Caracterización general de las concomitantes tensoriales

Prélat, Daniel

1987

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

"Caracterización General de los Concomitantes Tensoriales"

Autor:

Daniel Prélat

Director de Tesis:

Dr. Ricardo J. Noriega

Lugar de Trabajo:

CAECE - CONICET

Tesis para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

- 1987 -

A MI PADRE

In memorian

AGRADECIMIENTOS

a la "Fundación Prélat", mi madre - ternura estoica y paciencia infinita - y mi hermano;
a mi esposa, que asistió al parto de este trabajo cuando empezábamos a hacer camino juntos y a Arturo J. Pianzola, "un punto, una línea recta, una meta";
al Dr. Ricardo J. Noriega, maestro irremplazable;
al Dr. Luis A. Santaló, con quien hice - libro mediante - mis primeros pasos en el análisis tensorial, me abrió luego las puertas de la facultad y más tarde pude asistir a sus clases inolvidables;
al Dr. Claudio G. Schifini, inefable compañero de seminarios y congresos;
a los Dres. C. Sánchez, G. Corach y E. Lami Dozo;
a CAECE y CONICET, dos columnas y un techo, mi refugio económico;
a mis amigos de adolescencia, de facultad y de trebejos trasnochados;
a Caytania.

ÍNDICE

§ 0. INTRODUCCIÓN

Los dos resultados centrales de este trabajo son de carácter general. El primero consiste en la caracterización local de los escalares concomitantes de un número finito de tensores cualesquiera,

$$L = L(\underset{\mu}{F}{}^{i_1 \ldots i_{p_\mu}}_{j_1 \ldots j_{q_\mu}}) \qquad \mu = 1,r \tag{0.1}$$

entorno de cada "punto" $(\underset{1}{F}^o,\ldots,\underset{r}{F}^o)$ que verifique cierta condición que denominamos "de rango maximal". A partir de este resultado obtenemos el Teorema II, que exhibe una caracterización local de los concomitantes tensoriales

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(\underset{\mu}{F}{}^{h_1 \ldots h_{p_\mu}}_{k_1 \ldots k_{q_\mu}}) \tag{0.2}$$

entorno de cada punto de rango maximal. Las precisiones topológicas y formales de estos resultados se elaboran en el primer parágrafo, donde damos una definición de concomitante en términos de operadores de concomitancia y estudiamos en detalle el dominio de los mismos.

Los pasos de la demostración del Teorema I pueden resumirse esquemáticamente de la siguiente manera:

1º) Sea G el grupo lineal general $Gl(n,\mathbb{R})$, E un espacio euclídeo m-dimensional y $G\times E \ni (A,X) \longmapsto A*X \in E$ una acción. Dado un abierto G-estable U de un subespacio G-estable S de E, una aplicación $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es un operador escalar de concomitancia si verifica $\phi(A*X) = \phi(X)$ para toda $A \in G$ y todo $X \in E$. Mediante una elección adecuada de E, S y U , los escalares (0.1) pueden escribirse en función de estos operadores. Se trata entonces de caracterizar los operadores escalares.

2º) Sea $E \supset S \supset U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$ un operador escalar. S admite un suplemento $\bar{S}$ G-estable. (Este hecho no es evidente y se demuestra en el Apéndice I). Sea $\mathbb{P} : E \longrightarrow S$ la proyección correspondiente y sea $\bar{U} = \mathbb{P}^{-1}(U)$. Queda bien definido un operador escalar $\bar{\emptyset} : \bar{U} \longrightarrow R$ mediante $\bar{\emptyset}(\bar{X}) = \emptyset(P(\bar{X}))$. Puesto que $\bar{\emptyset}(P(\bar{X})) = = \emptyset(P(P(\bar{X}))) = \emptyset(P(X))$, el problema se reduce a caracterizar los operadores $\bar{\emptyset} : \bar{U} \longrightarrow R$ donde $\bar{U}$ es un abierto G-estable de E.

3º) Las ecuaciones $\emptyset(A*X) = \emptyset(X)$ son equivalentes (si $\emptyset$ es de clase C^1) a un sistema de ecuaciones de la forma $P^i_a(X)\ \emptyset,_i(X) = 0$, a=1,p , donde $\emptyset,_i$ indica la derivada parcial de $\emptyset$ respecto de su i-ésima variable. (Esta equivalencia se demuestra en el Lema de las Identidades de Invariancia). En el parágrafo 2 demostramos que las soluciones del sistema pueden escribirse, en torno de cada punto X^o donde la matriz $P^i_a(X^o)$ es de rango maximal, en la forma $\emptyset(X) = f(\ \emptyset_1(X),\dots,\emptyset_s(X)\ )$, donde $\emptyset_1,\dots,\emptyset_s$ son ciertas soluciones polinómicas que denominamos "trazas". Esto es válido para operadores escalares cuyo dominio es un abierto G-estable de E. Si $\emptyset$ es un operador definido en un abierto G-estable U de un subespacio propio S G-estable de E, la reducción al caso anterior se realiza mediante el paso 2º): sea $\bar{\emptyset}(\bar{X}) = \emptyset(P(\bar{X}))$; podemos escribir $\bar{\emptyset}(\bar{X}) = f(\emptyset_1(\bar{X}),\dots,\emptyset_s(\bar{X}))$ en un entorno $\bar{W}$ de cada punto $\bar{X}^o$ de rango maximal ; puesto que P es abierta, $W = P(\bar{W})$ es un entorno de $X^o = P(\bar{X}^o)$ y podemos escribir por lo tanto $\emptyset(X) = f(\emptyset_1(X),\dots,\emptyset_s(X))$ en un entorno W de cada punto $X^o = P(\bar{X}^o)$ tal que $\bar{X}^o$es de rango maximal (en este caso decimos que X^o es de rango maximal).

A partir del Teorema I deducimos el Teorema II y de ambos obtenemos los Corolarios I.1 y II.1 . En éstos se exhibe la forma general de los concomitantes de un tensor métrico y otros tensores cualesquiera, entorno de cada punto de su dominio, sea de rango maximal o no . Probablemente, encuanto a las aplicaciones, estos resultados son los más importantes del presente trabajo. Como casos particulares de interés físico,* damos la forma general de los concomitantes de un tensor métrico y un número finito cualquiera de bivectores (fórmula (5.12)) y de los concomitantes de un tensor métrico y sus derivadas primeras y segundas (fórmulas (6.21) y (6.23)).

El último parágrafo es una presentación breve y esquemática del cálculo de operadores escalares en términos de representaciones de álgebras de Lie.

* Ver, por ejemplo: [5], [6], [7], [8] y [9] .

§ 1. DOMINIOS DE CONCOMITANCIA E IDENTIDADES DE INVARIANCIA

Una definición general y rigurosa de concomitancia puede verse por ejemplo en [1]. Puesto que trabajaremos exclusivamente con tensores concomitantes de tensores (sin sus derivadas), nos limitaremos a exponer brevemente el concepto de "operadores tensoriales de concomitancia", estableciendo de paso la notación e hipótesis generales válidas para el resto del trabajo. Luego estudiaremos con cierto detenimiento el dominio de aplicabilidad de nuestros métodos de trabajo, para dar a continuación una manera sencilla de incluir los casos importantes de la teoría de concomitantes tensoriales en los resultados finales.

Supondremos dado un entero positivo n y usaremos la convención de suma por repetición de índices. Para cada par de enteros no negativos p y q, indicaremos con E^p_q el espacio de n^{p+q}-uplas ordenadas (v.gr. lexicográficamente) de números reales:

$$X = \left\| X^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \right\| \quad , \; i_1, \ldots, j_q = 1,n \tag{1.1}$$

con la estructura euclídea canónica dada por:

$$\begin{gathered}
\left\| X^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \right\| + \left\| Y^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \right\| = \left\| X^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + Y^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \right\| \\
t \left\| X^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \right\| = \left\| t\, X^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \right\| \\
\left\langle \left\| X^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \right\| , \left\| Y^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \right\| \right\rangle = \delta_{i_1 h_1} \ldots \delta_{i_p h_p} \, \delta^{j_1 k_1} \ldots \delta^{j_q k_q} \, X^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \, Y^{h_1 \ldots h_p}_{k_1 \ldots k_q}
\end{gathered} \tag{1.2}$$

para todo número real t, X e Y en E^p_q y donde δ es el símbolo de Kroenecker.

La razón por la cual distinguimos en (1.1) los índices en superíndices y subíndices es la misma que para las componentes de un tensor: para cada par de enteros no negativos p y q , consideraremos la acción del grupo lineal general $G = Gl(n,R)$ sobre E^p_q dada por:

$$A*X = \left[\!\left[A^{i_1}_{h_1} \cdots A^{i_p}_{h_p} (A^{-1})^{k_1}_{j_1} \cdots (A^{-1})^{k_q}_{j_q} X^{h_1 \cdots h_p}_{k_1 \cdots k_q} \right]\!\right] \tag{1.3}$$

para toda matriz $A=\left[\!\left[A^i_j\right]\!\right] \in G$ y todo $X \in E^p_q$. Para $p = q = 0$ convenimos en definir la acción de G sobre $E^0_0 = \mathbb{R}$ mediante $A*t = t$. En lugar del grupo lineal general puede considerarse la componente conexa de la identidad $G^+=\{ A \in Gl(n,\mathbb{R}) \; / \; Det(A) > 0 \}$. Diremos que un subconjunto U de E^p_q es G-estable si $A*U \subset U$ para toda $A \in G$.

Definición 1 : Un operador de concomitancia tensorial es una aplicación

$$\emptyset : U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_r \longrightarrow E^p_q \tag{1.4}$$

tal que:

i) cada U_μ es un abierto G-estable de un subespacio G-estable S_μ de $E^{p_\mu}_{q_\mu}$, $\mu = 1, r$ (en este caso diremos que $U_1 \times \cdots \times U_r$ es un dominio de concomitancia),

ii) para toda $A \in G$ y para todos $\underset{\mu}{X} \in U_\mu$, $\mu = 1, r$

$$\emptyset(A*\underset{1}{X}, \ldots, A*\underset{r}{X}) = A*\emptyset(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X}) \tag{1.5}$$

Diremos que $\emptyset$ es de clase C^k cuando cada una de las componentes $\emptyset^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} : U_1 \times \cdots \times U_r \longrightarrow \mathbb{R}$ de (1.4) es de clase C^k respecto de la estructura diferenciable natural de cada U_μ como abierto de un espacio lineal S_μ.

Nota: Un tensor $T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$ es concomitante de r tensores $\underset{\mu}{H}{}^{i_1 \cdots i_{p_\mu}}_{j_1 \cdots j_{q_\mu}}$, $\mu = 1, r$, si existe un operador de concomitancia $\emptyset$ tal que

$$T(x)^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = \emptyset^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}\left(\left[\!\left[\underset{1}{H}(x)^{i_1 \cdots i_{p_1}}_{j_1 \cdots j_{q_1}} \right]\!\right], \ldots, \left[\!\left[\underset{r}{H}(x)^{i_1 \cdots i_{p_u}}_{j_1 \cdots j_{q_u}} \right]\!\right] \right) \tag{1.6}$$

Por abuso de notación, (1.6) suele escribirse

$$T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}\left(\underset{\mu}{H}{}^{i_1 \cdots i_{p_\mu}}_{j_1 \cdots j_{q_\mu}} \right). \tag{1.7}$$

Dado un combio de coordenadas $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x)$, si $A^i_j(x) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}(x)$, se tiene:

$$\phi^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\Big(\Big[\!\!\Big[\bar{H}_1(\bar{x}(x))^{i_1\dots i_{p_1}}_{j_1\dots j_{p_1}}\Big]\!\!\Big], \dots, \Big[\!\!\Big[\bar{H}_r(\bar{x}(x))^{i_1\dots i_{p_r}}_{j_1\dots j_{q_r}}\Big]\!\!\Big]\Big) =$$

$$= \phi^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\Big(A(x)*\Big[\!\!\Big[H_1(x)^{i_1\dots i_{p_1}}_{j_1\dots j_{q_1}}\Big]\!\!\Big], \dots, A(x)*\Big[\!\!\Big[H_r(x)^{i_1\dots i_{p_r}}_{j_1\dots j_{q_r}}\Big]\!\!\Big]\Big) = \tag{1.8}$$

$$= A(x)^{i_1}_{h_1}\dots A(x)^{i_p}_{h_p}(A^{-1}(x))^{k_1}_{j_1}\dots(A^{-1}(x))^{k_q}_{j_q}\,\phi^{h_1\dots h_p}_{k_1\dots k_q}\Big(\Big[\!\!\Big[H_1(x)^{i_1\dots i_{p_1}}_{j_1\dots j_{q_1}}\Big]\!\!\Big], \dots, \Big[\!\!\Big[H_r(x)^{i_1\dots i_{p_r}}_{j_1\dots j_{q_r}}\Big]\!\!\Big]\Big) =$$

$$= A(x)^{i_1}_{h_1}\dots A(x)^{i_p}_{h_p}\,(A^{-1}(x))^{k_1}_{j_1}\dots(A^{-1}(x))^{k_q}_{j_q}\,T(x)^{h_1\dots h_p}_{k_1\dots k_q} = \bar{T}(\bar{x}(x))^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\ .$$

Resulta entonces que un tensor concomitante de $\underset{\mu}{H}{}^{i_1\dots i_{p_\mu}}_{j_1\dots j_{q_\mu}}$, $\mu = 1,r$, es un tensor $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ que se "construye a partir de"*[2] dichos tensores mediante una ley o regla de formación dada por las funciones $\phi^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ y esta regla es la misma en cada punto y en cualquier sistema de coordenadas (invariancia de forma). En (1.8) vemos que las identidades (1.5) son esenciales para esta invariancia de forma. Por otra parte estas mismas identidades requieren la G-estabilidad de los dominios U_μ, $\mu = 1,r$. Veamos que también resulta natural exigir (en la Definición 1) la G-estabilidad de los subespacios S_μ : en muchas aplicaciones importantes, los tensores $\underset{\mu}{H}{}^{i_1\dots i_{p_\mu}}_{j_1\dots j_{q_\mu}}$ satisfacen un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\underset{\mu,m}{L}\Big(\Big[\!\!\Big[\underset{\mu}{H}(x)^{i_1\dots i_{p_\mu}}_{j_1\dots j_{q_\mu}}\Big]\!\!\Big]\Big) = 0 \quad , \quad m = 1,K_\mu \tag{1.9}$$

donde $\underset{\mu,m}{L} : E^{p_\mu}_{q_\mu} \longrightarrow E^{a_\mu}_{b_\mu}$ son operadores lineales tales que $\underset{\mu,m}{L}(A*X) = A*\underset{\mu,m}{L}(X)$ para toda $A \in G$ y todo X perteneciente a $E^{p_\mu}_{q_\mu}$ (con lo cual las condiciones (1.9) son efectivamente geométricas (tensoriales): se satisfacen en cualquier sistema de coordenadas). Estos tensores $\underset{\mu}{H}{}^{\dots}_{\dots}$ también suelen satisfacer inecuaciones escalares del tipo:

$$\underset{\mu,m}{f}\Big(\Big[\!\!\Big[\underset{\mu}{H}(x)^{i_1\dots i_{p_\mu}}_{j_1\dots j_{q_\mu}}\Big]\!\!\Big]\Big) \geq 0 \quad (\text{ó} \neq 0)\ , \quad m = 1,K_\mu \tag{1.10}$$

donde $\underset{\mu,m}{f} : E^{p_\mu}_{q_\mu} \longrightarrow \mathbb{R}$ son escalares o pseudoescalares: $\underset{\mu,m}{f}(A*X) = \det(A)^{a_{\mu,m}}\underset{\mu,m}{f}(X)$,*[1] $a_{\mu,m} \in \mathbb{Z}$. Si estos enteros son pares, las inecuaciones (1.10) son invariantes por cambios de coordenadas. Si alguno es impar, dichos cambios deben ser de jacobiano positivo. Ejemplo clásico de las inecuaciones (1.10) es $\det(\,[\![g_{ij}(x)]\!]\,) > 0$. De las

---

*[1] en el segundo miembro de esta igualdad, los índices μ y m no están sumados, óbviamente.

*[2] es decir: son funciones de las componentes $\underset{\mu}{H}{}^{\dots}_{\dots}$, $\mu = 1,r$.

ecuaciones (1.9) tenemos por ejemplo: $F(x)_{ij} + F(x)_{ji} = 0$; $T(x)^i_i = 0$; $g(x)_{ij} - g(x)_{ji} = 0$; etc. Puede comprobarse directamente que cualquier operador de la forma

$$L(X) = \left[\!\!\left[\sum_{s \in \mathfrak{S}_p, \tau \in \mathfrak{S}_q} C(s,\tau)\, X^{i_{s(1)} \cdots i_{s(p)}}_{j_{\tau(1)} \cdots j_{\tau(q)}} \right]\!\!\right] \tag{1.11}$$

(donde $\mathfrak{S}_p$ y $\mathfrak{S}_q$ son los grupos de permutaciones de p y q elementos, respectivamente, y $C = C(s,\tau)$ una aplicación de $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$ en $\{-1,0,1\}$) satisface $L(A^*X) = A^*L(X)$ idénticamente. Más generales aún son las composiciones de estos operadores con los operadores de contracción de índices, que incluyen prácticamente todas las aplicaciones conocidas.

Las ecuaciones (1.9) determinan los subespacios

$$S_\mu = \bigcap_{m=1}^{K_\mu} \mathrm{Ker}(L_{\mu,m})$$

donde toman valores los sistemas de componentes $\left[\!\!\left[\underset{\mu}{H}(x)^{i_1 \cdots i_{p_\mu}}_{j_1 \cdots j_{q_\mu}} \right]\!\!\right]$. Estos subespacios resultan G-estables debido a las identidades $L(A^*X) = A^*L(X)$.$^\mu$ Dentro de estos subespacios tenemos los dominios

$$U_\mu = \bigcap_{m=1}^{K_\mu} f^{-1}_{\mu,m}((0,\infty)) \bigcap S_\mu$$

de variación de $\left[\!\!\left[\underset{\mu}{H}(x)^{\cdots}_{\cdots} \right]\!\!\right]$. La G-estabilidad de los dominios U_μ se deduce de las identidades $f_{\mu,m}(A^*X) = \det(A)^{a_{\mu,m}} f_{\mu,m}(X)$ (μ y m sin sumar) y basta que las funciones $f_{\mu,m}$ sean continuas para que estos dominios sean abiertos.

Nuestro objetivo final es caracterizar los operadores de concomitancia tensoriales de clase C^2 (esta condición de regularidad es muy poco restrictiva, teniendo en cuenta (1.6) y en vista de las aplicaciones). Pero nuestros métodos de trabajo requieren necesariamente de derivaciones del tipo

$$\text{a)}\ \frac{\partial\, \phi^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}}{\partial\, \underset{\mu}{X}^{i_1 \cdots i_{p_\mu}}_{j_1 \cdots j_{q_\mu}}} \qquad \text{y} \qquad \text{b)}\ \frac{\partial}{\partial A^i_j}\, \phi(A^*\underset{1}{X}, \ldots, A^*\underset{r}{X})^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \tag{1.12}$$

Estudiemos el problema:

Caso 1 : En el caso en que $S_\mu = E^{p_\mu}_{q_\mu}$, $\mu=1,r$, las funciones $\phi^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ están definidas y son de clase C^1 en $U_1\times U_2\dots\times U_r$, donde cada U_μ es un abierto del espacio euclídeo $E^{p_\mu}_{q_\mu}$. Por lo tanto las derivadas (1.12) a) están perfectamente definidas (derivadas parciales clásicas) y son continuas. En este caso, las derivadas (1.12) b) tampoco presentan dificultad, por ser G un abierto de E^1_1. Además, de $(A^{-1})^i_k A^k_j = \delta^i_j$ resulta

$$\frac{\partial (A^{-1})^i_k}{\partial A^h_m} A^k_j + (A^{-1})^i_h \delta^m_j = 0$$

e inmediatamente:

$$\frac{\partial (A^{-1})^i_j}{\partial A^h_m} = -(A^{-1})^i_h (A^{-1})^m_j \qquad (1.13)$$

Se tiene, entonces, para toda función $f\colon U_1\times\dots\times U_r \longrightarrow R$ de clase C^1 :

$$\frac{\partial}{\partial A^a_b} f(A*\underset{1}{X},\dots,A*\underset{r}{X}) = \sum_{\mu=1}^{r} \frac{\partial f(A*\underset{1}{X},\dots,A*\underset{r}{X})}{\partial \underset{\mu}{X}{}^{i_1\dots i_{p_\mu}}_{j_1\dots j_{q_\mu}}} \frac{\partial}{\partial A^a_b}\left[A^{i_1}_{h_1}\dots A^{i_{p_\mu}}_{h_{p_\mu}}(A^{-1})^{k_1}_{j_1}\dots(A^{-1})^{k_{q_\mu}}_{j_{q_\mu}} \underset{\mu}{X}{}^{h_1\dots h_{p_\mu}}_{k_1\dots k_{q_\mu}}\right] \qquad (1.14)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial A^a_b}\left[A^{i_1}_{h_1}\dots A^{i_{p_\mu}}_{h_{p_\mu}} (A^{-1})^{k_1}_{j_1}\dots(A^{-1})^{k_{q_\mu}}_{j_{q_\mu}} \underset{\mu}{X}{}^{h_1\dots h_{p_\mu}}_{k_1\dots k_{q_\mu}}\right] = \qquad (1.15)$$

$$= \sum_{s=1}^{p_\mu} A^{i_1}_{h_1}\dots A^{i_{s-1}}_{h_{s-1}} \delta^{i_s}_a A^{i_{s+1}}_{h_{s+1}}\dots A^{i_{p_\mu}}_{h_{p_\mu}} (A^{-1})^{k_1}_{j_1}\dots(A^{-1})^{k_{q_\mu}}_{j_{q_\mu}} \underset{\mu}{X}{}^{h_1\dots h_{s-1} b\, h_{s+1}\dots h_{p_\mu}}_{k_1\dots\dots\dots\dots k_{q_\mu}} +$$

$$- \sum_{s=1}^{q_\mu} A^{i_1}_{h_1}\dots A^{i_{p_\mu}}_{h_{p_\mu}} (A^{-1})^{k_1}_{j_1}\dots(A^{-1})^{k_{s-1}}_{j_{s-1}}(A^{-1})^{k_s}_{a}(A^{-1})^{b}_{j_s} (A^{-1})^{k_{s+1}}_{j_{s+1}}\dots(A^{-1})^{k_{q_\mu}}_{j_{q_\mu}} \underset{\mu}{X}{}^{h_1\dots h_{p_\mu}}_{k_1\dots k_{q_\mu}}$$

Caso 2 : Veamos ahora el caso general en que los U_μ son abiertos de subespacios propios S_μ de $E^{p_\mu}_{q_\mu}$, $\mu=1,r$. Una manera general y sencilla de reducir este caso al anterior es la siguiente:

1) Para cada $\mu = 1,r$, sea $\overline{S}_\mu$ un suplemento G-estable de S_μ. (La existencia de estos suplementos puede verse en Apéndice I).

2) Para cada $\mu = 1,r$, sea $\mathbb{P}_\mu : E_{q_\mu}^{p_\mu} \longrightarrow S_\mu$ la proyección de $E_{q_\mu}^{p_\mu}$ sobre S_μ respecto de $\overline{S}_\mu$. Estas proyecciones verifican idénticamente $\mathbb{P}_\mu(A*X) = A*\mathbb{P}_\mu(X)$, pues dado $X \in E_{q_\mu}^{p_\mu}$, si $X = X_o + \overline{X}$ es su descomposición (única) como suma de un elemento $X_o \in S_\mu$ y de un elemento $\overline{X} \in \overline{S}_\mu$, tenemos $A*X = A*X_o + A*\overline{X}$, donde $A*X_o \in S_\mu$ y $A*\overline{X} \in \overline{S}_\mu$ (por ser S_μ y $\overline{S}_\mu$ G-estables). Entonces, $\mathbb{P}_\mu(A*X) = A*X_o = A*\mathbb{P}_\mu(X)$.

3) Para cada $\mu = 1,r$, el conjunto $U'_\mu = \mathbb{P}_\mu^{-1}(U_\mu)$ es un abierto de $E_{q_\mu}^{p_\mu}$, por ser $\mathbb{P}_\mu$ continua. Veamos además que cada U'_μ es G-estable: sea $X \in U'_\mu$, es decir : $\mathbb{P}_\mu(X) \in U_\mu$. Entonces para cada $A \in G$, $\mathbb{P}_\mu(A*X)=A*\mathbb{P}_\mu(X) \in A*U_\mu \subset U_\mu$ (por ser U_μ G-estable). O sea: $A*X \in U'_\mu$.

4) Definimos $\emptyset' : U'_1 \times U'_2 \ldots \times U'_r \longrightarrow E_q^p$ dada por

$$\emptyset'(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X}) = \emptyset(\mathbb{P}_1(\underset{1}{X}),\ldots,\mathbb{P}_r(\underset{r}{X})) .$$

Las componentes $\emptyset'{}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} : U'_1 \times U'_2 \ldots \times U'_r \longrightarrow \mathbb{R}$ de esta aplicación son de clase C^1 (por serlo las componentes de $\emptyset$ y por ser cada $\mathbb{P}_\mu$ lineal y continua, ergo C^∞) y cada U'_μ es un abierto G-estable de $E_{q_\mu}^{p_\mu}$, $\mu=1,r$. Además, para toda $A \in G$ y toda $(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X}) \in U'_1 \times \ldots \times U'_r$ se tiene:

$$\begin{aligned}\emptyset'(A*\underset{1}{X},\ldots,A*\underset{r}{X}) &= \emptyset(\mathbb{P}_1(A*\underset{1}{X}),\ldots,\mathbb{P}_r(A*\underset{r}{X})) = \emptyset(A*\mathbb{P}_1(\underset{1}{X}),\ldots,A*\mathbb{P}_r(\underset{r}{X})) = \\ &= A*\emptyset(\mathbb{P}_1(\underset{1}{X}),\ldots,\mathbb{P}_r(\underset{r}{X})) = A*\emptyset'(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X})\end{aligned}$$

Por lo tanto, las funciones $\emptyset'{}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ están comprendidas en el Caso 1.

5) La reconstrucción de $\emptyset$ a partir de $\emptyset'$ es muy sencilla, dada la idempotencia de las proyecciones:

$$\emptyset(\mathbb{P}_1(\underset{1}{X})),\ldots,\mathbb{P}_r(\underset{r}{X})) = \emptyset(\mathbb{P}_1(\mathbb{P}_1(\underset{1}{X})),\ldots,\mathbb{P}_r(\mathbb{P}_r(\underset{r}{X}))) = \emptyset'(\mathbb{P}_1(\underset{1}{X}),\ldots,\mathbb{P}_r(\underset{r}{X}))$$

Es decir: $\emptyset = \emptyset'\big|_{U_1 \times U_2 \ldots \times U_r}$

Veamos ahora algunos ejemplos importantes de dominios de concomitancia:

<u>Ejemplo 1</u> : <u>Tensores métricos</u>: Sea s un entero tal que $-n \leq s \leq n$ y sea $U^s \subset E_2^o$ el conjunto de matrices reales $X = [\![X_{ij}]\!]$ tales que:

1) $X - X^t = 0$

2) $\det(X) \neq 0$

3) $\text{signatura}(X) = s$

Si tenemos en cuenta que la acción de G sobre E_2^o está dada por

$$A*X = [\![(A^{-1})_i^h \, (A^{-1})_j^k \, X_{hk}]\!] = (A^{-1})^t \, X \, (A^{-1}) \tag{1.16}$$

resulta inmediatamente que: a) el operador lineal $L(X) = X - X^t$ verifica idénticamente $L(A*X) = A*L(X)$ y por lo tanto el subespacio $S = \text{Ker}(L)$ de E_2^o es G-estable; b) la aplicación continua $S \ni X \xmapsto{f} \det(X) \in \mathbb{R}$ verifica $f(A*X) = \det(A)^{-2} f(X)$ y por lo tanto el conjunto $W = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ es un abierto G-estable de S; c) puesto que la signatura es invariante por congruencias, resulta ser U^s un subconjunto G-estable de W. Nos resta probar que U^s es, además, abierto en W (con lo cual resultará abierto en S): sea $X_o \in U^s$. Por ser W abierto en S, existe $\varepsilon > 0$ tal que el entorno esférico

$$B(X_o,\varepsilon) = \left\{ X \in S \;/\; \| X - X_o \| < \varepsilon \right\}$$

está contenido en W. Veamos que, además, $B(X_o,\varepsilon) \subset U^s$. Sea $X_1 \in B(X_o,\varepsilon)$. Entonces el segmento $X(t) = X_o + t(X_1 - X_o)$, $0 \leq t \leq 1$, está incluído en $B(X_o,\varepsilon)$, pues $\| X(t) - X_o \| = |t| \, \| X_1 - X_o \| \leq \| X_1 - X_o \| < \varepsilon$. Tenemos, por lo tanto, una transformación continua $X(t)$ de rango constante ($= n$, pues $X(t) \in B(X_o,\varepsilon) \subset W$), de donde se deduce que la signatura de $X(t)$ es constante. En particular, la signatura de $X_1 = X(1)$ es la misma que la de $X_o = X(0)$, es decir: $X_1 \in U^s$.

Hemos probado, entonces, que U^s es un dominio de concomitancia. Lo denominaremos "dominio de concomitancia de tensores métricos de signatura s", debido a que un tensor $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ concomitante de un tensor métrico de signatura s es, por definición, de la forma

$$T(x)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \phi^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}([\![g(x)_{ij}]\!])$$

para algún operador de concomitancia $\phi : U^s \longrightarrow E_q^p$. Por ejemplo y en abuso de notación:

$T_{ijkh} = g_{ih}\, g_{jk} - g_{ik}\, g_{jh}$. Terminaremos este ejemplo con una observación elemental pero importante: un suplemento G-estable de $S = \left\{ X \in E_2^o \;/\; X - X^t = 0 \right\}$ es el espacio de matrices antisimétricas $\bar{S} = \left\{ X \in E_2^o \;/\; X + X^t = 0 \right\}$.

<u>Ejemplo 2</u> : <u>Tensores antisimétricos</u> : Sea $U^- \subset E_2^o$ el conjunto de matrices $X = [\![X_{ij}]\!]$ tales que $X + X^t = 0$. Teniendo en cuenta (1.16) resulta inmediatamente que U^- es un subespacio G-estable de E_2^o y por lo tanto es un dominio de concomitancia. En las aplicaciones físicas es importante el dominio

$$U^s \times \underbrace{U^- \times U^- \ldots \times U^-}_{m \text{ veces}}$$

(donde U^s está dado en el ejemplo 1), pues este dominio corresponde a los concomitantes de un tensor métrico g_{ij} y de m campos antisimétricos F^{μ}_{ij} , $\mu = 1,m$. Un ejemplo de tales concomitantes (para n = 4) es el tensor de momento-energía de las ecuaciones de Einstein-Yang-Mills:

$$T_{ij} = B_{\mu\nu} \left(F^{\mu}_{ia} F^{\nu}_{jb}\, g^{ab} - \frac{1}{4} g_{ij}\, F^{\mu}_{ab} F^{\nu}_{cd}\, g^{ac} g^{bd} \right)$$

<u>Nota</u>: Las ecuaciones tensoriales *) $F_{ij},_k + F_{jk},_i + F_{ki},_j = 0$ no afectan el dominio de variación de las componentes F_{ij}. Más precisamente: dado un sistema de coordenadas locales $x^1,\ldots,x^n$ entorno de un punto de coordenadas $x_o^1,\ldots,x_o^n$, para cada matriz $X \in U^-$ y cada elemento $Y \in E_3^o$ tal que $Y_{ijk} + Y_{jik} = 0$ e $Y_{ijk} + Y_{jki} + Y_{kij} = 0$, existe un tensor antisimétrico F_{ij} que verifica $F_{ij},_k + F_{jk},_i + F_{ki},_j = 0$ tal que $F_{ij}(x_o) = X_{ij}$ y $F_{ij},_k(x_o) = Y_{ijk}$. Por ejemplo: $F_{ij}(x) = X_{ij} + Y_{ijk}(x^k - x_o^k)$.

<u>Ejemplo 3</u> : <u>Tensores de curvatura</u>: Sea $U^c \subset E_4^o$ el conjunto de elementos $X = [\![X_{hijk}]\!]$ tales que:

$$\begin{aligned} & X_{hijk} = Y_{hkij} + Y_{ijhk} - Y_{hjik} - Y_{ikhj} \\ & \text{para algún } Y \in E_4^o \text{ talque} \\ & Y_{hijk} = Y_{ihjk} = Y_{hikj} \end{aligned} \qquad (1.17)$$

Para ver que U^c es un subespacio G-estable de E_4^o basta considerar el subespacio

---

*) En el caso m = 1, se tiene el tensor momento-energía de las ecuaciones de Maxwell-Einstein para un campo electromagnético F_{ij} . Como es habitual, $F_{ij},_k$ indica la derivada parcial clásica de F_{ij} respecto de x^k.

$S = \left\{ Y \in E_4^o \;/\; Y_{hijk} - Y_{ihjk} = 0 = Y_{hijk} - Y_{hikj} \right\}$ y la aplicación lineal $\Theta : E_4^o \longrightarrow E_4^o$ dada por

$$\Theta\left(\left[\!\left[Z_{hijk}\right]\!\right]\right) = \left[\!\left[Z_{hkij} + Z_{ijhk} - Z_{hjik} - Z_{ikhj}\right]\!\right] .$$

La G-estabilidad de S es inmediata y Θ verifica idénticamente $\Theta(A*Z) = A*\Theta(Z)$, pues

$$(A^{-1})_h^a (A^{-1})_k^b (A^{-1})_i^c (A^{-1})_j^d Z_{abcd} + (A^{-1})_i^a (A^{-1})_j^b (A^{-1})_h^c (A^{-1})_k^d Z_{abcd} +$$

$$- (A^{-1})_h^a (A^{-1})_j^b (A^{-1})_i^c (A^{-1})_k^d Z_{abcd} - (A^{-1})_i^a (A^{-1})_k^b (A^{-1})_h^c (A^{-1})_j^d Z_{abcd} =$$

$$= (A^{-1})_h^a (A^{-1})_i^b (A^{-1})_j^c (A^{-1})_k^d \left(Z_{adbc} + Z_{bcad} - Z_{acbd} - Z_{bdac} \right) .$$

Entonces: $A*U^c = A*\Theta(S) = \Theta(A*S) \subset \Theta(S) = U^c$ para toda $A \in G$. Es decir: U^c es un dominio de concomitancia. En vista de las aplicaciones, consideremos un sistema de coordenadas locales $x^1,\dots,x^n$ entorno de un punto de coordenadas $x_o^1,\dots,x_o^n$ y veamos que U^c coincide con el conjunto $W \subset E_4^o$ formado por los elementos $\left[\!\left[R_{hijk}(x_o)\right]\!\right]$, donde R_{hijk} es el tensor de curvatura correspondiente a algún tensor métrico g_{ij} (de signatura s arbitrariamente prefijada). Para ver que $W \subset U^c$, basta tener en cuenta que

$$R_{hijk} = \frac{1}{2} \left(g_{hk'ij} + g_{ij'hk} - g_{hj'ik} - g_{ik'hj} \right) + \Gamma_{hk}^{a} \Gamma_{ij}^{b} g_{ab} - \Gamma_{hj}^{a} \Gamma_{ik}^{b} g_{ab} \qquad (1.18)$$

donde $\Gamma_{jk}^{i} = \frac{1}{2} \left(g_{ja'k} + g_{ak'j} - g_{kj'a} \right) g^{ai}$, y definir

$$Y_{hijk} = \frac{1}{2} \left(g_{hi'jk}(x_o) - \Gamma_{hi}^{a}(x_o) \Gamma_{jk}^{b}(x_o)\, g_{ab}(x_o) \right)$$

pues en ese caso tenemos $Y_{hijk} = Y_{ihjk} = Y_{hikj}$ y $R_{hijk}(x_o) = Y_{hkij} + Y_{ijhk} - Y_{hjik} + - Y_{ikhj}$. Es decir $\left[\!\left[R_{hijk}(x_o)\right]\!\right] \in U^c$.

Veamos ahora que $U^c \subset W$. Dado un elemento $X = \left[\!\left[Y_{hkij} + Y_{ijhk} - Y_{hjik} - Y_{ikhj}\right]\!\right]$ de U^c, sea

$$Z(x) = \left[\!\left[Z_{ij}(x)\right]\!\right] = \left[\!\left[2Y_{ijab} \,(x^a - x_o^a)\,(x^b - x_o^b)\right]\!\right]$$

y

$$\left[\!\left[g_{ij}(x)\right]\!\right] = M \exp\left(M^{-1} Z(x) \right)$$

donde $M = \left[\!\left[M_{ij}\right]\!\right]$ es una matriz cualquiera de U^s (ejemplo 1) , v.gr.:

$M = \mathrm{Diag}(-1,\dots,-1,1,\dots,1)$

Entonces:

a) $[\![g_{ij}(x)]\!] = M\ (\ I + M^{-1}\ Z(x) + \frac{1}{2}\ M^{-1}Z(x)M^{-1}Z(x) + \frac{1}{3!}M^{-1}Z(x)M^{-1}Z(x)M^{-1}Z(x) + \dots\ ) =$

$$= M + Z(x) + \tfrac{1}{2}Z(x)M^{-1}Z(x) + \tfrac{1}{3!}Z(x)M^{-1}Z(x)M^{-1}Z(x) + \dots \qquad (1.19)$$

Por lo tanto, dadas las simetrías de M y de $Z(x)$ (recordemos que $Y_{hijk} = Y_{ihjk}$), es inmediato comprobar que $[\![g_{ij}(x)]\!]$ es simétrica, pues el término general de la serie matricial (1.19) puede escribirse (excepto el primero, que es óbviamente simétrico) en la forma $\frac{1}{(k+1)!}(\ Z(x)M^{-1}\ )^k\ Z(x)$, $k \geq 0$, y se tiene:

$$\left[(Z(x)M^{-1})^k\ Z(x)\right]^t = Z(x)^t\left[(Z(x)M^{-1})^k\right]^t = Z(x)\left[(Z(x)M^{-1})^t\right]^k = Z(x)\ (M^{-1}Z(x))^k =$$

$$= Z(x)\ \underbrace{M^{-1}Z(x)\ M^{-1}Z(x)\ \dots\ M^{-1}Z(x)}_{k\ \text{veces}} = \underbrace{Z(x)M^{-1}\ Z(x)M^{-1}\ \dots\ Z(x)M^{-1}}_{k\ \text{veces}}\ Z(x) =$$

$$= (Z(x)M^{-1})^k\ Z(x)\ .$$

b) $[\![g_{ij}(x_o)]\!] = M$, pues $Z(x_o) = 0$.

c) $\mathrm{Det}\ [\![g_{ij}(x)]\!] = \mathrm{Det}(M)\ e^{\mathrm{Tr}(M^{-1}Z(x))} \neq 0$ para todo $x = (x^1,\dots,x^n)$.

d) De b) y c) se deduce que si las coordenadas $(x^1,\dots,x^n)$ varían en un dominio B arcoconexo de R^n (esta condición sobre el sistema de coordenadas locales no presupone pérdida de generalidad), la signatura de $[\![g_{ij}(x)]\!]$ es la de M para todo $x \in B$: dado $x_1 \in B$, sea $c : [0,1] \to R^n$ una curva continua tal que $c([0,1]) \subset B$, $c(0) = x_o$ y $c(1) = x_1$. Entonces $X(t) = [\![g_{ij}(c(t))]\!]$ es una curva continua en E_2^o de rango constante (= n , por c)). Se deduce que la signatura de $X(t)$ es constante. En particular: signatura de $[\![g_{ij}(x_1)]\!]$ = signatura de $X(1)$ = signatura de $X(0)$ = signatura de $[\![g_{ij}(x_o)]\!]$ = signatura de M = s .

Tenemos, entonces, un tensor métrico $g_{ij}(x)$ dado por (1.19) con la signatura requerida. Un cálculo directo muestra que el correspondiente tensor de curvatura (1.18) verifica $R_{hijk}(x_o) = Y_{hkij} + Y_{ijhk} - Y_{hjik} - Y_{ikhj} = X_{hijk}$ y por lo tanto $X \in W$.
El cálculo es bastante sencillo si se tiene en cuenta que : 1) $Z_{ij}(x_o) = 0$; 2) $Z_{ij',k}(x_o) = 0$ y por lo tanto $g_{ij',k}(x_o) = 0$ y 3) $Z_{hi',jk}(x) = 2Y_{hijk}$ y entonces , teniendo en cuenta 1) y 2) , $g_{hi',jk}(x_o) = 2Y_{hijk}$.

En cuanto a las aplicaciones, es importante el dominio de concomitancia $U^s x U^c$, correspondiente a los concomitantes

$$T(x)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \phi^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\left(\left[\!\left[g_{ij}(x)\right]\!\right], \left[\!\left[R_{hijk}(x)\right]\!\right]\right) \tag{1.20}$$

Nota: Se demuestra que todo concomitante $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ de g_{ij} y sus derivadas primeras y segundas puede escribirse en la forma (1.20). Más adelante daremos una definición ad-hoc de estos concomitantes y demostraremos que efectivamente pueden escribirse en esta forma.

<u>Obs.</u> : La fórmula (1.18) implica que para cada x_o las variables $\left[\!\left[g_{ij}(x_o)\right]\!\right] \in U^s$ y $\left[\!\left[R_{hijk}(x_o)\right]\!\right] \in U^c$ no son independientes. De todas maneras, del carácter tensorial de $T^{\cdots}_{\cdots}$ se deduce (a partir de (1.20)) que ϕ debe ser necesariamente un operador de concomitancia de dominio $U^s \times U^c$. Veamos porqué:

Respecto del tensor $g_{ij}(x)$ dado en (1.19), el sistema de coordenadas $x^1,\ldots,x^n$ es geodésico (con origen x_o), pues $g_{ij,k}(x_o) = 0$. Consideremos ahora cambios lineales de coordenadas:

$$\bar{x}^i = A^i_k\, x^k \;,\; A \in G\,. \tag{1.21}$$

Para cada uno de estos sistemas de coordenadas se tiene:

1) Sea $\bar{x}^i_o = \bar{x}^i(x_o) = A^i_k\, x^k_o$. Entonces, $\left[\!\left[\bar{g}_{ij}(\bar{x}_o)\right]\!\right] = \left[\!\left[(A^{-1})^a_i\, (A^{-1})^b_j\, g_{ab}(x_o)\right]\!\right] =$
$= \left[\!\left[(A^{-1})^a_i\, M_{ab}\, (A^{-1})^b_j\right]\!\right] = (A^{-1})^t\, M\, (A^{-1}) = A^*M$.

2) $\bar{g}_{ij,k}(\bar{x}) = \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}^k}\left[(A^{-1})^a_i\, (A^{-1})^b_j\, g_{ab}(x(\bar{x}))\right] = (A^{-1})^a_i\, (A^{-1})^b_j\, g_{ab,c}(x(\bar{x}))\dfrac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} =$
$= (A^{-1})^a_i\, (A^{-1})^b_j\, (A^{-1})^c_k\, g_{ab,c}(x(\bar{x}))$. Por lo tanto $\bar{g}_{ij,k}(\bar{x}_o) = 0$, pues $g_{ab,c}(x(\bar{x}_o)) =$
$= g_{ab,c}(x_o) = 0.$

3) $\bar{g}_{ij,kh}(\bar{x}) = (A^{-1})^a_i\, (A^{-1})^b_j\, (A^{-1})^c_k\, (A^{-1})^d_h\, g_{ab,cd}(x(\bar{x}))$, por lo tanto $\bar{g}_{ij,kh}(\bar{x}_o) =$
$= 2\, (A^{-1})^a_i\, (A^{-1})^b_j\, (A^{-1})^c_k\, (A^{-1})^d_h\, Y_{abcd}$.

En resumen, para cada sistema de coordenadas del tipo (1.21) tenemos: $\left[\!\left[\bar{g}_{ij}(\bar{x}_o)\right]\!\right] = A^*M =$
$= (A^{-1})^t\, M\, (A^{-1})$; $\bar{g}_{ij,k}(\bar{x}_o) = 0$ y $\left[\!\left[\bar{R}_{hijk}(\bar{x}_o)\right]\!\right] = A^*\left[\!\left[Y_{hkij} + Y_{ijhk} - Y_{hjik} - Y_{ikhj}\right]\!\right] = A^*X$.

El carácter tensorial de $T^{\cdots}_{\cdots}$ en (1.20) implica entonces que

$$\phi(A^*M, A^*X) = A^*\phi(M,X)$$

para toda $M \in U^s$, $X \in U^c$ y $A \in G$. Por lo tanto, ϕ debe ser efectivamente un operador de concomitancia de dominio $U^s \times U^c$.

Un ejemplo clásico, histórico e ilustre de concomitante de g_{ij} y R_{hijk} es el tensor gravitatorio de Einstein :

$$G_{ij}(x) = \phi_{ij}\left(\left[\!\left[g_{ij}(x)\right]\!\right], \left[\!\left[R_{hijk}(x)\right]\!\right]\right) = R_{ij}(x) - \frac{R(x)}{2}\, g_{ij}(x) + \lambda g_{ij}(x)$$

Terminaremos esta sección demostrando una importante propiedad de los operadores escalares de clase C^1.

LEMA 1 (De las "Identidades de Invariancia") (Du Plessis - 1969). ([4]).

Sea $\theta : U_1 \times \ldots \times U_r \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1, donde cada U_μ es un abierto G-estable de algún $E_{q_\mu}^{p_\mu}$, $\mu = 1,r$. Entonces, son equivalentes:

i) $\theta(A*\underset{1}{X},\ldots,A*\underset{r}{X}) = \theta(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X})$ para todos $A \in G$, $\underset{\mu}{X} \in U_\mu$, $\mu = 1,r$. (1.22)

ii) $\left.\dfrac{\partial}{\partial A^i_j}\, \theta(A*\underset{1}{X},\ldots,A*\underset{r}{X})\right|_{A=I} = 0$ para todos $i,j = 1,n$, $\underset{\mu}{X} \in U_\mu$, $\mu = 1,r$. (1.23)

(Las identidades (1.23) se denominan "identidades de invariancia").

<u>Demostración</u>: La implicación i)$\Longrightarrow$ii) es trivial. Veamos la recíproca: dada una función $\theta : U_1 \times \ldots \times U_r \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 que verifica ii), definamos $F : G \times U_1 \times U_2 \ldots \times U_r \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que: $F(A;\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X}) = \theta(A*\underset{1}{X},\ldots,A*\underset{r}{X})$. Entonces, F es óbviamente de clase C^1 y verifica:

a) $F(A;B*\underset{1}{X},\ldots,B*\underset{r}{X}) = F(AB;\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X})$, para todos $A,B \in G$, $\underset{\mu}{X} \in U_\mu$, $\mu = 1,r$.

b) $\left.\dfrac{\partial}{\partial A^i_j} F(A;\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X})\right|_{A=I} = 0$ para todos $\underset{\mu}{X} \in U_\mu$, $\mu = 1,r$.

Derivando ambos miembros de a) respecto de A^i_j y teniendo en cuenta b), obtenemos:

$$0 = \left.\frac{\partial}{\partial A^i_j} F(A;B*\underset{1}{X},\ldots,B*\underset{r}{X})\right|_{A=I} = \left.\frac{\partial}{\partial A^a_b} F(AB;\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X})\right|_{A=I} \left.\frac{\partial A^a_c B^c_b}{\partial A^i_j}\right|_{A=I} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial A^a_b} F(B;\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X})\, \delta^a_i\, B^j_b = \frac{\partial}{\partial A^i_b} F(B;X,\ldots,X)\, B^j_b\, .$$

Por la inversibilidad de B:

$$\frac{\partial}{\partial A^i_j} F(B;\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X}) = 0$$

para todos $B \in G$, $\underset{\mu}{X} \in U_\mu$, $\mu = 1,r$. Por lo tanto, $F(A;\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X}) = \theta(A*\underset{1}{X},\ldots,A*\underset{r}{X})$ no depende de A y podemos escribir:

$$\theta(A*\underset{1}{X},\ldots,A*\underset{r}{X}) = F(A;\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X}) = F(I;\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X}) = \theta(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X})$$

para todos $A \in G$, $\underset{\mu}{X} \in U_\mu$, $\mu = 1,r$. Q.E.D.

Nota: Una consecuencia interesante de este Lema es que si una función $\theta : U_1 \times \ldots \times U_r \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 es G^+-invariante, entonces es G-invariante.

§ 2. CARACTERIZACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL HOMOGÉNEO DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN A COEFICIENTES ANALÍTICOS.

En este parágrafo, m y p son dos enteros fijos tales que $1 \leq p \leq m$ y la convención de suma por repetición de índices vale para ambos: los índices h,i,j,k suman de 1 a m y los índices a,b,c,d de 1 a p. Indicaremos con t la m-upla de números reales $(t^1,\dots,t^m)$ y para una función $f(t)$: $f,_i = \dfrac{\partial f}{\partial t^i}$.

Sea W un abierto de R^m y sean $P_a^i : W \longrightarrow R$ mp funciones analíticas, $i = 1,m$, $a = 1,p$. Nos proponemos estudiar las soluciones $y = y(t)$ del sistema

$$P_a^i(t)\, y,_i(t) = 0 \qquad a = 1,p \tag{2.1}$$

Denominaremos "solución local entorno de t_o" (resp. "solución global") a toda función $y = y(t)$ definida y de clase C^1 en un entorno U_o de t_o (resp. en W) tales que las ecuaciones (2.1) se satisfacen para todo $t \in U_o$ (resp. $t \in W$).

Definición 1: diremos que $t \in W$ es de rango maximal si rango $\left[\!\left[P_a^i(t) \right]\!\right] = p$.

LEMA 2: Si existen p^3 funciones analíticas $F_{bc}^a : W \longrightarrow R$ (a,b,c = 1,p) tales que

$$P_{a},_k^i(t)\, P_b^k(t) - P_{b},_k^i(t)\, P_a^k(t) = F_{ab}^c(t)\, P_c^i(t) \tag{2.2}$$
para todos $t \in W$; $i = 1,m$; $a,b = 1,p$

entonces: para cada punto $t_o \in W$ de rango maximal existe un entorno esférico

$$B_o = \left\{ t \in R^m \;/\; \|t - t_o\| < \delta \right\} \subset W \tag{2.3}$$

y m-p soluciones locales analíticas $y_1, y_2, \dots, y_{m-p}$ independientes en B_o (i.e. : para cada $t \in B_o$, $\mathrm{grad}(y_1(t)),\dots,\mathrm{grad}(y_{m-p}(t))$ son linealmente independientes) tales que: para cada solución local $y: B_o \longrightarrow R$ de clase C^r existe un entorno abierto $B_{o,y}$ de t_o contenido en B_o y una función $f : A_o \longrightarrow R$ de clase C^r tales que

$$y(t) = f(\, y_1(t),\dots,y_{m-p}(t)\,) \qquad \text{para todo } t \in B_{o,y} \tag{2.4}$$

siendo $A_o = \left\{ (y_1(t),\dots,y_{m-p}(t)) \ / \ t \in B_{o,y} \right\}$ un entorno de $(y_1(t_o),\dots,y_{m-p}(t_o))$ abierto en $\mathbb{R}^{m-p}$.

Nota: Si $p = 1$, la hipótesis (2.2) del Lema se verifica trivialmente (con $F^a_{bc} = 0$) y el resultado es"ultra-clásico". Si $p = m$ y $\text{rango}\left[\!\left[P^i_a(t_o) \right]\!\right] = p$, en un entorno de t_o esta matriz es inversible y por lo tanto las únicas soluciones locales del sistema (2.1) son, en este caso, constantes. Ergo, basta demostrar el Lema para $1 < p < m$.

<u>Demostración</u>: La demostración está basada fundamentalmente en la versión local del Teorema de Frobenius dada por C. Chevalley en [2].

Sea $t_o \in W$ tal que $\text{rango}\left[\!\left[P^i_a(t_o) \right]\!\right] = p$. Algún subdeterminante de orden p

$$D(t) = \begin{vmatrix} P_1^{i_1}(t) & \dots & P_p^{i_1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ P_1^{i_p}(t) & \dots & P_p^{i_p}(t) \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

es, por lo tanto, no nulo en $t = t_o$. Puesto que la función $W \ni t \longmapsto D(t) \in \mathbb{R}$ es continua (por hipótesis las funciones $P^i_a(t)$ son analíticas) y $D(t_o) \neq 0$, existe un entorno

$$U_o = \left\{ t \in \mathbb{R}^m \ / \ \|t - t_o\| < \delta' \right\} \subset W$$

de t_o talque $D(t) \neq 0$ para todo $t \in U_o$. Entonces, los p campos

$$V_a(t) = P^i_a(t) \frac{\partial}{\partial t^i}\Big|_t \qquad a = 1,p \tag{2.6}$$

son linealmente independientes en cada $t \in U_o$. Además, son analíticos, por ser $P^i_a(t)$ analíticas. Tenemos entonces una distribución analítica p-dimensional Δ sobre U_o generada por $V_1,\dots,V_p$: $\Delta_t = \mathbb{L}(V_1(t),\dots,V_p(t))$ para cada $t \in U_o$. Es fácil ver que la hipótesis (2.2) implica que Δ es involutiva: dados dos campos en Δ,

$$X(t) = u^a(t)\, V_a(t) = u^a(t)\, P^i_a(t) \frac{\partial}{\partial t^i}\Big|_t$$

$$Y(t) = v^a(t)\, V_a(t) = v^a(t)\, P^i_a(t) \frac{\partial}{\partial t^i}\Big|_t$$

– es decir: $X^i(t) = u^a(t)\, P^i_a(t)$ e $Y^i(t) = v^a(t)\, P^i_a(t)$ –, se tiene

$$X^i{}_{,k}\, Y^k - Y^i{}_{,k}\, X^k = (u^a{}_{,k}\, P^i_a + u^a\, P^i_{a,k})\, v^b\, P^k_b - (v^a{}_{,k}\, P^i_a + v^a\, P^i_{a,k})\, u^b\, P^k_b =$$

$$= \underbrace{(u^a{}_{,k}\, v^b\, P^k_b - v^a{}_{,k}\, u^b\, P^k_b)}_{w^a\, P^i_a} P^i_a \quad + \quad \underbrace{u^a\, v^b\, (P^i_{a,k}\, P^k_b - P^i_{b,k}\, P^k_a)}_{+\ u^a\, v^b\, F^c_{ab}\, P^i_c} =$$

$$= (w^c + u^a\, v^b\, F^c_{ab})\, P^i_c$$

Por lo tanto, con la notación $z^c = w^c + u^a\, v^b\, F^c_{ab}$, se tiene:

$$\left[X , Y \right] (t) = z^c(t)\, P^i_c(t) \frac{\partial}{\partial t^i}\Big|_t = z^c(t)\, V_c(t) \quad \in \Delta_t$$

para cada $t \subset U_o$.

Podemos aplicar, entonces, el Teorema Local de Frobenius citado a la distribución analítica p-dimensional involutiva Δ entorno del punto t_o : existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $q = (q_1,\ldots,q_{m-p}) \in Q_\epsilon = (-\epsilon,\epsilon)^{m-p} \subset R^{m-p}$ existe una subvariedad analítica p-dimensional $S(q)$ inmersa en U_o tal que:

1) el conjunto $U_1 = \bigcup_{q \in Q_\epsilon} S(q)$ es un entorno abierto de t_o en R^m y cada $t \in U_1$ pertenece a una única $S(q)$. Es decir: $\left\{ S(q) \right\}_{q \in Q_\epsilon}$ es una "foliación" de U_1 ;

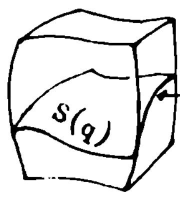
2) existen m-p funciones analíticas independientes $y_\mu : U_1 \longrightarrow R$, $\mu = 1,m-r$, tales que:

$$S(q) = \left\{ t \in U_1 \ / \ y_\mu(t) = q_\mu \ , \ \mu = 1,m-p \right\} \qquad (2.7)$$

para cada $q \in Q_\epsilon$;

3) $S(q)_t = \Delta_t$ para cada $t \in U_1$. Es decir: cada $S(q)$ es una variedad integral de Δ.

$R^m \supset U_1$:



$y_1(t) = q_1 \ , \ \ldots \ , \ y_{m-p}(t) = q_{m-p}$

Es inmediato comprobar que $y_1,\ldots,y_{m-p}$ son soluciones locales de (2.1) : dado $t \in U_1$, sea $S(q)$ la (única) variedad integral de Δ tal que $t \in S(q)$; puesto que los vectores $\mathrm{grad}(y_1(t)),\ldots,\mathrm{grad}(y_{m-p}(t))$ son ortogonales a $S(q)_t = \Delta_t = L(V_1(t),\ldots,V_p(t))$, resulta:

$$P^i_a(t)\, y_{\mu,i}(t) = \left\langle V_a(t) \ , \ \mathrm{grad}(y_\mu(t)) \right\rangle = 0 \qquad (2.8)$$

para todo $a = 1,p$, $\mu = 1,m-p$.

También es inmediato comprobar que para cada $t \in U_1$, los vectores

$$\mathrm{grad}(y_1(t)),\ldots,\mathrm{grad}(y_{m-p}(t)),\ V_1(t),\ldots,V_p(t) \qquad (2.9)$$

constituyen una base de R^m : el determinante de Gram del sistema (2.9) es, de acuerdo con (2.8) :

GRAM ($\mathrm{grad}(y_1(t)),\dots,\mathrm{grad}(y_{m-p}(t)),V_1(t),\dots,V_p(t)$) =

$$= \begin{vmatrix} \langle \mathrm{grad}(y_1(t)), \mathrm{grad}(y_1(t))\rangle & \dots & \langle \mathrm{grad}(y_1(t)), \mathrm{grad}(y_{m-p}(t))\rangle & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathrm{grad}(y_{m-p}(t)),\mathrm{grad}(y_1(t))\rangle & \dots & \langle \mathrm{grad}(y_{m-p}(t)),\mathrm{grad}(y_{m-p}(t))\rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \langle V_1(t),V_1(t)\rangle & \dots & \langle V_1(t),V_p(t)\rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & \langle V_p(t),V_1(t)\rangle & \dots & \langle V_p(t),V_p(t)\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \mathrm{GRAM}(\mathrm{grad}(y_1(t)),\dots,\mathrm{grad}(y_{m-p}(t))) \cdot \mathrm{GRAM}(V_1(t),\dots,V_p(t)) \tag{2.10}$$

y por lo tanto, puesto que cada uno de los sistemas $\left\{ \mathrm{grad}(y_1(t)),\dots,\mathrm{grad}(y_{m-p}(t))\right\}$ y $\left\{ V_1(t),\dots,V_p(t)\right\}$ es linealmente independiente para cada $t \in U_1$, el determinante (2.10) es no nulo.

Sea $\delta > 0$ tal que el entorno esférico $B_o = \left\{ t \in R^m \ / \ \| t - t_o \| < \delta \right\}$ de t_o esté incluido en U_1. Se tiene $B_o \subset U_1 \subset U_o \subset W \subset R^m$.

Consideremos ahora una solución local $y\colon B_o \longrightarrow R$ de clase C^r. Puesto que el sistema (2.9) es una base de R^m para cada $t \in B_o$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}(y(t)) = {} & A^1(t)\, \mathrm{grad}(y_1(t)) + \dots + A^{m-p}(t)\, \mathrm{grad}(y_{m-p}(t)) + \\ & + C^1(t)\, V_1(t) + \dots + C^p(t)\, V_p(t) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Por otra parte, por ser <u>y</u> solución local,

$$\langle \mathrm{grad}(y(t)) \ , \ V_a(t)\rangle = y,_i(t)\ P^i_a(t) = 0$$

para todo $t \in B_o$, $a = 1,p$. De (2.11) se deduce entonces

$$0 = C^1(t)\langle V_1(t),V_a(t)\rangle + \dots + C^p(t)\langle V_p(t),V_a(t)\rangle$$

para todo $t \in B_o$, $a = 1,p$. Puesto que $\mathrm{GRAM}(V_1(t),\dots,V_p(t)) \neq 0$, resulta $C^1(t) = 0, \dots, C^p(t) = 0$ para todo $t \in B_o$. De (2.11) y de la independencia lineal de $\mathrm{grad}(y_1(t)), \dots, \mathrm{grad}(y_{m-p}(t))$ resulta entonces la expresión (2.4).

Q.E.D.

COROLARIO : Bajo las siguientes hipótesis:

i) Existen p^3 funciones analíticas $F^a_{bc} : W \longrightarrow R$ ($a,b,c = 1,p$) tales que

$$P^i_{a,k}(t)\, P^k_b(t) - P^i_{b,k}(t)\, P^k_a(t) = F^c_{ab}(t) \cdot P^i_c(t)$$

para todos $t \subset W$; $i = 1,m$; $a,b = 1,p$.

ii) Existe un sistema numerable $\Lambda = \{ y_1, \ldots, y_h, \ldots \}$ de soluciones polinómicas globales $y_h : W \to R$ tales que: toda solución global polinómica $y : W \to R$ puede escribirse en la forma:

$$y(t) = \sum_{s=1}^{K} \sum_{\mu_1=1}^{r_1} \ldots \sum_{\mu_s=1}^{r_s} C^{\mu_1 \ldots \mu_s}\, y_{h_{\mu_1}}(t) \ldots y_{h_{\mu_s}}(t) \tag{2.12}$$

para todo $t \in W$,($C^{\cdots}$ constantes).

iii)Para toda solución local analítica $y(t) = \lim_{h \to \infty} \phi_h(t)$, cada suma parcial

$$\phi_h(t) = \sum_{s=1}^{K_h} C_{i_1 \ldots i_s}\, t^{i_1} \ldots t^{i_s} \tag{2.13}$$

es una solución global;

Se verifica que: para cada $t_o \in W$ de rango maximal existen:

a) un entorno D_o de t_o abierto y denso en W (i.e.: $\overset{o}{\bar{D}}_o = W$);

b) m-p polinomios $y_{h_1}, \ldots, y_{h_{m-p}} \in \Lambda$ independientes en D_o

tales que: dada una solución global $y : W \to R$ de clase C^r, para cada $t_1 \in D_o$ existe un entorno W_1 de t_1 abierto en R^m (y contenido en D_o) y una aplicación $f : A_1 \longrightarrow R$ de clase C^r tal que

$$y(t) = f(y_{h_1}(t), \ldots, y_{h_{m-p}}(t)) \quad \text{para todo } t \in W_1 \tag{2.14}$$

siendo $A_1 = \{ (y_{h_1}(t), \ldots, y_{h_{m-p}}(t)) \,/\, t \in W_1 \}$ un entorno abierto del punto $(y_{h_1}(t_1), \ldots, y_{h_{m-p}}(t_1))$ en el espacio R^{m-p} .

Nota: Obsérvese que los polinomios $y_{h_1}, \ldots, y_{h_{m-p}}$ son los mismos para cualquier solución $\underline{y} : W \to R$ y cualquier $t_1 \in D_o$.

Demostración: Dado t_o de rango maximal, algún subdeterminante $D(t)$ de orden p (ver (2.5)) es no nulo en $t = t_o$. Puesto que la función $W \ni t \longmapsto D(t) \in R$ es analítica, resulta que el conjunto

$$H_o = \{ t \in W \,/\, D(t) \neq 0 \} \tag{2.15}$$

es abierto no vacío y denso en W. Además, óbviamente, $t_o \in H_o$. Los campos $V_1, \ldots, V_p$ definidos en (2.6) son analíticos y linealmente independientes en cada punto $t \in H_o$.

Sea B_o el entorno de t_o dado en (2.3) e $y_1,\ldots,y_{m-p}$ las soluciones locales analíticas independientes del Lema 2. Podemos suponer δ suficientemente pequeño como para que las series

$$y_\mu(t) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\partial^{(h)} y_\mu(t_o)}{\partial t^{i_1}\ldots\partial t^{i_h}} (t^{i_1} - t_o^{i_1}) \ldots (t^{i_h} - t_o^{i_h}) = \sum_{h=1}^{\infty} C_{\mu\, i_1\ldots i_h}\, t^{i_1}\ldots t^{i_h} = \lim_{h\to\infty} \phi_{\mu h}(t) \tag{2.16}$$

converjan absoluta y uniformemente en B_o , $\mu = 1,m-p$. (Caso contrario, basta reemplazar δ por $\delta' = \mathrm{Min}\left\{ \delta , r_1 , \ldots , r_{m-p} \right\}$, siendo r_μ el radio de convergencia de la serie (2.16)*).

Sea $\Delta^\perp$ la distribución analítica m-p dimensional sobre B_o generada por $\mathrm{grad}(y_1),\ldots,\mathrm{grad}(y_{m-p})$ y sea, para cada $t \in B_o$, $\mathbb{V}_t$ el espacio R-lineal generado por $\mathrm{grad}(\mathfrak{y}_1(t)),\ldots,\mathrm{grad}(\mathfrak{y}_h(t)),\ldots$. Entonces:

1) Es claro que $\mathbb{V}_{t_o}$ es un subespacio de $\Delta^\perp_{t_o}$: por Lema 2, cada una de las funciones $\mathfrak{y}_h$ admite localmente una expresión de la forma $\mathfrak{y}_h(t) = f_h(y_1(t),\ldots,y_{m-p}(t))$ (para todo t en un entorno abierto $B_{o,\mathfrak{y}_h}$ de t_o contenido en B_o); diferenciando esta expresión se obtiene

$$\mathrm{grad}(\mathfrak{y}_h(t)) = f_{h,1}(y_1(t),\ldots,y_{m-p}(t))\, \mathrm{grad}(y_1(t)) + \ldots + f_{h,m-p}(y_1(t),\ldots,y_{m-p}(t))\, \mathrm{grad}(y_{m-p}(t)) ,$$

es decir: $\left\{ \mathrm{grad}(\mathfrak{y}_1(t_o)),\ldots,\mathrm{grad}(\mathfrak{y}_h(t_o)),\ldots\right\} \subset \Delta^\perp_{t_o}$.

2) Veamos ahora que $\Delta^\perp_{t_o}$ es subespacio de $\mathbb{V}_{t_o}$: las hipótesis ii) y iii) permiten escribir cada suma parcial $\phi_{\mu h}$ de (2.16) en la forma

$$\phi_{\mu h}(t) = \sum_{s=1}^{K(\mu,h)} \sum_{v_1=1}^{r_1} \ldots \sum_{v_s=1}^{r_s} C_{\mu h}^{v_1\ldots v_s}\, \mathfrak{y}_{h_{v_1}}(t)\ldots\mathfrak{y}_{h_{v_s}}(t) .$$

Entonces, derivando respecto de t^i se obtiene una expresión del tipo

$$\phi_{\mu h,i}(t) = \sum_{r=1}^{K'(\mu,h)} \theta^r_{\mu h}(t)\, \mathfrak{y}_{h_r,i}(t) .$$

Multiplicando ambos miembros por $\frac{\partial}{\partial t^i}$ y sumando sobre i = 1,m se tiene que $\mathrm{grad}(\phi_{\mu h}(t)) \in \mathbb{V}_t$. Puesto que $\lim_{h\to\infty} \mathrm{grad}(\phi_{\mu h}(t_o)) = \mathrm{grad}(y_\mu(t_o))$ y $\mathbb{V}_{t_o}$ es un espacio lineal de

---

* i.e.: La serie (2.16) converge absoluta y uniformemente para $\| t - t_o \| < r_\mu$.

dimensión finita (demostrado en 1)), resulta que $grad(y_\mu(t_o)) \in V_{t_o}$, $\mu = 1,m-p$.

Hemos demostrado entonces, que $\dim(V_{t_o}) = \dim(\Delta^\perp_{t_o}) = m-p$. Existe, por lo tanto, un sistema

$$\left\{ grad(y_{h_1}(t)) \ , \ \dots \ , \ grad(y_{h_{m-p}}(t)) \right\} \tag{2.17}$$

linealmente independiente en $t = t_o$. Puesto que la matriz $\left\| y_{h_v},_i(t) \right\|$, $i = 1,m$, $v = 1,m-p$, es de rango $m-p$ en t_o , existe un subdeterminante $D'(t)$ de orden $m-p$ de dicha matriz tal que $D'(t_o) \neq 0$. Siendo $W \ni t \longmapsto D'(t) \in R$ analítica, el conjunto

$$H'_o = \left\{ t \in W \ / \ D'(t) \neq 0 \right\} \tag{2.18}$$

es abierto no vacío y denso en W. Además, óbviamente, $t_o \in H'_o$. De (2.15) resulta entonces que el conjunto

$$D_o = H_o \cap H'_o = \left\{ t \in W \ / \ D(t) \neq 0 \neq D'(t) \right\} = \left\{ t \in W \ / \ D(t)D'(t) \neq 0 \right\} \tag{2.19}$$

es abierto no vacío y denso en W y contiene a t_o , pues la función $W \ni t \mapsto D(t)D'(t) \in R$ es analítica y $D(t_o)D'(t_o) \neq 0$. Teniendo en cuenta las definiciones de H_o y H'_o se observa que los sistemas $\left\{V_1(t),\dots,V_p(t)\right\}$ y $\left\{ grad(y_{h_1}(t)),\dots,grad(y_{h_{m-p}}(t))\right\}$ son linealmente independientes para cada $t \in D_o$. Por otra parte, puesto que por hipótesis las funciones $y_1,\dots,y_h,\dots$ son soluciones globales,

$$\left\langle V_a(t) \ , \ grad(y_{h_v}(t)) \right\rangle = P^i_a(t) \, y_{h_v},_i(t) = 0$$

para todo $t \in W$ (en particular para todo $t \in D_o$) y todos $a = 1,p$, $v = 1,m-p$. Mediante un razonamiento análogo al utilizado en (2.10) (considerando el determinante de Gram del sistema) se demuestra entonces que los vectores

$$grad(y_{h_1}(t)) \ , \ \dots \ , \ grad(y_{h_{m-p}}(t)) \ , \ V_1(t) \ , \ \dots \ , \ V_p(t) \tag{2.20}$$

constituyen una base de R^m para cada $t \in D_o$.

Sea $y : W \longrightarrow R$ una solución global de clase C^r. Para cada $t \in D_o$, $grad(y(t))$ es combinación lineal de los vectores (2.20); por ser y solución global, $grad(y(t))$ es ortogonal a cada uno de los vectores $V_1(t),\dots,V_p(t)$, por lo tanto (dada la independencia lineal de éstos), $grad(y(t))$ es combinación lineal de $grad(y_{h_1}(t)),\dots,grad(y_{h_{m-p}}(t))$, para cada $t \in D_o$, de donde se deduce la tesis (2.14) del Corolario.

Q.E.D.

§ 3. TRAZAS Y TEOREMA I

En este parágrafo daremos una caracterización de los operadores escalares $\emptyset : U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_r \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k ($k = 1$) cuyo dominio admita algún punto de rango maximal (Definición 1'), exhibiendo una base funcional numerable polinómica. Más precisamente: explicitaremos (Definición 2) un sistema numerable $Y_1, \ldots, Y_h, \ldots$ de operadores escalares*tal que todo operador escalar $\emptyset$ del tipo mencionado puede escribirse en la forma $\emptyset(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X}) = f(Y_{h_1}(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X}), \ldots, Y_{h_s}(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X}))$ entorno de cada punto de un subdominio abierto y denso en $U_1 \times \ldots \times U_r$, siendo $Y_{h_1}, \ldots, Y_{h_s}$ los mismos para cada uno de estos puntos y para todo $\emptyset$; en cambio, f es una función de clase C^k que en general depende del punto considerado (y de $\emptyset$, óbviamente). El enunciado riguroso de este resultado es precisamente el Teorema I.

<u>Definición 1'</u> : Sea $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_r \subset S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_r \subset E^{p_1}_{q_1} \times E^{p_2}_{q_2} \times \ldots \times E^{p_r}_{q_r}$ un dominio de concomitancia y sean

$$\mathbb{P}_\mu : E^{p_\mu}_{q_\mu} \longrightarrow S_\mu \quad , \ \mu = 1,r$$

las correspondientes proyecciones (ver Caso 2, pag. 7). Diremos que un punto $(\underset{1}{X}^o, \ldots, \underset{r}{X}^o) \in U_1 \times \ldots \times U_r$ es de rango maximal si existe algún punto $(\underset{1}{\bar{X}}^o, \ldots, \underset{r}{\bar{X}}^o) \in$ $\in E^{p_1}_{q_1} \times \ldots \times E^{p_r}_{q_r}$ tal que:

i) $(\underset{1}{X}^o, \ldots, \underset{r}{X}^o) = (\mathbb{P}_1(\underset{1}{\bar{X}}^o), \ldots, \mathbb{P}_r(\underset{r}{\bar{X}}^o))$;

ii) se verifica la siguiente implicación:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^a_b \, P(\underset{1}{\bar{X}}^o, \ldots, \underset{r}{\bar{X}}^o)^{\ b}_{a\ \mu}{}^{i_1 \ldots i_{p_\mu}}_{j_1 \ldots j_{q_\mu}} = 0 \\ \text{para todos } \mu = 1,r \ , \ i_1, \ldots, j_{q_\mu} = 1,n \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda^a_b = 0 \\ \text{para todos } a,b = 1,n \end{array}\right. \tag{3.1}$$

donde

$$P(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X})^{\ a}_{b\ \mu}{}^{i_1 \ldots i_{p_\mu}}_{j_1 \ldots j_{q_\mu}} = \sum_{s=1}^{p_\mu} \delta^{i_s}_b \underset{\mu}{X}{}^{i_1 \ldots i_{s-1}\, a\, i_{s+1} \ldots i_{p_\mu}}_{j_1 \ldots \ldots \ldots \ldots j_{q_\mu}} - \sum_{s=1}^{q_\mu} \delta^a_{j_s} \underset{\mu}{X}{}^{i_1 \ldots \ldots \ldots \ldots i_{p_\mu}}_{j_1 \ldots j_{s-1}\, b\, j_{s+1} \ldots j_{q_\mu}} \tag{3.2}$$

---

* polinómicos

Nota 1 : Esta definición no es más que una versión abstrusa (pero inevitable) de la Definición 1 (pag.15), pues la implicación (3.1) puede escribirse en la forma

$$\begin{array}{c} \lambda^{\bar a}\, P^{\bar i}_{\bar a}(t_o) = 0 \\ \text{para todo } \bar i = 1,m \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \lambda^{\bar a} = 0 \\ \text{para todo } \bar a = 1,p \end{array} \tag{3.3}$$

donde los índices múltiples

$$\bar a = \left\{ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\} \qquad \bar i = \left\{ \begin{matrix} & i_1 \dots i_{p_\mu} \\ \mu & j_1 \dots j_{q_\mu} \end{matrix} \right\} \tag{3.4}$$

varían de 1 a $p = n^2$ y de 1 a $m = \sum_{\mu=1}^{r} n^{p_\mu + q_\mu}$ respectivamente; la variable $t = (t^1, \dots, t^m)$ es la m-upla de las componentes $\underset{\mu}{X}{}^{i_1 \dots i_{p_\mu}}_{j_1 \dots j_{q_\mu}}$ ordenadas "en línea".

La implicación (3.1) equivale entonces a la independencia lineal de las columnas de la matriz $[\![P^{\bar i}_{\bar a}(t)]\!] \in R^{m \times p}$ en el punto $t_o = (\underset{1}{\bar X}{}^o, \dots, \underset{r}{\bar X}{}^o)$ y por lo tanto su rango es $= p$. Hemos optado por la condición (3.1) para la maximalidad del rango, pues es prácticamente imposible trabajar con subdeterminantes de $\left[\!\left[P^{a}_{b}\,{}_{\mu}{}^{i_1 \dots i_{p_\mu}}_{j_1 \dots j_{q_\mu}} \right]\!\right]$

Nota 2 : Teniendo en cuenta (3.2), las ecuaciones del antecedente de la implicación (3.1) se escriben

$$\sum_{s=1}^{p_\mu} \lambda^{i_s}_{b}\, \underset{\mu}{\bar X}{}^{o\, i_1 \dots i_{s-1}\, b\, i_{s+1} \dots i_{p_\mu}}_{\quad j_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots j_{q_\mu}} - \sum_{s=1}^{q_\mu} \lambda^{a}_{j_s}\, \underset{\mu}{\bar X}{}^{o\, i_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots i_{p_\mu}}_{\quad j_1 \dots j_{s-1}\, a\, j_{s+1} \dots j_{q_\mu}} = 0 \tag{3.5}$$

por lo tanto, si $(\underset{1}{X}{}^o, \dots, \underset{r}{X}{}^o)$ es de rango maximal, también es de rango maximal cualquier punto de la forma $(\underset{1}{X}{}^o, \dots, \underset{r}{X}{}^o, \underset{r+1}{X}{}^o, \dots, \underset{r'}{X}{}^o)$, cualesquiera sean $\underset{\nu}{X}{}^o \in E^{p_\nu}_{q_\nu}$, $\nu = r+1, r'$.

Nota 3 : Si un punto $(\underset{1}{X}{}^o, \dots, \underset{r}{X}{}^o)$ perteneciente a $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_r$ verifica él mismo la implicación (3.1), entonces es de rango maximal, pues la restricción de cada proyección $\mathbb{P}_\mu$ a S_μ es la identidad y basta por lo tanto tomar $\underset{\mu}{\bar X}{}^o = \mathbb{P}_\mu(\underset{\mu}{X}{}^o) = \underset{\mu}{X}{}^o$.

Ejemplo 1 : Si n = 4, es de rango maximal cualquier punto ($\underset{1}{X}^o, \dots, \underset{r}{X}^o$) tal que

$$\underset{1}{X}^o = \left[\!\left[\underset{1}{X}^o{}_{ij}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right]\!\right], \quad \underset{2}{X}^o = \left[\!\left[\underset{2}{X}{}_{ij}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{matrix} 0 & f & 0 & 0 \\ -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f' \\ 0 & 0 & -f' & 0 \end{matrix}\right]\!\right], \quad \underset{3}{X}^o = \left[\!\left[\underset{3}{X}^o{}_{ij}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & w' & 0 \\ 0 & -w' & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right]\!\right]$$

siendo $f \neq 0$, $f' \neq 0$, $f \neq f'$, $w^2 + w'^2 \neq 0$, $w \neq w'$.

Ejemplo 2 : También es de rango maximal (en cualquier dimensión n) cualquier punto $(\underset{1}{X}^o, \dots, \underset{r}{X}^o)$, r = n , que contenga n vectores $\underset{1}{X}^o = \left[\!\left[\underset{1}{u}^1, \dots, \underset{1}{u}^n\right]\!\right], \dots, \underset{n}{X}^o = \left[\!\left[\underset{n}{u}^1, \dots, \underset{n}{u}^n\right]\!\right]$ linealmente independientes, pues en este caso las correspondientes ecuaciones (3.5) son

$$\lambda^i_b \, \underset{j}{u}^b = 0 , \quad i,j = 1,n$$

y $\det \left[\!\left[\underset{j}{u}^i\right]\!\right] \neq 0$.

Nota : Es interesante destacar que para cada $\mu = 1,r$, las ecuaciones

$$P(\underset{1}{X}, \dots, \underset{r}{X})^b_{a\ \mu}{}^{i_1 \dots i_{p_\mu}}_{j_1 \dots j_{q_\mu}} = 0$$

$$a,b,i_1,\dots,j_{q_\mu} = 1,n$$

se verifican si y solamente si $\underset{\mu}{X}$ es isotrópico (i.e.: $A^*\underset{\mu}{X} = \underset{\mu}{X}$ para toda $A \in G$). La demostración de este hecho puede verse en Apéndice II. Podríamos decir, entonces, que los puntos $(\underset{1}{X}, \dots, \underset{r}{X})$ cuyas componentes son isotrópicas son de rango minimal (= 0).

Destacaremos ahora una familia de escalares polinómicos que jugarán un papel fundamental en los resultados subsiguientes. Usaremos el símbolo $\otimes$ con su significado habitual:

$$\underset{\mu}{X} \otimes \underset{\nu}{X} = \left[\!\left[\underset{\mu}{X}{}^{i_1 \dots i_{p_\mu}}_{j_1 \dots j_{q_\mu}} \ \underset{\nu}{X}{}^{i_{p_\mu+1} \dots i_{p_\mu+p_\nu}}_{j_{q_\mu+1} \dots j_{q_\mu+q_\nu}} \right]\!\right] \in E^{p_\mu+p_\nu}_{q_\mu+q_\nu}$$

Definición 2 : Para cada entero positivo m, cada m-upla $(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \{1, \dots, r\}^m$ tal que $p_{\mu_1} + p_{\mu_2} + \dots + p_{\mu_m} = q_{\mu_1} + q_{\mu_2} + \dots + q_{\mu_m}$ y cada par de permutaciones s, s' de $p_{\mu_1} + \dots + p_{\mu_m}$ elementos, sea

$$T_{\mu_1 \dots \mu_m s s'}(\underset{1}{X}, \dots, \underset{r}{X}) = (\underset{\mu_1}{X} \otimes \dots \otimes \underset{\mu_m}{X})^{i_{s(1)} \dots \dots i_{s(p_{\mu_1}+\dots+p_{\mu_m})}}_{i_{s'(1)} \dots \dots i_{s'(q_{\mu_1}+\dots+q_{\mu_m})}} \tag{3.6}$$

Estas funciones polinómicas, que denominaremos "trazas", son claramente invariantes.

De hecho, podríamos definir a las trazas (3.6) como los escalares obtenidos a partir de $\underset{1}{X},\dots,\underset{r}{X}$ mediante productos tensoriales, contracciones y permutaciones de índices. Otra manera de escribir estos escalares es

$$\mathbb{T} = C^{j_1 \dots j_\alpha}_{i_1 \dots i_\beta} \underset{\mu_1}{X}{}^{i_1 \dots i_{p_{\mu_1}}}_{j_1 \dots j_{q_{\mu_1}}} \cdots \underset{\mu_m}{X}{}^{i_{\cdot} \dots i_\beta}_{j_{\cdot} \dots j_\alpha} \qquad (3.7)$$

con $C^{\dots}_{\dots}$ isotrópico*.

Sea Λ el conjunto de trazas. Es claro que Λ es finito o numerable. Puede ocurrir inclusive que sea vacío; por ejemplo si $r = 1$ y $\underset{1}{X} = [\![u^i]\!]$ (es fácil ver que no existen operadores escalares $\phi : E^1 \longrightarrow R$ no constantes). Podemos escribir entonces

$$\Lambda = \{ \mathbb{T}_h \}_{h \in I} \qquad (3.8)$$

donde I es un intervalo natural inicial (finito o infinito).

<u>TEOREMA I</u> : Sea $U = U_1 \times \dots \times U_r$ un dominio de concomitancia. Entonces, para cada punto $X^o = (\underset{1}{X}^o,\dots,\underset{r}{X}^o) \in U$ de rango maximal, existe un entorno abierto D_o de X^o, denso en U (i.e.: $\mathring{\bar{D}}_o = U$) y un sistema finito de trazas $\mathbb{T}_1,\dots,\mathbb{T}_s$ tales que:

i) todo punto de D_o es de rango maximal;

ii) $\mathbb{T}_1,\dots,\mathbb{T}_s$ son independientes en D_o (i.e.: $\mathrm{grad}(\mathbb{T}_1(X)),\dots,\mathrm{grad}(\mathbb{T}_s(X))$ son linealmente independientes para cada $X \in D_o$) y

iii) dado un operador escalar $\phi : U \longrightarrow R$ de clase C^k, para cada punto $X' \in D_o$ existe un entorno abierto W' de X' contenido en D_o y una función $f : A \longrightarrow R$ de clase C^k tal que

$$\phi(X) = f(\mathbb{T}_1(X),\dots,\mathbb{T}_s(X)) \qquad (3.9)$$

para todo $X \in W'$, siendo $A = \left\{ (\mathbb{T}_1(X),\dots,\mathbb{T}_s(X)) \;/\; X \in W' \right\}$ un entorno de la s-upla $(\mathbb{T}_1(X'),\dots,\mathbb{T}_s(X'))$ abierto en R^s.

<u>Nota</u>: Obsérvese que las trazas $\mathbb{T}_1,\dots,\mathbb{T}_s$ son las mismas para cada $X' \in D_o$ y cada ϕ .

---

* Más aún: basta considerar los isotrópicos $C^{i_1 \dots i_\alpha}_{j_1 \dots j_\beta} = 0$ (si $\alpha \neq \beta$) y $= \sum_{\tau \in S_\alpha} C(\tau)\, \delta^{i_1}_{j_{\tau(1)}} \cdots \delta^{i_\alpha}_{j_{\tau(\alpha)}}$ (si $\alpha = \beta$), con <u>$C(\tau) \in \{0,1\}$</u> para todo $\tau \in S_\alpha$.

Demostración : Basta demostrar el caso en que $S_\mu = E^{\cdot p_\mu}_{q_\mu}$, $\mu = 1,r$. (Ver Caso 2, pag 7). Tenemos entonces un punto $X^o = (\underset{1}{X}^o,\ldots,\underset{r}{X}^o) = (P_1(\underset{1}{X}^o),\ldots,P_r(\underset{r}{X}^o))$ de rango maximal. (Ver Nota 3, pag 23).

La demostración consiste en la aplicación del Corolario del Lema 2 (pag 19), y la llevaremos a cabo en varios pasos, cada uno de los cuales es la verificación de una hipótesis de dicho corolario.

A) Sea $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ un operador de concomitancia de clase C^k. Por el Lema 1, sabemos que la identidad $\phi(A*\underset{1}{X},\ldots,A*\underset{r}{X}) = \phi(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X})$, $A \in G$, es equivalente al sistema de identidades

$$\frac{\partial}{\partial A^a_b}\phi(A*\underset{1}{X},\ldots,A*\underset{r}{X})\Big|_{A = I} = 0 \quad , \; a,b = 1,n \tag{3.10}$$

De (1.14), (1.15) y (3.2) resulta inmediatamente que (3.10) se escribe explícitamente:

$$\sum_{\mu=1}^{r} P(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X})^{b}_{a}{}_{\mu}{}^{i_1\ldots i_{p_\mu}}_{j_1\ldots j_{q_\mu}} \frac{\partial\phi(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X})}{\partial \underset{\mu}{X}{}^{i_1\ldots i_{p_\mu}}_{j_1\ldots j_{q_\mu}}} = 0 \tag{3.11}$$

para todos a,b = 1,n. Mediante los índices multiples (3.4), podemos escribir estas ecuaciones en la forma

$$P^{\bar{I}}_{\bar{a}}(t)\;\phi,_{\bar{I}}(t) = 0 \quad , \; \bar{a} = 1,n^2 \tag{3.12}$$

En resumen: una aplicación $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k es un operador de concomitancia sii satisface un sistema de ecuaciones del tipo (2.1). Para verificar las condiciones de involutibilidad (2.2) (hipótesis i) del Corolario), es necesario hacer un cálculo directo (y espantoso) a partir de (3.2), obteniéndose:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\partial P^{a}_{b}{}_{\mu}{}^{i_1\ldots i_{p_\mu}}_{j_1\ldots j_{q_\mu}}}{\partial \underset{\nu}{X}{}^{h_1\ldots h_{p_\nu}}_{k_1\ldots k_{q_\nu}}} P^{c}_{d}{}_{\nu}{}^{h_1\ldots h_{p_\nu}}_{k_1\ldots k_{q_\nu}} - \sum_{\nu=1}^{r}\frac{\partial P^{c}_{d}{}_{\mu}{}^{i_1\ldots i_{p_\mu}}_{j_1\ldots j_{q_\mu}}}{\partial \underset{\nu}{X}{}^{h_1\ldots h_{p_\nu}}_{k_1\ldots k_{q_\nu}}} P^{a}_{b}{}_{\nu}{}^{h_1\ldots h_{p_\nu}}_{k_1\ldots k_{q_\nu}} = \\
&= F^{a\,c\,h}_{b\,d\,k}\, P^{k}_{h}{}_{\mu}{}^{i_1\ldots i_{p_\mu}}_{j_1\ldots j_{q_\mu}} \quad , \quad F^{a\,c\,h}_{b\,d\,k} = \delta^a_d\,\delta^c_k\,\delta^h_b - \delta^a_k\,\delta^c_b\,\delta^h_d
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Mediante los índices múltiples (3.4), estas identidades se escriben en la forma

$$P^{\bar i}_{\bar a,\bar k}\, P^{\bar k}_{\bar b} - P^{\bar i}_{\bar b,\bar k}\, P^{\bar k}_{\bar a} = F^{\bar c}_{\bar a \bar b}\, P^{\bar i}_{\bar c}$$

Es decir que, efectivamente, las condiciones de involutibilidad se verifican para las identidades de invariancia (3.10) - (3.12). Para concluir este paso de la demostración, exhibimos el cálculo de (3.13):

Indicaremos con $P^{a\ \ i_1\dots i_{p_\mu}\ ,\nu\ k_1\dots k_{q_\nu}}_{b\ \mu\ j_1\dots j_{q_\mu}\ \ \ \ \ h_1\dots h_{p_\nu}}$ la derivada parcial de $P^{a\ \ i_1\dots i_{p_\mu}}_{b\ \mu\ j_1\dots j_{q_\mu}}$ respecto de $X_\nu{}^{h_1\dots h_{p_\nu}}_{k_1\dots k_{q_\nu}}$. Esta derivada es nula si $\mu \neq \nu$, como puede verse directamente en la definición (3.2). De esta misma definición se obtiene

$$P^{a\ \ i_1\dots i_{p_\mu}\ ,\mu\ k_1\dots k_{q_\mu}}_{b\ \mu\ j_1\dots j_{q_\mu}\ \ \ \ \ h_1\dots h_{p_\mu}} = \sum_{s=1}^{p_\mu} \delta^{i_s}_{b}\, \delta^{i_1}_{h_1}\dots\delta^{i_{s-1}}_{h_{s-1}}\, \delta^{a}_{h_s}\, \delta^{i_{s+1}}_{h_{s+1}}\dots\delta^{i_{p_\mu}}_{h_{p_\mu}}\, \delta^{k_1}_{j_1}\dots\delta^{k_{q_\mu}}_{j_{q_\mu}} +$$

$$- \sum_{s=1}^{q_\mu} \delta^{a}_{j_s}\, \delta^{i_1}_{h_1}\dots\delta^{i_{p_\mu}}_{h_{p_\mu}}\, \delta^{k_1}_{j_1}\dots\delta^{k_{s-1}}_{j_{s-1}}\, \delta^{k_s}_{b}\, \delta^{k_{s+1}}_{j_{s+1}}\dots\delta^{k_{q_\mu}}_{j_{q_\mu}}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{\nu=1}^{r} P^{a\ \ i_1\dots i_{p_\mu}\ ,\nu\ k_1\dots k_{q_\nu}}_{b\ \mu\ j_1\dots j_{q_\mu}\ \ \ \ \ h_1\dots h_{p_\nu}}\, P^{c\ \ h_1\dots h_{p_\nu}}_{d\ \nu\ k_1\dots k_{q_\nu}} = P^{a\ \ i_1\dots i_{p_\mu}\ ,\mu\ k_1\dots k_{q_\mu}}_{b\ \mu\ j_1\dots j_{q_\mu}\ \ \ \ \ h_1\dots h_{p_\mu}}\, P^{c\ \ h_1\dots h_{p_\mu}}_{d\ \mu\ k_1\dots k_{q_\mu}}$$

$$= \left[\sum_{s=1}^{p_\mu} \delta^{i_s}_{b}\, \delta^{i_1}_{h_1}\dots\delta^{i_{s-1}}_{h_{s-1}}\, \delta^{a}_{h_s}\, \delta^{i_{s+1}}_{h_{s+1}}\dots\delta^{i_{p_\mu}}_{h_{p_\mu}}\, \delta^{k_1}_{j_1}\dots\delta^{k_{q_\mu}}_{j_{q_\mu}}\right]\left[\sum_{z=1}^{p_\mu} \delta^{h_z}_{d}\, X_\mu{}^{h_1\dots h_{z-1}\, c\, h_{z+1}\dots h_{p_\mu}}_{k_1\dots\dots\dots\dots\dots\dots k_{q_\mu}}\right] +$$

$$-\left[\sum_{s=1}^{p_\mu} \delta^{i_s}_{b}\, \delta^{i_1}_{h_1}\dots\delta^{i_{s-1}}_{h_{s-1}}\, \delta^{a}_{h_s}\, \delta^{i_{s+1}}_{h_{s+1}}\dots\delta^{i_{p_\mu}}_{h_{p_\mu}}\, \delta^{k_1}_{j_1}\dots\delta^{k_{q_\mu}}_{j_{q_\mu}}\right]\left[\sum_{z=1}^{q_\mu} \delta^{c}_{k_z}\, X_\mu{}^{h_1\dots\dots\dots\dots\dots\dots h_{p_\mu}}_{k_1\dots k_{z-1}\, d\, k_{z+1}\dots k_{q_\mu}}\right] +$$

$$-\left[\sum_{s=1}^{q_\mu} \delta^{a}_{j_s}\, \delta^{i_1}_{h_1}\dots\delta^{i_{p_\mu}}_{h_{p_\mu}}\, \delta^{k_1}_{j_1}\dots\delta^{k_{s-1}}_{j_{s-1}}\, \delta^{k_s}_{b}\, \delta^{k_{s+1}}_{j_{s+1}}\dots\delta^{k_{q_\mu}}_{j_{q_\mu}}\right]\left[\sum_{z=1}^{p_\mu} \delta^{h_z}_{d}\, X_\mu{}^{h_1\dots h_{s-1}\, c\, h_{s+1}\dots h_{p_\mu}}_{k_1\dots\dots\dots\dots\dots\dots k_{q_\mu}}\right] +$$

$$+\left[\sum_{s=1}^{q_\mu} \delta^{a}_{j_s}\, \delta^{i_1}_{h_1}\dots\delta^{i_{p_\mu}}_{h_{p_\mu}}\, \delta^{k_1}_{j_1}\dots\delta^{k_{s-1}}_{j_{s-1}}\, \delta^{k_s}_{b}\, \delta^{k_{s+1}}_{j_{s+1}}\dots\delta^{k_{q_\mu}}_{j_{q_\mu}}\right]\left[\sum_{z=1}^{q_\mu} \delta^{c}_{k_z}\, X_\mu{}^{h_1\dots\dots\dots\dots\dots\dots h_{p_\mu}}_{k_1\dots k_{z-1}\, d\, k_{z+1}\dots k_{q_\mu}}\right] =$$

$$- \sum_{\substack{s = 1,p_\mu \\ z = 1,q_\mu}} \delta^{a}_{j_z} \delta^{i_s}_{d} \underset{\mu}{X}{}^{i_1\cdots i_{s-1}\, c\, i_{s+1}\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots j_{z-1}\, b\, j_{z+1}\cdots j_{q_\mu}} + \sum_{s=1}^{q_\mu} \delta^{a}_{j_s} \delta^{c}_{b} \underset{\mu}{X}{}^{i_1\cdots\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots j_{s-1}\, d\, j_{s+1}\cdots j_{q_\mu}} +$$

$$+ \sum_{\substack{s,z=1,q_\mu \\ s\neq z}} \delta^{a}_{j_s} \delta^{c}_{j_z} \underset{\mu}{X}{}^{i_1\cdots\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots j_{s-1}\, b\, j_{s+1}\cdots j_{z-1}\, d\, j_{z+1}\cdots j_{q_\mu}}$$

Los términos 1º y 6º de este último miembro de la igualdad son invariantes respecto de las permutaciones simultáneas $a \leftrightarrow c$ y $b \leftrightarrow d$; y mediante estas permutaciones, el término 3º se transforma en el 4º. Por lo tanto:

$$\sum_{\nu=1}^{r} P^{a}_{b\,\mu}{}^{i_1\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots j_{q_\mu}}, {}_{\nu}{}^{k_1\cdots k_{q_\nu}}_{h_1\cdots h_{p_\nu}} P^{c}_{d\,\nu}{}^{h_1\cdots h_{p_\nu}}_{k_1\cdots k_{q_\nu}} +$$

$$- \sum_{\nu=1}^{r} P^{c}_{d\,\mu}{}^{i_1\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots j_{q_\mu}}, {}_{\nu}{}^{k_1\cdots k_{q_\nu}}_{h_1\cdots h_{p_\nu}} P^{a}_{b\,\nu}{}^{h_1\cdots h_{p_\nu}}_{k_1\cdots k_{q_\nu}}$$

$$= \sum_{s=1}^{p_\mu} \delta^{i_s}_{b} \delta^{a}_{d} \underset{\mu}{X}{}^{i_1\cdots i_{s-1}\, c\, i_{s+1}\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots\cdots j_{q_\mu}} + \sum_{s=1}^{q_\mu} \delta^{a}_{j_s} \delta^{c}_{b} \underset{\mu}{X}{}^{i_1\cdots\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots j_{s-1}\, d\, j_{s+1}\cdots j_{q_\mu}} +$$

$$- \sum_{s=1}^{p_\mu} \delta^{i_s}_{d} \delta^{c}_{b} \underset{\mu}{X}{}^{i_1\cdots i_{s-1}\, a\, i_{s+1}\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots\cdots j_{q_\mu}} \quad \sum_{s=1}^{q_\mu} \delta^{c}_{j_s} \delta^{a}_{d} \underset{\mu}{X}{}^{i_1\cdots\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots j_{s-1}\, b\, j_{s+1}\cdots j_{q_\mu}} =$$

$$= \delta^{a}_{d} \left[\sum_{s=1}^{p_\mu} \delta^{i_s}_{b} \underset{\mu}{X}{}^{i_1\cdots i_{s-1}\, c\, i_{s+1}\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots\cdots j_{q_\mu}} - \sum_{s=1}^{q_\mu} \delta^{c}_{j_s} \underset{\mu}{X}{}^{i_1\cdots\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots j_{s-1}\, b\, j_{s+1}\cdots j_{q_\mu}} \right] +$$

$$- \delta^{c}_{b} \left[\sum_{s=1}^{p_\mu} \delta^{i_s}_{d} \underset{\mu}{X}{}^{i_1\cdots i_{s-1}\, a\, i_{s+1}\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots\cdots j_{q_\mu}} - \sum_{s=1}^{q_\mu} \delta^{a}_{j_s} \underset{\mu}{X}{}^{i_1\cdots\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots j_{s-1}\, d\, j_{s+1}\cdots j_{q_\mu}} \right] =$$

$$= \delta^{a}_{d} P^{c}_{b\,\mu}{}^{i_1\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots j_{q_\mu}} - \delta^{c}_{b} P^{a}_{d\,\mu}{}^{i_1\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots j_{q_\mu}} =$$

$$= \delta^{a}_{d} \delta^{c}_{k} \delta^{h}_{b} P^{k}_{h\,\mu}{}^{i_1\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots j_{q_\mu}} - \delta^{c}_{b} \delta^{a}_{k} \delta^{h}_{d} P^{k}_{h\,\mu}{}^{i_1\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots j_{q_\mu}} = (\delta^{a}_{d} \delta^{c}_{k} \delta^{h}_{b} - \delta^{c}_{b} \delta^{a}_{k} \delta^{h}_{d}) P^{k}_{h\,\mu}{}^{i_1\cdots i_{p_\mu}}_{j_1\cdots j_{q_\mu}}$$

Es decir: (3.13).

B) Veamos ahora que el conjunto $/\!\!\!\wedge$ de trazas verifica las hipótesis ii) y iii) del corolario del Lema 2 : sea $\phi(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X}) = \lim_{k\to\infty} \phi_k(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X})$ un operador escalar analítico, donde

$$\phi_k(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X}) = \sum_{h=o}^{k} C^{\mu_1\ldots\mu_h j_1\ldots j_{s_h}}_{i_1\ldots i_{s'_h}} \underset{\mu_1}{X}{}^{i_1\ldots i_{p_{\mu_1}}}_{j_1\ldots j_{q_{\mu_1}}} \cdots \underset{\mu_h}{X}{}^{i\,\cdot\,\cdot\,\cdot\, i_{s'_h}}_{j\,\cdot\,\cdot\,\cdot\, j_{s_h}} \qquad (3.14)$$

son las sumas parciales del desarrollo de ϕ en serie de potencias de $\underset{\mu}{X}{}^{\cdots}_{\cdots}$. La identidad $\phi(A*\underset{1}{X},\ldots,A*\underset{r}{X}) = \phi(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X})$ implica que los coeficientes de dicho desarrollo deben ser necesariamente isotrópicos, como puede verse desarrollando en serie la función $F(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X}) = \phi(A*\underset{1}{X},\ldots,A*\underset{r}{X}) - \phi(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X})$, para cada A en un entorno de la identidad. Más precisamente: supongamos que el desarrollo (3.14) es válido en un entorno W_o de un punto $X_o = (\underset{1}{X}^o,\ldots,\underset{r}{X}^o)$; puesto que la aplicación

$$G\times E^{p_1}_{q_1}\times\ldots\times E^{p_r}_{q_r} \ni (A,\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X}) \xmapsto{\ f\ } (A*\underset{1}{X},\ldots,A*\underset{r}{X}) \in E^{p_1}_{q_1}\times\ldots\times E^{p_r}_{q_r}$$

es continua y $f(I,X^o) = X^o$, existe un entorno abierto B_o de I en G y un entorno W'_o de X^o (que podemos suponer contenido en W_o) tales que $f(\, B_o\times W'_o\,) \subset W_o$. Entonces, para cada $A \in B_o$, la función F definida ut-supra admite un desarrollo en serie válido en W'_o cuyos coeficientes $(A^{-1}*C^{\mu_1\ldots\mu_h})^{\cdots}_{\cdots} - C^{\mu_1\ldots\mu_h}{}^{\cdots}_{\cdots}$ son todos nulos (pues $F \equiv 0$). Tenemos por lo tanto que

$$C^{\mu_1\ldots\mu_h} = A*C^{\mu_1\ldots\mu_h} \qquad (3.15)$$

para toda $A \in B_o$. Sea $\mathbb{B}$ un entorno*de I contenido en B_o tal que $\mathbb{B}^{-1} = \mathbb{B}$. Entonces, toda matriz $A \in G^+$ puede escribirse en la forma $A = A_1\, A_2 \ldots A_s$, con $A_1,\ldots,A_s \in \mathbb{B}$. Se deduce inmediatamente que la igualdad (3.15) es válida para toda $A \in G^+$. Pero un elemento de E^p_q es G^+-isotrópico sii es G-isotrópico (para cualquier p y cualquier q), como puede verse en Apéndice II (Corolario). Hemos demostrado, pues, que las constantes $C^{\mu_1\ldots\mu_h}{}^{\cdots}_{\cdots}$ son isotrópicas y por lo tanto su forma es bien conocida:

* abierto

(3.16)

$$C^{\mu_1\ldots\mu_h\; j_1\ldots j_s}_{\qquad\qquad i_1\ldots i_{s'}} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq s' \\ \displaystyle\sum_{\tau \in S_s} C_\tau^{\mu_1\ldots\mu_h}\, \delta^{j_1}_{i_{\tau(1)}} \cdots \delta^{j_s}_{i_{\tau(s)}} & \end{cases}$$

De (3.14) y (3.16) se tiene para cada suma parcial una expresión del tipo:

$$\phi_k(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X}) = \sum_{s=1}^{M_k} \sum_{h_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{h_s=1}^{k_s} C'^{\,h_1\ldots h_s}_k\; \mathfrak{T}_{h_1}(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X})\cdots\mathfrak{T}_{h_s}(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X}) \tag{3.17}$$

En el caso particular en que ϕ sea un polinomio, es óbvio entonces que ϕ admite una expresión del tipo (3.17) (omitiendo el subíndice k).

Por lo tanto, si el número $m = \sum_{\mu=1}^{r} n^{p_\mu+q_\mu}$ de variables es mayor o igual que el número $p = n^2$ de ecuaciones, el Teorema I se deduce del corolario del Lema 2. Veamos que en el caso $m < n^2$ este teorema también es válido: de la desigualdad $m < n^2$ se tiene necesariamente que $p_\mu+q_\mu < 2$, $\mu = 1,r$; estamos por lo tanto en el caso en que $\phi = \phi(u_1,\ldots,u_{r_0}, \underset{1}{X},\ldots,\underset{r'}{X}, \underset{1}{Y},\ldots,\underset{r''}{Y})$, donde cada u_w varía en un abierto $J_w \subset E^0_0 = R$, cada $\underset{\mu}{X} = [\![\underset{\mu}{X}{}_i]\!]$ varía en un abierto G-estable U_μ de E^0_1 y cada $\underset{\nu}{Y} = [\![\underset{\nu}{Y}{}^i]\!]$ varía en un abierto G-estable U'_ν de E^1_0 (recuérdese el Caso 2 pág 7), $w = 1,r_0$, $\mu = 1,r'$, $\nu = 1,r''$, $r_0 + r' + r'' = r$. Puesto que $m = r_0 + r'n + r''n < n^2$, se tiene $r'' < n$ y podemos por lo tanto definir un operador $\bar{\phi} : J_1\times\ldots\times J_{r_0}\times U_1\times\ldots\times U_{r'}\times U'_1\times\ldots\times U'_{r''}\times\underbrace{E^1_0\times\ldots\times E^1_0}_{n-r''} \longrightarrow R$ mediante:

$$\bar{\phi}(u_1,\ldots,u_{r_0},\underset{1}{X},\ldots,\underset{r'}{X},\underset{1}{Y},\ldots,\underset{r''}{Y},\underset{r''+1}{Y},\ldots,\underset{n}{Y}) = \phi(u_1,\ldots,u_{r_0},\underset{1}{X},\ldots,\underset{r'}{X},\underset{1}{Y},\ldots,\underset{r''}{Y}) \,. \tag{3.18}$$

El número de variables en el dominio de $\bar{\phi}$ es $m' = r_0 + r'n + n^2$ y por lo tanto, por lo ya demostrado, puede escribirse como función de trazas de $u_1,\ldots,u_{r_0},\underset{1}{X},\ldots,\underset{r'}{X},\underset{1}{Y},\ldots,\underset{n}{Y}$, entorno de cada punto de rango maximal. En particular, dados $\underset{1}{X}{}^0,\ldots,\underset{r'}{X}{}^0$ linealmente independientes y $\underset{1}{Y}{}^0,\ldots,\underset{r''}{Y}{}^0$ también linealmente independientes, todos en el dominio de ϕ (por hipótesis el dominio de ϕ debe admitir algún punto $(u^0_1,\ldots,u^0_{r_0},\underset{1}{X}{}^0,\ldots,\underset{r'}{X}{}^0,\underset{1}{Y}{}^0,\ldots,\underset{r''}{Y}{}^0)$ con esas condiciones), podemos completar una base $\underset{1}{Y}{}^0,\ldots,\underset{r''}{Y}{}^0,\underset{r''+1}{Y}{}^0,\ldots,\underset{n}{Y}{}^0$ de E^1_0 y obtener así un punto $(u_1^o,\dots,u_{r_o}^o, \underset{1}{X}^o,\dots,\underset{r'}{X}^o, \underset{1}{Y}^o,\dots,\underset{n}{Y}^o)$ de rango maximal en el dominio de $\bar{\phi}$. Teniendo en cuenta la forma de las trazas* podemos escribir entorno de cada punto de rango maximal del dominio de $\bar{\phi}$:

$$\bar{\phi}(u_1,\dots,u_{r_o}, \underset{1}{X},\dots,\underset{r'}{X}, \underset{1}{Y},\dots,\underset{n}{Y}) = f(u_1,\dots,u_{r_o}, \theta_{11}(\underset{1}{X},\underset{1}{Y}),\dots, \theta_{r'n}(\underset{r'}{X},\underset{n}{Y})\ ) \qquad (3.19)$$

donde $\theta_{\mu j}(\underset{\mu}{X},\underset{j}{Y}) = \underset{\mu k}{X}\ \underset{j}{Y}^k$, $\mu = 1,r'$, $j = 1,n$. Puesto que $\bar{\phi}$ no depende de $\underset{j}{Y}$ para $j \geq r''+1$, se tiene, derivando ambos miembros de (3.19) respecto de $\underset{j}{Y}^i$ ($j \geq r''+1$):

$$0 = \sum_{\mu=1}^{r'} \frac{\partial f}{\partial \theta_{\mu j}}\ \underset{\mu i}{X}$$

para todo $i = 1,n$ y todo $j = r''+1,n$. Dada la independencia lineal de $\underset{1}{X},\dots,\underset{r'}{X}$ en el entorno considerado, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_{\mu j}} = 0$$

para todo $\mu = 1,r'$ y todo $j = r''+1,n$. Por lo tanto:

$$\phi = \bar{\phi} = f(u_1,\dots,u_{r_o}, \theta_{11}(\underset{1}{X},\underset{1}{Y}),\dots, \theta_{r'r''}(\underset{r'}{X},\underset{r''}{Y})\ )$$

expresión válida entorno de cada punto $(u_1^o,\dots,u_{r_o}^o, \underset{1}{X}^o,\dots,\underset{r'}{X}^o,\underset{1}{Y}^o,\dots,\underset{r''}{Y}^o)$ del dominio de ϕ tal que los sistemas $\underset{1}{X}^o,\dots,\underset{r'}{X}^o$ e $\underset{1}{Y}^o,\dots,\underset{r''}{Y}^o$ son ambos linealmente independientes.

Q.E.D.

---

* En este caso, las trazas son de la forma

$$\mathrm{T} = u_{w_1}\cdots u_{w_s}\ \underset{\mu_1 i_1}{X}\cdots\underset{\mu_{s'} i_{s'}}{X}\ \underset{k_1}{Y}^{j_1}\cdots\underset{k_{s''}}{Y}^{j_{s''}}\ C^{i_1\dots i_{s'}}_{j_1\dots j_{s''}}$$

donde los coeficientes $C^{\cdots}_{\cdots}$ son isotrópicos (ver (3.16)); por lo tanto, son funciones polinómicas de $u_1,\dots,u_{r_o}$ y de los productos escalares $\underset{\mu i}{X}\ \underset{j}{Y}^i$, $\mu = 1,r'$, $j = 1,n$.

§ 4. DERIVADAS PARCIALES DE LAS TRAZAS Y TEOREMA II.

La idea central de la demostración del Teorema II se debe al Dr. Ricardo J. Noriega y consiste esencialmente en lo siguiente: dado un operador tensorial

$$\phi : U_1 \times \ldots \times U_r \longrightarrow E^p_q \tag{4.1}$$

de clase C^k ($k \geq 1$), podemos definir un operador escalar $\theta : U_1 \times \ldots \times U_r \times E^q_p \longrightarrow R$ de igual clase mediante

$$\theta(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X}, \underset{r+1}{X}) = \phi(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X})^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \underset{r+1}{X}{}^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} \tag{4.2}$$

Bajo las hipótesis del Teorema I, tenemos una expresión

$$\theta(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X}, \underset{r+1}{X}) = f(\, T_1(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X}, \underset{r+1}{X}), \ldots, T_s(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X}, \underset{r+1}{X})\,) \tag{4.3}$$

entorno de cada punto de rango maximal, donde f es de clase C^k y $T_1, \ldots, T_s$ son trazas independientes. Si la expresión (4.3) es válida en un abierto $W \times B$, donde W es un abierto en $U_1 \times \ldots \times U_r$ y B un abierto en E^q_p tal que <u>$0 \in B$</u> , entonces podemos derivar (4.3) respecto de $\underset{r+1}{X}{}^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ (esto siempre es posible) y especificar en $\underset{r+1}{X} = 0$ (esto es posible si $0 \in B$), obteniendo:

$$\frac{\partial\, \theta(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X}, 0)}{\partial \underset{r+1}{X}{}^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}} = \sum_{w=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial z_w}(\, T_1(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X}, 0), \ldots, T_s(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X}, 0)\,)\; \frac{\partial\, T_w(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X}, 0)}{\partial \underset{r+1}{X}{}^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}} \tag{4.4}$$

Pero el primer miembro de (4.4) es precisamente $\phi(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X})^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$, como puede verse inmediatamente a partir de (4.2).

Queda claro, entonces, que mediante este procedimiento (base de la demostración del Teorema II), la caracterización de los operadores tensoriales (4.1) se reduce a estudiar: a) el dominio de validez de (4.3), con especial atención a la posibilidad de especificar $\underset{r+1}{X} = 0$; b) la forma general de las derivadas de las trazas $T(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X}, \underset{r+1}{X})$ respecto de las componentes de $\underset{r+1}{X}$. El item a) es el más delicado* y será tratado en la demostración del Teorema II. Respecto del item b), haremos algunas observaciones previas.

* ver Nota pág 35

Dada una traza $\mathbb{T} : E^{p_1}_{q_1}\times\dots\times E^{p_r}_{q_r}\times E^{q}_{p} \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos escribirla en la forma:

$$\mathbb{T}(\underset{1}{X},\dots,\underset{r}{X},\underset{r+1}{X}) = C^{k_{11}\dots k_{1q_{\mu_1}}\dots k_{s1}\dots k_{sq_{\mu_s}}}_{h_{11}\dots h_{1p_{\mu_1}}\dots h_{s1}\dots h_{sp_{\mu_s}}} \underset{\mu_1}{X}{}^{h_{11}\dots h_{1p_{\mu_1}}}_{k_{11}\dots k_{1q_{\mu_1}}} \dots \underset{\mu_s}{X}{}^{h_{s1}\dots h_{sp_{\mu_s}}}_{k_{s1}\dots k_{sq_{\mu_s}}} \tag{4.5}$$

con $C^{\dots}_{\dots}$ isotrópico. Sea $g(\mathbb{T})$ el grado de $\mathbb{T}$ respecto de $\underset{r+1}{X}$ (es decir: el "número de veces que aparece $\underset{r+1}{X}$" en el segundo miembro de (4.5)), más precisamente:

$$g(\mathbb{T}) = \delta^{r+1}_{\mu_1} + \dots + \delta^{r+1}_{\mu_s} \quad . \tag{4.6}$$

Entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{T}(\underset{1}{X},\dots,\underset{r}{X},\lambda\,\underset{r+1}{X}) = \lambda^{g(\mathbb{T})}\,\mathbb{T}(\underset{1}{X},\dots,\underset{r}{X},\underset{r+1}{X}) \tag{4.7}$$

Resulta inmediatamente que:

. Si $g(\mathbb{T}) = 0$, $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\underset{1}{X},\dots,\underset{r}{X})$ es una traza de $\underset{1}{X},\dots,\underset{r}{X}$.

. Si $g(\mathbb{T}) = 1$, podemos escribir sin pérdida de generalidad:

$$\mathbb{T}(\underset{1}{X},\dots,\underset{r}{X},\underset{r+1}{X}) = C^{k_1\dots k_s\, i_1\dots i_p}_{h_1\dots h_{s'},\, j_1\dots j_q}\ \underset{\mu_1}{X}{}^{h_1\dots h_{p_{\mu_1}}}_{k_1\dots k_{q_{\mu_1}}} \dots \underset{\mu_{s''}}{X}{}^{h_{\cdot}\dots h_{s'}}_{k_{\cdot}\dots k_s}\ \underset{r+1}{X}{}^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}$$

y por lo tanto:

$$\frac{\partial\,\mathbb{T}}{\partial\,\underset{r+1}{X}{}^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}} = C^{k_1\dots k_s\, i_1\dots i_p}_{h_1\dots h_s,\, j_1\dots j_q}\ \underset{\mu_1}{X}{}^{h_1\dots h_{p_{u_1}}}_{k_1\dots k_{q_{u_1}}} \dots \underset{\mu_{s''}}{X}{}^{h_{\cdot}\dots h_{s'}}_{k_{\cdot}\dots k_s} \tag{4.8}$$

donde $\mu_1,\dots,\mu_{s''} \in \{1,\dots,r\}$.

. Si $g(\mathbb{T}) \geq 2$,

$$\frac{\partial\,\mathbb{T}(\underset{1}{X},\dots,\underset{r}{X},0)}{\partial\,\underset{r+1}{X}{}^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}} = 0$$

Por lo tanto el segundo miembro de (4.4)* es una combinación lineal de expresiones del tipo (4.8) y cuyos coeficientes son funciones de trazas de $\underset{1}{X},\dots,\underset{r}{X}$.

---

* que coincide con $\phi^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ siempre y cuando sea posible especificar $\underset{r+1}{X} = 0$.

Con estas observaciones en mente, pasemos directamente al:

<u>TEOREMA II</u> : Sea $U = U_1 \times \dots \times U_r \subset S_1 \times \dots \times S_r \subset E^{p_1}_{q_1} \times \dots \times E^{p_r}_{q_r}$ un dominio de concomitancia y sea $\phi : U \longrightarrow E^p_q$ un operador tensorial de clase C^k $(k \geq 1)$. Entonces, para cada punto $X^o = (\underset{1}{X}^o, \dots, \underset{r}{X}^o) \in U$ de rango maximal existen: 1) un entorno abierto W_o de X^o contenido en U ; 2) un sistema finito de trazas $\Gamma_w : E^{p_1}_{q_1} \times \dots \times E^{p_r}_{q_r} \longrightarrow \mathbb{R}$, $w = 1,r$; un sistema finito de funciones $f_h : A_o \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^{k-1}, $h = 1,H$, donde $A_o = \{(\Gamma_1(X), \dots, \Gamma_s(X)) / X \in W_o\}$ es un entorno de $(\Gamma_1(X^o), \dots, \Gamma_s(X^o))$ abierto en $\mathbb{R}^s$ y 4) un sistema finito de constantes $C_h^{\mu_1 \dots \mu_s, k_1 \dots k_\alpha}{}_{h_1 \dots h_\beta}$ isotrópicas respecto de los índices $k_1, \dots, k_\alpha, h_1, \dots, h_\beta$ tales que :

$$\phi(X)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \sum_{\substack{h=1,H \\ s'=1,M \\ \mu_1, \dots, \mu_{s'} = 1,r}} f_h(\Gamma_1(X), \dots, \Gamma_s(X)) \, C_h^{\mu_1 \dots \mu_s, k_1 \dots k_\rho \, i_1 \dots i_p}{}_{h_1 \dots h_\gamma \, j_1 \dots j_q} \underset{\mu_1}{X}{}^{h_1 \dots h_{p_{\mu_1}}}_{k_1 \dots k_{q_{\mu_1}}} \dots \underset{\mu_s}{X}{}^{h_\cdot \dots h_\gamma}_{k_\cdot \dots k_\rho} \tag{4.9}$$

para todo $X = (\underset{1}{X}, \dots, \underset{r}{X}) \in W_o$. La forma de las constantes $C^{\dots}_{\dots}$ puede verse en (3.16).

<u>Demostración</u>: Indicaremos con X la variable $(\underset{1}{X}, \dots, \underset{r}{X}) \in U$, con U^* el dominio de concomitancia $U_1 \times \dots U_r \times E^q_p = U \times E^q_p$ y con $(X, \underset{r+1}{X})$ la variable $(\underset{1}{X}, \dots, \underset{r}{X}, \underset{r+1}{X}) \in U^*$. Dado un punto $X^o \in U$ de rango maximal, podemos aplicar el Teorema 1 al punto $(X^o, 0) \in U^*$, pues este punto es de rango maximal (ver Nota 2 pág. 23). Sabemos entonces que existe un entorno abierto D^*_o de $(X^o, 0)$, denso en U^*, y un sistema finito de trazas $T^*_w : E^{p_1}_{q_1} \times \dots E^{p_r}_{q_r} \times E^q_p \longrightarrow \mathbb{R}$, $w = 1,s^*$, independientes en D^*_o , tales que todo operador escalar $\theta : U^* \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k $(k \geq 1)$ se escribe localmente como función de igual clase de dichas trazas entorno de cada punto de D^*_o . En particular esto es cierto para el escalar definido en (4.2) en un entorno abierto W^*_o de $(X^o, 0)$. Puesto que $\mathrm{grad}(\Gamma^*_1(X, \underset{r+1}{X})), \dots, \mathrm{grad}(\Gamma^*_{s^*}(X, \underset{r+1}{X}))$ son linealmente independientes para todo $(X, \underset{r+1}{X}) \in D^*_o$ y $\mathrm{grad}(\Gamma^*_w(X^o, 0)) = 0$ si $g(\Gamma^*_w) \geq 2$, (ver (4.6)), deben ser necesariamente $g(\Gamma^*_w) \leq 1$ para todo $w = 1,s^*$. Podemos escribir entonces, sin pérdida de generalidad:

$$\begin{aligned} \phi(X)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \underset{r+1}{X}{}^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} &= \theta(X, \underset{r+1}{X}) = f(\Gamma^*_1(X, \underset{r+1}{X}), \dots, \Gamma^*_{s^*}(X, \underset{r+1}{X})) = \\ &= f(\Gamma_1(X), \dots, \Gamma_s(X), \Gamma'_1(X, \underset{r+1}{X}), \dots, \Gamma'_{s_o}(X, \underset{r+1}{X})) \end{aligned} \tag{4.10}$$

para todo $(X, \underset{r+1}{X}) \in W^*_o$, donde $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$ son trazas de X y $\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_{s_o}$ son trzas de $(X, \underset{r+1}{X})$

de grado $g(\Gamma'_w) = 1$ (es decir: lineales en ${}_{r+1}X_1$), $w = 1, s_o$.

Por otra parte, W_o^* contiene un entorno abierto de $(X^o, 0)$ dela forma $W_o \times B_o$, donde W_o es un entorno de X^o abierto en U y B_o un entorno de 0 abierto en E_p^q . Derivando el primero y el último miembro de (4.10) respecto de ${}_{r+1}X_1{}^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ y especificando en $(X,0) \in W_o \times \{0\}$ se obtiene (4.9), si tenemos en cuenta (4.8) y definimos

$$f_{\mathfrak{h}}(\Gamma_1(X),\dots,\Gamma_s(X)) = \frac{\partial f}{\partial z^{\mathfrak{h}}}(\Gamma_1(X),\dots,\Gamma_s(X),0,\dots,0)$$

para cada $\mathfrak{h} = 1, s_o$.

Q.E.D.

Nota: La validez de (4.10) entorno de cada punto de un dominio de la forma $D_o \times B_o$, donde D_o es un abierto denso en U y B_o un entorno de 0 en E_p^q , no es clara. Es debido a este problema que el carácter local del Teorema II es más acentuado que en el Teorema I.

§ 5 . TENSORES MÉTRICOS Y RANGO MAXIMAL.

La presencia de tensores métricos en un dominio de concomitancia tiene una consecuencia muy agradable: la eliminación de la hipótesis de rango maximal en los Teoremas I y II. Demostraremos, por lo tanto, estos teoremas para el caso en que el dominio de concomitancia es de la forma $U^s \times U_1 \times U_2 \ldots \times U_r$, donde U^s es el dominio de los tensores métricos de signatura s (ver Ejemplo 1, pág. 9). Probablemente, el carácter local de los correspondientes enunciados - Corolarios I.1 y II.1 - pueda atenuarse, a la manera del Teorema I. Nosotros hemos preferido exhibir una versión más sencilla, dando directamente la expresión local de un operador de concomitancia en función de trazas entorno de cada punto de su dominio.

<u>COROLARIO I.1</u> : Sea r un entero no negativo y sea $U = U^s \times U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_r$ un dominio de concomitancia. Entonces, dado un operador escalar $\phi : U \longrightarrow R$ de clase C^k $(k \geq 1)$, para cada punto $X^o = (\underset{o}{X}^o, \underset{1}{X}^o, \ldots, \underset{r}{X}^o)$ de U existe un entorno abierto W^o de X^o , un sistema finito de trazas $T_\mu : U \longrightarrow R$, $\mu = 1, m$, y una función $f : A^o \longrightarrow R$ de clase C^k tales que:

$$\phi(X) = f(\, T_1(X), \ldots, T_m(X)\,) \tag{5.1}$$

para todo $X \in W^o$, siendo $A^o = \left\{ (\, T_1(X), \ldots, T_m(X)\,) \,/\, X \in W^o \right\}$ un entorno del punto $(\, T_1(X^o), \ldots, T_m(X^o)\,)$ abierto en R^m .

<u>Demostración</u> : Sea U^- el dominio de concomitancia de los tensores antisimétricos (ver Ejemplo 2, pág.10) y sea $\phi^- : U^s \times U_1 \times U_2 \ldots U_r \times U^- \longrightarrow R$ el operador dado por

$$\phi^-(\underset{o}{X}, \underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X}, Y) = \phi(\underset{o}{X}, \underset{1}{X}, \ldots, \underset{r}{X}) + Y_{ij}\, Y_{kh}\, (\underset{o}{X}^{-1})^{ik}\, (\underset{o}{X}^{-1})^{jh} \quad . \tag{5.2}$$

Tomemos ahora un punto cualquiera $(\underset{o}{X}^o, \underset{1}{X}^o, \ldots, \underset{r}{X}^o) \in U^s \times U_1 \times U_2 \ldots \times U_r$ y veamos que el punto $(\underset{o}{X}^o, \underset{1}{X}^o, \ldots, \underset{r}{X}^o, 0)$ es de rango maximal en $U^s \times U_1 \times U_2 \ldots U_r \times U^-$: sea $B \in G$ una matriz tal que

$$B^t\, \underset{o}{X}^o\, B = M = \mathrm{Diag}(\, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{s}, 1, \ldots, 1) \tag{5.3}$$

Elijamos ahora n números $u_1,\dots,u_n$ tales que $u_i \neq 0$ y $u_i \neq u_j$ $(i\neq j)$, $i,j=1,n$, y definamos

$$Q = Q_{ij} = (B^t)^{-1}\, \mathrm{Diag}(-u_1,\dots,-u_s,u_{s+1},\dots,u_n)\, B^{-1} \tag{5.4}$$

Sea $\mathbb{P} : E_2^o \longrightarrow U^-$ la proyección de E_2^o sobre U^- respecto del subespacio U^+ de matrices simétricas, que óbviamente es un suplemento G-estable de U^- en E_2^o . Puesto que Q es simétrica, $\mathbb{P}(Q) = 0$. Por lo tanto (ver Nota 2 pág. 23) para ver que $(\underset{o}{X}^o,\underset{1}{X}^o,\dots,\underset{r}{X}^o,0)$ es de rango maximal basta ver que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} &a) \quad \Lambda_i^a \, \underset{o}{X}^o{}_{aj} + \Lambda_j^a \, \underset{o}{X}^o{}_{ia} = 0 \quad , \quad i,j = 1,n \\ &b) \quad \Lambda_i^a \, Q_{aj} + \Lambda_j^a \, Q_{ia} = 0 \quad , \quad i,j = 1,n \end{aligned} \tag{5.5}$$

tiene como única solución $\Lambda_j^i = 0$, $i,j = 1,n$. Matricialmente, estas ecuaciones se escriben

$$\begin{aligned} &a') \quad \Lambda^t \underset{o}{X}^o + \underset{o}{X}^o \Lambda = 0 \\ &b') \quad \Lambda^t Q + Q \Lambda = 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Multiplicando ambas ecuaciones a izquierda por B^t y a derecha por B se obtiene :

$$\begin{aligned} &c) \quad (B^t \Lambda^t {B^t}^{-1})\, B^t \underset{o}{X}^o B + B^t \underset{o}{X}^o B\, (B^{-1} \Lambda B) = 0 \\ &d) \quad (B^t \Lambda^t {B^t}^{-1})\, B^t Q B + B^t Q B\, (B^{-1} \Lambda B) = 0 \end{aligned}$$

Con las notaciones $B^{-1}\Lambda B = H$ y $\mathrm{Diag}(-u_1,\dots,-u_s,u_{s+1},\dots,u_n) = Q_o$ se tiene, a partir de (5.3) y (5.4) :

$$\begin{aligned} &c) \quad H^t M + M H = 0 \\ &d) \quad H^t Q_o + Q_o H = 0 \ . \end{aligned} \tag{5.7}$$

Un cálculo directo muestra que la única solución de la ecuaciones (5.7) es $H = 0$, con lo cual resulta efectivamente que $\Lambda = B H B^{-1} = 0$.

Hemos demostrado entonces que el punto $(\underset{0}{X}^{0},\underset{1}{X}^{0},\dots,\underset{r}{X}^{0},0)$ es de rango maximal. Aplicando el Teorema I al operador (5.2), podemos afirmar que existe un entorno W^{-} de dicho punto, abierto en $U^{s}\times U_1\times U_2 \dots U_r\times U^{-}$, un sistema finito de trazas $\Gamma_1^{-},\dots,\Gamma_{m'}^{-}$ y una aplicación $f : A^{-}\longrightarrow R$ de clase C^{k} tales que

$$\phi^{-}(\underset{0}{X},\underset{1}{X},\dots,\underset{r}{X},Y) = f^{-}(\Gamma_1^{-}(\underset{0}{X},\underset{1}{X},\dots,\underset{r}{X},Y),\dots,\Gamma_{m'}^{-}(\underset{0}{X},\underset{1}{X},\dots,\underset{r}{X},Y)) \tag{5.8}$$

para todos $(\underset{0}{X},\underset{1}{X},\dots,\underset{r}{X},Y)\in W^{-}$. Teniendo en cuenta que W^{-} contiene un entorno de $(\underset{0}{X}^{0},\underset{1}{X}^{0},\dots,\underset{r}{X}^{0},0)$ de la forma $W^{0}\times W'$, donde W^{0} es un entorno de $(\underset{0}{X}^{0},\underset{1}{X}^{0},\dots,\underset{r}{X}^{0})$, y que para cada $\mu = 1,m'$ $\Gamma_\mu(\underset{0}{X},\underset{1}{X},\dots,\underset{r}{X}) = \Gamma_\mu^{-}(\underset{0}{X},\underset{1}{X},\dots,\underset{r}{X},0)$ es idénticamente nula o una traza, la expresión (5.1) resulta de (5.2) y (5.8) para $Y = 0$.

Q.E.D.

De la misma forma en que hemos demostrado el Teorema II a partir del Teorema I puede demostrarse, a partir del Corolario precedente, el siguiente:

COROLARIO II.1 : Dado un operador de concomitancia $\phi : U^{s}\times U_1\times U_2 \dots\times U_r \longrightarrow E_q^p$ de clase C^{k} $(k\geq 1)$, entorno de cada punto de su dominio podemos escribir

$$\phi(X)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = \tag{5.9}$$

$$= \sum_{\substack{\eta=1,H\\ s'=1,M\\ \mu_1,\dots,\mu_{s'}=0,r}} f_\eta(\Gamma_1(X),\dots,\Gamma_m(X))\ \underset{\eta}{C}^{\mu_1\dots\mu_{s'},k_1\dots k_\alpha i_1\dots i_p}_{\qquad h_1\dots h_\beta j_1\dots j_q}\ \underset{\mu_1}{X}{}^{h_1\dots h_{p_{\mu_1}}}_{k_1\dots k_{q_{\mu_1}}}\cdots \underset{\mu_{s'}}{X}{}^{h_\cdot\dots h_\beta}_{k_\cdot\dots k_\alpha}$$

para algunas funciones f_η de clase C^{k-1}, algunas trazas $\Gamma_v : U^{s}\times U_1\times U_2 \dots\times U_r\longrightarrow R$ y algunas constantes isotrópicas $\underset{\eta}{C}^{u_1\dots u_{s'},\dots}_{\dots}$; $p_0 = 0$ y $q_0 = 2$.

Como aplicación inmediata damos el siguiente:

Ejemplo: Concomitantes de un tensor métrico y r campos antisimétricos F^{μ}_{ij}, $\mu = 1,r$. Indicaremos con $\underset{\mu}{H}$ la matriz de componentes $\underset{\mu}{H}{}^{i}_{\cdot j} = g^{ia} F^{\mu}_{aj}$, $\mu = 1,r$. Dada la forma general de las trazas

$$F = C^{i_1 j_1 \ldots i_s j_s \; h_1 k_1 \ldots h_{s'} k_{s'}}_{\mu_1 \ldots \mu_s} \, g_{h_1 k_1} \ldots g_{h_{s'} k_{s'}} F^{\mu_1}_{i_1 j_1} \ldots F^{\mu_s}_{i_s j_s} \tag{5.10}$$

y las simetrías y antisimetrías de g^{ij} y F^{μ}_{ij} (respectivamente), resulta inmediato que podemos escribirlas en función de los escalares

$$\phi_{\mu_1 \ldots \mu_s} = \mathrm{Tr}(\underset{\mu_1}{H} \underset{\mu_2}{H} \ldots \underset{\mu_s}{H}) \quad , \quad \mu_1, \ldots, \mu_s = 1,r \tag{5.11}$$

Por lo tanto, dado un concomitante $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ de clase C^k ($k \geq 1$) de $g_{ij}, F^1_{ij}, \ldots, F^r_{ij}$, podemos escribir

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \sum_{\mathfrak{h}=1}^{K} L_{\mathfrak{h}} \, \underset{\mathfrak{h}}{C}{}^{i_1 \ldots i_p a_1 b_1 \ldots a_s b_s}_{\mu_1 \ldots \mu_s j_1 \ldots j_q h_1 k_1 \ldots h_t k_t} \, g^{h_1 k_1} \ldots g^{h_t k_t} F^{\mu_1}_{a_1 b_1} \ldots F^{\mu_s}_{a_s b_s} \tag{5.12}$$

entorno de cada "punto" $(g^{o}_{ij}, F^{1}_{oij}, \ldots, F^{r}_{oij})$, donde las constantes $\underset{\mathfrak{h}}{C}{}^{\cdots}_{\mu_1 \ldots \mu_s \cdots}$ son isotrópicas y los coeficientes $L_{\mathfrak{h}}$ son funciones de clase C^{k-1} de los escalares (5.11). Si $r = 0$, estos coeficientes son constantes.

§ 6 . CONCOMITANTES DE UN TENSOR MÉTRICO Y SUS DERIVADAS PRIMERAS Y SEGUNDAS.

En este parágrafo aplicaremos los Corolarios I.1 y II.1 al estudio de los concomitantes de un tensor métrico y sus derivadas primeras y segundas. Puesto que no hemos definido concomitantes de un tensor y sus derivadas, daremos una definición ad-hoc para el caso que nos interesa.

Sean $g_{ij}(x)$ ($i,j=1,n$) las componentes de un tensor métrico entorno de un punto de coordenadas $x_o = (x_o^1,\dots,x_o^n)$. Dada una matriz $B = [\![B_j^i]\!] \in G$, para cualquier elemento $B' = [\![B_{jk}^i]\!] \in E_2^1$ simétrico respecto de j,k y para cualquier elemento $B'' = [\![B_{jkh}^i]\!] \in E_3^1$ simétrico respecto de j,k,h , las ecuaciones

$$x^i = x_o^i + B_j^i\,(\bar x^j - \bar x_o^j) + B_{jk}^i\,(\bar x^j - \bar x_o^j)(\bar x^k - \bar x_o^k) + B_{jkh}^i\,(\bar x^j - \bar x_o^j)(\bar x^k - \bar x_o^k)(\bar x^h - \bar x_o^h)$$

$$i = 1,n \tag{6.1}$$

definen un cambio de coordenadas entorno de $x_o = x(\bar x_o)$, pues la aplicación

$$R^n \ni x \longmapsto J(x) = \mathrm{Det}\left[\!\!\left[\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\right]\!\!\right] \in R$$

es continua y $J(\bar x_o) = \mathrm{Det}(B) \neq 0$. Para este cambio de coordenadas se tiene:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \bar g_{ij}(\bar x_o) = B_i^a\,B_j^b\,g_{ab}(x_o) \quad,\ \text{i.e.:}\ [\![\bar g_{ij}(\bar x_o)]\!] = B^{-1*}\,[\![g_{ij}(x_o)]\!];\\
&2)\ \bar g_{ij',k}(\bar x_o) = B_{ik}^a\,B_j^b\,g_{ab}(x_o) + B_i^a\,B_{jk}^b\,g_{ab}(x_o) + B_i^a\,B_j^b\,B_k^c\,g_{ab',c}(x_o)\ ;\\
&3)\ \bar g_{ij',kh}(\bar x_o) = B_{ikh}^a\,B_j^b\,g_{ab}(x_o) + B_{ik}^a\,B_{jh}^b\,g_{ab}(x_o) + B_{ik}^a\,B_j^b\,B_h^c\,g_{ab',c}(x_o) +\\
&\qquad + B_{ih}^a\,B_{jk}^b\,g_{ab}(x_o) + B_i^a\,B_{jkh}^b\,g_{ab}(x_o) + B_i^a\,B_{jk}^b\,B_h^c\,g_{ab',c}(x_o) +\\
&\qquad + B_{ih}^a\,B_j^b\,B_k^c\,g_{ab',c}(x_o) + B_i^a\,B_{jh}^b\,B_k^c\,g_{ab',c}(x_o) +\\
&\qquad + B_i^a\,B_j^b\,B_{kh}^c\,g_{ab',c}(x_o) + B_i^a\,B_j^b\,B_k^c\,B_h^d\,g_{ab',cd}(x_o)\ .
\end{aligned}\right\}\tag{6.2}$$

Recíprocamente, dado un cambio de coordenadas $x^i = x^i(\bar x)$ de clase C^3 se tienen las transformaciones (6.2) para $B_j^i = B_j^i(\bar x_o)$, $B_{jk}^i = B_{jk}^i(\bar x_o)$ y $B_{jkh}^i = B_{jkh}^i(\bar x_o)$, donde

$$B_j^i(\bar x) = \frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j} \quad,\quad B_{jk}^i(\bar x) = \frac{\partial^2 x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j\,\partial \bar x^k} \quad \text{y} \quad B_{jkh}^i(\bar x) = \frac{\partial^3 x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j\,\partial \bar x^k\,\partial \bar x^h} \ . \tag{6.3}$$

Los conjuntos

$$H = \left\{ \left[\!\left[\frac{\partial x^i(\bar{x}_o)}{\partial \bar{x}^j} \right]\!\right] \in E_1^1 \;/\; x^i = x^i(\bar{x}) \text{ es un cambio de coordenadas }^* \right\}$$

$$H' = \left\{ \left[\!\left[\frac{\partial^2 x(\bar{x}_o)}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \right]\!\right] \in E_2^1 \;/\; x^i = x^i(\bar{x}) \text{ es un cambio de coordenadas }^* \right\}$$

$$H'' = \left\{ \left[\!\left[\frac{\partial^3 x(\bar{x}_o)}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h} \right]\!\right] \in E_3^1 \;/\; x^i = x^i(\bar{x}) \text{ es un cambio de coordenadas }^* \right\}$$

verifican :

$$H = G$$

$$H' = \left\{ B' = \left[\!\left[B^i_{jk} \right]\!\right] \in E_2^1 \;/\; B' \text{ es simétrico respecto de } j,k \right\} \tag{6.4}$$

$$H'' = \left\{ B'' = \left[\!\left[B^i_{jkh} \right]\!\right] \in E_3^1 \;/\; B'' \text{ es simétrico respecto de } j,k,h \right\}$$

Asimismo los conjuntos

$$U^s = \left\{ X = \left[\!\left[X_{ij} \right]\!\right] \in E_2^o \;/\; X^t - X = 0 \text{ , } \mathrm{Det}(X) \neq 0 \text{ , signatura}(X) = s \right\}$$

$$U' = \left\{ X' = \left[\!\left[X_{ijk} \right]\!\right] \in E_3^o \;/\; X_{ijk} = X_{jik} \right\} \tag{6.5}$$

$$U'' = \left\{ X'' = \left[\!\left[X_{ijkh} \right]\!\right] \in E_4^o \;/\; X_{ijkh} = X_{jikh} \text{ , } X_{ijkh} = X_{ijhk} \right\}$$

verifican :

$$U^s = \left\{ \left[\!\left[g_{ij}(x_o) \right]\!\right] \in E_2^o \;/\; g_{ij} \text{ es un tensor métrico de signatura s }^* \right\}$$

$$U' = \left\{ \left[\!\left[g_{ij},_k(x_o) \right]\!\right] \in E_3^o \;/\; g_{ij} \text{ es un tensor métrico de signatura s }^* \right\}$$

$$U'' = \left\{ \left[\!\left[g_{ij},_{kh}(x_o) \right]\!\right] \in E_4^o \;/\; g_{ij} \text{ es un tensor métrico de signatura s }^* \right\}$$

Estas tres igualdades se ven claramente si, dados $X \in U^s$, $X' \in U'$ y $X'' \in U''$, construímos el tensor métrico

$$g_{ij}(x) = X_{ij} + X_{ijk}(x^k - x^k_o) + X_{ijkh}(x^k - x^k_o)(x^h - x^h_o) \quad , \; i,j=1,n \; .$$

(Las otras inclusiones son óbvias).

---

* de clase C^3 entorno de $x_o = x(\bar{x}_o)$.

Consideremos ahora las siguientes aplicaciones:

a) $K : U^s \times U' \times G \times H' \longrightarrow U'$ dada por

$$K(X,X',B,B') = \left[\!\left[B^a_{ik}\, B^b_j\, X_{ab} + B^a_i\, B^b_{jk}\, X_{ab} + B^a_i\, B^b_j\, B^c_k\, X_{abc} \right]\!\right] \tag{6.6.a}$$

b) $K' : U^s \times U' \times U'' \times G \times H' \times H'' \longrightarrow U''$ dada por

$$\begin{aligned} K'(X,X',X'',B,B',B'') = \Big[\!\Big[& B^a_{ikh}\, B^b_j\, X_{ab} + B^a_{ik}\, B^b_{jh}\, X_{ab} + B^a_{ik}\, B^b_j\, B^c_h\, X_{abc} + \\ & + B^a_{ih}\, B^b_{jk}\, X_{ab} + B^a_i\, B^b_{jkh}\, X_{ab} + B^a_i\, B^b_{jk}\, B^c_h\, X_{abc} + \\ & + B^a_{ih}\, B^b_j\, B^c_k\, X_{abc} + B^a_i\, B^b_{jh}\, B^c_k\, X_{abc} + \\ & + B^a_i\, B^b_j\, B^c_{kh}\, X_{abc} + B^a_i\, B^b_j\, B^c_k\, B^d_h\, X_{abcd} \Big]\!\Big] \end{aligned} \tag{6.6.b}$$

Se puede comprobar directamente que estas aplicaciones están bien definidas, es decir, que efectivamente $K(X,X',B,B') \in U'$ y $K'(X,X',X'',B,B',B'') \in U''$ para todo $X \in U^s$, $X' \in U'$, $X'' \in U''$, $B \in G$, $B' \in H'$ y $B'' \in H''$. Si se compara (6.6.a) con (6.2)2) y (6.6.b) con (6.2)3) resulta bastante natural la siguiente :

<u>Definición</u>: Una aplicación de clase C^k $\quad \phi : U^s \times U' \times U'' \longrightarrow E^p_q$ es un operador de concomitancia de <u>orden 2</u> si

$$\phi(\ B^{-1} * X,\ K(X,X',B,B'),\ K'(X,X',X'',B,B',B'')\ ) = B^{-1} * \phi(X,X',X'') \tag{6.7}$$

para todos $X \in U^s$, $X' \in U'$, $X'' \in U''$, $B \in G$, $B' \in H'$ y $B'' \in H''$.

Un concomitante de un tensor métrico y sus derivadas primeras y segundas es entonces un tensor de la forma

$$T(x)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \phi(\ [\![g_{ij}(x)]\!]\ ,\ [\![g_{ij',k}(x)]\!]\ ,\ [\![g_{ij',kh}(x)]\!]\ )^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \tag{6.8}$$

Por un cambio de coordenadas $x^i = x^i(\bar{x})$ resulta (teniendo en cuenta (6.2),(6.6) y (6.7)):

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{x})^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} &\overset{*}{=} \phi(\ [\![\bar{g}_{ij}(\bar{x})]\!]\ ,\ [\![\bar{g}_{ij',k}(\bar{x})]\!]\ ,\ [\![\bar{g}_{ij',kh}(\bar{x})]\!]\ )^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \\ &= B^{-1}(\bar{x}) * \phi(\ [\![g_{ij}(x(\bar{x}))]\!]\ ,\ [\![g_{ij',k}(x(\bar{x}))]\!]\ ,\ [\![g_{ij',kh}(x(\bar{x}))]\!]\ )^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \\ &= (B^{-1}(\bar{x}))^{i_1}_{a_1} \dots (B^{-1}(\bar{x}))^{i_p}_{a_p}\, B^{b_1}_{j_1}(\bar{x}) \dots B^{b_q}_{j_q}(\bar{x})\ T(x(\bar{x}))^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} \end{aligned}$$

donde $B^i_j(x) = \dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^j}$.

---

* Esta igualdad es parte de la definición de concomitante.

Por lo tanto, la ley de transformación (6.7) no es otra cosa que el comportamiento tensorial de las funciones $T^{\cdots}_{\cdots}$ definidas en (6.8).

Un ejemplo fundamental para lo que sigue es el siguiente :

Ejemplo: Operador de curvatura: Sea U^c el dominio de concomitancia de los tensores de curvatura (ver Ejemplo 3 pág. 10). La aplicación $R : U^s \times U' \times U'' \longrightarrow U^c \subset E^o_4$ dada en componentes por

$$\begin{aligned} R_{ijkh}(X,X',X'') &= \frac{1}{2}\,(X_{ihjk} + X_{jkih} - X_{ikjh} - X_{jhik}) + \\ &+ Y^a_{ih}(X,X')\, Y^b_{jk}(X,X')\, X_{ab} - Y^a_{ik}(X,X')\, Y^b_{jh}(X,X')\, X_{ab} \end{aligned} \tag{6.9}$$

donde $Y^i_{jk}(X,X') = \frac{1}{2}(X_{jak} + X_{akj} - X_{kja})\,(X^{-1})^{ai}$, es un operador de concomitancia de orden 2 que denominaremos "operador de curvatura" por razones óbvias: si $X_{ij} = g_{ij}(x_o)$, $X_{ijk} = g_{ij',k}(x_o)$ y $X_{ijkh} = g_{ij',kh}(x_o)$ para algún tensor métrico g_{ij}, entonces (6.9) no es otra cosa que el tensor de Riemann correspondiente en el punto x_o .

Daremos ahora una demostración resumida (y adaptada a nuestra notación) de un resultado conocido.

LEMA (T.Y. Thomas):* Dado un operador de concomitancia $\phi : U^s \times U' \times U'' \longrightarrow E^p_q$ de orden 2 y clase C^k ($k \geq 0$), existe un operador de concomitancia $\bar{\phi} : U^s \times U^c \longrightarrow E^p_q$ de igual clase tal que:

$$\phi(X,X',X'') = \bar{\phi}(X , R(X,X',X'')) \tag{6.10}$$

para todos $X \in U^s$, $X \in U'$, $X'' \in U''$.

Todo concomitante de un tensor métrico y sus derivadas primeras y segundas (ver (6.8)) se escribe entonces en la forma

$$T(x)^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = \bar{\phi}([\![g_{ij}(x)]\!] , [\![R_{ijkh}(x)]\!])^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \tag{6.11}$$

para algún operador de concomitancia $\bar{\phi} : U^s \times U^c \longrightarrow E^p_q$.

* ver [3] .

Demostración : Con la siguiente notación

$$\begin{aligned}
&\bar{X} = B^{-1}*X && \bar{\bar{X}} = \bar{B}^{-1}*\bar{X} \\
&\bar{X}' = K(X,X',B,B') && \bar{\bar{X}}' = K(\bar{X},\bar{X}',\bar{B},\bar{B}') \\
&\bar{X}'' = K''(X,X',X'',B,B',B'') && \bar{\bar{X}}'' = K'(\bar{X},\bar{X}',\bar{X}'',\bar{B},\bar{B}',\bar{B}'')
\end{aligned} \tag{6.12}$$

se tienen, para

$$B^i_j = \delta^i_j \quad , \; B^i_{jk} = -\frac{1}{2}(X_{jak} + X_{akj} - X_{kja})(X^{-1})^{ai} \quad , \; B^i_{jkh} = 0$$

$$\bar{B}^i_j = \delta^i_j \quad , \; \bar{B}^i_{jk} = 0 \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned}
\bar{B}^i_{jkh} = &-\frac{1}{3}(\,\bar{X}_{ajkh} + \bar{X}_{akhj} + \bar{X}_{ahjk}\,)(\bar{X}^{-1})^{ai} + \\
&+ \frac{1}{6}(\,\bar{X}_{jkha} + \bar{X}_{khja} + \bar{X}_{hjka}\,)(\bar{X}^{-1})^{ai}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
&a) \;\; \bar{\bar{X}} = \bar{X} = X \\
&b) \;\; \bar{\bar{X}}' = \bar{X}' = 0 \\
&c) \;\; \bar{\bar{X}}''_{ijkh} = -\frac{1}{3}(\;R_{ikjh}(\bar{X},\bar{X}',\bar{X}'') + R_{ihjk}(\bar{X},\bar{X}',\bar{X}'')\;) \;.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Si indicamos con Q la aplicación $U^s \times U' \times U'' \longrightarrow E^o_4$ cuyas componentes Q_{ijkh} están dadas por el segundo miembro de (6.14 c), el comportamiento tensorial de R implica que

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{X}}'' &= Q(\bar{X},\bar{X}',\bar{X}'') = B^{-1}*Q(X,X',X'') = I*Q(X,X',X'') = \\
&= Q(X,X',X'') \;.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\phi(X,0,Q(X,X',X'')) &= \phi(\bar{\bar{X}},\bar{\bar{X}}',\bar{\bar{X}}'') = \bar{B}^{-1}*\phi(\bar{X},\bar{X}',\bar{X}'') = I*\phi(\bar{X},\bar{X}',\bar{X}'') = \phi(\bar{X},\bar{X}',\bar{X}'') = \\
&= B^{-1}*\phi(X,X',X'') = I*\phi(X,X',X'') = \phi(X,X',X'') \;.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Puesto que la aplicación $R : U^s \times U' \times U'' \longrightarrow U^c$ es sobreyectiva, queda bien definida una aplicación $\bar{\phi} : U^s \times U^c \longrightarrow E^p_q$ mediante*

$$\bar{\phi}(X,R(X,X',X'')) = \phi(X,0,-\frac{1}{3}\left[\!\left[R_{ikjh}(X,X',X'') + R_{ihjk}(X,X',X'')\right]\!\right]) =$$
$$= \phi(X,0,Q(X,X',X'')) \ . \tag{6.17}$$

Resta ver que $\bar{\phi}$ es un operador tensorial. Dada una matriz $B \in G$ cualquiera se tiene, tomando en consideración (6.16) :

$$\bar{\phi}(\ B^{-1}*X,\ B^{-1}*R(X,X',X'')\ ) = \bar{\phi}(\ B^{-1}*X,\ R(B^{-1}*X,K(X,X',B,0),K'(X,X',X'',B,0,0)\ ) =$$

$$= \phi(\ B^{-1}*X,\ 0\ ,\ Q(B^{-1}*X,K(X,X',B,0),K'(X,X',X'',B,0,0)\ ) =$$

$$= \phi(\ B^{-1}*X,\ K(X,X',B,0),\ K'(X,X',X'',B,0,0)\ ) = B^{-1}*\phi(X,X',X'') =$$

$$= B^{-1}*\phi(X,0,Q(X,X',X'')) = B^{-1}*\bar{\phi}(X,R(X,X',X'')) \ .$$

Q.E.D.

De acuerdo con este Lema, la determinación de los operadores de segundo orden $\phi : U^s \times U' \times U'' \longrightarrow E^p_q$ se traduce en la determinación de los operadores tensoriales $\bar{\phi} : U^s \times U^c \longrightarrow E^p_q$. Antes de pasar directamente al estudio de estos concomitantes, haremos un cambio de variables que resultará cómodo para algunos cálculos. Se trata del difeomorfismo

$$U^s \times U^c \ni (X,Z) \overset{F}{\longmapsto} (X^{-1},Z) \in U'^s \times U^c$$

$$\text{donde} \quad U'^s = \left\{ X \in E^2_o \ / \ X^t = X \ , \ \mathrm{Det}(X) \neq 0 \ , \ \mathrm{signatura}(X) = s \right\} \ . \tag{6.18}$$

Aplicaremos el Corolario I.1 a la determinación de los operadores escalares $\phi : U'^s \times U^c \longrightarrow R$ de clase C^k $(k \geq 1)$.

---

* Para ver que $\bar{\phi}$ está bien definida, es necesario tener en cuenta también la observación hecha en pág. 13 : para cada $X \in U^s$, $Z \in U^c$, existen $X' \in U'$ y $X'' \in U''$ tales que $Z = R(X,X',X'')$.

COROLARIO I.2. Dado un operador escalar $\emptyset : U'^{s}\times U^{c} \longrightarrow R$ de clase C^{k} ($k\geq 1$), para cada punto $(X_o,Z_o) \in U'^{s}\times U^{c}$ existe un entorno W_o de (X_o,Z_o) abierto en $U'^{s}\times U^{c}$ y una aplicación $f : A_o \longrightarrow R$ de clase C^{k} tales que

$$\emptyset(X,Z) = f(\ \emptyset_1(X,Z),\dots,\emptyset_{n^2}(X,Z)\ ) \tag{6.19}$$

para todos $(X,Z) \in W_o$, siendo

$$\emptyset_h(X,Z) = Z^{i_1 j_1}{}_{i_2 j_2}\, Z^{i_2 j_2}{}_{i_3 j_3} \cdots Z^{i_h j_h}{}_{i_1 j_1} \tag{6.20}$$

$$h = 1,2,3,\dots$$

donde $Z^{ij}{}_{hk} = X^{ia}\, X^{jb}\, Z_{abhk}$ y $A_o = \left\{ (\emptyset_1(X,Z),\dots,\emptyset_{n^2}(X,Z)) \ /\ (X,Z) \in W_o \right\}$ es un entorno abierto de $(\emptyset_1(X_o,Z_o),\dots,\emptyset_{n^2}(X_o,Z_o))$ en R^{n^2}.

En términos de escalares concomitantes de un tensor métrico y sus derivadas primeras y segundas, el Corolario afirma (teniendo en cuenta el Lema precedente) que tales escalares pueden escribirse en la forma

$$L(g_{ij};g_{ij},_k;g_{ij},_{kh}) = f(\ R^{ij}{}_{ij}\ ,\ R^{ij}{}_{hk}\, R^{hk}{}_{ij}\ ,\dots,\ R^{i_1 j_1}{}_{i_2 j_2}\, R^{i_2 j_2}{}_{i_3 j_3} \cdots R^{i_m j_m}{}_{i_1 j_1})$$

$$m = n^2 \tag{6.21}$$

entorno de cada "punto" $(g^{o}_{ij},R^{o}_{ijkh})$.

Demostración: Sea T una traza:

$$T = C^{i_1 j_1 k_1 h_1 \dots i_p j_p k_p h_p}_{a_1 b_1 \dots\dots\dots\dots a_q b_q}\, X^{a_1 b_1} \dots X^{a_q b_q}\, Z_{i_1 j_1 k_1 h_1} \dots Z_{i_p j_p k_p h_p} \ . \tag{6.22}$$

Teniendo en cuenta la forma general de los elementos isotrópicos $C^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\cdot}$ y las simetrías y antisimetrías de X y de Z, resulta inmediatamente de (6.22) que T es función polinómica de los escalares (6.20). Por otra parte, definiendo el producto de dos "bimatrices" P, $Q \in E^2_2$ mediante

$$P.Q = \left[\!\left[\ P^{ij}_{ab}\ Q^{ab}_{kh}\ \right]\!\right] \ ,$$

se puede demostrar el Teorema de Cayley-Hamilton y las fórmulas de Newton para los coe_ ficientes del polinomio característico de una bimatriz. Por lo tanto, Ψ puede escribirse como función de $\phi_1,\ldots,\phi_{n^2}$.

Q.E.D.

De manera análoga se aplica el Corolario II.1 a la determinación de los operadores de concomitancia $\phi : U'^s \times U^c \longrightarrow E^p_q$ entorno de cada punto de su dominio. Nosotros daremos el resultado correspondiente en términos de concomitantes de un tensor métrico y sus derivadas primeras y segundas, quedando la precisión de los términos topológicos del enunciado a cargo del Corolario II.1 y de la definición de concomitantes.

COROLARIO II.2. Todo concomitante tensorial $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ de un tensor métrico y sus derivadas primeras y segundas puede expresarse localmente, si es de clase C^k $(k\geq 1)$, en la forma

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} =$$

$$= \sum_{h=1}^{K} L_h(g_{ij},R_{ijkh})\, C_h{}^{i_1\ldots i_p\, a_1b_1c_1d_1\ldots a_rb_rc_rd_r}_{j_1\ldots j_q\, h_1k_1\ldots\ldots\ldots\ldots h_sk_s}\, g^{h_1k_1}\ldots g^{h_sk_s}\, R_{a_1b_1c_1d_1}\ldots R_{a_rb_rc_rd_r} \tag{6.23}$$

donde las constantes $C_h^{:::}$ son isotrópicas y los coeficientes L_h son escalares de clase C^{k-1} (su forma está dada en (6.21)). La expresión (6.23) es válida entorno de cada "punto" (g^o_{ij},R^o_{ijkh}) .

Demostración: Se sigue de los Corolarios I.2 y II.1 . Q.E.D.

§ 7 . IDENTIDADES DE INVARIANCIA Y ALGEBRAS DE LIE.

Sea G un grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, V un espacio lineal y

$$G \times V \ni (g,v) \longmapsto g*v \in V \tag{7.1}$$

una acción de G sobre V. Sea $C^{\infty}(V)$ el espacio de funciones $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^{∞}. Se tiene un acción de G sobre este espacio dada por

$$(g*F)(v) = F(g^{-1}*v) \tag{7.2}$$

y una acción del álgebra dada por

$$(X*F)(v) = \frac{d}{dt} F(\exp(-tX)*v)\Big|_{t=0} \quad . \tag{7.3}$$

En particular se tiene la identidad

$$X*(Y*F) - Y*(X*F) = [X,Y]*F \quad . \tag{7.4}$$

Una función $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice G-invariante si

$$g*F = F \tag{7.5}$$

para todo $g \in G$. Se puede demostrar que si F es de clase C^1, las ecuaciones precedentes son equivalentes a

$$X*F = 0 \tag{7.6}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$.* Esta equivalencia es la que se demuestra precisamente en el Lema de las identidades de invariancia para el caso en que G es el grupo lineal general, V el espacio $E_{q_1}^{p_1} \times \ldots \times E_{q_r}^{p_r}$ y la acción es $A*(\underset{1}{X},\ldots,\underset{r}{X}) = (A*\underset{1}{X},\ldots,A*\underset{r}{X})$. La demostración dada es válida para aplicaciones $F : U_1 \times \ldots \times U_r \longrightarrow \mathbb{R}$ donde cada U_μ es un abierto G-estable de un subespacio G-estable de $E_{q_\mu}^{p_\mu}$.

* Basta considerar, óbviamente, un sistema finito de ecuaciones $X_a*F = 0$, $a = 1,q$, donde $X_1,\ldots,X_q$ es un sistema de generadores del álgebra. Estas son, precisamente, las ecuaciones (3.11).

El problema de la caracterización de las aplicaciones G-invariantes consiste entonces en el cálculo del radical

$$M = \left\{ F \in C^{\infty}(V) \ / \ X^{*}F = 0 \ \text{ para todo } X \in G \right\} \tag{7.7}$$

de la representación (7.3). Puesto que esta representación es de dimensión infinita, el problema es en general muy difícil de resolver. En este contexto algebraico, se suele plantear el problema de determinar los invariantes polinómicos respecto de un grupo semisimple. El Teorema I resuelve parcialmente el problema para invariantes de clase C^1 y la acción tensorial de un grupo no semisimple. En cuanto a los invariantes polinómicos respecto de la acción tensorial del grupo lineal general ,

$$F = \sum_{h=1}^{K} C_{h}^{\mu_1 \ldots \mu_s} {}^{j_1 \ldots j_{s'}}_{i_1 \ldots i_{s''}} \; X_{\mu_1}{}^{i_1 \ldots i_{p_{\mu_1}}}_{j_1 \ldots j_{q_{\mu_1}}} \cdots X_{\mu_s}{}^{i_{\cdot} \ldots i_{s''}}_{j_{\cdot} \ldots j_{s'}} ,$$

se ve claramente (puesto que los coeficientes $C_{h}^{\mu_1 \ldots \mu_s \ldots}{}_{\ldots}$ deben ser isotrópicos) que pueden escribirse como funciones polinómicas de las trazas.

APENDICE I : Suplementos G-estables.

Sea E^p_q el espacio euclídeo dado por (1.1) y (1.2), con su correspondiente estructura de G-módulo dada por la acción tensorial (1.3). La base canónica de E^p_q está constituída por los n^{p+q} elementos $e^{h_1 \dots h_q}_{k_1 \dots k_p} \in E^p_q$ cuyas componentes son :

$$(e^{h_1 \dots h_q}_{k_1 \dots k_p})^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \delta^{i_1}_{k_1} \dots \delta^{i_p}_{k_p} \delta^{h_1}_{j_1} \dots \delta^{h_q}_{j_q} . \tag{I.1}$$

Su base dual está formada por las formas coordenadas $u^{k_1 \dots k_p}_{h_1 \dots h_q} : E^p_q \longrightarrow R$, es decir:

$$u^{k_1 \dots k_p}_{h_1 \dots h_q}(X) = u^{k_1 \dots k_p}_{h_1 \dots h_q}(X^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} e^{b_1 \dots b_q}_{a_1 \dots a_p}) = X^{k_1 \dots k_p}_{h_1 \dots h_q} \tag{I.2}$$

para todo $X \in E^p_q$. En particular:

$$u^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(e^{h_1 \dots h_q}_{k_1 \dots k_p}) = \delta^{i_1}_{k_1} \dots \delta^{i_p}_{k_p} \delta^{h_1}_{j_1} \dots \delta^{h_q}_{j_q} . \tag{I.3}$$

Todo elemento $\phi : E^p_q \longrightarrow R$ de $(E^p_q)^*$ se escribe , entonces, de una única forma

$$\phi = \phi^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} u^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} , \quad \phi^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = \phi(e^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}) . \tag{I.4}$$

Es decir:

$$\phi(X) = \phi^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} X^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \tag{I.5}$$

para todo $X \in E^p_q$. Para cada matriz $A \in G$ y cada forma lineal $\phi \in (E^p_q)^*$, definamos la función $A*\phi : E^p_q \longrightarrow R$ mediante

$$(A*\phi)(X) = \phi(A*X) \tag{I.6}$$

para todo $X \in E^p_q$. Es inmediato comprobar que $A*\phi$ es lineal y que $A*(B*\phi) = AB*\phi$ para todas A y B en G. Tenemos, entonces, una acción de G sobre $(E^p_q)^*$ dada por (I.6).

Definamos ahora una aplicación $F : (E^p_q)^* \longrightarrow E^q_p$ mediante:

$$F(\phi) = \left[\!\left[\phi(e^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p}) \right]\!\right] = \left[\!\left[\phi^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p} \right]\!\right] \tag{I.7}$$

para cada $\phi \in (E^p_q)^*$. Consecuencias inmediatas de esta definición son las siguientes:

F.1) F es un isomorfismo lineal y su inversa está dada por

$$F^{-1}(\left[\!\left[Y^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p} \right]\!\right]) = Y^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p} \, u^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_q} \tag{I.8}$$

F.2) Para toda matriz $A \in G$ y toda forma lineal $\phi \in (E^p_q)^*$:

$$F(A*\phi) = A^{-1}*F(\phi) \tag{I.9}$$

Por último, definamos $H: E^q_p \longrightarrow E^p_q$ por:

$$H(\left[\!\left[Y^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p} \right]\!\right]) = \left[\!\left[\delta^{i_1 h_1} \ldots \delta^{i_p h_p} \, \delta_{j_1 k_1} \ldots \delta_{j_q k_q} \, Y^{k_1 \ldots k_q}_{h_1 \ldots h_p} \right]\!\right] \tag{I.10}$$

para cada $Y \in E^q_p$. Se comprueba directamente que:

H.1) H es un isomorfismo lineal.

H.2) Para toda matriz $A \in G$ y para todo $Y \in E^q_p$:

$$H(A*Y) = A^{t^{-1}}*H(Y) \quad . \tag{I.11}$$

Con estos elementos, pasemos a demostrar el siguiente:

<u>LEMA</u>: Sea S un subespacio G-estable de E^p_q . Entonces, existe un suplemento $\bar{S}$ G-estable de S.

<u>Demostración</u>: Sea S un subespacio G-estable de E^p_q y sea $S^o = \left\{ \phi \in (E^p_q)^* / \ \phi(X)=0 \ \forall \ X \in S \right\}$ su anulador. Entonces, el subespacio

$$\bar{S} = (H \circ F)(S^o) \tag{I.12}$$

es un suplemento G-estable de S, pues:

1) S^o es G-estable: dados $\phi \in S^o$ y $A \in G$, para todo $X \in S$ se tiene $(A*\phi)(X) = \phi(A*X) = 0$, pues $A*X \in S$ (por ser S G-estable por hipótesis). Es decir: $A*\phi \in S^o$.

2) $\bar{S}$ es G-estable: para cada $A \in G$ se tiene:

$$A*\bar{S} = A*(HoF)(S^o) = A*H(F(S^o)) = H(A^{t^{-1}}*F(S^o)) = H(F(A^t*S^o)) = (HoF)(A^t*S^o)$$

Pero $A^t*S^o \subset S^o$, como se demostró en 1). Resulta entonces que $A*\bar{S} = (HoF)(A^t*S^o) \subset$ $\subset (HoF)(S^o) = \bar{S}$.

3) $\dim E^p_q = \dim S + \dim \bar{S}$: por ser HoF un isomorfismo lineal, $\dim S^o = \dim \bar{S}$. Por otra parte, se tiene la identidad $\dim E^p_q = \dim S + \dim S^o$.

4) $\bar{S} \cap S = \{0\}$: Sea $X \in \bar{S}$. Existe entonces un elemento $\phi \in S^o$ tal que $X = (HoF)(\phi)$. Si además $X \in S$, se tiene que $\phi(X) = 0$. Por lo tanto:

$$0 = \phi(X) = \phi(\ H(F(\phi))\ ) = \phi(\ H(\left[\!\left[\phi^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}\right]\!\right])\ ) = \phi(\left[\!\left[\delta^{i_1h_1}\dots\delta^{i_ph_p}\,\delta_{j_1k_1}\dots\delta_{j_qk_q}\,\phi^{k_1\dots k_q}_{h_1\dots h_p}\right]\!\right]) =$$

$$= \phi^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\,\delta^{i_1h_1}\dots\delta^{i_ph_p}\,\delta_{j_1k_1}\dots\delta_{j_qk_p}\,\phi^{k_1\dots k_q}_{h_1\dots h_p} = \sum_{i_1,\dots,j_q=1,n}\left(\phi^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\right)^2$$

Es decir : $\phi^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} = 0$ para todos $j_1,\dots,i_p = 1,n$, con lo cual $\phi = 0$ y finalmente

$$X = (HoF)(\phi) = (HoF)(0) = 0$$

Q.E.D.

<u>COROLARIO</u>: Dado un subespacio S de E^p_q G-estable, si un elemento $Y \in E^q_p$ verifica

$$Y^{j_1\dots i_q}_{i_1\dots i_p}\,X^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = 0 \qquad (I.13)$$

para todo $X \in S$, entonces $Y' = \left[\!\left[\delta^{i_1a_1}\dots\delta^{i_pa_p}\,\delta_{j_1b_1}\dots\delta_{j_qb_q}\,Y^{b_1\dots b_q}_{a_1\dots a_p}\right]\!\right]$ pertenece al suplemento G-estable $\bar{S}$ dado por (I.12).

<u>Demostración</u>: Basta definir la forma lineal $\phi = Y^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\,u^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} \in (E^p_q)^*$, pues las igualdades (I.13) (para todo $X \in S$) equivalen a que $\phi \in S^o$. Por otra parte, $Y' = (HoF)(\phi)$, por lo tanto: $Y' \in (HoF)(S^o) = \bar{S}$.

Q.E.D.

APENDICE II : Una caracterización de los elementos isotrópicos.

LEMA: Un elemento $X \in E^p_q$ es isotrópico sii satisface las ecuaciones

$$\sum_{s=1}^{p} \delta^{i_s}_{b} X^{i_1 \ldots i_{s-1}\, a\, i_{s+1} \ldots i_p}_{j_1 \ldots \ldots \ldots \ldots j_q} - \sum_{s=1}^{q} \delta^{a}_{j_s} X^{i_1 \ldots \ldots \ldots \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{s-1}\, b\, j_{s+1} \ldots j_q} = 0 \qquad \text{(II.1)}$$

para todos $a, b, i_1, \ldots, j_q = 1, n$.

Demostración: Sea $X \in E^p_q$ isotrópico, i.e. :

$$A^{i_1}_{h_1} \ldots A^{i_p}_{h_p} (A^{-1})^{k_1}_{j_1} \ldots (A^{-1})^{k_q}_{j_q} X^{h_1 \ldots h_p}_{k_1 \ldots k_q} = X^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \qquad \text{(II.2)}$$

para toda $A \in G$. Escribiendo (II.2) en la forma

$$A^{i_1}_{h_1} \ldots A^{i_p}_{h_p} X^{h_1 \ldots h_p}_{j_1 \ldots j_q} = A^{k_1}_{j_1} \ldots A^{k_q}_{j_q} X^{i_1 \ldots i_p}_{k_1 \ldots k_q} \qquad \text{(II.3)}$$

y derivando repecto de A^b_a se obtiene:

$$\sum_{s=1}^{p} A^{i_1}_{h_1} \ldots A^{i_{s-1}}_{h_{s-1}} \delta^{i_s}_{b} A^{i_{s+1}}_{h_{s+1}} \ldots A^{i_p}_{h_p} X^{h_1 \ldots h_{s-1}\, a\, h_{s+1} \ldots h_p}_{j_1 \ldots \ldots \ldots \ldots j_q} =$$
$$= \sum_{s=1}^{q} A^{k_1}_{j_1} \ldots A^{k_{s-1}}_{j_{s-1}} \delta^{a}_{j_s} A^{k_{s+1}}_{j_{s+1}} \ldots A^{k_q}_{j_q} X^{i_1 \ldots \ldots \ldots \ldots i_p}_{k_1 \ldots k_{s-1}\, b\, k_{s+1} \ldots k_q} \qquad \text{(II.4)}$$

En particular, para $A = I$, se tiene (II.1).

Tomemos ahora un elemento $X \in E^p_q$ que satisface las ecuaciones (II.1) y definamos una aplicación $F : G \longrightarrow E^p_q$ dada por:

$$F(M) = M{*}X \qquad \text{(II.5)}$$

para cada $M \in G$. Tenemos que $F(AB) = AB{*}X = A{*}B{*}X = A{*}F(B)$ para todas $A, B \in G$. En componentes, $F(AB) = A{*}F(B)$ se escribe

$$F(AB)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = A^{i_1}_{h_1} \ldots A^{i_p}_{h_p} (A^{-1})^{k_1}_{j_1} \ldots (A^{-1})^{k_q}_{j_q} \underbrace{B^{h_1}_{a_1} \ldots B^{h_p}_{a_p} (B^{-1})^{b_1}_{k_1} \ldots (B^{-1})^{b_q}_{k_q} X^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q}}_{F(B)^{h_1 \ldots h_p}_{k_1 \ldots k_q}} \qquad \text{(II.6)}$$

Derivando ambos miembros de (II.6) respecto de B^b_a :

$$\frac{\partial F(AB)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{\partial M^h_k} \cdot \frac{\partial (A^h_c B^c_k)}{\partial B^b_a} = A^{i_1}_{h_1}\ldots A^{i_p}_{h_p}(A^{-1})^{k_1}_{j_1}\ldots(A^{-1})^{k_q}_{j_q} \cdot \Big[\tag{II.7}$$

$$\cdot \Big[\sum_{s=1}^{p} B^{h_1}_{a_1}\ldots B^{h_{s-1}}_{a_{s-1}} \delta^{h_s}_b B^{h_{s+1}}_{a_{s+1}}\ldots B^{h_p}_{a_p}(B^{-1})^{b_1}_{k_1}\ldots(B^{-1})^{b_q}_{k_q} X^{a_1\ldots a_{s-1}\, a\, a_{s+1}\ldots a_p}_{b_1\ldots\ldots\ldots\ldots b_q} -$$

$$- \sum_{s=1}^{q} B^{h_1}_{a_1}\ldots B^{h_p}_{a_p}(B^{-1})^{b_1}_{k_1}\ldots(B^{-1})^{b_{s-1}}_{k_{s-1}} (B^{-1})^{b_s}_{b}(B^{-1})^{a}_{k_s} (B^{-1})^{b_{s+1}}_{k_{s+1}}\ldots(B^{-1})^{b_q}_{k_q} X^{a_1\ldots a_p}_{b_1\ldots b_q}\Big]$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial (A^h_c B^c_k)}{\partial B^b_a} = A^h_b \delta^a_k$$

se tiene, haciendo B = I en (II.7):

$$\frac{\partial F(A)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{\partial M^h_a} A^h_b = A^{i_1}_{h_1}\ldots A^{i_p}_{h_p} (A^{-1})^{k_1}_{j_1}\ldots(A^{-1})^{k_q}_{j_q} P(X)^{a\ h_1\ldots h_p}_{b\ k_1\ldots k_q} \tag{II.8}$$

donde $P(X)^{a\ i_1\ldots i_p}_{b\ j_1\ldots j_q}$ es el primer miembro de (II.1), para cada $a,b,i_1,\ldots,j_q=1,n$. Por hipótesis, X satisface dichas ecuaciones (II.1); teniendo en cuenta la inversibilidad de A resulta entonces de (II.8):

$$\frac{\partial F(A)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{\partial M^h_k} = 0$$

para toda $A \in G$ y todos $h,k,i_1,\ldots,j_q = 1,n$. Hemos demostrado que F es constante y por lo tanto podemos escribir:

$$M*X = F(M) = F(I) = X$$

para toda $M \in G$.

Q.E.D.

__COROLARIO:__ Si un elemento $X \in E^p_q$ es G^+-isotrópico, entonces es G-isotrópico.

__Demostración:__ Dado un elemento $X \in E^p_q$ G^+-isotrópico, se tienen las identidades (II.3) para toda $A \in G^+$. Puesto que G es un abierto de E^1_1 y G^+ es la componente conexa de la identidad, G^+ contiene un entorno de I abierto en E^1_1 . Se pueden derivar entonces las identidades (II.3) respecto de A^b_a en $A = I$, obteniéndose (II.1) (ver (II.4)). Pero precisamente hemos demostrado en el Lema precedente que las ecuaciones (II.1) implican que X es G-isotrópico.

Q.E.D.

BIBLIOGRAFIA

[1] : SCHIFINI, C. G. "Operadores Tensoriales de Concomitancia", Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Buenos Aires, 1984.

[2] : CHEVALLEY, C. : "The Theory of Lie Groups", Princeton Univ. Press, 1946.

[3] : THOMAS, T. Y. : "Differential Invariants of Generalized Spaces", Cambridge Univ. Press, 1934.

[4] : Du PLESSIS, J. C. : "Tensorial Concomitants and Conservation Laws", Tensor (N.S.), Vol. 20, p. 347-360 , 1969.

[5] : RUND, H. : "Variational Problems Involving Combined Tensor Fields", Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, Vol. 29, 1966.

[6] : PRÉLAT, D. : "Tensorial Concomitants of a Metric and a Covector", Utilitas Mathematica, en prensa.

[7] : NORIEGA, R. J. - SCHIFINI, C. G. : "Scalar Density Concomitants of a Metric and a Bivector", Gen. Rel. Grav., Vol. 16, # 3, p. 293-296, 1984.

[8] : NORIEGA, R. J. - PRELAT, D. - SCHIFINI C. G. : "Scalar Concomitants of a Metric and a Curvature Form", Gen. Rel. Grav., por aparecer.

[9] : KERRIGAN, B. : "Arbitrary Tensor Concomitants of a Bivector and a Metric in a Space-Time Manifold", Gen. Rel. Grav., vol. 13, # 1, p. 19-27, 1981.