ij} \qquad \Omega_2 = \bigwedge_{i=n-h}^{n-1} \omega_{in}$$

y $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2$, el conjunto $S+P$ con $P \in S$ tiene densidad invariante respecto al grupo (184) $ST(n+1)$, si sólo si, $d\Omega = 0$.

Diferenciando Ω_1, Ω_2 y Ω encontramos:

De (192)

$$d\Omega_1 = (-1)^{h+1}(n+1)\, \Omega_1 \wedge \sum_{i=n-h}^{n} \omega_{ii}$$

De (188)

$$d\Omega_2 = -\, \Omega_2 \wedge \left[\sum_{i=0}^{n-(h+1)} \omega_{ii} + (h+1)\, \omega_{nn} \right]$$

Luego

$$(194) \qquad d\Omega = \Omega \wedge [(n+2) \sum_{i=n-h}^{n} \omega_{ii} + (h+1)\, \omega_{nn}]$$

producto exterior que es diferente de cero para todo $h < n$. Luego el conjunto $S + P$ con $P \in S$ no tiene densidad invariante respecto del grupo triangular $ST(n+1)$.

3.4. *Densidad para suma de Subespacios Lineales sin puntos comunes.*

El grupo $ST(n+1)$ no es transitivo para suma de subespacios sin puntos comunes $S_1 + S_2 + \ldots + S_m$ de dimensión $h_1 + h_2 + \ldots + h_m < n$ con h_i dimensión de S_i y $h_i \neq 0$. Por tanto la densidad para estos subespacios no está definida.

4. *Conclusiones.*

Hemos probado:

Teorema 8. Los subespacios lineales no admiten una medida invariante respecto del grupo $ST(n+1)$ en el espacio proyectivo.

Teorema 9. Los subespacios compuestos de h-plano S y punto P , con $P \notin S$ admiten una medida invariante respecto al grupo $ST(n+1)$, sólo si S es un hiperplano.

Teorema 10. La suma de h-plano S y punto P , con $P \in S$ no tiene densidad invariante respecto del grupo $ST(n+1)$.

CAPITULO CUATRO

DETERMINACION DE LA MEDIBILIDAD DE ALGUNAS FAMILIAS DE SUBESPACIOS DEL ESPACIO PROYECTIVO P_3 *, RESPECTO DEL GRUPO PROYECTIVO*

"Permaneciendo, pues, el infinito y el todo móvil, inalterable, incorruptible, en él pueden existir y existen movimientos y alteraciones innumerables e infinitas, perfectos y completos".

Giordano Bruno
"Sobre el infinito universo y los mundos"

1. *Introducción*

La Geometría Integral en el espacio proyectivo P_n ha sido estudiada por L. A. Santaló en [14] y [19], por M. Stoka en [20] y [23], I. Maniscalco y A. Potolano en [11]. Ellos determinan la medibilidad de algunas familias de subespacios del espacio proyectivo P_3 .
En este trabajo se estudia la medibilidad de otras familias del espacio proyectivo P_3 , no contempladas en los artículos mencionados.
L. A. Santaló en [14] demuestra dos teoremas importantes sobre la medibilidad de subespacios respecto del grupo proyectivo, ellos son:

Teorema 1 . Los subespacios lineales no tienen densidad invariante respecto del grupo proyectivo.

Teorema 2 . Dado el conjunto de m subespacios lineales sin puntos comunes, $S_{h_1}, S_{h_2} \dots S_{h_m}$, de dimensiones $h_1, h_2, \dots, h_m$ respectivamente, con $h_1 + h_2 + h_3 \dots + h_m + m < n + 1$, en el espacio proyectivo P_n , una condición necesaria y suficiente para que la familia $S_{h_1} + S_{h_2} + \dots + S_{h_m}$ tenga una densidad invariante respecto del grupo proyectivo es que $h_1 + h_2 + \dots + h_m + m = n + 1$.

Por el Teorema 1 los siguientes subespacios del espacio proyectivo P_3 no son medibles.

1.1) Conjunto de Puntos (P)

1.2) Conjunto de Planos (E)

1.3) Conjunto de Rectas (G)

Por el Teorema 2 <u>no</u> son medibles los siguientes subespacios del espacio proyectivo P_3

1.4) Punto + Recta $(P + G)$, $P \notin G$

1.5) Punto + Punto $(P_1 + P_2)$

1.6) Punto + Punto + Punto $(P_1 + P_2 + P_3)$

Mientras que por el Teorema 2 <u>son medibles</u> los siguientes subespacios sin puntos comunes de P_3

2.1) Plano + Punto $(E + P)$

2.2) Recta + Recta $(G_1 + G_2)$

2.3) Punto + Punto + Recta $(P_1 + P_2 + G)$

2.4) Punto + Punto + Punto + Punto $(P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$

Mariscalco y Potolano prueban en [11] que los siguientes subespacios que no se pertenecen de P_3 <u>son medibles</u>

2.5) Plano + Plano + Recta $(E_1 + E_2 + G)$

2.6) Plano + Plano + Recta + Recta $(E_1 + E_2 + G_1 + G_2)$

2.7) Recta + Recta + Recta $(G_1 + G_2 + G_3)$

M. Stoka prueba en [22] que las siguientes familias en P_3 <u>no</u> admiten medida invariante

1.7 Pares de rectas concurrentes $(G_1 + G_2)$ con $G_1 \cap G_2 \neq 0$.

1.8 Triples de rectas concurrentes $(G_1 + G_2 + G_3)$ con $G_1 \cap G_2 \cap G_3 \neq 0$.

1.9 Recta más plano $(G + E)$.

Aquí se estudiará la medibilidad de algunos subespacios con y sin puntos comunes respecto del grupo proyectivo, clasificados según el número de parámetros del cual dependen.

A continuación resumimos la teoría necesaria para nuestro propósito.

2. *Preliminares*

Sea P_3 el espacio proyectivo 3-dimensional de coordenadas homogéneas x_i . El grupo proyectivo G_{15} está dado por las ecuaciones:

$$(195) \qquad (x_k)' = \sum_{i=0}^{3} a_i^k \, x_i \qquad \text{con } k = 0,1,2,3$$

con la condición

$$(196) \qquad |a_i^k| = 1 \; .$$

El determinante $|a_i^k|$ lo podemos expresar en la forma $|a_0\, a_1\, a_2\, a_3|$ donde cada a_i , $i = 0,1,2,3$ es un punto analítico de coordenadas $a_i^o, a_i^1, a_i^2, a_i^3$.

Esto significa que cada transformación proyectiva de G_{15} está determinada por 4 puntos analíticos a_0, a_1, a_2, a_3 que cumplen $|a_0\, a_1\, a_2\, a_3| = 1$.

Las componentes relativas del grupo proyectivo G_{15} están dadas por las ecuaciones

$$(197) \qquad d\, a_i = \sum_{k=0}^{3} \omega_{ik}\, a_k \qquad \text{con } i = 0,1,2,3$$

(ver Cartan [1]), con la condición $\sum_{i=0}^{3} \omega_{ii} = 0$ obtenida al diferenciar el determinante (196).

Las ecuaciones de estructura del grupo G_{15} se obtienen derivando exteriormente las ecuaciones (197). Resulta:

$$(198) \qquad d\, \omega_{ij} = \sum_{k=0}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \qquad i,j = 0,1,2,3$$

Si H es un subespacio del espacio proyectivo P_3 , el cual determina el sistema:

$$(199) \qquad \omega_{i_1 j_1} = 0 \;,\; \omega_{i_2 j_2} = 0, \ldots, \omega_{i_n j_n} = 0 \;,\; i_k, j_k = 0, \ldots 3$$

L. A. Santaló prueba en [14] que $\Omega = \omega_{i_1 j_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_n j_n}$ es la densidad de H respecto del grupo proyectivo, si sólo si, $d\Omega = 0$.

Si H tiene densidad invariante decimos que H es medible, su medida está dada por $\int_H d\Omega$

Utilizamos para la determinación de las familias a estudiar los puntos analíticos a_0, a_1, a_2, a_3 antes mencionados.

3. *Familias de Subespacios que no se pertenecen*

3.1. *Familias dependientes de seis parámetros*

3.1.1. Plano más plano $E_1 + E_2$:

Tomamos el plano E_1 generado por los puntos a_0, a_1, a_2 y E_2 el plano generado por los puntos a_0, a_2, a_3 .

Por (197) para que E_1 permanezca fijo se debe tener que $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{31} = 0$.

Por (197) para que E_2 permanezca fijo se debe tener que $\omega_{01} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{31} = 0$.

Luego $\Omega = \omega_{03}\,\omega_{13}\,\omega_{31}\,\omega_{01}\,\omega_{21}\,\omega_{31}$ (*) es la densidad de $E_1 + E_2$, si sólo si $d\Omega = 0$.

Por (198)

$$d\Omega = 2(\omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{22}) \wedge \Omega$$

Puesto que $\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = 0$ resulta

$$d\Omega = -4(\omega_{00} + \omega_{33}) \wedge \Omega$$

de donde $d\Omega \neq 0$, y por lo tanto la densidad invariante para el subespacio $E_1 + E_2$ no existe respecto del grupo proyectivo. Es decir, el subespacio $E_1 + E_2$ no tiene medida invariante respecto de ese grupo.

3.2. *Familias de Subespacios dependientes de nueve parámetros.*

3.2.1. $E_1 + E_2 + P$

Tomando: (**) $E_1 : a_0\, a_1\, a_2$

$E_2 : a_0\, a_2\, a_3$

$P : a_1 + a_3$

(*) Aquí hemos suprimido el símbolo del producto exterior ($\wedge$) para facilitar la escritura, entendiendo que se trata de productos de 1-formas. Se continuará en este capítulo con esta notación.

(**) En lo que sigue esta notación significa espacio E_1 generado por los puntos analíticos a_0, a_1, a_2; espacio E_2 generado por los puntos a_0, a_2, a_3; punto P generado por el punto $a_0 + a_3$.

E_1 permanece fijo si (ver (197))

$$\omega_{03} = 0\,, \omega_{13} = 0\,, \omega_{23} = 0$$

E_2 permanece fijo si (por (197))

$$\omega_{01} = 0\,, \omega_{21} = 0\,, \omega_{31} = 0$$

P permanece fijo si (por (197))

$$\omega_{10} + \omega_{30} = 0\,, \quad \omega_{12} + \omega_{32} = 0\,, \quad \omega_{33} - \omega_{11} = 0$$

Llamamos $\Omega_1 = dE_1 = \omega_{03}\,\omega_{13}\,\omega_{23}$ y Ω_2 la densidad para $P+E_2$,
$\Omega_2 = d(E_2 + P) = \omega_{01}\,\omega_{21}\,\omega_{31}(\omega_{10}+\omega_{30})(\omega_{12}+\omega_{32})(\omega_{33}-\omega_{11})$
Por ser el espacio $P+E_2$ medible (ver (2.1)) se tiene:

$$d\Omega_2 = 0$$

Si $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(E_1 + E_2 + P)$ entonces

$d\Omega = 0$, si sólo si, $d\Omega_1 \wedge \Omega_2 - \Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$, esto es

$d\Omega = 0$, si sólo si, $d\Omega_1 \wedge \Omega_2 = 0$.

Veamos, de (198)

$$\begin{aligned} d\Omega &= d(\omega_{03} \wedge \omega_{13} \wedge \omega_{23}) \wedge \Omega_2 = \\ &= (\omega_{00} - 3\omega_{33} + \omega_{11} + \omega_{22}) \wedge \Omega_1 \wedge \Omega_2 \\ &= -\,4\omega_{33} \wedge \Omega_1 \wedge \Omega_2 = -\,4\omega_{33} \wedge \Omega \end{aligned}$$

Luego $d\Omega \neq 0$ y por tanto el subespacio $E_1 + E_2 + P$ no tiene medida invariante respecto del grupo proyectivo.

3.2.2. $P_1 + P_2 + E$

Tomando: $E : a_0\, a_1\, a_2$

$P_1 : a_3$

$P_2 : a_2 + a_3$

Por (197): E permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0\,, \quad \omega_{13} = 0\,, \quad \omega_{23} = 0$$

P_1 permanece fijo si

$$\omega_{30} = 0 \ , \ \omega_{31} = 0 \ , \ \omega_{32} = 0$$

P_2 permanece fijo si

$$\omega_{20} = 0 \ , \ \omega_{21} = 0 \ , \ \omega_{33} - \omega_{22} = 0 \ .$$

Llamando $\Omega_1 = d(P_2 + E) = \omega_{20}\,\omega_{21}(\omega_{33} - \omega_{22})\,\omega_{03}\,\omega_{13}\,\omega_{23}$

y $\Omega_2 = dP_1 = \omega_{30}\,\omega_{31}\,\omega_{32}$

Entonces si $\Omega = d(P_1 + P_2 + E) = \Omega_2 \wedge \Omega_1$,

$d\Omega = 0$, si solo si

$$d\Omega_2 \wedge \Omega_1 - \Omega_2 \wedge d\Omega_1 = 0$$

Por (2.1) $\quad d\Omega_1 = 0$

Luego, la densidad $d(P_1 + P_2 + E)$ existe si sólo si,

$$d\Omega_2 \wedge \Omega_1 = 0 \ .$$

Pero de (198)

$$d\Omega_2 \wedge \Omega_1 = d(\omega_{30}\,\omega_{31}\,\omega_{32}) \wedge [(\omega_{20}\,\omega_{21}\,\omega_{03}\,\omega_{13}\,\omega_{23}(\omega_{33} - \omega_{22}))]$$

$$= -(\omega_{00} + \omega_{11})\,\omega_{30}\,\omega_{31}\,\omega_{32} \wedge \Omega_1 \neq 0 \ .$$

Luego $d(P_1 + P_2 + E)$ no existe, y el subespacio $P_1 + P_2 + E$ no es medible.

3.2.3. $E_1 + E_2 + E_3$

Tomando: $\quad E_1 : a_0\,a_1\,a_2$

$E_2 : a_0\,a_2\,a_3$

$E_3 : a_0\,a_1\,a_2$

De (197) el subespacio $E_1 + E_2 + E_3$ permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0 \ , \ \omega_{12} = 0 \ , \ \omega_{32} = 0 \ , \ \omega_{01} = 0 \ , \ \omega_{21} = 0 \ , \ \omega_{31} = 0 \ ,$$

$$\omega_{03} = 0 \ , \ \omega_{13} = 0 \ , \ \omega_{23} = 0 \ .$$

Llamando $\Omega = \omega_{02}\,\omega_{12}\,\omega_{32}\,\omega_{01}\,\omega_{21}\,\omega_{31}\,\omega_{03}\,\omega_{13}\,\omega_{23}$ la densidad invariante para $E_1 + E_2 + E_3$ existe si sólo si $d\Omega = 0$.

Pero de (198)

$$d\Omega = (3\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}) \wedge \Omega$$
$$= 4\omega_{00} \wedge \Omega \neq 0 .$$

Luego, el subespacio $E_1 + E_2 + E_3$ no es medible respecto del grupo proyectivo.

3.3. *Familias dependientes de diez parámetros.*

3.3.1. $P + E + G$

Tomando $E : a_0\ a_1\ a_2$

$G : a_2\ a_3$

$P : a_0 + a_3$

De (197): E permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0 \ , \ \omega_{13} = 0 \ , \ \omega_{23} = 0$$

G permanece fijo si

$$\omega_{20} = 0 \ , \ \omega_{21} = 0 \ , \ \omega_{30} = 0 \ , \ \omega_{31} = 0$$

P permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0 \ , \ \omega_{02} + \omega_{32} = 0 \ , \ \omega_{33} - \omega_{00} = 0$$

Llamando $\Omega_2 = dG = \omega_{20}\ \omega_{21}\ \omega_{30}\ \omega_{31}$

y $\Omega_1 = d(P + E) = \omega_{01}(\omega_{02} + \omega_{32})(\omega_{33} - \omega_{00})\ \omega_{03}\ \omega_{13}\ \omega_{23}$

Por (2.1) $d\Omega_1 = 0$ y puesto que

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(P + E + G)$$

la densidad $d(P + E + G)$ existe si sólo si $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$.

Pero

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge [-2\omega_{11}\ \omega_{20}\ \omega_{21}\ \omega_{30}\ \omega_{31} + 2\omega_{22}\ \omega_{20}\ \omega_{21}\ \omega_{30}\ \omega_{31}]$$
$$= -2\Omega_1 \wedge (\omega_{11} - \omega_{22}) \wedge \Omega_{22} \neq 0 .$$

Luego la densidad $d(P + E + G)$ no existe.

3.4. *Familias dependientes de once parámetros.*

3.4.1. $G_1 + G_2 + P$

Tomando: $G_1 : a_0\ a_3$

$G_2 : a_1\ a_2$

$P : a_1 + a_3$

De (197): G_1 permanece fija si

$$\omega_{01} = 0 \ , \quad \omega_{02} = 0 \ , \quad \omega_{31} = 0 \ , \quad \omega_{32} = 0$$

G_2 permanece fija si

$$\omega_{10} = 0 \ , \quad \omega_{13} = 0 \ , \quad \omega_{20} = 0 \ , \quad \omega_{23} = 0$$

P permanece fijo si

$$\omega_{30} = 0 \ , \quad \omega_{12} = 0 \ , \quad \omega_{33} - \omega_{11} = 0 \ .$$

Llamando

$$\Omega_1 = d(G_1 + G_2) = \omega_{01}\ \omega_{02}\ \omega_{31}\ \omega_{32}\ \omega_{10}\ \omega_{13}\ \omega_{20}\ \omega_{23}$$

Por (2.2) $d\Omega_1 = 0$ ($G_1 + G_2$ admite un medida invariante)

llamando, $\Omega_2 = dP = \omega_{30}\ \omega_{12}(\omega_{33} - \omega_{11})$

resulta

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(G_1 + G_2 + P) \ , \quad \text{luego}$$

la densidad $d(G_1 + G_2 + P)$ existe, si sólo si,

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0 \ .$$

Pero

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge [2\omega_{11}\ \omega_{33} - (\omega_{00} + \omega_{22})(\omega_{33} - \omega_{11})]\omega_{30}\ \omega_{12}$$
$$= \Omega_1 \wedge (2\omega_{11}\omega_{33}) + (\omega_{00} + \omega_{22}) \wedge \Omega \neq 0 \ .$$

Por tanto la densidad para $G_1 + G_2 + P$ no existe.

3.4.2. $G_1 + G_2 + E$

Tomando: $G_1 : a_0\ a_3$

$G_2 : a_2 + a_3,\ a_1 + a_3$

$E : a_0\ a_1\ a_2$

De (197): G_1 permanece fija si

$$\omega_{01} = 0 \,, \quad \omega_{02} = 0 \quad , \quad \omega_{31} = 0 \quad , \quad \omega_{32} = 0$$

G_2 permanece fija si

$$\omega_{10} + \omega_{30} = 0 \,, \quad \omega_{33} - \omega_{11} - \omega_{12} = 0 \,,$$

$$\omega_{20} + \omega_{30} = 0 \,, \quad \omega_{33} - \omega_{21} - \omega_{22} = 0$$

E permanece fija si

$$\omega_{03} = 0 \quad , \quad \omega_{13} = 0 \quad , \quad \omega_{23} = 0 \,.$$

Llamando

$$\Omega_1 = d(G_1 + G_2) = \omega_{01}\, \omega_{02}\, \omega_{31}\, \omega_{32}(\omega_{10} + \omega_{30})\, (\omega_{33} - \omega_{11} - \omega_{12})$$
$$(\omega_{20} + \omega_{30})\, (\omega_{33} - \omega_{21} - \omega_{22})$$

y $\Omega_2 = dE = \omega_{03}\, \omega_{13}\, \omega_{23}$, entonces

$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(G_1 + G_2 + E)$ es una densidad, si sólo si

$$d\Omega = d\Omega_1 \wedge \Omega_2 - \Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0 \,.$$

Por (2.2) $d\Omega_1 = 0$, luego Ω es una densidad, si sólo si

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0 \,.$$

Pero

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge (-3\omega_{33} + \omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22})\, \omega_{03}\, \omega_{13}\, \omega_{23} =$$
$$= 2\Omega_1 \wedge \omega_{33} \wedge \Omega_2 = 2\omega_{33} \wedge \Omega \neq 0 \,.$$

Luego, la densidad $d(G_1 + G_2 + E)$ no existe.

3.5. *Familias de subespacios dependientes de doce parámetros.*

3.5.1. $E_1 + E_2 + E_3 + E_4$

Tomando: $E_1 : a_0, a_1, a_2$
$E_2 : a_1\, a_2\, a_3$
$E_3 : a_0\, a_2\, a_3$
$E_4 : a_0\, a_1\, a_3$

De (197): E_1 permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0 \ , \ \omega_{13} = 0 \ , \ \omega_{23} = 0$$

E_2 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0 \ , \ \omega_{20} = 0 \ , \ \omega_{30} = 0$$

E_3 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0 \ , \ \omega_{21} = 0 \ , \ \omega_{31} = 0$$

E_4 permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0 \ , \ \omega_{12} = 0 \ , \ \omega_{32} = 0$$

$\Omega = \omega_{03}\, \omega_{13}\, \omega_{23}\, \omega_{10}\, \omega_{20}\, \omega_{30}\, \omega_{01}\, \omega_{21}\, \omega_{31}\, \omega_{02}\, \omega_{12}\, \omega_{32}$

es la densidad de $E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, si sólo si, $d\Omega = 0$.
Veamos, de (198)

$$d\Omega = 0$$

luego la densidad $d(E_1 + E_2 + E_3 + E_4)$ existe, está dada por
$\Omega = \omega_{03}\, \omega_{13}\, \omega_{23}\, \omega_{10}\, \omega_{20}\, \omega_{30}\, \omega_{01}\, \omega_{21}\, \omega_{31}\, \omega_{02}\, \omega_{12}\, \omega_{32}$.
El espacio dual $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ también tiene densidad invariante respecto del grupo proyectivo (ver [10]).

3.5.2. $E_1 + E_2 + E_3 + P$

Tomando: $E_1 : a_0\, a_1\, a_2$
$E_2 : a_0\, a_1\, a_3$
$E_3 : a_0\, a_2\, a_3$
$P : a_1 + a_2 + a_3$

De (197):

E_1 permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0 \ , \ \omega_{13} = 0 \ , \ \omega_{23} = 0$$

E_2 permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0 \ , \ \omega_{12} = 0 \ , \ \omega_{32} = 0$$

E_3 permanece fijo si

$\omega_{01} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{31} = 0$

P permanece fijo si

$\omega_{10} + \omega_{20} + \omega_{30} = 0$, $\omega_{22} - \omega_{11} = 0$, $\omega_{33} - \omega_{11} = 0$.

Luego $\Omega = \omega_{03}\, \omega_{13}\, \omega_{23}\, \omega_{02}\, \omega_{12}\, \omega_{32}\, \omega_{01}\, \omega_{21}\, \omega_{31}(\omega_{10} + \omega_{20} + \omega_{30})$
$(\omega_{22} - \omega_{11})(\omega_{33} - \omega_{11})$ es la densidad de

$P + E_1 + E_2 + E_3$ si sólo si $d\Omega = 0$.

Llamando $\Omega_1 = d(P + E_1) = \omega_{03}\, \omega_{13}\, \omega_{23}\, (\omega_{10} + \omega_{20} + \omega_{30})\, (\omega_{22} - \omega_{11})$
$(\omega_{33} - \omega_{11})$

y $\Omega_2 = \omega_{02}\, \omega_{12}\, \omega_{32}\, \omega_{01}\, \omega_{21}\, \omega_{31}$

por (2.1) $d\Omega_1 = 0$ y si $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2$

$$d\Omega = d\Omega_1 \wedge \Omega_2 - \Omega_1 \wedge d\Omega_2 = - \Omega_1 \wedge d\Omega_2$$

Luego, $d\Omega = 0$, si sólo si $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$.
Pero de (198) $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 2\Omega \wedge (\omega_{00} + \omega_{33}) \neq 0$, por tanto la densidad $d(P + E_1 + E_2 + E_3)$ no existe.

3.5.3. $P_1 + P_2 + P_3 + E$

Tomando: $E : a_o\, a_1\, a_2$
$P_1 : a_3$
$P_2 : a_o + a_3$
$P_3 : a_1 + a_3$

Por (197)

E permanece fijo si

$\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

P_1 permanece fijo si

$\omega_{30} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$

P_2 permanece fijo si

$\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{33} - \omega_{00} = 0$

P_3 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0 \quad , \quad \omega_{12} = 0 \quad , \quad \omega_{33} - \omega_{11} = 0 \; .$$

Luego, $E + P_1 + P_2 + P_3$ permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0 \quad , \quad \omega_{13} = 0 \quad , \quad \omega_{23} = 0 \quad , \quad \omega_{30} = 0 \quad , \quad \omega_{31} = 0$$

$$\omega_{32} = 0 \quad , \quad \omega_{01} = 0 \quad , \quad \omega_{02} = 0 \quad , \quad \omega_{33} - \omega_{00} = 0 \quad , \quad \omega_{10} = 0$$

$$\omega_{12} = 0 \quad , \quad \omega_{33} - \omega_{11} = 0 \; .$$

Llamando $\Omega_1 = d(P_3 + E) = \omega_{10}\,\omega_{12}(\omega_{33} - \omega_{11})\,\omega_{03}\,\omega_{13}\,\omega_{23}$

y $\Omega_2 = \omega_{30}\,\omega_{31}\,\omega_{01}\,\omega_{02}(\omega_{33} - \omega_{00})\,\omega_{32} = d(P_1 + P_2)$

$$\Omega = d(P_1 + P_2 + P_3 + E) = \Omega_2 \wedge \Omega_1 \; .$$

Puesto que por (2.1) $d\Omega_1 = 0$ entonces

$\Omega = \Omega_2 \wedge \Omega_1$ es una densidad si sólo si

$$d\Omega_2 \wedge \Omega_1 = 0 \; .$$

De (198)

$$d\Omega_2 \wedge \Omega_1 = [\,2(\omega_{33} - \omega_{11}) + (\omega_{33} - \omega_{00}) + 2(\omega_{00} - \omega_{22})\,] \wedge \Omega_2 \wedge \Omega_1$$

$$= 2(\omega_{00} - \omega_{22}) \wedge \Omega \neq 0 \; .$$

Luego, $P_1 + P_2 + P_3 + E$ no tiene densidad invariante.

3.6. *Familia de Subespacios dependientes de trece parámetros.*

3.6.1. $P_1 + P_2 + P_3 + G$

Tomando P_1: a_0

P_2: a_1

P_3: $a_0 + a_1 + a_2$

G : $a_2\, a_3$

De (197)

P_1 permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0 \quad , \quad \omega_{02} = 0 \quad , \quad \omega_{03} = 0$$

P_2 permanece fijo si:

$\omega_{10} = 0 \quad , \quad \omega_{12} = 0 \quad , \quad \omega_{13} = 0$

P_3 permanece fijo si

$\omega_{23} = 0 \quad , \quad (\omega_{11} - \omega_{00}) = 0 \quad , \quad (\omega_{22} - \omega_{00}) = 0$

G permanece fija si

$\omega_{20} = 0 \quad , \quad \omega_{21} = 0 \quad , \quad \omega_{30} = 0 \quad , \quad \omega_{31} = 0$

Llamando $\Omega_1 = dP_1 = \omega_{01}\, \omega_{02}\, \omega_{03}$

$$y \quad \Omega_2 = d(P_2 + P_3 + G) = \omega_{10}\, \omega_{12}\, \omega_{13}\, \omega_{23}(\omega_{11} - \omega_{00})$$
$$(\omega_{22} - \omega_{00})\, \omega_{20}\, \omega_{21}\, \omega_{30}\, \omega_{31}$$

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(P_1 + P_2 + P_3 + G)$$

Por (2.3) $d\Omega_2 = 0$, luego Ω es una densidad si sólo si

$$d\Omega_1 \wedge \Omega_2 = 0 .$$

De (198)

$$d\Omega_1 \wedge \Omega_2 = [-(\omega_{11} - \omega_{00})-(\omega_{22} - \omega_{U0})-(\omega_{33} - \omega_{00})]$$
$$\omega_{01}\, \omega_{02}\, \omega_{03} \wedge \Omega_2$$
$$= (\omega_{33} - \omega_{00}) \wedge \Omega \neq 0$$

y $P_1 + P_2 + P_3 + G$ no tiene densidad invariante.

3.6.2. $E_1 + E_2 + E_3 + G$

Tomando: $E_1 : a_0\, a_1\, a_2$
$E_2 : a_0\, a_1\, a_3$
$E_3 : a_1\, a_2\, a_3$
$G \;\; : a_o + a_3,\; a_2 + a_3$

De (197):

E_1 permanece fijo si

$\omega_{03} = 0 \quad , \quad \omega_{13} = 0 \quad , \quad \omega_{23} = 0$

E_2 permanece fijo si

$\omega_{02} = 0 \quad , \quad \omega_{12} = 0 \quad , \quad \omega_{32} = 0$

E_3 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0 \ , \ \omega_{20} = 0 \ , \ \omega_{30} = 0$$

G permanece fija si

$$\omega_{01} + \omega_{31} = 0 \ , \ \omega_{33} - \omega_{22} = 0 \ , \ \omega_{21} + \omega_{31} = 0 \ ,$$

$$\omega_{33} - \omega_{00} = 0 \ .$$

Llamando $\Omega_1 = d\, E_1 = \omega_{03}\, \omega_{13}\, \omega_{23}$

$$\Omega_2 = d(E_2 + E_3 + G) = \omega_{02}\, \omega_{12}\, \omega_{32}\, \omega_{10}\, \omega_{20}\, \omega_{30}(\omega_{01} + \omega_{31})(\omega_{33} - \omega_{22})(\omega_{21} + \omega_{31})(\omega_{33} - \omega_{00})$$

por (2.5) $d\Omega_2 = 0$

y $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(E_1 + E_2 + E_3 + G)$ es una densidad si sólo si

$$d\Omega_1 \wedge \Omega_2 = 0 \ .$$

De (198)

$$d\Omega_1 \wedge \Omega_2 = [\omega_{00} - 3\omega_{33} + \omega_{11} + \omega_{22}] \wedge \Omega_1 \wedge \Omega_2$$
$$= -4\omega_{33} \wedge \Omega \neq 0 \ .$$

Luego, la densidad $d(E_1 + E_2 + E_3 + G)$ no existe.

3.6.3. $P_1 + P_2 + G + E$

Tomando: P_1: $a_o + a_3$

P_2: $a_2 + a_3$

G : $a_1\, a_3$

E : $a_o\, a_1\, a_2$

De (197):

P_1 permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0 \ , \ (\omega_{01} + \omega_{31}) = 0 \ , \ (\omega_{33} - \omega_{00}) = 0$$

P_2 permanece fijo si

$$\omega_{20} = 0 \ , \ (\omega_{21} + \omega_{31}) = 0 \ , \ (\omega_{33} - \omega_{22}) = 0$$

G permanece fija si

$$\omega_{10} = 0 \;,\; \omega_{12} = 0 \;,\; \omega_{30} = 0 \;,\; \omega_{32} = 0$$

E permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0 \;,\; \omega_{13} = 0 \;,\; \omega_{23} = 0$$

Llamando $\Omega_2 = d(P_1 + P_2 + G) = \omega_{02}(\omega_{01} + \omega_{31})(\omega_{33} - \omega_{00})\,\omega_{20}$
$(\omega_{21} + \omega_{31})(\omega_{33} - \omega_{22})$

$$\Omega_1 = d(E) = \omega_{03}\,\omega_{13}\,\omega_{23}$$

por (2.3) , $d\Omega_2 = 0$ y por tanto

$\Omega = \Omega_2 \wedge \Omega_1 = d(P_1 + P_2 + G + E)$ es una densidad si

sólo si $\Omega_2 \wedge d\Omega_1 = 0$

Comparando con el caso anterior

$$\Omega_2 \wedge d\Omega_1 \neq 0$$

y por tanto la densidad invariante para $P_1 + P_2 + G + E$ no existe.

3.6.4. $E_1 + E_2 + G + P$

Llamando E_1: $a_o\, a_1\, a_2$
E_2: $a_o\, a_2\, a_3$
G : $a_1\, a_3$
P : $a_1 + a_2 + a_3$

De (197):

E_1 permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0 \;,\; \omega_{13} = 0 \;,\; \omega_{23} = 0$$

E_2 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0 \;,\; \omega_{21} = 0 \;,\; \omega_{31} = 0$$

G permanece fija si

$$\omega_{10} = 0 \;,\; \omega_{12} = 0 \;,\; \omega_{30} = 0 \;,\; \omega_{32} = 0$$

P permanece fijo si

$$(\omega_{22} - \omega_{11}) = 0 \;,\; (\omega_{33} - \omega_{11}) = 0 \;,\; \omega_{20} = 0$$

Llamando $\Omega_1 = d(E_1 + E_2 + G) = \omega_{03}\, \omega_{13}\, \omega_{23}\, \omega_{10}\, \omega_{21}\, \omega_{31}\, \omega_{10}\, \omega_{12}$
$\omega_{30}\, \omega_{32}$

y $\Omega_2 = d(P) = (\omega_{22} - \omega_{11})(\omega_{33} - \omega_{11})\, \omega_{20}$

por (2.6), $d\Omega_1 = 0$, por tanto $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(E_1 + E_2 + G + P)$ es una densidad si sólo si

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0 .$$

Veamos:

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge [(\omega_{22} - \omega_{11})(\omega_{33} - \omega_{11})(\omega_{22} - \omega_{00})\, \omega_{20}] =$$
$$= -\Omega \wedge (\omega_{22} - \omega_{00}) \neq 0 .$$

Luego, la densidad invariante para $E_1 + E_2 + G + P$ no existe.

3.7. *Familias de subespacios dependientes de catorce parámetros.*

3.7.1. $P_1 + P_2 + G_1 + G_2$

Tomando: $P_1 : a_0 + a_3$
$P_2 : a_1 + a_2$
$G_1 : a_0\, a_1$
$G_2 : a_2\, a_3$

De (197):

P_1 permanece fijo si:

$\omega_{01} = 0$, $\omega_{32} = 0$, $(\omega_{33} - \omega_{00}) = 0$

P_2 permanece fijo si:

$\omega_{10} = 0$, $\omega_{23} = 0$, $(\omega_{22} - \omega_{11}) = 0$

G_1 permanece fijo si:

$\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$

G_2 permanece fijo si:

$\omega_{20} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{30} = 0$, $\omega_{31} = 0$.

Llamando $\Omega_1 = d(P_1 + P_2 + G_1) = \omega_{01}\, \omega_{32}(\omega_{33} - \omega_{00})\, \omega_{10}$
$\omega_{23}(\omega_{22} - \omega_{11})\, \omega_{02}\, \omega_{03}\, \omega_{12}\, \omega_{13}$

$$y \quad \Omega_2 = d\, G_2 = \omega_{20}\, \omega_{21}\, \omega_{30}\, \omega_{31}$$

por (2.3) $d\Omega_1 = 0$, por tanto $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(P_1 + P_2 + G_1 + G_2)$ es una densidad, si sólo si

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$$

Veamos, de (198)

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge [-2\omega_{00} + 2\omega_{33} - 2\omega_{11} + 2\omega_{22}] \wedge \Omega_2$$
$$= 2\Omega_1 \wedge [(\omega_{22} - \omega_{11}) + (\omega_{33} - \omega_{00})] \wedge \Omega_2 = 0 \ .$$

Con lo cual la densidad invariante para $P_1 + P_2 + G_1 + G_2$ existe y está dada por

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2$$

$$\Omega = \omega_{01}\, \omega_{32}\, (\omega_{33} - \omega_{00})\, \omega_{10}\, \omega_{23}\, (\omega_{22} - \omega_{11})\, \omega_{02}\, \omega_{03}\, \omega_{12}\, \omega_{13}\, \omega_{20}\, \omega_{21}\, \omega_{30}\, \omega_{31} \ .$$

3.7.2. $P + E + G_1 + G_2$

Llamando $\Omega_1 = d(P + E)$

$\Omega_2 = d(G_1 + G_2)$

de (2.1) $d\Omega_1 = 0$; de (2.2) $d\Omega_2 = 0$

por tanto $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(P + E + G_1 + G_2)$ es una densidad invariante ya que

$$d\Omega = 0 \ .$$

Así, $P + E + G_1 + G_2$ es medible bajo el grupo proyectivo G_{15} .

4. *Conclusión.*

Como resultado del estudio anterior podemos enunciar los siguientes teoremas:

<u>Teorema 11</u>. En el espacio proyectivo P_3 las siguientes familias de subespacios que no se pertenecen <u>no admiten</u> una medida invariante respecto del grupo proyectivo G_{15} .

$E_1 + E_2$	$P + E_1 + E_2 + E_3$
$E_1 + E_2 + P$	$P_1 + P_2 + P_3 + E$

$P_1 + P_2 + E$

$E_1 + E_2 + E_3$

$P + E + G$

$G_1 + G_2 + P$

$G_1 + G_2 + E$.

$P_1 + P_2 + P_3 + G$

$E_1 + E_2 + E_3 + G$

$P_1 + P_2 + G + E$

$E_1 + E_2 + G + P$

Teorema 12. En el espacio proyectivo P_3 las siguientes familias de subespacios, que no se pertenecen, tienen densidad invariante respecto al grupo proyectivo G_{15} .

$E_1 + E_2 + E_3 + E_4$

$P_1 + P_2 + G_1 + G_2$

$P + E + G_1 + G_2$.

5. *Familias de Subespacios con alguna relación de pertenencia*

5.1. *Familias dependientes de cinco parámetros.*

5.1.1. $E + P$, con $P \in E$

Tomamos $E : a_0\, a_1\, a_3$

$P : a_0$

De (197)

E permanece fijo si: $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

P permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$

Luego $P + E$ permanece fijo si:

$$\omega_{03} = 0 \ , \ \omega_{13} = 0 \ , \ \omega_{23} = 0 \ , \ \omega_{01} = 0 \ , \ \omega_{02} = 0$$

y si $\Omega = \omega_{03}\, \omega_{13}\, \omega_{23}\, \omega_{01}\, \omega_{02}$

por Teorema 2 de Luccioni en [10], $d\Omega \neq 0$, y $E + P$ no admite medida invariante (ver Nota de pág. 120).

5.1.2. $P + G$ con $P \in G$

Tomamos $G : a_2\, a_3$

$P : a_3$

Por (197):

G permanece fijo si: $\omega_{20} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{30} = 0$, $\omega_{31} = 0$

P permanece fijo si: $\omega_{30} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$

Luego G + P permanece fijo si:

$$\omega_{20} = 0 \ , \ \omega_{21} = 0 \ , \ \omega_{30} = 0 \ , \ \omega_{31} = 0 \ , \ \omega_{32} = 0$$

y $\quad \Omega = \omega_{20}\,\omega_{21}\,\omega_{30}\,\omega_{31}\,\omega_{32}$

Por Teorema 2 de Luccioni en [10], $d\Omega \neq 0$ y P + G no es medible (ver Nota al pie de página).

5.1.3. G + E con $G \subset E$

Tomamos G : $a_0\, a_1$

E : $a_0\, a_1\, a_2$

G permanece fija si: $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$

E permanece fija si: $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

Luego, G + E permanece fijo si:

$$\omega_{02} = 0 \ , \ \omega_{03} = 0 \ , \ \omega_{12} = 0 \ , \ \omega_{13} = 0 \ , \ \omega_{23} = 0$$

$\Omega = \omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{23}$ es la densidad para G + E si sólo si $d\Omega = 0$.

Veamos:

$d\Omega \neq 0$ por (198), también

por Teorema 2 de Luccioni en [10] (ver Nota al pie de página) , E + G no admite densidad invariante.

5.2. *Familias que dependen de seis parámetros.*

Nota: E. Luccioni en [10] pág. 65 prueba el siguiente teorema para subespacios que se transforman transitivamente por el grupo proyectivo:

Teorema: Sea H un elemento geométrico del espacio proyectivo P_3 tal que el subgrupo que deja fijo a H define el sistema Ω :

$$\Omega : \quad \omega_{i_1 j_1} = 0 \ , \ \omega_{i_2 j_2} = 0 \ , \ \ldots. \ , \ \omega_{i_s j_s} = 0 \ ,$$

entonces H admite una medida invariante, si sólo si, siempre que ω_{ij} esté en Ω también ω_{ji} esté.

5.2.1. $P + G + E$, $P \in G$ y $G \subset E$

Tomamos para $P : a_0$

$G : a_0\ a_1$

$E : a_0\ a_1\ a_2$

Así definidos estos subespacios se tiene según (197):

P permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$

G permanece fijo si: $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$

E permanece fijo si: $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$.

Luego $P + G + E$ permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0 \ , \ \omega_{02} = 0 \ , \ \omega_{03} = 0 \ , \ \omega_{12} = 0 \ , \ \omega_{13} = 0 \ ,$$

$$\omega_{23} = 0$$

si $\Omega = \omega_{01}\ \omega_{02}\ \omega_{03}\ \omega_{12}\ \omega_{13}\ \omega_{23}$

Por Teorema 2 de Luccioni (ver Nota de pág. 120) $P + G + E$ no admite una medida invariante.

5.3. *Familias que dependen de siete parámetros.*

5.3.1. $P_1 + P_2 + E$ con $P_1 \in E$, $P_2 \in E$.

Tomamos $P_1 : a_0$, $P_2 : a_1$, $E : a_0\ a_1\ a_2$

De (197):

P_1 permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$

P_2 permanece fijo si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$

E permanece fijo si: $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$.

Luego, $P_1 + P_2 + E$ permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0 \ , \ \omega_{02} = 0 \ , \ \omega_{03} = 0 \ , \ \omega_{10} = 0 \ , \ \omega_{12} = 0 \ ,$$

$$\omega_{13} = 0 \ , \ \omega_{23} = 0$$

$$\Omega = \omega_{01}\ \omega_{02}\ \omega_{03}\ \omega_{10}\ \omega_{12}\ \omega_{13}\ \omega_{23} \ .$$

Por Teorema 2 de Luccioni (ver Nota pág. 120) $d\Omega \neq 0$, y $P_1 + P_2 + E$ no admite densidad invariante.

5.4. *Familias de Subespacios de ocho parámetros.*

5.4.1. $P + G + E$ con $P \in G$ y $G \not\subset E$

Tomamos: $P : a_0$

$G : a_0\, a_1$

$E : a_1\, a_2\, a_3$

De (197):

P permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$

G permanece fija si: $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$

E permanece fijo si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = 0$.

Así, $P + G + E$ permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0 \ , \ \omega_{02} = 0 \ , \ \omega_{03} = 0 \ , \ \omega_{12} = 0 \ , \ \omega_{13} = 0 \ ,$$

$$\omega_{10} = 0 \ , \ \omega_{20} = 0 \ , \ \omega_{30} = 0 \ .$$

$$\Omega = \omega_{01}\, \omega_{02}\, \omega_{03}\, \omega_{12}\, \omega_{13}\, \omega_{10}\, \omega_{20}\, \omega_{30}$$

Por Teorema 2 de Luccioni (ver Nota de pág. 120) $P + E + G$ no tiene densidad invariante.

5.4.2. $P + G + E$ con $G \subset E$, $P \not\in E$

Tomamos: $P : a_0$

$G : a_1\, a_2$

$E : a_1\, a_2\, a_3$

De (197):

P permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$

G permanece fijo si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{23} = 0$

E permanece fijo si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = 0$.

Luego $P + G + E$ con $G \subset E$ permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0 \ , \ \omega_{02} = 0 \ , \ \omega_{03} = 0 \ , \ \omega_{10} = 0 \ , \ \omega_{13} = 0 \ ,$$

$$\omega_{20} = 0 \ , \ \omega_{23} = 0 \ , \ \omega_{30} = 0 \ .$$

Por tanto:

$$\Omega = \omega_{01}\, \omega_{02}\, \omega_{03}\, \omega_{10}\, \omega_{20}\, \omega_{30}\, \omega_{13}\, \omega_{23}$$

Por Teorema 2 de Luccioni (ver Nota pág. 120) $P + G + E$ con $G \subset E$ no tiene densidad invariante.

5.4.3. $P + E_1 + E_2$ con $P \in E_1$, $P \notin E_2$

Tomamos: $P : a_0$

$E_1 : a_0\ a_1\ a_2$

$E_2 : a_1\ a_2\ a_3$

De (197):

P permanece fijo si : $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$

E_1 permanece fijo si : $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

E_2 permanece fijo si : $\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = 0$

Luego, $P + E_1 + E_2$ permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0 \ , \ \omega_{02} = 0 \ , \ \omega_{03} = 0 \ , \ \omega_{13} = 0 \ , \ \omega_{23} = 0 \ ,$$

$$\omega_{10} = 0 \ , \ \omega_{20} = 0 \ , \ \omega_{30} = 0 \ .$$

y $\Omega = \omega_{01}\ \omega_{02}\ \omega_{03}\ \omega_{10}\ \omega_{20}\ \omega_{30}\ \omega_{13}\ \omega_{23}$

Por Teorema 2 de Luccioni en [10] (ver Nota pág. 120) $P + E_1 + E_2$ no tiene densidad invariante.

5.4.4. $P_1 + P_2 + E$ con $P_2 \in E$, $P_1 \notin E$

Tomando $P_1 : a_0$, $P_2 : a_1$, $E : a_1\ a_2\ a_3$

$P_1 + P_2 + E$ permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0 \ , \ \omega_{02} = 0 \ , \ \omega_{03} = 0 \ , \ \omega_{10} = 0 \ , \ \omega_{12} = 0 \ ,$$

$$\omega_{13} = 0 \ , \ \omega_{20} = 0 \ , \ \omega_{30} = 0 \ .$$

Por Teorema 2 de Luccioni (ver Nota pág. 120) $P_1 + P_2 + E$ no tiene densidad invariante.

5.4.5. $G + E_1 + E_2$, $G \subset E_1$

Tomamos $G : a_0\ a_1$, $E_1 : a_0\ a_1\ a_2$, $E_2 : a_1\ a_2\ a_3$

con $G \subset E_1$, $G \not\subset E_2$.

G permanece fija si: $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$

E_1 permanece fijo si: $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

E_2 permanece fijo si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = 0$.

Luego $G + E_1 + E_2$ permanece fijo si:

$\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$,

$\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = 0$

y $\Omega = \omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{23}\,\omega_{10}\,\omega_{20}\,\omega_{30}$.

Pero por Teorema 2 en [10] (ver Nota pág. 120) $G + E_1 + E_2$ no tiene densidad invariante.

5.4.6. $P_1 + P_2 + G$ con $P_2 \in G$, $P_1 \notin G$

Tomamos: $P_1 : a_0$; $P_2 : a_1$; $G : a_1\, a_2$

P_1 permanece fijo si $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$

P_2 permanece fijo si $\omega_{10} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$

E permanece fijo si $\omega_{10} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{23} = 0$

$P_1 + P_2 + G$ permanece fijo si

$\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{10} = 0$, $\omega_{12} = 0$,

$\omega_{13} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{23} = 0$.

Luego:

$$\Omega = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{10}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{20}\,\omega_{23}$$

Por Teorema 2 en [10] (ver Nota pág. 120) $P_1 + P_2 + G$ no tiene densidad invariante.

5.5. *Familias que dependen de nueve parámetros.*

5.5.1. $G_1 + G_2 + E$ con $G_2 \subset E$

Tomamos $G_1 : a_0\, a_1$; $G_2 : a_2\, a_3$; $E : a_1\, a_2\, a_3$

G_1 permanece fija si $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$

G_2 permanece fija si $\omega_{20} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{30} = 0$, $\omega_{31} = 0$

E permanece fijo si $\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = 0$

$$\Omega = \omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{20}\,\omega_{21}\,\omega_{30}\,\omega_{31}\,\omega_{10}$$

Por la Nota de la pág. 120, $G_1 + G_2 + E$ no tiene densidad invariante.

5.5.2. $P + E + G$ con $P \in E$

Tomamos $P : a_1$; $E : a_0\, a_1\, a_2$; $G : a_0\, a_3$

P permanece fijo si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$

E permanece fijo si: $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

G permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$

$\Omega = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{23}\,\omega_{10}\,\omega_{31}\,\omega_{32}$ es la densidad inva-

$P + E + G$, si sólo si, $d\Omega = 0$.

Por la Nota de la pág. 120, $P + E + G$ no tiene medida invariante.

5.5.3. $P_1 + P_2 + G + E$, $P_2 \in G$, $G \subset E$

Tomamos $P_1 : a_0$; $P_2 : a_1$; $G : a_1\, a_2$; $E : a_1\, a_2\, a_3$

P_1 permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$

P_2 permanece fijo si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$

G permanece fija si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{23} = 0$

E permanece fijo si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = 0$.

$$\Omega = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{10}\,\omega_{20}\,\omega_{30}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{23}$$

Por Nota de la pág. 120, la densidad de $P_1 + P_2 + G + E$ no existe.

5.5.4. $P_1 + G_1 + P_2 + G_2$ con $P_1 \in G_1$, $P_2 \in G_2$, $G_1 \cap G_2 \neq 0$

Tomamos $P_1 : a_0$; $P_2 : a_2$

$G_1 : a_0\, a_1$; $G_2 : a_1\, a_2$

$P_1 + G_1 + P_2 + G_2$ permanece fijo si:

$\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{10} = 0$, $\omega_{12} = 0$,

$\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{20} = 0$.

Por la Nota de la pág. 120, $P_1 + G_1 + P_2 + G_2$ no tiene medida invariante respecto a G_{15} .

5.5.5. $P + G_1 + G_2$ con $P \in G_1$, $G_1 \cap G_2 = 0$

Tomamos $P : a_0$

$G_1 : a_0 a_1$

$G_2 : a_0 a_3$

$P + G_1 + G_2$ permanece fijo si:

$\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$,

$\omega_{20} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{30} = 0$, $\omega_{31} = 0$.

Por Teorema 2 en [10] (ver Nota pág. 120) $P + G_1 + G_2$ no admite medida invariante.

5.6. *Familias que dependen de diez parámetros.*

5.6.1. $G_1 + E + P + G_2$, $G_1 \subset E$, $P \in G_2$, $G_1 \cap G_2 = 0$

Tomamos $G_1 : a_0 a_1$

$G_2 : a_2 a_3$

$E : a_0 a_1 a_2$

$P : a_3$

$G_1 + G_2 + E + P$ permanece fijo si:

$\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{20} = 0$,

$\omega_{21} = 0$, $\omega_{30} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$, $\omega_{23} = 0$.

Luego:

$$\Omega = \omega_{02}\, \omega_{03}\, \omega_{12}\, \omega_{13}\, \omega_{20}\, \omega_{21}\, \omega_{30}\, \omega_{31}\, \omega_{32}\, \omega_{23} \, .$$

Por la Nota de la pág. 120 la densidad para $G_1 + G_2 + E + P$ <u>existe</u> , es

$$\Omega = \omega_{02}\, \omega_{03}\, \omega_{13}\, \omega_{12}\, \omega_{20}\, \omega_{21}\, \omega_{30}\, \omega_{31}\, \omega_{32}\, \omega_{23} \, .$$

5.6.2. $P_1 + E_1 + P_2 + E_2$ con $P_1 \in E_1$, $P_2 \in E_2$

Tomando $P_1 : a_0$ $\quad E_1 : a_0 a_1 a_2$

$P_2 : a_3$ $\quad E_2 : a_1 a_2 a_3$

P_1 permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$

E_1 permanece fijo si: $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

P_2 permanece fijo si: $\omega_{30} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$

E_2 permanece fijo si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = 0$

Luego:

$$\Omega = \omega_{01}\, \omega_{02}\, \omega_{03}\, \omega_{10}\, \omega_{20}\, \omega_{30}\, \omega_{31}\, \omega_{32}\, \omega_{13}\, \omega_{23}$$

Por la Nota de la pág. 120, $P_1 + E_1 + P_2 + E_2$ admite una medida invariante, está dada por el producto exterior

$$\Omega = \omega_{01}\, \omega_{02}\, \omega_{03}\, \omega_{10}\, \omega_{20}\, \omega_{30}\, \omega_{31}\, \omega_{32}\, \omega_{13}\, \omega_{23}$$

5.6.3. $P_1 + E + P_2 + G$, $P_1 \in E$, $P_2 \in G$

Tomamos $P_1 : a_0$ $\quad E : a_0\, a_1\, a_2$

$P_2 : a_3$ $\quad G : a_2\, a_3$

P_1 permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$

E permanece fijo si: $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

P_2 permanece fijo si: $\omega_{30} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$

G permanece fija si: $\omega_{20} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{30} = 0$, $\omega_{31} = 0$.

Luego:

$$\Omega = \omega_{01}\, \omega_{02}\, \omega_{20}\, \omega_{21}\, \omega_{03}\, \omega_{13}\, \omega_{23}\, \omega_{30}\, \omega_{31}\, \omega_{32}$$

Por la Nota de la pág. 120, la densidad para $P_1 + E + P_2 + G$ no existe.

5.6.4. $G_1 + E_1 + G_2 + E_2$ con $G_1 \subset E_1$, $G_2 \subset E_2$

Tomamos $G_1 : a_0\, a_3$ $\quad E_1 : a_0\, a_1\, a_3$

$G_2 : a_1\, a_2$ $\quad E_2 : a_0\, a_1\, a_2$

G_1 permanece fija si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$

G_2 permanece fija si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

E_1 permanece fijo si: $\omega_{02} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{32} = 0$

E_2 permanece fijo si: $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$.

$$\Omega = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{31}\,\omega_{32}\,\omega_{10}\,\omega_{20}\,\omega_{13}\,\omega_{23}\,\omega_{12}\,\omega_{03}$$

Por Teorema 2 en [10] la densidad invariante para $G_1 + E_1 + E_2 + G_2$ con $G_1 \subset E_1$, $G_2 \subset E_2$ no existe.

5.6.5. $P_1 + G_1 + P_2 + G_2$ con $P_1 \in G_1$, $P_2 \in G_2$, $G_1 \cap G_2 = 0$

Tomamos: $P_1 : a_0$ $\quad$ $P_2 : a_2$

$G_1 : a_0\, a_3$ $\quad$ $G_2 : a_1\, a_2$

Para que P_1 permanezca fijo se debe tener que:

$\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$

G_1 permanece fija si:

$\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$

P_2 permanece fijo si:

$\omega_{20} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{23} = 0$

G_2 permanece fijo si:

$\omega_{10} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{23} = 0$

Luego, $P_1 + G_1 + P_2 + G_2$ permanece fijo si:

$\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$

$\omega_{20} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{23} = 0$, $\omega_{10} = 0$, $\omega_{13} = 0$

Entonces

$$\Omega = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{31}\,\omega_{32}\,\omega_{20}\,\omega_{21}\,\omega_{23}\,\omega_{10}\,\omega_{13}\ .$$

Por la Nota en la pág. 120 la densidad para $P_1 + G_1 + P_2 + G_2$ no existe.

5.7. *Familias que dependen de once parámetros.*

5.7.1. $P_1 + P_2 + E + G$ con $P_1 \in E$, $P_2 \in E$.

Tomamos: $P_1 : a_0$; $P_2 : a_1$; $E : a_0\, a_1\, a_3$; $G : a_2\, a_3$

$P_1 + P_2 + G$ permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$

$\omega_{10} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{21} = 0$,

$\omega_{30} = 0$, $\omega_{31} = 0$

E permanece fijo si: $\omega_{02} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{32} = 0$.

luego $\Omega = \omega_{01}\ \omega_{02}\ \omega_{03}\ \omega_{30}\ \omega_{12}\ \omega_{13}\ \omega_{21}\ \omega_{31}\ \omega_{32}\ \omega_{10}\ \omega_{20}$

Por la Nota de la pág. 120, $P_1 + P_2 + E + G$ no admite una medida invariante.

5.7.2. $P_1 + G + E_1 + P_2 + E_2$ con $P_1 \in G$, $G \subset E_1$, $P_2 \in E_2$

Tomamos: $P_1 : a_0$; $G : a_0\ a_1$; $E_1 : a_0\ a_1\ a_2$

$P_2 : a_3$; $E_2 : a_1\ a_2\ a_3$

$P_1 + G + E_1 + P_2 + E_2$ permanece fijo si:

$\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$,

$\omega_{30} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{23} = 0$, $\omega_{32} = 0$,

$\omega_{12} = 0$

$\Omega = \omega_{01}\ \omega_{02}\ \omega_{03}\ \omega_{10}\ \omega_{20}\ \omega_{30}\ \omega_{13}\ \omega_{31}\ \omega_{23}\ \omega_{32}\ \omega_{12}$.

Por la Nota de la pág. 120 la densidad para $P_1 + G + E_1 + P_2 + E_2$ no existe.

5.7.3. $P_1 + G_1 + E_1 + G_2 + E_2$ con $P_1 \in G_1$, $G_1 \subset E_1$, $G_2 \subset E_2$

Llamando $P_1 : a_0$; $G_1 : a_0\ a_1$; $E_1 : a_0\ a_1\ a_2$

$G_2 : a_2\ a_3$; $E_2 : a_0\ a_2\ a_3$

$P_1 + G_1 + E_1 + G_2 + E_2$ permanece fijo si:

$\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$,

$\omega_{23} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{31} = 0$,

$\omega_{10} = 0$

Por Teorema 2 en [10] no existe la densidad invariante para este conjunto. (Ver Nota en la pág. 120).

5.7.4. $G_1 + E_1 + E_2 + E_3$ con $G_1 \subset E_1$

Tomamos $G_1 : a_0\ a_1$; $E_1 : a_0\ a_1\ a_2$

$E_2 : a_1\ a_2\ a_3$; $E_3 : a_0\ a_2\ a_3$

G_1 permanece fija si: $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$

E_1 permanece fijo si: $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

E_2 permanece fijo si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = 0$

E_3 permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{31} = 0$

Por Teorema 2 en [10] la densidad invariante para $G_1 + E_1 + E_2 + E_3$ no existe. (Ver Nota en la pág. 120).

5.8. *Familias que dependen de doce parámetros.*

5.8.1. $G_1 + E_1 + G_2 + P$ con $G_1 \subset E_1$

Tomamos $G_1 : a_0\ a_1$ $\quad E_1 : a_0\ a_1\ a_2$

$G_2 : a_2\ a_3$ $\quad P : a_1 + a_3$

G_1 permanece fijo si: $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$

G_2 permanece fijo si: $\omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{31} = 0$

E_1 permanece fijo si: $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

P permanece fijo si: $\omega_{10} + \omega_{30} = 0$, $\omega_{12} + \omega_{32} = 0$,

$\omega_{33} - \omega_{11} = 0$

Llamando $\Omega = \omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{20}\,\omega_{30}\,\omega_{21}\,\omega_{31}\,\omega_{23}\,\omega_{10}\,\omega_{32}(\omega_{33} - \omega_{11})$

$\Omega_1 = d(G_1 + G_2) = \omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{20}\,\omega_{30}\,\omega_{21}\,\omega_{31}$

y $\Omega_2 = \omega_{23}\,\omega_{10}\,\omega_{32}(\omega_{33} - \omega_{11})$ se tiene $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2$

con $d\Omega_1 = 0$ (ver (2.2)), luego $d\Omega = 0$ si sólo si $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$

Pero $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge (\omega_{11} - \omega_{00}) \wedge \Omega_2$

$= \Omega \wedge (\omega_{11} - \omega_{00}) \neq 0$ y por tanto la densidad para $G_1 + E_1 + G_2 + P$ no existe.

5.8.2. $P_1 + E_1 + P_2 + G$ con $P_1 \in E_1$

Tomamos: $P_1 : a_0$; $\quad E_1 : a_0\ a_1\ a_2$

$P_2 : a_1 + a_3$; $\quad G : a_2\ a_3$

P_1 permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$

E_1 permanece fijo si: $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

P_2 permanece fijo si: $\omega_{10} + \omega_{30} = 0$, $\omega_{12} + \omega_{32} = 0$,

$$\omega_{33} - \omega_{11} = 0$$

G permanece fija si: $\omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{31} = 0$

$$\Omega = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{13}\,\omega_{23}\,\omega_{10}\,(\omega_{12} + \omega_{32})(\omega_{33} - \omega_{11})\,\omega_{20}\,\omega_{30}\,\omega_{21}\,\omega_{31}$$

es la densidad de $P_1 + E_1 + P_2 + G$, si sólo si $d\Omega = 0$.

Llamando $\Omega_1 = d(P_1 + P_2 + G) = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{03}(\omega_{12} + \omega_{32})(\omega_{33} - \omega_{11})\,\omega_{10}\,\omega_{20}\,\omega_{30}\,\omega_{21}\,\omega_{31}$

$d\Omega_1 = 0$ (la densidad Ω_1 existe, ver (2.3)).

Si $\Omega_2 = \omega_{13}\,\omega_{23}$ $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2$ y

$d\Omega = 0$, si sólo si, $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$.

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge (\omega_{11} - 2\omega_{33} + \omega_{22}) \wedge \Omega_2$$

$$= -\,\Omega \wedge (\omega_{33} - \omega_{22}) \neq 0 .$$

Luego, la densidad para 5.8.2 no existe.

5.8.3. $P_1 + E_1 + G_1 + G_2$ con $P_1 \in E_1$, $G_1 \cap G_2 \neq 0$

Tomamos: $P_1 : a_3$; $E_1 : a_0\,a_2\,a_3$

$G_1 : a_0\,a_1$; $G_2 : a_1\,a_2$

P_1 permanece fijo si: $\omega_{30} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$

E permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{31} = 0$

G_1 permanece fija si: $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$

G_2 permanece fija si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

$P_1 + E + G_1 + G_2$ permanece fijo si:

$\omega_{30} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$, $\omega_{01} = 0$, $\omega_{21} = 0$,

$\omega_{23} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$,

$\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$

$$\Omega = \omega_{30}\,\omega_{31}\,\omega_{32}\,\omega_{01}\,\omega_{21}\,\omega_{23}\,\omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{10}\,\omega_{20}$$

Por la Nota de la pág. 120 la densidad para la familia $P_1 + E_1 + G_1 + G_2$ con $P_1 \in E$, $G_1 \cap G_2 \neq 0$ existe, es

$$\Omega = \omega_{01}\, \omega_{02}\, \omega_{03}\, \omega_{10}\, \omega_{20}\, \omega_{30}\, \omega_{12}\, \omega_{13}\, \omega_{21}\, \omega_{31}\, \omega_{23}\, \omega_{32}$$

5.8.4. $P_1 + G_1 + G_2 + G_3$ con $P_1 \in G_1$, $G_2 \cap G_3 \neq 0$

Tomando: $P_1 : a_2 + a_3$

$G_1 : a_0 + a_1 \, , \, a_2 + a_3$

$G_2 : a_1\, a_3$

$G_3 : a_0\, a_3$

$P_1 + G_1$ permanece fijo si: $\omega_{20} - \omega_{31} = 0$, $\omega_{23} + \omega_{32} = 0$,

$\omega_{33} - \omega_{22} = 0$, $\omega_{11} - \omega_{00} = 0$, $\omega_{03} - \omega_{12} = 0$

$G_2 + G_3$ permanece fijo si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{30} = 0$, $\omega_{12} = 0$,

$\omega_{32} = 0$, $\omega_{01} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{02} = 0$

Luego $P_1 + G_1 + G_2 + G_3$ permanece fijo si:

$\omega_{20} = 0$, $\omega_{23} = 0$, $\omega_{33} - \omega_{22} = 0$, $\omega_{11} - \omega_{00} = 0$,

$\omega_{03} = 0$, $\omega_{10} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{32} = 0$, $\omega_{01} = 0$,

$\omega_{31} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{30} = 0$

Llamando $\Omega = \omega_{20}\, \omega_{23}\, (\omega_{33} - \omega_{22})(\omega_{11} - \omega_{00})\, \omega_{03}\, \omega_{10}\, \omega_{30}\, \omega_{12}\, \omega_{32}\, \omega_{01}\, \omega_{31}\, \omega_{02}$

$$\Omega_1 = \omega_{01}\, \omega_{02}\, \omega_{03}\, \omega_{10}\, \omega_{20}\, \omega_{30}$$

por (198) $d\Omega_1 = 0$

y si $d\Omega_2 = (\omega_{33} - \omega_{22})(\omega_{11} - \omega_{00})\, \omega_{12}\, \omega_{31}\, \omega_{32}\, \omega_{23}$

entonces

$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2$ y $d\Omega = 0$, si sólo si,

$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$.

Veamos:

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge (\omega_{33} - \omega_{22})$$

Luego: $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$

Por tanto la densidad invariante para $P_1 + G_1 + G_2 + G_3$ existe, está dada por

$$\Omega = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{10}\,\omega_{20}\,\omega_{30}(\omega_{33} - \omega_{22})(\omega_{11} - \omega_{00})\,\omega_{12}\,\omega_{31}$$
$$\omega_{32}\,\omega_{23}$$

5.8.5. $P_1 + G_1 + E_1 + P_2 + G_2 + E_2$ con $P_1 \in G_1 \in E_1$
$P_2 \in G_2 \in E_2$

Tomamos: $P_1 : a_0$ $\quad G_1 : a_0\, a_1$ $\quad E_1 : a_0\, a_1\, a_2$
$P_2 : a_3$ $\quad G_2 : a_2\, a_3$ $\quad E_2 : a_1\, a_2\, a_3$

$P_1 + G_1 + E_1$ permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{03} = 0$
$\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

$P_2 + G_2 + E_2$ permanece fijo si: $\omega_{30} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$
$\omega_{20} = 0$, $\omega_{10} = 0$, $\omega_{21} = 0$

$$\Omega = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{23}\,\omega_{30}\,\omega_{31}\,\omega_{32}\,\omega_{20}\,\omega_{10}\,\omega_{21}$$

Por la Nota de la pág. 120 la densidad invariante para $P_1 + G_1 + E_1 + P_2 + G_2 + E_2$ existe, es

$$d(P_1 + G_1 + E_1 + P_2 + G_2 + E_2) = \Omega$$

5.9. *Familias que dependen de trece parámetros.*

5.9.1. $P + E_1 + G + E_2 + E_3$ con $P \in E_1$, $G \in E_2$, $P \notin G$

Tomamos: $P : a_0 + a_1 + a_2$ $\quad G : a_3\, a_1$
$E_1 : a_0\, a_1\, a_2$ $\quad E_2 : a_1\, a_2\, a_3$
$E_3 : a_0\, a_2\, a_3$

E_3 permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{31} = 0$

$G + E_2$ permanece fijo si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{30} = 0$, $\omega_{12} = 0$,
$\omega_{32} = 0$, $\omega_{20} = 0$

$P + E_1$ permanece fijo si: $\omega_{11} - \omega_{00} = 0$, $\omega_{02} + \omega_{22} - \omega_{00} = 0$,
$\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

Luego:

$$\Omega = \omega_{01}\,\omega_{21}\,\omega_{31}\,\omega_{10}\,\omega_{30}\,\omega_{12}\,\omega_{32}\,\omega_{20}\,(\omega_{11} - \omega_{00})(\omega_{02} + \omega_{22} - \omega_{00})$$

$\omega_{03}\,\omega_{13}\,\omega_{23}$ es la densidad de 5.9.1, si sólo si,

$$d\Omega = 0 \ .$$

Reordenando, podemos escribir

$$\Omega = (\omega_{11} - \omega_{00})\,\omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{01}\,\omega_{20}\,\omega_{30}\,\omega_{10}\,\omega_{12}\,\omega_{21}\,\omega_{13}\,\omega_{31}\,\omega_{23}\,\omega_{32}$$
$$+ (\omega_{11} - \omega_{00})(\omega_{22} - \omega_{00})\,\omega_{03}\,\omega_{01}\,\omega_{30}\,\omega_{10}\,\omega_{12}\,\omega_{21}\,\omega_{13}\,\omega_{31}\,\omega_{23}$$
$$\omega_{32}\,\omega_{20}$$

El primer sumando tiene diferencial igual a cero por la Nota de la pág. 120 , luego $d\Omega = 0$, si sólo si,

$$d\,[\,(\omega_{11} - \omega_{00})(\omega_{22} - \omega_{00})\,\omega_{03}\,\omega_{01}\,\omega_{30}\,\omega_{10}\,\omega_{12}\,\omega_{21}\,\omega_{13}\,\omega_{31}\,\omega_{23}$$
$$\omega_{32}\,\omega_{20}] = 0 \ .$$

Pero
$$d\,[\,(\omega_{11} - \omega_{00})(\omega_{22} - \omega_{00})\,\omega_{03}\,\omega_{01}\,\omega_{30}\,\omega_{10}\,\omega_{12}\,\omega_{21}\,\omega_{13}$$
$$\omega_{31}\,\omega_{23}\,\omega_{32}\,\omega_{20}]$$
$$= (\omega_{11} - \omega_{00})(\omega_{22} - \omega_{00})\,\omega_{03}\,\omega_{01}\,\omega_{30}\,\omega_{10}\,\omega_{12}\,\omega_{21}\,\omega_{13}\,\omega_{31}$$
$$\omega_{23}\,\omega_{32}\,\omega_{20}\,(\omega_{00} - \omega_{22}) \ .$$

Luego, la diferencial del segundo sumando de Ω es cero, así $d\Omega = 0$, y esto asegura que la densidad invariante para

$P_1 + E_1 + G + E_2 + E_3$ existe, y es Ω .

5.9.2. $G_1 + G_2 + P + E$ con $G_1 \cap G_2 \neq 0$, $P \notin E$

Tomamos: $G_1 : a_0\, a_2$ $\quad$ $P : a_0 + a_3$

$G_2 : a_0\, a_1$ $\quad$ $E : a_1\, a_2\, a_3$

$G_1 + G_2$ permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{03} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{23} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$

P permanece fijo si: $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$, $\omega_{33} - \omega_{00} = 0$

E permanece fijo si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = 0$.

$$\Omega = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{10}\,\omega_{20}\,\omega_{30}\,\omega_{21}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{31}\,\omega_{23}\,\omega_{32}(\omega_{33} - \omega_{00})$$

será la densidad para 5.9.2 , si sólo si, $d\Omega = 0$.

Llamando $\Omega_1 = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{10}\,\omega_{20}\,\omega_{30}\,\omega_{21}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{31}\,\omega_{23}\,\omega_{32}$ por (198) se tiene $d\Omega_1 = 0$. Luego $d\Omega = 0$, si sólo si, $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$ con $\Omega_2 = (\omega_{33} - \omega_{00})$ y puesto que por (198) $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$, la densidad para $G_1 + G_2 + P_1 + E$ existe, es:

$$d(G_1 + G_2 + P + E) = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{10}\,\omega_{20}\,\omega_{30}\,\omega_{21}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{31}\,\omega_{23}\,\omega_{32}\,(\omega_{33} - \omega_{00}) .$$

5.9.3. $G_1 + G_2 + G_3 + E \qquad G_3 \subset E$

Tomando: $G_1 : a_0\,a_3 \qquad G_2 : a_0 + a_1 ,\ a_2 + a_3$

$G_3 : a_1\,a_2 \qquad E : a_0\,a_1\,a_2$

G_1 permanece fija si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$

G_2 permanece fija si: $\omega_{21} - \omega_{30} = 0$, $\omega_{33} - \omega_{22} = 0$, $\omega_{11} - \omega_{00} = 0$, $\omega_{03} - \omega_{12} = 0$

$G_3 + E$ permanece fijo si: $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$, $\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$

$$\Omega = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{31}\,\omega_{32}\,\omega_{10}\,\omega_{20}\,\omega_{13}\,\omega_{23}\,\omega_{03}\,\omega_{12}\,(\omega_{21} - \omega_{30})(\omega_{33} - \omega_{22})(\omega_{11} - \omega_{00})$$

será la densidad de 5.9.3, si sólo si, $d\Omega = 0$.

Veamos:

Llamando

$$\Omega_1 = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{31}\,\omega_{32}\,\omega_{10}\,\omega_{20}\,\omega_{13}\,\omega_{23}\,(\omega_{21} - \omega_{30})(\omega_{33} - \omega_{22})(\omega_{11} - \omega_{00})(\omega_{03} - \omega_{12})$$
$$= d(G_1 + G_2 + G_3) \quad \text{con} \quad G_i \cap G_j = 0 \ , \ i,j = 1,2,3$$

$d\Omega_1 = 0$. Por tanto $d\Omega = 0$, si sólo si,

$$\Omega_1 \wedge d\omega_{03} = 0 .$$

Pero
$$\Omega_1 \wedge d\omega_{03} = \Omega_1 \wedge (\omega_{00} - \omega_{33})\,\omega_{03}$$
$$= \Omega \wedge (\omega_{00} - \omega_{33}) \neq 0 .$$

Luego, la densidad para 5.9.3 no existe.

5.9.4. $G_1 + E_1 + G_2 + E_2 + P$ $\qquad G_1 \subset E_1 \qquad G_2 \subset E_2$

Tomando $G_1 : a_0\, a_3 \qquad E_1 : a_0\, a_1\, a_3 \qquad P : a_2 + a_3$

$G_2 : a_1\, a_2 \qquad E_2 : a_0\, a_1\, a_2$

$G_1 + E_1$ permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{31} = 0$,

$\omega_{32} = 0$, $\omega_{12} = 0$

$G_2 + E_2$ permanece fijo si: $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$, $\omega_{10} = 0$,

$\omega_{20} = 0$, $\omega_{03} = 0$

P permanece fijo si: $\omega_{30} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{33} - \omega_{22} = 0$

$$\Omega = \omega_{01}\, \omega_{02}\, \omega_{31}\, \omega_{32}\, \omega_{12}\, \omega_{13}\, \omega_{23}\, \omega_{10}\, \omega_{20}\, \omega_{03}\, \omega_{30}\, \omega_{21} (\omega_{33} - \omega_{22})$$

será la densidad para 5.9.4, si sólo si,

$$d\,\Omega = 0$$

Llamando $\Omega_1 = \omega_{01}\, \omega_{02}\, \omega_{03}\, \omega_{10}\, \omega_{20}\, \omega_{30}\, \omega_{12}\, \omega_{21}\, \omega_{13}\, \omega_{31}\, \omega_{23}\, \omega_{32}$

de (198) y [10] $d\Omega_1 = 0$, y también

$$\Omega_1 \wedge d(\omega_{33} - \omega_{22}) = 0 \,.$$

Luego $d\Omega = 0$ y la densidad para 5.9.4 existe

$$d(G_1 + E_1 + G_2 + E_2 + P) = \omega_{01}\, \omega_{02}\, \omega_{03}\, \omega_{10}\, \omega_{20}\, \omega_{30}\, \omega_{12}\, \omega_{21}\, \omega_{13}\, \omega_{31}\, \omega_{23}\, \omega_{32}\, (\omega_{33} - \omega_{22}) \,.$$

5.10. *Familias que dependen de catorce parámetros.*

5.10.1. $G_1 + E_1 + G_2 + E_2 + G_3$ $\qquad G_1 \subset E_1 \qquad G_2 \subset E_2$

$G_1 : a_0\, a_3 \quad ; \quad E_1 : a_0\, a_2\, a_3$

$G_2 : a_1\, a_2 \quad ; \quad E_2 : a_0\, a_1\, a_2$

$G_3 : a_0 + a_1 \,,\, a_2 + a_3$

$G_1 + E_1$ permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{31} = 0$,

$\omega_{32} = 0$, $\omega_{21} = 0$

$G_2 + E_2$ permanece fijo si: $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$, $\omega_{10} = 0$,

$\omega_{20} = 0$, $\omega_{03} = 0$

G_3 permanece fijo si: $\omega_{21} - \omega_{30} = 0$, $\omega_{33} - \omega_{22} = 0$,

$\omega_{11} - \omega_{00} = 0$, $\omega_{03} - \omega_{12} = 0$

$$\Omega = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{31}\,\omega_{32}\,\omega_{21}\,\omega_{10}\,\omega_{20}\,\omega_{13}\,\omega_{03}\,\omega_{30}\,\omega_{12}\,\omega_{23}\,(\omega_{33} - \omega_{22})\,(\omega_{11} - \omega_{00})$$

Llamando $\Omega_1 = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{10}\,\omega_{20}\,\omega_{30}\,\omega_{13}\,\omega_{31}\,\omega_{12}\,\omega_{21}\,\omega_{23}\,\omega_{32}$

por (198) y [10] $d\Omega_1 = 0$

y $d\Omega = 0$, si sólo si, $\Omega_1 \wedge d\,[(\omega_{33} - \omega_{22})(\omega_{11} - \omega_{00})] = 0$.

Pero esto se cumple.

Luego, $d\Omega = 0$ y la densidad para 5.10.1 existe

$$d(G_1 + E_1 + G_2 + E_2 + E_3) = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{10}\,\omega_{20}\,\omega_{30}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{23}\,\omega_{21}\,\omega_{31}\,\omega_{32}\,(\omega_{33} - \omega_{22})(\omega_{11} - \omega_{00}) .$$

5.10.2. $P_1 + G_1 + P_2 + G_2 + G_3$ $\quad P_1 \in G_1$ $\quad P_2 \in G_2$

Tomamos: $P_1 : a_3$ $\quad G_1 : a_0\, a_3$

$P_2 : a_1$ $\quad G_2 : a_1\, a_2$

$G_3 : a_0 + a_1 \, , \, a_2 + a_3$

$P_1 + G_1$ permanece fijo si: $\omega_{30} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $\omega_{01} = 0$,

$\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$

$P_2 + G_2$ permanece fijo si: $\omega_{10} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{13} = 0$,

$\omega_{20} = 0$, $\omega_{23} = 0$

G_3 permanece fijo si: $\omega_{21} - \omega_{30} = 0$, $\omega_{33} - \omega_{22} = 0$,

$\omega_{11} - \omega_{00} = 0$, $\omega_{03} - \omega_{12} = 0$

$$\Omega = \omega_{30}\,\omega_{02}\,\omega_{01}\,\omega_{31}\,\omega_{32}\,\omega_{10}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{20}\,\omega_{23}\,\omega_{21}\,\omega_{03}(\omega_{33} - \omega_{22})\,(\omega_{11} - \omega_{00})$$

será la densidad de 5.10.2, si sólo si, $d\Omega = 0$.

Llamando

$$\Omega_1 = \omega_{30}\,\omega_{02}\,\omega_{01}\,\omega_{31}\,\omega_{32}\,\omega_{10}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{20}\,\omega_{23}\,\omega_{21}\,\omega_{03}$$

y comparando en 5.8.5 tenemos que $d\Omega_1 = 0$.

Luego $d\Omega = 0$, si sólo si, $\Omega_1 \wedge d\,[(\omega_{33} - \omega_{22})(\omega_{11} - \omega_{00})] = 0$, pero esto se tiene, al aparecer en la diferencial de ω_{ii} siempre uno de los términos de Ω_1 .

Luego $d\Omega = 0$ y la densidad de 5.10.2 existe, es:

$$d(P_1 + G_1 + P_2 + G_2 + G_3) = \omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{03}\,\omega_{10}\,\omega_{20}\,\omega_{30}\,\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{23}$$
$$\omega_{21}\,\omega_{31}\,\omega_{32}\,(\omega_{33} - \omega_{22})(\omega_{11} - \omega_{00})$$

5.10.3. $G_1 + E_1 + P_2 + G_2 + E_2 + P_1$ con $G_1 \subset E_1$, $P_2 \in G_2 \subset E_2$

Tomando: $G_1 : a_0\,a_1$ $E_1 : a_0\,a_1\,a_2$; $P_2 : a_3$

$G_2 : a_2\,a_3$ $E_2 : a_1\,a_2\,a_3$; $P_1 : a_0 + a_2 + a_3$

se tiene:

$G_1 + E_1$ permanece fijo si: $\omega_{02} = 0$, $\omega_{12} = 0$, $\omega_{03} = 0$,

$\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$

$P_2 + G_2 + E_2$ permanece fijo si: $\omega_{30} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$

$\omega_{20} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{10} = 0$

P_1 permanece fijo si: $\omega_{01} = 0$, $\omega_{22} - \omega_{00} = 0$, $\omega_{33} - \omega_{U0} = 0$

$$\Omega = \omega_{02}\,\omega_{12}\,\omega_{03}\,\omega_{13}\,\omega_{23}\,\omega_{30}\,\omega_{31}\,\omega_{32}\,\omega_{20}\,\omega_{21}\,\omega_{10}\,\omega_{01}(\omega_{22} - \omega_{U0})$$
$$(\omega_{33} - \omega_{00})$$

será la densidad de 5.10.3, si sólo si, $d\Omega = 0$.

Llamando $\Omega_1 = \omega_{02}\,\omega_{12}\,\omega_{03}\,\omega_{13}\,\omega_{23}\,\omega_{30}\,\omega_{31}\,\omega_{32}\,\omega_{20}\,\omega_{21}\,\omega_{10}\,\omega_{01}$

se tiene el mismo caso que en 5.8.5,

luego, $d\Omega = 0$, y esta densidad existe, está dada por:

$$\Omega = d(G_1 + E_1 + P_2 + G_2 + E_2 + P_1) .$$

6. *Conclusión*.

Como resumen de lo anterior podemos enunciar los teoremas:

Teorema 13: En el espacio proyectivo P_3 las siguientes familias de subespacios con alguna relación de pertenencia no tienen medida invariante respecto del grupo proyectivo:

$P + E$ con $P \in E$

$P + G$ con $P \in G$

$G + E$ con $G \subset E$

$P + G + E$ con $P \in G \subset E$

$P_1 + P_2 + E$ con $P_1 \in E$, $P_2 \in E$

$P + G + E$ con $P \in G$, $G \not\subset E$

$P + G + E$ con $G \subset E$, $P \notin E$

$P + E_1 + E_2$ con $P \in E_1$

$P_1 + P_2 + E$ con $P_2 \in E$

$G + E_1 + E_2$ con $G \subset E_1$

$P_1 + G_1 + P_2 + G_2$ con $P_1 \in G_1$, $P_2 \in G_2$

$P_1 + P_2 + E$ con $P_1 \in E$

$G_1 + G_2 + E$ con $G_1 \subset E$

$P + E + G$ con $P \in E$

$P_1 + P_2 + G + E$ con $P_2 \in G \subset E$

$P_1 + G_1 + P_2 + G_2$ con $P_1 \in G_1$, $P_2 \in G_2$

$P + G_1 + G_2$ con $P \in G_1$

$P_1 + E + P_2 + G$ con $P_1 \in E$, $P_2 \in G$

$G_1 + E_1 + G_2 + E_2$ con $G_1 \subset E_1$, $G_2 \subset E_2$

$P_1 + P_2 + E + G_1$ con $P_1 \in E$, $P_2 \in E$

$P_1 + G + E_1 + P_2 + E_2$ con $P_1 \in G \subset E$, $P_2 \in E_2$

$P_1 + G_1 + E_1 + G_2 + E_2$ con $P_1 \in G_1 \subset E_1$, $G_2 \subset E_2$

$G_1 + E_1 + E_2 + E_3$ con $G_1 \subset E_1$

$G_1 + E_1 + G_2 + P$ con $G_1 \subset E_1$

$P_1 + E_1 + P_2 + G$ con $P_1 \in E_1$

$G_1 + G_2 + G_3 + E$ con $G_3 \subset E$

Teorema 14. En el espacio proyectivo P_3 las siguientes familias de subespacios con puntos comunes tienen densidad invariante respecto del grupo proyectivo:

$G_1 + E + P + G_2$ con $G_1 \subset E$, $P \in G_2$

$P_1 + E_1 + P_2 + E_2$ con $P_1 \in E_1$, $P_2 \in E_2$

$P_1 + E_1 + G_1 + G_2$ con $P_1 \notin E_1$, $G_1 \cap G_2 \neq 0$

$P_1 + G_1 + G_2 + G_3$ con $P_1 \in G_1$, $G_2 \cap G_3 \neq 0$

$P_1 + G_1 + E_1 + P_2 + G_2 + E_2$ con $P_1 \in G_1 \subset E_1$, $P_2 \in G_2 \subset E_2$

$P + E_1 + G + E_2 + E_3$ con $P \in E_1$, $G \subset E_2$

$G_1 + G_2 + P + E$ con $G_1 \cap G_2 \neq 0$, $P \notin E$

$G_1 + E_1 + G_2 + E_2 + P$ con $G_1 \subset E_1$, $G_2 \subset E_2$

$G_1 + E_1 + G_2 + E_2 + G_3$ con $G_1 \subset E_1$, $G_2 \subset E_2$

$P_1 + G_1 + P_2 + G_2 + G_3$ con $P_1 \subset G_1$, $P_2 \subset G_2$

$G_1 + E_1 + P_2 + G_2 + E_2 + P_1$ con $G_1 \subset E_1$, $P_2 \in G_2 \subset E_2$.

Para subespacios <u>con</u> puntos comunes no se han encontrado condiciones que determinen su medibilidad o no respecto del grupo proyectivo. El estudio de algunos casos aislados, hace pensar que no existen estas condiciones generales.

B I B L I O G R A F I A

[1] M.E. CARTAN: "La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile". Paris - Gauthier-Villars, 1937.

[2] M.E. CARTAN: "La méthode du repere mobile, la théorie des groupes continues et les espaces generalises". Paris, Hermann et Cie Editeurs, Act Sci et indus, Vol. V. Paris 1935.

[3] M.E. CARTAN: "Les systèmes differèntiels extérieurs et leurs applications gèomètriques". Actualités scientifiques et industrielles N° 994, Hermann, Paris, 1945.

[4] S. CHERN: "On integral geometry in Klein spaces". Ann. of Math. 43 (1942), 178-189.

[5] C. CHEVALLEY: "Theory of Lie Groups", Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.

[6] R. DELTHEIL: "Probabilités Géométriques", Fascicule II, Gauthier-Villars et Cie Editeurs, Paris, 1926.

[7] GRECO, A.: "Five-parameter subgroups of the triangular group of the projective space P_3". Atti Accademie Peloritana dei Pericolanti. Classe Scienze, Fisiche, Matematiche e Naturali 59 (1981), 183-190 (1982).

C. ALBANO: "Sottogruppi a quattro parametri del gruppo triangolare dello spazio proiettivo P_3". Atti Accademia Peloritana dei Pericolanti. Classe Ia. di Scienze Fis., Mat. e Nat. Vol. LIX (1981).

D'ANDREA, Antonina, UTANO, Rosanna: "Subgroups of two and three parameters of the triangular group in the projective space P_3". Atti Accad. Peloritana Pericolanti. Classe Sci. Fis., Mat. e Nat. 59 (1981).

[8] S. HELGASON: "Differential geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces". Academic Press, 1978.

[9] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU: "Foundations of Differential Geometry". Interscience Publishers, Vol.II, New York - London, 1969.

[10] R.E. LUCCIONI: "Geometría Integral en Espacios Proyectivos". Instituto de Matemática, Univ. Nac. de Tucumán, Vol. 15 (53-80), 1964.

[11] I. MANISCALCO - A. POTOLANO: "Geometria Integrale nello spazio proiettivo P_3". Atti Accad. Peloritana dei Pericolanti, Clase Ia. de Scienze Fis., Mat. e Nat., Vol. LX (1982).

[12] V. PEPITORNE, G. RUSSO: "Invariant measure of pairs of elements in the affine plane". Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Serie II, Tomo 31 (81-104), 1982.

[13] H. REITER: "Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups". Oxford Univ. Press, London and New York, 1968.

[14] L.A. SANTALO: "Integral Geometry in Projective and Affine Spaces". Ann. of Math. (2) (739-755), 1950.

[15] L.A. SANTALO: "Introduction to Integral Geometry". Hermann et Cie Editeurs, Paris, 1953.

[16] L.A. SANTALO: "Integral Geometry on the Projective Groups of the plane depending on more than three parameters". Ann. Univ. Al I Cuza, Iasi, Sect Ia Mat (N.S.) 11 B (307-335), 1965.

[17] L.A. SANTALO: "On the measure of sets of parallel subspaces". Canadian Journal of Math. 14 (313-319), 1962.

[18] L.A. SANTALO: "Grupos del plano respecto de los cuales, los conjuntos de puntos y de rectas admiten una densidad invariante". Rev. UMA, Vol.23 (119-148), Buenos Aires, 1967.

[19] L.A. SANTALO: "Integral Geometry and Geometric Probability". Addison Wesley Publishing Company, USA, 1976.

[20] M. STOKA: "Géométrie Intégrale" (Memorial de Sciences Mathematiques Fas. 165), Gauthier Villars Ed., Paris, 1968.

[21] M. STOKA: "Sur les sous-groupes du groupe des transformations affines du plan". Rev. Roum. Math. Pures et Appl., Vol. XII, N°9 (1387-1389), 1967.

[22] M. STOKA: "Alcuni probleme di geometria integrale nello spazio proiettivo P_3". Att. Accad. Peloritana di Pericolanti, Clase Ia. de Scienze Fis., Mat. e Nat., Vol. LX, 1982.