

Tesis de Posgrado

Efectos de contribuciones coherentes de dos o más nucleones en núcleos esféricos y deformados

Lenzi, Silvia Mónica

1987

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Lenzi, Silvia Mónica. (1987). Efectos de contribuciones coherentes de dos o más nucleones en núcleos esféricos y deformados. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2053_Lenzi.pdf

Cita tipo Chicago:

Lenzi, Silvia Mónica. "Efectos de contribuciones coherentes de dos o más nucleones en núcleos esféricos y deformados". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1987. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2053_Lenzi.pdf

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Tema de Tesis

EFFECTOS DE CONTRIBUCIONES COHERENTES DE DOS O MÁS NUCLEONES
EN NÚCLEOS ESFÉRICOS Y DEFORMADOS

Autor

Lic. Silvia Mónica LENZI

Director de Tesis

Dr. Ernesto E. MAQUEDA

Lugar de Trabajo

División de Física Nuclear Teórica,
Departamento de Física, CNEA.

Tesis presentada para optar al título de
Doctor en Ciencias Físicas.

a Dany, Lulu y Freddi,

a los nonos.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO II

CÁLCULO DE LOS FACTORES DE FORMA PARA TRANSFERENCIA DE

VARIOS NUCLEONES 12

II.1 Introducción 12

II.2 Función de superposición y Factor de Forma 13

II.2.1 REACCIONES DIRECTAS. ONDAS DISTORSIONADAS.
AMPLITUD DE TRANSICIÓN 13

II.2.2 INTEGRAL DE SUPERPOSICIÓN 19

II.3 Formalismo 22

II.3.1 DESARROLLO DEL FACTOR DE FORMA 22

II.3.2 FACTORES DE ESTRUCTURA 26

II.3.3 APROXIMACIONES

II.4 Descripción de métodos y aproximaciones 32

II.5 Comparación de los métodos 37

CAPÍTULO III

FACTOR DE FORMA PARA CUATRO NUCLEONES 44

III.1 Introducción 44

III.2 Formalismo 46

III.2.1 ANTECEDENTES 46

III.2.2	FUNCIÓN DE SUPERPOSICIÓN PARA CUATRO NUCLEONES	50
III.2.3	CÁLCULO DE LA FUNCIÓN $I(R)$	54
III.3	Prueba del método con funciones de oscilador armónico	56
III.4	Función antisimétrica de cuatro nucleones	58
III.4.1	DESARROLLO DE LAS FÓRMULAS	58
III.4.2	DETALLES DEL CÁLCULO. PRUEBA DEL MÉTODO	61
III.5	Aplicación del método a núcleos pesados	66
III.5.1	ANTECEDENTES	66
III.5.2	CÁLCULO DE LOS ANCHOS REDUCIDOS PARA EL DECAIMIENTO ALFA	68
III.5.3	CÁLCULO DEL DECAIMIENTO ALFA DEL ^{212}Po DESDE EL ESTADO FUNDAMENTAL. COMPARACIÓN CON OTROS RESULTADOS	69
III.5.3.a	Cálculos que tienen en cuenta sólo las interacciones p-p y n-n en el ^{212}Po .	73
III.5.3.b	Cálculos que incluyen la interacción p-n en el ^{212}Po .	76

CAPÍTULO IV

	DEFORMACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA INTRÍNSECA DE UN SISTEMA DE VARIOS NUCLEONES	80
IV.1	Introducción	80
IV.2	Conceptos básicos	83
IV.2.1	DEFORMACIÓN Y ROTACIONES	83

IV.2.2	PARÁMETROS DE DEFORMACIÓN	85
IV.2.3	FUNCIÓN DE ONDA INTRÍNSECA. MODELO DE NILSSON	87
IV.2.4	PROYECCIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA	90
IV.3	Obtención de la deformación intrínseca de funciones del modelo de capas a través de la diagonalización del operador cuadrupolar	93
IV.3.1	ANTECEDENTES Y DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO	93
IV.3.2	APLICACIÓN AL CÁLCULO DE LA DEFORMACIÓN INTRÍNSECA PARA LA BANDA DEL ESTADO FUNDAMENTAL DEL ^{20}Ne	98
IV.4	Modificación de la estructura intrínseca por efectos de las fuerzas de Coriolis y centrífuga	100
CAPÍTULO V		
	CONCLUSIONES	106
APÉNDICE A		
	EL MODELO DE CAPAS EN MÚLTIPLES PASOS	111
APÉNDICE B		
	LA SIMETRÍA SU_3 Y EL OPERADOR CUADRUPOLEAR COMO GENERADOR DE BANDAS ROTACIONALES	117
B.1	Antecedentes	117
B.2	Las representaciones irreducibles en los grupos S_k y U_n	118
B.3	Clasificación de funciones que dan espectros	

	rotacionales	122
B.4	Base cartesiana	125
B.5	Propiedades del estado intrínseco. Elementos de matriz de Q	128
REFERENCIAS		131
AGRADECIMIENTOS		135

CAPITULO I

Introducción

Las reacciones nucleares directas se caracterizan por ser periféricas e involucrar grados de libertad de baja energía. Su análisis ha contribuido enormemente al conocimiento de la estructura nuclear. En particular, las reacciones con transferencia de varias partículas del núcleo blanco al proyectil ("pick-up") o viceversa ("stripping") se utilizan para el estudio de las contribuciones coherentes de las partículas en el núcleo.

El análisis de este tipo de reacciones mediante la Aproximación de Born (BA) de Ondas Distorsionadas (DW) o Canales Acoplados (CC) implica calcular, además de las funciones de onda de dispersión, los estados ligados del conjunto transferido en el campo del núcleo blanco (residual) y del eyectil (proyectil).

Dentro del formalismo de la BA el cálculo de estas funciones se realiza mediante integrales de superposición. Para una reacción $A(a,b)B$ donde se transfiere un conjunto de nucleones x ($A=B+x$, $b=a+x$), el estado ligado del centro de masa de las x partículas en el núcleo blanco se calcula como

$$\bar{\varphi}_{AB}(R) = \int d^3s_B d^3s_x \varphi_B^*(s_B) \varphi_x^*(s_x) \varphi_A(s_A), \quad (1.1)$$

donde se integra sobre todas las coordenadas intrínsecas. De esta manera $\bar{\varphi}_{AB}(R)$ describe la dinámica del centro de masa del conjunto transferido.

Las funciones de superposición del tipo (1.1) contienen la información sobre la estructura de los núcleos intervinientes en la reacción. Su evaluación resulta fundamental para el cálculo de la sección eficaz, ya que son parte del llamado factor de forma, que se define en el capítulo II.

No resulta trivial la obtención de las funciones $\bar{\varphi}_{AB}^L(R)$ ya que sólo es posible separar analíticamente el movimiento del centro de masa del intrínseco en las funciones del integrando de (1.1) cuando se utilizan funciones de partícula independiente de oscilador armónico. En este caso, la función de superposición se puede desarrollar en términos de funciones radiales para el centro de masa del conjunto transferido multiplicadas por coeficientes A_{NL} que tienen en cuenta la estructura nuclear

$$\bar{\varphi}_{AB}^L(R) = \sum_N A_{NL} \bar{\varphi}_{NL}^L(R) , \quad (1.2)$$

donde N es el número radial de nodos de la función de onda en el potencial del oscilador. Sin embargo, si bien el oscilador armónico es una buena aproximación al potencial nuclear en la zona interior del núcleo, sus autofunciones no tienen el comportamiento asintótico correcto y sus amplitudes resultan sobrevaluadas en la superficie del núcleo.

Dado que las reacciones directas se producen en la periferia de los núcleos, el uso de funciones correspondientes a un potencial realista, que reproduzca más fielmente el potencial nuclear en la superficie es

fundamental. En general ^[BM66], se utiliza el potencial de Woods-Saxon que, basado en el corto rango de la fuerza nuclear, sigue la forma de la densidad de masa, que corresponde a una distribución de Fermi.

Las soluciones ligadas de este potencial, que se hallan mediante un cálculo numérico, son las adecuadas para describir los estados del conjunto que se transfiere en las reacciones. Estas funciones son semejantes, en el interior del núcleo, a las soluciones de un potencial de oscilador armónico equivalente, pero difieren de éstas en la zona exterior y en la superficie nuclear. El comportamiento asintótico de las funciones Woods-Saxon está determinado principalmente por la energía de ligadura de la partícula.

En la práctica, lo que se hace es, por un lado, el cálculo de estructura para obtener los coeficientes A_{NL} y luego se encuentran los estados $\bar{\varphi}_{NL}$ para una partícula de masa xm (donde x es el número de nucleones del conjunto que se transfiere), en el campo del núcleo al que se añade o desde el que es transferida.

El modo en que se calculan las funciones $\bar{\varphi}_{NL}$ varía en los diferentes trabajos sobre reacciones con transferencia de partículas. Algunos resuelven un potencial de oscilador armónico, empalmado luego con una función que tenga el comportamiento asintótico correcto ^[Vi80], otros calculan las $\bar{\varphi}_{NL}$ en potenciales de Woods-Saxon con diferente profundidad para cada valor de N ^[Dr71] o bien, aproximan la expresión (1.2) por un sólo término de la suma. Sin embargo, las nuevas técnicas experimentales, que permiten obtener una

información más detallada sobre las propiedades de los núcleos, nos lleva a revisar estas aproximaciones usadas más comunmente en el cálculo de los factores de forma.

En esta tesis se desarrolla en primer término, un método que calcula las funciones $\bar{\varphi}_{NL}$ en un mismo pozo de potencial de Woods-Saxon para todos los valores de N mediante un cálculo autoconsistente. El procedimiento consiste en ir ajustando la profundidad de ese potencial hasta obtener para la función total $\bar{\varphi}_L$, el comportamiento asintótico correcto. Este método se basa en una interpretación que está más de acuerdo con el proceso físico de las reacciones de transferencia que los métodos anteriores.

Sin embargo, si bien el procedimiento es aplicable a una amplia zona de la tabla periódica, ni éste, ni los otros procedimientos mencionados más arriba, resultan apropiados para casos en los cuales es importante la mezcla de capas principales en la estructura de niveles de partícula independiente, como por ejemplo para algunos núcleos deformados. La dificultad se debe fundamentalmente a la forma (ec.(1.2)) en que se ha desarrollado la integral de superposición (1.1).

Se hace necesario, entonces, encontrar un procedimiento que calcule la integral (1.1) evitando esta limitación, y que obtenga la función de onda del centro de masa del conjunto transferido, a partir de las funciones que da el modelo de capas para los núcleos intervinientes en (1.1).

Para el caso de tener dos nucleones transferidos,

existe un método, desarrollado por Bayman y Kallio^[BK66], que utiliza funciones de Woods-Saxon de partícula independiente para el cálculo de la integral de superposición.

Se presenta entonces, en segundo término, un método que, inspirado en la ref.^[BK66], obtiene exactamente la integral de superposición (1.1) para el caso de cuatro nucleones en estado relativo $0s$. Este método, llamado BABY, permite calcular los factores de forma, utilizando desde un principio, para las funciones de partícula independiente, soluciones de un potencial arbitrario (por ejemplo, Woods-Saxon).

El método BABY calcula las integrales (1.1) en núcleos livianos, para los cuales se trabaja en el formalismo de isoespín con la función totalmente antisimetrizada de cuatro nucleones y se adapta también para operar con núcleos pesados, en los cuales los protones y neutrones de valencia se encuentran en capas distantes en energía.

Este método resulta idóneo para cálculos de reacciones de transferencia, decaimientos alfa y se puede aplicar además a núcleos deformados para los cuales, como se mencionó anteriormente, es importante la mezcla de configuraciones.

Dentro de este contexto, la existencia de esas deformaciones permanentes en los núcleos, despertó el interés en cómo poder inferir teóricamente la forma de la función de onda intrínseca correspondiente a partir de las funciones que da el modelo de capas, por ejemplo, para los diferentes miembros de una banda rotacional.

Se desarrolló así un método que, suponiendo una deformación cuadrupolar en el núcleo, permite encontrar la función de onda intrínseca y su deformación.

Haciendo uso de las propiedades de la función intrínseca como autofunción del operador cuadrupolar en el formalismo SU_3 , y la relación entre el momento cuadrupolar y el parámetro de deformación δ , este método obtiene la deformación intrínseca del estado que da origen a una banda rotacional, a partir de la diagonalización del operador Q en la base de las funciones del modelo de capas para los estados de la banda.

Sin embargo, el estado intrínseco puede verse modificado si la frecuencia de rotación del núcleo es grande, debido a que las fuerzas de Coriolis y centrífuga influyen sobre el movimiento de los nucleones. Es por eso que, tanto la deformación, como los números mágicos, etc., pueden variar dentro de una misma banda rotacional.

Para estudiar la modificación en la deformación, en este caso, se desarrolló un segundo procedimiento que calcula para cada estado de la banda rotacional, la deformación de la función de onda intrínseca.

Este segundo método utiliza la integral de Hill-Wheeler^[HW53] que proyecta la función de onda intrínseca de manera de obtener el estado con buen momento angular en el sistema laboratorio. La función intrínseca se construye con un determinante de Slater de funciones de Nilsson con parámetro de deformación δ . El procedimiento consiste en maximizar la superposición de la función de onda proyectada

con la que da el modelo de capas para una cierta interacción residual, variando el parámetro de deformación δ en la función intrínseca.

En el capítulo II se presenta el método para el cálculo de la integral de superposición a partir de la expresión (1.2), comparándolo con otros procedimientos. Se obtienen los factores de forma y las secciones eficaces para reacciones con transferencia de partículas alfa en la zona del Ni-Zn.

El método BABY que calcula la integral (1.1) para el caso de cuatro nucleones, se presenta en el capítulo III. Se hace una primera comparación con los resultados exactos calculados con funciones de oscilador armónico. Luego se lo aplica al estudio de la formación de conglomerados alfa en los dos primeros estados 0^+ del ^{20}Ne . Y, como una aplicación a núcleos pesados, se calculan los anchos reducidos para el decaimiento alfa del ^{212}Po , haciendo la comparación con los resultados obtenidos por otros autores.

En el capítulo IV se desarrollan los dos métodos para el cálculo de la deformación de la función intrínseca, aplicándolos a la banda del estado fundamental del ^{20}Ne .

Finalmente en el capítulo V se resumen las conclusiones generales.

CAPITULO II

CÁLCULO DE LOS FACTORES DE FORMA PARA TRANSFERENCIA DE VARIOS NUCLEONES

II.1 Introducción

En el análisis de las reacciones de transferencia de varios nucleones mediante la Aproximación de Born de ondas distorsionadas o canales acoplados es preciso calcular las funciones correspondientes al estado ligado del conjunto transferido en el campo del núcleo residual (blanco) y del proyectil (eyectil). Hasta el presente se han utilizado con bastante éxito diferentes aproximaciones para el cálculo de los estados ligados y su aplicación al análisis de reacciones de transferencia de dos y cuatro nucleones. Ante la posibilidad de obtener haces con energías alrededor o sobre la barrera coulombiana para núcleos pesados, y de observar el mismo conjunto transferido utilizando diferentes proyectiles, así como también las nuevas técnicas de espectrometría, se hace necesario revisar las aproximaciones más comunmente usadas en los cálculos de los factores de forma que intervienen en la obtención de las secciones eficaces.

En este capítulo se presenta un método para el cálculo de las integrales de superposición (1.1) que intervienen en el factor de forma, comparándolo con otros métodos

aproximados.

II.2 Función de Superposición y Factor de Forma

II.2.1 REACCIONES DIRECTAS. ONDAS DISTORSIONADAS. AMPLITUD DE TRANSICIÓN.

En una reacción nuclear, una partícula a incide sobre un núcleo blanco A (canal de entrada α), ambos interactúan, y como resultado de dicha interacción, se produce un estado final (canal de salida β) formado por un núcleo residual B que en general estará excitado y una o más partículas salientes b .

En las reacciones directas el proyectil interactúa con el blanco excitando grados de libertad simples, intercambiando nucleones o cargas. Este tipo de reacciones (llamadas también procesos cuasi-elásticos en el léxico de los iones pesados), y en particular las de transferencia de partículas ("stripping" y "pickup"), han contribuido más a la espectroscopía nuclear en los últimos 25 años, que todos los otros tipos de reacciones tomados en conjunto.

Un sistema en reacción se puede considerar como un estado estacionario, en el que se encuentran presentes simultáneamente el canal de entrada y todos los canales de salida. Su hamiltoniano se puede desglosar en tres partes:

$$H = H_{\beta} + T_{\beta} + V_{\beta} , \quad (2.1)$$

donde T_β y V_β son los operadores para el movimiento relativo en el canal β y H_β es la parte del hamiltoniano que sólo actúa sobre las variables internas de los fragmentos b y B . A las soluciones de H_β las llamaremos funciones $\varphi_\beta = \varphi_b \varphi_B$ con energías ϵ_β . Se puede desarrollar la función de onda total del sistema en términos de las autofunciones de H_β de modo que, de la ecuación de Schrödinger proyectada sobre las funciones φ_{β_i} , resulta un sistema de ecuaciones acopladas

$$\{ T_{\beta_i} + \epsilon_{\beta_i} - E \} s_{\beta_i}(r_{\beta_i}) = - \langle \varphi_{\beta_i} | V_{\beta_i} | \psi(r_\alpha) \rangle, \quad (2.2)$$

donde s_{β_i} es la función que describe el movimiento relativo y $\psi(r_\alpha) = \sum_\beta \varphi_\beta s_\beta$ es la función total del sistema que contiene las contribuciones de todos los canales posibles. Para resolver (2.2) conviene sumar a ambos miembros un potencial $U_{\beta_i}(r_{\beta_i})$ que sólo depende de la magnitud del radio del canal (suprimimos de ahora en más el índice i por comodidad)

$$\{ T_\beta + \epsilon_\beta - E + U_\beta \} s_\beta(r_\beta) = - \langle \varphi_\beta | [V_\beta - U_\beta] | \psi \rangle. \quad (2.3)$$

Analícemos esta expresión. Si se anula el miembro derecho, el canal en cuestión no varía el número de partículas, su presencia en cambio, implica que existe una fuente de partículas^[Te]. La función total del sistema ψ resulta modificada por $|V_\beta - U_\beta|$, que asume el carácter de potencial de interacción responsable de las transiciones. Al potencial U_β lo elegimos como el potencial óptico para la

dispersión y absorción de las partículas correspondientes, de manera que, las soluciones de la ecuación homogénea describen el movimiento de dispersión elástica de una partícula en el potencial U_β , y se denominan ondas distorsionadas:

$$x_\beta^{(+)} \underset{r_\beta \rightarrow \infty}{\approx} \exp(ik_\beta \cdot r_\beta) + \text{ondas dispersadas salientes.} \quad (2.4)$$

La ecuación (2.3) se resuelve por el método de la función de Green [Au70].

La amplitud de transición [Me65] se calcula como:

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\alpha} s_{\alpha\beta} + \langle x_\beta^{(-)} | \psi_\beta | V_\beta - U_\beta | \psi \rangle, \quad (2.5)$$

donde la expresión entre corchetes incluye una integración en r_β y $T_{\alpha\alpha}$ es la amplitud para la dispersión elástica en el potencial U_α , que da como solución $x_\alpha^{(+)}$.

La sección eficaz diferencial se define como el cociente entre el flujo saliente por el canal β y el entrante por el canal α :

$$\frac{d\sigma_{\alpha\beta}}{d\Omega} = \frac{\mu_\alpha \mu_\beta}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{k_\beta}{k_\alpha} |T_{\alpha\beta}|^2. \quad (2.6)$$

Podemos explicitar aún más la fórmula (2.5):

$$T_{\alpha\beta} = \langle \psi_\beta x_\beta^{(-)} | V_\beta - U_\beta | \psi_\alpha s_\alpha \rangle = \langle \psi_\beta x_\beta^{(-)} | V_\beta - U_\beta | \sum_{\tau \neq \alpha} \psi_\tau s_\tau \rangle \quad (2.7)$$

La aproximación de Born de ondas distorsionadas

consiste en reemplazar esta expresión por:

$$T_{\alpha\beta}^{DWBA} = \langle \psi_{\beta} X_{\beta}^{(-)} | V_{\beta} - U_{\beta} | \psi_{\alpha} X_{\alpha}^{(+)} \rangle, \quad (2.8)$$

para lo cual se hacen las siguientes aproximaciones:

- Se considera $\xi_{\alpha} = X_{\alpha}^{(+)}$. Esto se fundamenta en que las dos funciones deben ser idénticas fuera del núcleo ya que el potencial nuclear es de corto rango, y, por lo tanto, en el exterior V_{α} y U_{α} son similares. Pueden diferir dentro del núcleo, pero este efecto es lo suficientemente pequeño como para despreciarlo.

- La segunda aproximación consiste en omitir el segundo sumando de (2.7). La validez de la misma depende de la elección de U_{β} . Ya que, en principio, se puede decir que el término más importante es el de la dispersión elástica, el término que le sigue en importancia en la amplitud de transición es el que tiene $\tau = \beta$.

$$\langle \psi_{\beta} X_{\beta}^{(-)} | V_{\beta} - U_{\beta} | \psi_{\beta} \xi_{\beta} \rangle = \int d^3r_{\beta} X_{\beta}^{(-)*} [\langle \psi_{\beta} | V_{\beta} | \psi_{\beta} \rangle - U_{\beta}] \xi_{\beta}(r_{\beta}), \quad (2.9)$$

Si tomamos U_{β} tal que

$$U_{\beta} \approx \langle \psi_{\beta} | V_{\beta} | \psi_{\beta} \rangle, \quad (2.10)$$

el término entre corchetes de (2.9) se anula.

Finalmente podemos escribir para la amplitud de transición:

$$T_{\alpha\beta}^{DWBA} = \int d^3r_{\alpha} d^3r_{\beta} X_{\beta}^{(-)*}(r_{\beta}) \langle \psi_{\beta} | V_{\beta} - U_{\beta} | \psi_{\alpha} \rangle X_{\alpha}^{+}(r_{\alpha}). \quad (2.11)$$

El elemento entre corchetes juega el papel de interacción efectiva para las transiciones entre un estado descrito por $\chi_{\alpha}^{(+)}(\mathbf{r}_{\alpha})$ a otro descrito por $\chi_{\beta}^{(+)}(\mathbf{r}_{\beta})$, y contiene toda la información sobre la estructura nuclear, reglas de selección del momento angular y tipos de reacción. Se lo denomina factor de forma.

Se puede demostrar^[Au70] que la expresión (2.11) es equivalente a

$$T_{\alpha\beta}^{DWBA} = \int d^3r_{\alpha} d^3r_{\beta} \chi_{\alpha}^{(-)*}(\mathbf{r}_{\alpha}) \langle \varphi_a | \varphi_A | V_{\alpha} - U_{\alpha} | \varphi_b | \varphi_B \rangle \chi_{\beta}^{(+)}(\mathbf{r}_{\beta}), \quad (2.12)$$

llamándose a esta última la forma "prior", y a la (2.11) la forma "post".

En (2.11) y (2.12) las funciones φ describen los estados ligados de los núcleos intervinientes en el proceso de transferencia. La integración indicada por los corchetes es sobre las coordenadas intrínsecas de las tres partículas básicas: el proyectil a, el núcleo residual B y el conjunto transferido x (fig.1).

La interacción V_{α} en (2.12), es la suma de todos los potenciales de interacción de dos cuerpos entre cada nucleón del blanco A y el proyectil a, y U_{α} es el potencial óptico que describe la dispersión elástica en el canal de entrada. Para este caso:

$$V_{\alpha} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^A v_{ij}, \quad (2.13)$$

como $A=B+x$,

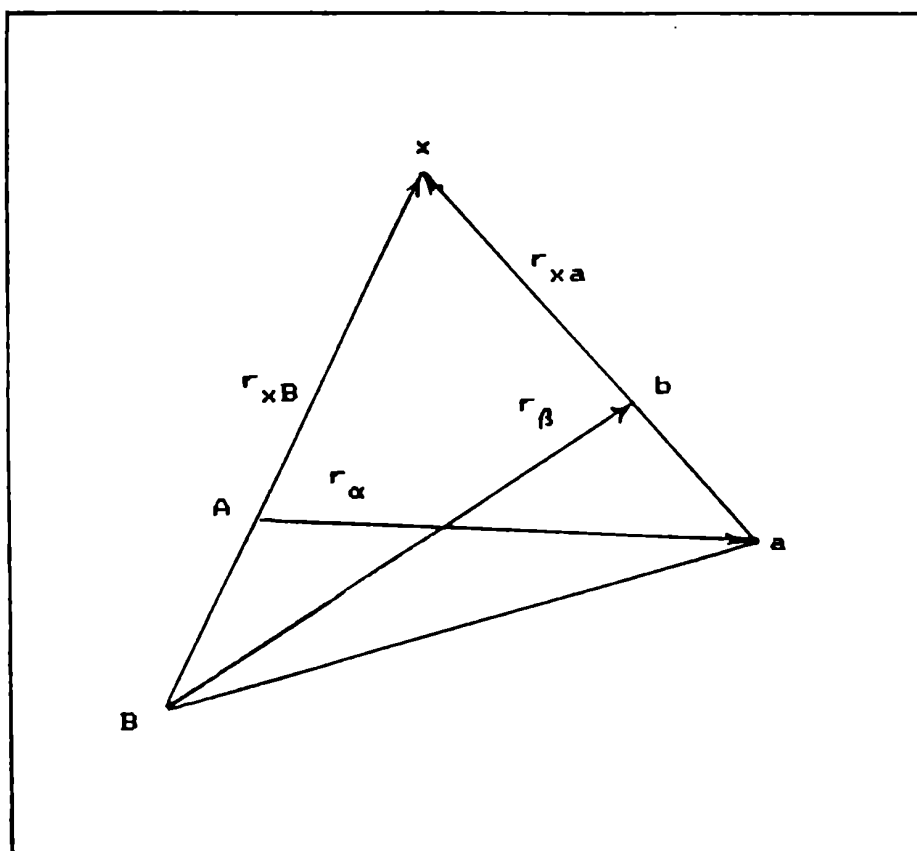


Fig. 1. Definición de coordenadas para la reacción

$$V_{\alpha} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^B v_{ij} + \sum_{i=1}^a \sum_{j=B+1}^{B+x} v_{ij} = V_{aB} + V_{ax} . \quad (2.14)$$

La aproximación usual consiste en reemplazar $V_{\alpha} - U_{\alpha}$ por el término V_{ax} , quedando

$$\langle \psi_b \psi_B | V_{\alpha} - U_{\alpha} | \psi_a \psi_A \rangle \approx \langle \psi_b \psi_B | V_{ax} | \psi_a \psi_A \rangle . \quad (2.15)$$

Para llegar a este resultado se tiene en cuenta que:

i) El potencial V_{aB} es la suma de las interacciones entre el proyectil y los nucleones del núcleo residual. El mayor efecto de esta interacción es la dispersión elástica de a . Este efecto sería cancelado con una elección apropiada de U_{α} .

ii) En el formalismo de la DWBA, U_{α} es el potencial óptico que ajusta la dispersión elástica de a por A . Debe incluir el término que corresponde a la transferencia de la partícula por ejemplo de a hacia A y luego de A hacia a o viceversa, de manera de volver al canal de entrada. A este proceso contribuye el elemento diagonal de V_{ax} . Así podemos escribir

$$\langle \psi_a \psi_A | V_{\alpha} | \psi_a \psi_A \rangle \approx \langle \psi_a \psi_A | V_{aB} | \psi_a \psi_A \rangle + \langle \psi_a \psi_A | V_{ax} | \psi_a \psi_A \rangle , \quad (2.16)$$

con lo que se justifica la aproximación (2.15). La ecuación (2.15) debe entenderse como una igualdad entre elementos de matriz y no como una igualdad de las interacciones. Finalmente, se aproxima el potencial V_{ax} , que es una suma

sobre las interacciones de dos cuerpos, por un potencial de un cuerpo $V_{ax}(r_{ax})$ que sólo depende de la distancia relativa entre los centros de masa de las partículas a y x. Esto implica considerar sólo procesos en una etapa, es decir, la interacción actúa una sola vez, transfiriendo todo el conjunto de nucleones x al mismo tiempo. No se tienen en cuenta aquellos procesos en los cuales los nucleones se transfieren en varias etapas.

Además, para que las expresiones (2.11) y (2.12) se mantengan equivalentes a pesar de la aproximación de potencial central $V_{ax}(r_{ax})$, es necesario incluir, en V_{ax} , junto con el potencial nuclear, el potencial coulombiano (sobre todo si los núcleos intervinientes no son tan livianos).

II.2.2 INTEGRAL DE SUPERPOSICIÓN.

La integral o función de superposición, también llamada función distribución definida en el Capítulo I (ec.(1.1)), se utiliza generalmente en física nuclear proporcionando información sobre la estructura de los núcleos en cálculos de amplitudes de transición para reacciones directas.

Para el caso de transferencia de un nucleón, la función de superposición toma la forma:

$$\bar{\alpha}_{AB^1}(x_1) = \int d\mathbf{s}_B \psi_B^*(\mathbf{s}_B) \psi_A(\mathbf{s}_B, x_1), \quad (2.17)$$

donde \mathcal{S}_B representa las coordenadas correspondientes a todos los grados de libertad del núcleo B, mientras que $\mathcal{S}_A = (\mathcal{S}_B, x_1)$ es el conjunto similar para el núcleo A. Aquí $x_1 = (r_1, \sigma_1, \tau_1)$ representa las coordenadas espaciales, de espín e isospín del nucleón (llamado 1) en A que no está en B. La coordenada r_1 es el vector posición del nucleón respecto del centro de masa del núcleo B. Los subíndices A, B, indican todos los números cuánticos necesarios para identificar los estados nucleares.

Haciendo uso de estas integrales, la matriz de transición para el caso de transferencia de un nucleón por ejemplo, para una reacción $A(p,d)B$ toma la forma simple

$$T_{\alpha\beta}^{DWBA} \approx \langle \chi_d^{(-)}(r_d) \tilde{\chi}_{pd}(x_{pn}) | V_{pn} | \tilde{\chi}_{AB}(x_{Bn}) \chi_p^{(+)}(r_p) \rangle. \quad (2.18)$$

Es decir, podemos escribir la matriz de transición en función de las integrales de superposición del tipo de la (2.17). Esto se puede generalizar para el caso de transferencia de más de un nucleón, como se vio en el Capítulo I.

El ingrediente de estructura nuclear en la ecuación (2.18) es el factor de forma:

$$\langle \tilde{\chi}_{pd} | V_{pn} | \tilde{\chi}_{AB} \rangle. \quad (2.19)$$

En (2.19), la integral se realiza sobre todas las coordenadas internas. La versión más simplificada de la teoría (la llamada aproximación de rango cero) tiene en

cuenta que, dado que se trata de núcleos pequeños, se puede aproximar la función de superposición del proyectil-eyectil $\bar{\chi}_{pd}(x_{pn})$ multiplicado por el potencial V_{pn} , por un factor numérico multiplicado por una función delta de r_{pn} ($V_{px} \bar{\chi}_{pd}(x_{pn}) = D_0 \delta(x_{pn})$). Esta aproximación se basa en el hecho de que la longitud de onda de de Broglie asociada al movimiento relativo, es grande en comparación con el rango del potencial [G183]. De esta manera, el factor de forma resulta proporcional a la función de superposición para el núcleo blanco-residual $\bar{\chi}_{AB}$, y la reacción (p,d) se considera una herramienta adecuada para estudiar los más complicados núcleos A y B.

La aproximación de rango cero se utiliza también en reacciones con transferencia de dos nucleones, sin embargo, resulta menos adecuada cuando se trata de iones pesados. En este caso el tamaño de los núcleos entre los cuales se produce la transferencia es grande, y la longitud de onda de de Broglie asociada al movimiento relativo es comparable con el rango del potencial. Para hacer el cálculo exacto en estos casos se integra la ec.(2.18) sobre todas las coordenadas, utilizando códigos llamados de "rango finito" [DV, Ku]. Para el potencial V_{px} se usa el potencial central realista que liga x a p, del que hablamos al final de la sección II.2.1.

Finalmente, es importante remarcar que, como se mencionó en el Capítulo I, el cálculo de las integrales de superposición no es trivial, ya que, sólo es posible separar analíticamente el movimiento intrínseco del del centro de masa cuando las funciones de partícula

independiente que se utilizan son las correspondientes a un potencial de oscilador armónico.

II.3 Formalismo

II.3.1 DESARROLLO DEL FACTOR DE FORMA.

Vamos a desarrollar ahora el factor de forma en un caso general, para ponerlo en función de las integrales de superposición (1.1).

Para una reacción $A(a,b)B$ de "pick-up" ($A=B+x$, $b=a+x$), el factor de forma se escribe:

$$\langle Bb | V(r_{ax}) | Aa \rangle = \int \varphi_B^*(\mathbf{s}_B) \varphi_b^*(\mathbf{s}_b) V(r_{ax}) \varphi_A(\mathbf{s}_A) \varphi_a(\mathbf{s}_a) d\mathbf{s}_x d\mathbf{s}_a d\mathbf{s}_B \quad (2.20)$$

donde las funciones φ describen el estado interno de las partículas interactuantes. Las coordenadas \mathbf{s} y los subíndices son los definidos en la sección anterior.

Podemos introducir en (2.20) las siguientes identidades:

$$\sum_x \int d\mathbf{s}'_x \varphi_x^*(\mathbf{s}'_x, x b_x) \varphi_x(\mathbf{s}_x, x b_x) = 1, \quad (2.21.a)$$

$$\sum_{NLM} \int d\mathbf{r}'_{Bx} \varphi_{NL}^{M*}(\mathbf{r}'_{Bx}, \frac{x B}{A} b_B) \varphi_{NL}^M(\mathbf{r}_{Bx}, \frac{x B}{A} b_B) = 1, \quad (2.21.b)$$

$$\sum_{N'L'M'} \int d\mathbf{r}'_{ax} \varphi_{N'L}^{M'*}(\mathbf{r}'_{ax}, \frac{x a}{A} b_a) \varphi_{N'L}^{M'}(\mathbf{r}_{ax}, \frac{x a}{A} b_a) = 1. \quad (2.21.c)$$

Las funciones $\bar{\varphi}$ describen el movimiento relativo de la partícula transferida con respecto a los núcleos B y a para esta reacción. Las coordenadas relativas r están definidas en la figura 1. Las sumatorias son sobre todos los números cuánticos: N es el número de nodos de la función, L y M el impulso angular y su proyección sobre el eje z.

Con b denotamos el parámetro de tamaño del oscilador:

$$b = m_0 \omega / \hbar, \quad (2.22)$$

donde

$$\hbar\omega = 41 A^{-1/3}, \quad (2.23)$$

y m_0 es la masa del nucleón.

Aunque en las fórmulas se hace explícita referencia a funciones de onda del oscilador armónico, pueden ser utilizadas con otras funciones de partícula independiente (p.ej. las soluciones de un potencial más realista que sigue la forma de la distribución de Fermi como es el potencial de Woods-Saxon) en cuyo caso el parámetro de tamaño b (ec.(2.22)) se debe interpretar como el parámetro que caracteriza la geometría del pozo de potencial central.

Introducimos ahora (2.21) en (2.20) y definimos:

$$B_t(A,B) = \binom{A}{x}^{1/2} \int \varphi_B^*(\mathbf{s}_B) \varphi_x^*(\mathbf{s}_x) \delta_{NL}^{M*} \left(r'_{Bx}, \frac{x_B}{A} \right) \varphi_A(\mathbf{s}_A) d\mathbf{s}_A, \quad (2.24.a)$$

$$B_p(b,a) = \binom{b}{x}^{1/2} \int \varphi_b^*(\mathbf{s}_b) \varphi_x^*(\mathbf{s}_x) \delta_{N'L}^{M'*} \left(r'_{ax}, \frac{x_a}{b} \right) \varphi_a(\mathbf{s}_a) d\mathbf{s}_b. \quad (2.24.b)$$

Acoplado en $B_t(A,B)$ ψ_x con ξ_{NL}^M y ambas con ψ_B , y haciendo lo análogo en $B_p(b,a)$, obtenemos:

$$B_t(A,B) = \sum_{J_t M_t} \langle J_x M_x L M | J_t M_t \rangle \langle J_B M_B J_t M_t | J_A M_A \rangle \\ \langle T_{B T} M_T T_x M_T | T_A M_T \rangle A_{NL}(A,B), \quad (2.25.a)$$

$$B_p(ba) = \sum_{J_p M_p} \langle J_x M_x L' M' | J_p M_p \rangle \langle J_a M_a J_p M_p | J_b M_b \rangle \\ \langle T_{a T_a} M_{T_a} T_x M_{T_x} | T_b M_b \rangle A_{N'L'}(b,a), \quad (2.25.b)$$

Los coeficientes A_{NL} y $A_{N'L'}$ son llamados factores de estructura, de los cuales nos ocuparemos más adelante.

Si además, acoplamos ξ_{NL}^M y $\xi_{N'L'}^{M'}$ a L_T y M_{L_T} (momento angular total y su proyección sobre el eje z), obtenemos para la matriz de transición, la expresión:

$$T_{\alpha\beta} = \hat{J}_A \hat{J}_B \sum_{L_T M_{L_T}} \sum_{J_t M_t J_p M_p} \sum_{N L N' L'} \sum_{J_x M_x T_x} (-)^K \\ \langle J_A M_A J_B -M_B | J_t M_t \rangle \langle J_b -M_b J_a M_a | J_p M_p \rangle \langle J_t M_t J_p M_p | L_T M_{L_T} \rangle \\ \left(\begin{matrix} J_p & J_t & L_T \\ L & L' & J_x \end{matrix} \right) \langle T_{B T_B} M_{T_B} T_x M_{T_x} | T_A M_T \rangle \langle T_{a T_a} M_{T_a} T_x M_{T_x} | T_b M_{T_b} \rangle \\ \int X_\beta^{*(-)}(r_\beta) V(r_{ax}) [\xi_L(r_{Bx}) \xi_{L'}(r_{ax})]_{M_{L_T}}^{L_T} X_\alpha^{(+)}(r_\alpha) dr_\alpha dr_\beta \quad (2.26)$$

donde $K = J_t + J_x - L_T + L' + J_B + M_B + J_b - M_b$, $\hat{J} = (2J+1)^{1/2}$, y,

$$\xi_L(r_{xB}) = \sum_N A_{NL} (\xi_A^{J_A T_A}; \xi_B^{J_B T_B}; n_x 1 S J_x, J_T) \xi_{NL}(r_{xB}), \quad (2.27)$$

es proporcional a la integral de superposición ξ_{AB} definida

en (1.1). En (2.27) χ_A distingue los diferentes estados del sistema nuclear A con momento angular J_A e isospín T_A . Para el caso de los x nucleones los índices n_x y l_x hacen referencia explícita a los números cuánticos radial y de momento angular correspondientes al movimiento relativo de las x partículas, siendo S y J_x el espín y el momento angular intrínseco totales. El vector r_{xB} es la coordenada relativa entre los centros de masa de los sistemas nucleares x y B ($r_{xB} = r_x - r_B$). Las funciones $\delta_{NL}(r_{xB})$ describen el movimiento del centro de masa de todo el conjunto que se transfiere, referido al centro de masa del núcleo B.

Es importante destacar que a la función (2.27) se la llama usualmente factor de forma, dado que en la aproximación de rango cero, difiere del mismo (ec.(2.19)) en un factor constante D_0 . Sin embargo, es necesario recalcar que el factor de forma, en su forma más general, está definido por la ec.(2.19).

De acuerdo a la ec.(2.6), la sección eficaz de reacción, cuando un conjunto x es transferido desde el núcleo blanco A al proyectil a, dejando un núcleo residual B y un eyectil b es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu_\alpha \mu_\beta}{(2\pi/\hbar^2)^2} \frac{k_\beta^{2J_b+1}}{k_\alpha^{2J_a+1}} \sum_{J_t J_p} \sum_{L_T M_{L_T}} \sum_{L L'} \sum_{n_x l_x} \sum_{S J_x T} \left\{ \begin{matrix} J_p & J_t & L_T \\ L & L' & J_x \end{matrix} \right\} \quad (2.28)$$

$$\langle T_B T_{B_T} M_{T_B} | T_A M_{T_A} \rangle \langle T_a T_{a_T} M_{T_a} | T_b M_{T_b} \rangle$$

$$\int | \chi_\beta^{(-)*}(r_\beta) V(r_{ax}) [\delta_{L'}^*(r_{ax}) \delta_L(r_{Bx})]_{M_{L_T}}^{L_T} \chi_\alpha^{(+)}(r_\alpha) dr_\alpha dr_\beta |^2,$$

donde recordamos que α y β indican el canal de entrada y salida, $r_\alpha = r_A - r_a$, $r_\beta = r_B - r_b$, y $X_\alpha^{(+)}$ y $X_\beta^{(-)}$ son las ondas distorsionadas solución de los potenciales ópticos correspondientes a cada canal. Además L_T indica el momento angular total transferido, mientras que J_t y J_p son el momento angular total transferido en los vértices del blanco (A, B, x) y el proyectil (b, a, x) respectivamente. J_x es el momento angular intrínseco del conjunto x y $L(L')$ es el momento angular del centro de masa en el sistema nuclear del blanco (proyectil).

Vamos a encontrar ahora una expresión para los coeficientes A_{NL} , también llamados factores de estructura, que nos permitirá luego calcular las funciones δ_L que intervienen en el factor de forma.

II.3.2 FACTORES DE ESTRUCTURA.

El factor A_{NL} contiene la información de la estructura nuclear. Para una reacción en la que un conjunto x de partículas que es separado de un núcleo Z, dejando un núcleo residual Y, se puede desarrollar A_{NL} de la siguiente forma

$$A_{NL}(\chi_Z J_Z T_Z, \chi_Y J_Y T_Y, n_x l_x S J_x, J T) = \int [\varphi_{Y J_Y T_Y}^*(\mathbf{s}_Y) [\varphi_x^*(\mathbf{s}_x) \delta_{NL}^*(r_{xy})]^{J_x T_x J_Z T_Z} \varphi_{Z J_Z T_Z}(\mathbf{s}_Z)] d\mathbf{s}_Z \quad (2.29)$$

En (2.29) las coordenadas están referidas a los centros de

masa de los núcleos. Al hacer la transformación a funciones del modelo de capas, aparece el factor numérico. Si se trata de funciones del oscilador armónico, el factor es $(\frac{Z}{Y})^{N+L/2}$, si en cambio, se trata de un potencial más realista, se incluye el mismo factor, haciendo una aproximación en primer orden.

Desarrollando en (2.29) la función del núcleo Z en términos de la del núcleo Y y el x , e integrando en las coordenadas del núcleo Y, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & A_{NL} \langle \chi_Z J_Z T_Z; \chi_Y J_Y T_Y | n_x 1_x S J_x, J T \rangle = \\
 = & \left(\frac{Z}{x}\right)^{1/2} \left(\frac{Z}{Y}\right)^{1/2} \sum_{n_x} \chi_{n_x} \Omega_{n_x} \langle \chi_Y J_Y T_Y, \chi_{J T} | \chi_Z J_Z T_Z \rangle \quad (2.30) \\
 & \langle [\psi_{n_x 1_x S J_x T_x}(\mathbf{s}_x, x b_Y) \delta_{NL}(\mathbf{R}_x, x b_Y)]_{M_J}^J | \psi_{\chi J M_J T}(\mathbf{s}_x, x b_Y) \rangle,
 \end{aligned}$$

Cada término de (2.29) resulta un producto de

i) un paréntesis de transformación

$$\langle [\psi_{n_x 1_x S J_x T_x}(\mathbf{s}_x, x b_Y) \delta_{NL}(\mathbf{R}_x, x b_Y)]_{M_J}^J | \psi_{\chi J M_J T}(\mathbf{s}_x, x b_Y) \rangle, \quad (2.31)$$

que es una generalización de los paréntesis de Moshinsky^[Mo59] que permiten separar el movimiento del centro de masa del intrínseco para dos nucleones en un pozo de oscilador armónico.

ii) un coeficiente de parentesco fraccional

$$\langle \chi_Y J_Y T_Y, \chi_{J T} | \chi_Z J_Z T_Z \rangle, \quad (2.32)$$

que relaciona el estado del núcleo Z con los del núcleo Y y todos los posibles estados del conjunto x ; y

iii) un número

$$\Omega_{n'_x n_x} = (\hat{J}_x \hat{T})^{-1} \int [\psi_{n'_x l_x S J_x T}(\mathbf{s}_x, x b_Y) \psi_{n_x l_x S J_x T}(\mathbf{s}_x, x b_x)]^{00} d\mathbf{s}_x, \quad (2.33)$$

que da la superposición entre las funciones de onda internas de los x nucleones con la misma simetría pero diferente parámetro de tamaño b_Y y b_x respectivamente.

Si comparamos la expresión (2.30) con aquéllas obtenidas para el caso de reacciones con transferencia de dos ($x=2$) y cuatro ($x=4$) nucleones, encontramos que para $x=2$ el factor A_{NL} corresponde al factor de estructura G_{NLSJT} definido por Glendenning [6165]. En este caso la suma es sobre

$$\gamma \equiv (n_1 l_1 j_1, n_2 l_2 j_2). \quad (2.34)$$

El primer factor (i) está relacionado con los paréntesis de Moshinsky a través de los coeficientes de reacoplamiento $j-j$ a $L-S$

$$\begin{aligned} & \langle [\psi_{n'_x l_x S J_x T M_T}(\mathbf{s}_x, x b_Y) \delta_{NL}(\mathbf{R}_x, x b_Y)]_{M_J}^J | \psi_{n_x l_x S J_x T M_T}(\mathbf{s}_x, x b_Y) \rangle \\ & = \langle n 0, NL; L | n_1 l_1, n_2 l_2; L \rangle \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\langle (1_1 1_2) L, (1/2, 1/2) S, J | (1_1 1/2) j_1 (1_2 1/2) j_2, J \rangle$$

donde $n'_x \equiv n$, $l_x \equiv 0$, $J_x \equiv S$. El segundo factor (ii) se puede expresar como:

II.3.3 APROXIMACIONES

La mayoría de los análisis de datos de reacciones de transferencia de conglomerados de nucleones se han hecho considerando que para un dado momento angular transferido, sólo un estado radial $\bar{\delta}_{NL}$ contribuye a (2.27).

Son necesarias dos condiciones para que esta aproximación sea válida:

a) Para el caso del potencial de oscilador armónico, no se consideran excitaciones de capas, es decir, se mantiene el número total de cuantos:

$$\sum_{i=1}^x (2n_i + 1_i) = \mathcal{N} \quad (2.38)$$

donde n_i , l_i son los números cuánticos de los estados radiales de partícula independiente de los nucleones, y \mathcal{N} es el número total de cuantos. Esta condición se puede generalizar para otros potenciales de partícula independiente.

b) Las funciones de onda para el conjunto x y el núcleo Y deben ser soluciones de potenciales con la misma geometría. En el caso del oscilador armónico esto significa el mismo parámetro de tamaño ($b_x = b_Y$). Con esta condición:

$$\Omega_{n'_x n_x} = \delta_{n'_x n_x} \quad (2.39)$$

Es necesario subrayar que n_x es el número cuántico radial para el movimiento relativo en el conjunto transferido.

En caso de que alguna de estas dos condiciones no se cumpla, otros valores con $N \neq N_0$ aparecerán en (2.27).

a') Cuando el espacio de configuración incluye la excitación de capas principales, cambia el número total de cuantos en (2.38) y se deben incorporar funciones con $N > N_0$ al cálculo de la función del centro de masa \bar{x}_L de la ec. (2.27). Esto se debe a que las capas principales que se agregan corresponden a mayor número de cuantos de energía. En general las contribuciones debidas a configuraciones excitadas son menores que las correspondientes a $N = N_0$. Esta disminución es compensada en parte por el hecho de que las funciones de onda con mayor N corresponden a una mayor probabilidad de presencia cerca de la superficie nuclear, y por lo tanto contribuyen más en los procesos de transferencia. En la práctica estas contribuciones de la función de onda con N mayor que N_0 no son tomadas en cuenta.

b') Cuando el núcleo residual B es muy diferente en masa al conjunto transferido x (ec. (2.33)) (por ejemplo núcleos pesados o medianos), sus parámetros de tamaño o las geometrías de sus potenciales centrales difieren, y por lo tanto la condición (2.39) ya no se cumple. Se puede considerar que el movimiento intrínseco de las partículas transferidas corresponde al estado radial más bajo posible, por lo tanto $n'_x \geq n_x$ y $N(n'_x) \leq N_0(n_x)$. Aún si $b_x \neq b_y$, $\Omega n'_x$ será mayor para $n'_x = n_x$ y decrecerá para $n'_x > n_x$.

Las contribuciones relativas de los diferentes términos en (2.27) dependerán en forma crítica de las órbitas de partícula independiente desde o hacia las cuales las

partículas son transferidas. En el caso de órbitas con el número máximo de nodos, las llamadas órbitas "calientes", el término más importante es el de $N=N_0$. Cuando se consideran órbitas más "frías", las contribuciones con $N < N_0$ se hacen importantes^{*)}.

II.4 Descripción de métodos y aproximaciones

En los cálculos usuales - una vez obtenidos los factores de estructura A_{NL} - se debe elegir un método para el cálculo de las funciones $\bar{\delta}_L(r_{xB})$ (ec.(2.27)). En esta sección se hará una revisión de algunos de los métodos previos (A, B1, B2 y B3) [G165, Dr71, Vi80, Le82] y luego se presentará un nuevo procedimiento (B4) para el cálculo. Todos estos métodos calculan las funciones $\bar{\delta}_{NL}$ de la ec.(2.27) como estados ligados de una partícula de masa x en el campo del núcleo al que es añadida o desde el que es transferida.

A. Si las aproximaciones son tales que las condiciones

*) Por órbitas calientes entendemos aquéllas que, dentro de una misma capa principal con N cuantos (tal que $N=2n+1$), les corresponde el mayor valor de n . Las funciones de onda de partícula independiente presentan en este caso su último máximo para radios mayores que las correspondientes a otros orbitales de la misma capa principal y por lo tanto, dan una mayor contribución al factor de forma.

(2.38) y (2.39) se cumplen, es decir, que sólo contribuye un estado radial con N_0 nodos, el procedimiento usual es obtener la autofunción $\delta_{NL}(r_{xY})$ correspondiente al estado de una partícula de masa x ligada al campo de un núcleo Y y con una energía de ligadura dada por la correspondiente energía de separación S_x de la partícula x^{**}). Generalmente se utiliza un potencial de Woods-Saxon, y sus parámetros (en particular la profundidad del pozo) se ajustan para satisfacer los requerimientos dados más arriba. Como los factores de forma calculados con este método son independientes de los detalles de la estructura nuclear, en algunas referencias son citados como factores de forma "macroscópicos".

B. Si más de una función con diferente número radial de nodos N contribuye significativamente a $\delta_L(r_{xY})$ de la ec. (2.27), se pueden utilizar diferentes procedimientos. El problema en este caso es que en general los cálculos de estructura se realizan con funciones de onda de partícula

 **) Si bien este procedimiento incluye algunas aproximaciones, se fundamenta en el hecho de que es el método que se utiliza cuando se tiene un nucleón de masa m ligado en un potencial. En este caso se considera una partícula de masa xm ligada con una energía $-S_x$. Existen, sin embargo otros procedimientos alternativos para realizar este cálculo. En particular, podemos citar los procesos en varias etapas, que van extrayendo de a un nucleón por vez.

independiente para un potencial de oscilador armónico y por lo tanto las soluciones para muchos cuerpos no tienen un comportamiento asintótico adecuado. Es decir, una función solución de un potencial infinito decae mucho más rápidamente que la de un potencial más realista.

Para el estudio de reacciones nucleares directas, la interacción se produce principalmente en la zona exterior y en la superficie del núcleo. Por ello resulta de fundamental importancia el comportamiento de las funciones en esta zona.

Para un potencial realista, el comportamiento asintótico viene determinado, en parte, por la energía de la partícula que se transfiere. En la zona exterior, donde sólo interviene la interacción coulombiana, la función de Whittaker es la que da el comportamiento asintótico correcto para partículas cargadas^[MS78] y la de Hankel para el caso de neutrones^[GP65].

El problema consiste entonces en obtener funciones del centro de masa del conjunto transferido con el comportamiento asintótico correcto, y los métodos difieren en cómo se lleva ésto a cabo.

B1. Uno puede repetir el procedimiento aplicado en A y resolver la ecuación de Schrödinger para cada número de nodos N , de manera que para cada término de (2.27) se ajusta siempre la misma energía de separación S_x , modificando cada vez la profundidad del pozo de Woods-Saxon^[Dr71]. Cada función $\tilde{\varphi}_{NL}$ es multiplicada entonces por el factor de estructura A_{NL} obtenido con funciones de onda de oscilador

armónico. En este caso las funciones $\bar{\varphi}_{NL}(r_{xY})$ para todo N tienen el mismo comportamiento asintótico que una función de Whittaker, es decir

$$\bar{\varphi}_{NL}(r) \rightarrow \frac{1}{r} W_{-\tau, L+1/2}(2kr), \quad (2.40)$$

donde r es el parámetro de Sommerfeld y $k=(2\mu S_x/\hbar^2)^{1/2}$. Lo que hace insatisfactorio a este método es que se utiliza un potencial de ligadura diferente para cada valor de N . Es decir, para cada término de $\bar{\varphi}_L$ en (2.27), se usa un potencial ligante diferente, de manera de obtener la misma energía de ligadura ($-S_x$) para cada estado.

B2. Un método mencionado en un número de publicaciones (ver por ejemplo ref. [Vi80, In81]), es aquél en el cual los términos de la función $\bar{\varphi}_L(r_{xY})$ son soluciones de un único potencial de oscilador armónico y el parámetro de tamaño correspondiente se ajusta de manera que la función de superposición $\bar{\varphi}_L$ tenga su último máximo en la misma posición que la función de superposición "macroscópica", calculada con el método mencionado en (A) con $N=N_0$. Este parámetro, no resulta, en general, igual al utilizado en el cálculo de los factores de estructura A_{NL} . Para obtener el comportamiento asintótico correcto, cada término de la fórmula (2.27) se empalma^[In81] a partir de un determinado radio para el cual se igualan las derivadas logarítmicas con una función de Whittaker^[G175] correspondiente a la energía de separación S_x .

Tomando en cuenta la importancia de la superficie

nuclear en la mayoría de las reacciones de transferencia, dos aspectos son objetables en este procedimiento:

(a) la elección del parámetro de tamaño para la función de onda del centro de masa de los x nucleones diferente del usado en los modelos de partícula independiente parece arbitraria, y puede tener importantes consecuencias en el cálculo de las secciones eficaces;

(b) las ondas de dispersión de entrada y salida, llamadas $\chi_{\alpha}^{(+)}$ y $\chi_{\beta}^{(-)}$ en la ec. (2.11) para la amplitud de transición, podrían no ser fuertemente absorbidas antes de alcanzar el último máximo de la función de superposición y por lo tanto el uso de funciones de onda de oscilador armónico en esta región resultaría no muy realista.

B3. Alternativamente uno podría requerir que el valor de expectación de la energía de ligadura para la función suma $\bar{\Phi}_L$ sea la energía de separación de los nucleones [Le62]. En este caso todas las funciones $\bar{\Phi}_{NL}$ corresponden al mismo potencial de Woods-Saxon. Dado que estas funciones están normalizadas, usando la expresión (2.27), el valor de expectación para la energía resulta:

$$\frac{\sum_N A_{NL}^2 E_{NL}}{\sum_N A_{NL}^2} = S_x, \quad (2.41)$$

donde E_{NL} es la energía de ligadura correspondiente a la autofunción $\bar{\Phi}_{NL}(r_{xY})$. Por lo tanto sólo se varía un único potencial para satisfacer (2.41). Este método evita las aproximaciones de los anteriores en los que para diferente número de nodos el conjunto x veía un potencial distinto.

Pero para distancias grandes, suma funciones con comportamientos asintóticos muy diferentes (dados para cada N por (2.39), con S_x reemplazada por E_{NL}).

Este método se puede utilizar para reacciones de transferencia en núcleos livianos para los cuales son pocos los términos que contribuyen a (2.27) (ó (2.30)). Cuando se deben incluir más términos, con la prescripción (2.41)., un potencial único no puede ligar todos los estados que contribuyen

B4. El método que se presenta aquí tiene en cuenta el hecho de que en los procesos de transferencia directa, los efectos más importantes vienen del comportamiento de la función δ_L para distancias relativamente grandes. Basado en la misma filosofía del método B3 se utiliza un único potencial de Woods-Saxon para obtener las funciones δ_{NL} que entran en (2.27). En este caso se requiere que para r_{xY} suficientemente grande la derivada logarítmica de δ_L corresponda a un conglomerado x con la energía de separación apropiada. Se utiliza un procedimiento de recurrencia que varía la profundidad del pozo de manera de obtener

$$\frac{\delta'_L(r_{xY})}{\delta_L(r_{xY})} \rightarrow k + (\tau + 1)/r_{xY}, \quad (2.42)$$

II.5. Comparación de los métodos

Para que la diferencia entre los diferentes métodos sea

importante, deben contribuir varios términos en (2.27). Esto ocurre, por ejemplo, para reacciones de transferencia de partículas alfa en núcleos relativamente pesados.

Se elige entonces para comparar los diferentes métodos y aproximaciones, reacciones de transferencia en la zona del Ni-Zn para la cual existe una buena cantidad de información experimental y teórica. En particular se estudian las reacciones ${}^{62}\text{Ni}(d, {}^6\text{Li}){}^{58}\text{Fe}$ y ${}^{64}\text{Zn}(d, {}^6\text{Li}){}^{60}\text{Ni}$, para el estado fundamental (0^+) y primer estado excitado (2^+) en cada caso.

Se pueden describir razonablemente bien los estados más bajos de los núcleos en esta región considerando que se encuentran todos en de la capa principal f-p [Ce74]. Por lo tanto la condición (a) de la sección II.3.3 es válida (en la ecuación (2.38) el número total de cuantos resulta igual a 12).

Dado que los sistemas nucleares del blanco y el proyectil tienen diferentes masas, sus parámetros de tamaño no se pueden considerar iguales y por lo tanto la condición (b) de la sección II.3.3 no es válida en este caso.

Teniendo en cuenta que no es el propósito de este trabajo reproducir detalles de los datos experimentales, para el cálculo de los factores de estructura se ha considerado una sola configuración para cada reacción, es decir $[(\pi 0f_{7/2})^2]_0^0 [(\nu 0f_{5/2})^2]_0^{0,2}$ y $[(\pi 1p_{3/2})^2]_0^0 [(\nu 0f_{5/2})^2]_0^{0,2}$, respectivamente. Los valores de los correspondientes A_{Ni} están dados en la tabla 1.

Como era de esperar, para el caso en el cual está involucrada una única capa principal, los valores de los

N	^{52}Fe		^{60}Ni	
	0^+	2^+	0^+	2^+
0	0.001	0.005	0.001	0.005
1	0.014	0.055	0.010	0.013
2	0.112	0.264	0.018	0.010
3	0.501	0.705	0.025	0.230
4	1.281	1.000	0.486	1.081
5	1.766	0.590	1.994	1.344
6	1.023		2.327	

Tabla 1. Factores de estructura.

factores de estructura aumentan con N hasta $N_0=6-L/2$. Para el ^{62}Ni la contribución de $N=N_0-1$ es mayor que la de $N=N_0$, mientras que para el ^{64}Zn ocurre lo contrario, dejando translucir que en el último los protones son transferidos desde una órbita "caliente".

Como se mencionó en la sección II.4 el método B3 no es apropiado para núcleos medianamente pesados. Por lo tanto se limita la comparación a los métodos A, B1, B2 y B4, tal como fueron descritos en esa sección.

Las funciones de superposición se muestran en la figura 2. En todos los casos son comparadas con la función de superposición "macroscópica" (A). El criterio de comparar con esta función está fundado en que este método es el más utilizado en los cálculos de reacciones de transferencia. Además, es independiente del cálculo de estructura y provee una función de onda normalizada y con el comportamiento asintótico correcto. En general, los métodos mediante los cuales son calculadas las integrales de superposición hacen que éstas sean similares en la región asintótica, aunque difieran en las regiones de la superficie e interior del núcleo.

Las formas de las distribuciones angulares están determinadas principalmente por la dinámica de la reacción (caracterizada por el momento angular transferido L y el valor del Q de la reacción) y son por lo tanto muy similares para los diferentes procedimientos que se discuten aquí. La comparación de cada uno de ellos con los resultados experimentales no es relevante en esta discusión y se

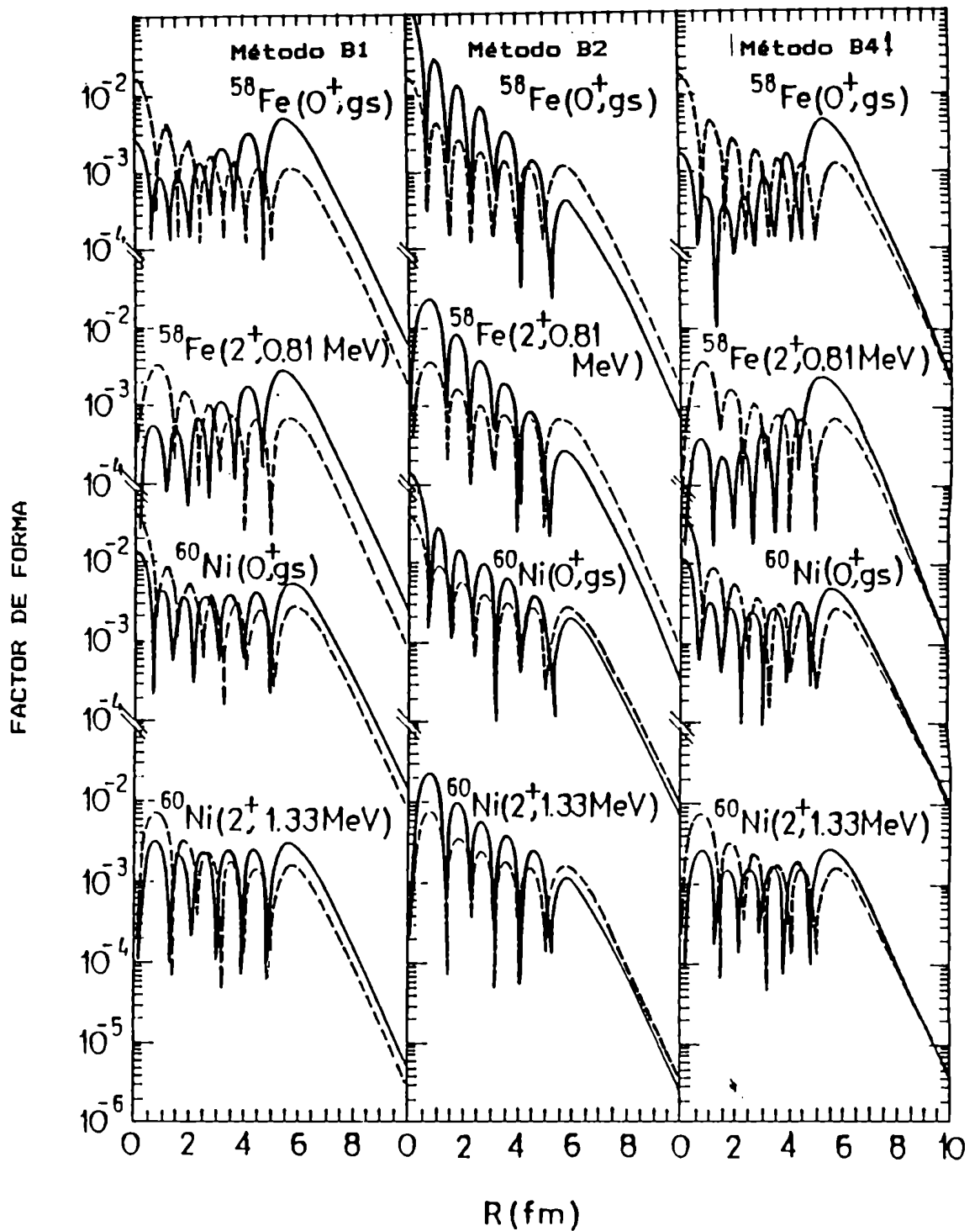


Fig. 2. Factores de forma. Las líneas llenas corresponden a los diferentes procedimientos. Las líneas punteadas corresponden al método macroscópico. Las reacciones se identifican por el estado del núcleo residual.

Method	$^{62}\text{Ni}(d, ^6\text{Li})^{58}\text{Fe}$		$^{64}\text{Zn}(d, ^6\text{Li})^{60}\text{Ni}$	
	r_0	r_2	r_0	r_2
B1	10.52	9.02	3.31	2.91
B2	0.22	0.21	0.68	0.67
B4	3.95	3.38	2.14	1.85

$$r_j = \frac{d\sigma_j}{(d\sigma_j)_{\text{Macr}}}$$

Tabla 2. Cocientes entre las secciones eficaces de cada método y la correspondiente al método macroscópico.

prefiere en cambio comparar los diferentes métodos entre sí.

La figura 3 muestra las secciones eficaces diferenciales calculadas con las funciones de superposición anteriores y las compara con el mismo criterio. Ellas son el resultado de cálculos efectuados bajo la aproximación de Born para ondas distorsionadas (DWBA) realizados con el código de rango finito LOLA^[DV] para la obtención de los factores de forma. Los parámetros ópticos son los de las referencias [Ch76, Ne61, Hu68].

La tabla 2 permite comparar los resultados para los diferentes métodos cuando se aplican al cálculo de las secciones eficaces diferenciales para el estado fundamental y primer 2^+ . En todos los casos han sido normalizados al ser divididos por el resultado macroscópico.

Como era de esperar, las formas de las distribuciones angulares resultan similares para todos los métodos.

Las magnitudes, en cambio, dependen fuertemente del método que elegimos y este hecho se debe principalmente al comportamiento de las funciones de superposición en la zona de la superficie nuclear (ver fig.2).

Los mayores valores se obtienen con el método B1 ya que en éste las contribuciones correspondientes a los diferentes números cuánticos radiales del centro de masa N , tienen la misma pendiente desde la superficie nuclear y, para los estados más bajos 0^+ y 2^+ se suman coherentemente. Es importante subrayar que parte del aumento de magnitud en las secciones eficaces calculadas con este método es debida a las aproximaciones en las que se basa (considera todos los

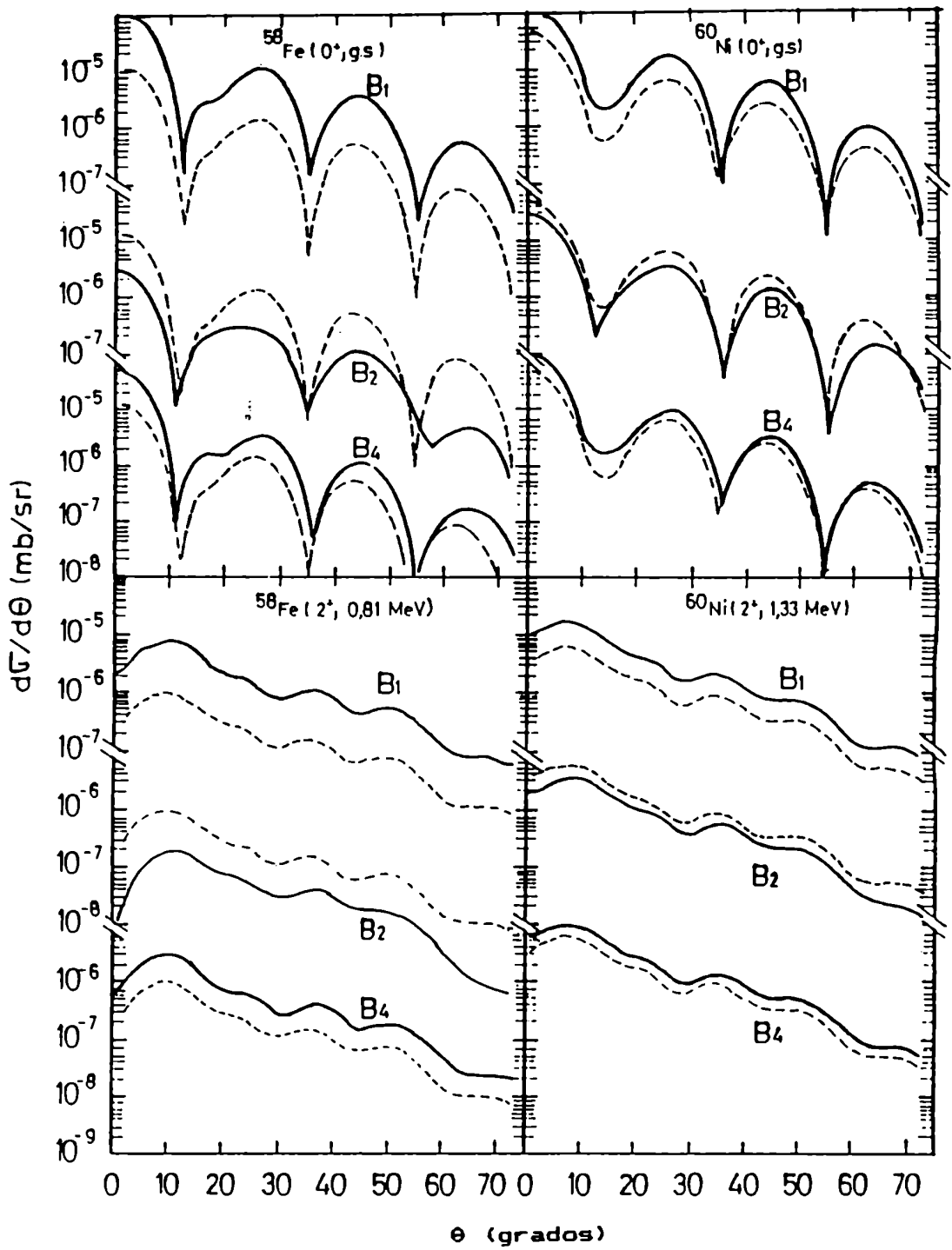


Fig. 3. Secciones eficaces. Las líneas llenas corresponden a los diferentes procedimientos. Las líneas punteadas corresponden al método macroscópico. Las reacciones se identifican por el estado del núcleo residual.

estados con la misma energía de ligadura) y, por lo tanto, no tiene sentido físico.

El método para el cual se utilizan funciones de oscilador armónico empalmadas con funciones de Whittaker con la energía de ligadura apropiada (B2) da las secciones eficaces más pequeñas. Estos resultados se deben a la menor probabilidad del oscilador armónico en la zona asintótica que para el caso del potencial de Woods-Saxon equivalente, aún cuando se incluyen contribuciones para varios valores de N.

El método que se presenta en esta tesis (B4) suma también varias contribuciones de N y por lo tanto es de esperar un incremento de magnitud con respecto al macroscópico. Por otro lado, el hecho de que las pendientes negativas aumenten para valores decrecientes de N hace que sus contribuciones sean menos importantes que para el método B1.

Ai comparar los resultados para las reacciones que llevan a Fe y Ni se puede ver que las diferencias son más notorias para el primer caso. Esto se puede atribuir a las diferentes configuraciones desde las cuales los protones son transferidos. En la reacción ${}^{64}\text{Zn}(d, {}^6\text{Li}){}^{60}\text{Ni}$ los protones son extraídos de la órbita "caliente" 1p y por lo tanto el factor de estructura resulta considerablemente mayor que para el resto, siendo éste el responsable del incremento en todos los métodos.

Las diferencias entre las aproximaciones se hacen notorias cuando se involucran configuraciones más frías (por

ejemplo, en el caso de la reacción $^{62}\text{Ni}(d, ^6\text{Li})^{58}\text{Fe}$ y es en este caso donde es necesario usar el mejor método.

El hecho que los diferentes métodos prácticos lleven a resultados bastante diferentes, lleva a reflexionar sobre cómo aplicar los formalismos más elaborados para el estudio de reacciones de transferencia y que en último término, utilizan alguno de los métodos descritos anteriormente al aplicarlos al cálculo de secciones eficaces y factores de forma.

En particular aquí se ha desarrollado un método (B4) que no es equivalente a los previos en muchos casos. Se considera que este procedimiento está basado en aproximaciones más reales:

(i) es útil para abordar casos para los cuales contribuye más de un término a la función de superposición,

(ii) el uso de un único potencial para todas las contribuciones a la función de superposición lo hace superior al método B1; y

(iii) dado que el potencial de Woods-Saxon es más realista que el del oscilador armónico en la región de la superficie nuclear, este método resulta también mejor que el de las funciones de oscilador empalmadas suavemente con las funciones asintóticas de Coulomb (B2).

Más aun, dado que los cálculos teóricos [AK84] necesitan un aumento de magnitud para comparar con los resultados experimentales, el factor 2-3 con respecto al resultado macroscópico es también un aspecto satisfactorio del método B4.

Cuando la mezcla de diferentes capas principales es importante (algunos núcleos deformados) ninguno de los métodos conocidos que admiten contribuciones de varios N es apropiado. En el procedimiento B1 el pozo para el mayor N toma una profundidad no realista. En el método B3 la función de onda para el mayor N no puede ser ligada, y para el B4, dado que la pendiente para el mayor N predomina a grandes distancias, el ajuste de la derivada logarítmica es ambiguo. La necesidad de tener un procedimiento idóneo para trabajar con muchas configuraciones da lugar a seguir investigando este tema. En el Capítulo III de esta tesis se expone un método alternativo para ese tipo de cálculos.

CAPITULO III

FACTOR DE FORMA PARA CUATRO NUCLEONES

III.1 Introducción

Tal como se vio en el capítulo II, para la mayoría de los cálculos en reacciones directas que involucran funciones de onda del Modelo de Capas de varios nucleones, es conveniente separar la parte de la función de onda que describe el movimiento del centro de masa del conjunto, del de la parte intrínseca.

Talmi^[Ta52] y Moshinsky^[Mo59] desarrollaron métodos para hacer esta transformación a coordenadas del centro de masa e intrínsecas cuando las funciones de partícula independiente son las correspondientes a un potencial de oscilador armónico infinito. Para ello se utilizan los paréntesis de transformación de Brody y Moshinsky^[BM60].

Sin embargo, hay ocasiones en que es necesario utilizar potenciales más realistas, como por ejemplo en el caso de cálculos de Hartree-Fock en el cual las funciones de partícula independiente son solución de un potencial finito autoconsistente, o bien en los procesos de transferencia de partículas que son muy sensibles al comportamiento de las funciones de onda en las zonas de la superficie y exterior del núcleo.

Se han utilizado variados y diferentes procedimientos para efectuar la transformación de coordenadas en estos

casos. En el capítulo II se ha reseñado una serie de métodos que se basan en el cálculo de la función ξ_L de la ec.(2.27). Esta expresión se deduce para funciones de oscilador armónico utilizando los paréntesis de transformación de Moshinsky. Y, si bien, en primera aproximación, pueden calcularse los factores de estructura con otro potencial finito, lo que se hace en la práctica es calcularlos en la base del oscilador y cambiar de base para el cálculo de los estados ligados ξ_{NL} de manera de obtener el comportamiento asintótico correcto.

En este capítulo se presenta un método alternativo que permite realizar la separación de la función de onda del centro de masa, utilizando desde un principio las funciones correspondientes a un potencial realista.

Esto se realiza mediante el cálculo de una integral de superposición entre la función de onda de una partícula alfa y la función del modelo de capas de cuatro nucleones.

El procedimiento está inspirado en el método de Bayman y Kallio ^[BK66], que obtiene la parte de la función de onda de dos nucleones con momento angular relativo nulo, por medio de una integral de superposición (Sec. III.2.1).

La función de onda del Modelo de Capas de los cuatro nucleones de valencia en el caso de estar en la zona de los núcleos livianos, se expresa en el formalismo de isoespín (Sec. III.4), no siendo así en la zona de los núcleos pesados. Esto es porque, en los núcleos livianos, los neutrones y protones de valencia se encuentran en orbitales próximos, y se los puede tratar como partículas idénticas,

con un número cuántico para la carga (el isoespín). Para los núcleos más pesados, el exceso de neutrones y la repulsión coulombiana entre los protones, hace que las órbitas de valencia estén más separadas en energía para protones y neutrones y ya no se las pueda considerar como partículas idénticas. Para construir la función de onda totalmente antisimétrica en este segundo caso, bastará con antisimetrizar los pares de protones y de neutrones (Sec.III.5).

El método que se desarrolla en esta tesis (BABY) se puede utilizar para cálculos de decaimiento alfa, transferencia de partículas alfa entre núcleos esféricos o deformados, etc. Constituye una herramienta útil, que sólo contiene una aproximación importante: considera el movimiento intrínseco de los cuatro nucleones en estado relativo 0s. Sin embargo, esta aproximación es bastante apropiada para la mayoría de las aplicaciones.

III.2 Formalismo

III.2.1 ANTECEDENTES

En esta subsección se resume brevemente el formalismo del método de Bayman y Kallio. Para mayores detalles se remite a la referencia [BK66].

La función de onda más general de dos partículas

antisimetrizada y normalizada es:

$$\begin{aligned} \psi_{M_J M_T}^{n_1 l_1 j_1, n_2 l_2 j_2, J T} &= \\ &= \frac{[\psi^{n_1 l_1 j_1}(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\sigma}_1) \psi^{n_2 l_2 j_2}(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\sigma}_2)]_M^J + (-)^T [\psi^{n_1 l_1 j_1}(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\sigma}_2) \psi^{n_2 l_2 j_2}(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\sigma}_1)]_M^J}{\sqrt{[2(1+\delta_{n_1 n_2} \delta_{l_1 l_2} \delta_{j_1 j_2})]}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde n_i, l_i, j_i son los números cuánticos que caracterizan el estado de partícula independiente

$$\psi_m^{n l j}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}) = [\xi^l(\mathbf{r}) \chi^{1/2}(\boldsymbol{\sigma})]_m^j, \quad (3.2)$$

$$\xi_m^l(\mathbf{r}) = u_{n l j}(\mathbf{r}) Y_m^l(\hat{\mathbf{r}}). \quad (3.3)$$

Las funciones radiales $u_{n l j}(\mathbf{r})$ son las soluciones normalizadas de la ecuación de Schrödinger del potencial de partícula independiente. Se utiliza la convención de Condon-Shortley [CS35] para los esféricos armónicos. El número cuántico T en (3.1) corresponde al isoespín y los corchetes indican el acoplamiento de los momentos angulares a momento angular total J con proyección M en el eje z .

Si desacoplamos la parte espacial de la de espín, tenemos:

$$\begin{aligned} \psi_{M_J M_T}^{n_1 l_1 j_1, n_2 l_2 j_2, J T} &= \\ &= \sum_{L, S} \langle (1_1 1/2) j_1 (1_2 1/2) j_2, J | (1_1 1_2) L (1/2, 1/2) S, J \rangle \cdot \\ &\cdot \frac{([\xi^l(\mathbf{r}_1) \xi^l(\mathbf{r}_2)]_L^{L+} + (-)^{1+S+T} [\xi^l(\mathbf{r}_2) \xi^l(\mathbf{r}_1)]_L^L)}{\sqrt{[2(1+\delta_{n_1 n_2} \delta_{l_1 l_2} \delta_{j_1 j_2})]}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$.[X^{1/2}(\sigma_1)X^{1/2}(\sigma_2)]_{M}^{S,J}$$

donde se han utilizado los paréntesis de reacoplamiento de Wigner.

La parte de la función de onda en que las dos partículas tienen momento angular relativo cero es simétrica ante la permutación de r_1 y r_2 . por lo tanto si $T=1$ debe ser $S=0$ o viceversa para que la función de onda sea totalmente antisimétrica.

Definiendo las coordenadas relativa y del centro de masa

$$r = (r_2 - r_1)/\sqrt{2} \quad , \quad R = (r_2 + r_1)/\sqrt{2} \quad , \quad (3.5)$$

se puede introducir el siguiente desarrollo:

$$\frac{[Y^1(r_1)Y^1(r_2)]_{M}^{L+(-)^{1+S+T}} [Y^1(r_2)Y^1(r_1)]_{M}^{L}}{\sqrt{[2(1+\delta_{n_1 n_2} \delta_{l_1 l_2} \delta_{j_1 j_2})]}} =$$

$$= \sum_{\lambda/\lambda} \frac{f_{\lambda/\lambda}^L(r,R)}{rR} [Y^{\lambda}(\hat{r}) Y^{\lambda}(\hat{R})]_{M}^L \quad (3.6)$$

Para obtener $f_{0,L}^L(r,R)$, se pone $R = z$ y se integra (3.6) en $d\hat{r}$. Dado que

$$Y_M^{\lambda}(\hat{z}) = \delta_{M,0} \left(\frac{2/\lambda+1}{4\pi}\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad Y_0^0(\hat{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (3.7)$$

y haciendo uso de las propiedades de ortogonalidad de los armónicos esféricos, esta integración selecciona el término

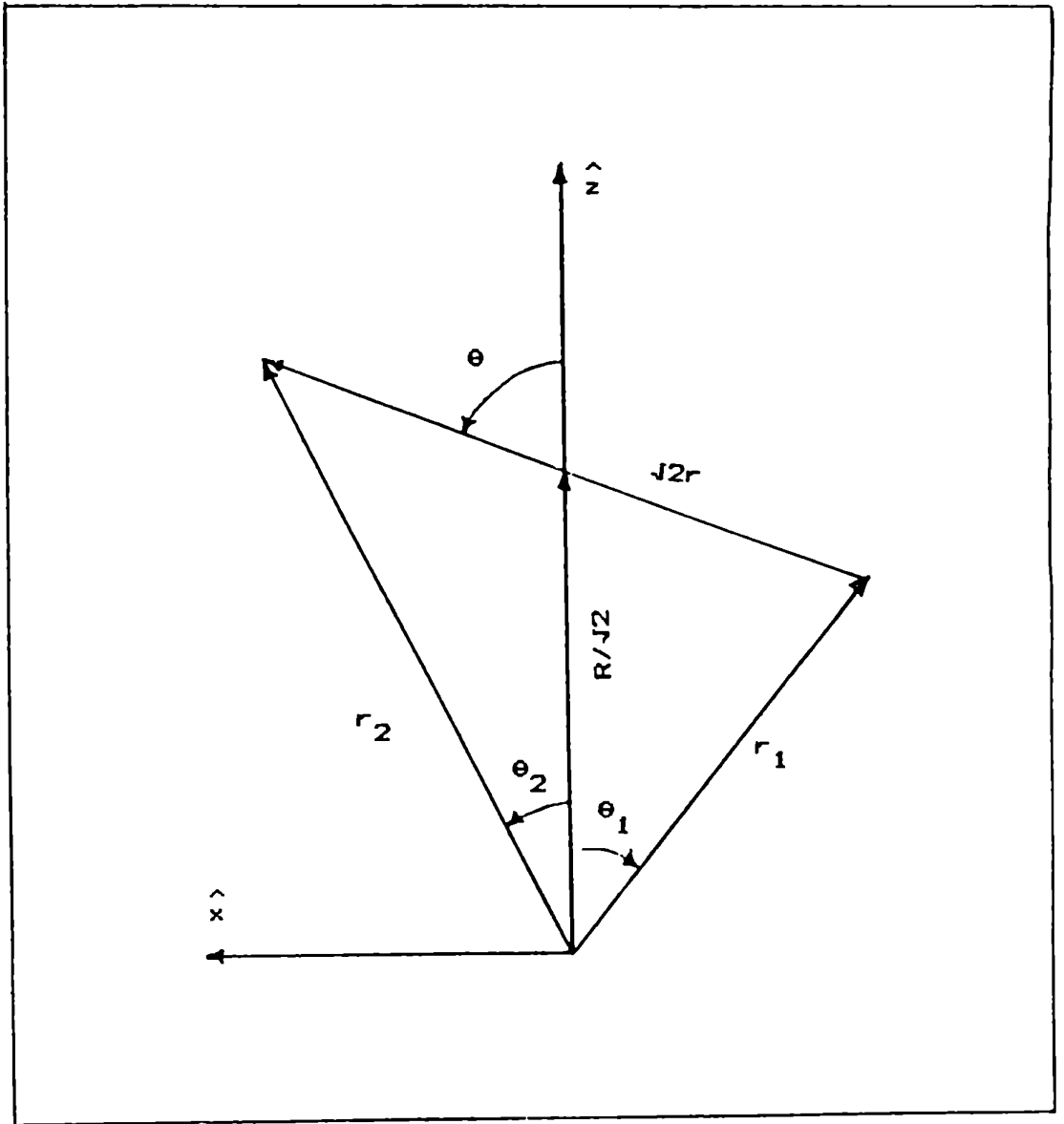


Fig. 4. Definición de coordenadas para dos nucleones[BK66].

con $\lambda = 0$, $\Lambda = L$ del miembro derecho.

Con lo que

$$f_{OL}^L(r,R) = \frac{rR}{(2L+1)^{1/2}} \int \frac{[\delta_{11}^{11}(r_1)\delta_{12}^{12}(r_2)]_M^L + [\delta_{11}^{11}(r_2)\delta_{12}^{12}(r_1)]_M^L}{\sqrt{[2(1+\delta_{n_1 n_2}^{11} \delta_{11}^{12} \delta_{j_1 j_2}^{12})]}} dr \quad (3.8)$$

La "función distribución" $f_{OL}^L(r,R)$ obtenida en (3.8) contiene toda la información acerca de la parte de la función de onda con momento angular relativo cero de la función (3.1). Esta expresión se puede trabajar hasta llegar a

$$f_{OL}^L(r,R) = \frac{1+(-)^{1_1+1_2-L}}{2} \left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2(2L+1)(1+\delta_{n_1 n_2}^{11} \delta_{11}^{12} \delta_{j_1 j_2}^{12})} \right]^{1/2} \cdot r R \int_{-1}^1 dx u_{1_1}^1(r_1) u_{1_2}^1(r_2) \quad (3.9)$$

$$\cdot [\langle 1_{1_1 1_2} 00 | L0 \rangle d_{00}^{1_1}(\theta_1) d_{00}^{1_2}(\theta_2) + 2 \sum_{m>0} \langle 1_{1_1 1_2} m-m | L0 \rangle d_{m0}^{1_1}(\theta_1) d_{m0}^{1_2}(\theta_2)]$$

donde (ver figura 4)

$$Y_m^1(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} d_{m,0}^1(\theta) \frac{(2l+1)^{1/2}}{4\pi} \quad (3.10)$$

$$d_{m,0}^1(\theta) = \sum_{n \neq m} (-)^{-n} \frac{1! [(1+m)! (1-m)!]^{1/2}}{n! (1+m-n)! (1-n)! (n-m)!}$$

$$(\cos\theta/2)^{2l+m-2n} (\sin\theta/2)^{2n-m} \quad (3.10a)$$

$$= \cos\theta$$

$$r_1 = \frac{(R^2+r^2-2rRx)^{1/2}}{2}, \quad r_2 = \frac{(R^2+r^2+2rRx)^{1/2}}{2} \quad (3.10b)$$

$$\cos(\theta_1/2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{R - rx}{2\sqrt{2} \cdot r_1} \right)^{1/2}, \quad \text{sen}(\theta_1/2) = \left(\frac{1}{2} - \frac{R - rx}{2\sqrt{2} \cdot r_1} \right)^{1/2} \quad (3.10c)$$

$$\cos(\theta_2/2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{R - rx}{2\sqrt{2} \cdot r_2} \right)^{1/2}, \quad \text{sen}(\theta_2/2) = \left(\frac{1}{2} - \frac{R - rx}{2\sqrt{2} \cdot r_2} \right)^{1/2}$$

La integración en (3.9) se hace numéricamente mediante el método de Gauss-Legendre [ZK55] el cual aproxima la integral por una sumatoria de N_0 términos

$$\int_{-1}^1 g(x) dx \approx \sum_{i=1}^{N_0} w_i g(x_i) \quad (3.11)$$

Los coeficientes de peso w_i y las abscisas x_i están tabulados [AS64] para varios valores de N_0 .

Las funciones $f_{0,L}^L(r,R)$ se utilizan como segmentos básicos en el desarrollo del factor de forma para cuatro nucleones como se verá en la siguiente sección.

III.2.2 FUNCIÓN DE SUPERPOSICIÓN PARA CUATRO NUCLEONES

Dados cuatro nucleones podemos definir las coordenadas relativas y del centro de masa de acuerdo a la figura 5

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{2}} & r_{34} &= \frac{r_3 - r_4}{\sqrt{2}} \\ \sigma &= \frac{(r_1 + r_2) - (r_3 + r_4)}{2} & R &= \frac{(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)}{4} \end{aligned} \quad (3.12)$$

La función de onda intrínseca de la partícula alfa normalizada es:

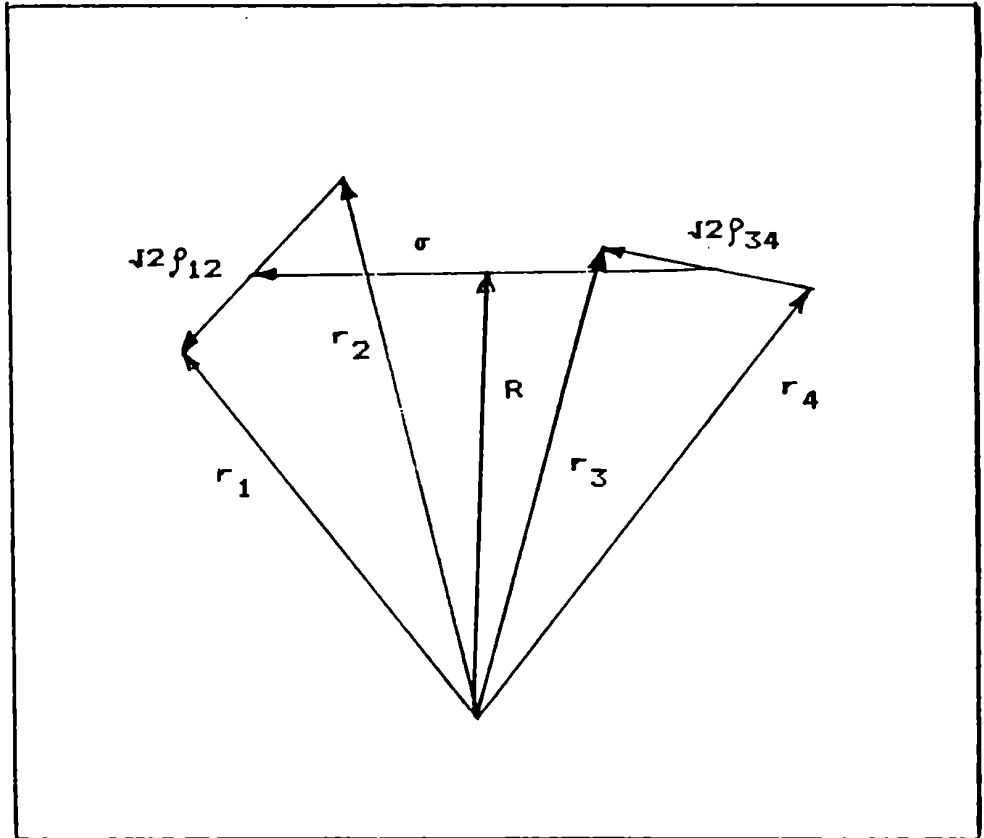


Fig. 5. Definición de coordenadas para cuatro nucleones (BABY).

$$\bar{\varphi}_\alpha = \bar{\varphi}^{\text{orb}}(\tau_{12}, \tau_{34}, \sigma) \chi([\tilde{4}] S=T=0, \{\sigma_i, \tau_i\}) , \quad (3.13)$$

donde

$$\bar{\varphi}^{\text{orb}}(\tau_{12}, \tau_{34}, \sigma) = \left(\frac{8\lambda}{\pi}\right)^{9/4} \exp\{-4\lambda(\tau_{12}^2 + \tau_{34}^2 + \sigma^2)\} , \quad (3.14)$$

con

$$\lambda = 9/(64 \cdot \langle r^2 \rangle) \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} (r_1 - r_2)^2 + (r_1 - r_3)^2 + (r_1 - r_4)^2 + (r_2 - r_3)^2 + (r_2 - r_4)^2 + (r_3 - r_4)^2 = \\ = 4(\tau_{12}^2 + \tau_{34}^2 + \sigma^2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

y

$$\chi([\tilde{4}] S=T=0, \{\sigma_i, \tau_i\}) = \frac{1}{2} \sum_{S'+T'=1}^{\Sigma} (-)^{S'} \quad (3.17)$$

$$\chi([\tilde{2}] S', T', \{\sigma_i, \tau_i\}) \chi([\tilde{2}] S', T', \{\sigma_i, \tau_i\})$$

En (3.17) se ha utilizado el grupo de simetrías para la clasificación de las funciones de onda de espín e isoespín (ver apéndice B).

La parte orbital está normalizada según

$$\int \bar{\varphi}_\alpha^{\text{orb}*} \bar{\varphi}_\alpha^{\text{orb}} d\tau_{12}^3 d\tau_{34}^3 d\sigma^3 = 1 \quad (3.18)$$

Definimos una función de onda de cuatro partículas en el formalismo de isoespín como:

$$\begin{aligned}
 \Psi_4 &= \Psi_{JTMJM_T}^{n_1 1 j_1, n_2 1 j_2, n_3 1 j_3, n_4 1 j_4, J_{12} T_{12}, J_{34} T_{34}}(r_i, \sigma_i, \tau_i) = \\
 &= \left[\left\{ \left[\Psi^{n_1 1 j_1}(r_1, \sigma_1) \Psi^{n_2 1 j_2}(r_2, \sigma_2) \right]^{J_{12}} \right. \right. \\
 &+ \left. \left. (-)^{T_{12}} \left[\Psi^{n_1 1 j_1}(r_2, \sigma_2) \Psi^{n_2 1 j_2}(r_1, \sigma_1) \right]^{J_{12}} \right\} \right. \\
 &/ \left. \left\{ 2(1 + \delta_{n_1 n_2} \delta_{1 1} \delta_{j_1 j_2}) \right\}^{1/2} \right. \\
 &+ \left. \left[\left\{ \left[\Psi^{n_3 1 j_3}(r_3, \sigma_3) \Psi^{n_4 1 j_4}(r_4, \sigma_4) \right]^{J_{34}} \right. \right. \right. \\
 &+ \left. \left. (-)^{T_{34}} \left[\Psi^{n_3 1 j_3}(r_4, \sigma_4) \Psi^{n_4 1 j_4}(r_3, \sigma_3) \right]^{J_{34}} \right\} \right. \\
 &/ \left. \left\{ 2(1 + \delta_{n_3 n_4} \delta_{1 1} \delta_{j_3 j_4}) \right\}^{1/2} \right]_{M_J}^J \\
 &\quad \left[X(T_{12}, \tau_1 \tau_2) X(T_{34}, \tau_3 \tau_4) \right]_{M_T}^T \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

La integral de superposición entre la función de onda de la partícula alfa y la función de cuatro nucleones se escribe:

$$\begin{aligned}
 F(R) &= \int d\vec{r}_{12} d\vec{r}_{34} d\vec{\sigma} d\sigma_i d\tau_i \delta_\alpha^* \Psi_4 = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1 + \delta_{n_1 n_2} \delta_{1 1} \delta_{j_1 j_2}) (1 + \delta_{n_3 n_4} \delta_{1 1} \delta_{j_3 j_4}) \right]^{-1/2} \\
 &\quad \sum_{L_{12} S_{12}} \sum_{S'+T'=1} \\
 &\quad L_{34} S_{34} \\
 &\quad (-)^{S'} \langle (1_1 1/2) j_1, (1_2 1/2) j_2, J_{12} | (1_1 1_2) L_{12}, (1/2, 1/2) S_{12}, J_{12} \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle (1_3^{1/2}) j_3, (1_4^{1/2}) j_4, J_{34} | (1_3^{1/2} 1_4^{1/2}) L_{34}, (1/2, 1/2) S_{34}, J_{34} \rangle \\
& \int d\vec{\tau}_{12}^3 d\vec{\tau}_{34}^3 d\vec{\sigma}^3 \delta_{\alpha}^{orb*} \int d\sigma_i d\tau_i \\
& [X^*(T', \tau_1 \tau_2) X^*(T', \tau_3 \tau_4)]_0^0 [X(T_{12}, \tau_1 \tau_2) X(T_{34}, \tau_3 \tau_4)]_{M_T}^T \\
& [X^*(S', \sigma_1 \sigma_2) X^*(S', \sigma_3 \sigma_4)]_0^0 \\
& \{ [X(S_{12}, \sigma_1 \sigma_2) ([\delta^1(r_1) \delta^1(r_2)]^{L_{12}})]^{L_{12}} \\
& + (-)^{1+S_{12}+T_{12}} [\delta^1(r_2) \delta^1(r_1)]^{L_{12}}]^{J_{12}} \\
& [X(S_{34}, \sigma_3 \sigma_4) ([\delta^1(r_3) \delta^1(r_4)]^{L_{34}})]^{L_{34}} \\
& + (-)^{1+S_{34}+T_{34}} [\delta^1(r_4) \delta^1(r_3)]^{L_{34}}]^{J_{34}} \}_{M_J}^J
\end{aligned} \tag{3.20}$$

donde se ha reemplazado $d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 d\sigma_4 d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4$ por $d\sigma_i d\tau_i$ para simplificar la notación.

Es oportuno destacar que estas integrales $F(R)$ corresponden a las funciones δ_L que intervienen en (2.26) y (2.28) en el caso de una única configuración $[n_1 l_1 j_1, n_2 l_2 j_2, n_3 l_3 j_3, n_4 l_4 j_4, J_{12} T_{12} J_{34} T_{34}, J, T]$. En este caso no se calculan según la expresión (2.27), sino que se trabaja desde un principio con funciones de partícula independiente correspondientes a un potencial arbitrario.

Trabajando sobre la expresión (3.20) se llega a

$$\begin{aligned}
F(R) = & \frac{1}{J_2} \hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{j}_3 \hat{j}_4 \hat{J}_{12} \hat{J}_{34} \hat{S}' \hat{T}_{12} \hat{T}_{34} \\
& \delta_{S'+T', 1} (-)^{S'} \Sigma [(2L_{12}+1) (2L_{34}+1)]^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & j_1 \\ L_{12} & S' & J_{12} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1_3 & 1/2 & j_3 \\ 1_4 & 1/2 & j_4 \\ L_{34} & S' & J_{34} \end{pmatrix} W(L_{12} S' L_{34}, J_{12} L_{34}) I(j_1 j_2 j_3 j_4 L_{12} L_{34}, L, R) \quad (3.21)$$

donde

$$\begin{aligned} I(R) &= I(j_1 j_2 j_3 j_4 L_{12} L_{34}, L, R) = \\ &= \left(\frac{8\lambda}{\pi}\right)^{9/4} \frac{1}{2} [(1+\delta_{n_1 n_2} \delta_{1_1 1_2} \delta_{j_1 j_2}) (1+\delta_{n_3 n_4} \delta_{1_3 1_4} \delta_{j_3 j_4})]^{-1/2} \\ &\int d^3 \uparrow_{12} d^3 \uparrow_{34} d^3 \sigma \exp\{-4\lambda(\uparrow_{12}^2 + \uparrow_{34}^2 + \sigma^2)\} \\ &[(\uparrow_{12}^1(r_1) \uparrow_{12}^2(r_2))]^{L_{12}} + (\uparrow_{12}^1(r_2) \uparrow_{12}^2(r_1))]^{L_{12}} \\ &[(\uparrow_{34}^1(r_3) \uparrow_{34}^2(r_4))]^{L_{34}} + (\uparrow_{34}^1(r_4) \uparrow_{34}^2(r_3))]^{L_{34}}]_M^L \quad (3.22) \end{aligned}$$

En la siguiente subsección se detalla el cálculo de I(R).

III.2.3 CÁLCULO DE LA FUNCIÓN I(R)

La integral (3.22) se puede hacer en tres pasos. Integrando en $d^3 \uparrow_{12}$, tenemos de acuerdo a la fórmula (3.6)

$$\begin{aligned} \int d^3 \uparrow_{12} \exp\{-4\lambda \uparrow_{12}^2\} \frac{[(\uparrow_{12}^1(r_1) \uparrow_{12}^2(r_2))]^{L_{12}} + (\uparrow_{12}^1(r_2) \uparrow_{12}^2(r_1))]^{L_{12}}}{\sqrt{2(1+\delta_{n_1 n_2} \delta_{1_1 1_2} \delta_{j_1 j_2})}} &= \\ (4\pi)^{-1/2} \int d^3 \uparrow_{12} \exp\{-4\lambda \uparrow_{12}^2\} \frac{f_{0L_{12}}^{L_{12}}(\uparrow_{12}, R_{12})}{\uparrow_{12} R_{12}} Y_{M_{12}}^{L_{12}}(\hat{R}_{12}) & \quad (3.23) \end{aligned}$$

donde

$$R_{12} = (r_1 + r_2) / 2 \quad \text{y} \quad R_{34} = (r_3 + r_4) / 2. \quad (3.24)$$

Si ahora introducimos la función

$$g_{1 \frac{1}{2} 1 \frac{1}{2}}^{L_{12}}(R_{12}) Y_{M \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{L_{12}}(\hat{R}_{12}) = \int d\vec{r}_{12} \exp(-4\lambda r_{12}^2) \frac{[\delta_{1 \frac{1}{2}}^1(r_1) \delta_{1 \frac{1}{2}}^1(r_2)]^{L_{12}} + [\delta_{1 \frac{1}{2}}^1(r_2) \delta_{1 \frac{1}{2}}^1(r_1)]^{L_{12}}}{\sqrt{[2(1+\delta_{n_1 n_2}^1 \delta_{l_1 l_2}^1 \delta_{j_1 j_2}^1)]}} \quad (3.25)$$

entonces

$$g_{1 \frac{1}{2} 1 \frac{1}{2}}^{L_{12}}(R_{12}) = (4\pi)^{1/2} \int d\vec{r}_{12} \exp(-4\lambda r_{12}^2) r_{12} f_{OL_{12}}^{L_{12}}(r_{12}, R_{12}) \quad (3.26)$$

De esta forma se puede interpretar $g(r)$ como una función de onda radial. La integral (3.26) se resuelve mediante la aproximación de Gauss-Hermite [BK66]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} h(r) dr \approx \sum_{i=1}^{N/2} H_i [h(a_i) + h(-a_i)] \quad , \quad N \text{ par} \quad (3.27)$$

$$\approx \sum_{i=1}^{(N-1)/2} H_i [h(a_i) + h(-a_i)] + H_{\frac{N+1}{2}} h(0) \quad , \quad N \text{ impar}$$

los H_i y a_i están tabulados [ZK55].

Procediendo de igual manera se puede encontrar $g(R_{34})$ y la integral (3.22) se reduce a

$$I(R) = \int d\vec{\sigma} \exp(-4\lambda \sigma^2) \frac{g_{1 \frac{1}{2} 1 \frac{1}{2}}^{L_{12}}(R_{12})}{R_{12}} \frac{g_{1 \frac{3}{4} 1 \frac{3}{4}}^{L_{34}}(R_{34})}{R_{34}} [Y_{M \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{L_{12}}(\hat{R}_{12}) Y_{M \frac{3}{4} \frac{3}{4}}^{L_{34}}(\hat{R}_{34})]^L \quad (3.28)$$

y aplicando nuevamente la prescripción (3.25), obtenemos

$$I(R) = \frac{g_{L_{12}L_{34}}^L (2R) Y_M^L(\hat{R})}{2 \sqrt{2} R} \quad (3.29)$$

El cálculo de $I(R)$ es la parte fundamental del método para la obtención del factor de forma.

Es importante destacar que la función de onda (3.19) que utilizamos para el cálculo no está totalmente antisimetrizada como la (3.1), pero, como veremos en la sección III.4, se puede escribir la función totalmente antisimetrizada en términos de funciones del tipo de la (3.19).

III.3 Prueba del método con funciones de oscilador armónico

El método descrito hasta aquí puede utilizarse con funciones de onda de partícula independiente de cualquier tipo. Como se mencionó anteriormente, para el caso de funciones de oscilador armónico, se puede encontrar una expresión exacta, mediante el uso de los paréntesis de Moshinsky. Vamos a derivar entonces esa expresión y compararemos los resultados con los que da el método BABY a través del cálculo numérico del factor de forma que se ha presentado. En particular, podemos utilizar funciones de oscilador armónico

$$u_{n,1}(r) = \left\{ \frac{2^{1-n+2} (2l+2n+1)!! b^{3/2}}{\sqrt{\pi} n! (2l+1)!!} \right\}^{1/2} (\sqrt{b} r)^l \exp(-br^2/2) \quad (3.30)$$

$$\sum_K (-1)^K 2^K \binom{n}{K} \frac{(2l+1)!!}{(2l+2K+1)!!} (br^2)^K$$

Si el parámetro de tamaño en (3.30) se hace igual a 8λ , entonces, la integral $F(R)$ (3.20) selecciona la parte de la función de onda de 4 nucleones con ningún cuanto para el movimiento relativo. En este caso, la integral de superposición (3.20) tiene la expresión exacta

$$F_{n_1 l_1, n_2 l_2, L_p; n_3 l_3, n_4 l_4, L_n; L}(R) = \langle n_1 l_1, n_2 l_2, L_p | 00, n_p l_p, L_p \rangle \quad (3.31)$$

$$\langle n_3 l_3, n_4 l_4, L_n | 00, n_n l_n, L_n \rangle \langle n_p l_p, n_n l_n, L | 00, NL, L \rangle$$

$$2 u_{NL}(2R) Y_M^L(\hat{R}) / \left\{ (1+\delta_{n_1 n_2} \delta_{l_1 l_2}) (1+\delta_{n_3 n_4} \delta_{l_3 l_4}) \right\}^{1/2}$$

En (3.31) los símbolos n_p , n_n y N están definidos por

$$n_p \equiv n_1 + n_2 + (l_1 + l_2 - L_p)/2$$

$$n_n \equiv n_3 + n_4 + (l_3 + l_4 - L_n)/2 \quad (3.32)$$

$$N \equiv n_p + n_n + (L_p + L_n - L)/2$$

y los coeficientes de Talmi-Moschinsky para el movimiento relativo con número de cuantos cero están dados explícitamente por

$$\langle n_1 l_1, n_2 l_2, L_p | 00, n_p l_p, L_p \rangle = (-1)^{l_1 + l_2 - L_p} \langle 1_1 1_2, 00 | L_p 0 \rangle \quad (3.33)$$

$$\left(\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)n_p!(2n_p+2L_p+1)!! 2^{2n_p+2L_p} 1/2}{(2L_p+1)n_1!n_2!(2n_1+2l_1+1)!!(2n_2+2l_2+1)!!} \right)$$

Esta expresión deberá multiplicarse por $i^{(l_1+l_2-L_p)}$ si esféricos armónicos están definidos con la convención reversa temporal [Ed57].

Los factores de forma calculados con el método BABY resultan de acuerdo con los valores exactos calculados con (3.31).

III.4 Función antisimétrica de cuatro nucleones

III.4.1 DESARROLLO DE LAS FÓRMULAS

Dada una función de cuatro partículas acopladas de a pares en momento angular e isoespín, se la antisimetriza mediante el uso de permutadores

$$\begin{aligned} \Psi_A &= \Psi_{A,T,\pi,M_J M_T}^{n_1 l_1 j_1, n_2 l_2 j_2, n_3 l_3 j_3, n_4 l_4 j_4, J_{12} T_{12}, J_{34} T_{34}}(r_i, \sigma_i, \tau_i) = \\ &= (24!)^{-1/2} \sum_{ijkl} P_{ijkl} [[\Psi_1(r_a) \Psi_2(r_b)]^{J_{12} T_{12}} \\ &\quad [\Psi_3(r_c) \Psi_4(r_d)]^{J_{34} T_{34}}]_{M_J M_T}^{JT} \end{aligned} \quad (3.34)$$

y se puede expresar también de la forma

$$\begin{aligned} \Psi_A &= N/\sqrt{6} (I - P_{ac} - P_{ad} - P_{bc} - P_{bd} - P_{acbd}) \\ &\left(1/2 [(1+\delta_{n_1 n_2} \delta_{l_1 l_2} \delta_{j_1 j_2}) (1+\delta_{n_3 n_4} \delta_{l_3 l_4} \delta_{j_3 j_4})]^{1/2} \right) \\ &\left([\Psi_1^{n_1 l_1 j_1}(r_a \sigma_a \tau_a) \Psi_2^{n_2 l_2 j_2}(r_b \sigma_b \tau_b)]^{J_{12} T_{12}} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\psi^{n_2^1 2^j 2} (r_a \sigma_a \tau_a) \psi^{n_1^1 1^j 1} (r_b \sigma_b \tau_b) \right]^{J_{12} T_{12}} \Big\} \\
& \left\{ \left[\psi^{n_3^1 3^j 3} (r_c \sigma_c \tau_c) \psi^{n_4^1 4^j 4} (r_d \sigma_d \tau_d) \right]^{J_{34} T_{34}} \right. \\
& \left. - \left[\psi^{n_4^1 4^j 4} (r_c \sigma_c \tau_c) \psi^{n_3^1 3^j 3} (r_d \sigma_d \tau_d) \right]^{J_{34} T_{34}} \right\} \Big\}_M^J
\end{aligned}$$

La expresión entre corchetes coincide con la función ψ_4 en (3.19). Para simplificar la notación, denotamos con letras a las partículas y con números a los estados.

Haciendo explícita referencia al estado de cada partícula en las funciones ψ_4 , se puede escribir la función totalmente antisimétrica como

$$\begin{aligned}
\psi_A &= N/J6 \left[\psi_4 (\langle j_1^a j_2^b \rangle_{J_{12} T_{12}}, \langle j_3^c j_4^d \rangle_{J_{34} T_{34}}, JT) \right. \\
& - \psi_4 (\langle j_1^c j_2^b \rangle_{J_{12} T_{12}}, \langle j_3^a j_4^d \rangle_{J_{34} T_{34}}, JT) \\
& - \psi_4 (\langle j_1^d j_2^b \rangle_{J_{12} T_{12}}, \langle j_3^c j_4^a \rangle_{J_{34} T_{34}}, JT) \\
& - \psi_4 (\langle j_1^a j_2^c \rangle_{J_{12} T_{12}}, \langle j_3^b j_4^d \rangle_{J_{34} T_{34}}, JT) \\
& - \psi_4 (\langle j_1^a j_2^d \rangle_{J_{12} T_{12}}, \langle j_3^c j_4^b \rangle_{J_{34} T_{34}}, JT) \\
& \left. - \psi_4 (\langle j_1^c j_2^d \rangle_{J_{12} T_{12}}, \langle j_3^b j_4^a \rangle_{J_{34} T_{34}}, JT) \right] \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Reacoplando de manera de tener en orden a las partículas, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
\psi_A &= 6^{-1/2} \left[\psi_4 (\langle j_1^a j_2^b \rangle_{J_{12} T_{12}}, \langle j_3^c j_4^d \rangle_{J_{34} T_{34}}, JT) \right. \\
& + \sum_{J_A^T J_B^T} (-1)^{j_1+2j_2+j_3+J_{12}+T_{12}+J_A+T_A+1} \left[\frac{(1+\delta_{j_2 j_3}) (1+\delta_{j_1 j_4})}{(1+\delta_{j_1 j_2}) (1+\delta_{j_3 j_4})} \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{ccc} 1/2 & 1/2 & T_{12} \\ 1/2 & 1/2 & T_{34} \\ T_A & T_B & T_{34} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} j_2 & j_1 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_A & J_B & J_{34} \end{array} \right\} \\
& \Psi_4 (\langle j_3^a j_2^b \rangle_{J_A T_A}, \langle j_1^c j_4^d \rangle_{J_B T_B}, JT) \\
& + \sum_{J_A T_A J_B T_B} (-1)^{J_{12}+T_{12}+J_{34}+T_{34}+J_A+T_A+J_B+T_B+1} C \\
& \cdot \left[\frac{(1+\delta_{j_4 j_2})(1+\delta_{j_3 j_1})}{(1+\delta_{j_1 j_2})(1+\delta_{j_3 j_4})} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} 1/2 & 1/2 & T_{12} \\ 1/2 & 1/2 & T_{34} \\ T_A & T_B & T_{34} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} j_2 & j_1 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_A & J_B & J_{34} \end{array} \right\} \\
& \Psi_4 (\langle j_4^a j_2^b \rangle_{J_A T_A}, \langle j_3^c j_1^d \rangle_{J_B T_B}, JT) \\
& + \sum_{J_A T_A J_B T_B} (-1) \cdot C \\
& \cdot \left[\frac{(1+\delta_{j_1 j_3})(1+\delta_{j_2 j_4})}{(1+\delta_{j_1 j_2})(1+\delta_{j_3 j_4})} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} 1/2 & 1/2 & T_{12} \\ 1/2 & 1/2 & T_{34} \\ T_A & T_B & -T_{34} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_A & J_B & -J_{34} \end{array} \right\} \\
& \Psi_4 (\langle j_1^a j_3^b \rangle_{J_A T_A}, \langle j_2^c j_4^d \rangle_{J_B T_B}, JT) \\
& + \sum_{J_A T_A J_B T_B} (-1)^{j_2+2j_3+j_4+J_{34}+T_{34}+J_B+T_B+1} C \\
& \cdot \left[\frac{(1+\delta_{j_1 j_4})(1+\delta_{j_3 j_2})}{(1+\delta_{j_1 j_2})(1+\delta_{j_3 j_4})} \right]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} 1/2 & 1/2 & T_{12} \\ 1/2 & 1/2 & T_{34} \\ T_A & T_B & T_{34} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_4 & j_3 & J_{34} \\ J_A & J_B & J_{34} \end{array} \right\} \\
& \Psi_4 (\langle j_1^a j_4^b \rangle_{J_A T_A}, \langle j_3^c j_2^d \rangle_{J_B T_B}, JT) \\
& + (-1)^{J_{12}+J+T_{12}+T+j_3+j_4} \Psi_4 (\langle j_4^a j_3^b \rangle_{J_A T_A}, \langle j_1^c j_2^d \rangle_{J_B T_B}, JT) \\
& \text{donde } C = \hat{J}_{12} \hat{J}_{34} \hat{J}_A \hat{J}_B \hat{T}_{12} \hat{T}_{34} \hat{T}_A \hat{T}_B .
\end{aligned}
\tag{3.37}$$

La norma de esta función viene dada para $T_{12}=T_{34}$ por

$$N = \left(1 + \delta_{J_{12}, J_{34}} \frac{\delta_{13}\delta_{24} + \delta_{14}\delta_{23}}{1 + \delta_{12}\delta_{13}\delta_{14}} (-1)^J \right)^{-1/2} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} & \left[\delta_{23} \langle (j_1 j_2)^{J_{12}}, (j_3 j_4)^{J_{34}, J} | (j_1 j_2)^{J_{12}}, (j_3 j_4)^{J_{34}, J} \rangle \right. \\ & + \delta_{24} \langle (j_1 j_2)^{J_{12}}, (j_4 j_3)^{J_{34}, J} | (j_1 j_4)^{J_{12}}, (j_2 j_3)^{J_{34}, J} \rangle \\ & + \delta_{14} \langle (j_2 j_1)^{J_{12}}, (j_4 j_3)^{J_{34}, J} | (j_2 j_4)^{J_{12}}, (j_1 j_3)^{J_{34}, J} \rangle \\ & \left. + \delta_{13} \langle (j_2 j_1)^{J_{12}}, (j_3 j_4)^{J_{34}, J} | (j_2 j_3)^{J_{12}}, (j_1 j_4)^{J_{34}, J} \rangle \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

La obtención de la función de superposición para la función totalmente antisimétrica

$$F(R) = \int d^3 \uparrow_{12} d^3 \uparrow_{34} d^3 \sigma_i d\tau_i \delta_{\alpha}^* \psi_A, \quad (3.39)$$

se reduce ahora a una suma de términos proporcionales a (3.21).

III.4.2 DETALLES DEL CÁLCULO. PRUEBA DEL MÉTODO

El desarrollo de la función totalmente antisimétrica de cuatro partículas es necesario cuando se trabaja en el formalismo de isoespín. Es decir, para aquellos núcleos en los cuales los protones y neutrones de valencia están en capas próximas.

Es por ello que para probar el método elegimos el ^{20}Ne .

En este núcleo los protones y neutrones se hallan en la configuración s-d del modelo de capas.

Se estudió la formación de conglomerados de partículas alfa en los dos primeros estados con momento angular cero (0_1^+ y 0_2^+). En otras palabras, se calculó la integral de superposición (3.39) entre las funciones que describen estos estados con cuatro partículas fuera de capa cerrada (2 protones y 2 neutrones) y la función de onda de la partícula alfa, con el fin de extraer la componente ($^{16}O+\alpha$) que tiene cada uno de los estados y compararlos.

El cálculo de la función de onda de los dos estados se realizó con el formalismo del "Modelo de capas en múltiples pasos" (MSM) de Liotta y Pomar [LP81] (ver Ap. A) utilizando dos tipos diferentes de interacción entre los nucleones: la cuadrupolar pura y la interacción de Kuo y Herling [KH71].

Para la interacción Q.Q se construyó un código que permite obtener los elementos de matriz entre estados de partícula simple del modelo de capas en la base del oscilador armónico. Con estos elementos de matriz se calcularon los estados correlacionados de dos nucleones en la capa s-d.

A partir de ellos, el MSM calcula la función de onda de cuatro nucleones que, en este caso particular, coincide con las funciones del modelo SU_3 .

En el modelo MSM, la función de onda de cuatro nucleones viene dada por

$$|\alpha_{MM_T}^{JT}\rangle = \sum_{\substack{J_1 J_2 J_3 J_4 \\ J_{12} J_{34} T_{12} T_{34}}} X(J_1 J_2 J_3 J_4, J_{12} J_{34} T_{12} T_{34}) \quad (3.40)$$

$$\left[\frac{[c_{j_1}^+ c_{j_2}^+]^{J_{12} T_{12}}}{(1+\delta_{j_1 j_2})^{1/2}} \frac{[c_{j_3}^+ c_{j_4}^+]^{J_{34} T_{34}}}{(1+\delta_{j_3 j_4})^{1/2}} \right]_{FMM}^{JT} |0\rangle$$

Se la superpuso con la función de onda de la partícula alfa (3.13) utilizando el código BABY, modificado para que incluya la función totalmente antisimétrica (3.36) y realice la suma indicada en (3.40).

La banda del estado fundamental para la capa $(sd)^4$ corresponde según el modelo SU_3 a la clasificación $(\lambda, \mu) = (8, 0)$, en cambio, para el segundo 0^+ no hay contribución $(8, 0)$. En la formación de conglomerados alfa solamente contribuye la representación $(8, 0)$ del grupo SU_3 (referencia [Ic73]), por lo tanto, es de esperar que la integral de superposición del primer 0^+ con la partícula alfa tenga un valor mucho mayor que la correspondiente al segundo 0^+ . Esto se puede apreciar en los resultados que se detallan en la tabla 3.

TABLA 3

R(fm)	$\langle \alpha 0_1^+ \rangle_{Q.Q}$	$\langle \alpha 0_2^+ \rangle_{Q.Q}$
2.	-9.43×10^{-3}	-2.24×10^{-4}
3.	1.40×10^{-2}	2.63×10^{-4}
4.	2.99×10^{-3}	6.11×10^{-5}
5.	3.96×10^{-5}	8.19×10^{-7}
6.	7.24×10^{-8}	1.50×10^{-9}

Como se comentó anteriormente, estas integrales de

superposición se calcularon utilizando funciones de oscilador armónico para los estados de partícula simple.

En realidad, la virtud del método es que pueden utilizarse funciones que sean solución de un potencial más realista, como por ejemplo un pozo Woods-Saxon.

Tomando los elementos de matriz de Kuo y Herling^[KH71] se realizó el cálculo de las funciones de onda de los dos primeros estados 0^+ del ^{20}Ne con el método MSM.

En este caso, al no ser una interacción $Q.Q$ pura, no es de esperar que el 0_1^+ corresponda a la clasificación (80), ni que el 0_2^+ no sea (80). Para verificarlo, se superpusieron estas dos funciones con la del 0_1^+ calculada con la interacción $Q.Q$. Los valores de las integrales de superposición resultan:

$$\int \psi_{0_1^+}^{Q.Q^*} \psi_{0_1^+}^{KH} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 d\vec{r}_4 = 0.8 \quad (3.41a)$$

$$\int \psi_{0_1^+}^{Q.Q^*} \psi_{0_2^+}^{KH} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 d\vec{r}_4 = 0.4 \quad (3.41b)$$

Por lo tanto, no es de esperar que las integrales de superposición de estas funciones con la partícula alfa sean tan diferentes para ambos estados como los resultados que muestra la tabla 3. Sin embargo, deberán ser coherentes con (3.41).

Para hacer el cálculo de la superposición con la función de onda de la partícula alfa, se utilizaron funciones de partícula simple soluciones de un pozo Woods-Saxon. Las amplitudes obtenidas con el código BABY se

TABLA 4

R(fm)	$\langle \alpha 0_1^+ \rangle_{KH}$	$\langle \alpha 0_2^+ \rangle_{KH}$
2.	-6.03×10^{-3}	-1.72×10^{-3}
3.	8.99×10^{-3}	2.70×10^{-3}
4.	1.87×10^{-3}	8.04×10^{-4}
5.	2.47×10^{-5}	1.12×10^{-5}
6.	4.50×10^{-8}	2.08×10^{-8}

Como puede verse, las diferencias entre las superposiciones de la función de onda de la partícula alfa con los dos estados 0^+ son menores que para el caso de la tabla 3, lo cual coincide con lo esperado, teniendo en cuenta la componente (B0) de ambos estados 0^+ .

Cabe mencionar ahora que el código BABY, adaptado para el cálculo de la función antisimétrica consta de dos programas. El primero genera todas las funciones $I(R)$ que se utilizarán en el cálculo y las graba en un archivo previo. El segundo hace la suma indicada en (3.40) y busca en cada caso las integrales $I(R)$ en el archivo mencionado. El tiempo de CPU del primer código depende de la cantidad de puntos R en que se desea calcular $I(R)$ y del número de configuraciones que se tengan en cuenta. Como ejemplo, para el ^{20}Ne , capa s-d únicamente y para 20 puntos en R , el cálculo llevó un total de 10 minutos de CPU en una Vax 780.

Por otro lado, el segundo programa para un total de 150 componentes en (3.40) emplea aproximadamente 1 minuto de CPU.

III.5 Aplicación del método a núcleos pesados

III.5.1 ANTECEDENTES

El fenómeno del decaimiento alfa fue tratado cuánticamente por primera vez por Gamow^[Ga28], y tuvo mucho éxito a pesar de que aún no se había descubierto el neutrón y se pensaba a la partícula alfa compuesta por cuatro protones y dos electrones.

A pesar de todos los esfuerzos que se han hecho en este campo, aún no se logra obtener con métodos microscópicos el valor de la vida media de algunos decaimientos. Los cálculos más recientes para el ^{212}Po , por ejemplo, llegan a un valor que dista más de un orden de magnitud del valor experimental^[DC85].

Los primeros cálculos microscópicos fueron introducidos en los años cincuenta al aplicarse el modelo de capas, pero los resultados distaban varios órdenes de magnitud del valor esperado. Aunque ya en la década del sesenta se sabía que la mezcla de configuraciones es un efecto importante para el aumento de los anchos reducidos^[Ha61], es recién en la siguiente década cuando se comprende su rol fundamental [Sa70,TA79].

El modelo de capas puede utilizarse, en principio, para describir la formación de una partícula alfa dentro del núcleo madre. Sin embargo, para describir apropiadamente el decaimiento alfa, es necesario tener una función de onda que no caiga muy rápidamente más allá de la superficie nuclear. Por ello se hace necesario incluir la parte continua del espectro de partícula independiente. Este hecho complica considerablemente los cálculos y el problema es tan complejo que aún no se ha resuelto completamente. En la práctica, lo que se hace es considerar, para las funciones de partícula simple, la representación del oscilador armónico incluyendo muchas capas [TA79]. Otro procedimiento consiste en considerar que cada partícula está ligada al núcleo, en un pozo de Woods - Saxon, con un cuarto de la energía de ligadura de la partícula alfa [DC85]. En este caso, los diferentes estados se obtienen variando la profundidad del pozo [Ba76]. La ventaja de utilizar esta representación es que se obtiene el comportamiento asintótico correcto para la función de onda, que tiene importancia fundamental en el estudio de decaimientos y reacciones de transferencia.

En esta sección se aplica el método BABY al cálculo de los anchos reducidos para el decaimiento del ^{212}Po (estado fundamental), utilizando las funciones de onda calculadas en las diferentes bases mencionadas (oscilador armónico y Woods-Saxon). Se comparan los resultados con los obtenidos por otros autores [Sa70, TA79, DC85].

Es importante señalar que las amplitudes de las funciones de onda de cuatro partículas (llamadas X en la

ec.(3.40)) que se utilizan en todas las aplicaciones del método BABY, se han tomado de cálculos realizados por otros autores, a los cuales se aludirá en el momento oportuno.

III.5.2 CÁLCULO DE LOS ANCHOS REDUCIDOS PARA EL DECAIMIENTO ALFA

Consideremos ahora el proceso del decaimiento alfa. Vamos a suponer que es un proceso en dos etapas. Es decir, la partícula alfa se forma en una zona cercana a la superficie nuclear y luego penetra la barrera coulombiana. Podemos hablar, entonces, de un coeficiente de penetrabilidad de la barrera (P_L) y de un flujo de partículas alfa a través de ella (χ_L^2) que dependerá del impulso angular que lleva la partícula alfa. La constante de decaimiento se define como [Pr65]:

$$\lambda_L = 2 P_L(R) \chi_L^2(R) / \hbar \quad (3.42)$$

donde:

- i) R es la distancia relativa entre la partícula alfa y el núcleo hijo a partir del cual sólo actúa la fuerza coulombiana,
- ii) P_L viene dado por [Da79]

$$P_L(R) = k R [F_L^2(kR) + G_L^2(kR)] \quad (3.43)$$

con F_L y G_L las funciones regular e irregular de Coulomb respectivamente, siendo k el módulo del vector de onda.

iii) El flujo de partículas alfa (χ^2), llamado ancho reducido, es proporcional al cuadrado de la amplitud de formación de la partícula alfa I_L :

$$\chi_L^2(R) = \frac{\hbar^2 R}{2\mu} I_L^2(R), \quad (3.44)$$

donde

$$I_L(R) = \int d^3s_h d^3s_\alpha d\hat{R} \bar{\varphi}_h^*(s_h) \bar{\varphi}_\alpha^*(s_\alpha) Y_M^{L*}(\hat{R}) \bar{\varphi}_m(s_h, s_\alpha, R), \quad (3.45)$$

En (3.45) $\bar{\varphi}_m$ y $\bar{\varphi}_h$ son las funciones de onda de los núcleos madre e hijo respectivamente y $\bar{\varphi}_\alpha$ ya se definió en (3.13). La integral se realiza sobre todas las coordenadas intrínsecas.

La fórmula (3.42) es válida si el valor de λ_L no depende fuertemente del radio R en la zona en que sólo actúa la interacción coulombiana y la función $I_L(R)$ se puede empalmar con una función de Coulomb [Ma64].

La amplitud I_L se ha calculado utilizando varios métodos y aproximaciones. En la próxima sección se la obtiene con el código BABY y se comparan los resultados con cálculos hechos por otros autores para el caso del ^{212}Po (estado fundamental).

III.5.3 CÁLCULO DEL DECAIMIENTO ALFA DESDE EL ESTADO FUNDAMENTAL DEL ^{212}Po . COMPARACIÓN CON OTROS RESULTADOS

Como una aplicación del método BABY se calcula ahora el ancho reducido para el decaimiento alfa del estado

fundamental del ^{212}Po

$$Y_L(R) = \left(\frac{M^2 R}{2\mu}\right)^{1/2} \int \bar{\varphi}_\alpha^*(\bar{s}_\alpha) Y_M^{L*}(\hat{R}) \bar{\varphi}_{212\text{Po}}^{\text{GS}}(r_1, r_2, r_3, r_4) d\bar{s}_\alpha d\hat{R} \quad (3.46)$$

La función $Y_L(R)$ resulta proporcional a la función (3.20) que calcula el código BABY.

Como se mencionó anteriormente, en un principio se tenía en cuenta una sola configuración en el cálculo de la función de onda del ^{212}Po . Es recién en la década del setenta cuando se comienza a ver la importancia de incluir más configuraciones en el cálculo de la estructura del estado fundamental de este núcleo.

III.5.2.a Cálculos que tienen en cuenta sólo las interacciones p-p y n-n en el ^{212}Po .

Consideremos en primer lugar, que la función de onda del ^{212}Po se puede factorizar en una parte de protones (π) y otra de neutrones (ν) [JL82]. Tendremos en cuenta entonces, sólo las interacciones protón-protón y neutrón-neutrón, no incluyendo la interacción entre protón y neutrón por el momento. La función de onda del ^{212}Po la escribimos como:

$$\Psi(r_1 r_2 r_3 r_4; ^{212}\text{Po}(ef)) = \Psi(r_1 r_2; ^{210}\text{Pb}(ef)) \Psi(r_3 r_4; ^{210}\text{Po}(ef)) \quad (3.47)$$

$$\Psi(^{208}\text{Pb}(ef))$$

Tomaremos al ^{208}Pb como un núcleo inerte en nuestro cálculo,

es decir no contemplaremos sus posibles excitaciones. La configuración principal para el ^{212}Po viene dada por [Ha61]:

$$|0h9/2\rangle_{\pi}^2 (1g9/2)_{\nu}^2 \quad (3.48)$$

Sasaki y col. [Sa70] introducen además la configuración

$$|1g9/2\rangle_{\pi}^2 (1g9/2)_{\nu}^2 > \quad (3.48)$$

en la cual los protones son promovidos a la misma capa que los neutrones. Ellos encuentran un aumento importante en el ancho reducido, con respecto al valor que da al considerar sólo la configuración principal (3.48).

La función de onda en la ref. [Sa70] viene dada por

$$|^{212}\text{Po}\rangle = A |0h9/2\rangle_{\pi}^2 (1g9/2)_{\nu}^2 > + B |1g9/2\rangle_{\pi}^2 (1g9/2)_{\nu}^2 > \quad (3.50)$$

Si llamamos

$$X = \langle 0h9/2\rangle_{\pi}^2 (1g9/2)_{\nu}^2, J=0 | \delta_{\alpha} Y_{00} \rangle_R \quad (3.51a)$$

$$Y = \langle 1g9/2\rangle_{\pi}^2 (1g9/2)_{\nu}^2, J=0 | \delta_{\alpha} Y_{00} \rangle_R \quad (3.51b)$$

entonces

$$\chi^2 \propto A^2 X^2 + 2ABXY + B^2 Y^2 \quad (3.52)$$

Si bien los valores que dichos autores [Sa70] encuentran para B son mucho menores que para A ($A \approx .999$, $B \approx .014$), la

segunda configuración tiene mayor superposición con la partícula alfa (Tabla 5), y por lo tanto contribuye en forma apreciable al ancho reducido con el segundo término de (3.52).

Haciendo un cálculo de las amplitudes X e Y con el método BABY, usando funciones de partícula independiente de Woods-Saxon, y los mismos coeficientes A y B, podemos hacer un cuadro comparativo con el método de la ref. [Sa70].

En este caso, dado que el principio de Pauli no actúa entre protones y neutrones, se utiliza la expresión (3.21) y (3.22) para el cálculo de la integral de superposición con el método BABY, sin necesidad de hacer uso de la función totalmente antisimétrica de cuatro partículas.

Tabla 5

$R_0 = 9 \text{ fm}$	$X(\text{fm}^{-3/2})$	$Y(\text{fm}^{-3/2})$	Y/X
oscil.arm. [Sa70]	1.59×10^{-5}	8.42×10^{-5}	5.3
Woods-Saxon (BABY)	6.64×10^{-6}	3.51×10^{-5}	5.3

Las amplitudes son menores en el segundo caso (BABY), pero los cocientes se conservan.

Se puede entender la disminución de X e Y en el segundo procedimiento, ya que las funciones de partícula independiente de Woods-Saxon tienen en general menor amplitud que las correspondientes del oscilador armónico en la zona de la superficie nuclear. Es recién en la zona

asintótica donde se invierte esta relación debido a la caída abrupta de la función del oscilador.

Como se mencionó anteriormente, es de crucial importancia la inclusión de más configuraciones en el cálculo de los anchos reducidos.

Tonozuka y Arima [TA79] introducen la mezcla de configuraciones, incluyendo hasta la capa N=13 del oscilador. Ellos, al igual que en la ref. [Sa70], utilizan la base del oscilador armónico para el cálculo, y la amplitud χ_L viene dada por

$$\chi_L(R) = \left(\frac{M^2 R}{2\mu}\right)^{1/2} I_L = \left(\frac{M^2 R}{2\mu}\right)^{1/2} \sum A_{NL} \bar{\chi}_{NL}(R) \quad (3.53)$$

donde A_{NL} es el definido en (2.20) y $\bar{\chi}_{NL}(\Omega)$ son las funciones radiales en (2.19). La función de cuatro partículas la escriben como producto de funciones de 2 protones y 2 neutrones acoplados a impulso angular cero:

$$\psi_{\pi}^{(0)} = \sum a_{\pi,j} |(\pi j)^2, 0\rangle \quad (3.54)$$

$$\psi_{\nu}^{(0)} = \sum a_{\nu,j} |(\nu j)^2, 0\rangle$$

e ignoran, por ejemplo, las configuraciones tales como $0h9/2$ $1h9/2$, porque los elementos de matriz para la interacción usada resultan despreciables.

En todos estos casos [Sa70, TA79] utilizan funciones de partícula independiente de oscilador armónico. Resulta interesante ver qué sucede si se usan funciones de Woods-Saxon. Recordemos que en este caso, la solución de la

integral (3.45) no es analítica y se debe resolver numéricamente.

Hasta el presente, el procedimiento más exacto, dentro de este marco, que se ha utilizado, es el que presentamos como método BABY. Con el propósito de hacer un cálculo comparativo en este sentido, se calcularon los anchos reducidos (3.45) usando las funciones de onda para el ^{210}Po y ^{210}Pb en (3.47) de la ref. [He86], cuyas amplitudes se calculan en la aproximación Tamm-Dankoff para una interacción delta de superficie.

En este cálculo se incluyen todas las configuraciones de partícula independiente desde la capa $N=5$ hasta la capa $N=10$ del oscilador (tablas 6 y 7), acoplando dos protones y dos neutrones a impulso angular cero respectivamente (tablas 8 y 9).

Al aplicar el código BABY, los valores que se obtienen con funciones de partícula independiente de Woods-Saxon y de oscilador armónico con las mismas amplitudes para las funciones de onda del MSM son muy diferentes. En la tabla 10 se pueden comparar los resultados para los distintos cálculos: a) y d) corresponden a los valores dados en la referencia [TA79], b) es el resultado de aplicar el método BABY con funciones de partícula independiente de oscilador armónico y c) el mismo método que en b) pero usando funciones de partícula simple de Woods-Saxon.

Para comparar con la ref. [Tb79] definimos el ancho reducido adimensional

Conf.	n	2.l	2.j	Energia
1	0	12	13	-2.1970000 ⁻⁴ H
2	0	10	9	-3.8020000 ⁻⁴ H
3	1	6	7	-2.9070001 ⁻⁴ H
4	0	14	15	4.3099999 ⁻⁴ H
5	0	12	11	3.8800001 ⁻⁴ H
6	1	6	5	-0.9820000 ⁻⁴ H
7	2	2	3	-0.7020000 ⁻⁴ H
8	1	8	9	2.8800001 ⁻⁴ H
9	0	16	17	6.0999999 ⁻⁴ H
10	2	2	1	-0.1730000 ⁻⁴ H
11	1	8	7	5.2100000 ⁻⁴ H
12	2	4	5	5.9000001 ⁻⁴ H
13	0	14	13	6.4899998 ⁻⁴ H
14	0	10	19	6.8200002 ⁻⁴ H
15	1	10	11	7.7500000 ⁻⁴ H
16	2	4	3	8.3100004 ⁻⁴ H
17	3	0	1	8.6000004 ⁻⁴ H
18	0	16	15	9.8800001 ⁻⁴ H
19	1	12	13	11.3299999 ⁻⁴ H
20	1	10	9	13.0699997 ⁻⁴ H
21	2	6	7	13.9200001 ⁻⁴ H
22	0	18	17	15.9799995 ⁻⁴ H
23	2	6	5	17.2999992 ⁻⁴ H
24	1	12	11	17.6000004 ⁻⁴ H
25	1	14	15	17.6200008 ⁻⁴ H
26	3	2	3	17.7800007 ⁻⁴ H
27	2	8	9	18.6599998 ⁻⁴ H
28	3	2	1	19.2299995 ⁻⁴ H
29	2	8	7	23.0000000 ⁻⁴ H
30	3	4	5	23.6800003 ⁻⁴ H
31	1	14	13	24.8600006 ⁻⁴ H
32	3	4	3	26.0900002 ⁻⁴ H
33	2	10	11	26.1100006 ⁻⁴ H
34	4	0	1	26.3799992 ⁻⁴ H
35	2	10	9	31.4200001 ⁻⁴ H
36	3	6	7	32.2900009 ⁻⁴ H
37	3	6	5	35.6599998 ⁻⁴ H
38	4	2	3	36.1399994 ⁻⁴ H

Tabla 6. Configuraciones de partícula independiente para protones. Se detalla el número de configuración, número de nodos, momento angular orbital, momento angular total y energía de cada estado.

Conf.	n	2.l	2.j	Energia
1	1	6	9	-3.9430001 ⁻⁴ H
2	0	14	15	-2.5220001 ⁻⁴ H
3	0	12	11	-3.0800000 ⁻⁴ H
4	2	4	5	-2.3770001 ⁻⁴ H
5	1	8	7	-1.4500000 ⁻⁴ H
6	3	0	1	-1.9080000 ⁻⁴ H
7	2	4	3	-1.4020000 ⁻⁴ H
8	1	10	11	9.2700005 ⁻⁴ H
9	0	16	17	9.5600004 ⁻⁴ H
10	0	14	13	10.8999996 ⁻⁴ H
11	2	6	7	13.3299999 ⁻⁴ H
12	1	10	9	14.4549999 ⁻⁴ H
13	0	18	19	15.1099997 ⁻⁴ H
14	1	12	13	15.6899996 ⁻⁴ H
15	3	2	3	16.0049992 ⁻⁴ H
16	2	6	5	16.6350002 ⁻⁴ H
17	3	2	1	17.4089998 ⁻⁴ H
18	0	16	15	17.5699997 ⁻⁴ H
19	2	8	9	20.4300003 ⁻⁴ H
20	0	20	21	20.4899998 ⁻⁴ H
21	1	12	11	21.8099995 ⁻⁴ H
22	1	14	15	21.9300003 ⁻⁴ H
23	3	4	5	23.7999992 ⁻⁴ H
24	0	18	17	24.0599995 ⁻⁴ H
25	2	8	7	24.6700001 ⁻⁴ H
26	4	0	1	25.7800007 ⁻⁴ H
27	3	4	3	26.1499996 ⁻⁴ H
28	2	10	11	27.3700008 ⁻⁴ H
29	1	16	17	28.0000000 ⁻⁴ H
30	1	14	13	29.0000000 ⁻⁴ H
31	0	20	19	30.3899994 ⁻⁴ H
32	3	6	7	31.4300003 ⁻⁴ H
33	2	10	9	32.5499992 ⁻⁴ H
34	4	2	3	34.0999995 ⁻⁴ H
35	2	12	13	34.1399994 ⁻⁴ H
36	3	6	5	34.7200012 ⁻⁴ H
37	4	2	1	35.5099983 ⁻⁴ H
38	1	16	15	36.0099983 ⁻⁴ H
39	3	8	9	38.8800011 ⁻⁴ H
40	2	12	11	40.2599983 ⁻⁴ H
41	4	4	5	42.2400017 ⁻⁴ H
42	3	8	7	43.1199989 ⁻⁴ H
43	5	0	1	44.2200012 ⁻⁴ H

Tabla 7. Configuraciones de partícula independiente para neutrones. Se detalla el número de configuración, número de nodos, momento angular orbital, momento angular total y energía de cada estado.

Conf.p	Conf.p	Amplitud
2	2	-0.8257118 ^M
1	19	9.3017833E-02^M
1	11	0.2716072 ^M
2	20	-7.9706088E-02^M
2	35	-3.9588507E-02^M
3	3	-0.3016637 ^M
3	21	-6.5023061E-02^M
3	36	-3.3773974E-02^M
4	4	-0.1753997 ^M
4	25	-7.0982397E-02^M
5	5	8.1987977E-02^M
5	24	3.4826035E-02^M
6	6	-0.1149706 ^M
6	23	-4.4438727E-02^M
6	37	-2.5690276E-02^M
7	7	-8.6803585E-02^M
7	26	-3.3220098E-02^M
7	38	-2.0615984E-02^M
8	8	9.6281111E-02^M
8	27	3.0858862E-02^M
9	9	0.1122335 ^M
10	10	-5.374679E-02^M
10	28	-2.3137666E-02^M
10	39	-1.3954028E-02^M
11	11	4.7395337E-02^M
11	29	3.4843255E-02^M
12	12	3.8301256E-02^M
12	30	2.9099150E-02^M
13	13	-5.5342138E-02^M
13	31	-4.2492047E-02^M
14	14	-6.4204683E-02^M
15	15	-4.5932129E-02^M
15	33	-3.7027489E-02^M
16	16	2.5352374E-02^M
16	32	2.1110881E-02^M
17	17	1.7327543E-02^M
17	34	1.4750066E-02^M
18	18	4.5137819E-02^M
19	19	3.8335413E-02^M
20	20	-2.9176096E-02^M
20	35	-2.7063899E-02^M
21	21	-2.4886429E-02^M
21	36	-2.3450363E-02^M
22	22	-3.3560008E-02^M
23	23	-1.8198390E-02^M
23	37	-1.8090444E-02^M
24	24	2.5385741E-02^M
25	25	-2.9286334E-02^M
26	26	-1.4527646E-02^M
26	38	-1.4544845E-02^M
27	27	2.2109615E-02^M
28	28	-8.6494134E-03^M
28	39	-9.8305121E-03^M
29	29	1.6645409E-02^M
30	30	1.4066512E-02^M
31	31	-2.0620994E-02^M
32	32	1.0578031E-02^M
33	33	-1.8309662E-02^M
34	34	7.4093705E-03^M
35	35	-1.4237999E-02^M
36	36	-1.2433046E-02^M
37	37	-9.8620001E-03^M
38	38	-7.9569956E-03^M
39	39	-5.4322449E-03^M

Tabla 8. Configuraciones p-p y sus amplitudes.

$$\theta_L^2(R) = \chi_L^2(R) / \chi_w^2(R) \quad (3.55)$$

donde

$$\chi_w^2(r) = 3 \hbar^2 / (2\mu r^2) \quad (3.56)$$

es el límite de Wigner.

Tabla 10

Configuración	R(fm)	I_L	$\theta^2(r)$ teor	$\theta^2(r) / \theta^2(r)$ teor obs
a) $\psi_{212Po}^{o.a.} (7Mw)$ [TA79]	9.0	1.09(-3)	2.9(-4)	1.3(-2)
b) $\psi_{212Po}^{o.a.} (10Mw)$	9.0	4.01(-3)	3.9(-3)	1.7(-1)
c) $\psi_{212Po}^{W.S.} (10Mw)$	9.0	1.91(-4)	8.9(-6)	4.1(-4)
d) $\psi_{212Po}^{o.a.} (13Mw)$ [TA79]	9.6	6.64(-4)	1.3(-4)	4.3(-2)

Las funciones de oscilador armónico son semejantes a las de Woods-Saxon en el interior del núcleo, pero no así en la superficie y la zona exterior al radio nuclear. En esta región, en general, las funciones del oscilador presentan su último máximo más afuera y superan a las de Woods-Saxon hasta un cierto radio^[BM66], a partir del cual quedan por debajo de éstas. En la fig. 6 se puede ver este efecto en la integral de superposición $I_L(R)$ para la configuración principal (3.48).

Si bien el uso de funciones de oscilador armónico nos acerca más al valor experimental, como se puede deducir de los casos b y d de la tabla 10, es interesante plantearse si es correcto utilizar este tipo de funciones en zonas tan

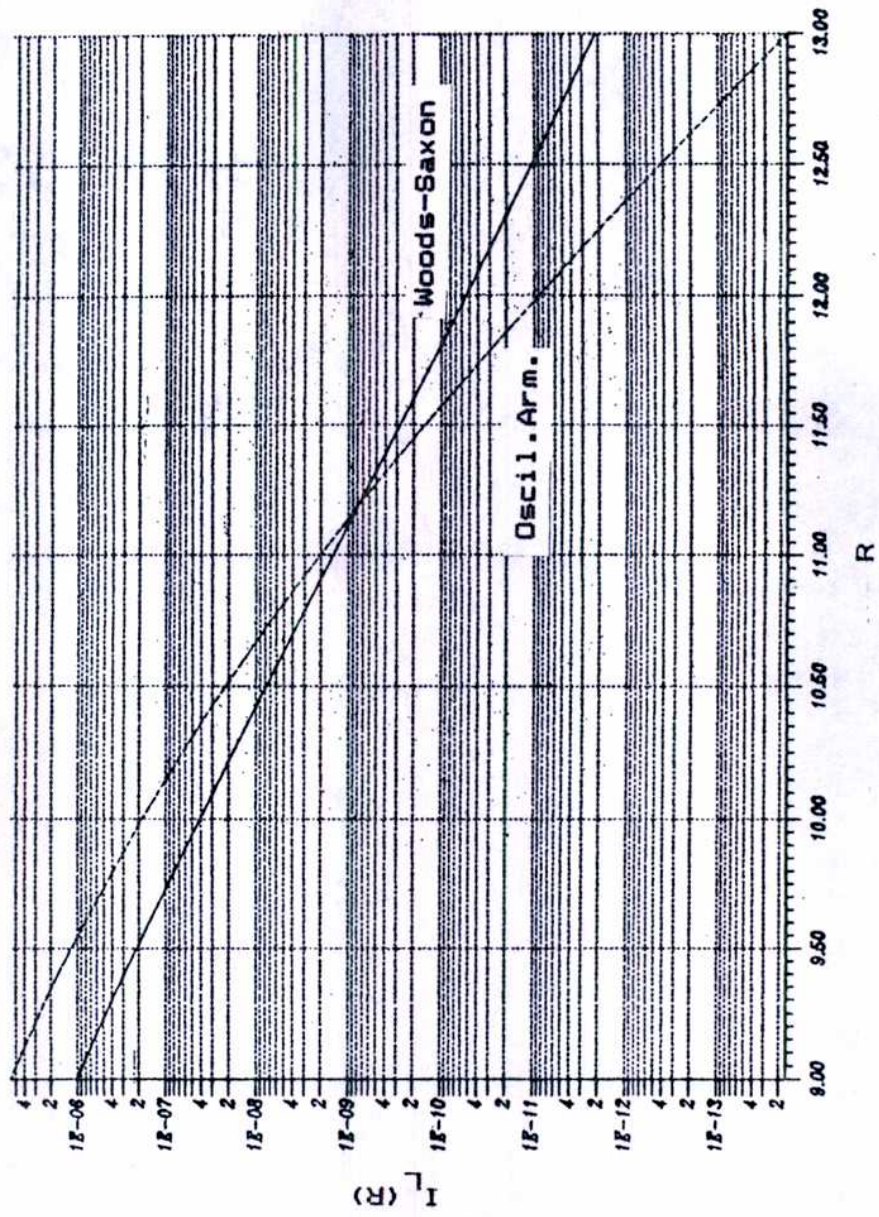


Fig. 6. Comportamiento asintótico 212 de la función $I_L(R)$ para la configuración principal del P_0 calculada con los potenciales de Woods-Saxon y oscilador armónico.

externas a la superficie del núcleo como para $R=9$ fm, cuando el radio nuclear es de 7.4 fm. Como se puede apreciar en la tabla 10, el uso de funciones realistas reduce en más de dos órdenes de magnitud el valor del ancho reducido en esta zona.

Aún cuando la inclusión de más y más capas del oscilador correspondiente al espectro de partícula independiente favorece el aumento del ancho reducido, el valor de la función I_L presenta una saturación [JL82] (fig. 7). Por lo tanto, aún usando capas superiores no se llegaría con el método presentado al valor experimental.

III.5.2.b Cálculos que incluyen la interacción p-n en el ^{212}Po .

El hecho de considerar sólo la interacción protón-protón y neutrón-neutrón, permite que los pares de partículas idénticas (diprotón y dineutrón) se muevan independientemente unos de otros. El incluir la interacción protón-neutrón induce la formación de conglomerados ("clusters") de protones y neutrones. [DC85].

Dodig-Crnkovic y col. [DC85] en un cálculo que realizan con el MSM, escriben la función de onda del ^{212}Po como una combinación lineal de la siguiente forma

$$|^{212}\text{Po}(\text{gs})\rangle = C|^{210}\text{Pb}(\text{ef})\otimes^{210}\text{Po}(\text{ef})\rangle + D|^{210}\text{Bi}(0_1^+)\otimes^{210}\text{Bi}(0_1^+)\rangle \quad (3.56)$$

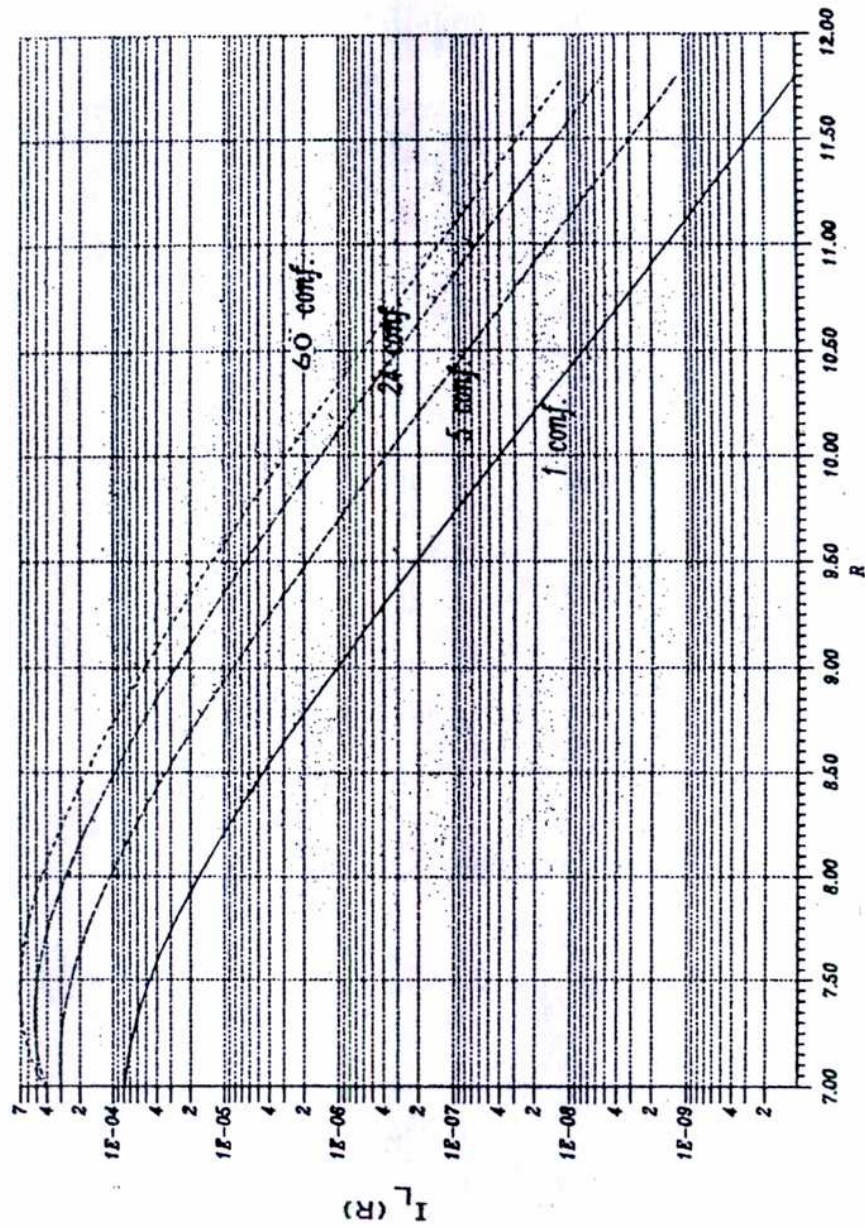


Fig. 7. Saturación de la función I_L (ec.3.45) con el agregado de configuraciones p-p n-n.

Conf.p Conf.n Amplitud

1	14	-0.1213091	°M
1	28	-6.5275430E-02	°M
2	12	0.1181348	°M
2	22	3.1964295E-02	°M
3	11	0.1069821	°M
3	32	8.3964108E-02	°M
4	2	0.5882899	°M
4	22	9.5488779E-02	°M
5	3	-0.3338249	°M
5	21	-7.4946836E-02	°M
5	40	-4.7650676E-02	°M
6	16	7.2163217E-02	°M
6	38	4.0895022E-02	°M
7	15	5.9805982E-02	°M
7	34	3.3664882E-02	°M
8	1	-0.4483374	°M
8	19	-7.5181440E-02	°M
8	39	-4.6138357E-02	°M
9	9	-0.1536589	°M
9	28	-7.8460634E-02	°M
10	17	3.9048444E-02	°M
10	37	2.2733589E-02	°M
11	5	-0.1675962	°M
11	25	-5.2038910E-02	°M
11	42	-2.4989814E-02	°M
12	4	-0.1481278	°M
12	23	-4.5275237E-02	°M
12	41	-3.0403825E-02	°M
13	10	0.1024699	°M
13	30	5.9951637E-02	°M
14	13	0.1041201	°M
15	8	9.6478321E-02	°M
15	28	5.5980697E-02	°M
16	7	-9.3483940E-02	°M
16	27	-3.2822859E-02	°M
16	44	-2.2880623E-02	°M
17	6	-6.7074977E-02	°M
17	26	-2.2333005E-02	°M
17	43	-1.4302984E-02	°M
18	18	-7.8624722E-02	°M
18	38	-5.1722355E-02	°M
19	14	-7.4451648E-02	°M
19	35	-4.8761863E-02	°M
20	12	6.2028650E-02	°M
20	33	4.1096009E-02	°M
21	11	5.5912938E-02	°M
21	32	3.6943413E-02	°M
22	24	6.1540313E-02	°M
23	16	4.0702906E-02	°M
23	36	2.8438462E-02	°M
24	9	-0.1076043	°M
24	21	-5.0815189E-02	°M
24	40	-3.6651801E-02	°M
25	2	0.1206735	°M
25	22	5.8618661E-02	°M
26	13	3.3353087E-02	°M
26	34	2.3274194E-02	°M
27	1	-9.7000845E-02	°M
27	19	-4.6794817E-02	°M
27	39	-3.3621728E-02	°M
28	17	2.2079843E-02	°M
28	37	1.5707133E-02	°M
29	5	-6.6698179E-02	°M
29	25	-3.5403825E-02	°M
29	42	-2.6591081E-02	°M
30	4	-5.8249209E-02	°M
30	23	-3.0765619E-02	°M
30	41	-2.3090860E-02	°M
31	10	5.9581738E-02	°M
31	30	4.2148348E-02	°M
32	7	-4.2635180E-02	°M
32	27	-2.3135103E-02	°M
32	44	-1.7710747E-02	°M
33	8	5.5645175E-02	°M
33	28	3.9262973E-02	°M
34	6	-3.0348163E-02	°M
34	26	-1.6380742E-02	°M
34	43	-1.2537729E-02	°M
35	12	4.8901490E-02	°M
35	33	3.0617849E-02	°M
36	11	3.6757387E-02	°M
36	32	2.7480911E-02	°M
37	16	2.8308755E-02	°M
37	36	2.1776939E-02	°M
38	15	2.3171648E-02	°M
38	34	1.7812612E-02	°M
39	17	1.5642310E-02	°M

Tabla 11. Configuraciones p-n y sus amplitudes.

El ^{210}Bi tiene un protón y un neutrón fuera de capa cerrada. Se consideran las mismas configuraciones de las tablas 6 y 7 para los protones y neutrones y las configuraciones p-n y sus amplitudes se detallan en tabla 11. Se remite a la referencia [DC85] para más detalles sobre el cálculo de la función de onda. Para C y D se usan los valores 0.9 y 0.43 respectivamente, aunque en la publicación citada se discute el efecto del crecimiento del ancho reducido producido por valores mayores de D.

Si bien los autores utilizan funciones de Woods-Saxon, no se realiza el cálculo completo de la integral (3.45), sino que se aproxima, localizando a los cuatro nucleones, al permitir a las coordenadas relativas tomar valores en un rango reducido (entre 0 y 5-6 fm).

En la tabla 12 se detallan los valores de γ_0^2 y λ_0 obtenidos con el método BABY que resuelve la integral exactamente, y los valores de la referencia [DC85].

Tabla 12

R (fm)	γ_0^2 (MeV)		λ_0 (1/seg)	
	[Dc85]	BABY	[Dc85]	BABY
7.5	0.88(-1)	0.29(-2)	1.12(5)	3.70(3)
8.0	0.40(-3)	0.10(-2)	1.75(5)	9.70(3)
8.5	0.16(-2)	0.14(-3)	1.07(5)	9.45(3)
9.0	0.11(-3)	0.22(-4)	4.70(4)	9.50(3)

Evidentemente, al resolver exactamente la integral se

producen probablemente cancelaciones que hacen que los valores de χ_0^2 disminuyan. Sin embargo es importante destacar la constancia de λ_0^{BABY} entre 8 y 9 fm, que es una de las hipótesis que sin embargo no se cumplen en el cálculo de la referencia [Dc85].

Para comparar los valores que toma la vida media teórica respecto a la experimental con la inclusión de la interacción protón-neutrón y sin ella, podemos analizar el siguiente cuadro, teniendo en cuenta que:

$$\tau^{1/2} = \ln 2 / \lambda \quad (3.57)$$

Tabla 11

R (fm)	$t_{\text{teo}}^{1/2} / t_{\text{obs}}^{1/2}$	
	B=0.	B=.43
8.0	1900.0	241.3
8.5	1883.9	247.6
9.0	3455.5	246.6

El cociente $t_{\text{teo}}^{1/2} / t_{\text{obs}}^{1/2}$ se reduce casi en un orden de magnitud cuando se tiene en cuenta la interacción p-n pero todavía dista mucho del observado experimentalmente.

El problema de obtener el valor de las constantes del decaimiento alfa ha sido tema de investigación en gran cantidad de trabajos y publicaciones, en particular para el $^{212}_{\text{Po}}$ [Si83, Fl85]. Si bien se han superado muchos obstáculos del cálculo, como es el caso del método que aquí

se presenta, y se han desarrollado nuevas teorías^[Si83], aún se requieren más esfuerzos en este sentido. En particular, el método BABY proporciona un procedimiento para el cálculo de la amplitud (3.45) con funciones de onda soluciones de un potencial realista y que permiten obtener una amplitud I_L con el comportamiento asintótico correcto.

Capítulo IV

Deformación de la función de onda intrínseca de un sistema de varios nucleones

IV.1 Introducción

La evidencia experimental de núcleos que presentan espectros rotacionales con energías que siguen aproximadamente la ley

$$E(I) \propto I(I+1) , \quad (4.1)$$

llevó a pensar en deformaciones permanentes en el estado fundamental de algunos núcleos. Por deformación entendemos una anisotropía que hace posible especificar una orientación del sistema como un todo.

En una molécula, la deformación está ligada a la distribución anisótropa de las masas nucleares. En el núcleo, en cambio, la deformación se debe a efectos de la estructura de capas. En efecto, la idea es que las órbitas que describen los nucleones se disponen de tal manera que el núcleo presenta la forma de un esferoide (generalmente prolado)^[BM75]. El eje de simetría del esferoide puede apuntar a cada instante en diferentes direcciones y ésto se interpreta como una rotación del esferoide, dentro del cual los nucleones realizan un movimiento correlacionado que

mantiene la deformación del núcleo.

En general, no es posible separar el movimiento traslacional del intrínseco porque las fuerzas de Coriolis y centrífuga influyen sobre la estructura intrínseca del núcleo rotante al perturbar el movimiento de los nucleones.

Resulta de particular interés el estudio de núcleos con deformación axialmente simétrica. En este caso, la deformación define sólo parcialmente la orientación del sistema intrínseco de coordenadas y por lo tanto, los grados de libertad de rotación se ven restringidos (no hay rotación alrededor del eje de simetría). En la aproximación adiabática^[B027] es posible separar el movimiento intrínseco del rotacional, despreciando el acoplamiento entre ambos, con lo que la función de onda intrínseca resulta ser la misma para todos los miembros de la banda rotacional.

Para núcleos axialmente simétricos la función de onda rotante queda completamente identificada con los números cuánticos IMK , donde I es el momento angular, M es la proyección sobre el eje z y K corresponde a la proyección sobre el eje z' solidario al núcleo y orientado según el eje de simetría (figura 8).

Considerando que los nucleones se mueven en un potencial de oscilador armónico, la simetría SU_3 (Ap. B) permite construir explícitamente la función de onda de muchos cuerpos del sistema en rotación en una forma simple^[E158]. Esta función se puede interpretar además como el resultado de la diagonalización de una interacción de dos cuerpos que represente al campo deformado^[BM75]. Como se

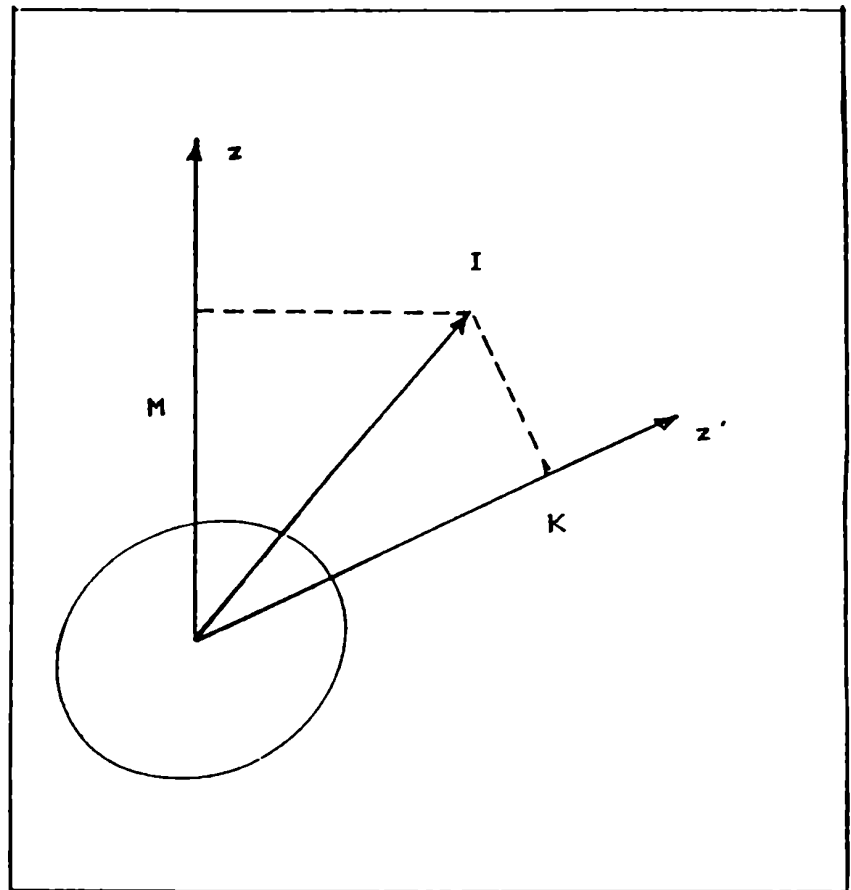


Fig. 8. Momento angular y sus proyecciones en los dos sistemas de referencia.

detalla en el Ap. B, en el formalismo SU_3 el estado intrínseco correspondiente a cada banda rotacional resulta autovector de los operadores cuadrupolares Q_0 y Q_2+Q_{-2} . A su vez, estos operadores están relacionados con los parámetros de deformación del núcleo.

En la sección IV.3 se presenta un método que, a partir de la diagonalización de los operadores Q_0 y Q_2+Q_{-2} en la base de las funciones que da el modelo de capas, permite obtener teóricamente la deformación intrínseca del núcleo.

Como se mencionó anteriormente, los movimientos intrínseco y de rotación se acoplan a través de las fuerzas de Coriolis y centrífuga. Este efecto provoca una tendencia de los momentos angulares de los nucleones a alinearse en la dirección del eje de rotación [BM75].

En la sección IV.4 se presenta un segundo método que permite calcular la deformación intrínseca correspondiente a cada estado del modelo de capas de la banda rotacional, mediante la proyección en momento angular de la función de onda intrínseca que se calcula con la integral de Hill-Wheeler [HW53].

Se aplican ambos métodos al estudio de la banda rotacional del estado fundamental del ^{20}Ne .

IV.2. Conceptos básicos

IV.2.1. DEFORMACIÓN Y ROTACIONES

Como se mencionó en la introducción, la evidencia de espectros rotacionales en algunos núcleos, llevó a pensar en deformaciones permanentes. Es decir, los nucleones se mueven en sus órbitas de tal manera que se mantiene la "forma" del núcleo. Sin embargo, sólo tiene sentido hablar de la "forma" de un núcleo si la velocidad de los nucleones es mucho mayor que la de rotación del conjunto como un todo (aproximación adiabática) [B027].

Si el radio nuclear es $r_0 A^{1/3}$, la frecuencia de rotación debe satisfacer la relación

$$\omega \ll \frac{c}{4} \frac{1}{2r_0 A^{1/3}} . \quad (4.2)$$

Se puede pensar entonces en separar el hamiltoniano del sistema en

$$H = H_{\text{rot}} + H_{\text{int}} , \quad (4.3)$$

despreciando el término de acoplamiento entre los dos movimientos.

Podemos definir en un núcleo deformado un sistema de ejes fijo al cuerpo, con coordenadas r'_i y uno fijo al espacio con coordenadas r_i . Al rotar, el sistema fijo al cuerpo describirá un ángulo Ω respecto al sistema

laboratorio, donde $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ son los ángulos de Euler.

Las autofunciones del hamiltoniano (4.3) (modelo rotacional) se escriben

$$\Psi_{\alpha, I} = X_{\alpha} \cdot \bar{\vartheta}_{\alpha, I}(\Omega) . \quad (4.4)$$

Para cada estado intrínseco α , hay una serie de estados rotacionales correspondientes al momento angular I .

La función rotacional más general se escribe como

$$\bar{\vartheta}_{IM}(\Omega) = \left(\frac{2I+1}{8\pi^2}\right)^{1/2} \sum_K c_I(K) \cdot D_{MK}^I(\Omega) . \quad (4.5)$$

En el caso de tener simetría axial, la función de onda (4.4) toma la siguiente forma para $K > 0$

$$\Psi_{KIM} = \left(\frac{2I+1}{16\pi^2}\right)^{1/2} \{X_K D_{MK}^I(\Omega) + (-)^{I+K} X_{\bar{K}} D_{M-K}^I(\Omega)\} . \quad (4.6)$$

donde $X_{\bar{K}}$ resulta de aplicar una rotación en π alrededor de un eje perpendicular al de simetría, La ec.(4.6) no tiene la forma simple de la (4.5), sino que involucra una suma de dos términos de ese tipo. Esto se debe a las restricciones sobre los grados de libertad de rotación que impone la invariancia del hamiltoniano frente a la rotación mencionada.

Si $K=0$ se recupera la factorización ($K=-K$)

$$\Psi_{K=0, IM} = (2\pi)^{-1/2} \cdot X_{K=0} \cdot Y_{IM}(\theta, \psi) . \quad (4.7)$$

La función de onda X_{α} se puede describir con el modelo

de Nilsson, como veremos en la sección IV.2.3.

Sin embargo, para momentos angulares altos, los dos movimientos no resultan independientes y el estado intrínseco se puede ver modificado por la rotación del sistema, debido a las fuerzas de Coriolis y centrífuga que actúan sobre los nucleones.

IV.2.2. PARÁMETROS DE DEFORMACIÓN

Una forma de definir el radio que describe la superficie del esferoide es:

$$R = R(\theta, \varphi) = R_0 \cdot (1 + \alpha_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu} \cdot Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi)) , \quad (4.8)$$

donde el R_0 es el radio de una esfera con igual volumen.

Cuando tenemos una deformación cuadrupolar ($\lambda=2$) hay cinco parámetros $\alpha_{\lambda\mu}$. Tres de ellos determinan la orientación del núcleo en el espacio (ángulos de Euler) y los otros dos, llamados parámetros de Hill-Wheeler son las coordenadas β y γ , de manera que

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \{1 + \beta [5/(16\pi)]^{1/2} [\cos\gamma (3\cos^2\theta - 1) + \sqrt{3}\sin\gamma \sin^2\theta \cos^2\varphi]\} \quad (4.9)$$

En caso de tener simetría axial, γ debe anularse y por lo tanto

$$\begin{aligned} R(\theta) &= R_0 \{1 + \beta [5/(16\pi)]^{1/2} (3\cos^2\theta - 1)\} , \quad (4.10) \\ &= R_0 \{1 + \beta Y_{20}\} \end{aligned}$$

Para $\theta = 0$

$$R(\theta=0) = R_0 \{1 + \beta [5/(4\pi)]\} , \quad (4.11a)$$

y para $\theta = \pi/2$

$$R(\theta=\pi/2) = R_0 \{1 - \beta [5/(16\pi)]\} . \quad (4.11b)$$

Otro parámetro que se usa frecuentemente es la diferencia entre el eje simple y los ejes perpendiculares a él, medida en unidades de R_0

$$\delta = \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{3}{2} \beta [5/(4\pi)]^{1/2} \approx 0.946 \beta , \quad (4.12)$$

con lo que δ y β resultan prácticamente iguales.

Tanto el momento de inercia del esferoide rígido, como el momento cuadrupolar eléctrico para una distribución uniforme de carga, están relacionados con el parámetro β

$$J_{\text{ríg}} = \frac{2}{5} A M R_0^2 [1 + 0.31\beta] + o(\beta^2) , \quad (4.13)$$

$$Q_0 = (3/(5\pi))^{1/2} Z R_0^2 \beta (1 + 0.16\beta) . \quad (4.14)$$

Este último está ligado a las probabilidades de transición y a través de ellas podemos inferir experimentalmente el grado de deformación.

Para órdenes superiores de λ tenemos deformaciones octupolar ($\lambda = 3$), hexadecapolar ($\lambda = 4$), etc. Si se

mantiene la simetría axial, entonces $\mu = 0$ y los parámetros $\alpha_{\lambda\mu}$ se denotan con β_λ .

IV.2.3. FUNCIÓN DE ONDA INTRÍNSECA. MODELO DE NILSSON.

El modelo de capas se basa en la idea de partículas independientes que se mueven en un potencial promedio creado por todos los demás nucleones del núcleo.

Este modelo, con potencial esférico, se aplica muy bien para núcleos con capa cerrada o cercanos a capa cerrada. Para núcleos lejanos a capa cerrada (por ejemplo, $A \approx 25$ o $150 < A < 190$ (tierras raras), actínidos) la idea de tener partículas independientes debe venir acompañada de un potencial promedio deformado.

Dado que las fuerzas nucleares son de corto alcance (≈ 1 fm) comparadas con el radio nuclear, es de esperar que el potencial siga la forma de la densidad de masa.

Un potencial realista puede ser el de Woods-Saxon con parámetros dependientes de θ y φ

$$V(\theta, \varphi) = -V_0 \left\{ 1 + \exp \left[\frac{r - R_0(\theta, \varphi)}{a_0(\theta, \varphi)} \right] \right\}^{-1/2} . \quad (4.15)$$

Así como en el caso esférico, se utiliza el oscilador armónico como una aproximación al potencial de Woods-Saxon. para núcleos deformados se utiliza el oscilador anisótropo. Este modelo fue desarrollado por primera vez por S.G.Nilsson^[Ni55].

El hamiltoniano de Nilsson incluye además dos términos, uno debido al potencial espín-órbita y otro que tiene en cuenta el hecho de que para núcleos pesados, el potencial promedio realista es más chato en el interior del núcleo que el del oscilador.

Para simetría axial, el hamiltoniano toma la forma

$$h = - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{m\omega_{\perp}^2(x^2+y^2)}{2} + \frac{m\omega_z^2 z^2}{2} + Cl \cdot s + D l^2, \quad (4.16)$$

donde C da el peso del término de espín-órbita y $D \cdot l^2$ baja los niveles con mayor impulso angular.

Nilsson introdujo además una longitud del oscilador dependiente del parámetro de deformación δ

$$b(\delta) = [\hbar(m\omega_0(\delta))]^{1/2}, \quad (4.17)$$

con

$$\omega_0(\delta) = \omega_z / (1 - 4\delta/3)^{1/2}, \quad (4.18)$$

y, pasado a coordenadas adimensionales $\uparrow = r/b$, el hamiltoniano (4.16) toma la forma

$$h = \hbar\omega_0(\delta) \left(-\nabla^2/2 + \uparrow^2/2 - \beta \uparrow Y_{20} \right) + k\hbar\dot{\omega}_0 (2l \cdot s + \mu l^2). \quad (4.19)$$

El parámetro $\dot{\omega}_0^3 = \omega_{\perp}^2 \cdot \omega_z$. C y D vienen dados por

$$C = -2\hbar\dot{\omega}_0 k \quad D = -\hbar\dot{\omega}_0 k \mu, \quad (4.20)$$

con k y μ diferentes para cada capa principal del oscilador.

El hamiltoniano (4.19) no resulta diagonal en la representación (n_x, n_y, n_z) debido a los dos últimos términos, y tampoco es diagonal en la base esférica debido al término con $\beta.Y_{20}$. h no conmuta con I^2 y por lo tanto la función de onda para el potencial deformado no tiene a I como buen número cuántico, con lo que se pierde la invariancia rotacional.

Para obtener los autovalores y autofunciones del hamiltoniano (4.19), Nilsson trabajó en la base esférica. En este caso los términos con l^2 y $l.s$ son diagonales y el término con $\beta.Y_{20}$ mezcla estados con el mismo número cuántico principal N ($\Delta N = 0$) y con $\Delta N = 2$; estos últimos son de orden superior en el parámetro de deformación β y se pueden despreciar en primera aproximación. Para deformaciones grandes los términos en l^2 y $l.s$ se hacen despreciables y se puede diagonalizar el hamiltoniano en la base cilíndrica, caracterizando los estados con los números cuánticos N , n_z , m_1 , Ω ($=m_j$) y la paridad π , también llamados números cuánticos asintóticos (β grande).

Los estados de Nilsson se relacionan con los del oscilador isótropo (base esférica) mediante

$$|K\rangle_{\text{Nilsson}} = \sum_{\alpha} b_{\alpha K} |\alpha\rangle_{\text{esf}}, \quad (4.21)$$

con $\alpha = (N, l, j, \Omega)$.

Los coeficientes $b_{\alpha K}$ dependen de la deformación y para pequeños valores de β , resultan cercanos a la unidad (casi

no hay mezcla de capas).

El hamiltoniano (4.19) no incluye el término coulombiano. Este efecto se incorpora mediante una elección adecuada de los parámetros k y μ .

La función de onda intrínseca se puede construir, por ejemplo, formando un determinante de Slater con las funciones de partícula independiente soluciones del hamiltoniano (4.19) para una deformación β dada.

IV.2.4. PROYECCIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA

Consideremos una caja con simetría axial (por ejemplo un elipsoide) que contiene A nucleones con coordenadas r'_i y con el eje de simetría según z' . El hamiltoniano de partícula independiente conmuta con j_z , el momento angular total de cada nucleón, según la dirección z' . Si el autovalor de j_z es k , para el conjunto de las A partículas tenemos que el autovalor de la componente z' del momento angular total I , es

$$K = \sum_{i=1}^A k_i \quad (4.22)$$

La función de onda totalmente antisimétrica para los A nucleones

$$\chi_K(r'_1, \dots, r'_A), \quad (4.23)$$

la construimos como un determinante de Slater. Esta función no tiene buen momento angular, es decir, no es autoestado de I^2 . Sin embargo, es posible desarrollarla en términos de funciones con buen I .

$$\chi_K(r'_1, \dots, r'_A) = \sum_I a(K, I) \bar{\varphi}_{KK}^I(r'_1, \dots, r'_A) . \quad (4.24)$$

Las funciones $\bar{\varphi}$ se transforman bajo rotaciones mediante las matrices de Wigner [Ed57]

$$\bar{\varphi}_{KK}^I(r'_1, \dots, r'_A) = \sum_M \bar{\varphi}_{KM}^I(r'_1, \dots, r'_A) D_{MK}^I(\Omega) , \quad (4.25)$$

donde Ω es el ángulo de rotación. Introduciendo (4.25) en (4.24) obtenemos:

$$\chi_K(r'_1, \dots, r'_A) = \sum_{I, M} a(K, I) \bar{\varphi}_{KM}^I(r'_1, \dots, r'_A) D_{MK}^I(\Omega) . \quad (4.26)$$

Usando las relaciones de ortogonalidad de las matrices de Wigner

$$\int d\Omega D_{MK}^{I*}(\Omega) D_{M'K'}^{I'}(\Omega) = \delta_{II'} \delta_{MM'} \delta_{KK'} 8\pi^2 / (2I+1) , \quad (4.27)$$

podemos invertir la relación (4.26) y obtener las funciones con buen momento angular

$$\begin{aligned} \psi_{MK}^I(r_1, \dots, r_A) &= \frac{(2I+1)}{a(K, I)} \int d\Omega D_{MK}^I(\Omega) \chi_K(Rr_1, \dots, Rr_A) \\ &= \frac{(2I+1)}{a(K, I)} \int d\Omega D_{MK}^I(\Omega) \chi_K(\Omega) , \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde R es la rotación que lleva del sistema laboratorio al solidario al cuerpo

$$r'_i = R r_i, \quad (4.29)$$

y la integración es sobre los parámetros que especifican la rotación R (por ejemplo, los ángulos de Euler $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$). Hill y Wheeler^[HW53] fueron los que sugirieron por primera vez el uso de este tipo de funciones para describir el movimiento colectivo del núcleo, a partir de la función de onda intrínseca.

Así, las autofunciones del hamiltoniano se expresan como proyecciones del estado intrínseco, mientras que en (4.24) la función de onda intrínseca se interpreta como un paquete de ondas construido por la superposición de los diferentes estados de la banda rotacional.

La conexión con el modelo rotacional (ec. 4.4) se ve si la función de onda intrínseca $\chi_K(\Omega) = \chi_K \delta(\Omega)$. En el modelo SU_3 esto corresponde a $\lambda \rightarrow \infty$.

Como es sabido, la mayoría de los núcleos, si no todos, manifiestan comportamientos colectivos de algún tipo. Si queremos hacer un cálculo con el modelo de capas esférico, en general tendremos que considerar una base muy grande con muchas partículas en varios niveles. El método de la integral de Hill-Wheeler provee un procedimiento más inmediato para el cálculo de las funciones con buen momento angular. Kurath y Picman^[KP59] aplicaron el método a núcleos en la capa p y encontraron que estas funciones son semejantes a las construidas con el modelo de capas, al que se le agrega una interacción residual de dos cuerpos. Se ha

comprobado también para núcleos en la capa s-d [Pa57, E158] (ver Apéndice B).

IV.3. Obtención de la deformación intrínseca de funciones del Modelo de Capas a través de la diagonalización del operador cuadrupolar.

IV.3.1. ANTECEDENTES Y DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO.

La simetría SU_3 (Ap. B) proporciona un método simple para clasificar las funciones de onda del oscilador armónico, y permite construir la función de muchos cuerpos de un núcleo rotante con sentido físico. Esta función es equivalente a la que da el modelo de capas al diagonalizar una interacción cuadrupolar de dos cuerpos y, además, da cuenta del comportamiento colectivo del núcleo, reproduciendo los espectros rotacionales.

En el formalismo SU_3 , la función de onda intrínseca χ satisface las propiedades (B.25). Es decir, según (B.25.a) y (B.25.b) es autoestado de Q_0 y Q_2+Q_{-2} con autovalores $(2\lambda+\mu)$ y $\mu\sqrt{6}$ respectivamente.

Por otro lado, el momento cuadrupolar intrínseco de masa Q_0 para el estado fundamental se calcula como [dS74]:

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= \sum_{i=1}^A \langle Q_0(i) \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^A \langle (16\pi/5)^{1/2} r_i^2 Y_{20}(\theta_i, \varphi_i) \rangle
 \end{aligned}$$

$$= A \langle 3z^2 - r^2 \rangle . \quad (4.30)$$

Para un núcleo axialmente simétrico $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$ y por lo tanto

$$Q_0 = 2A (\langle z^2 \rangle - \langle x^2 \rangle) . \quad (4.31)$$

Si ΔR es la diferencia entre las longitudes del núcleo según la dirección del eje z y del eje x, y si $\Delta R \ll R$, entonces

$$Q_0 = 4 A R \Delta R / 5 = (4/5) A R^2 \Delta R / R \quad (4.32)$$

El parámetro de deformación β se define como

$$\beta = (4/3) (\pi/5)^{1/2} \Delta R/R \approx 1.06 \Delta R/R , \quad (4.33)$$

y entonces la relación entre el momento cuadrupolar y la deformación viene dada por

$$Q_0 = (4/5) A R^2 \beta / 1.06 = 0.8 A R^2 \delta (1 + 2\delta/3) , \quad (4.34)$$

donde se ha utilizado la relación entre δ y β (4.12).

En forma análoga se encuentra la relación entre el momento cuadrupolar eléctrico y la deformación nuclear (ec.4.14). De manera que, a través de la medición de los decaimientos electromagnéticos se puede determinar la deformación del núcleo. Para el caso del ^{20}Ne ver ref. [A172].

En esta sección se presenta un método que permite inferir teóricamente la deformación intrínseca de un núcleo a partir de las funciones de onda que da el modelo de capas para la banda rotacional. El procedimiento consiste en diagonalizar simultáneamente los operadores Q_0 y Q_2+Q_{-2} en la base generada por los estados de la banda rotacional (que en primera aproximación puede tomarse pura).

La función de onda intrínseca es la correspondiente al mayor autovalor de Q_0 , pues es la que tiene mayor alineamiento con respecto al eje de simetría. Esta función satisface además (B.25.b) y por lo tanto, para un núcleo axialmente simétrico debe tener autovalor nulo para (Q_2+Q_{-2}) .

Finalmente, el momento cuadrupolar intrínseco de masa (4.30) corresponde al mayor autovalor de Q_0 y, mediante la relación (4.34), se calcula la deformación δ .

Definimos ahora las funciones del modelo de capas con las cuales vamos a calcular los elementos de matriz del operador Q . En el formalismo de segunda cuantificación, las funciones se pueden escribir:

$$|IM\rangle = \sum A(j_1 j_2 J_{12} T_{12}, j_3 j_4 J_{34} T_{34}, JMTM_T) \\ \left((a_1^+ a_2^+)^{J_{12} T_{12}} (a_3^+ a_4^+)^{J_{34} T_{34}} \right)_{MM_T}^{JT} |0\rangle \quad (4.35)$$

El operador $Q_{\lambda\mu}$ en el mismo formalismo viene dado por:

$$Q_{\lambda\mu} = \sum_{jj'mm'} \langle jm | r^\lambda Y_{\lambda\mu} | j'm' \rangle a_{jm}^+ a_{j'm'}. \quad (4.36)$$

Los elementos de matriz de $Q_{2\mu}$ se calculan en la base de las funciones (4.35) (de ahora en adelante suprimimos por comodidad el subíndice 2) como:

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \left[[a_{j_5}^+ \ a_{j_6}^+]^{J_{56} T_{56}} [a_{j_7}^+ \ a_{j_8}^+]^{J_{78} T_{78}} \right]_{M' M_T}^{J' T'} | \\
& \quad |Q_\mu \rangle \left[[a_{j_1}^+ \ a_{j_2}^+]^{J_{12} T_{12}} [a_{j_3}^+ \ a_{j_4}^+]^{J_{34} T_{34}} \right]_{M M_T}^{J T} | 0 \rangle = \\
& = \langle (j_5 j_6)^{J_{56} T_{56}}, (j_7 j_8)^{J_{78} T_{78}}; J' M' T' M_T' | \\
& \quad |Q_\mu \rangle (j_1 j_2)^{J_{12} T_{12}}, (j_3 j_4)^{J_{34} T_{34}}; J M T M_T \rangle \quad (4.37) \\
& = \begin{pmatrix} J' & 2 & J \\ M' & -\mu & -M \end{pmatrix} \begin{matrix} \sum_{jK} (-1)^{j+j_2+J_{12}+J_{34}+K+M'} \\ \hat{J} \hat{J}' \hat{K} \hat{J}_{12} \end{matrix} \\
& \quad \left\{ \begin{matrix} J_{12} & 2 & K \\ j & j_2 & j_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J' & 2 & J \\ J_{12} & J_{34} & K \end{matrix} \right\} \langle j || Q || j_1 \rangle \\
& \quad \langle (j_5 j_6)^{J_{56} T_{56}}, (j_7 j_8)^{J_{78} T_{78}}; J' M' T' M_T' | \\
& \quad | (j_2 j_3)^{K T}, (j_3 j_4)^{J_{34} T_{34}}; J' M' T' M_T' \rangle \\
& + \sum_{jK} (-1)^{j_1+j_2+J_{34}+M'} \begin{matrix} \hat{J} \hat{J}' \hat{K} \hat{J}_{12} \end{matrix} \\
& \quad \left\{ \begin{matrix} 2 & J_{12} & K \\ j_1 & j & j_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J' & 2 & J \\ J_{12} & J_{34} & K \end{matrix} \right\} \langle j || Q || j_2 \rangle \\
& \quad \langle (j_5 j_6)^{J_{56} T_{56}}, (j_7 j_8)^{J_{78} T_{78}}; J' M' T' M_T' | \\
& \quad | (j_1 j_3)^{K T}, (j_3 j_4)^{J_{34} T_{34}}; J' M' T' M_T' \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{jK} (-1)^{j+j_4+J+J'+J_{12}+M'} \hat{J} \hat{J}' \hat{K} \hat{J}_{12} \\
& \left\{ \begin{matrix} J_{34} & 2 & K \\ j & j_4 & j_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J' & 2 & J \\ J_{34} & J_{12} & K \end{matrix} \right\} \langle j || Q || j_3 \rangle \\
& \langle (j_5 j_6) J_{56} T_{56}, (j_7 j_8) J_{78} T_{78}; J' M' T' M_T' | \\
& \quad | (j_1 j_2) J_{12} T_{12}, (j_3 j_4) K_T; J' M' T' M_T' \rangle \\
& + \sum_{jK} (-1)^{j_3+j_4+J+J'+J_{12}+J_{34}+K+M'} \hat{J} \hat{J}' \hat{K} \hat{J}_{12} \\
& \left\{ \begin{matrix} 2 & J_{34} & K \\ j_3 & j & j_4 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J' & 2 & J \\ J_{34} & J_{12} & K \end{matrix} \right\} \langle j || Q || j_4 \rangle \\
& \langle (j_5 j_6) J_{56} T_{56}, (j_7 j_8) J_{78} T_{78}; J' M' T' M_T' | \\
& \quad | (j_1 j_2) J_{12} T_{12}, (j_3 j_4) K_T; J' M' T' M_T' \rangle
\end{aligned}$$

donde $\hat{J} = (2J+1)^{1/2}$.

En (4.37) los elementos de matriz reducidos para el operador cuadrupolar vienen dados por^[Ni55]:

$$\begin{aligned}
\langle N_1 1_1 j_1 || Q || N_2 1_2 j_2 \rangle &= 2 \langle N_1 1_1 || r^2 || N_2 1_2 \rangle \hat{1}_1 \hat{j}_1 \hat{j}_2 \langle 1_1 0 2 0 | 1_2 0 \rangle \\
& (-1)^{1_1+1/2+j_2} \left\{ \begin{matrix} 1_1 & 2 & 1_2 \\ j_2 & 1/2 & j_1 \end{matrix} \right\}, \quad (4.38)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\langle N1 || r^2 || N1' \rangle &= [(N-1+2)(N+1+1)]^{1/2} \quad |1\rangle 1' \\
\langle N1 || r^2 || N1 \rangle &= N + 3/2
\end{aligned} \quad (4.39)$$

Finalmente, con el código ROVER^[Du] se calculan las superposiciones

$$\langle (j_1 j_2)^J J_{12} T_{12} (j_3 j_4)^J J_{34} T_{34}, JMTM_T | (j_5 j_6)^J J_{56} T_{56}, (j_7 j_8)^J J_{78} T_{78}, JTMM_T \rangle \quad (4.40)$$

$$= -(1+\hat{P}_1)(1+\hat{P}_3)(1+\hat{P}_5)(1+\hat{P}_7) \delta_{j_1 j_5} \delta_{j_2 j_7} \delta_{j_3 j_6} \delta_{j_4 j_8}$$

$$\hat{J}_{12} \hat{J}_{34} \hat{J}_{56} \hat{J}_{78} \hat{T}_{12} \hat{T}_{34} \hat{T}_{56} \hat{T}_{78} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_6 & j_{56} \\ j_2 & j_8 & j_{78} \\ J_{12} & J_{34} & J_{78} \end{matrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & T_{56} \\ 1/2 & 1/2 & T_{78} \\ T_{12} & T_{34} & T_{78} \end{matrix} \right\} \cdot (1+\hat{P}_1)(1+\hat{P}_3) \left(\delta_{j_1 j_5} \delta_{j_2 j_6} \delta_{j_3 j_7} \delta_{j_4 j_8} \right.$$

$$\delta_{J_{12} J_{56}} \delta_{T_{12} T_{56}} \delta_{J_{34} J_{78}} \delta_{T_{34} T_{78}} + (-1)^{J_{12}+J_{34}+T_{12}+T_{34}+J+T}$$

$$\left. \delta_{j_1 j_7} \delta_{j_2 j_8} \delta_{j_3 j_5} \delta_{j_4 j_6} \delta_{J_{12} J_{78}} \delta_{T_{12} T_{78}} \delta_{J_{34} J_{56}} \delta_{T_{34} T_{56}} \right)$$

donde \hat{P}_i cambia $i \leftrightarrow i+1$ y agrega una fase $(-1)^{P_i}$ con

$$P_i = j_i + j_{i+1} + J_{i,i+1} + T_{i,i+1}$$

IV.3.2 APLICACIÓN AL CÁLCULO DE LA DEFORMACIÓN

INTRÍNSECA PARA LA BANDA DEL ESTADO FUNDAMENTAL DEL ^{20}Ne .

En la región entre $A = 16$ y $A = 28$ se han reconocido espectros correspondientes a bandas rotacionales. El estudio de reacciones $^{16}\text{O}(\alpha, \alpha)$ y $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, \alpha)^{20}\text{Ne}$ han jugado

un papel preponderante para establecer los estados con alto momento angular en el espectro del ^{20}Ne [Ra81].

Para estos núcleos livianos, los espectros no presentan las características de banda rotacional tan marcadas como en los núcleos pesados, pero, a primer orden, las energías siguen la ley $I(I+1)$. La banda del estado fundamental del ^{20}Ne presenta una componente oscilatoria que baja los estados 4^+ y 8^+ con respecto al 2^+ y 6^+ [BM75].

Para el ^{20}Ne , la configuración de menor energía es $(0s)^4(0p)^{12}(1s,0d)^4$ que da un solo conjunto de estados caracterizados por los números cuánticos $(\lambda, \mu) = (80)$ y $[f] = [44444]$.

Utilizando las funciones de onda para la banda rotacional del estado fundamental del ^{20}Ne del modelo MSM con la interacción residual de Kuo y Herling [KH71], se construyó un programa para el cálculo de los elementos de matriz del operador cuadrupolar según la ec. (4.37). Se diagonalizaron Q_0 y Q_2+Q_{-2} en la base generada por los estados $|IM\rangle$ de la banda, donde $I=0,2,4,6,8$ y $-I \leq M \leq I$, con lo que la dimensión de las matrices resulta de 25×25 .

Los autovalores obtenidos para el estado intrínseco son:

$$\begin{aligned} \langle Q_0 \rangle &= 14.07 b^2 & (16 b^2) & \quad (4.41) \\ \langle Q_2+Q_{-2} \rangle &\approx 0 & (0) & \end{aligned}$$

donde los valores entre paréntesis corresponden al cálculo con la interacción residual cuadrupolar (SU_3) y b es el

parámetro de tamaño del oscilador.

El valor que se deduce para la deformación δ según la ec. (4.34) es

$$\delta = 0.75 \quad (0.88) \quad (4.42)$$

Este valor corresponde a una deformación prolada muy marcada de la función de onda intrínseca, y es la misma para todos los estados de la banda.

En este cálculo se hizo la aproximación de no considerar mezcla de bandas. Si se desea incluir este efecto se deberán diagonalizar los operadores en una base ampliada que tenga en cuenta los estados correlacionados.

IV.4. Modificación de la estructura intrínseca por efectos de las fuerzas de Coriolis y centrífuga.

Como se indicó ya en la introducción de este capítulo, el movimiento de los nucleones se ve influenciado por las fuerzas de Coriolis y centrífuga. Este efecto se hace más importante al aumentar el impulso angular. De esta manera, el movimiento rotacional del núcleo produce cambios graduales en la estructura intrínseca y las características típicas de la disposición en capas, tal como los números mágicos, la deformación intrínseca, etc., se ven afectados por el espín nuclear.

Es interesante notar que las frecuencias de rotación

(w) que se pueden estudiar experimentalmente son mucho más altas para los núcleos livianos que para los pesados. En efecto, si suponemos que el núcleo rota con el momento de inercia de un rígido, que varía con el número de masa como $\mathcal{J}_{\text{rig}} \propto A^{5/3}$, el momento angular es $I = \mathcal{J}_{\text{rig}} \cdot \omega$.

En el ^{20}Ne , a $I=8$ le corresponde la misma frecuencia de rotación que para $I=256$ en un núcleo con $A=160$. El estado 8^+ en el ^{20}Ne ha sido observado, sin embargo, los núcleos con $A=160$ fisionan antes de alcanzar $I=100$, y no se han medido estados discretos por sobre $I=40$ [Ra81].

En esta sección se presenta un método que permite encontrar la deformación intrínseca asociada a cada estado de la banda rotacional haciendo uso de la integral de Hill-Wheeler (4.28).

Si trabajamos en base del oscilador armónico en tres dimensiones, las funciones ψ de (4.26) tienen las propiedades de transformación de la simetría SU_3 y los coeficientes $N(K,L)$ son calculables analíticamente. Para cualquier otro caso hay que encontrar una manera de obtener estos coeficientes para construir la función de onda intrínseca.

El método que se presenta aquí comienza construyendo un estado intrínseco con una cierta deformación. Por ejemplo, si consideramos simetría axial, la función de onda intrínseca es un determinante de Slater de funciones de Nilsson. Mediante la integral de Hill-Wheeler se proyecta esta función para obtener el estado con buen momento angular. El procedimiento consiste en maximizar la

superposición de la función de onda proyectada, con una función calculada con el modelo de capas, variando el parámetro de deformación δ del potencial de Nilsson en la función intrínseca X_K .

En particular, se aplicó el procedimiento al estudio de la banda rotacional del estado fundamental del ^{20}Ne . La función de onda de estado intrínseco se construye en este caso como:

$$|X_0\rangle = c_{k1/2}^+ c_{k-1/2}^+ c_{k1/2}^+ c_{k-1/2}^+ |0\rangle . \quad (4.43)$$

Los operadores $c_{kt_z}^+$ crean estados de una partícula con con proyección k de j y t_z del isoespín, y los operadores $c_{kt_z}^+$ crean el estado reverso temporal del $c_{kt_z}^+$. Para el estado fundamental del ^{20}Ne las cuatro partículas están en el estado $[220\ 1/2]$ y por lo tanto $k = 1/2$. Los operadores c^+ se relacionan con los operadores de creación del oscilador armónico esférico por medio de

$$c_k^+ = \sum_j b_{jk} a_{jk}^+ , \quad (4.44)$$

reemplazando (4.44) en (4.43) obtenemos

$$|X_0\rangle = \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} b_{j_1 k} b_{j_2 k} b_{j_3 \bar{k}} b_{j_4 \bar{k}} a_{j_1 k 1/2}^+ a_{j_2 k -1/2}^+ a_{j_3 \bar{k} 1/2}^+ a_{j_4 \bar{k} -1/2}^+ |0\rangle . \quad (4.45)$$

Para proyectar X_0 según la relación (4.28) debemos rotarla en un ángulo Ω . La función rotada resulta

$$|X_0^\Omega\rangle = \sum_{\substack{j_1 j_2 j_3 j_4 \\ m_1 m_2 m_3 m_4}} b_{j_1 k} b_{j_2 k} b_{j_3 \bar{k}} b_{j_4 \bar{k}} D_{km}^{*j_1} D_{km}^{*j_2} D_{-km}^{*j_3} D_{-km}^{*j_4} \quad (4.46)$$

$$a_{j_1 m_1 1/2}^+ a_{j_2 m_2 -1/2}^+ a_{j_3 m_3 1/2}^+ a_{j_4 m_4 -1/2}^+ |0\rangle$$

$$= \sum_{\substack{j_1 j_2 j_3 j_4 \\ m_1 m_2 m_3 m_4}} b_{j_1 k} b_{j_2 k} b_{j_3 \bar{k}} b_{j_4 \bar{k}} \langle j_1 j_2 k k | J_{12} \ 2k \rangle$$

$$\langle j_3 j_4 -k -k | J_{34} \ -2k \rangle \langle J_{12} \ J_{34} \ 2k \ -2k | I0 \rangle \langle 1/2 \ 1/2 \ 1/2 \ -1/2 | T0 \rangle^2$$

$$\langle T00 | 00 \rangle D_{OM}^{*I} \left[[a_{j_1}^+, a_{j_2}^+] \right]^{J_{12} T} [a_{j_3}^+, a_{j_4}^+]^{J_{34} T} \left]_{MO}^{I0} |0\rangle$$

De esta manera, el estado con momento angular I de la banda rotacional se proyecta con la integral de Hill-Wheeler (4.28)

$$\Psi_M^I = \frac{2I+1}{N(K,I)} \int d\Omega D_{MK}^I(\Omega) \chi_K(\Omega) . \quad (4.47)$$

El factor de normalización N(K,I) es función de los coeficientes b_{jk} de Nilsson y por lo tanto de la deformación del núcleo.

Como se mencionó anteriormente, el método para hallar esa deformación consiste en maximizar la superposición de la función de onda (4.47) con una función calculada con el modelo de capas en múltiples pasos (MSM descrito en el Ap.A)

$$f(\delta) = \langle \psi_K^L(\delta) | \psi_{SM} \rangle . \quad (4.48)$$

Las funciones ψ_{SM} tienen en cuenta la interacción de Kuo y Herling^[KH71]. De esta manera, se pueden encontrar las deformaciones para cada nivel de la "banda rotacional" del estado fundamental del ^{20}Ne .

Para obtener la función de superposición $f(\delta)$ se construyó un código que incluye al programa ROVER (ec.4.40). El programa que encuentra el valor de la deformación δ que hace máxima a la función $f(\delta)$ utiliza el código MINUIT^[JR76].

En la figura 9 se ha graficado la deformación como función del momento angular. Se puede ver que la deformación disminuye al aumentar el espín del estado. Esto se debe, como se mencionó anteriormente, al cambio sufrido en el estado intrínseco debido a la rotación. Las fuerzas de Coriolis y centrífuga que actúan sobre los nucleones, producen el alineamiento del momento angular de los mismos con el eje de rotación del núcleo.

Este fenómeno, conocido como "rotational alignment" hace que el núcleo cambie su deformación hasta que se produce una transición de fase de prolado a oblado^[BM76].

En el cálculo que aquí se presenta, no se obtiene la transición de fase pues el procedimiento seguido no lo permite (no se tienen en cuenta excitaciones a otras capas de Nilsson, se fijan los valores de k y μ , etc.). Sin embargo, se obtiene la tendencia correcta para los valores

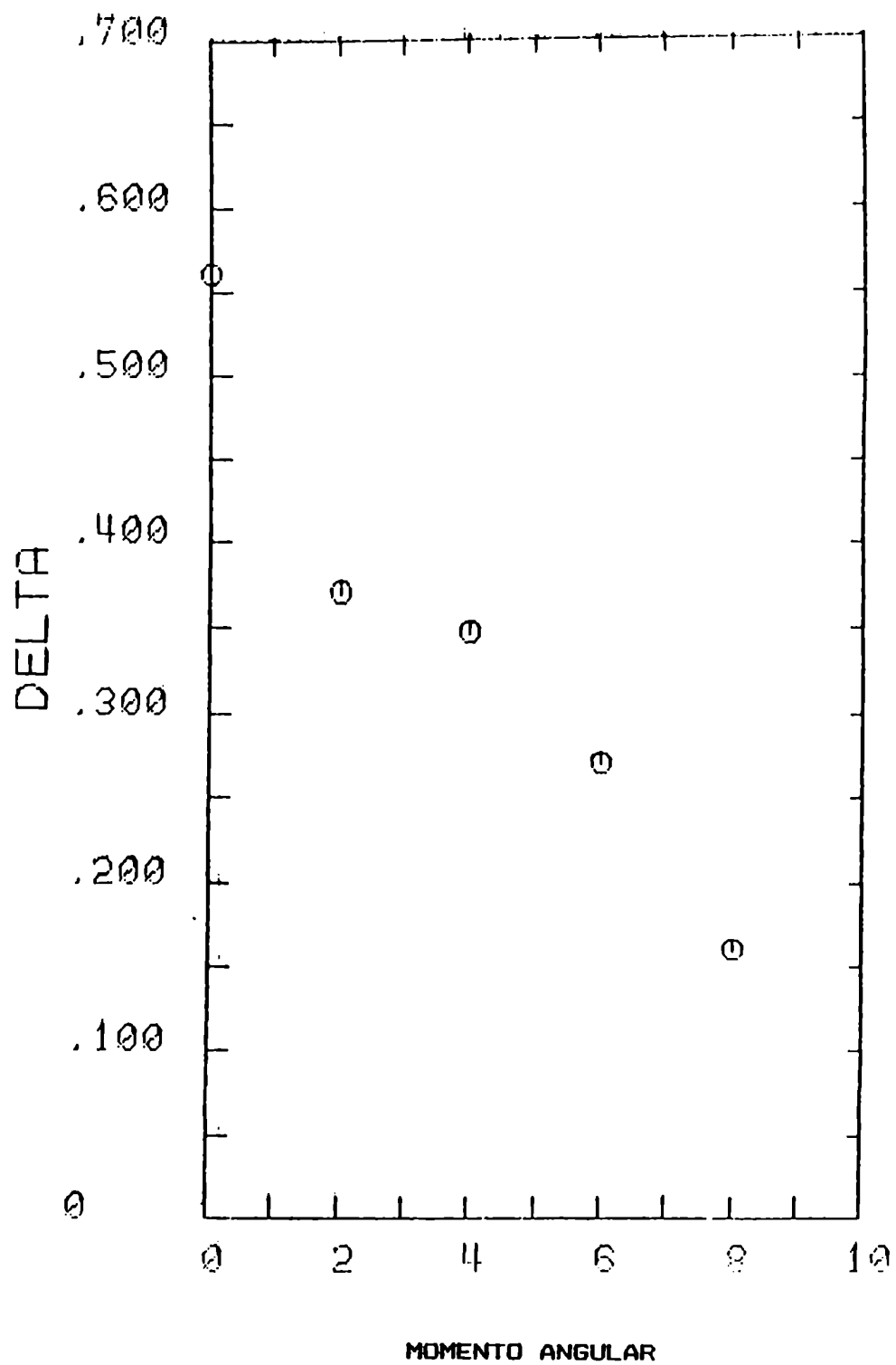


Fig. 9. Deformación de la función de onda intrínseca en función del momento angular del estado de la banda rotacional del ^{20}Ne (e.f.).

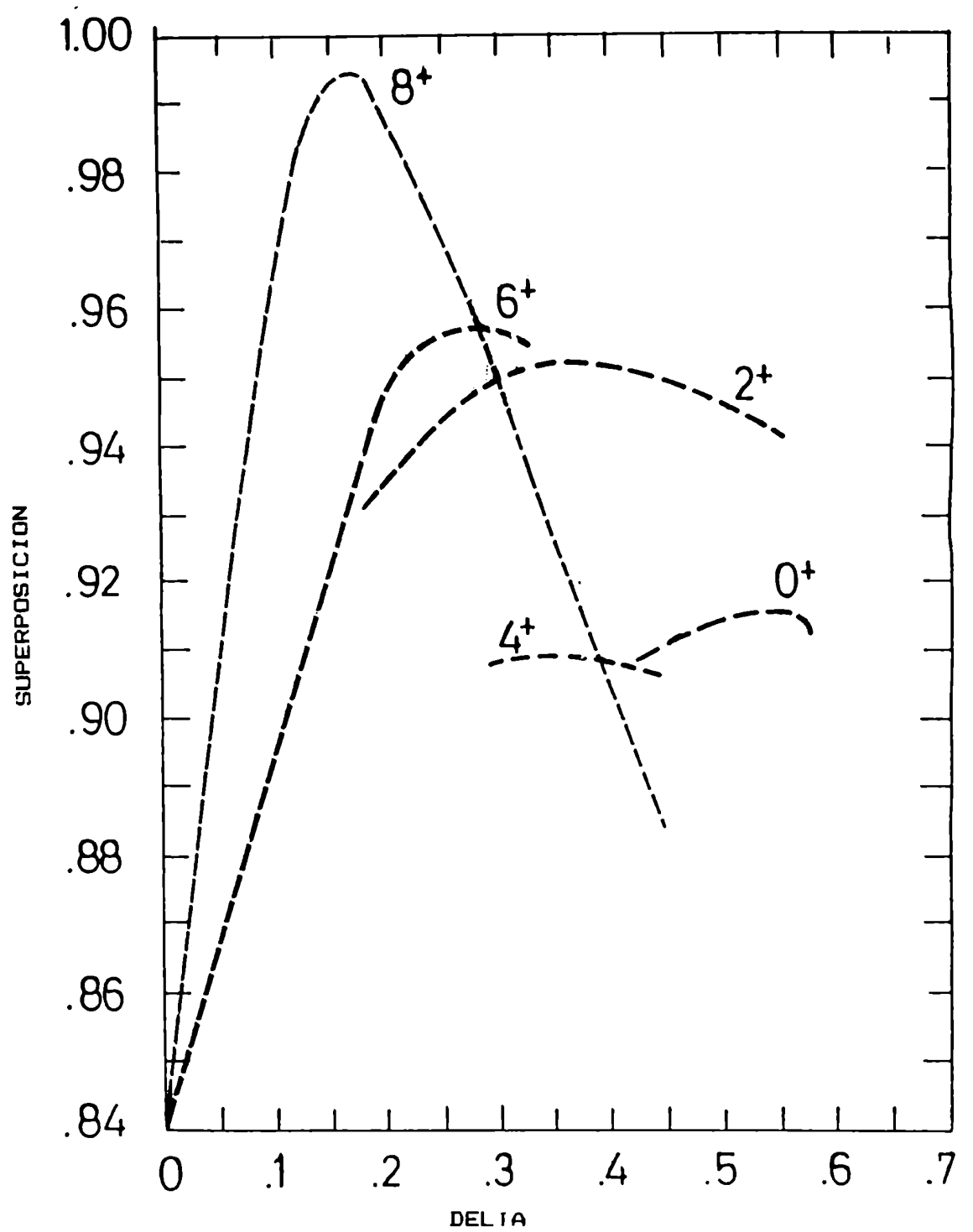


Fig. 10. Valores de las superposiciones de la función de onda del modelo de capas con la proyectada mediante la integral de Hill-Wheeler.

que va tomando el parámetro de deformación δ al aumentar la frecuencia de rotación.

Es importante destacar que esta correcta tendencia de la deformación ha sido obtenida mediante un modelo que no separa el movimiento intrínseco del de rotación^[BM75] (como en el caso del modelo de Bohr, por ejemplo) sino que obtiene la función de onda total del núcleo en el laboratorio a partir de la proyección en momento angular de la función intrínseca de Nilsson.

En la figura 10 se muestran los valores de las superposiciones (4.48) en las zonas próximas a los máximos.

El hecho de que los máximos no estén muy bien definidos se puede interpretar como debido a la presencia de componentes no axialmente simétricas en la función de onda del modelo de capas.

Este cálculo puede aplicarse también en el caso en que se quieran incluir deformaciones octupolares (en cuyo caso también habría que hacer una proyección en paridad para la función intrínseca), hexadecapolar, etc., ya que el método permite la maximización de una función del tipo de la (4.48) para varios parámetros variacionales.

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se han desarrollado diferentes técnicas y métodos para el cálculo de las funciones de onda de conjuntos de varios nucleones, las que se aplican tanto al estudio de las reacciones como al análisis de la estructura de los núcleos.

En el capítulo II se presentaron dos métodos para la obtención de los factores de forma. En especial, el método basado en aproximaciones que tienen en cuenta la importancia del comportamiento de la función de onda en las zonas de la superficie y exterior nuclear, resulta más apropiado para el cálculo de reacciones con transferencia de varios nucleones que los métodos utilizados más comunmente. De la comparación realizada en la sección II.4 entre los diferentes procedimientos podemos destacar que utiliza un único potencial para las funciones radiales con diferente número de nodos, que las funciones corresponden a un potencial realista de Woods-Saxon y que para las reacciones con transferencia de alfas en las cuales se aplicó conduce a secciones eficaces que se acercan más a los valores experimentales.

En el capítulo III se presentó el método BABY. Este procedimiento que resuelve exactamente la integral (1.1) con funciones de partícula independiente para un potencial arbitrario, proporciona una herramienta útil y de gran versatilidad para el cálculo del factor de forma de cuatro nucleones en estado intrínseco 0_s .

La prueba que se realizó utilizando funciones de oscilador armónico reprodujo con precisión los valores que da el cálculo exacto. A su vez, el desarrollo de la función totalmente antisimétrica de cuatro nucleones permite aplicarlo a núcleos livianos. En el estudio de la estructura de los dos primeros estados con momento angular cero del ^{20}Ne , se aplicó nuevamente con éxito para el caso de tener funciones de partícula independiente de oscilador armónico donde se pudo comparar con los resultados de Elliot^[E158] para la simetría SU_3 . Luego se lo aplicó al mismo núcleo, pero describiendo a los dos estados 0^+ con las funciones de onda que da el Modelo de Capas en Pasos Múltiples (MSM) para la interacción de Kuo y Herling^[KH73]. Las funciones de partícula independiente se calcularon en un potencial de Woods-Saxon y se obtuvieron los resultados esperados para la amplitud de la componente ($^{16}O+\alpha$) de los estados 0_1^+ y 0_2^+ .

Finalmente, en la zona de núcleos pesados, se calcularon los anchos reducidos para el decaimiento alfa del ^{212}Po . En primer lugar, se hizo una comparación de los resultados obtenidos con el método BABY para funciones de Woods-Saxon, con los de la ref.^[Sa70] que utiliza funciones de oscilador armónico. Luego se comparó con los anchos reducidos de la ref.^[TA79], que empalma, en la región exterior del núcleo, las funciones de oscilador armónico con funciones de Coulomb. En ambos casos, los valores obtenidos con el método BABY para los anchos reducidos resultaron menores que los de los otros métodos mencionados. Esto se

debe a que las funciones de Woods-Saxon tienen una menor amplitud que las del oscilador en la zona de la superficie. Pero, si bien el uso de éstas últimas nos acerca más al resultado experimental, es interesante plantearse si es realista utilizarlas en esta zona donde ya no corresponden a una descripción correcta del potencial nuclear.

Con respecto a la comparación con el método de la ref. [DC85] que calcula la integral de superposición para el ancho reducido con valores limitados de las variables de integración, se obtienen también valores inferiores con el método BABY. De ser correcto el cálculo en la referencia citada, esta diferencia podría deberse a cancelaciones en la integral, al considerar todos las posibles posiciones de los cuatro nucleones en el ^{212}Po .

En el capítulo IV se desarrollan dos métodos para la obtención de la deformación intrínseca de funciones del modelo de capas. El primero, calcula la función intrínseca y su deformación δ , a través de la diagonalización del operador Q en la base de las funciones en el sistema de laboratorio. Se los aplicó a la banda rotacional del estado fundamental del ^{20}Ne , utilizando las funciones del modelo MSM con la interacción de Kuo y Herling [KH71]. El valor obtenido para la deformación corresponde a un núcleo muy deformado, prolado, y se aproxima al valor que da el formalismo SU_3 para el caso de una interacción cuadrupolar pura.

Si bien este cálculo se realizó sin considerar mezcla de bandas, es posible ampliarlo, diagonalizando el operador

Q en una base que contenga además estados de otras bandas.

Este primer método supone una misma función intrínseca para toda la banda rotacional. Es el segundo método el que permite estudiar la variación de la deformación con la frecuencia de rotación.

Se aplicó este segundo método al cálculo de la deformación de la función intrínseca correspondiente a cada estado de la banda rotacional del estado fundamental del ^{20}Ne . Mediante la integral de Hill-Wheeler se proyectó la función de onda intrínseca construida como un determinante de Slater para estados de Nilsson. Luego se superpusieron estas funciones con las que da el MSM, y se maximizó esta superposición utilizando a la deformación δ como parámetro variacional. Se pudo observar que, a medida que la frecuencia aumenta, la deformación disminuye y esto se interpreta como una modificación en la estructura intrínseca ocasionada por el acoplamiento entre el movimiento de los nucleones y el de rotación del núcleo como un todo, a través de las fuerzas de Coriolis y centrífuga. Y, si bien no se obtuvo la transición de fase de prolado a oblado, debido a las características del procedimiento seguido (no se permitieron excitaciones a otros niveles de partícula independiente, y se mantuvieron fijos los parámetros k y μ de Nilsson, relacionados con el término de espín-órbita y de l^2 respectivamente), sí se obtuvo la tendencia esperada para la deformación, al variar la frecuencia de rotación del núcleo.

Es importante subrayar que no se separó en ningún

momento el movimiento rotacional del intrínseco (como en el modelo rotacional ^[BM76]), sino que se obtuvieron los estados rotacionales a través de la proyección de la función de onda intrínseca mediante la integral de Hill-Wheeler ^[HW53].

Al efectuar la maximización de la superposición entre la función de onda del modelo de capas y la proyectada con la integral de Hill-Wheeler, los valores obtenidos para los máximos no están, en algunos casos, muy definidos. Esto se debe probablemente a la presencia de deformaciones no axialmente simétricas y de orden superior. Aunque en esta tesis se ha utilizado el método suponiendo deformación cuadrupolar, es posible ampliarlo para el cálculo de deformación octupolar, hexadecapolar, etc.



Apéndice A

El Modelo de Capas en Múltiples Pasos (MSM)

El modelo de capas en múltiples pasos desarrollado por R. Liotta y C. Pomar^[LP81], utiliza una base de estados correlacionados para describir el espectro nuclear. Este modelo surge de la necesidad de contar con una base que pueda ser truncada, es decir, que los estados físicos estén contenidos en un subespacio relativamente pequeño del espacio total que genera la base, de manera que sea practicable la diagonalización, y que resulte así mismo más simple la interpretación de la función de onda.

El modelo de capas convencional explica con éxito la estructura de núcleos con capa cerrada o cercanos a capa cerrada. Pero, cuando se incluyen muchas configuraciones (varios nucleones de valencia), la base resulta muy grande, y las funciones de onda tienen en su desarrollo muchas componentes con pesos similares. De esta manera el cálculo resulta complicado, y las funciones, difíciles de interpretar.

Una bases correlacionada se expresa en términos de funciones de onda de subsistemas de partículas que ya tienen en cuenta la interacción residual.

En núcleos esféricos, una base correlacionada consiste, por ejemplo, en estados acoplados de partícula - partícula (vibraciones normales de apareamiento) y de partícula agujero (vibraciones de superficie). Además se utilizan los

estados de partícula independiente cuando son necesarios (por ejemplo, cuando se analizan núcleos con número impar de nucleones).

El uso de bases correlacionadas acarrea en principio dos inconvenientes: la violación del principio de Pauli y la generación de bases sobredimensionadas. El primero de ellos implica que los vectores de la base ya no son, en general, ortogonales entre sí.

Estos dos problemas se solucionan, en el marco del MSM, calculando la matriz de métrica de la base correlacionada y ortonormalizándola mediante, por ejemplo, el método de Schmidt. El problema de "muchos cuerpos" originalmente planteado en la base correlacionada sobrecompleta, es proyectado en la base completa antes de ser resuelto (diagonalizado).

La característica más importante del MSM es que resuelve el problema de muchos cuerpos en etapas sucesivas. Por ejemplo, un sistema de s nucleones de valencia (s partículas fuera de capa cerrada) se describe como el resultado de la interacción de dos subsistemas de m y n nucleones respectivamente, tal que $m+n=s$, y que fueron resueltos aplicando los mismos criterios en etapas sucesivas. La interacción original de dos cuerpos se transmite a lo largo de las sucesivas etapas a través de las funciones de onda y las energías físicas de los subsistemas que se fueron resolviendo en los pasos previos.

El comportamiento dinámico del sistema es descrito en el marco de la Aproximación de Tamm-Dancoff (TDA) que

consiste fundamentalmente en excluir las excitaciones de partícula-agujero.

Vamos a limitarnos ahora al caso de $s=4$ pues es lo que corresponde al ^{20}Ne , cuya función se utiliza en esta tesis, con $m=n=2$. Las ecuaciones de la TDA son:

$$(w_{\alpha} - \epsilon_i - \epsilon_j) X(ij; \alpha) = \sum_{kl} \langle kl; \alpha | V | ij; \alpha \rangle X(kl; \alpha) \quad (\text{A-1})$$

donde

$$X(ij; \alpha) = \langle \alpha | (c_i^+ c_j^+)_{\alpha} | 0 \rangle / (1 + \delta_{ij})^{1/2} \quad (\text{A-2})$$

El índice α denota estados de dos partículas, y los i, j, k, l corresponden a estados de partícula independiente. Con $w(\epsilon)$ se indican las energías de dos partículas (partícula independiente), y c^+ es el operador de creación de un fermión.

La diagonalización de (A-1) da las funciones de onda de la TDA:

$$|\alpha\rangle = P^+(\alpha) |0\rangle \quad (\text{A-3})$$

donde

$$P^+(\alpha) = \sum_{i \leq j} X(ij; \alpha) (c_i^+ c_j^+)_{\alpha} / (1 + \delta_{ij})^{1/2} \quad (\text{A-4})$$

es el operador de creación de dos partículas.

Con esto podemos escribir:

$$(c_i^+ c_j^+)_{\alpha} / (1 + \delta_{ij})^{1/2} = \sum_{\alpha} X^*(ij; \alpha) P^+(\alpha) \quad (\text{A-5})$$

Para las cuatro partículas, la ecuación de la TDA contiene los elementos de matriz de la interacción de dos partículas y puede escribirse en la forma (A-1) (ver ref. [RS74, Sc76]).

Se obtiene entonces:

$$(W_\beta - w_{\alpha_1} - w_{\alpha_2}) \langle \beta | (P^+(\alpha_1) P^+(\alpha_2))_\beta | 0 \rangle = \quad (A-6)$$

$$= \sum_{\alpha_3 \alpha_4} \sum_{ijkl} (w_{\alpha_3} - \epsilon_j - \epsilon_k) A(ijkl; \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$$

$$\cdot \langle \beta | (P^+(\alpha_3) P^+(\alpha_4))_\beta | 0 \rangle$$

donde

$$A(ijkl; \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = Y(ij; \alpha_1) Y(kl; \alpha_2) Y^*(ik; \alpha_3)$$

$$\cdot Y^*(jl; \alpha_4) \begin{matrix} i & j & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \{ & k & l & \alpha_2 \} \\ & \alpha_3 & \alpha_4 & \beta \end{matrix} \quad (A-7)$$

Con el índice β denotamos estados de cuatro partículas con la correspondiente energía W_β y,

$$Y(ij; \alpha) = (1 + \delta_{ij})^{1/2} X(ij; \alpha) \quad (A-8)$$

Para obtener (A-6) se descompuso el sistema en subsistemas de dos partículas. Es importante destacar, sin embargo, que la forma de subdividir el sistema es arbitraria y se podría haber hecho de otra forma.

En la ec. (A-6), los elementos de matriz de la

interacción de dos partículas han sido reemplazados por las energías y las funciones de onda.

De esta manera, la matriz dinámica del MSM (A-6) resulta una función de cantidades físicas que fueron calculadas en pasos anteriores del mismo proceso. Su diagonalización proveería las funciones de onda y energías de cuatro partículas si las funciones

$$|\alpha_1 \alpha_2; \beta\rangle = (P^+(\alpha_1) P^+(\alpha_2))_{\beta}^+ |0\rangle \quad (\text{A-8})$$

formaran una base ortogonal. Pero esto no es siempre cierto. Se obtienen, en general, soluciones espúreas además de las soluciones físicas y, como la matriz (A-6) no es hermitica, también pueden encontrarse soluciones complejas.

Para superar estos inconvenientes hay que evaluar la matriz métrica (superposición de los estados de la base). Si esta matriz resulta difícil de calcular, el procedimiento pierde su bondad. Sin embargo, en ref. [Li80] se prueba que para $s=4$, las matrices métrica y dinámica son similares y se pueden analizar a la vez.

Finalmente, haciendo uso de la matriz métrica se puede transformar la matriz (A-6) en otra hermitica (T) si se incluyen todos los estados (A-8) [LP81].

Si, por otro lado, se trunca la base, la matriz puede perder su hermiticidad. Esta propiedad constituye una "medida" de hasta qué punto se puede truncar la base, sin afectar la descripción de los estados físicos.

Si la matriz T es aproximadamente hermitica, se puede

asumir que el truncamiento ha sido correcto.

En este caso se puede trabajar con la matriz hermitica

$$\tilde{T} = (T+T^*)/2 \quad (A-9)$$

y su diagonalización provee los estados físicos de cuatro partículas

$$|\beta\rangle = P^+(\beta) |0\rangle \quad (A-10)$$

con
$$P^+(\beta) = \sum X(\alpha_1 \alpha_2; \beta) (P^+(\alpha_1) P^+(\alpha_2))_\beta \quad (A-11)$$

Para mayores detalles sobre este modelo se remite a la ref. [LP81].

Apéndice B

La simetría SU_3 y el operador cuadrupolar como generador de bandas rotacionales.

B.1 Antecedentes

La evidencia de comportamientos colectivos en los núcleos (momentos cuadrupolares altos, bandas rotacionales) que no podrían reproducirse con el modelo de capas para configuraciones puras, llevó a la necesidad de incluir la mezcla de configuraciones. Los cálculos convencionales del modelo de capas resultan muy engorrosos cuando intervienen varias configuraciones. En particular, para el ^{24}Mg , donde las capas d^8 , d^7s , d^6s^2 , etc. están todas mezcladas, se precisa diagonalizar matrices de 100×100 para obtener un espectro rotacional [E162].

Sin embargo, se pensaba en encontrar un método más simple para reproducir tan simples resultados. Es la teoría de grupos [E158] la que permitió derivar una clasificación para los estados con configuraciones $(l)^k$ y $(j)^k$, y también para mezcla de configuraciones, de manera que resulta simple construir las funciones de onda para muchos cuerpos en el núcleo.

La simetría SU_3 clasifica las funciones de partículas que se mueven en un potencial de oscilador armónico. La simplicidad de este modelo hace posible la construcción explícita de las funciones de muchos cuerpos de un sistema

en rotación, que además se pueden reconocer como resultado de la diagonalización de una interacción de dos cuerpos que reproduce los espectros rotacionales^[BM75]. En efecto, Elliott^[E158] demuestra que la diagonalización de la interacción cuadrupolar (Q.Q) en el modelo de capas reproduce las características colectivas de la dinámica nuclear.

B.2 Las representaciones irreducibles de los grupos S_k y U_n

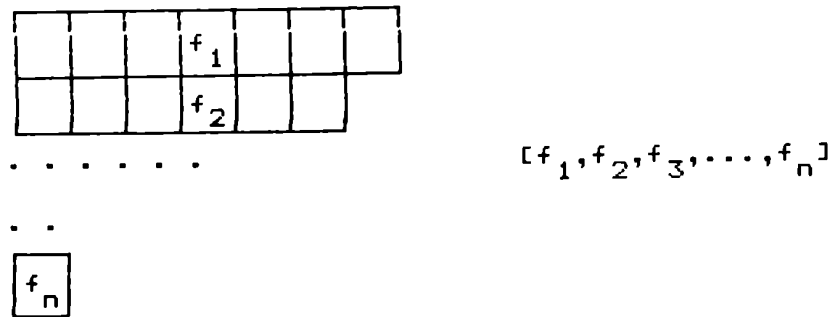
Consideremos k partículas en una misma capa del oscilador con momento angular j ($(j)^k$). La función de onda total tiene una parte orbital y otra de espín (o espín - carga).

Podemos clasificar las funciones según la simetría frente a la permutación de coordenadas. El grupo de simetrías correspondiente es el S_k . Las representaciones irreducibles de S_k están dadas por las particiones (clases) posibles de k :

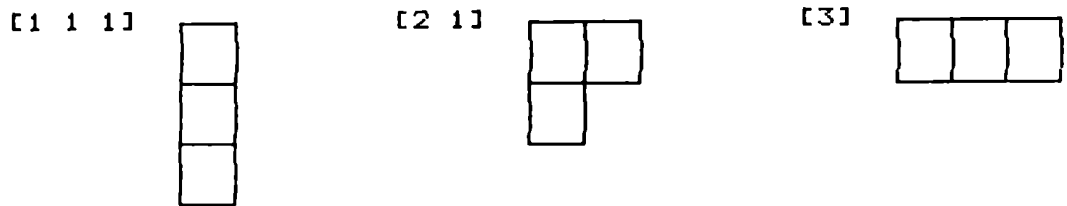
$$k = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n ,$$

(f_i entero no negativo) con $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n$

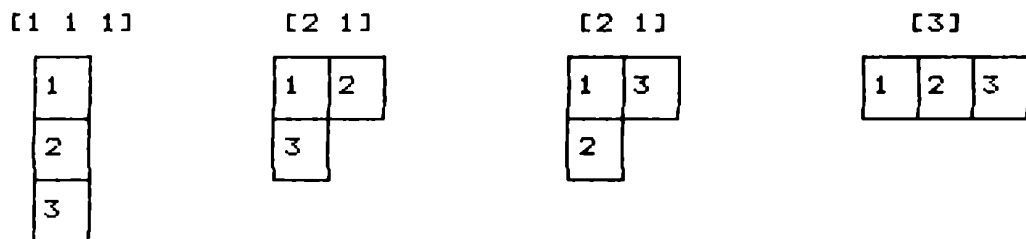
Una partición se puede visualizar mediante un tablero de Young en el cual los cuadros se disponen en filas y columnas con f_i cuadros ocupando las f_i posiciones de la fila i ;



Por ejemplo, si $k=3$, hay tres particiones



Podemos distinguir en la forma $[f]$ arreglos particulares de las partículas. Un tablero standard consiste en un arreglo en el cual los números asociados con los cuadros crecen de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Para el ejemplo $k=3$, tenemos:



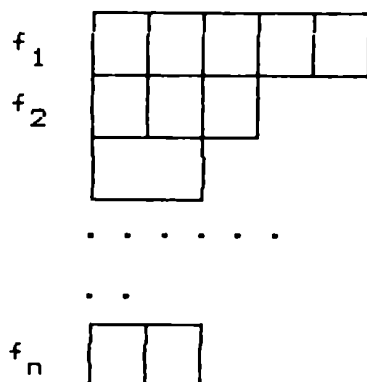
denotamos con $\alpha_{[f]}$ el número de tableros standard posibles para cada forma $[f]$.

Consideremos ahora la parte orbital de la función de onda de partícula independiente ψ_m^1 . Las funciones ψ_m^1 generan un espacio vectorial de n dimensiones ($n=2l+1$). La

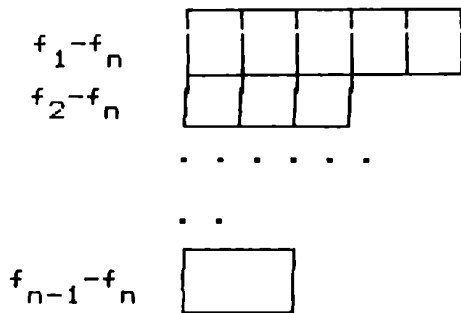
función de onda total se construye como un producto de estas funciones y se transforma como un tensor de rango k . Estos tensores se pueden clasificar por su simetría $[f]$ con respecto al grupo de simetrías S_k . Se puede demostrar^[E162] que los tensores de simetría $[f]$ proveen también una base para una representación del grupo de transformaciones unitarias U_n . Estas transformaciones preservan el producto escalar en ese espacio.

Las representaciones irreducibles de U_n resultan también representaciones irreducibles de SU_n (grupo especial de transformaciones unitarias en n dimensiones). Sin embargo, algunas representaciones no equivalentes para U_n , lo son para SU_n . En SU_n , la representación caracterizada por un tablero con n filas es equivalente al mismo tablero pero al que se le han quitado todas las columnas con n cuadros.

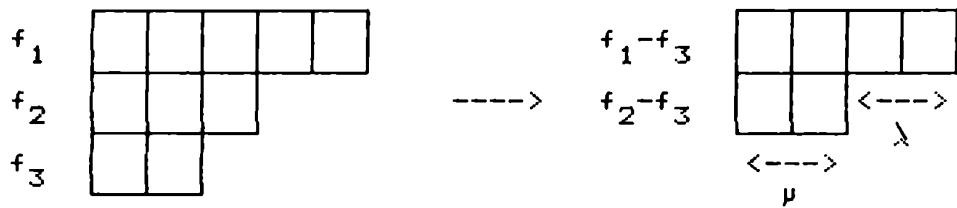
Por ejemplo si el tablero original de U_n es



el correspondiente a SU_n es



Para el grupo SU_3 es necesario un par de números: $\lambda = f_1 - f_2$
 y $\mu = f_2 - f_3$



Se define la partición adjunta $[\tilde{f}]$ como la correspondiente a cambiar filas por columnas en la representación $[f]$. Se puede demostrar [E1...] que la función de onda totalmente antisimétrica caracterizada por la partición $[111...1]$ sólo puede obtenerse del producto $[f] \times [\tilde{f}] = [111...1] + \dots$

Si la parte orbital de la función de onda se caracteriza con $[f]$ y la parte de espín - carga por $[\tilde{f}]$, la función de onda totalmente antisimétrica se escribe

$$\psi = \frac{1}{(\alpha_{[f]})^{1/2}} \sum_r X_r^{\tilde{f}} [\tilde{f}] \psi_r [f], \quad (B.1)$$

donde la suma es sobre todas las filas de la representación $[f]$.

B.3 Clasificación de funciones que dan espectros rotacionales

Dado que los efectos rotacionales son producidos por las fuerzas centrales, se pueden despreciar en primera aproximación los efectos de la parte de espín - carga pues sólo afectarán los detalles del espectro [El62]. Pasamos entonces a clasificar los estados de k partículas $(l)^k$ en el espacio de n dimensiones ($n=2l+1$).

El grupo más general de transformaciones en este espacio que preserva la ortonormalidad de las funciones de onda ψ_m^l es el grupo de transformaciones unitarias U_n . Además, las funciones deben ser invariantes frente al grupo de rotaciones en tres dimensiones R_3 . La clasificación de las funciones según estos dos grupos no resulta, en general, completa, y se hace necesario encontrar uno o más subgrupos de U_{2l+1} , que a su vez contengan a R_3 , para tener una caracterización completa.

El caso más sencillo es la capa p ($l=1$) del oscilador. En este espacio las funciones quedan completamente clasificadas mediante los grupos U_3 y R_3 .

En la capa $s-d$, el problema se complica por la mezcla de configuraciones. Para esta capa el mayor grupo de transformaciones unitarias es el $U_{2s+1+2d+1}=U_6$. Se pueden encontrar varios grupos intermedios para la clasificación completa de las funciones de onda, sin embargo el grupo U_3 es el que permite reproducir en forma natural las características rotacionales.

Los operadores infinitesimales del grupo U_3 son H_0 , L_q y Q_q definidos por

$$H_0 = r^2 + b^4 p^2, \quad (\text{B.2.a})$$

donde b es el parámetro de tamaño del oscilador

$$L_q = (r \times p)_q, \quad (\text{B.2.b})$$

los componentes del momento angular, y

$$Q_q = (4\pi/5)^{1/2} (1/b^2) [r^2 Y_q^2(\theta_q, \varphi_q) + b^4 p^2 Y_p^2(\theta_p, \varphi_p)], \quad (\text{B.2.c})$$

es el tensor de segundo rango relacionado con las distorsiones cuadrupolares infinitesimales. Podemos ahora restringirnos a SU_3 , pues U_3 y SU_3 difieren en un cambio de fase físicamente irrelevante y tenemos una clasificación según

$$\begin{array}{l} U_n \quad \rightarrow \quad SU_3 \quad \rightarrow \quad R_3 \\ [f] \quad \rightarrow \quad (\lambda, \mu) \quad \rightarrow \quad L \end{array}$$

Los escalares $(L.L)$ y $(Q.Q)$ conmutan con L_q , pero sólo una combinación particular de ellos conmuta con Q_q :

$$G = (3/4) (L.L) + (1/4) (Q.Q). \quad (\text{B.3})$$

Este es el operador de Casimir, conmuta con todos los operadores infinitesimales del grupo y su valor numérico se

utiliza para caracterizar la representación:

$$g(\lambda\mu) = (\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu) + 3(\lambda + \mu). \quad (\text{B.4})$$

De la (B.3) podemos deducir los autovalores de $Q.Q$

$$\langle Q.Q \rangle = 4 g(\lambda\mu) - 3 L(L+1), \quad (\text{B.5})$$

con autofunciones que tienen $(\lambda\mu)$ y L definidos.

El operador $Q.Q$ para un nivel del oscilador toma la forma

$$Q.Q = (8/b^4) \sum_{i<j} r_i^2 r_j^2 P_2(\cos\theta_{ij}) + \text{términos de part.indep.} \quad (\text{B.6})$$

Este operador se puede identificar con la interacción de dos cuerpos responsable de la deformación del núcleo y que por lo tanto da origen a las bandas rotacionales ($E \propto L(L+1)$). En efecto el primer término de (B.6) se puede escribir

$$\sum_{i<j} r_i^2 r_j^2 P_2(\cos\theta_{ij}) = (3/8) \sum_{i<j} r_{ij}^4 + \text{términos de part.ind.} \quad (\text{B.7})$$

Si nos limitamos a hacer una expansión del potencial nuclear como un polinomio de cuarto orden

$$V(r_{ij}) = V_0 + V_1 r_{ij}^2 + V_2 r_{ij}^4, \quad (\text{B.8})$$

con $V_0 < 0$, $V_1 > 0$ y $V_2 < 0$, los primeros dos términos generan el campo esférico del oscilador y el último,

relacionado por (B.7) y (B.6) con el operador $Q.Q$, genera las bandas rotacionales de acuerdo a (B.5).

Las representaciones de R_3 , caracterizadas por el número cuántico L , que están incluidas en la representación $(\lambda\mu)$ de SU_3 están dadas por:

$$L = K, K+1, K+2, \dots, K+\text{máx}(\lambda, \mu) , \quad (\text{B.9})$$

donde el entero K es

$$K = \text{mín}(\lambda, \mu), \text{mín}(\lambda, \mu)-2, \dots, 1 \text{ ó } 0 , \quad (\text{B.10})$$

excepto cuando $K = 0$, en cuyo caso

$$L = \text{máx}(\lambda, \mu), \text{máx}(\lambda, \mu)-2, \dots, 1 \text{ ó } 0 , \quad (\text{B.11})$$

Esto muestra claramente que los valores de L contenidos en un cierto (λ, μ) forma una serie de bandas caracterizadas por K y que llegan hasta un valor

$$L = K + \text{máx}(\lambda, \mu). \quad (\text{B.12})$$

B.4 Base cartesiana

Los nueve operadores de este grupo (ec. B.1) se pueden escribir en función de operadores de creación y aniquilación de cuantos de energía en la base cartesiana.

Para la componente x, definimos

$$a_x^+ = (\sqrt{2} b)^{-1} (x - ib^2 p_x) \quad (\text{B.13})$$

$$a_x = (\sqrt{2} b)^{-1} (x + ib^2 p_x) .$$

Los nueve operadores del grupo U_3 se pueden escribir entonces en función de los operadores A_{ij} ,

$$A_{ij} = (1/2) (a_i^+ a_j + a_j a_i^+) , \quad (\text{B.14})$$

donde i, j corresponden a las direcciones x, y, z .

Estos operadores destruyen un cuanto en la dirección del eje j y crean uno en la dirección i .

Además, conmutan entre sí:

$$[A_{ij}, A_{kl}] = \delta_{jk} A_{il} - \delta_{il} A_{kj} , \quad (\text{B.15})$$

y por lo tanto describen un grupo.

Si nos restringimos a los operadores A_{ij} con traza nula sólo quedan ocho operadores que describen el grupo SU_3 [EL62].

Los operadores infinitesimales (B.2) se escriben ahora

$$H_0 = \sum_{i=1}^3 A_{ii} = A_{xx} + A_{yy} + A_{zz}$$

$$Q_0 = 2 A_{zz} - A_{xx} - A_{yy}$$

$$(i/\sqrt{6}) (Q_1 + Q_{-1}) = A_{yz} + A_{zy}$$

(B.16)

$$\begin{aligned}
(1/\sqrt{6}) (Q_{-1} - Q_1) &= A_{zx} + A_{xz} \\
(1/\sqrt{6}) (Q_2 + Q_{-2}) &= A_{xx} - A_{yy} \\
(i\sqrt{6})^{-1} (Q_2 - Q_{-2}) &= A_{xy} + A_{yx}
\end{aligned}
\tag{B.16}$$

$$i L_z = A_{xy} - A_{yx}$$

$$i L_x = A_{yz} - A_{zy}$$

$$i L_z = A_{zx} - A_{xz} .$$

Se puede verificar que los operadores Q_0 y $(Q_2 + Q_{-2})$ conmutan y por lo tanto es posible encontrar una base común que los diagonalice. En tal base se cumple

$$\langle Q_0 \rangle = \epsilon , \tag{B.17}$$

$$\frac{\langle Q_2 + Q_{-2} \rangle}{\sqrt{6}} = \sigma , \tag{B.18}$$

$$\langle H_0 \rangle = k N , \tag{B.19}$$

donde k es el número de partículas y N el número cuántico principal de la capa del oscilador. Llamando N_x , N_y y N_z al número total de cuantos en la dirección x , y , z , respectivamente, tenemos

$$N_x = \langle H_x \rangle = \langle A_{xx} \rangle$$

$$N_y = \langle H_y \rangle = \langle A_{yy} \rangle \quad (\text{B.20})$$

$$N_z = \langle H_z \rangle = \langle A_{zz} \rangle$$

$$k N = N_x + N_y + N_z ,$$

entonces,

$$\epsilon = 2 N_z - N_x - N_y = 3 N_z - k N \quad (\text{B.21})$$

$$\sigma = N_x - N_y . \quad (\text{B.22})$$

B.5 Propiedades del estado intrínseco. Elementos de matriz de Q.

Podemos clasificar las autofunciones según los valores decrecientes de N_z y N_x , lo cual es equivalente a clasificar según ϵ y σ . El estado con mayor N_z y N_x se denomina estado principal o intrínseco y para él se cumple

$$\epsilon = 2 \lambda + \mu \quad \sigma = \mu , \quad (\text{B.23})$$

con lo que

$$\lambda = N_z - N_x \quad (\text{B.24})$$

y

$$\mu = N_x - N_y .$$

Además el estado intrínseco diagonaliza simultáneamente los ejes Q_0 y $(Q_2 + Q_{-2})$ y verifica

$$Q_0 X = (2\lambda + \mu) X \quad (\text{B.25.a})$$

$$b^{-1/2} (Q_2 + Q_{-2}) X = \mu X \quad (\text{B.25.b})$$

$$b^{-1/2} (Q_2 - Q_{-2}) X = L_0 X \quad (\text{B.25.c})$$

$$Q_{\pm 1} X = \pm \sqrt{3} L_{\pm} X . \quad (\text{B.25.d})$$

El estado con máxima alineación en el eje z y axialmente simétrico pertenece a la representación $(\lambda, \mu=0)$. Las representaciones con $\mu \neq 0$ ($\lambda \neq 0$) corresponden a configuraciones no axialmente simétricas y las bandas asociadas a estas representaciones pueden contener varios estados con el mismo impulso angular I [BM75].

La función X no tiene buen momento angular, se lo puede desarrollar en términos de funciones con buen I y con proyección K sobre los ejes z y z' (fig B)

$$X = \sum_{K,L} a(K,L) \psi(KLK) . \quad (\text{B.26})$$

La inversa de esta relación (ver sección IV.2.4) es la integral de Hill-Wheeler

$$\psi(KLM) = \frac{2L + 1}{a(K,L)} \int D_{MK}^L(\Omega) X_{\Omega} d\Omega , \quad (\text{B.27})$$

donde los D_{MK}^L son los elementos de matriz de las rotaciones finitas [Ed57], y χ_Ω es la función de onda intrínseca rotada en un ángulo Ω ($\equiv \alpha, \beta, \gamma$ de Euler) respecto a los ejes fijos.

Los elementos de matriz de Q_q se evalúan mediante la integral de Hill-Wheeler

$$Q_q \psi(K, L, M) = \frac{2L + 1}{a(K, L)} \int Q_q D_{MK}^L(\Omega) \chi_\Omega d\Omega, \quad (B.28)$$

obteniéndose

$$Q_q \psi(K, L, M) = \sum \frac{2L + 1}{2L' + 1} C_{LM}^{L', M+q} \left[\frac{a(K, L')}{a(K, L)} \langle 2\lambda + \mu + L'(L'+1)/2 + 6 - L(L+1) \rangle \langle LK20 | L'K \rangle \psi(K, L', M+q) + \frac{a(K+2, L')}{a(K, L)} \langle LK22 | L'K+2 \rangle \cdot \psi(K+2, L', M+q) + \frac{a(K-2, L')}{a(K, L)} \langle LK2-2 | L'K-2 \rangle (\mu - K + 2) \psi(K-2, L', M+q) \right] \quad (B.29)$$

Cuando $\lambda \rightarrow \infty$

$$\langle KL'M | Q_q | KLM \rangle = \langle LM2q | L'M \rangle \left(\frac{2L + 1}{2L' + 1} \right)^{1/2} \langle LK20 | L'K \rangle \langle 2\lambda \rangle, \quad (B.30)$$

que es la forma que toma en el modelo rotacional [BM75] para una banda K y donde 2λ reemplaza al momento cuadrupolar en ese modelo. Esto es natural, ya que λ es una medida del exceso de cuantos en el eje z , es decir de la deformación de estado intrínseco.

REFERENCIAS

- [Al72] T.K.Alexander et al., Nucl.Phys **A179** (1972) 477
- [AS64] M.Abramowitz and I.E.Stegun, Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, Washington D.C. (1964).
- [AK84] A.Arima and S.Kubono, Cluster transfer reactions induced by heavy ions, in Treatise on heavy ion science, ed. D.A.Bromley, vol 1, p.615 (Plenum, New York,1984).
- [Au70] N.Austern, Direct nuclear reactions theories, Wiley Interscience,1970.
- [Ba] B.F.Bayman, Two nucleon transfer code TWOPAR, unpublished.
- [Ba76] J.Bang, C.H.Dasso, F.A.Gareev, M.Igarashi and B.S.Nilsson, Nucl.Phys. **A264** (1976) 157.
- [BK66] B.F.Bayman and A.Kallio, Phys.Rev. **156** (1966) 1121.
- [BM60] T.A.Brody and M Moshinsky, Tables of Transformation Brackets (Monografías del Instituto de Física, Mexico,1960).
- [BO27] M.Born and R.Oppenheimer, Ann.Physik **84** (1927) 457.
- [Ce74] A.E.Ceballos et al., Nucl.Phys. **A228** (1974) 216.
- [Ch76] L.T.Chua et al., Nucl.Phys. **A276** (1976) 243.
- [CS35] E.U.Condon and G.H.Shortley, The theory of atomic spectra (Cambridge University Press, Cambridge, 1935).
- [Da79] W.G.Davies et al.,Nucl.Phys. **A269** (1979) 477

- [DC85] G.Dodig-Crnkovic, F.A.Janouch, R.J.Liotta and L.J. Sibanda, Nucl.Phys. **A444** (1985) 419.
- [Dr71] O.Dragún et al., Nucl.Phys. **A176** (1971) 529.
- [DV] R.M.De Vries, código LOLA (inédito).
- [Ed57] A.R.Edmonds, Angular Momentum and Quantum Mechanics, Princeton University Press, (1957).
- [El58] J.P.Elliott, Proc.Roy.Soc. **A245**(1958)128 y 526.
- [El62] J.P.Elliott, Group Theory and the Nuclear Shell Model (Notas de curso). Escuela Latino - Americana de Física, Méjico (1962).
- [ES55] J.P.Elliott and T.H.R.Skyrme, Proc.Roy.Soc. **A232** (1955) 561.
- [F185] T.Flieshback and S.Okabe, Z.Phys.A. Atoms and Nuclei **320** (1985) 289.
- [Ga28] G.Gamow, Z.Phys. **51** (1928) 204.
- [GH65] N.K.Glendenning and K.Harada, Nucl.Phys. **72** (1965) 481.
- [G165] N.K.Glendenning, Phys.Rev. **137** (1965) B102
- [G175] N.K.Glendenning, Atomic Data and Nuclear Data Tables **16** (1975) 1.
- [G183] N.K.Glendenning, Direct Nuclear Reactions, Ac.Press Inc., N.Y.(1983).
- [Ha61] K.Harada, Prog.Theor.Phys.**26**(1961)667.
- [He86] M.W.Herzog et al., Nucl.Phys. **A448** (1986) 441
- [Hu68] F.Huitenberg et al., Nucl.Phys. **A111** (1968) 265.
- [Ic74] M.Ichimura et al., Nucl.Phys. **A294** (1974) 225.
- [In81] A.Insolia et al., Z.Phys. **301** (1981) 209.

- [JL82] F.A.Janouch and R.J.Liotta, Phys.Rev.C 25 (1982) 2123.
- [JR76] F.James and M.Roos, Minuit, a system for function minimization in the analysis of the parameter errors and correlations. Comp.Phys.Comm., vol X (1976) 343.
- [KH71] T.T.S.Kuo and G.H.Herling, Naval Research Laboratory Report 2258 (Washington, D.C.,1971)
- [Ku] P.D.Kunz, Code DWUCK5, comunicación privada.
- [Le82] S.M.Lenzi, Cálculo autoconsistente de los factores de forma para reacciones con transferencia de varios nucleones, Tesis de Licenciatura, UBA (1982).
- [Li80] R.J.Liotta et al., Symp. on pure and applied nuclear physics, Stockholm (1978), Nuovo Cim. Lett. 27 (1980) 100.
- [LP81] R.J.Liotta and C.Pomar, Nucl.Phys. A362 (1981) 137.
- [Ma64] H.J.Mang, Ann.Rev.Nucl.Sci. 14 (1964) 1.
- [Me65] A.Messiah, Mecánica Cuántica, Ed. Tecnos S.A., Madrid, 1965.
- [Mo59] M.Moshinsky, Nucl.Phys. 13 (1959) 104.
- [MS78] M.H.MacFarlane and S.C.Pieper, "Ptolemy, a program for heavy - ion Direct Reaction Calculations", ANL-76-11. Rev 1 Mathematics and Computers (UC-32).
- [Ne61] E.Newman et al., Nucl.Phys. 100 (1961) 225.
- [Ni55] S.G.Nilsson, Math.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk 29 (1955) n° 16.
- [Pa57] E.B.Paul, Phil.Mag., 2(1957)311.
- [Ph77] R.J.Philpott, Nucl.Phys. A291 (1977) 342.
- [PI79] W.T.Pinkston and P.J.Iano, Nucl.Phys. A330 (1979) 91.

- [Pr65] M.A.Preston, *Physics of the Nucleus*, Addison-Wesley (1965)
- [RS74] P.Ring and P.Scuck, *Z Phys.* **269** (1974) 323.
- [Sa70] K.Sasaki, S.Suekane and I.Tonozuka, *Nucl.Phys.* **A147** (1970) 45.
- [Sc76] P.Schuck et al., *Nuovo Cim.Lett.* **17** (1976) 107.
- [Ta52] I.Talmi, *Helv.Phys.Acta* **25** (1952) 185.
- [TA79] I.Tonozuka and A.Arima, *Nucl.Phys.* **A323** (1979) 45.
- [Te] J.E.Testoni, *Notas de curso* (inédito).
- [Th54] R.G.Thomas, *Prog.Theor.Phys.* **12**(1954)253.
- [Vi80] A.Vitturi et al., *Nucl.Phys.* **A340** (1980) 183.
- [ZK55] Zdenek Kopal, *Numerical Analysis* (Chapman and Hall, Ltd., London, 1955).

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer,

a mi comunidad de hermanos por haberme acompañado en este tiempo, sobre todo por haber intercedido por mí en la oración;

a mi esposo Daniel, por su amor y comprensión durante estos años y porque supo ser compañero en todo;

a Ernesto Maqueda, porque me dio la oportunidad de hacer esta tesis bajo su dirección, y por todo lo que aprendí de él en este tiempo, no sólo en el aspecto científico, sino también en el humano;

a Olga Dragún, por su invaluable colaboración en este trabajo, por el apoyo y la confianza que me brindó y, sobre todo, por lo cerca que estuvo en los momentos difíciles;

a Ben Bayman, por haberme permitido trabajar a su lado, por sus aportes al desarrollo de esta tesis y por su sencillez;

a Cayetano Pomar por su importante colaboración;

a Cristina Cambiaggio y Daniel Bes, por su apoyo y consejo;

a Susana Hernández, mi consejera de estudios, por su colaboración;

a la División de Física Nuclear Teórica del Departamento de Física de la CNEA por haberme permitido hacer uso de las instalaciones y por las discusiones

esclarecedoras sobre algunos temas'

a los amigos y compañeros del TANDAR, físicos y personal de apoyo;

a mis hijos, Lucía y Alfredo, porque son causa de alegría en todo momento;

a mi madre y mi familia, por su apoyo y comprensión;

a Dios, porque me trajo por este camino;

a todos, muchas gracias.