

Tesis de Posgrado

Estudio de la difusión atmosférica de contaminantes emitidos desde una fuente puntual ubicada cerca del suelo

Mazio, Carlos Alberto

1986

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias de la Atmósfera de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Mazio, Carlos Alberto. (1986). Estudio de la difusión atmosférica de contaminantes emitidos desde una fuente puntual ubicada cerca del suelo. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2043_Mazio.pdf

Cita tipo Chicago:

Mazio, Carlos Alberto. "Estudio de la difusión atmosférica de contaminantes emitidos desde una fuente puntual ubicada cerca del suelo". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1986.

http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2043_Mazio.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE METEOROLOGÍA

ESTUDIO DE LA DIFUSION ATMOSFERICA DE CONTAMINANTES
EMITIDOS DESDE UNA FUENTE PUNTUAL UBICADA CERCA DEL SUELO

Elaborada por el Licenciado Carlos Alberto Mazio para acceder
al Título de Doctor en Ciencias Meteorológicas

Director de Tesis: Dr. Nicolás A. Mazzeo



-1986-

- 2043 -
y.2

Registro 2043

INDICE

	Pág.
Resumen	1
I. INTRODUCCION	3
I.1. Presentación	3
I.2. Aspectos de la contaminación del aire	6
I.3. Modelos de difusión atmosférica	10
I.4. Objetivos	18
II. CAPA LIMITE PLANETARIA	21
III. ASPECTOS GENERALES DE LA DIFUSION ATMOSFERICA	29
III.1. Teoría del transporte-gradiente	29
III.2. Teoría estadística de la turbulencia	32
III.3. Hipótesis de la semejanza lagrangeana	36
IV. LA ECUACION SEMIEMPIRICA DE DIFUSION	39
V. DISTRIBUCION VERTICAL DE CONTAMINANTES EN LA ATMOSFERA	59
V.1. Difusividad de contaminantes igual a la del calor	59
V.2. Difusividad de contaminantes igual a la de la cantidad de movimiento	67

	Pág.
VI. VELOCIDAD DE TRANSPORTE DE LOS CONTAMINANTES EN LA ATMOSFERA	71
VI.1. Estratificación neutral	71
VI.2. Estratificación estable	74
VI.3. Estratificación inestable	74
VII. DISPERSION VERTICAL DE LOS CONTAMINANTES EN LA ATMOSFERA	78
VII.1. Estratificación neutral y estable	78
VII.2. Estratificación inestable	79
VIII. CONCENTRACION LATERAL INTEGRADA DE CONTAMINANTES EN EL AIRE	82
VIII.1. Estratificación neutral y estable	83
VIII.2. Estratificación inestable	83
IX. COMPARACION CON DATOS OBSERVACIONALES	85
X. CONCLUSIONES	92
AGRADECIMIENTOS	95
REFERENCIAS	96
APENDICES	107
TABLAS	146
FIGURAS	156
LISTA DE SIMBOLOS	164

APENDICES

	Pág.
A: Expresión de la variación vertical de la velocidad media del viento para una atmósfera estratificada inestablemente.	107
B: Solución de la ecuación diferencial homogénea (66) correspondiente a la concentración lateral integrada.	110
C: Cálculo de la altura y de la velocidad vertical de los contaminantes.	117
D: Obtención del parámetro "c", modificador de la velocidad del viento para transformarla en la del viento transporte.	122
E: Programa computacional destinado a obtener las integrales necesarias para el cálculo de la velocidad de transporte en condiciones inestables.	127
F: Obtención de la velocidad de transporte de los contaminantes en condiciones de estratificación atmosférica inestable.	131
G: Programas computacionales destinados a obtener la distancia adimensionalizada a la fuente de emisión en función de la altura adimensionalizada en situaciones estables e inestables.	137

TABLAS

	Pág.
I : Valores de la función $B(\bar{z}/z_0, z_0/L)$ y su forma funcional aproximada.	146
II : Valores de la distancia adimensionalizada a la fuente emisora (\bar{x}/z_0) y de la concentración lateral integrada adimensionalizada \bar{C}_y en función de la altura media adimensionalizada (\bar{z}/z_0) de los contaminantes, para distintas clases de estabilidad atmosférica (z_0/L) .	147
III : Valores de los parámetros Ri , l , u_* y Q para las diferentes rondas consideradas del Proyecto Prairie Grass.	151
IV : Valores experimentales de la concentración lateral integrada para las diferentes rondas consideradas.	152
V : Diferencias relativas entre los valores de la concentración lateral integrada de contaminantes estimados por el modelo y los observados en el Proyecto Prairie Grass (ϵ).	153
VI : Comparación entre las predicciones obtenidas mediante los modelos gaussiano y el "s", a través de la diferencia relativa entre los valores de la concentración lateral de contaminantes estimada y la observada en el Proyecto Prairie Grass.	155

FIGURAS

	Pág.
1 : Espectro de potencia de la velocidad del viento medido a 125 m (Var der Hoven, 1957).	156
2 : El exponente general s en función de la altura adimensionalizada (z/z_0) y del parámetro adimensional de la estabilidad atmosférica (z_0/L) , para los casos en que $K_z = K_h$ y $K_z = K_m$.	157
3 : La función adimensionalizada de la velocidad vertical del centro de masa de la nube de contaminantes: $0.74 \phi(\bar{z}, \zeta_0)$.	158
4 : El parámetro "c", modificador de la velocidad del viento para adaptarla al transporte de los contaminantes, en función del exponente general s .	159
5 : Diferencia adimensionalizada entre la velocidad media de transporte y la velocidad media del viento $[k(\bar{u}_T - \bar{u})/u_*]$ en función de la altura adimensionalizada (\bar{z}/z_0) , para diferentes (z_0/L) .	160
6 : La altura media de los contaminantes (\bar{z}/z_0) en función de la distancia horizontal a la fuente (\bar{x}/z_0) , para diferentes (z_0/L) .	161
7 : La concentración lateral integrada adimensional $(\bar{c}_y \equiv \frac{u_* z_0 c_y(x,0)}{k Q})$ en función de la distancia al emisor (\bar{x}/z_0) , para distintos (z_0/L) .	162
8 : Comparación entre las predicciones de la concentración lateral integrada adimensionalizada de los contaminantes (\bar{c}_c) con los valores observados (\bar{c}_e) .	163

RESUMEN

RESUMEN

La calidad del aire, de la que depende la vida, es una variable importante y reconocida por la sociedad moderna. En los países industrializados el nivel de la contaminación ambiental tiende a aumentar rápidamente. La contaminación atmosférica empezó a ser detectada como un aspecto importante de la degradación ecológica. Actualmente se ha diseminado a diferentes lugares del planeta.

Los contaminantes emitidos a la atmósfera desde diferentes tipos de fuentes se mezclan y transforman siendo difícil su identificación. Debido a ello, adquiere importancia la estimación cuantitativa de la concentración de los mismos en el aire. Con ese fin son utilizados los modelos de difusión atmosférica.

En este trabajo se presenta un modelo de difusión atmosférica para ser utilizado en la capa de superficie destinado a la estimación cuantitativa de la concentración lateral integrada de los contaminantes en el aire emitidos desde una fuente puntual continua ubicada cerca del suelo. Dicho modelo, obtenido a partir de la integración de la ecuación semiempírica parabólica de difusión, supone una distribución vertical potencial de la velocidad media del viento y del coeficiente vertical de difusión turbulenta. La solución plantea una variación vertical de tipo exponencial general de los contaminantes en el aire. Esta expresión depende de la velocidad media de transporte de los contaminantes y de la altura media de los mismos.

Se desarrollan diferentes expresiones para la estimación de la velocidad media de transporte, de la altura media de los mismos y del factor de forma de la distribución vertical de los contaminantes en función de la estabili-

CAPÍTULO I
INTRODUCCION

I. INTRODUCCION

I.1. Presentación

La contaminación del aire constituye un problema de importancia cada vez mayor, que se origina en las grandes ciudades y en los complejos industriales de diferentes países del mundo. Existen algunas entidades de diferentes niveles (estatal, industrial, académico) desarrollando tareas destinadas a incrementar los conocimientos sobre el tema con la finalidad de evaluar el problema y posibilitar la disminución de los niveles de concentración de contaminantes del aire. Sin embargo, en relación con esta temática, subsisten problemas políticos, legales y técnicos de variada complejidad.

Un área activa en esta problemática la constituyen los modelos de contaminación del aire. La utilización de "modelos" está muy extendida en diferentes actividades, conformando uno de los métodos destinados a una mejor comprensión y predicción del comportamiento de sistemas naturales y antropogénicos. Mediante la aplicación computacional, la utilización de modelos aplicados a sistemas complejos se ha convertido en una técnica muy utilizada en la actualidad.

Un modelo es una representación simplificada en las condiciones reales y contiene suposiciones y aproximaciones, y en algunos casos, constantes que deben ser evaluadas empíricamente. Los modelos utilizados para explicar y predecir el comportamiento de los contaminantes en la atmósfera pueden agruparse en:

- modelos destinados a predecir condiciones meteorológicas asociadas con la

contaminación del aire,

- modelos cuya finalidad es el pronóstico de la contaminación potencial de la atmósfera,
- modelos empíricos que relacionan las concentraciones de los contaminantes en el aire con variables meteorológicas,
- modelos basados en la teoría "K",
- modelos que se fundamentan en la hipótesis de la semejanza lagrangeana,
- modelos que describen la difusión de contaminantes emitidos instantáneamente a la atmósfera,
- modelos de "caja",
- modelos numéricos destinados a describir flujos en mesoescala,
- modelos que describen el transporte de contaminantes durante períodos largos de tiempo (o modelo de escala regional),
- modelos de contaminación global.

El objetivo fundamental de todo estudio de la difusión turbulenta atmosférica consiste en predecir las variaciones espaciales y temporales de las propiedades estadísticas de la distribución de la concentración de contaminantes en el aire emitidos desde diferentes tipos de fuentes.

Aunque existen algunos desarrollos teóricos (resumidos, por ej., por Monin y Yaglom, 1971), persisten diferentes dificultades en encontrar una solución completa y única a este problema. Por ello, en los casos prácticos, la predicción se basa en suposiciones y aproximaciones empíricas, en algunos casos no totalmente justificadas y algunas veces inconsistentes desde el punto de vista físico (Chatwin y Sullivan, 1979). Esto no resulta satisfactorio, pero en algunas condiciones la utilización de esas suposiciones y aproximaciones

determinan resultados razonables (Monin y Yaglom, 1971). Al no existir ningún procedimiento que establezca una base general destinada a la predicción de la difusión atmosférica, se requiere el planteo de nuevos desarrollos o de modificaciones de los existentes que posibiliten una más ajustada estimación cuantitativa de la concentración de contaminantes, aún en un rango limitado de condiciones.

Los modelos que describen el comportamiento de los contaminantes emitidos a la atmósfera desde fuentes puntuales de emisión, generalmente contienen algunas de las siguientes suposiciones:

- a) condiciones atmosféricas estacionarias,
- b) condiciones de homogeneidad horizontal,
- c) velocidad del viento y gradiente térmico vertical constantes con la altura (homogeneidad vertical),
- d) contaminantes sin "masa" y químicamente "inertes";
- e) velocidad de emisión despreciable,
- f) reflexión perfecta de los contaminantes en la superficie,
- g) difusión en la dirección del viento despreciable comparada con el transporte de los contaminantes por el viento,
- h) velocidad del viento diferente de cero,
- i) inexistencia de remoción de contaminantes de la atmósfera.

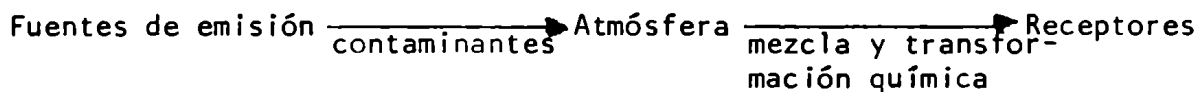
Las suposiciones a) y b) restringen el problema a períodos cortos de tiempo y áreas no muy extensas. La suposición c) es irreal debido a que la velocidad del viento aumenta con la altura en las capas de la atmósfera cercanas al suelo. Las d) y e) significan que el modelo no puede ser aplicado a la generalidad de los contaminantes. La f) e i) implican que los contaminantes quedan retenidos en la atmósfera. La suposición g) es razonable, excepto en condiciones

de viento débil. La h) significa que el modelo no es aplicable en condiciones de calma.

1.2. Aspectos de la contaminación del aire

La contaminación del aire puede ser definida como cualquier condición atmosférica que permita que ciertas sustancias alcancen concentraciones lo suficientemente elevadas, respecto de su nivel ambiental normal, como para producir efectos indeseables en el hombre, los animales, la vegetación o los materiales.

El proceso de la contaminación del aire puede ser presentado como un sistema integrado por los siguientes tres componentes básicos:



El origen de la contaminación del aire se encuentra en las fuentes de emisión. Las más importantes fuentes de emisión de contaminantes son:

- los transportes;
- la producción de energía eléctrica;
- la incineración de residuos;
- el consumo de combustibles industriales;
- los procesos industriales.

Los contaminantes son emitidos a la atmósfera, que actúa como medio para su transporte, difusión y transformación físico-química.

Los aspectos atmosféricos de la contaminación del aire pueden ser agrupados en: la química de la atmósfera, la meteorología y el transporte y dispersión de los contaminantes.

La química atmosférica comprende el estudio de los procesos de transformación que actúan sobre los contaminantes del aire. Estos procesos pueden ocurrir en períodos comprendidos entre unos segundos y varias semanas.

La meteorología comprende el estudio de la dinámica de la atmósfera, en particular del transporte de la cantidad de movimiento y de las transformacio-

nes energéticas. Los aspectos que interesan a la contaminación del aire en relación con las ciencias meteorológicas son los siguientes:

- a) identificación de los contaminantes, debido a que los mismos se mezclan en la atmósfera y algunos no son fácilmente medibles; los modelos de predicción pueden posibilitar la estimación de su nivel en el aire,
- b) identificación de las fuentes de emisión, mediante el trazado retrospectivo de trayectorias del aire a partir del lugar de detección de los contaminantes,
- c) establecimiento de normas de emisión que, es posible si se conoce la capacidad de dilución de la atmósfera,
- d) diseño y planificación de áreas industriales, contribuyendo a la ubicación de las plantas industriales respecto de zonas urbanas, de las chimeneas dentro de la planta fabril, la altura óptima de emisión, la velocidad de emisión y la temperatura de los contaminantes,
- e) planeamiento urbano, en lo referente a la ubicación de centros poblados, la diagramación de las calles y las condiciones de ventilación,
- f) emplazamiento de industrias, en relación con los estudios de factibilidad técnico-económico de las mismas incluyendo un análisis del impacto ambiental,
- g) ubicación de estaciones de monitoreo ambiental al que puede contribuir el conocimiento meteorológico del lugar,
- h) predicción de niveles de contaminación en función de la intensidad y ubicación de las fuentes de emisión y de las condiciones meteorológicas y topográficas del área,
- i) determinación de las tendencias de la contaminación y de esta manera evaluación de la efectividad de medidas de control.

El movimiento atmosférico puede clasificarse en diferentes escalas:

- macroescala o fenómenos que ocurren sobre miles de kilómetros de distancia,
- mesoescala o fenómenos que se desarrollan sobre centenares de kilómetros de distancia,
- microescala o procesos que ocurren sobre distancias inferiores a 10 kilómetros.

Los estudios realizados en 1957 por Van der Hoven (ver Necco, 1980), muestran que el espectro de potencia de la velocidad del viento (Figura 1) tiene dos máximos netamente diferenciados, uno correspondiente a un período aproximadamente equivalente al minuto y otro en aproximadamente 4 días, ambos separados por un extenso "valle espectral" con posibilidades de presentar algunas líneas espectrales (períodos diurno, semidiurno, etc.). El primer máximo mencionado ($T_p \approx 1 \text{ min}$), que corresponde a una dimensión o escala de longitud típica de aproximadamente 180 m, involucra la concentración energética de los procesos micrometeorológicos de tipo turbulento, así como las ondas acústicas y gravitacionales de período corto.

Cada una de las escalas de movimiento tiene una participación importante en el proceso de la contaminación del aire, a lo largo de diferentes períodos de tiempo. Por ejemplo, mientras los efectos micrometeorológicos ocurren en cuestión de minutos, los mesometeorológicos influyen en el transporte y la dispersión de los contaminantes durante horas o días y los de macroescala actúan en períodos que abarcan algunos días hasta varias semanas.

Por lo tanto, predecir el transporte y la dispersión de contaminantes requiere del conocimiento de los efectos del viento y de la turbulencia sobre las diferentes escalas del movimiento que actúan sobre las partículas o de las moléculas de gases en la atmósfera.

La parte de la atmósfera donde ocurren el transporte y la dispersión de los contaminantes es la denominada capa límite planetaria cuya altura es del orden de los 1000 m. Esta capa representa el límite de influencia de la superficie terrestre sobre el movimiento de la atmósfera. Dentro de la capa límite planetaria, el aire está sometido a la influencia de la dinámica de la atmósfera "libre" y a la resistencia debida al rozamiento del aire por acción de la superficie terrestre.

En relación con la contaminación del aire, es importante conocer la variación vertical de la velocidad y de la dirección del viento y de la temperatura en la capa límite planetaria. El perfil vertical de la temperatura del aire afecta a la estructura del viento y la turbulencia de esta capa de la atmósfera.

El fenómeno de mayor interés para el proceso de dispersión de los contaminantes, es la difusión turbulenta atmosférica, que se refiere a la dispersión de una nube de partículas "típicas" en un fluido en estado turbulento con una velocidad mucho mayor que la debida a la difusión molecular. Esta dispersión no está realmente producida por un fenómeno de "difusión" como el proveniente de colisiones moleculares, sino que es el resultado de un movimiento rápido e irregular de porciones macroscópicas de un fluido (denominados torbellinos) en régimen turbulento. Por lo tanto, las escalas de longitud en la difusión turbulenta son mucho mayores que las de la difusión molecular, siendo prácticamente despreciable la contribución de esta última a la dispersión de contaminantes en un régimen turbulento. El nivel de turbulencia en la capa límite planetaria aumenta con la velocidad del viento, con la rugosidad de la superficie y con la inestabilidad de la atmósfera. Por lo tanto, la turbulencia es originada por fuerzas mecánicas (cortante y rozamiento superficial) y térmicas (empuje vertical del aire).

1.3. Modelos de difusión atmosférica

Se describen a continuación en forma sucinta los rasgos generales de algunos modelos de difusión atmosférica, más comúnmente empleados que se agrupan de acuerdo a la metodología que utilizan:

1.3.1. Modelos analíticos

Carshaw y Jaeger (1959), Sutton (1953), Pasquill (1974), Beryland (1975), Nieuwstadt (1980) entre otros, presentan algunas soluciones analíticas de la ecuación parabólica de difusión atmosférica aplicada a casos especiales. El de mayor generalización es el tridimensional en condiciones atmosféricas estacionarias, con la velocidad media del viento (\bar{u}) y las difusividades turbulentas (K_y y K_z) variando con la altura (z). Beryland (1975) obtiene soluciones analíticas desarrollando un modelo de difusión mediante un detallado estudio de las difusividades turbulentas. Su objetivo consiste en proveer fórmulas simples para predecir las concentraciones máximas a nivel del suelo en función de parámetros relacionados con la fuente y las condiciones meteorológicas.

La solución analítica de la ecuación de difusión turbulenta ha sido tratada por diferentes autores (ver, por ej., Pasquill y Smith, 1983). Aparentemente, el primero en obtener una solución de la ecuación diferencial de difusión, posibilitando encontrar la concentración de contaminantes emitidos desde una fuente infinita perpendicular al viento a nivel del suelo, fue D.F. Roberts incluida en un trabajo sin publicar (ver Sutton, 1953). En ese caso, Roberts supone que la velocidad del viento y el coeficiente de difusión turbulenta varían potencialmente con la altura. El error involucrado en utilizar una

forma potencial vertical de la velocidad del viento no es considerable, especialmente en condiciones inestables (Deacon, 1948).

Frost (1946) presenta el tratamiento de la difusión atmosférica en una capa de superficie atmosférica aplicado a la obtención de distribución espacial de contaminantes emitidos desde una línea infinita de fuentes ubicada en el suelo y perpendicular a la dirección del flujo. Supone también, variaciones potenciales de la velocidad del viento y del coeficiente de difusión con la altura, vinculadas mediante la hipótesis de las potencias conjugadas de Schmidt (ver, Sutton, 1953). La forma de la distribución de la concentración tiende a la encontrada por Roberts en el caso en que los exponentes de \bar{u} y K_z sean diferentes. Aplica el modelo al problema de evaporación desde una superficie finita de agua.

Sutton (1932) encuentra una expresión destinada a obtener la distribución de contaminantes que emiten una línea de fuentes en forma continua. El procedimiento utilizado se basa principalmente en la teoría estadística de la turbulencia elaborada por Taylor (1921) y la solución encontrada tiende a una distribución gaussiana.

El problema bidimensional de la difusión de contaminantes es abordado por Deacon (1949), admitiendo que la cantidad de movimiento y la masa son transportadas similarmente. Utilizando un perfil vertical potencial de la velocidad del viento, cuyo exponente es un parámetro relacionado con la estabilidad atmosférica, obtiene una expresión funcional similar para la difusividad turbulenta de la cantidad de movimiento. Los resultados provenientes de la solución de la ecuación de difusión son comparados con la concentración lateral integrada de los contaminantes emitidos desde una fuente de emisión puntual

continua ubicada en una pradera en Alberta (Canadá). Se obtiene un buen ajuste para condiciones neutrales, pero considerables apartamientos de los valores observados en situaciones de inestabilidad atmosférica. Asimismo, se encuentra que los contaminantes disminuyen más acentuadamente con la distancia en condiciones reales que lo que predice la teoría.

Otra solución de la ecuación de difusión atmosférica utilizando leyes potenciales para la variación vertical de la velocidad del viento y de la tensión de superficie (τ_0) en la baja atmósfera para condiciones adiabáticas es presentada por Calder (1949). Admitiendo la ley de potencias conjugadas, encuentra que la concentración de contaminantes (C) está vinculada con la distancia (x) a la fuente, mediante la siguiente relación:

$$C \propto x^{-0.86}$$

La solución encontrada por Calder es un refinamiento de la obtenida por Bosanquet y Pearson (1936), quienes suponen que la velocidad media del viento es constante y la difusividad turbulenta varía linealmente con la altura.

Por otro lado, las soluciones encontradas por Rounds (1955) presentadas en forma de gráficos, permiten hallar la concentración a nivel del suelo de los contaminantes emitidos desde diferentes tipos de fuentes de emisión con alturas variables y difusividades turbulentas aumentando con la altura.

En un contexto más general, Smith (1957a) trata la ecuación bidimensional de difusión de contaminantes emitidos desde una línea de fuentes elevadas, utilizando la ley de potencias conjugadas de Schmidt. El análisis desarrollado por Smith incluye una presentación del denominado teorema recíproco que se aplica a la obtención de la distribución de la concentración a nivel del

suelo de contaminantes emitidos desde una altura arbitraria. Posteriormente, Smith (1957 b y c) trata la difusión vertical de contaminantes emitidos en una capa atmosférica, limitada por el suelo y la base de una inversión, utilizando distintas formas potenciales para la variación vertical de la difusividad turbulenta. Las soluciones encontradas están expresadas en forma de una serie que converge rápidamente y que puede ser evaluada adecuadamente con un número finito y relativamente pequeño de términos.

Asimismo, Davies (1950) encuentra una solución de la ecuación de difusión tridimensional para el caso especial en que la velocidad del viento y la difusividad varían potencialmente con la altura, vinculados sus exponentes a través de la ley de potencias conjugadas y con $K_y \propto z^m$. La solución encontrada no resulta aceptable, pues la concentración en el eje central de la pluma de contaminantes varía con $x^{-1.4}$, mientras que el valor empírico para distancias cortas está representado por $x^{-1.75}$ (Sutton, 1953). Davies demuestra que para satisfacer esta variación, es necesario que el exponente de K_y sea algo menor que 1. Una solución completa de la ecuación de difusión para valores generales y sin restricciones del exponente de z utilizado para K_y no fue aún obtenida.

1.3.2. Modelos numéricos

1.3.2.1. Cierre de primer orden

La hipótesis fundamental de que el flujo turbulento de contaminantes (por ej., $\overline{w'C'}$ flujo turbulento de contaminantes en la dirección vertical, z) es proporcional al gradiente de la concentración media (\bar{C}):

$$\overline{w'C'} = -K_z \frac{\partial \bar{C}}{\partial z}$$

denominada la teoría "K", constituye la base fundamental del cierre de primer orden. Mediante métodos numéricos aplicados a la resolución de la ecuación de difusión atmosférica que incluye la teoría "K", es posible obtener soluciones sin restricciones en la variabilidad espacio-temporal de K_z y \bar{u} . Sin embargo, es necesario una cuidadosa adaptación a las condiciones de estabilidad numérica. Por otra parte, como se mencionó anteriormente, el conocimiento actual de los campos de K_z y \bar{u} no es completo. Se han realizado muchos esfuerzos en el análisis de la inestabilidad numérica que provienen de esquemas de diferencias finitas, con el objetivo de minimizar sus consecuencias. Long y Pepper (1976) comparan varios de dichos esquemas y concluyen que los de segundo momento, de "spline" cúbico y de Crank-Nicholson proveen resultados satisfactorios. Smith (1972) revisó los valores de σ_z (coeficiente vertical de dispersión atmosférica) propuestos por Pasquill-Gifford (ver, por ej., Turner, 1970) adaptándolos a diferentes valores de la longitud de rugosidad de la superficie (z_0) utilizando los resultados provenientes de soluciones numéricas de la ecuación bidimensional de difusión y calculó σ_z a partir de la distribución vertical de contaminantes.

Labraga y Barrios (1979) desarrollaron un modelo de difusión de contaminantes reteniendo los efectos no lineales del campo de movimiento, perturbado por la emisión de una fuente lineal de contaminantes, empleando el método de diferencias finitas y aplicado a una situación de estabilidad atmosférica neutral. De acuerdo con los autores, sus resultados concuerdan con los modelos más simples.

1.3.2.2. Cierre de mayor orden

La teoría "K" no es siempre válida: por ejemplo, en la capa límite atmosférica diurna se observa un flujo de energía turbulento dirigido hacia mayores alturas contra el gradiente térmico (Deardorff, 1970). Por otro lado, K_z es una función de la altura y no siempre se conoce su variación en la capa de Ekman. Algunos de estos problemas son resueltos introduciendo modelos de cierre de orden mayor al primero, donde los términos de segundo orden, por ejemplo $\overline{w'c'}$, son retenidos, pero son reemplazados los de tercer orden, como ser $\overline{w'w'c'}$, en la ecuación del flujo de contaminantes, mediante aproximaciones tales como (Donaldson, 1973):

$$\overline{w'w'c'} = \sigma_z \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'c'})$$

El parámetro \mathcal{L} es una escala de longitud que, tiene menos variaciones que K_z . Donaldson (1973) revisó los principales parámetros básicos de los modelos de segundo orden y presenta algunos métodos para la estimación de \mathcal{L} . Teske y Lewellen (1976) utilizan el método de segundo orden en un modelo de crecimiento y difusión de una pluma de contaminantes con empuje en una atmósfera neutral.

1.3.3. Modelos seudoespectrales

Para eliminar los errores que introducen las diferencias finitas en la solución de la ecuación de difusión, algunos autores han utilizado modelos seudoespectrales. En dichos modelos, las derivadas espaciales en la ecuación de difusión son calculadas mediante transformadas finitas de Fourier (Christensen y Prahm, 1976). Estos autores muestran que este método de integración

numérica es ventajoso con respecto a la aproximación y al tipo de computación. Este modelo ha sido aplicado a problemas de difusión y depósito de contaminantes que se propagan a grandes distancias (Prahm y Christensen, 1977) sobre Europa, con resultados satisfactorios.

1.3.4. Modelos estadísticos

Un predictor matemático que describa la dispersión de los contaminantes en el aire en tiempo real puede estar basado, en general, en un modelo estocástico dinámico (ver, por ej., Box y Jenkins, 1970). Tales modelos pueden clasificarse en:

1.3.4.1. Modelos de "caja negra" del tipo ARIMAX (proceso autorregresivo integrado de promedios móviles con entrada exógena; ver, por ej., Finzi y otros, 1978). En tal representación, la concentración de los contaminantes para un instante dado es expresada como una combinación lineal de valores previos de la concentración más una combinación de emisiones actuales y anteriores más términos aleatorios (ruido), que son especificados estadísticamente. Los coeficientes de ambas combinaciones lineales dependen de las variables meteorológicas, en especial, de la velocidad del viento y de la estabilidad atmosférica. A su vez, para los predictores de viento se usan modelos estocásticos del tipo AR (autorregresivo) sea: i) simple, en el que la velocidad media del viento es expresada como una combinación lineal de sus valores anteriores más ruido blanco (término puramente aleatorio), ii) bivariado, en el que cada componente horizontal del viento se expresa mediante la combinación mencionada, y iii) del tipo ARMA bivariado, donde el ruido es un promedio móvil.

Bonivento y Tonielli (1982) comparan los resultados de i), ii) y iii), concluyendo que ii) suministra una significativa mejora en el pronóstico del viento con respecto a i), mientras que iii), aunque es más refinado, no permite, en general, un pronóstico más ajustado a los valores reales. Se encuentra que las correlatividades cruzadas entre las dos componentes del viento contienen una información importante a tener en cuenta.

1.3.4.2. Modelos de "caja gris", consistentes en una versión estocástica del esquema de solución numérica para la ecuación de difusión (ver, por ej., Bankoff y Hanzevack, 1975). La principal dificultad para resolver dicha ecuación mediante los esquemas convencionales de diferencias finitas radica en ajustar los términos advectivos, al entrar en competencia el espaciamiento impuesto para el retículo con el recorrido del contaminante en cada paso del tiempo usado. Esto genera una dispersión artificial numérica que es del mismo orden de magnitud que la calculada (ver, Roberts y Weiss, 1966). Aunque se han intentado varios algoritmos para superar esta dificultad, como sea la utilización de los tres primeros momentos de la distribución de la concentración en cada elemento de grilla (Egan y Mahoney, 1972) o esquemas euleriano-lagrangeano simultáneos (Lange, 1973), estos métodos tienen características insatisfactorias, como ser, su dependencia del método particular usado, restricciones severas de estabilidad numérica, dificultades en el tratamiento de las condiciones de contorno y complejidad en la programación de cálculo.

Soeda y Sawaragi (1982) han realizado la comparación entre las estimaciones de la concentración de los contaminantes en el aire para los modelos de regresión lineal múltiple, AR, ARIMA y el basado en el principio de per-

sistencia, que supone que los niveles de concentración futura son iguales a los niveles actuales (ver, Mc Collister y Wilson, 1975). Los valores encontrados por el modelo de regresión lineal múltiple resultan ser los que mejor coinciden con los reales, particularmente en los pronósticos de 3 horas en adelante. A pesar que el algoritmo GMDH (método grupal de manejo de datos), que construye la relación entrada/salida de un sistema usando una malla multicapa en la que cada elemento genera una función no lineal (generalmente de 2° orden) de sus entradas, es mejor que el modelo de regresión múltiple en cuanto a la exactitud del pronóstico, el tiempo de computación que emplea lo hace demasiado costoso.

1.4. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo consiste en generalizar la solución de la ecuación bidimensional de difusión atmosférica, cuando la velocidad media del viento y la difusividad turbulenta son expresadas por leyes potenciales de la altura, y es aplicada al cálculo de la concentración lateral integrada de los contaminantes emitidos continuamente desde una fuente puntual ubicada cerca del suelo.

Los principales parámetros involucrados en esa solución son: la velocidad de transporte de los contaminantes, el factor de forma de la distribución vertical y la altura media de los mismos.

Las hipótesis principales que se proponen desarrollar y verificar en este trabajo son las siguientes:

a) la velocidad efectiva con que la nube de contaminantes se propaga, repre-

senta la velocidad media del viento a una altura menor que la que corresponde a esa velocidad. Esto se debería al efecto de la superficie terrestre sobre el flujo del aire cerca del suelo. Para condiciones de estabilidad atmosférica tanto neutral como estable, sería posible obtener en forma analítica la velocidad de transporte de contaminantes, mientras que para situaciones inestables sería necesario efectuar las integraciones numéricamente, pudiéndose obtener, no obstante, expresiones funcionales analíticas interpoladoras en los valores hallados para el rango de interés, a los fines de la operatividad matemática posterior.

- b) El factor de forma de la distribución vertical de los contaminantes es una función de la estabilidad de la atmósfera, la distancia a la fuente de emisión y la rugosidad del terreno. Debido a que no existen mediciones directas de la difusividad turbulenta de contaminantes, se supondrá que es igual a la del calor (Monin y Yaglom, 1971), demostrándose que si se hubiese tomado igual a la de la cantidad de movimiento, se perdería generalidad. Las formas potenciales adoptadas tanto para la difusividad turbulenta para el calor como para la cantidad de movimientos estarían relacionadas con las expresiones semiempíricas adimensionalizadas de los perfiles de parámetros medios, deducidas de los valores medidos.
- c) La altura media de los contaminantes vinculada con la dispersión vertical, puede ser representada mediante la hipótesis de la semejanza lagrangeana como una función de la estabilidad de la atmósfera, de la distancia a la fuente y de la rugosidad del terreno. Para esto es necesario integrar numéricamente el cociente entre las expresiones halladas para la velocidad vertical de contaminantes, posibilitando obtener la trayectoria media de

ellos.

El conjunto de estos parámetros incluidos en la expresión destinada a obtener la concentración lateral integrada de los contaminantes emitidos des de una fuente puntual continua ubicada cerca del suelo, posibilitaría la estimación cuantitativa de esa concentración con una mejor aproximación que algunos de los métodos frecuentemente utilizados.

CAPÍTULO II

CAPA LIMITE PLANETARIA

II. CAPA LIMITE PLANETARIA

Si se define un nivel $z = z_i$ hasta el cual la fuerza de fricción tiene valores equivalentes a la fuerza bórica y de Coriolis, y por encima de dicho nivel, es despreciable en relación con ellas (y por lo tanto el viento observado se aproxima al geostrofico), se puede dividir a la atmósfera en dos estratos, para su estudio: la capa límite planetaria ($z < z_i$) y la atmósfera libre ($z > z_i$).

La altura típica de la capa límite planetaria es aproximadamente 1 km y su característica esencial es su estado turbulento. En general, es común dividir esta capa en una capa límite de superficie (de altura no mayor que 100 m) en donde los efectos de la fuerza de Coriolis son despreciables, y otra situada por encima de ésta, en donde estos efectos se hacen significativos, definiendo la capa espiral o de Ekman.

En la capa de superficie, los flujos de la cantidad de movimiento, del calor, del vapor de agua, pueden considerarse constantes. El transporte de la cantidad de movimiento a través de la capa hacia la superficie ejerce una fuerza de arrastre por unidad de área (τ) llamado esfuerzo superficial (o tensión de Reynolds):

$$\tau \equiv -\rho \overline{u'w'} \quad (1)$$

definido por la correlación entre componentes turbulentas de la velocidad (u' según el eje x , w' según el eje z ; ρ es la densidad del fluido).

Una fuerza horizontal constante aplicada durante cierto tiempo en la parte superior de una capa de un fluido produce una deformación, caracterizada por el perfil vertical de la velocidad media horizontal (los valores medios se

denotan con una barra superior, por ejemplo: \bar{u}). Así, se puede encontrar que:

$$\tau = \mu_D \frac{d\bar{u}}{dz} \quad (2)$$

con μ_D coeficiente de viscosidad dinámico.

Por analogía con la ley newtoniana de la viscosidad molecular, Boussinesq (1897) propuso agregar a (2) un término que representara el efecto de la viscosidad turbulenta:

$$\tau = (\mu_D + A) \frac{d\bar{u}}{dz} \quad (3)$$

donde A es el coeficiente viscoso de intercambio turbulento. En forma análoga a la teoría molecular, es conveniente definir un coeficiente de viscosidad turbulento cinemático (K_m):

$$A \equiv \rho K_m \quad (4)$$

en el que el subíndice 'm' indica que este proceso de intercambio se refiere a la transferencia de la cantidad de movimiento. En consecuencia, en la capa de superficie puede suponerse que $\mu_D \ll A$ (flujo aerodinámico rugoso). De esta forma:

$$\tau \equiv \tau_0 = \rho K_m \frac{d\bar{u}}{dz} \quad (5)$$

donde τ_0 es la tensión de corte en la capa de superficie.

Es común introducir la velocidad de fricción (u_{*}) como una escala

conveniente de velocidad:

$$u_* \equiv \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (6)$$

que es independiente de la altura en la capa de superficie.

Combinando las dos últimas expresiones, se obtiene:

$$K_m \frac{d\bar{u}}{dz} = u_*^2 \quad (7)$$

Mediante el análisis dimensional, Prandtl (1932) encontró que K_m tiene dimensiones de una velocidad por una longitud. De esta forma puede escribirse:

$$K_m \propto u_* z$$

o también

$$K_m = k u_* z \quad (8)$$

donde k es una constante de proporcionalidad, llamada k de von Kármán (véase, p. ej., Mazzeo, 1982 a). Reemplazando en (7) resulta:

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{kz} \quad (9)$$

Suponiendo $\bar{u} = 0$ en $z = z_0$, e integrando se obtiene:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (10)$$

que constituye el conocido perfil vertical logarítmico de la velocidad del viento.

Los valores de las constantes k y z_0 (longitud de rugosidad) no están dadas por la teoría y, en consecuencia, deben determinarse experimentalmente aunque su significado físico sea algo confuso.

A esta capa de superficie se la puede denominar neutral, porque en la estructura de la turbulencia se despreció la influencia del flujo turbulento de calor.

Se ha mencionado que la energía turbulenta de origen mecánico está asociada con el perfil vertical del viento ($d\bar{u}/dz$) mediante el esfuerzo τ_c . En presencia de una atmósfera diabática, la energía turbulenta además está afectada por las fuerzas de empuje. El número de Richardson en forma de gradiente que puede ser expresado mediante:

$$Ri = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\overline{\partial \bar{\theta} / \partial z}}{(\partial \bar{u} / \partial z)^2} \quad (11)$$

o en forma de flujo por:

$$Ri_f = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\overline{w' \theta'}}{\overline{u' w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} \quad (12)$$

son parámetros que caracterizan la turbulencia y la estabilidad atmosférica (positivo para situaciones estables y negativo para inestables). En las expresiones (11) y (12) $\bar{\theta}$ denota la temperatura potencial media, g es la aceleración de la gravedad y $\overline{w' \theta'}$ es el flujo vertical turbulento de la temperatura.

Obukhov (1946) introdujo la longitud que posteriormente será conocida

como de Monin-Obukhov (L), altura a la que la producción de energía debida al empuje es igual a la generada por la cortante. Por lo tanto, introduciendo la expresión (9) en la (12) resulta:

$$Ri_f = 1 = \frac{g}{\theta} \frac{\overline{w' \theta'}}{\overline{u' w'} \frac{u_*}{k L}}$$

pero, de (1) y (6) se encuentra:

$$\overline{u' w'} = -u_*^2 \quad (13)$$

y, en consecuencia:

$$L = - \frac{u_*^3}{k \left(\frac{g}{\theta} \right) \overline{w' \theta'}} \quad (14)$$

Se observa que el signo de L dependerá del correspondiente a $\overline{w' \theta'}$: para flujos de calor hacia arriba (calentamiento en superficie), o sea $\overline{w' \theta'}$ positivo habrá movimientos verticales ascendentes y, por lo tanto, inestabilidad atmosférica, resultando $L < 0$, coincidiendo con el signo del número de Richardson. Lo contrario es válido para los casos de estabilidad de la atmósfera.

Un objetivo importante en los estudios micrometeorológicos consiste en obtener los flujos turbulentos (de cantidad de movimiento, de calor, etc.) a partir de los perfiles de parámetros medios. Las formas adimensionales de estos perfiles podrían expresarse respectivamente de la siguiente forma:

$$\phi_m \equiv \frac{kz}{u_*} \frac{d\bar{u}}{dz} \quad (15)$$

$$\phi_h \equiv \frac{z}{\theta_*} \frac{d\bar{\theta}}{dz} \quad (16)$$

donde $\theta_* \equiv - \frac{\overline{w' \theta'}}{k u_*}$ es la temperatura característica. (17)

Aunque se han realizado muchos esfuerzos para obtener soluciones analíticas de estos perfiles adimensionales hasta el presente, sólo se disponen de relaciones semiempíricas, en función de la altura adimensional $\eta \equiv z/L$. Según Businger y otros (1971), las expresiones aproximantes para ϕ_m , en condiciones atmosféricas neutras, inestables o estables son:

$$\phi_m = (1 - 15 \eta)^{-1/4} \quad \text{para } \eta < 0 \quad (18)$$

$$\phi_m = 1 + 4.7 \eta \quad \text{para } \eta > 0 \quad (19)$$

y

$$\phi_h = 0.74 (1 - 9 \eta)^{-1/2} \quad \text{para } \eta < 0 \quad (20)$$

$$\phi_h = 0.74 + 4.7 \eta \quad \text{para } \eta > 0 \quad (21)$$

Por lo tanto de (18), (19) y (15) pueden obtenerse los perfiles de la velocidad del viento. Para casos estables, se puede escribir:

$$\phi_m \equiv \frac{kz}{u_*} \frac{d\bar{u}}{dz} = 1 + 4.7 \eta$$

$$d\bar{u} = \frac{u_*}{k} \left[\frac{dz}{z} + \frac{4.7}{L} dz \right]$$

integrando entre z_0 y z , y llamando $\zeta_0 \equiv z_0/L$, se obtiene:

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} \left[\ln \left(\frac{z}{z_0} \right) + 4.7 \eta - 4.7 \zeta_0 \right]$$

y, como en general $\zeta_0 \ll \eta$, resulta la expresión (Businger, 1973):

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} \left[\ln \left(\frac{z}{z_0} \right) + 4.7 \eta \right] \quad \text{para } \eta > 0 \quad (22)$$

obteniéndose la expresión (10) para los casos neutrales cuando $\eta \rightarrow 0$.

Para los casos inestables puede realizarse una deducción similar, (ver Apéndice A), obteniéndose la expresión desarrollada por Benoit (1977) para el perfil del viento:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \left\{ \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) + \ln \left[\frac{(1 + \mu_0)^2 (1 + \mu^2)}{(1 + \mu)^2 (1 + \mu_0^2)} \right] + 2 [\arctg(\mu) - \arctg(\mu_0)] \right\} \quad \text{para } \eta < 0 \quad (23)$$

$$\text{con } \mu \equiv (1 + 15 |\eta|)^{1/4} \quad (24)$$

$$\mu_0 \equiv (1 + 15 |\zeta_0|)^{1/4} \quad (25)$$

Si se cumple $|\zeta_0| \ll |\eta|$, resulta $\mu_0 \rightarrow 1$ y:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \left\{ \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) + \ln \left[\left(\frac{2}{1 + \mu} \right)^2 \cdot \frac{2}{(1 + \mu^2)} \right] + 2 \left[\arctg(\mu) - \frac{\pi}{4} \right] \right\}$$

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \left\{ \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) + 2 \arctg(\mu) - \frac{\pi}{2} - \ln \left(\frac{1 + \mu^2}{2} \right) - 2 \ln \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \right\} \quad (26)$$

que es la expresión encontrada por Paulson (1970).

CAPÍTULO III

ASPECTOS GENERALES DE LA DIFUSION ATMOSFERICA

III. ASPECTOS GENERALES DE LA DIFUSION ATMOSFERICA

La investigación teórica de la difusión atmosférica está dirigida al desarrollo de métodos que permitan la estimación cuantitativa de la concentración de contaminantes en aire en condiciones medias ideales (generalmente con terreno liso y uniforme y en una atmósfera en estado estacionario).

Hasta la actualidad, el tratamiento teórico de la difusión atmosférica en un flujo turbulento se ha desarrollado, siguiendo tres líneas principales:

- a) la relación "transporte-gradiente", mediante la cual el flujo turbulento de los contaminantes a través de un plano está representado por el producto de la difusividad turbulenta o coeficiente de difusión (K) y el gradiente de la concentración media de los contaminantes (\bar{C}) en la dirección perpendicular al flujo (Pasquill, 1974);
- b) la teoría estadística de la turbulencia, que comprende las leyes de las velocidades y de las trayectorias de las partículas "típicas" en un fluido (Sutton, 1953);
- c) la hipótesis de la semejanza lagrangeana (Pasquill, 1970).

;

III.1. Teoría del transporte-gradiente

El caso más general de difusión, en tres dimensiones, en el cual el coeficiente de difusión (K) puede variar con las tres coordenadas espaciales, se puede expresar matemáticamente de la siguiente forma:

$$\frac{d\bar{C}}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) \quad (27)$$

donde t es el tiempo e y es el eje de coordenadas horizontal y perpendicular a x .

Si $K_x, K_y, K_z = K = \text{cte}$, la difusión se denomina fickiana, en honor de A. Fick, quien planteó el caso unidimensional de la siguiente forma (Slade (ed), 1968):

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = K \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \quad (28)$$

El coeficiente K puede ser pensado como una medida del flujo de la cantidad escalar pasiva \bar{c} . Esta cantidad, por definición, no afecta la dinámica del movimiento del aire, pero es transportada por éste. En consecuencia, cuando la turbulencia es esencialmente mecánica $K = K_m$, donde K_m es la difusividad turbulenta para la cantidad de movimiento; pero cuando hay un marcado transporte turbulento de calor $K = K_h$, con K_h igual a la difusividad turbulenta para el calor. Debido a las limitaciones existentes para la evaluación de K_h surgidas en la dificultad para medir el flujo de calor en la atmósfera, esta distinción es sólo teórica. En la práctica, los valores de K son generalmente impuestos a partir de datos observacionales de difusión.

La solución de la ecuación (28) para una fuente puntual instantánea, de emisión Q , es gaussiana y se expresa (Sutton, 1953):

$$\bar{c} = \frac{Q}{\sqrt{4\pi K t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4 K t}\right) \quad (29)$$

Para el caso tridimensional y no isotrópico, la solución es:

$$\bar{c}(x, y, z, t) = \frac{Q}{(4\pi t)^{3/2} (K_x K_y K_z)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{4t} \left(\frac{x^2}{K_x} + \frac{y^2}{K_y} + \frac{z^2}{K_z}\right)\right] \quad (30)$$

Estos son los pilares fundamentales de la teoría de difusión fickiana. La integración de una de estas soluciones para una fuente puntual instantánea con respecto al espacio, permite obtener las ecuaciones para fuentes no puntuales e instantáneas. Si se integra respecto al tiempo, se hallará la solución para una fuente puntual continua.

La suposición de una difusividad turbulenta constante, si bien puede ser útil en la atmósfera libre, apenas puede ser aplicada en la capa límite planetaria, la cual está caracterizada por un marcado perfil vertical de la velocidad del viento y por grandes variaciones verticales de la temperatura debidas al flujo de calor.

El efecto de la cortante del viento ha sido considerado por Roberts, quien además utilizó una ley potencial para representar K_z (Sutton, 1953).

Una extensión de la teoría K, teniendo en cuenta la rugosidad de la superficie fue desarrollada por Calder (1949), quien supuso una ley potencial para el perfil del viento de la siguiente forma:

$$\bar{u} = u_* r' \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\alpha'} \quad (31)$$

y seleccionó las constantes r' y α' que mejor ajustaran al perfil logarítmico del viento. Sus soluciones son complejas, pero sobre terreno uniforme se obtiene una buena verificación experimental hasta 1 km de distancia de una línea de emisión en una atmósfera neutralmente estratificada.

La variación con la estabilidad atmosférica fue introducida por Deacon (1949), quien encontró una solución para una fuente lineal infinita cruzada al viento ubicada en superficie, utilizando la relación (31) y la siguiente expresión para la difusividad turbulenta:

$$K(z) = k u_* z_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\beta'} \quad (32)$$

determinando β' y α' a partir de perfiles verticales la velocidad del viento en condiciones diabáticas.

La teoría K es ampliamente aplicada en estudios de evaporación y de conducción del calor desde la superficie terrestre considerada como una fuente infinita, horizontal y plana.

Todas las derivaciones de la teoría K dependen en última instancia de la validez de suponer un transporte gradiente simple, o sea, que el flujo de una variable turbulenta es proporcional al gradiente del campo medio de ese parámetro.

Priestley (1959) señala que no hay bases físicas precisas para el uso de esta suposición ya que la fundamentación para una descripción de la difusión turbulenta en la atmósfera y, consecuentemente, la validez de la teoría K, es "normalmente juzgada por el grado de éxito alcanzado en ... la predicción de un fenómeno particular de difusión".

III.2. Teoría estadística de la turbulencia

La teoría estadística de la turbulencia comprende una extensa e importante línea de investigación y sus resultados son aplicados en diversas áreas, desde la oceanografía hasta la cosmología.

La aplicación de la teoría estadística de la turbulencia a problemas de difusión difiere considerablemente de la hipótesis del transporte-gradiente. En lugar de estudiar los flujos de la cantidad de movimiento o de materia en un punto fijo del espacio, considera la historia del movimiento de partículas individuales de fluido y trata de determinar a partir de ella, las propiedades es-

tadísticas necesarias para representar los procesos de difusión.

Un flujo turbulento homogéneo es aquél en el cual las propiedades estadísticas son independientes de la posición. La turbulencia en la parte superior de la capa límite planetaria puede ser considerada aproximadamente homogénea, pero la turbulencia en la capa de superficie es inhomogénea. La idea de la homogeneidad de la turbulencia es una simplificación introducida a la teoría para posibilitar su tratamiento matemático.

Taylor (1921) desarrolló un teorema que ha tenido gran influencia en los trabajos posteriores en este campo, tanto teóricos como prácticos. En el mismo, se analiza el movimiento de una partícula identificada, químicamente inerte, de tamaño y masa despreciables, transportada por la atmósfera. Considerando que la velocidad del viento puede expresarse como la suma entre un valor medio y una fluctuación turbulenta (Reynolds, 1894), y suponiendo que el eje x se encuentra en la dirección del viento medio, las componentes de la velocidad según x , y , z serán, respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \bar{u} + u' \\ v = v' \\ w = w' \end{array} \right. \quad (33)$$

donde el primado indica fluctuación turbulenta.

La distancia y hasta la cual la partícula es transportada desde el origen por las fluctuaciones turbulentas (v') de la componente lateral del viento durante el intervalo de tiempo t , será:

$$y(t) = \int_0^t v'(t) dt \quad (34)$$

El parámetro estadístico más simple que representa este proceso irregular es la dispersión cuadrática media, que resultaría de un gran número de repeticiones independientes, de la distribución resultante de partículas a lo largo del eje y . Luego:

$$\frac{\overline{dy^2}}{dt} = 2 \overline{y \frac{dy}{dt}} = 2 \overline{y v'} = 2 \int_0^t \overline{v'(t)v'(t+\xi)} d\xi \quad (35)$$

donde ξ es un período de tiempo.

Si la turbulencia es homogénea y estacionaria, es decir, si las propiedades medias son uniformes en el espacio y estacionarias en el tiempo, el producto de las velocidades puede ser reemplazado por $\overline{v'^2} R_L(\xi)$, donde:

$$R_L(\xi) = \frac{\overline{v'(t) v'(t+\xi)}}{\overline{v'^2}} \quad (36)$$

es el coeficiente de autocorrelación de tipo lagrangeano. Con $R_L(\xi)$ y $\overline{v'^2}$, ambos independientes del tiempo, surge de (35):

$$\begin{aligned} \frac{\overline{dy^2}}{dt} &= 2 \overline{v'^2} \int_0^t R_L(\xi) d\xi \\ \overline{y^2} &= 2 \overline{v'^2} \int_0^T \int_0^t R_L(\xi) d\xi dt \end{aligned} \quad (37)$$

donde y es ahora la desviación de la partícula en el tiempo T . Cuando $\xi = 0$, $R_L(\xi) = 1$ y para ξ grande $R_L(\xi) = 0$; si $\xi > t_1$, se obtendrá:

$$\text{para } T \text{ pequeño} \quad \overline{y^2} = \overline{v'^2} T^2 \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \text{para } T \text{ grande} \quad \overline{y^2} &= 2 \left(\int_0^{t_1} R_L(\xi) d\xi \right) \overline{v'^2} T \\ &= 2 t_L \overline{v'^2} T \end{aligned} \quad (39)$$

donde $t_L \equiv \int_0^{t_1} R_L(\xi) d\xi$ es la escala temporal lagrangeana de la turbulencia.

Las estadísticas de los desplazamientos de estas partículas separadas como resultado del flujo medio solamente, son idénticas a las de los desplazamientos de una única partícula observada un gran número de veces. Esto surge en virtud de la suposición original de que $\overline{v'^2}$ para una partícula única es una constante, independiente del tiempo y representativa de todo el campo de la turbulencia.

Para tiempos de difusión grandes, se deduce de (39):

$$\overline{y^2}(t) = 2 K'_1 t \quad (40)$$

donde $K'_1 = \overline{v'^2} t_L$ es una constante. Así $\frac{1}{2} \frac{d\overline{y^2}}{dt}$ tiene dimensiones de una difusividad y en consecuencia K'_1 desempeña un papel similar al de K en la teoría fickiana:

$$\frac{1}{2} \frac{d\overline{y^2}}{dt} = K'_1 = K \quad (41)$$

Este argumento permite que la teoría fickiana, en la cual K (coeficiente de difusión) es una constante, se aplique cuando $t \gg t_L$.

Si fuera posible medir la función de autocorrelación lagrangeana con precisión, los tiempos de difusión aplicables podrían ser determinados, pero esto no es simple de realizar.

III.3. Hipótesis de la semejanza lagrangeana

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, los métodos estadísticos aplicados a la difusión dependen, de la estacionalidad y de la homogeneidad de la turbulencia. Sin embargo, la capa límite planetaria, y particularmente la capa de superficie, está caracterizada por una marcada inhomogeneidad de la turbulencia en la dirección vertical como resultado del perfil vertical de la velocidad del viento y de la temperatura.

La hipótesis de la semejanza lagrangeana aplicada a la dispersión de partículas fue elaborada originalmente para describir la difusión vertical en condiciones de neutralidad atmosférica (Monin, 1959), y posteriormente extendida a una atmósfera estratificada térmicamente (Gifford, 1962; Pasquill, 1966; Klug, 1968; Mazzeo y Venegas, 1982; Mazzeo y Ulke, 1983).

Las principales dificultades de esta hipótesis se encuentran en la aplicación a la dispersión lateral (Mazzeo y Foppiano, 1982) y al flujo térmico estratificado (Mazzeo, 1982a). Sin embargo, en la estimación de la dispersión vertical cerca de la superficie terrestre, esta teoría provee resultados satisfactorios y se puede extender a diferentes tipos de rugosidad del suelo dentro de la capa de superficie. Asimismo, existen intentos de aplicación a la capa límite planetaria (Mazzeo y Venegas, 1980).

La teoría de la semejanza euleriana propuesta por Monin-Obukhov (citado por Mazzeo, 1982b) sostiene que las propiedades de la turbulencia atmosférica en la capa límite de superficie están determinadas por la altura (z), los flujos turbulentos verticales de la cantidad de movimiento ($-\rho \overline{u'w'}$) y de calor ($H_3 \equiv c_p \rho \overline{w'\theta'}$, con c_p el calor específico a presión constante) y el parámetro de empuje ($g/\bar{\theta}$).

Por otra parte, la hipótesis de la semejanza lagrangeana extiende esta propuesta a la difusión vertical de contaminantes en la capa de superficie. Postula que la variación temporal de la altura del centro de masa de la nube de contaminantes (\bar{z}) emitidos desde una fuente ubicada a nivel del suelo está representada por:

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = k u_* \phi(\bar{z}/L) \quad (42)$$

donde $\phi(\bar{z}/L)$ es una función de la estabilidad de la atmósfera que puede vincularse con el perfil adimensional de la temperatura (Mazzeo y Venegas, 1982). Se deduce de (42) que para la estratificación neutral ($L \rightarrow \infty$), $\phi(0) = 1$. Ante la imposibilidad de contar con datos experimentales de ϕ , se hicieron diferentes suposiciones respecto de su forma funcional; cabría mencionar como expresiones semiempíricas de ϕ a las dadas en los trabajos de Gifford (1962), Cermak (1963), Pasquill (1966), Klug (1968), Mazzeo (1978), entre otros.

Asimismo, la hipótesis supone que la variación temporal del desplazamiento medio horizontal (\bar{x}) de la nube de contaminantes está dado por la siguiente expresión:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{u}(c z) = u_T \quad (43)$$

donde c es un factor que depende principalmente de la estabilidad y u_T es la velocidad del viento transporte (Mazio y Mazzeo, 1983), que representa físicamente la velocidad de desplazamiento de una partícula "típica" del contaminante y cuyo valor coincide con la del viento pero a una altura modificada por el parámetro c .

Combinando las expresiones anteriores, se encuentra:

$$\bar{x} = \frac{1}{k u_*} \int_{z_0}^{\bar{z}} \frac{\bar{u}(c \bar{z})}{\phi(\bar{z}/L)} d\bar{z} \quad (44)$$

que permite obtener \bar{z} en función de \bar{x} , de la estabilidad de la atmósfera y de la rugosidad del terreno (z_0).

CAPÍTULO IV

LA ECUACION SEMIEMPIRICA DE DIFUSION

IV. LA ECUACION SEMIEMPIRICA DE DIFUSION

Las partículas emitidas a la atmósfera son dispersadas por acción de la turbulencia. El problema a tratar a continuación tendrá por finalidad encontrar el valor de la concentración (C) de contaminantes en el aire en cualquier tiempo y punto del espacio.

Utilizando el principio de conservación de la masa de contaminantes, que requiere que la masa específica (q_0) de una parcela del fluido se mantenga constante y, por lo tanto, que su derivada sustancial sea nula, se verifica:

$$0 = \frac{dq_0}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V C \, dV \quad (45)$$

siendo V el volumen de la parcela considerada.

Como la derivación se efectúa respecto a una parcela definida, las operaciones de diferenciación y de integración pueden intercambiarse. Luego, la expresión (45) queda:

$$0 = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \int_V \left[\frac{dC}{dt} \delta V + C \frac{d}{dt} (\delta V) \right]$$

Pero, por definición de la derivada del campo de velocidades (\vec{V}):

$$\lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} (\delta V) = \nabla \cdot \vec{V}$$

entonces, reemplazando, se obtiene:

$$0 = \int_V \left[\frac{dC}{dt} + C \nabla \cdot \vec{V} \right] dV$$

Como esta ecuación es válida para un volumen arbitrario, el integrando puede anularse y resulta:

$$0 = \frac{dC}{dt} + C \nabla \cdot \vec{V} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla C - C \nabla \cdot \vec{V} \quad (46)$$

Si se considera al fluido como incomprensible (Mazzeo, 1984) y que tanto la concentración (C) como la velocidad del mismo (\vec{V}) pueden expresarse como suma entre un valor medio (\bar{C} ; $\bar{\vec{V}}$) y una fluctuación turbulenta (C' ; \vec{V}') (Kampé de Fériet, 1951):

$$\begin{cases} C = \bar{C} + C' \\ \vec{V} = \bar{\vec{V}} + \vec{V}' \end{cases} \quad (47)$$

Reemplazando (47) en (46) y promediando, resulta:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = - \left[\bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{C} + \overline{\vec{V}' \cdot \nabla C'} + \overline{C' \nabla \cdot \vec{V}'} \right]$$

o también:

$$\frac{d\bar{C}}{dt} = -\nabla \cdot (\overline{\vec{V}' C'}) \quad (48)$$

Considerando la hipótesis del transporte-gradiente, que supone que el flujo turbulento de contaminantes en un punto fijo de la atmósfera es proporcional al gradiente de la concentración media local:

$$\overline{V_i' C'} = -K_{ij} \partial_j \bar{C} \quad (49)$$

donde $K_{ij} \equiv \mathbb{K}$ es un tensor que se considerará diagonal (Collder, 1949, Monin y Yaglom, 1971, Mazzeo, 1980), o sea, se despreciarán las difusividades de cortante, resulta:

$$\overline{\vec{V}' C'} = -(\mathbb{K} \nabla) \bar{C} \quad (50)$$

Reemplazando en (48), se obtiene la denominada ecuación semiempírica de difusión:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{C}}{dt} &= \nabla \cdot [\mathbb{K} \nabla \bar{C}] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (51)$$

que es la ecuación (27).

Este desarrollo puede encuadrarse dentro de las llamadas teorías de naturaleza euleriana ya que se relacionan las propiedades del movimiento del fluido en un sistema de coordenadas espaciales fijo.

Como se mencionó anteriormente, si los coeficientes K_x , K_y , K_z , llamados difusividad turbulenta según x , y , z , respectivamente, son constantes, la difusión se denomina fickiana y la ecuación resultante es similar a la de conducción del calor (con $\overline{\vec{V}} = 0$). El valor de esos coeficientes depende del tipo de turbulencia preponderante en el fenómeno: mecánica o térmica, aunque en este último caso, son difíciles de estimar.

Si se elige el eje x coincidiendo con la dirección del viento medio (\bar{u}), el eje z vertical positivo hacia arriba y suponiendo que las difusividades

K_y y K_z no son constantes, la ecuación de difusión cuando el caso es estacionario, quedará expresada de la siguiente forma:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) \quad (52)$$

donde se ha supuesto que la contribución de la velocidad del viento en el proceso de difusión en la dirección del viento es más efectiva que la propia difusión (Pasquill, 1974):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) \ll \bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}$$

A continuación se considerará el caso de una fuente ubicada en el origen de coordenadas emitiendo continuamente a la atmósfera un caudal (Q) de contaminantes, y que la velocidad media del viento es función de la altura ($\bar{u} = \bar{u}(z)$).

Integrando (52) respecto a la coordenada y resulta:

$$\bar{u}(z) \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{C} dy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \left(K_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} \left(K_z \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) dy$$

Sea:

$$C_y \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \bar{C} dy \quad (53)$$

la concentración lateral integrada, y suponiendo $K_z = K_z(z)$ (Smith, 1957), puesto que es proporcional al coeficiente de transferencia vertical para la cantidad de movimiento, entonces:

$$\bar{u}(z) \frac{\partial C_y}{\partial x} = K_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C_y}{\partial z} \right)$$

(el 1° término del 2° miembro es nulo pues la difusividad se anula en $y = \pm\infty$.)

En consecuencia queda:

$$\bar{u}(z) \frac{\partial C_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z(z) \frac{\partial C_y}{\partial z} \right] \quad (54)$$

Se supondrá que tanto el perfil de la velocidad del viento como la difusividad varían en forma potencial con la altura:

$$\bar{u}(z) = u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m \quad (55)$$

$$K_z(z) = K_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^n \quad (56)$$

con $\bar{u} = u_1$ y $K_z = K_1$ en la altura $z = z_1$. Reemplazando en (54) se obtiene:

$$\begin{aligned} u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m \frac{\partial C_y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[K_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^n \frac{\partial C_y}{\partial z} \right] \\ &= K_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^n \frac{\partial^2 C_y}{\partial z^2} + \frac{K_1}{z_1} n \left(\frac{z}{z_1} \right)^{n-1} \frac{\partial C_y}{\partial z} \\ \frac{u_1 z_1^{n-m}}{K_1} \frac{\partial C_y}{\partial x} &= z^{n-m} \frac{\partial^2 C_y}{\partial z^2} + n z^{n-m+1} \frac{\partial C_y}{\partial z} \end{aligned}$$

Reordenando los términos queda:

$$\frac{\partial^2 C_y}{\partial z^2} + \frac{n}{z} \frac{\partial C_y}{\partial z} - \frac{u_1 z_1^{n-m}}{K_1} \frac{1}{z^{n-m}} \frac{\partial C_y}{\partial x} = 0 \quad (57)$$

Para resolver esta ecuación diferencial en derivadas parciales se aplicará la transformada de Laplace. Inicialmente, se multiplicará por e^{-px} e integrará respecto a x :

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^{\infty} e^{-px} C_y dx + \frac{n}{z} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\infty} e^{-px} C_y dx -$$

$$- \frac{u_1 z_1^{n-m}}{K_1} \frac{1}{z^{n-m}} \int_0^{\infty} e^{-px} \frac{\partial C_y}{\partial x} dx$$

Definiendo

$$C_y \equiv \int_0^{\infty} e^{-px} C_y dx \quad (58)$$

como la transformada de C_y , que no depende de x , la (57) queda convertida en una ecuación diferencial ordinaria:

$$0 = \frac{d^2 C_y}{dz^2} + \frac{n}{z} \frac{d C_y}{dz} - \frac{u_1 z_1^{n-m}}{K_1} \frac{1}{z^{n-m}} \left\{ \left[e^{-px} C_y \right]_0^{\infty} + \right.$$

$$\left. + p \int_0^{\infty} e^{-px} C_y dx \right\}$$

o también:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 C_y}{dz^2} + \frac{n}{z} \frac{dC_y}{dz} - \frac{u_1 z_1^{n-m}}{K_1} \frac{p}{z^{n-m}} C_y &= \\ &= \frac{u_1 z_1^{n-m}}{K_1} \frac{1}{z^{n-m}} \left[e^{-px} C_y \right]_0^\infty \end{aligned} \quad (59)$$

Llamando

$$q^2 \equiv \frac{u_1 z_1^{n-m}}{K_1} p \quad (60)$$

la (59) queda:

$$\frac{d^2 C_y}{dz^2} + \frac{n}{z} \frac{dC_y}{dz} - \frac{q^2}{z^{n-m}} C_y = \frac{q^2}{p} \frac{1}{z^{n-m}} \left[e^{-px} C_y \right]_0^\infty \quad (61)$$

Se considerarán las siguientes condiciones de contorno:

$$a) C_y \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty \text{ y } z \rightarrow \infty \quad (62)$$

$$b) C_y \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow 0, \quad z \neq 0 \quad (63)$$

$$c) C_y \rightarrow \infty \text{ en } x = z = 0 \quad (64)$$

$$d) \int_0^\infty \bar{u} C_y(x, z) dz = Q \quad \text{para todo } x > 0 \quad (65)$$

Debe señalarse que estas condiciones están dadas para $C_y(x, z)$ y no con respecto a su transformada.

Las condiciones (62) y (63) imponen que no haya contaminantes a distancias muy alejadas de la fuente o en la vertical por encima de la fuente. Cabría indicar que esta última suposición (63) se extrajo del trabajo de Frost (1946), no así la utilizada por Sutton (1953):

$$K_z \frac{\partial C_y}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad z \rightarrow 0, \quad x > 0$$

que resulta inconsistente y que, por otra parte, contiene algunos errores en el tratamiento de este tema (Sutton, 1953, p.281 y Pasquill, 1974, p.110).

La condición (64) surge para el caso planteado de una fuente puntual continua ubicada en el origen de coordenadas y la (65), es una condición de continuidad, o sea, que los contaminantes no se pierden (depósito) ni se crean.

La imposición de que la concentración de contaminantes sea nula en $x = 0$ y en $x \rightarrow \infty$ permite que (61) se transforme en una ecuación diferencial homogénea:

$$\frac{d^2 C_y}{dz^2} + \frac{n}{z} \frac{d C_y}{dz} - \frac{q^2}{z^{n-m}} C_y = 0 \quad (66)$$

cuya solución (Apéndice B) es:

$$C_y(z, p) = z^{\frac{1-n}{2}} \left[C_0 I_{\frac{1-n}{m-n+2}} \left(\frac{2q}{m-n+2} z^{\frac{m-n+2}{2}} \right) + C_1 K_{\frac{1-n}{m-n+2}} \left(\frac{2q}{m-n+2} z^{\frac{m-n+2}{2}} \right) \right] \quad (67)$$

donde I_ν y K_ν son funciones modificadas de Bessel y C_0 y C_1 son constantes arbitrarias.

La condición (62) que indica que C_y debe anularse cuando $z \rightarrow \infty$, también es válida para su transformada C_y (es transparente a la variable z) y, en con-

secuencia, determina que la constante C_0 en (67) sea nula, pues, para valores grandes de la variable:

$$I_V(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right] \quad (68)$$

(Bronshtein y Semendiaev, 1976). Así, resulta:

$$\mathcal{C}_Y(z, p) = C_1 z^{\frac{1-n}{2}} K_{\frac{1-n}{m-n+2}} \left(\frac{2q}{m-n+2} z^{\frac{m-n+2}{2}} \right) \quad (69)$$

A continuación, se procederá a aplicar la transformada de Laplace a la condición (65):

$$Q = \int_0^{\infty} \bar{u} C_Y(x, z) dz = \frac{u_1}{z_1^m} \int_0^{\infty} z^m C_Y(x, z) dz$$

Multiplicando por e^{-px} e integrando:

$$Q \int_0^{\infty} e^{-px} dx = \frac{u_1}{z_1^m} \int_0^{\infty} z^m \left[\int_0^{\infty} e^{-px} C_Y(x, z) dx \right] dz$$

y por (58) es

$$\frac{Q}{p} = \frac{u_1}{z_1^m} \int_0^{\infty} z^m \mathcal{C}_Y dz$$

Reemplazando con la (69), se obtiene:

$$\frac{z_1^m}{u_1} \frac{Q}{p} = C_1 \int_0^{\infty} z^{\frac{2m-n+1}{2}} K_{\frac{1-n}{m-n+2}} \left(\frac{2q}{m-n+2} z^{\frac{m-n+2}{2}} \right) dz \quad (70)$$

llamando:

$$\frac{2q}{m-n+2} z^{\frac{m-n+2}{2}} = z'' \quad (71)$$

(la variable p , incluida en q , está fija)

y:

$$v' = \frac{1-n}{m-n+2} \quad (72)$$

Entonces si:

$$m-n+2 > 0 \quad (73)$$

los límites serán:

$$z \Big|_0^{\infty} \rightarrow z'' \Big|_0^{\infty}$$

De (71):

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{m-n+2}{2q} \right)^{\frac{2}{m-n+2}} z''^{\frac{2}{m-n+2}} \\ dz &= \frac{1}{q} \left(\frac{m-n+2}{2q} \right)^{\frac{2}{m-n+2}} \left(\frac{2}{m-n+2} \right) z''^{\frac{-m+n}{m-n+2}} dz'' \\ &= \frac{1}{q} \left(\frac{m-n+2}{2q} \right)^{\frac{-m+n}{m-n+2}} z''^{\frac{-m+n}{m-n+2}} dz'' \end{aligned} \quad (74)$$

$$z^{\frac{2m-n+1}{2}} = \left(\frac{m-n+2}{2q} \right)^{\frac{2m-n+1}{m-n+2}} z''^{\frac{2m-n+1}{m-n+2}} \quad (75)$$

Multiplicando (74) con (75) resulta:

$$z^{\frac{2m-n+1}{2}} dz = \frac{1}{q} \left(\frac{m-n+2}{2q} \right)^{\frac{m+1}{m-n+2}} z''^{\frac{m+1}{m-n+2}} dz''$$

llamando

$$s^* \equiv \frac{m+1}{m-n+2} \quad (76)$$

queda:

$$z^{\frac{2m-n+1}{2}} dz = \frac{1}{q} \left(\frac{m-n+2}{2q} \right)^{s^*} z''^{s^*} dz''$$

Reemplazando en (70):

$$\frac{z_1^m Q}{u_1 p} = c_1 \frac{1}{q} \left(\frac{m-n+2}{2q} \right)^{s^*} \int_0^\infty z''^{s^*} K_{\nu'}(z'') dz'' \quad (77)$$

De (72) y (76), se deduce que $s^* + \nu' = 1$, y por propiedad de la función de Bessel modificada:

$$K_{\nu'} \equiv K_{1-s^*} = K_{s^*-1} \quad (\text{para todo índice})$$

y además como:

$$\frac{dK_{\nu}}{dz} = -K_{\nu-1} - \frac{\nu}{z} K_{\nu} \quad (\text{Bronshtein y Semendiaev, 1976})$$

se obtiene:

$$K_{\nu_1}(z'') = - \frac{dK_{s^*}}{dz''} - \frac{s^*}{z''} K_{s^*}$$

Sustituyendo en (77):

$$\begin{aligned} \frac{z_1^m}{u_1} \frac{Q}{p} &= c_1 \frac{1}{q} \left(\frac{m-n+2}{2q} \right) s^* \left\{ - \int_0^{\infty} z'' s^* \frac{dK_{s^*}}{dz''} dz'' - s^* \int_0^{\infty} z'' s^* - 1 K_{s^*} dz'' \right\} \\ &= c_1 \frac{1}{q} \left(\frac{m-n+2}{2q} \right) s^* \left\{ - \left[z'' s^* K_{s^*} \right]_0^{\infty} + s^* \int_0^{\infty} z'' s^* - 1 K_{s^*} dz'' - \right. \\ &\quad \left. - s^* \int_0^{\infty} z'' s^* - 1 K_{s^*} dz'' \right\} \end{aligned}$$

Pero $\left[K'' s^* K_{s^*} \right]_{z'' \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, pues el valor asintótico de

$$K_{s^*}(z'') \xrightarrow{z'' \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2z''}} e^{-z''} \left[1 + O\left(\frac{1}{z''}\right) \right] \quad (78)$$

(Bronshtein y Semendiaev, 1976), y el producto de una función potencial con una exponencial negativa tiende a cero cuando la variable tiende a infinito. Por lo tanto:

$$\frac{z_1^m}{u_1} \frac{Q}{p} = c_1 \frac{1}{q} \left(\frac{m-n+2}{2q} \right) s^* \left[z'' s^* K_{s^*}(z'') \right]_{z'' \rightarrow 0}$$

Pero:

$$z''^{s^*} K_{s^*}(z'') \xrightarrow{z'' \rightarrow 0} 2^{s^*-1} \Gamma(s^*) \quad (79)$$

(Carslaw y Jaeger, 1959); donde Γ es la función gamma. Luego:

$$\frac{z_1^m}{u_1} \frac{Q}{p} = c_1 \frac{1}{q} \left(\frac{m-n+2}{2q} \right)^{s^*} 2^{s^*-1} \Gamma(s^*)$$

Entonces:

$$c_1 = \frac{Q}{2^{s^*-1}} \frac{z_1^m}{u_1 \Gamma(s^*)} \left(\frac{2q}{m-n+2} \right)^{s^*} \frac{q}{p} \quad (80)$$

y por lo tanto, la transformada (69) quedará:

$$\mathbb{C}_Y(z, p) = \frac{2Qz_1^m}{u_1 \Gamma(s^*)} \left(\frac{q}{m-n+2} \right)^{s^*} \frac{q}{p} z^{\frac{1-n}{2}} K_{\frac{1-n}{m-n+2}} \left(\frac{2q}{m-n+2} z^{\frac{m-n+2}{2}} \right) \quad (81)$$

Según Magnus y Oberhettinger (1949), la antitransformada de:

$$p^{v/2} K_{\nu}(a' \sqrt{p}) \text{ es } \frac{a'^{v'}}{(2x)^{v'+1}} e^{-a'^2/4x} \quad (82)$$

En el caso particular considerado se dispone del factor:

$$\frac{q^{s^*+1}}{p} = (\text{por (60)}) = \left(\frac{u_1 z_1^{n-m}}{K_1} \right)^{\frac{s^*+1}{2}} \frac{s^*-1}{p^{\frac{s^*-1}{2}}}$$

pero

$$\frac{s^* - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{m+1}{m-n+2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{m-n+2} \right) \equiv -\frac{v'}{2} \quad (83)$$

Llamando:

$$C'_1 = \frac{2 Q z_1^m}{u_1 \Gamma(s^*)} \frac{z^{\frac{1-n}{2}}}{(m-n+2)^{s^*}} \left(\frac{u_1}{K_1} \right)^{\frac{s^*+1}{2}} \frac{(s^*+1)}{z_1^2} (n-m) \quad (84)$$

$$a' = \frac{z^{\frac{m-n+2}{2}}}{m-n+2} \sqrt{\frac{u_1}{K_1}} z_1^{\frac{n-m}{2}} \quad (85)$$

la ecuación (81) se expresa en forma abreviada como:

$$\mathcal{L}_y(z, p) = C'_1 p^{-v'/2} K_{-v'}(a' \sqrt{p})$$

Sea

$$v'' \equiv -v' \quad (86)$$

y aplicando la antitransformada (82) queda:

$$C_y(x, z) = C'_1 \frac{a'^{v''}}{(2x)^{v''+1}} e^{-a'^2/4x}$$

o también

$$C_y(x, z) = C'_1 \frac{a'^{v''}}{(2x)^{v''+1}} \exp \left[-\frac{u_1 z_1^{n-m} z^{m-n+2}}{(m-n+2)^2 K_1 x} \right] \quad (87)$$

Pero por (84), (85), (86) y (83) se obtiene:

$$\begin{aligned}
C_1' \frac{a_1 v''}{(2x)^{v''+1}} &= \frac{2 Q_1^m}{u_1 \Gamma(s^*)} \frac{\cancel{\frac{1-n}{z}}}{(m-n+2) s^*} \left(\frac{u_1}{K_1} \right)^{\frac{s^*+1}{2}} z_1^{\frac{(s^*+1)}{2} (n-m)} \\
&\cdot \left[\frac{\cancel{\frac{m-n-2}{z}}}{(m-n+2)} \sqrt{\frac{u_1}{K_1}} z_1^{\frac{n-m}{2}} \right]^{\frac{n-1}{m-n+2}} \left(\frac{1}{2x} \right)^{s^*} \\
&= \frac{1 + \frac{n-1}{m-n+2} - s^*}{u_1 \Gamma(s^*)} Q_1 \left(\frac{u_1}{K_1} \right)^{\frac{s^*+1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{m-n+2} \right)} \\
&\cdot \frac{z_1^{m + \left(\frac{s^*+1}{2} \right) (n-m) + \left(\frac{n-m}{2} \right) \left(\frac{n-1}{m-n+2} \right)}}{(m-n+2)^{s^* + \frac{n-1}{m-n+2}} x^{s^*}} \quad (88)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (76) y efectuando las operaciones indicadas en los exponentes resulta:

$$1 + \frac{n-1}{m-n+2} - s^* = 1 + \frac{n-1}{m-n+2} - \frac{m+1}{m-n+2} = \frac{m-n+2+n-1-m-1}{m-n+2} = 0$$

$$\frac{s^*+1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{m-n+2} \right) = \frac{\left(\frac{m+1}{m-n+2} + 1 \right) (m-n+2) + n-1}{2(m-n+2)} =$$

$$= \frac{m+1+m-n+2+n-1}{2(m-n+2)} = \frac{2m+2}{2(m-n+2)} = s^*$$

$$s^* + \frac{n-1}{m-n+2} = \frac{m+1}{m-n+2} + \frac{n-1}{m-n+2} = \frac{m-n}{m-n+2} =$$

$$= \frac{2m+2 - (m-n+2)}{m-n+2} = 2s^* - 1$$

$$\begin{aligned}
m + \left(\frac{s^*+1}{2}\right)(n-m) + \left(\frac{n-m}{2}\right)\left(\frac{n-1}{m-n+2}\right) &= m + \left(\frac{n-m}{2}\right) \left[s^* + 1 + \frac{n-1}{m-n+2} \right] \\
&= m + \left(\frac{n-m}{2}\right) \left[\frac{m+1}{m-n+2} + 1 + \frac{n-1}{m-n+2} \right] \\
&= m + \left(\frac{n-m}{2}\right) \left[\frac{m+m-n+2+n}{m-n+2} \right] \\
&= m + \left(\frac{n-m}{2}\right) \left[\frac{2m+2}{m-n+2} \right] = \frac{m(m-n+2)}{m-n+2} \frac{(n-m)(m+1)}{m-n+2} \\
&= \frac{m^2 - nm + 2m + nm + n - m^2 - m}{m-n+2} = \\
&= \frac{m+n}{m-n+2} \quad (\text{igual que el anterior}) = 2s^* - 1
\end{aligned}$$

y reemplazando en (88) queda:

$$C_1' \frac{a_1 v''}{(2x)^{v''+1}} = \frac{Q}{u_1 \Gamma(s^*)} \left(\frac{u_1}{K_1} \right)^{s^*} \frac{z_1^{2s^*-1}}{(m-n+2)^{2s^*-1} x^{s^*}}$$

Finalmente, sustituyendo en (87), se obtiene:

$$C_Y(x, z) = \frac{Q}{u_1 \Gamma(s^*)} \left(\frac{z_1}{m-n+2} \right)^{2s^*-1} \left(\frac{u_1}{K_1 x} \right)^{s^*} \exp \left[- \frac{u_1 z_1^{n-m} z^{m-n+2}}{(m-n+2)^2 K_1 x} \right] \quad (89)$$

coincidente con lo hallado por Calder (1949) y Frost (1946), no así con lo mencionado por Sutton (1953) y Pasquill (1974).

Compactando (89) en la forma:

$$C_y(x, z) = A_0 \exp \left[-d |z|^s \right] \quad (90)$$

con A_0 y d funciones de la distancia horizontal a la fuente:

$$A_0 = \frac{Q}{u_1 \Gamma(s^*)} \left(\frac{z_1}{m - n + 2} \right)^{2s^* - 1} \left(\frac{u_1}{K_1} \right)^{s^*}$$

$$d = \frac{u_1 z_1^{n-m}}{(m - n + 2)^2 K_1 x}$$

y

$$s = m - n + 2 \quad \text{un exponente general} \quad (91)$$

Y como:

$$C_y(x, 0) = A_0 \quad (\text{con } x \neq 0) \quad (92)$$

queda:

$$C_y(x, z) = C_y(x, 0) \exp \left[-d |z|^s \right] \quad (93)$$

Una dificultad particular consiste en la obtención de s y d , conociendo las concentraciones medias (y, en consecuencia, las concentraciones laterales integradas) a distintas alturas. Sin embargo, se plantea una dificultad adicional si no se dispone del dato $C_y(x, 0) = A_0$, sino a otra altura z_2 ó sea $C_y(x, z_2)$. Entonces, de (90):

$$C_y(x, z_2) = A_0 \exp \left[-d |z_2|^s \right] \Rightarrow A_0 = C_y(x, z_2) \exp \left[d |z_2|^s \right] \quad (94)$$

y reemplazando, para un x dado:

$$C_y(z) = C_y(z_2) \exp \left[-d (|z|^s - |z_2|^s) \right] \quad (95)$$

$$\Rightarrow \frac{C_Y(z_2)}{C_Y(z)} = \exp \left[d(|z|^s - |z_2|^s) \right]$$

$$\Rightarrow \ln \left[\frac{C_Y(z_2)}{C_Y(z)} \right] = d |z|^s - d |z_2|^s \quad (96)$$

Por lo tanto no podrán determinarse s y d .

Una alternativa sería utilizar la (90) a un x dado, con

$$|z''| \equiv |z - z_2| \quad (97)$$

$$C_Y(z'') = A'_0 \exp \left[-d' |z''|^{s'} \right] \quad (98)$$

(aplicada a variables primadas) pero con $s' \neq s$; entonces:

$$C_Y(z) = A'_0 \exp \left[-d' |z - z_2|^{s'} \right] \quad (99)$$

es evidente que $A'_0 = C_Y(z''=0) = C_Y(z_2)$, así que:

$$C_Y(z) = C_Y(z_2) \exp \left[-d' |z - z_2|^{s'} \right] \quad (100)$$

$$\Rightarrow \frac{C_Y(z_2)}{C_Y(z)} = \exp \left[d' |z - z_2|^{s'} \right]$$

$$\Rightarrow \ln \left[\frac{C_Y(z_2)}{C_Y(z)} \right] = d' |z - z_2|^{s'} \quad (101)$$

que al compararla con (96), es evidente que

$s' \neq s$ (no así d' que es igual a d , pues ambos son funciones de x). Tomando nuevamente logaritmos a ambos miembros de (101), queda:

$$\ln \left\{ \ln \left[\frac{C_Y(z_1)}{C_Y(z)} \right] \right\} = \ln d + s' \ln |z - z_2| \quad (102)$$

y que permite encontrar d y s' mediante una regresión lineal. En adelante, se usará s pero recordando que es el exponente general correspondiente al nivel más bajo en el que se midió la concentración.

Retomando (89):

$$C_Y(x, z) = \frac{Q}{u_1 \Gamma(s^*)} \left(\frac{z_1}{m - n + 2} \right)^{2s^* - 1} \left(\frac{u_1}{K_1 x} \right)^{s^*} \exp \left[- \frac{u_1 z_1^{n-m} z^{m-n+2}}{(m - n + 2)^2 K_1 x} \right]$$

con

$$s^* = \frac{m + 1}{m - n + 2}$$

$$\bar{u} = u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m$$

$$K_z = K_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^n$$

$$\text{Si se supone } m = n = 0 \quad (103)$$

$$\text{entonces } \bar{u} = u_1 \text{ velocidad del viento constante con la altura} \quad (104)$$

$$K_z = K_1 \text{ difusividad turbulenta de contaminantes constante con la altura} \quad (105)$$

$$s^* = \frac{1}{2} \Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Así:

$$\begin{aligned}
 C_Y(x, z) &= \frac{Q}{\bar{u} \sqrt{\pi}} \left(\frac{z_1}{2} \right)^0 \left(\frac{\bar{u}}{K_z x} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{\bar{u} z_1^0 z^2}{4 K_z x} \right] \\
 &= \frac{Q}{\sqrt{\pi} \bar{u}} \sqrt{2} \left[\frac{1}{\left(\frac{2 K_z x}{\bar{u}} \right)} \right]^{1/2} \exp \left[- \frac{z^2}{2 \left(\frac{2 K_z x}{\bar{u}} \right)} \right] \quad (106)
 \end{aligned}$$

llamando a

$$\left(\frac{2 K_z x}{\bar{u}} \right)^{1/2} = \sigma_z(x) \quad (\text{Mazio, 1983}) \quad (107)$$

$$C_Y(x, z) = \frac{2Q}{\sqrt{2\pi} \sigma_z(x) \bar{u}} \exp \left[- \frac{z^2}{2 \sigma_z^2(x)} \right] \quad (108)$$

que coincide con el modelo gaussiano para $H = 0$, donde H es la altura efectiva de emisión (Turner, 1970).

CAPÍTULO V

DISTRIBUCION VERTICAL DE CONTAMINANTES EN LA ATMOSFERA

V. DISTRIBUCION VERTICAL DE CONTAMINANTES EN LA ATMOSFERA

Aún cuando no existen mediciones directas de K_z en flujos estratificados, es posible relacionar la difusividad turbulenta vertical para los contaminantes con las difusividades turbulentas de otras cantidades. Businger (1966) remarkó que sobre el océano K_z es igual a la difusividad turbulenta de la cantidad de movimiento (K_m). Asimismo, Swinbank (1968), en base a algunas observaciones, sugirió que las difusividades turbulentas para el calor y los contaminantes pueden considerarse iguales:

$$K_h = K_z \quad (109)$$

De acuerdo con Monin y Yaglom (1971), teniendo en cuenta la semejanza que gobierna los procesos físicos de intercambio de calor y contaminantes, sus difusividades turbulentas pueden ser consideradas iguales y deben distinguirse de la correspondiente a la cantidad de movimiento ya que ésta está influida por las fluctuaciones de la presión además de las provenientes a la mezcla turbulenta.

V.1. Difusividad de contaminantes igual a la del calor

Según la teoría de transporte-gradiente (Businger, 1973), la definición del coeficiente de difusividad turbulenta de calor es:

$$K_h = - \frac{\overline{w'\theta'}}{\rho \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}} \quad (110)$$

donde ρ es la densidad de la atmósfera. Reemplazando (16) y (17), en (110) se encuentra:

$$K_h = \frac{k u_* z}{\phi_h(z/L)} \quad (111)$$

En consecuencia, se puede suponer:

$$K_z = K_h = \frac{k u_* z}{\phi_h(z/L)}$$

Si se considera que la difusividad turbulenta cumple con una ley potencial general, según (56):

$$K_z = K_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^n$$

Igualando (111) y (56) se obtiene:

$$\phi_h(z/L) = \frac{k u_* z}{K_1} \frac{z_1^n}{z^{n-1}} \quad (112)$$

Pero, según (C9), (Apéndice C):

$$\bar{z} = \frac{1}{d^{1/s}} \frac{\Gamma(2/s)}{\Gamma(1/s)} \quad (113)$$

y reemplazando en (112):

$$\phi_h(z/L) = \frac{k u_* z_1^n}{K_1} \left[\frac{d^{1/s} \Gamma(1/s)}{\Gamma(2/s)} \right]^{n-1} \quad (114)$$

Para establecer una correspondencia con (42), se utiliza el valor calculado en (C17) (Apéndice C):

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{K_1}{z_1^n} \frac{n}{d^{n-1/s}} \frac{\Gamma(n/s)}{\Gamma(1/s)} \quad (115)$$

$$= k u_* \left\{ \frac{K_1}{k u_* z_1^n} \left[\frac{\Gamma(2/s)}{d^{1/s} \Gamma(1/s)} \right]^{n-1} \right\} \left[\frac{\Gamma(1/s)}{\Gamma(2/s)} \right]^{n-1} n \frac{\Gamma(n/s)}{\Gamma(1/s)}$$

y reemplazando con (114) para $z = \bar{z}$ se encuentra:

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = k u_* n \frac{\Gamma(n/s)}{\Gamma(1/s)} \left[\frac{\Gamma(1/s)}{\Gamma(2/s)} \right]^{n-1} \phi_h^{-1}(\bar{z}/L) \quad (116)$$

y al comparar con (42), se deduce:

$$\phi(\bar{z}/L) = n \frac{\Gamma(n/s)}{\Gamma(1/s)} \left[\frac{\Gamma(1/s)}{\Gamma(2/s)} \right]^{n-1} \phi_h^{-1}(\bar{z}/L) \quad (117)$$

Introduciendo las expresiones $\phi_h(z/L)$ derivadas de los datos experimentales de Kansas (Businger y otros, 1971), y consideradas como (21) y (20):

$$\phi_h(z/L) \begin{cases} 0.74 + 4.7 z/L & \text{para } z/L \geq 0 \\ 0.74 (1 - 9 z/L)^{-1/2} & \text{para } z/L < 0 \end{cases}$$

se puede encontrar la dependencia de n con la estabilidad. Para ello, considerando (112) y las últimas expresiones, se analizan dos casos:

a) Casos estables y neutrales ($z/L > 0$)

$$\frac{k u_* z_1^n}{K_1} \frac{1}{z^{n-1}} = 0.74 + 4.7 z/L \quad (118)$$

Derivando (118) respecto a z resulta:

$$\frac{k u_* z_1^n}{K_1} \frac{1-n}{z^n} = \frac{4.7}{L}$$

$$\frac{1-n}{z} \left[\frac{k u_* z_1^n}{K_1} \frac{1}{z^{n-1}} \right] = \frac{4.7}{L}$$

Reemplazando nuevamente con (118), se obtiene:

$$\frac{1-n}{z} [0.74 + 4.7 z/L] = \frac{4.7}{L}$$

$$1-n = \frac{4.7 z/L}{0.74 + 4.7(z/L)}$$

$$n = 1 - \frac{4.7 z/L}{0.74 + 4.7 z/L} \quad (119)$$

b) Casos inestables ($z/L < 0$)

$$\frac{k u_* z_1^n}{K_1} \frac{1}{z^{n-1}} = 0.74 (1 - 9 z/L)^{-1/2} \quad (120)$$

derivando respecto a z :

$$\frac{k u_* z_1^n}{K_1} \frac{1-n}{z^n} = 0.74 \frac{9}{2L} (1-9 z/L)^{-3/2}$$

$$\frac{1-n}{z} \left[\frac{k u_* z_1^n}{K_1} \frac{1}{z^{n-1}} \right] = \frac{0.74 (9/2L)}{(1-9 z/L)^{3/2}}$$

y reemplazando nuevamente con (120):

$$\frac{1-n}{z} \frac{0.74}{(1-9 z/L)^{1/2}} = \frac{0.74 (9/2L)}{(1-9 z/L)^{3/2}}$$

$$1-n = \frac{4.5 z/L}{1-9 z/L}$$

$$n = 1 - \frac{4.5 z/L}{1-9 z/L} \quad (121)$$

$$\text{Si } z/L \equiv n \quad (122)$$

queda:

$$n = \begin{cases} 1 - \frac{4.7 n}{0.74 + 4.7 n} & n > 0 \\ 1 + \frac{4.5 |n|}{1 + 9 |n|} & n < 0 \end{cases}$$

A los efectos de expresar el exponente general s incluido en la expresión (91) en función de la estabilidad, se deriva (55) respecto de z :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dz} &= \frac{u_1}{z_1} m \left(\frac{z}{z_1}\right)^{m-1} = \frac{u_1}{z_1} m \left(\frac{z_1}{z}\right) \left(\frac{z}{z_1}\right)^m \\ &= \frac{m}{z} \bar{u} \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$m = \frac{z}{\bar{u}} \frac{d\bar{u}}{dz} \quad (123)$$

Recordando (15):

$$\phi_m = \frac{kz}{u_*} \frac{d\bar{u}}{dz}$$

expresando la velocidad del viento en forma general (expresiones (22) y (23)):

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} \left[\ln \left(\frac{z}{z_0}\right) + \psi \left(\frac{z}{L}\right) \right] \quad (124)$$

donde $\psi(z/L)$ es una función de la estabilidad atmosférica y representa el apartamiento del caso neutral, y reemplazando en (123) queda:

$$m = \frac{\phi_m}{\ln(z/z_0) + \psi(z/L)} \quad (125)$$

Pero según se encontró en (91):

$$s = m - n + 2$$

y, por lo tanto, separando en diferentes condiciones de estabilidad:

a) Casos estables y neutral ($\eta > 0$)

Recordando (19):

$$\phi_m = 1 + 4.7 \eta$$

y por (22):

$$\psi(z/L) = 4.7 \eta$$

en consecuencia:

$$s = 1 + \frac{1 + 4.7 \eta}{\ln(z/z_0) + 4.7 \eta} + \frac{4.7 \eta}{0.74 + 4.7 \eta}$$

Si

$$\frac{z}{z_0} = \zeta$$

$$\frac{z_0}{L} = \zeta_0$$

entonces:

$$s(\zeta, \zeta_0) = 1 + \frac{1 + 4.7 \zeta_0 \zeta}{\ln \zeta + 4.7 \zeta_0 \zeta} + \frac{4.7 \zeta_0 \zeta}{0.74 + 4.7 \zeta_0 \zeta} \quad (126)$$

b) Casos inestables ($\eta < 0$)

Por (18):

$$\phi_m = (1 + 15|\eta|)^{-1/4}$$

y de (23):

$$\psi(z/L) = \ln \left[-\frac{(\mu_0^2 + 1)(\mu_0 + 1)^2}{(\mu^2 + 1)(\mu + 1)^2} \right] + 2 [\operatorname{arctg}(\mu) - \operatorname{arctg}(\mu_0)]$$

llamando

$$c_1 \equiv \ln [(\mu_0^2 + 1)(\mu_0 + 1)^2] - 2 \operatorname{arctg}(\mu_0) \quad (127)$$

con, de (24):

$$\mu \equiv (1 + 15 |\zeta_0| \zeta)^{1/4}$$

$$\mu_0 \equiv (1 + 15 |\zeta_0|)^{1/4}$$

se obtiene:

$$s = 1 + \frac{[1 + 15 |\zeta_0| \zeta]^{-1/4}}{\ln \zeta + 2 \operatorname{arctg}(\mu) - \ln [(\mu^2 + 1)(\mu + 1)^2] + c_1} - \frac{4.5 |\zeta_0| \zeta}{1 + 9 |\zeta_0| \zeta}$$

$$s(\zeta, \zeta_0) = 1 + \frac{\mu^{-1}}{\ln \zeta + 2 \operatorname{arctg}(\mu) - \ln [(\mu^2 + 1)(\mu + 1)^2] + c_1} - \frac{4.5 |\zeta_0| \zeta}{1 + 9 |\zeta_0| \zeta}$$

(128)

En la Figura 2 se encuentra graficado el exponente general s en función de la altura adimensionalizada z/z_0 , para distintas condiciones de estabilidad atmosférica (z_0/L : 0, $\pm 10^{-4}$, $\pm 10^{-3}$ y $\pm 10^{-2}$). Puede apreciarse que para la situación inestable y neutral, s es monótonamente decreciente mientras que para condiciones estables es una función creciente en su mayor parte dentro del dominio de interés ($10 < z/z_0 < 10^4$). En dicho dominio, s varía entre 0.5 y 3 para el rango de estabilidades mencionado anteriormente.

Volviendo a la (117), se puede expresar ϕ como:

$$\phi(\bar{z}/L) = G^*(n,s) \frac{n}{\phi_h(\bar{z}/L)} \quad (129)$$

con

$$G^*(n,s) = \frac{\Gamma(n/s)}{\Gamma(1/s)} \left[\frac{\Gamma(1/s)}{\Gamma(2/s)} \right]^{n-1} \quad (130)$$

en la que los exponentes n y s son funciones de z/z_0 y z_0/L , y, en consecuencia, en este caso, calculados a $z = \bar{z}$.

Resumiendo, es posible estimar la velocidad vertical:

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = k u_* \phi\left(\frac{\bar{z}}{z_0}, \frac{z_0}{L}\right) = \frac{k u_*}{0.74} 0.74 \phi(\zeta, \zeta_0) \quad (131)$$

en función de la altura y de la estabilidad atmosférica. En la Figura 3 se presenta el gráfico de la función $0.74 \phi(\bar{z}, \zeta_0)$. Puede apreciarse que en condiciones estables dicha función es decreciente, lo que implica físicamente que la velocidad vertical disminuye con la altura del centro de masa de la nube de contaminantes y con el aumento de la estabilidad. Obviamente, para la condición inestable, los resultados son inversos mientras que para el caso neutral la velocidad es constante.

V.2. Difusividad de contaminantes igual a la de la cantidad de movimiento

Se considerará el caso en que $K_z \equiv K_m$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{De (7): } K_m \frac{d\bar{u}}{dz} = u_*^2 \\ \text{y de (15): } \phi_m = \frac{kz}{u_*} \frac{d\bar{u}}{dz} \end{array} \right\} \Rightarrow K_m \frac{\phi_m}{kz} = u_*^2$$

en consecuencia:

$$K_z = K_m = \frac{k u_* z}{\phi_m(z/L)}$$

Así la ecuación (117) queda expresada mediante la siguiente forma:

$$\phi(\bar{z}/L) = n \frac{\Gamma(n/s)}{\Gamma(1/s)} \left[\frac{\Gamma(1/s)}{\Gamma(2/s)} \right]^{n-1} \phi_m^{-1}(\bar{z}/L)$$

Recordando que según (18) y (19):

$$\phi_m(z/L) = \begin{cases} (1 - 15 z/L)^{-1/4} & z/L < 0 \\ 1 + 4.7 z/L & z/L > 0 \end{cases}$$

es posible expresar n en función de la estabilidad:

$$\begin{aligned} K_z &= K_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^n \\ &= K_m = \frac{k u_* z}{\phi_m} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} K_z &= K_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^n \\ &= K_m = \frac{k u_* z}{\phi_m} \end{aligned}} \right] \Rightarrow \phi_m = \frac{k u_*}{K_1} \frac{z_1^n}{z^{n-1}}$$

y sustituyendo y operando según se hizo anteriormente:

a) Casos estables y neutral ($z/L > 0$)

$$n = 1 - \frac{4.7 z/L}{1 + 4.7 z/L} = 1 - \frac{4.7 \eta}{1 + 4.7 \eta} \quad (132)$$

b) Casos inestables ($z/L < 0$)

$$n = 1 - \frac{3.75 z/L}{1 - 15 z/L} = 1 + \frac{3.75 |n|}{1 + 15 |n|} \quad (133)$$

El cálculo de m en función de la estabilidad no se modifica. Por lo tanto, según (125):

$$m = \frac{\phi_m}{\ln(z/z_0) + \psi(z/L)}$$

y como $s = m - n + 2$, quedarán:

a) Casos estables y neutral ($\eta > 0$)

$$s = 1 + \frac{1 + 4.7 \zeta_0 \zeta}{\ln(\zeta) + 4.7 \zeta_0 \zeta} + \frac{4.7 \zeta_0 \zeta}{1 + 4.7 \zeta_0 \zeta} \quad (134)$$

b) Casos inestables ($\eta < 0$)

$$s = 1 + \frac{\mu^{-1}}{\ln \zeta + 2 \arctg(\mu) - \ln[(\mu^2 + 1)(\mu + 1)^2] + c_1} - \frac{3.75 |\zeta_0| \zeta}{1 + 15 |\zeta_0| \zeta} \quad (135)$$

Para la

condición neutral el valor del exponente general s coincide cuando se consideran $K_z = K_h$ y $K_z = K_m$ (expresiones (119) y (132) respectivamente). En cambio, para condiciones inestables los valores de s cuando $K_z = K_h$ son menores que los que corresponden al caso $K_z = K_m$; para las condiciones estables, esta característica se invierte, aunque los valores son muy próximos entre sí. Concluyendo, las discrepancias son apreciables para estratificaciones atmosféricas inestables.

En la Figura 2 se pueden observar las diferencias entre los valores del exponente general s , suponiendo $K_z = K_h$ o admitiendo $K_z = K_m$, en función de la altura y de la estabilidad atmosférica adimensionalizada.

Si se sustituye el perfil potencial de la velocidad del viento (expresión (55)) en la ecuación (7), se encuentra que:

$$K_m = \frac{u_*^2 z_1}{m u_1} \left(\frac{z}{z_1} \right)^{1-m}$$

y si se supone $K_m = K_z$, comparando con (56), se deduce:

$$n = 1 - m \tag{136}$$

conocida como ley de las potencias conjugadas (Smith, 1957). Una consecuencia de ello es que, según la expresión (91), puede escribirse:

$$s = 2m + 1$$

De esta manera $K_z \equiv K_m$ es una hipótesis restrictiva al exponente general s . Por esto, y por lo ya mencionado en V., se conservará la suposición $K_z \equiv K_h$.

CAPÍTULO VI

VELOCIDAD DE TRANSPORTE DE LOS CONTAMINANTES EN LA ATMOSFERA

VI. VELOCIDAD DE TRANSPORTE DE LOS CONTAMINANTES EN LA ATMOSFERA

La velocidad media de transporte de contaminantes (\bar{u}_T) puede ser definida mediante la siguiente expresión:

$$\bar{u}_T = \frac{\int_0^{\infty} \bar{u}(z) c_Y(x, z) dz}{\int_0^{\infty} c_Y(x, z) dz} \quad (137)$$

Calculando d (expresión (93)), se obtiene la expresión (C9), (Apéndice C):

$$c_Y(x, z) = c_Y(x, 0) \exp \left[- \left(\frac{\Gamma(2/s) |z|}{\Gamma(1/s) \bar{z}} \right)^s \right] \quad (138)$$

que es más dúctil y de significación más clara, donde \bar{z} (ecuación C1), Apéndice C) representa físicamente la altura media de la distribución de los contaminantes para una distancia dada x .

Para resolver (137), es necesario conocer la expresión de la variación vertical de la velocidad del viento. Consecuentemente, se realizará el estudio considerando condiciones atmosféricas neutrales, estables e inestables, utilizando como parámetro indicador de ellas, a la longitud de Monin-Obukhov (L);

VI.1. Estratificación neutral ($L \rightarrow \infty$)

Para esta situación se utilizó el perfil logarítmico del viento (ecuación 10)):

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \ln (z/z_0)$$

Reemplazando (138) y (10) en (137), se obtiene (Apéndice D):

$$\bar{u}_T = \frac{u_*}{k} \ln [c(s) \bar{z}/z_0] \quad (139)$$

donde

$$c(s) = \frac{\Gamma(1/s)}{\Gamma(2/s)} \exp [\Psi(1/s)/s] \quad (140)$$

siendo

$$\Psi(1/s) = \frac{\Gamma'(1/s)}{\Gamma(1/s)} = -\gamma + \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^{1/s-1}}{t} dt \quad (141)$$

con

$$\Gamma'(1/s) = \int_0^\infty \ln t e^{-t} t^{1/s-1} dt \quad (142)$$

como la derivada de la función gamma

y $\gamma = 0.5772157$ es la constante de Euler.

El valor $c = 0.56$ para $s = 1$ coincide con el obtenido por Chatwin (1968), aplicando metodologías diferentes. También, puede compararse satisfactoriamente con los provenientes de la expresión (Mazzeo y Venegas, 1984):

$$c(s, m) = \frac{\Gamma(1/s)}{\Gamma(2/s)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{s}\right)}{\Gamma(1/s)} \right]^{1/m} \quad (143)$$

donde se consideró una variación vertical de la velocidad del viento dada por la siguiente relación potencial, similar a la (55):

$$\bar{u}(z) = \frac{u_1}{z_1^m} z^m$$

en la que m es un exponente positivo que es función de z , L y z_0 . Para $1 < s < 2$ y $0.05 < m < 0.8$, c estimado mediante (143) varía entre 0.58 y 1, en cambio los valores obtenidos mediante (140) lo hacen entre 0.56 y 0.66 (Apéndice D).

El intervalo de interés de s está comprendido entre 0.5 y 3.0 (Cap. V.). Por lo tanto se calculó la expresión (140) para este rango de s . Para ello se dividió dicho rango en 5 subintervalos, en los extremos de cada uno de ellos se disponía del valor de c y se interpoló mediante polinomios cúbicos en s que tienen la propiedad de la continuidad hasta la derivada segunda y que minimiza la integral con respecto a la longitud de arco del cuadrado de la curvatura (Apéndice D y Figura 4).

En la Figura 5 está representada la diferencia adimensionalizada $k(\bar{u}_T - \bar{u})/u_*$ entre las velocidades medias de transporte (\bar{u}_T) de los contaminantes y del viento (\bar{u}) en función de la altura adimensionalizada (\bar{z}/z_0) para diferentes condiciones de estabilidad de la atmósfera (z_0/L). Se observa que \bar{u} es siempre mayor que \bar{u}_T , aumentando la diferencia con el incremento de la altura; el rango de dicha diferencia es de -0.47 en $\bar{z}/z_0 = 10$ a -0.54 en $\bar{z}/z_0 = 10^4$. Si se supone que $k \approx 0.35$ (Businger y otros, 1971), se encuentra que para la condición neutral, la velocidad media de transporte de contaminantes es igual a la diferencia entre la velocidad media del viento y $1.4 u_*$.

Para $\bar{z}/z_0 > 150$, la influencia de c determinará variaciones en la velocidad media de transporte menores que el 10%. Esa influencia es marcada en $\bar{z}/z_0 < 150$ (para $\bar{z}/z_0 = 10$ es de 20.5%). Esto significa que c es importante en el cálculo de la dispersión de contaminantes en una capa de superficie neutralmente estratificada, para distancias cercanas a la fuente en superficies con poca rugosidad y para distancias lejanas para terrenos con mayor rugosidad.

VI.2. Estratificación estable ($L > 0$)

En condiciones atmosféricas estables es posible representar el perfil del viento (Businger, 1973), mediante la expresión (22):

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \left[\ln(z/z_0) + 4.7 z/L \right]$$

Introduciendo (22) y (138) en (137) y realizando las operaciones, se obtiene:

$$\bar{u}_T = \frac{u_*}{k} \left\{ \ln [c \bar{z}/z_0] + 4.7 \bar{z}/L \right\} \quad (144)$$

verificándose que para $L \rightarrow \infty$ (caso neutral) coincide con (139).

En la Figura 5 puede apreciarse que la velocidad media de transporte se hace más próxima a la del viento a medida que la estabilidad aumenta. Por ejemplo, para una altura apreciable ($\bar{z}/z_0 = 10^4$), lo que equivale a una distancia lejana de la fuente de emisión, y para una marcada estabilidad ($z_0/L = 10^{-2}$), la diferencia entre ambas velocidades es menor al 4%.

Por lo tanto, debido a que la variación vertical de la velocidad del viento es más pronunciada cerca de la superficie, siendo la de transporte más suave, entonces la discrepancia es mayor. Para grandes alturas, ambas velocidades se van aproximando, y en mayor medida cuando hay más estabilidad.

VI.3. Estratificación inestable ($L < 0$)

Para la situación de inestabilidad atmosférica se utilizó el perfil de la velocidad media del viento expresado por la ecuación (23):

$$\frac{k\bar{u}(z)}{u_*} = \ln(z/z_0) + i\ln \left[\frac{(\mu_0^2 + 1)(\mu_c + 1)^2}{(\mu^2 + 1)(\mu + 1)^2} \right] +$$

$$+ 2 [\arctg(\mu) - \arctg(\mu_0)]$$

donde

$$\mu \equiv (1 + 15 z/|L|)^{1/4}$$

$$\mu_0 \equiv (1 + 15 z_0/|L|)^{1/4}$$

Para obtener la velocidad media de transporte de contaminantes se integra (137) e incluyendo (23) y (138). Se realizaron varios intentos: por un lado analíticamente; aproximando (23) mediante polinomios de 2°, 3°, 4° y 5° grado por el método de cuadrados mínimos y también efectuando los citados desarrollos para subintervalos del rango de los valores de la variable ($0 < \eta < 2$ y $2 < \eta < 17$). En este último caso, aunque se había logrado una aproximación razonable, el empalme entre los intervalos no era suave, sino que aparecía una brusca discontinuidad. Consecuentemente, se decidió efectuar las integraciones numéricamente. Para ello, se confeccionó un programa computacional (Apéndice E) utilizando el método de Romberg (ver Ralston, 1960). En la Fig. 5 se aprecia que la velocidad de transporte de los contaminantes es siempre menor que la del viento, destacándose que para mayores inestabilidades tal diferencia disminuye para distancias lejanas a la fuente, ocurriendo lo contrario en las proximidades a ella. Físicamente esto significaría que cerca de la fuente los contaminantes emitidos por ella, se sitúan bruscamente en un campo de turbulencia, dificultándose su transporte, siendo más notable para inestabilidades crecientes; a mayor altura, los contaminantes son "mejor" transportados por la acción del viento debido al proceso la mezcla ya ocurrido.

Un problema de interés práctico consiste en obtener la velocidad media de transporte de los contaminantes (\bar{u}_T), a partir de la velocidad media del viento (\bar{u}). En los casos de estratificación neutral y estable esto es relativamente fácil, pues basta efectuar la diferencia entre (144) y (22), obteniéndose:

$$\bar{u}_T = \bar{u} + \frac{u_*}{k} \ln [c(\bar{z}/z_0, z_0/L)] \quad \text{con } L > 0 \quad (145)$$

Para el caso de estratificación inestable, la obtención de la velocidad de transporte es más complicada, por las dificultades mencionadas anteriormente. El resultado es (Apéndice F):

$$\begin{aligned} \frac{k}{u_*} \bar{u}_T = & \ln c + \ln(\bar{z}/z_0) + \ln [(\mu_0^2 + 1)(\mu_0 + 1)^2] - 2 \operatorname{arctg}(\mu_0) \\ & - \left(\frac{s \Gamma(2/s)}{\Gamma(1/s) \Gamma(1/s)} \right) \frac{B(\bar{z}/z_0, z_0/|L|)}{\bar{z}/z_0} \quad \text{para } L < 0 \quad (146) \end{aligned}$$

donde B es una función que resulta de las integraciones numéricas citadas y cuyos valores se presentan en la Tabla I. Con el objeto de establecer la relación con la velocidad del viento, se aproximó numéricamente esta función dada a una forma potencial con excelente correlación; luego:

$$B(\bar{z}/z_0, z_0/|L|) = a(\bar{z}/z_0)^b \quad (147)$$

donde a y b son parámetros que dependen de z_0/L , cuyos valores así como los coeficientes de correlación (r) para los distintos casos analizados también se incluyen en la Tabla I. Relacionando estas últimas con (22), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\frac{k}{u_*} (\bar{u}_T - \bar{u}) &= \ln c - \left(\frac{s \Gamma(2/s)}{\Gamma(1/s) \Gamma(1/s)} \right) a \left(\frac{\bar{z}}{z_0} \right)^{b-1} + \ln \left[1 + \left(1 + 15 \frac{z_0 \bar{z}}{|L| z_0} \right)^{1/2} \right] \\
&+ 2 \left\{ \ln \left[1 + \left(1 + 15 \frac{z_0 \bar{z}}{|L| z_0} \right)^{1/4} \right] \right. \\
&\left. - \operatorname{arctg} \left[\left(1 + 15 \frac{z_0 \bar{z}}{|L| z_0} \right)^{1/4} \right] \right\} \text{ para } L < 0 \quad (148)
\end{aligned}$$

CAPÍTULO VII

DISPERSION VERTICAL DE LOS CONTAMINANTES EN LA ATMOSFERA

VII. DISPERSION VERTICAL DE LOS CONTAMINANTES EN LA ATMOSFERA

El próximo problema a resolver es el que dada la distancia horizontal a la fuente es necesario encontrar "la altura media" correspondiente al centro de masa del conjunto de contaminantes (\bar{z}). El significado físico equivalente sería, puesto que se considera una fuente continua, la "trayectoria" de una partícula "típica" de los contaminantes emitidos. Consecuentemente con lo planteado, debe relacionarse $d\bar{z}/dt$ con la velocidad media de transporte de contaminantes ($\bar{u}_T \equiv d\bar{x}/dt$). Puesto que se han encontrado distintas expresiones para ellas, dependiendo del tipo de estratificación atmosférica, se analizarán por separado los casos de estratificación neutral, estable e inestable. Se considerará $x \equiv \bar{x}$.

VII.1. Estratificación neutral ($L \rightarrow \infty$) y estable ($L > 0$)

Según las ecuaciones (131) y (144):

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = k u_* \phi \left(\frac{\bar{z}}{z_0}, \frac{z_0}{L} \right) = \frac{k u_*}{0.74} 0.74 \phi(\bar{\zeta}, \zeta_0)$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{u_*}{k} \left\{ \ln \left[c \frac{\bar{z}}{z_0} \right] + 4.7 \frac{\bar{z}}{L} \right\}$$

Efectuando el cociente se obtiene:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{z}} = \frac{0.74}{k^2} \left\{ \ln \left[c \frac{\bar{z}}{z_0} \right] + 4.7 \frac{\zeta_0 \bar{\zeta}}{\bar{z}} \right\} \frac{1}{0.74 \phi(\bar{\zeta}, \zeta_0)} \quad (149)$$

$$\frac{k^2}{0.74} \frac{\bar{x}}{z_0} = \int_1^{\bar{z}/z_0} \frac{\ln [c \bar{\zeta}] + 4.7 \zeta_0 \bar{\zeta}}{0.74 \phi(\bar{\zeta}, \zeta)} d\bar{\zeta} \quad (150)$$

Pero de (129), (130), (119) y (21), resulta que:

$$0.74 \phi(\bar{\zeta}, \zeta_0) = \frac{\Gamma(n/s)}{\Gamma(1/s)} \left[\frac{\Gamma(1/s)}{\Gamma(2/s)} \right]^{n-1} \left[\frac{0.74}{0.74 + 4.7 \zeta_0 \bar{\zeta}} \right]^2 \quad (151)$$

con

$$n = 1 - \frac{4.7 \zeta_0 \zeta}{0.74 + 4.7 \zeta_0 \zeta}$$

$$s = 1 + \frac{1 + 4.7 \zeta_0 \zeta}{\ln \zeta + 4.7 \zeta_0 \zeta} + \frac{4.7 \zeta_0 \zeta}{0.74 + 4.7 \zeta_0 \zeta}$$

calculados en $\zeta = \bar{\zeta}$

según se encontró en (119) y (126). Debe recordarse que el parámetro "c" es función del exponente general (s), y, en consecuencia, de la altura y de la estabilidad atmosférica.

VII.2. Estratificación inestable ($\dot{L} < 0$)

Análogamente, según las ecuaciones (131) y (146):

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{k u_*}{0.74} 0.74 \phi(\bar{\zeta}, \zeta_0)$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{u_*}{k} \left\{ \ln (c \bar{\zeta}) + c_1 - \frac{s \Gamma(2/s)}{\Gamma(1/s) \Gamma(1/s)} \frac{B(\bar{\zeta}, \zeta_0)}{\bar{\zeta}} \right\}$$

con

$$B(\bar{z}, z_0) = a \bar{z}^{-b}$$

$$c_1 \equiv \ln [(\mu^2 + 1)(\mu_0 + 1)^2] - 2 \operatorname{arctg}(\mu_0) \quad (152)$$

De acuerdo con (129), (130), (121) y (20), se obtiene:

$$0.74 \phi(\bar{z}, z_0) = \frac{\Gamma(n/s)}{\Gamma(1/s)} \left[\frac{\Gamma(1/s)}{\Gamma(2/s)} \right]^{n-1} \frac{1 + 13.5 |\zeta_0| \bar{z}}{\sqrt{1 + 9 |\zeta_0| \bar{z}}} \quad (153)$$

con

$$n = 1 + \frac{4.5 |\zeta_0| \zeta}{1 + 9 |\zeta_0| \zeta}$$

$$s = 1 + \frac{\mu^{-1}}{\ln \zeta + 2 \operatorname{arctg}(\mu) - \ln [(\mu^2 + 1)(\mu + 1)^2] + c_1} - \frac{4.5 |\zeta_0| \zeta}{1 + 9 |\zeta_0| \zeta}$$

calculados en $\zeta = \bar{z}$. Consecuentemente, al relacionar la distancia horizontal a la fuente de emisión con la altura "media" de los contaminantes resulta:

$$\frac{k^2}{0.74} \frac{\bar{x}}{z_0} = \int_1^{\bar{z}/z_0} \frac{\ln [c \bar{z}] + c_1 - \left(\frac{s \Gamma(2/s)}{\Gamma(1/s) \Gamma(1/s)} \right) \frac{B(\bar{z}, z_0)}{\bar{z}}}{0.74 \phi(\bar{z}, z_0)} d\bar{z} \quad (154)$$

Las integrales indicadas en (150) y (154) fueron resueltas numéricamente utilizando el método mencionado en VI.3., en el rango $10 < \bar{z}/z_0 < 10^4$ y con $\zeta_0 = 0, \pm 10^{-4}, \pm 10^{-3}, \pm 10^{-2}$ (Apéndice G). Cabe aclarar que el límite inferior de

las integrales fue tomado en $\bar{z}/z_0 = 2$ y no en 1 (en el caso experimental incluido en este trabajo la diferencia es menor que el centímetro) debido a que en las proximidades de $\bar{z} = z_0$, los valores de s no pueden calcularse mediante las expresiones dadas, pues tienden a ∞ .

La Figura 6 muestra los resultados obtenidos de $\bar{z}/z_0 = f(\bar{x}/z_0)$ para los valores de ζ_0 mencionados. Puede apreciarse que en el caso de mayor estabilidad ($\zeta_0 = 10^{-2}$), la escasa altura que adquiere la "trayectoria media" del contaminante, aún lejos de la fuente emisora. Una situación inversa se plantea para el caso de mayor inestabilidad ($\zeta_0 = -10^{-2}$). También debe destacarse que para $\zeta_0 = \pm 10^{-4}$ los valores se distinguen del caso neutral a partir de $(k^2/0.74) \cdot (\bar{x}/z_0) > 300$.

Por último, cabe mencionar que la función graficada es continua y suave. Por lo tanto, a los fines prácticos, para un valor dado de cualesquiera de las variables, es fácilmente obtenible el valor de la otra mediante interpolación.

CAPÍTULO VIII

CONCENTRACION LATERAL INTEGRADA DE CONTAMINANTES EN EL AIRE

VIII. CONCENTRACION LATERAL INTEGRADA DE CONTAMINANTES EN EL AIRE

Denominando Q , a la cantidad de contaminantes emitida en la unidad de tiempo por una fuente continua, se debe cumplir por condiciones de continuidad que:

$$Q = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u} C(x,y,z) dy dz \quad (155)$$

Suponiendo que la velocidad media del viento es $\bar{u} = \bar{u}(z)$ y recordando la definición de la concentración lateral integrada (ecuación (53)), Q quedará expresada de la siguiente forma:

$$Q = \int_0^{\infty} \bar{u}(z) C_y(x,z) dz \quad (156)$$

y de la ecuación (138):

$$C_y(x,z) = C_y(x,0) \exp \left[- \left(\frac{\Gamma(2/s) |z|}{\Gamma(1/s) \bar{z}} \right)^s \right]$$

resulta

$$Q = C_y(x,0) \int_0^{\infty} \bar{u}(z) \exp \left[- \left(\frac{\Gamma(2/s) z}{\Gamma(1/s) \bar{z}} \right)^s \right] dz \quad (157)$$

Por lo tanto, es necesario reemplazar $\bar{u}(z)$ para los distintos tipos de estratificación atmosférica y efectuar la integración.

VIII.1. Estratificación neutral y estable

Para este caso, la velocidad del media del viento utilizada es (ecuación (22)):

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \left[\ln \left(\frac{z}{z_0} \right) + 4.7 \frac{z}{L} \right]$$

y aplicando los resultados encontrados en el Apéndice F, se obtiene:

$$\frac{k Q}{u_* z_0 c_y(x,0)} \equiv \tilde{c}_y^{-1} = \frac{\Gamma(1/s)\Gamma(1/s)}{s \Gamma(2/s)} \left(\frac{\bar{z}}{z_0} \right) \left\{ \ln \left[c \frac{\bar{z}}{z_0} \right] + 4.7 \frac{\bar{z}}{L} \right\} \quad (158)$$

con \tilde{c}_y denotando la concentración lateral integrada adimensionalizada.

VIII.2. Estratificación inestable

Recordando que la velocidad media del viento para esta condición es (ecuación (23)):

$$\frac{k \bar{u}(z)}{u_*} = \ln(z/z_0) + \ln \left[\frac{(\mu_0^2 + 1)(\mu_0 + 1)^2}{(\mu + 1)^2(\mu^2 + 1)} \right] + 2 [\arctg(\mu) - \arctg(\mu_0)]$$

y utilizando los resultados obtenidos en Apéndice F, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{k Q}{u_* z_0 c_y(x,0)} \equiv \tilde{c}_y^{-1} = & \frac{\Gamma(1/s) \Gamma(1/s)}{s \Gamma(2/s)} \left(\frac{\bar{z}}{z_0} \right) \left\{ \ln \left[c \frac{\bar{z}}{z_0} \right] + \right. \\ & \left. + \ln \left[(\mu_0^2 + 1)(\mu_0 + 1)^2 \right] - 2 \arctg(\mu_0) \right\} - B \left(\frac{\bar{z}}{z_0}, \frac{z_c}{L} \right) \end{aligned} \quad (159)$$

De la vinculación entre (\bar{z}/z_0) y (\bar{x}/z_0) para las condiciones atmosféricas consideradas (ecuaciones (150) y (154)) es posible relacionar la concentración lateral integrada adimensionalizada (\bar{c}_y) con la distancia adimensionalizada a la fuente (\bar{x}/z_0) (Figura 7 y Tabla II) y compararla con datos observados.

CAPÍTULO IX

COMPARACION CON DATOS OBSERVACIONALES

IX. COMPARACION CON DATOS OBSERVACIONALES

El modelo obtenido fue aplicado a las condiciones en las que se desarrollaron las experiencias de Proyecto Prairie Grass (Barad, 1958). Dicho proyecto constituye un programa experimental llevado a cabo entre julio y agosto de 1956 en Nebraska (EEUU) durante el que se midió la concentración de SO_2 emitido durante 10 minutos por una fuente localizada a 0.50 m del suelo. Los receptores estaban distribuidos en arcos ubicados a 50, 100, 200, 400 y 800 m de distancia de la fuente y a una altura de 1.50 m de la superficie, separados entre sí a intervalos de 2° excepto el arco de 800 m en el que la separación fue de 1° . Además, en el arco de 100 m se midió la concentración en los niveles 0.5, 1.0, 1.5, 2.5, 4.5, 7.5, 10.5, 13.5 y 17.5 m. Asimismo, se efectuaron observaciones de la velocidad del viento y la temperatura del aire en 0.25, 0.5, 1, 2, 4, 8 y 16 m.

Se contó con información sinóptica; a modo de ejemplo, en cada experimento, se midió la presión, la temperatura, la velocidad del viento a 2 m de altura, la humedad relativa, la cobertura y el tipo de nubosidad, etc.

En total fueron realizados 70 experimentos, en distintos días y horas a fin de disponer de observaciones bajo distintas situaciones meteorológicas. La superficie era aerodinámicamente lisa.

En primer lugar se clasificaron las rondas de acuerdo con la estabilidad atmosférica y se las dividió en tres grupos: neutral, estable e inestable. Para ello, se utilizó la longitud de Monin-Obukhov (expresión (14)). Para su cálculo se empleó la siguiente metodología: se estimaron los valores del número de Richardson utilizando la relación (11), considerando la diferencia de temperatura y velocidad de viento entre los niveles 4m y 1m y la temperatura a 2 m de

altura. Estos valores se encuentran en la Tabla III.

De las relaciones de Businger (1973) se obtuvieron las siguientes relaciones entre L y Ri :

$$1/L = \begin{cases} \frac{0.74 - 9.4 Ri \pm \sqrt{0.55 + 4.9 Ri}}{z(44.18 Ri - 9.4)} & \text{si } z/L > 0 \\ Ri/z & \text{si } z/L < 0 \end{cases} \quad (160)$$

$$(161)$$

Mediante estas expresiones se obtuvieron los valores de L para las diferentes rondas (Tabla III).

Otro parámetro a evaluar fue z_0 , que caracteriza el tipo de terreno, y, en consecuencia, para tal proyecto, tiene un valor fijo. Para ello, se seleccionaron las rondas con $|L^{-1}| < 0.015 \text{ m}^{-1}$, en total 12, que pueden ser caracterizadas como de estratificación atmosférica casi neutral. Para tales casos, mediante la expresión (10):

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \ln(z/z_0)$$

adoptando un valor de $k = 0.35$ (Businger y otros, 1971), considerando los valores de $\bar{u}(z)$ en los niveles mencionados y corregidos en un 10% según las recomendaciones efectuadas (Izumi y Barad, 1970) para el tipo de instrumentos utilizados, se hallaron los valores de u_* y z_0 , mediante la siguiente correlación lineal:

$$\ln z = \ln z_0 + \frac{k}{u_*} u(z) \quad (162)$$

El valor medio de z_0 fue 0.008 m.

Los valores de u_{*} para cada ronda fueron deducidos de la regresión lineal entre la velocidad del viento y la altura, adoptando en cada caso, según correspondiese, el perfil de velocidad correspondiente al tipo de estratificación atmosférica considerado (Tabla III).

Debido a que la fuente de emisión estaba a una altura de 0.5 m y los muestreadores de los contaminantes a 1.5 m, fue necesario calcular la concentración lateral integrada para cada ronda a una "altura efectiva" de 1 m, mediante:

$$C_y(x, 1m) = \int_{-\infty}^{\infty} C(x, y, 1m) dy \quad (163)$$

discretizada, en los arcos ubicados a $x = 50$ m, 100 m, 200 m, 400 m y 800 m de la siguiente forma:

$$C_y(x, 1m) \approx (\sum C_j) \frac{\delta \pi}{180^\circ} x \quad (164)$$

con $\delta = 2^\circ$ ó 1° según la distribución de los medidores en el arco considerado (Tabla IV). Con los valores de Q (Tabla III) y de C_y (Tabla IV) se obtuvieron los \tilde{C}_y mediante

$$\tilde{C}_y(x, 1m) \equiv \tilde{C}_e \equiv \frac{u_* z_0 C_y(x, 1m)}{k Q} \quad (165)$$

para cada arco de cada ronda, denotando con el subíndice "e" que dicho valor es experimental.

Con el objeto de comparar los resultados obtenidos mediante (165) con los estimados por el modelo (\tilde{C}_c), se debe utilizar la ecuación (138):

$$c_y(x,z) = c_y(x,0) \exp \left[- \left(\frac{\Gamma(2/s) |z|}{\Gamma(1/s) \bar{z}} \right)^s \right]$$

y como $z = 1$ m y $z_0 = 0.008$ m, se obtiene:

$$\tilde{c}_c \equiv \tilde{c}_y(x,1m) = \tilde{c}_y(x,0) \exp \left[- \left(\frac{\Gamma(2/s)/\Gamma(1/s) 125}{\bar{z}} \right)^s \right] \quad (166)$$

Para evaluar (166) se procedió de la manera siguiente: para cada ronda y fijado el arco (es decir la distancia x) se calculó la altura media (\bar{z}) de los contaminantes de acuerdo con las expresiones (150) y (154). Con dicho valor se evaluó el exponente general s , suponiendo $K_z = K_h$, mediante (126) y (128) y además $\tilde{c}_y(x,0)$ con las relaciones (158) y (159), de acuerdo con la clase de estabilidad atmosférica considerada. Para las rondas de estratificación inestable, fue necesario obtener la función $B(\bar{z}/z_0, z_0/|L|)$. Para ello, fijada la ronda, se conoce el valor que corresponde de z_0/L ; con éste y un conjunto de alturas z en el rango de interés se calculó la función B mediante (F18). Luego se aproximó esta función numéricamente a una forma potencial, según (147):

$$B(\bar{z}/z_0, z_0/|L|) = a(\bar{z}/z_0)^b$$

Si se establece una comparación entre las estimaciones de la concentración dadas por el modelo (\tilde{c}_c) y las observadas (\tilde{c}_e) (Figura 8), puede concluirse que el ajuste es bueno pues, utilizando como parámetro de validación el coeficiente de correlación (r) su valor es de 0.945 sobre los 156 casos analizados. La predicción es mejor en los casos de estratificación estable ($r = 0.987$ sobre 70 casos) que en los correspondientes a condiciones inestables ($r = 0.912$ sobre 86 casos).

Excepto para los casos de gran estabilidad ($z_0/L > 5 \cdot 10^{-4}$) o muy inestables y próximos a la fuente de emisión ($z_0/L < -7 \cdot 10^{-4}$ y a no más de 50 m), el modelo expuesto sobreestima la concentración, siendo esta sobreestimación mayor con la distancia a la fuente. Por otro lado, sólo en 23 casos el modelo subestimó los valores de la concentración y su error mayor no superó el 35%.

En términos absolutos, puede decirse que las mayores discrepancias, de sobreestimación, se encuentran para situaciones de mayor inestabilidad atmosférica y a distancias lejanas a la fuente ($z_0/L < -7 \cdot 10^{-4}$ y $x = 800$ m). De las 156 observaciones hay sólo siete casos en los que los errores superan el 100%, siendo en los dos casos extremos, del 310% y 187%.

El promedio de la diferencia relativa entre los valores estimados por el modelo y los medidos es de + 36%, sobre la totalidad de casos, siendo representativa de la discrepancia observada pues, como ya se mencionó, el modelo sobreestima los valores de la concentración. Si se analiza por separado los errores medios relativos en función de la distancia a la fuente de emisión, se encuentra que para 50 m éste es del 16.4%, para 100 m del 18.2%, para 200 m del 27.3%, para 400 m del 45.4% y por último, para 800 m del 70.5%, con una dispersión standard del promedio fluctuando entre el 4 y el 12%. Debe tenerse presente que el modelo expuesto no tiene en cuenta, entre otros factores, el depósito de contaminantes, pudiéndose así explicarse que sus estimaciones de concentración resultan mayores que las realmente observadas, especialmente a mayores distancias. Lo expuesto se presenta en la Tabla V.

Finalmente, se compararon las predicciones del modelo con las provenientes del conocido y ampliamente utilizado modelo gaussiano (Turner, 1970). Para aplicar el modelo de la pluma gaussiana se determinó la clase de estabilidad me-

dian- te la velocidad del viento (\bar{u}) y la altura solar (Turner, 1964) y, conocien- do la distancia a la fuente de emisión, se obtuvo el coeficiente de dispersión vertical (σ_z) mediante la interpolación de las curvas correspondientes (Turner, 1970). Admitiendo que la altura efectiva de emisión (H) era igual a la de la fuente (0.50 m), corroborado por el modo de realizar el experimento (Barad, 1956), se determinó la concentración lateral integrada mediante:

$$C_y(x,z) = \frac{Q}{\sqrt{2\pi} \sigma_z(x) \bar{u}} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z-H}{\sigma_z} \right)^2 \right] + \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z+H}{\sigma_z} \right)^2 \right] \right\} \quad (167)$$

Consecuentemente, se seleccionaron seis rondas (4 estables y 2 inestables) "típicas", tratando de incluir aquéllas en las que las estimaciones de la concentración obtenidas por el modelo expuesto (en adelante, modelo "s") eran representativas de los resultados para las distintas estratificaciones atmosféricas consideradas. De esta manera se dispusieron de 24 casos a comparar: las predicciones a 50 m de la fuente no pudieron calcularse con el modelo gaussiano debido a que los valores de σ_z dados por Turner (1970) están presentados para distancias de la fuente de emisión mayores o iguales que 100 m. Asimismo, debe considerarse que las estimaciones dadas por el modelo "s" son, para esa distancia, las más ajustadas a las mediciones efectuadas.

No obstante, en términos generales, del total de 24 casos, 18 de ellos tienen una mejor estimación mediante el modelo "s" mientras que las restantes 6 favorecen al modelo gaussiano (Tabla VI).

Si se analiza la discrepancia más notable dada por cada modelo se en-

cuentra que: para las sobreestimaciones, el gaussiano tiene una que alcanza el 194% contra otra de 96% para el "s", respecto de la concentración efectivamente medida. Debe notarse que ambas coinciden en el caso (estratificación más inestable y más lejos de la fuente). Respecto de las subestimaciones, la discrepancia extrema presentada por el modelo gaussiano es de -82% contra -33% del modelo "s". Nuevamente se observan en el mismo caso y éste es ahora el de la estratificación más estable y a una distancia lejana a la fuente. También, debe remarcarse, que el modelo gaussiano, en general, subestima la concentración de contaminantes: sobre el total de 24 casos analizados, 19 de ellos se encuentra en esta situación, mientras que sólo 4 corresponden al modelo "s".

CAPÍTULO X

CONCLUSIONES

X. CONCLUSIONES

A partir de la ecuación semiempírica de difusión, aplicada al caso de una fuente de emisión continua de contaminantes ubicada en el origen de coordenadas, y suponiendo que tanto el perfil vertical de la velocidad del viento como el de la difusividad turbulenta varían en forma potencial con la altura, se obtiene una expresión destinada a encontrar la concentración lateral integrada de contaminantes en el aire. Esta solución es del tipo exponencial general, que se transforma en la fórmula gaussiana si se consideran \bar{u} y K constantes.

De acuerdo con esta solución, la concentración lateral integrada depende de: las coordenadas del punto del espacio, del exponente "s", de la altura media de los contaminantes y de la velocidad media de transporte. Sucesivamente se desarrollaron expresiones destinadas a evaluar "s", la velocidad media de transporte de los contaminantes y de la altura media de los mismos en función de la estabilidad de la atmósfera, de la altura y de la rugosidad del terreno.

De lo encontrado, se concluye que el exponente "s" no es una constante como fuera tomado hasta el presente en modelos de este tipo, sino que varía con la estabilidad de la atmósfera, siendo menor en condiciones inestables y mayor en estables. Asimismo, depende de la distancia a la fuente de emisión: en condiciones de estabilidad atmosférica aumenta con la distancia y disminuye con la misma cuando la atmósfera está inestablemente estratificada. Por último, es función de la rugosidad del terreno.

Además, se obtuvo que existe una diferencia entre la velocidad media del viento y la de transporte de contaminantes debido al perfil vertical de la velocidad media del viento cercano al suelo. En general, la velocidad de trans

porte es menor que la del viento. Esta diferencia cerca de la fuente de emisión es mayor en casos inestables que en los estables y a mayores distancias esta relación se invierte. Esto se justifica teniendo en cuenta que en condiciones más inestables la mayor turbulencia de origen térmico tiende a la homogeneización de la atmósfera, y por lo tanto, se observa que a mayor altura se aproxima a la velocidad media del viento.

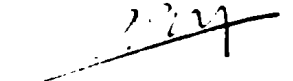
Por otra parte, la forma final de la altura media de los contaminantes permite indicar que ellos se propagan verticalmente a mayores alturas cuando las condiciones son de inestabilidad de la atmósfera comparativamente con lo encontrado para una atmósfera estratificada establemente.


Como corolario del encadenamiento teórico del modelo desarrollado, se estimó la concentración lateral integrada en función de la distancia a la fuente emisora. Se encuentra que en condiciones inestables, el modelo predice menores concentraciones que en una atmósfera estable.

Con el objeto de efectuar una evaluación del modelo propuesto, se calcularon los parámetros necesarios para comparar las predicciones con los datos experimentales provenientes del Proyecto Prairie Grass. De esta comparación surge una buena correlación, con un ajuste algo mejor para la estratificación estable. En términos generales, la concentración de contaminantes está sobreestimada, consecuencia atribuible a que el modelo no tiene en cuenta el depósito de los contaminantes en el suelo, pues, congruentemente con los resultados, esta sobreestimación aumenta con la distancia.

Cabe destacar que el modelo desarrollado se desempeña mejor, en general, que el modelo gaussiano, y es aplicable a situaciones reales. Tal afirmación se refuerza en el hecho de que raramente subestima la concentración, de vital

importancia para cuestiones vinculadas con la contaminación atmosférica. Asimismo la sobreestimación media es del orden del 30% respecto a los valores observados, resultando bastante satisfactorio para modelos de estimación en concentración de contaminantes.


Nicolás A. Mazio


CARLOS A. MAZIO

AGRADECIMIENTOS

AGRADECIMIENTOS

Quisiera dejar expresado aquí, en primer lugar, mi reconocimiento por la dedicación brindada en la guía y supervisión de este trabajo, a mi Director de Tesis, Dr. Nicolás A. Mazzeo. Asimismo, al Lic. Daniel Vara, quien además de ser un mentor en la búsqueda del perfeccionamiento científico, contribuyó fundamentalmente a mi formación profesional.

También deseo manifestar el afecto y el estímulo brindados por el Ing. Néstor Lanfredi, los Caps. Alfredo Yung y Jorge Albertani, las Dras. Ana Osella y Silvia Duhau, y los Dres. Daniel Bruno y Jorge Novarini y los de muchos de mis amigos, quienes, sin mencionarlos, saben de mi aprecio y agradecimiento por la confianza depositada en mí.

Por último, el Servicio de Hidrografía Naval y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas facilitaron y posibilitaron en gran medida que esta tesis llegase a término, así como la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA) fue el ámbito donde desarrollé mi labor y en cuyos claustros he abrevado conocimientos durante más de la mitad de mi vida.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

- Bankoff, S.G. y Hanzenack, E.L.: The adaptive filtering transport model for prediction and control of pollutant concentration in an urban airshed, Atmos. Environ. Vol. 9, 1975.
- Barad, M.L.: Project Prairie Grass. A field program of diffusion, Geophys. Res. Pap. N°59, Vol. I y II, AFCRC-TR-58-235, 1958.
- Benoit, R.: On the integral of the surface layer profile-gradient functions, Journal of Appl. Met., Vol. 16, 1977.
- Beryland, M.Y.: Contemporary Problems of Atmospheric Diffusion and Pollution of the atmosphere, Leningrad (Translate by EPA), Gichometeorat, 1975.
- Bonivento, C. y Tonielli, A.: Short-terms forecasting of local winds by black-box models, Mathematical models for planning and controlling air quality, Hasa Proceedings Series, Vol. 17, Oxford, Pergamon Press, 1982.
- Bosanquet, C.H. y Pearson, J.L.: The spread of smoke and gases from chimneys, Trans. Faraday Soc., Vol. 32, 1936.

- Boussinesq, J.: Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section, Paris, Gauthier-Villars, Vol. I y II, 1897.
- Box, G.E.P. y Jenkins, G.M.: Time Series Analysis, Forecasting and Control, San Francisco, Holden-Day, 1970.
- Bronshtein, I. y Semendiaev, K.: Manual de Matemáticas, Buenos Aires, Ediciones Sapiens, 1976.
- Businger, J.A.: Transfer of heat and momentum in the atmospheric boundary layer, Proc. Arctic Heat Budget and Atmospheric Circulation, Santa Mónica, RAND Corp., 1966.
- Businger, J.A., Wyngaard, J.C., Izumi, I. y Bradley, E.F.: Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer, Journal of the Atmosph. Sciences, Vol. 28, 1971.
- Businger, J.A.: In Workshop on Micrometeorology, Haugen, D.A. (ed.), American Meteorology Society, 1973.
- Calder, K.L.: Eddy diffusion and evaporation in flow over aerodynamically smooth and rough surfaces: a treatment based on laboratory laws of turbulent flow with special reference to conditions in the lower atmosphere, J.Mech. and Appl. Math., Vol. 11, nº2, 1949.

- Carslaw, H.S. y Jaeger, J.C.: Conduction of Heat in Solids, Oxford, Oxford at the Clearendon Press, 1959.
- Cermak, J.E.: Lagrangian similarity hypothesis applied to diffusion in turbulent shear flow, J.Fluid Mech., Vol. 15, 1963.
- Chatwin, P.C.: The dispersion of a puff of passive contaminant in the constant stress region, Quart. J. Roy. Met. Soc., Vol. 94, 1968.
- Chatwin, P.C. y Sullivan, P.J.: The basic structure of clouds of diffusing contaminant. Mathematical modelling of turbulent diffusion in the Environment, New York, Academic Press, 1979.
- Christensen, O. y Prahm, L.P.: A pseudospectral model for dispersion of atmospheric pollutants, Journal of App.Met., Vol. 15, 1976.
- Davies, D.R.: Three dimensional turbulence and evaporation in the lower atmosphere II, J.Mech. and Appl.Math., Vol. III, n°1, 1950.
- Deacon, E.L.: Vertical Diffusion in the Lowest Layers of the Atmosphere, Quart. J. Roy. Met. Soc., Vol. 75, 1949.
- Deardorff, J.W.: Preliminary results from numerical integrations of the unstable planetary boundary layer, Journal of the Atmosph. Sciences, Vol. 27, 1970.

- Donaldson, C.D.: Construction of a Dynamic Model of the Production of the Atmospheric Turbulence and the dispersion of Pollutants, In Workshop on Micrometeorology, A.M.S., 1973.
- Egan, B.A. y Mahoney, J.R.: Numerical modeling of advection and diffusion of urban area source pollutants, Journal of Appl. Met., Vol. 11, 1972.
- Finzi, G., Fronza, G. y Rinaldi, S.: Stochastic modeling and forecast of the dosage area product, Atmos. Environ., Vol. 12, 1978.
- Frost, R.: Turbulence and diffusion in the lower atmosphere, Proc. Roy. Soc., Vol. A, N°186, 1946.
- Gifford, F.A.: Diffusion in the diabatic surface layer, Journ. of Geoph. Res., Vol. 67, n°8, 1962.
- Izumi, I. y Barad, M.L.: Wind speeds as measured by cup and sonic anemometers and influenced by tower structure, Journal of the Appl. Met., Vol. 9, 1970.
- Kampé de Fériet, J.: Averaging processes and Reynolds equations in atmospheric turbulence, Journal of Met., Vol. 8, 1951.
- Klug, W.: Diffusion in the atmospheric surface layer: comparison of similarity theory with observations, Quart. J. Roy. Met. Soc., Vol. 94, 1968.

- Labraga, J.C. y Barros, V.C.: Un modelo numérico de difusión de contaminantes, *Geoacta*, Vol. 10, N°1, 1979.
- Lange, R.: ADPIC - A three-dimensional computer code for the study of pollutant dispersal and deposition under complex conditions, Report UCRL-51 462, California, Lawrence Livermore Laboratory, 1973.
- Long, P.E. y Pepper, D.W.: A comparison of six numerical schemes for calculating the advection of atmospheric pollution, Proc. Third Symp. on Atm. Turb. Diff. and Air Quality, 1976.
- Magnus, W. y Oberhettinger, F.: Formulas and theorems for the functions of mathematical physics, New York, Chelsea Publishing Company, 1949.
- Mazio, C.A.: Algunos aspectos teóricos de la difusión atmosférica, Univ. de Bs.As., Fac. de Cs. Ex. y Nat., Depto. de Meteorología, Publ. N°15, 1983.
- Mazio, C.A. y Mazzeo, N.A.: Transporte de contaminantes en la capa de superficie de la atmósfera neutralmente estratificada, Univ. de Bs.As., Fac. de Cs. Ex. y Nat., Dpto. de Meteorología, Publ. N°13, 1983.
- Mazzeo, N.A.: Difusión vertical de contaminantes en terreno rugoso, *Meteorológica*, Vol. VIII/XI, 1978.

- Mazzeo, N.A.: Difusión turbulenta en la capa de superficie atmosférica, Meteorológica, Vol. XI, n°1, 1980.
- Mazzeo, N.A. y Venegas, L.E.: Difusión vertical atmosférica en la capa límite planetaria. Meteorológica, Vol. XI, n°2, 1980.
- Mazzeo, N.A.: Descripción de parámetros utilizados en el modelado de la dispersión atmosférica. Revista Geofísica (IPGH), N°16, 1982a.
- Mazzeo, N.A.: Algunos procedimientos para la formulación de la hipótesis de Monin-Obukhov en la capa de superficie de la atmósfera, Geoacta, Vol. 11, N°2, 1982b.
- Mazzeo, N.A. y Foppiano, M.C.: Variaciones del coeficiente lateral de dispersión atmosférica (Presentado al CONGREGMET IV, Buenos Aires, 1982), A publicar en Meteorológica.
- :
- Mazzeo, N.A. y Venegas, L.E.: Hipótesis de la semejanza lagrangeana y difusión vertical de los contaminantes en la capa de superficie atmosférica, Meteorológica, Vol. XIII, n°1, 1982.
- Mazzeo, N.A. y Ulke, A.G.: La hipótesis de la semejanza "local" y la difusión vertical de los contaminantes en la atmósfera, Univ. de Bs.As., Fac. de Cs. Ex. y Nat., Dpto. de Meteorología, Publ. N°10, 1983.

- Mazzeo, N.A.: Consideraciones sobre la ecuación de continuidad, Univ. de Bs. As., Fac. de Cs. Ex. y Nat., Dpto. de Meteorología, Publ. N°26, 1 84.
- Mazzeo, N.A. y Venegas, L.E.: Una discusión sobre las "constantes" b y c de la hipótesis de la semejanza lagrangeana aplicada a la dispersión vertical atmosférica de los contaminantes, Geoacta, Vol. 12, N°1, 1984.
- Mc Collister, G.M. y Wilson, K.R.: Linear stochastic model for forecasting daily maxima and hourly concentrations of air pollutants, Atmos. Environ. Vol. 9, 1975.
- Monin, A.S.: Smoke propagation in the surface layer of the atmosphere. Adv. in Geophys., Vol. 6, 1959.
- Monin, A.S. y Yaglom, A.M.: Statistical Fluid Mechanics, Boston, The M.I.T. Press, 1971.
- Necco, G.V.: Curso de cinemática y dinámica de la atmósfera, Buenos Aires, Editorial Univ. de Bs. As., 1980.
- Nieuwstadt, F.T.M.: An analytic solution of the time-dependent on dimensional diffusion equation in the atmospheric boundary layer, Atmos. Environ., Vol. 14, 1980.

- Obukhov, A.M.: Turbulence in a Temperature Inhomogeneous Atmosphere, Tr. In-Ta Teoret Geofiz. Akad. Nauk. USSR1, 1916.
- Pasquill, F.: Lagrangian similarity and vertical diffusion from a source at ground level, Quart. J.Roy.Met.Soc., Vol. 92, 1966.
- Pasquill, F.: Prediction of Diffusion over an Urban Area-Current Practice and Future Prospects, in Proceedings of a Symposium on Multiple-Source Urban Diffusion Models, Chapel Hill N.C., U.S.Air Pollution Control Office, Publication AP-86, pp.3. 1-3.26, 1970.
- Pasquill, F.: Atmospheric Diffusion, New York, John Wiley and Sons Inc., 1974.
- Pasquill, F. y Smith, F.B.: Atmospheric Diffusion, Third ed., New York, John Wiley and Sons Inc., 1983.
- Paulson, C.A.: The mathematical representation of wind speed and temperature profiles in the unstable atmospheric surface layer, Journal of Appl. Met., Vol. 9, 1970.
- Prahm, L.P. y Christensen, O.: Long-range transmission of pollutants simulated by a two-dimensional pseudo-spectral dispersion models, Journal of Appl. Me ., Vol. 16, 1977.

- Prandtl, L.: Meteorologische Anwendungen der Stromungslehre (Meteorological Applications of Fluid Dynamics), Beitr. Phys. fr. Atmosph., Vol. 19, 1932.
- Priestley, C.H.: Turbulent Transfer in the Lower Atmosphere, Chicago, The University of Chicago Press, 1959.
- Ralston, A.: Mathematical methods for digital computers, New York, Ed. by A. Ralston and H.Wilf, 1960.
- Reynolds, O.: On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A., Vol. 186, 1894.
- Roberts, K.V. y Weiss, N.O.: Convective difference schemes, Math. Comput., Vol. 20, 1966.
- Rounds, W.: Solutions of the two-dimensional diffusion equations, Trans. Amer. Geoph. Union, Vol. 36, 1955.
- Schwartz, L.: Métodos matemáticos para las ciencias físicas, Madrid, Seleccion Científicas, 1969.
- Slade, D.H. (ed.): Meteorology and Atomic Energy, USAEC, Report TID-24190, Environmental Science Service Administration, 1968.

- Smith, F.B.: The diffusion of smoke from a continuous elevated point-source into a turbulent atmosphere, J.Fluid Mech., Vol.2, 1957.
- Smith, F.B.: Convection-diffusion processes below a stable layer, MRP, N°1048, 1957b.
- Smith, F.B.: Convection-diffusion processes below a stable layer - Part II, MRP, N°1073, 1957c.
- Smith, F.B.: A scheme for estimating the vertical dispersion of a plume from a source near ground level, Proc. of the Third Meeting of the expert as panel on Air Poll. Mod., NATO-CCMS, 1972.
- Soeda, T. y Sawaragi, Y.: ARIMA and GMDH forecasts of air quality, Mathematical Models for Planning and Controlling Air Quality, HASA Proceedings Series, Vol. 17, Oxford, Pergamon Press, 1982.
- Sutton, O.G.: A theory of eddy diffusion in the atmosphere, Proc. Roy. Soc., Vol. A., N°146, 1932.
- Sutton, O.G.: Micrometeorology, New York, Mc Graw-Hill Book Comp., 1953.
- Swinbank, W.C.A.: Comparison between predictions of dimensional analysis for the Constant-Flux Layer and observations in Unstable Conditions, Quart. J.Roy.Met.Soc., Vol. 94, 1968.

- Taylor, G.I.: Diffusion by continuous movements. Proc. London Math.Soc., Sec. 2.20, 1921.

- Teske, M.E. y Lewellen, W.S.: Example calculations of atmospheric dispersion using second-order closure modelling, Proc. Third Symp. on Atmospheric Turbulence, Diffusion and Air Quality, A.M.S., 1976.

- Turner, B.D.: A diffusion model for an Urban Area, Journal of Appl. Met., Vol. 3, 1964.

- Turner, B.D.: Workbook at atmospheric dispersion estimates, Cincinnati, Public Health Service Publication 999-AP-26, 1970.

- Watson, G.N.: A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge, Cambridge at the University Press, 1962.

APENDICES

APENDICE A: EXPRESION DE LA VARIACION VERTICAL DE LA VELOCIDAD MEDIA DEL VIENTO PARA UNA ATMOSFERA ESTRATIFICADA INESTABLEMENTE

Según la definición del perfil adimensional del viento:

$$\phi_m \equiv \frac{kz}{u_*} \frac{d\bar{u}}{dz}$$

entonces:

$$\begin{aligned} d\bar{u} &= \frac{u_*}{k} \left[\phi_m \frac{dz}{z} \right] = \frac{u_*}{k} \left[(1 + \phi_m - 1) \frac{dz}{z} \right] \\ &= \frac{u_*}{k} \left[1 - (1 - \phi_m) \right] \frac{dz}{z} \\ \bar{u}(z) &= \frac{u_*}{k} \left[\int_{z_0}^z \frac{dz}{z} - \int_{z_0}^z (1 - \phi_m) \frac{dz}{z} \right] \end{aligned} \quad (A1)$$

Utilizando la altura adimensional $\eta \equiv z/L$ y además $\zeta_0 \equiv z_0/L$:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \left[\ln \left(\frac{z}{z_0} \right) - \int_{\zeta_0}^{\eta} \frac{1 - \phi_m(\eta')}{\eta'} d\eta' \right] \quad (A2)$$

denotando con η' a la variable de integración. La representación del perfil adimensional para condiciones inestables es aproximable, según Businger y otros (1971):

$$\phi_m(\eta') = (1 - 15 \eta')^{-1/4} \equiv \frac{1}{\mu'}$$

entonces:

$$\mu' = (1 - 15 \eta')^{1/4}$$

$$\eta' = \frac{\mu'^4 - 1}{15} \Rightarrow d\eta' = \frac{4}{15} \mu'^3 d\mu'$$

en consecuencia:

$$\frac{d\eta'}{\eta'} = \frac{4\mu'^3 d\mu'}{\mu'^4 - 1} = \frac{4\mu'^3 d\mu'}{(\mu' - 1)(\mu' + 1)(\mu'^2 + 1)}$$

y además:

$$1 - \phi_m(\eta') = 1 - \frac{1}{\mu'} = \frac{\mu' - 1}{\mu'}$$

Reemplazando en la integral (A2) a calcular, resulta:

$$\textcircled{I} \equiv \int_{\zeta_0}^{\eta} \frac{1 - \phi_m(\eta')}{\eta'} d\eta' = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{4\mu'^2 d\mu'}{(\mu' + 1)(\mu'^2 + 1)}$$

con

$$\mu \equiv (1 - 15 \eta)^{1/4}$$

$$\mu_0 \equiv (1 - 15 \zeta_0)^{1/4}$$

entonces:

$$\textcircled{I} = 2 \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{2\mu'^2 d\mu'}{(\mu' + 1)(\mu'^2 + 1)} = 2 \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{(1 + \mu'^2 + \mu'^2 - 1)}{(\mu' + 1)(\mu'^2 + 1)} d\mu'$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{\text{I}} &= 2 \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{(1 + \mu'^2) + (\mu' - 1)(\mu' + 1)}{(\mu' + 1)(\mu'^2 + 1)} d\mu' = \\
&= 2 \int_{\mu_0}^{\mu} \left(\frac{1}{\mu' + 1} + \frac{\mu' - 1}{\mu'^2 + 1} \right) d\mu' = \\
&= 2 \int_{\mu_0}^{\mu} \left(\frac{1}{\mu' + 1} + \frac{\mu'}{\mu'^2 + 1} - \frac{1}{1 + \mu'^2} \right) d\mu' = \\
&= 2 \left[\ln(1 + \mu') + \frac{1}{2} \ln(1 + \mu'^2) - \arctg(\mu') \right]_{\mu_0}^{\mu} = \\
&= - \left\{ - \ln[(1 + \mu'^2)(1 + \mu')^2] + 2 \arctg(\mu') \right\}_{\mu_0}^{\mu} = \\
&= - \left\{ \ln \left[\frac{(1 + \mu^2)(1 + \mu_0)^2}{(1 + \mu^2)(1 + \mu)^2} \right] + 2 [\arctg(\mu) - \arctg(\mu_0)] \right\}
\end{aligned}$$

y reemplazando en el perfil del viento (A1):

$$\begin{aligned}
\bar{u}(z) &= \frac{u_*}{k} \left\{ \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) + \ln \left[\frac{(1 + \mu^2)(1 + \mu_0)^2}{(1 + \mu^2)(1 + \mu)^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2 [\arctg(\mu) - \arctg(\mu_0)] \right\} \tag{A3}
\end{aligned}$$

APENDICE B: SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL HOMOGENEA (60) CORRESPONDIENTE A LA CONCENTRACION LATERAL INTEGRADA

Se conoce que las soluciones de la ecuación de Bessel (véase, p. ej., Magnus, 1949):

$$\frac{d^2 B_\nu}{dz'^2} + \frac{1}{z'} \frac{dB_\nu}{dz'} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z'^2}\right) B_\nu = 0 \quad (\text{B1})$$

son las llamadas funciones cilíndricas:

$$B_\nu(z') = C_0 J_\nu(z') + C_1 J_{-\nu}(z') \quad (\text{B2})$$

o, para el caso de argumento puramente imaginario:

$$B_\nu(z') = C_0 I_\nu(z') + C_1 K_\nu(z') \quad (\text{B3})$$

con C_0 , C_1 constantes.

El propósito será llevar la ecuación (B1) a una forma más generalizada, a fin de obtener la llamada transformación de Lommel y cuya solución es conocida (Watson, 1962). Sea:

$$B_\nu(z') = z'^{\alpha/\beta-\nu} \omega(z') \quad (\text{B4})$$

con α y β constantes. Reemplazando en (B1):

$$0 = \beta^2 z'^{\nu-\alpha/\beta+2} \left\{ \frac{d^2}{dz'^2} \left[z'^{\alpha/\beta-\nu} \omega \right] + \frac{1}{z'} \frac{d}{dz'} \left[z'^{\alpha/\beta-\nu} \omega \right] + \left(1 - \frac{\nu^2}{z'^2}\right) \left[z'^{\alpha/\beta-\nu} \omega \right] \right\}$$

donde se ha multiplicado por el factor $\beta^2 z'^{\nu-\alpha/\beta+2}$. Operando; resulta:

$$0 = z'^{\nu-\alpha/\beta} \left\{ \beta^2 z'^2 \frac{d^2}{dz'^2} \left[z'^{\alpha/\beta-\nu} \omega \right] + \beta \beta z' \frac{d}{dz'} \left[z'^{\alpha/\beta-\nu} \omega \right] + \right. \\ \left. + (\beta^2 z'^2 - \nu^2 \beta^2) \left[z'^{\alpha/\beta-\nu} \omega \right] \right\}$$

Sumando y restando términos iguales, tanto en la derivada de orden 1 como en la de orden 0, queda:

$$0 = z'^{\nu-\alpha/\beta} \left\{ \beta^2 z'^2 \frac{d^2}{dz'^2} \left[z'^{\alpha/\beta-\nu} \omega \right] + \right. \\ \left. + (\beta + 2\nu\beta - 2\alpha + 2\alpha - 2\nu\beta) \beta z' \frac{d}{dz'} \left[z'^{\alpha/\beta-\nu} \omega \right] + \right. \\ \left. + \left(\begin{array}{l} \nu^2 \beta^2 - 2\nu\alpha\beta - \nu\beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta - \\ -2\nu^2 \beta^2 + 4\nu\alpha\beta + \nu\beta^2 - 2\alpha^2 - \alpha\beta + \\ + \beta^2 z'^2 - 2\nu\alpha\beta + \alpha^2 \end{array} \right) \left[z'^{\alpha/\beta-\nu} \omega \right] \right\}$$

Desdoblando los términos mencionados resulta:

$$0 = z'^{\nu-\alpha/\beta} \left\{ \beta^2 z'^2 \frac{d^2}{dz'^2} [\text{---}] + \right. \\ \left. + 2(\nu\beta - \alpha) \beta z' \frac{d}{dz'} [\text{---}] + (\beta + 2\alpha - 2\nu\beta) \beta z' \frac{d}{dz'} [\text{---}] + \right. \\ \left. + (\nu^2 \beta^2 - 2\nu\alpha\beta - \nu\beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta) [\text{---}] + \right. \\ \left. + (-2\nu^2 \beta^2 + 4\nu\alpha\beta + \nu\beta^2 - 2\alpha^2 - \alpha\beta) [\text{---}] + \right. \\ \left. + (\beta^2 z'^2 - 2\nu\alpha\beta + \alpha^2) [\text{---}] \right\}$$

$$\begin{aligned}
0 = z'^{\nu-\alpha/\beta} & \left\{ \beta^2 z'^2 \frac{d^2}{dz'^2} [----] + \right. \\
& + 2(\nu\beta - \alpha) \beta z' \frac{d}{dz'} [----] + (\beta + 2\alpha - 2\nu\beta) \beta z' \frac{d}{dz'} [----] + \\
& + (\nu\beta - \alpha)(\nu\beta - \alpha - \beta) [----] + \\
& + (\nu\beta - \alpha)(\beta + 2\alpha - 2\nu\beta) [----] + \\
& \left. + [\beta^2 z'^2 + \alpha(\alpha - 2\nu\beta)] [----] \right\} \quad (B5)
\end{aligned}$$

Pero como:

$$[----] \equiv z'^{\alpha/\beta-\nu} \omega$$

$$\frac{d}{dz'} [----] = z'^{\alpha/\beta-\nu} \frac{d\omega}{dz'} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \nu\right) z'^{\alpha/\beta-\nu-1} \omega$$

en consecuencia:

$$\beta z'^{\nu-\alpha/\beta-1} \frac{d}{dz'} [----] = \beta z' \frac{d\omega}{dz'} + (\alpha - \nu\beta) \omega \quad (B6)$$

$$\frac{d^2}{dz'^2} [----] = z'^{\alpha/\beta-\nu} \frac{d^2\omega}{dz'^2} + 2\left(\frac{\alpha}{\beta} - \nu\right) z'^{\alpha/\beta-\nu-1} \frac{d\omega}{dz'} +$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{\beta} - \nu\right) \left(\frac{\alpha}{\beta} - \nu - 1\right) z'^{\alpha/\beta-\nu-2} \omega$$

quedando expresado:

$$\beta^2 z'^{\nu-\alpha/\beta-2} \frac{d^2}{dz'^2} [----] = \beta^2 z'^2 \frac{d^2\omega}{dz'^2} + 2(\alpha - \nu\beta) \beta z' \frac{d\omega}{dz'} + (\alpha - \nu\beta)(\alpha - \nu\beta - \beta)\omega$$

reemplazando con (B6)

$$\begin{aligned}
&= \beta^2 z'^2 \frac{d^2 \omega}{dz'^2} + 2(\alpha - \nu\beta) \beta z'^{\nu - \alpha / \beta + 1} \frac{d}{dz'} [\dots] + \\
&\quad + 2(\alpha - \nu\beta)(\nu\beta - \alpha) \omega + (\alpha - \nu\beta)(\alpha - \nu\beta - \beta) \omega \\
&= \beta^2 z'^2 \frac{d^2 \omega}{dz'^2} + 2(\alpha - \nu\beta) \beta z'^{\nu - \alpha / \beta + 1} \frac{d}{dz'} [\dots] + \\
&\quad + (\alpha - \nu\beta)(2\nu\beta - 2\alpha + \alpha - \nu\beta - \beta) \omega \\
\Rightarrow &\beta^2 z'^{\nu - \alpha / \beta + 2} \frac{d^2}{dz'^2} [\dots] + 2(\nu\beta - \alpha) \beta z'^{\nu - \alpha / \beta + 1} \frac{d}{dz'} [\dots] + \\
&\quad + (\nu\beta - \alpha)(\nu\beta - \alpha - \beta) \omega = \beta^2 z'^2 \frac{d^2 \omega}{dz'^2} \tag{B7}
\end{aligned}$$

Reemplazando (B7) y (B6) en (B5) se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 &= \beta^2 z'^2 \frac{d^2 \omega}{dz'^2} + (\beta + 2\alpha - 2\nu\beta) \beta z' \frac{d\omega}{dz'} + \\
&\quad + \frac{(\beta + 2\alpha - 2\nu\beta)(\alpha - \nu\beta)}{\beta} \omega + \frac{(\nu\beta - \alpha)(\beta + 2\alpha - 2\nu\beta)}{\beta} \omega + \\
&\quad + [\beta^2 z'^2 + \alpha(\alpha - 2\nu\beta)] \omega \\
0 &= \beta^2 z'^2 \frac{d^2 \omega}{dz'^2} + (\beta + 2\alpha - 2\nu\beta) \beta z' \frac{d\omega}{dz'} + \\
&\quad + [\beta^2 z'^2 + \alpha(\alpha - 2\nu\beta)] \omega \\
0 &= \beta^2 z'^2 \frac{d^2 \omega}{dz'^2} + (\beta - 1) \beta z' \frac{d\omega}{dz'} + \\
&\quad + (2\alpha - 2\nu\beta + 1) \beta z' \frac{d\omega}{dz'} + \\
&\quad + [\beta^2 z'^2 + \alpha(\alpha - 2\nu\beta)] \omega \tag{B8}
\end{aligned}$$

Sea:

$$z' \equiv \gamma_1 z^\beta \tag{B9}$$

Entonces:

$$\frac{d}{dz} = \frac{d}{dz'} \frac{dz'}{dz} = \beta \gamma_1 z^{\beta-1} \frac{d}{dz'}$$

en consecuencia:

$$z \frac{d}{dz} = \beta \gamma_1 z^\beta \frac{d}{dz'} = \beta z' \frac{d}{dz'} \quad (\text{B10})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} &= \frac{d}{dz} \left[\beta \gamma_1 z^{\beta-1} \frac{d}{dz'} \right] = \\ &= \beta \gamma_1 z^{\beta-1} \frac{d}{dz} \frac{d}{dz'} + \beta(\beta-1) \gamma_1 z^{\beta-2} \frac{d}{dz'} \\ &= \beta \gamma_1 z^{\beta-1} \frac{dz'}{dz} \frac{d^2}{dz'^2} + \beta(\beta-1) \gamma_1 z^{\beta-2} \frac{d}{dz'} \\ &= \beta^2 \gamma_1^2 z^{2\beta-2} \frac{d^2}{dz'^2} + \beta(\beta-1) \gamma_1 z^{\beta-2} \frac{d}{dz'} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} z^2 \frac{d^2}{dz^2} &= \beta^2 \gamma_1^2 z^{2\beta} \frac{d^2}{dz'^2} + \beta(\beta-1) \gamma_1 z^\beta \frac{d}{dz'} \\ &= \beta^2 z'^2 \frac{d^2}{dz'^2} + \beta(\beta-1) z' \frac{d}{dz'} \quad (\text{B11}) \end{aligned}$$

Reemplazando (B9), (B10), (B11) en (B8):

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 \frac{d^2 \omega}{dz^2} + (2\alpha - 2\nu\beta + 1) z \frac{d\omega}{dz} + \\ &+ [\beta^2 \gamma_1^2 z^{2\beta} + \alpha(\alpha - 2\nu\beta)] \omega \quad (\text{B12}) \end{aligned}$$

que es la ecuación generalizada buscada, cuya solución será, según (B4):

$$\omega(z') = z'^{\nu-\alpha/\beta} B_\nu(z')$$

Pasando a la variable z , según (B9) queda:

$$\omega(z) = z^{\beta\nu-\alpha} B_\nu(\gamma_1 z^\beta) \quad (B13)$$

donde la función cilíndrica B_ν contiene las constantes.

Sea $\alpha = 0$; entonces la ecuación (B12) queda:

$$z^2 \frac{d^2 \omega}{dz^2} + (1 - 2\nu\beta) z \frac{d\omega}{dz} + \beta^2 \gamma_1^2 z^{2\beta} \omega = 0$$

con solución

$$\omega(z) = z^{\beta\nu} B_\nu(\gamma_1 z^\beta)$$

Consecuentemente, si el argumento es puramente imaginario ($z \rightarrow zi$), la ecuación resultante será:

$$z^2 \frac{d^2 \omega}{dz^2} + (1 - 2\nu\beta) z \frac{d\omega}{dz} - \beta^2 \gamma_1^2 z^{2\beta} \omega = 0$$

con solución como la ya indicada en (B3).

Sea

$$\left. \begin{array}{l} \beta \gamma_1 \equiv q \\ 1 - 2\nu\beta \equiv n \Rightarrow \nu = \frac{1-n}{2\beta} \\ 2\beta \equiv m-n+2 \end{array} \right\} \Rightarrow \nu = \frac{1-n}{m-n+2}$$

y reemplazando:

$$z^2 \frac{d^2 \omega}{dz^2} + n z \frac{d\omega}{dz} - q^2 z^{m-n+2} \omega = 0$$

$$\frac{d^2 \omega}{dz^2} + \frac{n}{z} \frac{d\omega}{dz} - \frac{q^2}{z^{n-m}} \omega = 0 \quad (B14)$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned}
 \omega(z) &= z^{\beta\nu} B_{\nu} (\gamma_1 z^{\beta}) \\
 &= z^{\frac{m-n+2}{2} \left(\frac{1-n}{m-n+2} \right)} B_{\nu} \left(\frac{2q}{m-n+2} z^{\frac{m-n+2}{2}} \right) \\
 &= z^{\frac{1-n}{2}} \left[C_0 I_{\frac{1-n}{m-n+2}} \left(\frac{2q}{m-n+2} z^{\frac{m-n+2}{2}} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + C_1 K_{\frac{1-n}{m-n+2}} \left(\frac{2q}{m-n+2} z^{\frac{m-n+2}{2}} \right) \right] \tag{B15}
 \end{aligned}$$

APENDICE C: CALCULO DE LA ALTURA Y DE LA VELOCIDAD VERTICAL DE LOS CONTAMINANTES

Si \bar{z} representa físicamente la coordenada vertical del centro de masa de la nube de contaminantes para una distancia horizontal x a la fuente, entonces:

$$\bar{z} \equiv \frac{\int_0^{\infty} z C_y(x,z) dz}{\int_0^{\infty} C_y(x,z) dz} \quad (C1)$$

Considerando la expresión exponencial general de la concentración lateral integrada (ecuación (93)):

$$C_y(x,z) = C_y(x,0) \exp[-d|z|^s] \quad (C2)$$

y reemplazando en la anterior:

$$\bar{z} = \frac{\int_0^{\infty} z \exp[-d|z|^s] dz}{\int_0^{\infty} \exp[-d|z|^s] dz} \quad (C3)$$

sea $t' = d|z|^s$ (C4)

$$\Rightarrow z = (t'/d)^{1/s} \quad (C5)$$

$$dz = \frac{t'^{1/s-1} dt'}{d^{1/s} s} \quad (C6)$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{\frac{1}{d^{1/s} s} \int_0^{\infty} (t'/d)^{1/s} \exp[-t'] t'^{1/s-1} dt'}{\frac{1}{d^{1/s} s} \int_0^{\infty} \exp[-t'] t'^{1/s-1} dt'} = \\ &= \frac{1}{d^{1/s}} \frac{\int_0^{\infty} t'^{2/s-1} e^{-t'} dt'}{\int_0^{\infty} t'^{1/s-1} e^{-t'} dt'} \quad (C7) \end{aligned}$$

Recordando la definición de la función gamma:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t'} t'^{x-1} dt' \quad (C8)$$

resulta:

$$\bar{z} = \frac{\Gamma(2/s)}{d^{1/s} \Gamma(1/s)} \Rightarrow d = \left[\frac{\Gamma(2/s)}{\Gamma(1/s)} \frac{1}{\bar{z}} \right]^s \quad (C9)$$

y, en consecuencia, sustituyendo en (C2) se obtiene:

$$C_y(x,z) = C_y(x,0) \exp \left[- \left(\frac{\Gamma(2/s)}{\Gamma(1/s)} \frac{|z|}{\bar{z}} \right)^s \right] \quad (C10)$$

Para calcular la variación temporal de la altura (\bar{z}) del centro de masa una nube de contaminantes, se considera la definición:

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\int_0^{\infty} z C_y dz}{\int_0^{\infty} C_y dz} \right] \quad (C11)$$

pero el denominador, para un dado x , es constante; en consecuencia:

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} z C_y dz}{\int_0^{\infty} C_y dz} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (z C_y) dz}{\int_0^{\infty} C_y dz}$$

y por definición de derivada sustancial, para el caso particular que se analiza:

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{\int_0^{\infty} \left[\cancel{\frac{\partial}{\partial t} (z C_y)} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} (z C_y) \right] dz}{\int_0^{\infty} C_y dz} = \frac{\int_0^{\infty} z \left[\bar{u} \frac{\partial C_y}{\partial x} \right] dz}{\int_0^{\infty} C_y dz}$$

y reemplazando con la ecuación de difusión (54) resulta:

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{\int_0^{\infty} z \left[\frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial C_y}{\partial z} \right] dz}{\int_0^{\infty} C_y dz} \quad (C12)$$

Considerando que C_y está representado por una expresión exponencial general (ecuación (90)) y suponiendo una variación potencial con la altura para la difusividad turbulenta:

$$K_z = K_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^n \quad (C13)$$

se calcula el integrando del numerador de la expresión (C12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_y}{\partial z} &= -A_0 ds z^{s-1} e^{-dz^s} \\ K_z \frac{\partial C_y}{\partial z} &= -A_0 \frac{K_1}{z_1^n} ds z^{s+n-1} e^{-dz^s} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z \frac{\partial C_y}{\partial z} \right] &= -A_0 \frac{K_1}{z_1^n} ds \left[(s+n-1) z^{s+n-2} e^{-dz^s} - ds z^{2s+n-2} e^{-dz^s} \right] \\ z \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z \frac{\partial C_y}{\partial z} \right] &= -A_0 \frac{K_1}{z_1^n} ds \left[(s+n-1) z^{s+n-1} e^{-dz^s} - ds z^{2s+n-1} e^{-dz^s} \right] \\ &= A_0 \frac{K_1}{z_1^n} ds \left[\underbrace{ds z^{2s+n-1} e^{-dz^s}}_{\textcircled{I}} - \underbrace{(s+n-1) z^{s+n-1} e^{-dz^s}}_{\textcircled{II}} \right] \end{aligned} \quad (C14)$$

en la que deben integrarse los términos (I) y (II) respecto a la variable z :

$$(I) = \int_0^{\infty} z^{2s+n-1} e^{-dz^s} dz$$

y efectuando el cambio de variables $t' = dz^s$ (C4)

$$\begin{aligned} (I) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{t'}{d}\right)^{\frac{2s+n-1}{s}} e^{-t'} \frac{t'^{1/s-1} dt'}{s d^{1/s}} dt' = \frac{1}{s d^{2+n/s}} \int_0^{\infty} t'^{1+n/s} e^{-t'} dt' \\ &= \frac{1}{s d^{n/s+2}} \int_0^{\infty} t'^{(n/s+2)-1} e^{-t'} dt' = (\text{y por C8}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{s} + 2\right)}{s d^{n/s+1}} \end{aligned} \quad (C15)$$

$$(II) = \int_0^{\infty} z^{s+n-1} e^{-dz^s} dz$$

y con el mismo cambio de variables señalado

$$\begin{aligned} (II) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{t'}{d}\right)^{\frac{s+n-1}{s}} e^{-t'} \frac{t'^{1/s-1} dt'}{s d^{1/s}} dt' = \frac{1}{s d^{n/s+1}} \int_0^{\infty} t'^{n/s} e^{-t'} dt' \\ &= \frac{1}{s d^{n/s+1}} \int_0^{\infty} t'^{\left(\frac{n}{s} + 1\right)-1} e^{-t'} dt' = (\text{y por C8}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{s} + 1\right)}{s d^{n/s+1}} \end{aligned} \quad (C16)$$

Teniendo en cuenta (C14) y (C7) y los resultados obtenidos (C15) y (C16), se reemplaza en (C12):

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{\cancel{K_1} \frac{K_1}{z_1^n} ds \left[\cancel{d} \frac{\Gamma(\frac{n}{s} + 2)}{\cancel{d} d^{n/s+2}} - (s+n-1) \frac{\Gamma(\frac{n}{s} + 1)}{s d^{n/s+1}} \right]}{\cancel{K_1} \frac{K_1}{s d^{1/s}} \Gamma(1/s)}$$

$$= \frac{K_1}{z_1^n} \frac{s^2 d^{1/s}}{d^{n/s} \Gamma(1/s)} \left[\Gamma(\frac{n}{s} + 2) - \frac{(n+s-1)}{s} \Gamma(\frac{n}{s} + 1) \right]$$

que, utilizando las propiedades de la función gamma puede escribirse:

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{K_1}{z_1^n} \frac{s^2}{d^{n/s-1/s} \Gamma(1/s)} \left[\cancel{\frac{n}{s}} + \cancel{1} - (\cancel{\frac{n}{s}} + \cancel{1} - \frac{1}{s}) \right] \Gamma(\frac{n}{s} + 1)$$

$$= \frac{K_1}{z_1^n} \frac{s}{d^{\frac{n-1}{s}}} \frac{\Gamma(\frac{n}{s} + 1)}{\Gamma(1/s)}$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{K_1}{z_1^n} \frac{n}{d^{\frac{n-1}{s}}} \frac{\Gamma(n/s)}{\Gamma(1/s)} \quad (C17)$$

APENDICE D: OBTENCION DEL PARAMETRO "c", MODIFICADOR DE LA VELOCIDAD DEL VIENTO
PARA TRANSFORMARLA EN LA DEL VIENTO TRANSPORTE

Si se supone un perfil logarítmico del viento medio aplicable en una capa de superficie neutralmente estratificada expresado por:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \ln(z/z_0)$$

y se considera la expresión de la concentración lateral integrada (ecuación (138)):

$$C_y(x,z) = C_y(x,0) \exp \left[- \left(\frac{\Gamma(2/s)}{\Gamma(1/s)} \frac{|z|}{\bar{z}} \right)^s \right]$$

es posible calcular analíticamente la velocidad media de transporte de los contaminantes mediante (ecuación (137)):

$$\begin{aligned} \bar{u}_T &= \frac{\int_0^{\infty} \bar{u}(z) C_y(x,z) dz}{\int_0^{\infty} C_y(x,z) dz} \\ &= \frac{\int_0^{\infty} \bar{u}(z) \exp \left[- \left(\frac{\Gamma(2/s)}{\Gamma(1/s)} \frac{z}{\bar{z}} \right)^s \right] dz}{\int_0^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{\Gamma(2/s)}{\Gamma(1/s)} \frac{z}{\bar{z}} \right)^s \right] dz} \end{aligned}$$

Definiendo

$$\frac{\Gamma(2/s)}{\Gamma(1/s)} \frac{z}{\bar{z}} = t_* \Rightarrow dz = \frac{\Gamma(1/s)}{\Gamma(2/s)} \bar{z} dt_*$$

efectuando el cambio de variable indicado, resulta:

$$\bar{u}_T = \frac{\frac{u_*}{k} \frac{\cancel{\Gamma(1/s)} \bar{z}}{\cancel{\Gamma(2/s)}} \int_0^\infty \ln(\bar{\alpha} t_*^s) e^{-t_*^s} dt_*}{\frac{\cancel{\Gamma(1/s)} \bar{z}}{\cancel{\Gamma(2/s)}} \int_0^\infty e^{-t_*^s} dt_*}$$

con

$$\bar{\alpha} \equiv \frac{\Gamma(1/s) \bar{z}}{\Gamma(2/s) z_0}$$

así queda:

$$\bar{u}_T = \frac{u_*}{k} \frac{\int_0^\infty [\ln \bar{\alpha} + \ln t_*^s] e^{-t_*^s} dt_*}{\int_0^\infty e^{-t_*^s} dt_*}$$

Efectuando un nuevo cambio de variables:

$$t_*^s = t_*'^1 \Rightarrow t_* = t_*'^{1/s}$$

$$dt_* = \frac{t_*'^{1/s-1}}{s} dt_*'$$

resulta:

$$\bar{u}_T = \frac{u_*}{k} \frac{\frac{1}{s} \int_0^\infty [\ln \bar{\alpha} + \frac{1}{s} \ln t_*'] e^{-t_*'} t_*'^{1/s-1} dt_*'}{\frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-t_*'} t_*'^{1/s-1} dt_*'}$$

$$= \frac{u_*}{k} \frac{\Gamma(1/s) \ln \bar{\alpha} + \frac{1}{s} \int_0^\infty \ln t_*' e^{-t_*'} t_*'^{1/s-1} dt_*'}{\Gamma(1/s)}$$

Pero si

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{con } z \text{ un número complejo}$$

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \frac{d}{dz} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dz} (e^{-t} t^{z-1}) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{d}{dz} \left(\frac{t^z}{t} \right) dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \frac{d}{dz} (t^z) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^z \ln t dt = \int_0^{\infty} \ln t e^{-t} t^{z-1} dt \equiv \Gamma'(z) \quad (D1)$$

Reemplazando:

$$\bar{u}_T = \frac{u_*}{k} \left\{ \ln \bar{\alpha} + \frac{1}{s} \frac{\Gamma'(1/s)}{\Gamma(1/s)} \right\}$$

Llamando

$$\frac{\Gamma'(1/s)}{\Gamma(1/s)} \equiv \Psi(1/s) \quad (D2)$$

y recordando que:

$$\bar{\alpha} \equiv \frac{\Gamma(1/s) \bar{z}}{\Gamma(2/s) z_0}$$

se obtiene la ecuación (139):

$$\bar{u}_T = \frac{u_*}{k} \left\{ \ln \left[\frac{\Gamma(1/s) \bar{z}}{\Gamma(2/s) z_0} e^{\frac{\Psi(1/s)}{s}} \right] \right\} = \frac{u_*}{k} \left\{ \ln \left[c(s) \frac{\bar{z}}{z_0} \right] \right\}$$

con

$$c(s) \equiv \frac{\Gamma(1/s)}{\Gamma(2/s)} e^{\frac{\Psi(1/s)}{s}} \quad (\text{que es la expresión (140)}).$$

A los efectos de evaluar este parámetro para algunos valores posibles del exponente general s de la concentración (por ej.: 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5 y 3), se necesita conocer los valores de la función $\Psi(1/s)$. Hay dos alternativas para su estimación: la primera en forma numérica mediante la serie:

$$\Psi(1/s) = - \left\{ s + \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1/s + j} - \frac{1}{j} \right) \right] + \gamma \right\} \quad (D3)$$

(siendo γ , la constante de Euler) y la segunda por la siguiente integral:

$$\Psi(1/s) = - \gamma + \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^{1/s-1}}{t} dt \quad (D4)$$

si es que no se torna demasiado compleja su solución analítica (Schwartz, 1969). Se calculó $\Psi(1/s)$ utilizando ambas alternativas para los valores de s mencionados y con ellos se estimaron los del parámetro $c(s)$. Los resultados son los siguientes:

s	$\Psi(1/s)$	$c(s)$	$\ln c$
0.5	+0.4227843	0.38822	-0.9462
1.	-0.5772157	0.56146	-0.5772
1.5	-1.3182345	0.62972	-0.4625
2.	-1.9635101	0.66406	-0.4094
2.5	-2.5613846	0.68392	-0.3799
3.	-3.1320338	0.69646	-0.3617

Debido a que los valores de s obtenidos de datos experimentales están comprendidos en el intervalo $[0.5, 3]$, se buscaron polinomios interpoladores de 3° grado para $c(s)$ para este rango, hallándose:

$$a) s \in [0.5, 1]$$

$$c = 0.3882 + 0.3986 (s - 0.5) - 0.2078 (s - 0.5)^3 \quad (D5)$$

$$b) s \in [1, 1.5]$$

$$c = 0.5615 + 0.2427 (s - 1) - 0.3117 (s - 1)^2 + 0.1984 (s - 1)^3 \quad (D6)$$

$$c) s \in [1.5, 2]$$

$$c = 0.6297 + 0.0797 (s - 1.5) - 0.0141 (s - 1.5)^2 - 0.0154 (s - 1.5)^3 \quad (D7)$$

$$d) s \in [2, 2.5]$$

$$c = 0.6641 + 0.0541 (s - 2) - 0.0372 (s - 2)^2 + 0.0166 (s - 2)^3 \quad (D8)$$

$$e) s \in [2.5, 3]$$

$$c = 0.6839 + 0.0293 (s - 2.5) - 0.0123 (s - 2.5)^2 + 0.0082 (s - 2.5)^3 \quad (D9)$$

APENDICE E: PROGRAMA COMPUTACIONAL DESTINADO A OBTENER LAS INTEGRALES NECESARIAS
PARA EL CALCULO DE LA VELOCIDAD DE TRANSPORTE EN CONDICIONES INESTABLES.

```

DIMENSION AUX(5901),IPAR(5),YI(4),FF(4)
CALL EMPAR(IPAR)
LU5=IPAR(1)
IA=IPAR(2)
A=FLOAT(IA)
XLL=1.0E+C2*A
IA=IPAR(3)
A=FLOAT(IA)
XUU=1.0E+L2*A
IA=IPAR(4)
A=FLOAT(IA)
LEL=A
H2=1.0E-E3
EPS=1.0E-B4
NDIM=5900
IZ=IPAR(5)
Z=FLOAT(IZ)
Z=1.0E+31*Z
DO 50 L=1,10
A=Z*FLOAT(L)
WRITE(LU5,100)A,EPS,H2
DO 40 K=1,1
CALL SLXF(A,H2,S)
PP(K)=0.0
XL=XLL
XU=XLL+LEL
10 DO 20 IC=1,4
CALL FOME(H2,S,IC,A,XL,XU,EPS,NDIM,Y,IER,AUX)
YI(IC)=Y
IF(IER.EQ.0) GO TO 20
FF(K)=999999.9999
GO TO 40
20 CONTINUE
PP(K)=YI(3)+2*(YI(1)-YI(2))+PP(K)
XL=XU
XU=XU+LEL
IF(XU.LE.XUU) GO TO 10
40 CONTINUE
45 XU=XU-LEL
WRITE(LU5,110)XLL,XU
DO 43 KI=1,1
WRITE(LU5,140)S,PP(KI)
43 CONTINUE
50 CONTINUE
120 FORMAT(/,1X,"INTEG. NUM. CON Z:ZZ=",E6.1,5X,"ERROR DE:",E6.1,2X,"V
*ALOR Z0:L=",E6.1)
110 FORMAT(/,22X,"LIMITE INFERIOR DE LA INTEGRAL:",F12.1,/,22X,"LIMITE
* SUPERIOR DE LA INTEGRAL:",F12.1)
140 FORMAT(6X,"VALOR DE S=",F4.2,3X,"NUEVO BENOIT ( , )=",F15.4)
STOP
END

```

Apéndice E (cont.)

```

SUBROUTINE SEXP(A, H0, S)
H1=1.0+15.0*H0*A
AMU=H1**0.25
IF(H0.EQ.1.0E-04) C1=0.5090220
IF(H0.EQ.1.0E-03) C1=0.5123778
IF(H0.EQ.1.0E-02) C1=0.5445033
H2=4.5*H0*A
H3=1.0+2.0*H2
H4=1.0-H2/H3
H1=AMU*AMU+1.0
H2=AMU+1.0
H3=H2*H2*H1
H1=2.0*ATAN(AMU)
H5=ALOG(A)+H1-ALOG(H3)+C1
H5=AMU*H5
H5=1.4/H5
S=H4+H5
RETURN
END
SUBROUTINE ROMB(H2, S, IG, A, XL, XU, EPS, NDIM, Y, IER, AUX)
DIMENSION AUX(1)
AUX(1)=.5*(FCT(H2, S, IG, XL, A)+FCT(H2, S, IG, XU, A))
H=XU-XL
IF(NDIM-1)3,3,1
1 IF(H)2,12,2
2 HH=H
E=EPS/ABS(H)
DELT2=.0
F=1.
JJ=1
DO 7 I=2,NDIM
Y=AUX(1)
DELT1=DELT2
HL=HH
HH=.5*HH
F=.5*F
X=XL+HH
SM=0
DO 3 J=1,JJ
SM=SM+FCT(H2, S, IG, X, A)
3 X=X+HL
AUX(1)=.5*AUX(1-1)+F*SM
G=1.
JI=I-1
DO 4 J=1,JI
II=I-J
G=G*G
4 AUX(II)=AUX(II+1)+(AUX(II+1)-AUX(II))/(G-1)
DELT2=ABS(Y-AUX(1))
IF(I-5)7,5,5
5 IF(DELT2-2)10,12,6

```

Apéndice E (cont.)

```

6  IF(DELTA2-DELTA1) 7, 11, 11
7  JJ=JJ+JJ
8  IEF=2
9  Y=H*AUX(1)
   RETURN
10 IEF=0
   GO TO 9
11 IEF=1
   Y=H*Y
   RETURN
   END
FUNCTION FCT(H0, S, I, X, A)
X2=2.0/S
X1=1.0/S
CALL GAMMA(X2, G2, IEF)
CALL GAMMA(X1, G1, IEF)
SA=G2/G1
AA=SA/A
L=(AA*X)**S
L=(-1.)*L
FCT=EXP(L)
IF(1.EG.4) GO TO 10
L=(1.+(15.0*H0*X))**0.25
IF(1.EG.2) GO TO 5
IF(1.EG.3) GO TO 7
L=ALOG(1.+L)
GO TO 9
5  L=ATAN(L)
GO TO 9
7  L=ALOG(1.+L*L)
9  FCT=L*FCT
13 RETURN
   END
SUBROUTINE GAMMA(XK, GK, IEF)
   IF(XK-04.5) 0, 0, 4
4  IEF=2
   GK=1.E30
   RETURN
6  X=XK
   ERR=1.0E-6
   IEF=0
   GK=1.0
   IF(X-2.0) 50, 50, 15
12 IF(X-2.0) 110, 110, 15
15 X=X-1.0
   GK=GK*X
   GO TO 10
50 IF(X-1.0) 60, 120, 110
   TESTER SI X NEGATIF CU NUL
60 IF(X-ERR) 62, 62, 80
62 K=X

```

Apéndice E (cont.)

```

      Y=FLOAT(K)-X
      IF(ABS(Y)-EPR)130,132,64
64  IF(1.0-Y-EPR)130,132,70
      X NON VOISIN D'UN ENTIER NEGATIF OU NUL
70  IF(.-1.0)110,112,110
80  GX=GX/A
      X=X+1.0
      GO TO 70
110  Y=X-1.0
      CY=1.0+Y*(-0.5771017+Y*(+0.9353540+Y*(-0.8764213+Y*(+0.
13323212+Y*(-0.5634729+Y*(+0.2543205+Y*(-0.05149930))))))
      CX=GX*CY
120  RETURN
130  IER=1
      RETURN
      END
      ENL1

```

APENDICE F: OBTENCION DE LA VELOCIDAD DE TRANSPORTE DE LOS CONTAMINANTES EN
CONDICIONES DE ESTRATIFICACION ATMOSFERICA INESTABLE

Recordando la definición de velocidad de transporte de contaminantes:

$$\bar{u}_T \equiv \frac{\int_0^{\infty} \bar{u}(z) C_Y(x,z) dz}{\int_0^{\infty} C_Y(x,z) dz} \quad (F1)$$

la velocidad del viento para la estratificación atmosférica inestable:

$$\frac{k \bar{u}(z)}{u_*} = \ln(z/z_0) + \ln \left[\frac{(\mu^2 + 1)(\mu_0 + 1)^2}{(\mu^2 + 1)(\mu + 1)^2} \right] + 2 [\arctg(\mu) - \arctg(\mu_0)] \quad (F2)$$

siendo

$$\mu \equiv (1 + 15 z/|L|)^{1/4}$$

$$\mu_0 \equiv (1 + 15 z_0/|L|)^{1/4}$$

y la concentración lateral integrada:

$$C_Y(x,z) = C_Y(x,0) \exp \left[- \left(\frac{\Gamma(2/s) |z|}{\Gamma(1/s) \bar{z}} \right)^s \right] \quad (F3)$$

el cálculo del denominador de (F1) será:

$$\int_0^{\infty} C_Y(x,z) dz = C_Y(x,0) \int_0^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{\Gamma(2/s) z}{\Gamma(1/s) \bar{z}} \right)^s \right] dz$$

sea

$$t_* = \frac{\Gamma(2/s) z}{\Gamma(1/s) \bar{z}} \Rightarrow z = \frac{\Gamma(1/s) \bar{z}}{\Gamma(2/s)} t_* \quad (F4)$$

$$dz = \frac{\Gamma(1/s) \bar{z}}{\Gamma(2/s)} dt_* \quad (F5)$$

$$\int_0^{\infty} C_Y(x, z) dz = C_Y(x, 0) \frac{\Gamma(1/s) \bar{z}}{\Gamma(2/s)} \int_0^{\infty} e^{-t_*^s} dt_*$$

sea

$$t_*^s = t_*'^s \Rightarrow t_* = t_*'^{1/s} \quad (F6)$$

$$dt_* = \frac{t_*'^{1/s-1}}{s} dt_*' \quad (F7)$$

$$\int_0^{\infty} C_Y(x, z) dz = C_Y(x, 0) \frac{\Gamma(1/s) \bar{z}}{s \Gamma(2/s)} \int_0^{\infty} e^{-t_*'} t_*'^{1/s-1} dt_*'$$

y recordando la definición de la función gamma (C8):

$$\int_0^{\infty} C_Y(x, z) dz = C_Y(x, 0) \frac{\Gamma(1/s) \Gamma(1/s)}{s \Gamma(2/s)} \quad (F8)$$

Para el cálculo del numerador de (F1), considerando presente (F2) y (F3), se deben evaluar las siguientes integrales que se anotarán en forma abreviada como ①, ② y ③:

$$\textcircled{1} \equiv \int_0^{\infty} \ln \left[1 + (1 + 15 \frac{z_0}{|L|} \frac{z}{z_0})^{1/4} \right] \exp \left[- \left(\frac{\Gamma(2/s)/\Gamma(1/s)}{\bar{z}/z_0} \frac{z}{z_0} \right)^s \right] \frac{dz}{z_0}$$

sea

$$\zeta \equiv \frac{z}{z_0} \quad (\text{F9})$$

$$\zeta_0 \equiv \frac{z_0}{|L|} \quad (\text{F10})$$

$$a_0 \equiv \frac{\Gamma(2/s) z_0}{\Gamma(1/s) \bar{z}} \quad (\text{F11})$$

entonces:

$$\textcircled{1} \equiv \int_0^{\infty} \ln [1 + (1 + 15 \zeta_0 \zeta)^{1/4}] \exp [-(a_0 \zeta)^s] d\zeta \quad (\text{F12})$$

$$\textcircled{2} \equiv \int_0^{\infty} \text{arctg} [(1 + 15 \zeta_0 \zeta)^{1/4}] \exp [-(a_0 \zeta)^s] d\zeta \quad (\text{F13})$$

$$\textcircled{3} \equiv \int_0^{\infty} \ln [1 + (1 + 15 \zeta_0 \zeta)^{1/2}] \exp [-(a_0 \zeta)^s] d\zeta \quad (\text{F14})$$

Además, se necesitarán las integrales: $\textcircled{4}$ y $\textcircled{5}$ expresadas por

$$\textcircled{4} \equiv \int_0^{\infty} \ln \zeta \exp [-(a_0 \zeta)^s] d\zeta$$

sea

$$(a_0 \zeta)^s = t' \Rightarrow \zeta = \frac{1}{a_0} t'^{1/s}$$

$$d\zeta = \frac{t'^{1/s-1}}{a_0 s} dt'$$

así:

$$\begin{aligned}
 \ln \zeta &= \ln \left[\frac{t'^{1/s}}{a_0} \right] = \ln \left(\frac{1}{a_0} \right) + \ln t'^{1/s} \\
 &= -\ln a_0 + \frac{1}{s} \ln t' \\
 \textcircled{4} &\equiv \frac{1}{a_0 s} \int_0^{\infty} \left[-\ln a_0 + \frac{1}{s} \ln t' \right] e^{-t'} t'^{1/s-1} dt' \\
 &= -\frac{\ln a_0}{a_0 s} \int_0^{\infty} t'^{1/s-1} e^{-t'} dt' + \frac{1}{a_0 s^2} \int_0^{\infty} \ln t' t'^{1/s-1} e^{-t'} dt'
 \end{aligned}$$

pero según (C8) y (D1):

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} &= -\frac{\ln a_0}{a_0 s} \Gamma(1/s) + \frac{1}{a_0 s^2} \Gamma'(1/s) = (\text{y por (D2)}) \\
 &= \frac{\Gamma(1/s)}{a_0 s} \left[-\ln a_0 + \frac{\Psi(1/s)}{s} \right] = \frac{\Gamma(1/s)}{a_0 s} \left[-\ln a_0 + \ln \left(e^{\frac{\Psi(1/s)}{s}} \right) \right] \\
 &= \frac{\Gamma(1/s)}{a_0 s} \left[\ln \left(\frac{e^{\frac{\Psi(1/s)}{s}}}{a_0} \right) \right] \text{ y reemplazando con (F11):} \\
 &= \frac{\Gamma(1/s)}{a_0 s} \ln \left[\frac{\Gamma(1/s)}{\Gamma(2/s)} e^{\frac{\Psi(1/s)}{s}} \frac{\bar{z}}{z_0} \right]; \text{ utilizando (F11) y (140):} \\
 &= \frac{\Gamma(1/s) \Gamma(1/s)}{s \Gamma(2/s)} \left(\frac{\bar{z}}{z_0} \right) \ln \left[c \frac{\bar{z}}{z_0} \right] \tag{F15}
 \end{aligned}$$

y finalmente:

$$\textcircled{5} \equiv \int_0^{\infty} \left\{ \ln [(\mu_0^2 + 1) (\mu_0 + 1)^2] - 2 \operatorname{arctg}(\mu_0) \right\} \exp \left[- \left(\frac{\Gamma(2/s) z_0}{\Gamma(1/s) \bar{z}} \zeta \right)^s \right] d\zeta$$

empleando (F11) :

$$\textcircled{5} = \left\{ \ln [(\mu_0^2 + 1) (\mu_0 + 1)^2] - 2 \operatorname{arctg}(\mu_0) \right\} \int_0^{\infty} \exp [- (a_0 \zeta)^s] d\zeta$$

efectuando el mismo cambio de variable anterior:

$$\begin{aligned} \textcircled{5} &= \left\{ \ln [(\mu_0^2 + 1) (\mu_0 + 1)^2] - 2 \operatorname{arctg}(\mu_0) \right\} \frac{1}{a_0^s} \int_0^{\infty} t'^{1/s-1} e^{-t'} dt' \\ &= \left\{ \ln [(\mu_0^2 + 1) (\mu_0 + 1)^2] - 2 \operatorname{arctg}(\mu_0) \right\} \frac{\Gamma(1/s)\Gamma(1/s)}{s \Gamma(2/s)} \left(\frac{\bar{z}}{z_0} \right) \end{aligned} \quad (\text{F16})$$

Utilizando las relaciones definidas como $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ y $\textcircled{5}$, el numerador de (F1) se podrá expresar mediante la siguiente forma compacta:

$$\int_0^{\infty} \bar{u}(z) c_y(x, z) dz = c_y(x, 0) \frac{u_* z_0}{k} \left\{ \textcircled{4} + \textcircled{5} - [2(\textcircled{1} - \textcircled{2}) + \textcircled{3}] \right\} \quad (\text{F17})$$

Como ya se indicó en VI.3, las integrales $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ y $\textcircled{3}$ se resolvieron numéricamente y la combinación que se necesita, a través de la función definida como:

$$B(\bar{z}/z_0 , z_0/|L|) \equiv 2(\textcircled{1} - \textcircled{2}) + \textcircled{3} \quad (\text{F18})$$

Así, utilizando (F15), (F16) y (F18):

$$\int_0^{\infty} \bar{u}(z) C_Y(x, z) dz = C_Y(x, 0) \frac{u_*}{k} z_0 \left\{ \frac{\Gamma(1/s)\Gamma(1/s)}{s \Gamma(2/s)} \left(\frac{\bar{z}}{z_0} \right) \ln \left[c \frac{\bar{z}}{z_0} \right] + \right. \\ \left. + [\ln[(\mu_0^2 + 1)(\mu_0 + 1)^2] - 2 \operatorname{arctg}(\mu_0)] \frac{\Gamma(1/s)\Gamma(1/s)}{s \Gamma(2/s)} \left(\frac{\bar{z}}{z_0} \right) - \right. \\ \left. - B(\bar{z}/z_0, z_0/|L|) \right\}$$

$$\int_0^{\infty} \bar{u}(z) C_Y(x, z) dz = C_Y(x, 0) \frac{u_*}{k} z_0 \frac{\Gamma(1/s)\Gamma(1/s)}{s \Gamma(2/s)} \left(\frac{\bar{z}}{z_0} \right) \left\{ \ln \left[c \frac{\bar{z}}{z_0} \right] + \right. \\ \left. + [\ln[(\mu_0^2 + 1)(\mu_0 + 1)^2] - 2 \operatorname{arctg}(\mu_0)] - \right. \\ \left. - \frac{s \Gamma(2/s)}{\Gamma(1/s)\Gamma(1/s)} \frac{B(\bar{z}/z_0, z_0/|L|)}{\bar{z}/z_0} \right\}$$

y al efectuar el cociente con (F8), resulta:

$$\bar{u}_T = \frac{u_*}{k} \left\{ \ln \left[c \frac{\bar{z}}{z_0} \right] \left[\ln[(\mu_0^2 + 1)(\mu_0 + 1)^2] - 2 \operatorname{arctg}(\mu_0) \right] - \right. \\ \left. - \frac{s \Gamma(2/s)}{\Gamma(1/s)\Gamma(1/s)} \frac{B(\bar{z}/z_0, z_0/|L|)}{\bar{z}/z_0} \right\} \quad (F19)$$

APENDICE G: PROGRAMAS COMPUTACIONALES DESTINADOS A OBTENER LA DISTANCIA ADIMENSIONALIZADA A LA FUENTE DE EMISION EN FUNCION DE LA ALTURA ADIMENSIONALIZADA EN SITUACIONES ESTABLES E INESTABLES.

a) Casos estables.

```

DIMENSION AUX(5751)-IPAR(5)
CALL FMPAR(IPAR)
LU5=IPAR(1)
IA=IPAR(2)
A=FLOAT(IA)
XLL=A
IA=IPAR(3)
A=FLOAT(IA)
XUUU=1.21+0.1*A
IA=IPAR(4)
A=FLOAT(IA)
LEL=A
EPS=1.0E-01
NLIN=5751
IZ=IPAR(5)
ZF=FLOAT(IZ)
HC=1.0E-04*ZF
DO 30 L=1, IZ
XU=XUUU*FLOAT(L)
WRITE(LU5,100)LEL, EPS, HC
PF=0.0
XL=XLL
XU=XLL+LEL
10 CALL FOME(LU5, HC, XL, XU, EPS, NLIN, Y, IEL, AUX)
IF(IEF.LC.0) GO TO 20
PF=999999.9999
GO TO 40
20 CONTINUE
PF=Y+PF
XL=XU
XU=XU+LEL
IF(XU.LE.XUU) GO TO 10
40 CONTINUE
45 XU=XU-LEL
WRITE(LU5,110)XLL, XU
WRITE(LU5,140)PF
48 CONTINUE
50 CONTINUE
102 FORMAT(/, 1X, "INTEG. NUM. CON DEL =", E6.1, 5X, "ERROF LL", E6.1-2X, "\n
*ALCE FIJO Z: L =", E6.1, 5X, "ESTABLE")
112 FORMAT(/, 22X, "LIMITE INFERIOR DE LA INTEGRAL:", F10.1, /, 22X, "LIMITE
* SUPERIOR DE LA INTEGRAL:", F10.1)
142 FORMAT(0, "ESPAC.=", F10.1)
STOP
END
SUBROUTINE FOME(LU5, HC, XL, XU, EPS, NLIN, Y, IEF, AUX)
DIMENSION AUX(1)
AUX(1)=.5*(FOT(XL, HC, LU5 )+FOT(XU, HC, LU5 ))
H=XU-XL
IF(NLIN-1)3,3,1

```

Apéndice G (cont.)

a) Casos estables

```

1  IF(H) 2, 10, 2
2  HH=H
   Z=EPS/ABS(H)
   DELT2=0.
   F=1.
   JJ=1
   DO 7 I=2, NDI
   Y=AUX(I)
   DELT1=DELT2
   HI=HH
   ...=.5*...
   F=.5*F
   X=XL+HH
   SM=0
   DO 3 J=1, JJ
   SM=SM+FCT(X, H2, LUE )
3  X=X+HI
   AUX(I)=.5*AUX(I-1)+F*SM
   C=1.
   JI=I-1
   DO 4 J=1, JI
   II=I-J
   G=C+G
4  AUX(II)=AUX(II+1)+(AUX(II+1)-AUX(II))/(G-1.)
   DELT2=ABS(Y-AUX(I))
   IF(I-5) 7, 5, 5
5  IF(DELT2-E) 10, 10, 6
6  IF(DELT2-DELT1) 7, 11, 11
7  JJ=JJ+JJ
8  IEF=2
9  Y=H*AUX(1)
   RETURN
10  IEF=0
   GO TO 9
11  IEF=1
   Y=H*Y
   RETURN
END
FUNCTION FCT(Z, Z0, LUE)
CALL VELOX(Z, Z0, VX)
CALL FIES(Z, Z0, FI)
FCT=VX/FI
RETURN
END
SUBROUTINE VELOX(Z, Z0, VX)
R2=4.7*Z0*Z
CALL SEXF(Z, Z0, AN, S)
CALL TRANS(S, C)
VX=ALOC(C*Z)+R2
RETURN
END

```

Apéndice G (cont.)

a) Casos estables

```

SUBROUTINE SEXF(A, HC, AN, S)
  R0=4.7*HC*A
  R1=0.74+R0
  R2=R0/R1
  AN=1.2-R2
  S=1.2+(1.2+R2)/(R0+ALOG(A))+R2
  RETURN
END
SUBROUTINE TRANS(S, C)
  IF(S.LT.1.0) GO TO 10
  IF(S.CE.1.0.AND.S.LT.1.5) GO TO 20
  IF(S.CE.1.5.AND.S.LT.2.0) GO TO 30
  IF(S.CE.2.0.AND.S.LT.2.5) GO TO 40
  IF(S.CE.2.5) GO TO 50
10 H2=0.3882
  H1=2.3936
  H2=0.
  H3=-2.2273
  A=S-0.5
  GO TO 60
20 HC=0.5019
  H1=0.2427
  H2=-0.3117
  H3=0.1904
  A=S-1.0
  GO TO 60
30 HC=0.6297
  H1=0.2797
  H2=-0.3141
  H3=-0.2154
  A=S-1.5
  GO TO 60
40 HC=0.6641
  H1=0.2541
  H2=-0.2372
  H3=0.1166
  A=S-2.0
  GO TO 60
50 HC=0.6839
  H1=0.2293
  H2=-0.2123
  H3=0.0032
  A=S-2.5
60 C=HC+H1*A+H2*A*A+H3*A*A*A
  RETURN
END
SUBROUTINE FIDS(Z, Z0, FI)
  HC=4.7*Z0*Z
  H1=0.74+HC
  CALL SEXF(Z, Z0, AN, S)
  A31=1./S
  A32=2./S

```

a) Casos estables

```

A33=AN/S
CALL GAMMA(A31,G31,IEF)
CALL GAMMA(A32,G32,IEF)
CALL GAMMA(A33,G33,IEF)
IF(IEF.NE.0) WRITE(LUS,4)IEF
4  FORMAT(1X,"FUNCION GAMMA CON IEF=",1X,I1)
AN1=AN-1.2
H3=G31/G32
H3=H3**AN1
H4=G33/G31
CC=H4*H3
H5=0.74/H1
FI=CC*H5*H5
RETURN
END
SUBROUTINE GAMMA(X,GX,IEF)
  IF(X-34.5)6,6,4
4  IEF=0
  GX=1.203
  RETURN
6  X=XX
  EFP=1.2E-6
  IEF=0
  CX=1.0
  IF(X-2.0)50,50,15
10 IF(X-2.0)110,110,15
15 X=X-1.0
  CX=CX*X
  GO TO 10
50 IF(X-1.0)60,120,110
  TESTEF SI X NEGATIF OU NUL
60 IF(X-EFP)62,62,30
62 K=X
  Y=FLOAT(K)-X
  IF(ABS(Y)-EFP)130,130,64
64 IF(1.0-Y-EFP)130,130,70
  X NON VOISIN D'UN ENTIER NEGATIF OU NUL
70 IF(X-1.0)30,30,110
30 CX=CX/X
  X=X+1.0
  GO TO 70
110 Y=X-1.0
  GY=1.0+Y*(-2.5771017+Y*(+0.9253540+Y*(-0.3764213+Y*(+2.
13328212+Y*(-0.5684729+Y*(+0.2543205+Y*(-0.05149930))))))
  CX=CX*GY
120 RETURN
130 IEF=1
  RETURN
END
ENDS
ENDS

```


Apéndice G (cont.)

b) Casos inestables

```

DIMENSION AUX(5701), IPAR(5)
CALL IIPAR(IPAR)
LUS=IPAR(1)
IA=IPAR(2)
A=FLOAT(IA)
XLL=A
IA=IPAR(3)
A=FLOAT(IA)
XUU=1.E+01*A
IA=IPAR(4)
A=FLOAT(IA)
LEL=A
EPS=1.E-21
NDIM=5700
IZ=IPAR(5)
ZF=FLOAT(IZ)
HE=1.E-04*ZF
DO 50 L=1, 10
XU=XUU*FLOAT(L)
WRITE(LUS, 100)LEL, EPS, HE
PF=0.0
...
XU=XLL+LEL
13 CALL FOMB(LUS, HE, XL, XU, EPS, NDIM, Y, IES, AUX)
IF(IEF.E6.0) GO TO 20
PF=999999.9999
GO TO 40
20 CONTINUE
PF=Y+PF
XL=XU
XU=XU+LEL
IF(XU.LE.XUU) GO TO 13
40 CONTINUE
45 XU=XU-LEL
WRITE(LUS, 110)XLL, XU
WRITE(LUS, 140)PF, PF
43 CONTINUE
52 CONTINUE
102 FORMAT(/, 1X, "INTEC. NUM. CON IEL =", E6.1, 5X, "ERROR. LE#, E6.1, 2X, "V
*ALCE 20:L=", E6.1, 3X, "INESTABLE")
110 FORMAT(/, 22X, "LIMITE INFERIOR DE LA INTEGRAL:", F10.1-/, 22X, "LIMITE
* SUPERIOR DE LA INTEGRAL:", F10.1)
140 FORMAT(6X, "ESPAC.=", F10.1, 5X, "0", 5X, 17.2)
STOP
END
SUBROUTINE FOMB(LUS, HE, XL, XU, EPS, NDIM, Y, IES, AUX)
DIMENSION AUX(1)
AUX(1)=.5*(FCT(XL, HE, LUS )+FCT(XU, HE, LUS ))
H=XU-XL
IF(NDIM-1)8,8,1

```

Apéndice G (cont.)

b) Casos inestables

```

1  IF(H)2, 10, 2
2  HH=H
   E=EPS/ABS(H)
   LELT2=0.
   P=1.
   JJ=1
   LC 7 I=2, NLIM
   Y=AUX(1)
   DELT1=LELT2
   HI=HH
   HH=.5*HH
   P=.5*P
   X=XL+HH
   SM=0
   LC 3 J=1, JJ
   SM=SM+FCT(X, H0, LUE )
3  X=X+HI
   AUX(I)=.5*AUX(I-1)+P*SM
   C=1.
   JI=I-1
   DO 4 J=1, JI
   II=I-J
   C=C+C
4  AUX(II)=AUX(II+1)+(AUX(II+1)-AUX(II))/(C-1.)
   DELT2=ABS(Y-AUX(I))
   IF(I-5)7, 5, 5
5  IF(LELT2-E)10, 12, 6
6  IF(DELT2-DELT1)7, 11, 11
7  JJ=JJ+JJ
8  IEF=2
9  Y=H*AUX(1)
   RETURN
10  IEF=0
   GO TO 9
11  IEF=1
   I=A+Y
   RETURN
   END
FUNCTION FCT(Z, Z0, LUE)
CALL VELOX(Z, Z0, VX)
CALL FIINE(Z, Z0, FI)
FCT=VX/FI
RETURN
END
SUBROUTINE VELOX(Z, Z0, VX)
IF(Z1.EQ.1.0E-02) GO TO 20
IF(Z0.EQ.1.0E-03) GO TO 10
A=0.6160
E=0.0002
GO TO 30
10 A=2.5439

```

Apéndice G (cont.)

b) Casos inestables

```

E=0.0575
GO TO 30
20 A=0.5478
E=0.1093
30 BE=Z**E
EE=A*ZE
CALL SEXF(Z,Z0,AN,S)
A31=1./S
A32=2./S
CALL GAMMA(A31,C31,IEF)
CALL GAMMA(A32,C32,IEF)
F1=(S*C32)/(C31*C31)
F2=F1*EE
CALL CONIN(Z0,C1)
F3=C1-F2
CALL TRANS(S,C)
VX=ALOG(C*Z)+F3
RETURN
END
SUBROUTINE FIINE(Z,Z0,F1)
H1=1.0+13.5*Z0*Z
H2=1.0+ 9.2*Z0*Z
H2=SQRT(H2)
H1=H1/H2
CALL SEXF(Z,Z2,AN,S)
A31=1./S
A32=2./S
A33=13./S
CALL GAMMA(A31,C31,IEF)
CALL GAMMA(A32,C32,IEF)
CALL GAMMA(A33,C33,IEF)
H3=C31/C32
H3=H3**AN1
H4=C33/C31
G3=H4*H3
F1=G3*H1
RETURN
END
SUBROUTINE SEXF(A,H2,AN,S)
H1=1.0+15.0*H2*A
ANU=H1**0.25
CALL CONIN(H2,C1)
H2=4.5*H2*A
H3=1.0+2.0*H2
H4=1.0-H2/H3
AN=1.2+H2/H3
H1=ANU*ANU+1.0
H2=ANU+1.0
H3=H2*H2*H1
H1=2.0*A*ATAN(ANU)

```

Apéndice G (cont.)

b) Casos inestables

```

H5=ALOG(A)+H1-ALOG(H3)+C1
H5=AMU*H5
H5=1.0/H5
S=H4+H5
RETURN
SUBROUTINE TRANS(S,C)
IF(S.LT.1.0) GO TO 10
IF(S.GE.1.0.AND.S.LT.1.5) GO TO 20
IF(S.GE.1.5.AND.S.LT.2.0) GO TO 30
IF(S.GE.2.0.AND.S.LT.2.5) GO TO 40
IF(S.GE.2.5) GO TO 50
10 H0=0.3882
   H1=0.3936
   H2=0.
   H3=-0.2078
   A=S-0.5
   GO TO 60
20 H0=2.5615
   H1=0.2427
   H2=-0.3117
   H3=2.1984
   A=S-1.0
   GO TO 60
30 H0=0.6297
   H1=0.0797
   H2=-0.0141
   H3=-1.0154
   A=S-1.5
   GO TO 60
40 H0=2.6641
   H1=0.0541
   H2=-0.0372
   H3=0.0106
   A=S-2.0
   GO TO 60
50 H0=0.6839
   H1=0.0293
   H2=-0.0123
   H3=2.0052
   A=S-2.5
60 C=H0+H1*A+H2*A*A+H3*A*A*A
   RETURN
END
SUBROUTINE COMIN(H2,C1)
H1=1.0+15.0*H0
AMU0=H1**0.25
H1=AMU0*AMU0+1.0
H2=AMU0+1.0
H3=H2*H2*H1

```

Apéndice G (cont.)

b) Casos inestables

```

H1=2.0*ATAN(AH/UL)
C1=ALOC(H3)-H1
RETURN
END
SUBROUTINE GAMMA(XX, CX, IEF)
  IF(XX-34.5)0,0,4
4  IEF=2
  CX=1.E32
  RETURN
6  X=XX
  ERG=1.0E-6
  IEF=0
  CX=1.2
  IF(X-2.2)52,52,15
12 IF(X-2.2)112,112,15
15 X=X-1.0
  CX=CX*X
  GO TO 12
52 IF(X-1.2)62,122,110
  TESTER SI X NEGATIF OU NUL
62 IF(X-1.1)62,62,82
62 Y=X
  Y=FLOAT(Y)-X
  IF(ABS(Y)-1.1)132,132,64
64 IF(1.2-Y-ERG)132,132,72
      X NON VOISIN D'UN ENTIER NEGATIF OU NUL
72 IF(X-1.0)82,82,112
82  CX=CX/X
  X=X+1.2
  GO TO 72
112 Y=X-1.0
  CY=1.0+Y*(-0.5771017+Y*(+2.9852542+Y*(-2.3764213+Y*(+2.
18322212+Y*(-2.5684729+Y*(+0.2548225+Y*(-0.25149932))))))
  CA=CX+CY
120 RETURN
132 IEF=1
  RETURN
  END
  ENDS
  ENDS

```

TABLAS

TABLA I

Valores de la función $B(\bar{z}/z_0, z_0/L)$ y su forma funcional aproximada.

$\bar{z}/z_0 \backslash z_0/L$	-10^{-4}	-10^{-3}	-10^{-2}
10.	6.8119	7.0811	8.4867
15.	9.9399	10.4632	12.6555
20.	13.0476	13.8778	16.8167
30.	19.2348	20.7891	25.1407
40.	25.4088	27.7800	33.5172
50.	31.5839	34.8217	41.9829
60.	37.7669	41.8942	50.5562
70.	43.9615	48.9835	59.2434
80.	50.1697	56.0810	68.0464
90.	56.3926	63.1811	76.9636
100.	62.6304	70.2800	85.9917
150.	94.0444	105.7161	132.6750
200.	125.7979	141.0896	181.6021
300.	190.0835	212.0765	284.8326
400.	255.0655	283.9329	393.7525
500.	320.4497	357.0008	507.2126
600.	386.0443	431.4061	624.4565
700.	451.7244	507.1789	744.9508
800.	517.4128	584.3007	868.2968
900.	583.0656	662.7291	994.1854
1000.	648.6576	742.4135	1122.3711
1500.	975.5901	1157.9014	1791.7087
2000.	1301.5623	1597.8157	2498.1787
3000.	1956.0691	2535.2563	3991.2417
4000.	2620.0210	3533.0894	5563.6182
5000.	3296.9180	4578.8193	7196.4014
6000.	3987.9805	5664.3408	8878.1348
7000.	4693.3828	6783.9629	10601.0840
8000.	5412.8281	7933.4521	12359.6992
9000.	6145.8408	9109.5430	14149.7305
10000.	6891.8730	10309.6348	15967.8965

$$B(\bar{z}/z_0, z_0/L) = a(\bar{z}/z_0)^b$$

a =	0.6160	0.5439	0.5478
b =	1.0082	1.0575	1.1093
r ² =	0.9999	0.9990	0.9993

TABLA II

Valores de la distancia adimensionalizada a la fuente emisora (\bar{x}/z_0) y de la concentración lateral integrada adimensionalizada (\bar{c}_y) en función de la altura media adimensionalizada (\bar{z}/z_0) de los contaminantes para distintas clases de estabilidad atmosférica (z_0/L).

Caso $z/L = -10^{-2}$			Caso $z/L = -10^{-3}$		
\bar{z}/z_0	$\frac{k^2}{0.74} \frac{\bar{x}}{z_0}$	\bar{c}_y	\bar{z}/z_0	$\frac{k^2}{0.74} \frac{\bar{x}}{z_0}$	\bar{c}_y
10	7.30E+00	0.5184E-01	10	1.01E+01	0.4138E-01
15	1.28E+01	0.3305E-01	15	1.96E+01	0.2404E-01
20	1.83E+01	0.2458E-01	20	3.02E+01	0.1666E-01
30	2.89E+01	0.1659E-01	30	5.33E+01	0.1017E-01
40	3.88E+01	0.1268E-01	40	7.77E+01	0.7288E-02
60	5.71E+01	0.8750E-02	60	1.28E+02	0.4661E-02
70	6.56E+01	0.7602E-02	70	1.54E+02	0.3961E-02
80	7.37E+01	0.6728E-02	80	1.79E+02	0.3451E-02
90	8.16E+01	0.6038E-02	90	2.04E+02	0.3063E-02
100	8.92E+01	0.5479E-02	100	2.29E+02	0.2758E-02
150	1.24E+02	0.3753E-02	150	3.50E+02	0.1870E-02
200	1.55E+02	0.2855E-02	200	4.64E+02	0.1436E-02
300	2.10E+02	0.1926E-02	300	6.76E+02	0.1000E-02
400	2.59E+02	0.1450E-02	400	8.70E+02	0.7764E-03
500	3.04E+02	0.1160E-02	500	1.05E+03	0.6375E-03
600	3.45E+02	0.9658E-03	600	1.22E+03	0.5421E-03
700	3.84E+02	0.8262E-03	700	1.38E+03	0.4720E-03
800	4.21E+02	0.7213E-03	800	1.53E+03	0.4182E-03
900	4.57E+02	0.6395E-03	900	1.68E+03	0.3755E-03
1000	4.90E+02	0.5742E-03	1000	1.82E+03	0.3407E-03
1500	6.43E+02	0.3783E-03	1500	2.47E+03	0.2325E-03
2000	7.77E+02	0.2809E-03	2000	3.05E+03	0.1760E-03
3000	1.01E+03	0.1843E-03	3000	4.06E+03	0.1177E-03
4000	1.22E+03	0.1366E-03	4000	4.96E+03	0.8801E-04
5000	1.40E+03	0.1082E-03	5000	5.78E+03	0.7003E-04
6000	1.57E+03	0.8947E-04	6000	6.54E+03	0.5801E-04
7000	1.73E+03	0.7618E-04	7000	7.26E+03	0.4953E-04
8000	1.88E+03	0.6627E-04	8000	7.94E+03	0.4300E-04
9000	2.02E+03	0.5860E-04	9000	8.58E+03	0.3801E-04
10000	2.16E+03	0.5250E-04	10000	9.21E+03	0.3403E-04
15000	2.77E+03	0.3439E-04	15000	1.20E+04	0.2218E-04
20000	3.30E+03	0.2549E-04	20000	1.45E+04	0.1634E-04
30000	4.21E+03	0.1671E-04	30000	1.88E+04	0.1061E-04
40000	4.99E+03	0.1240E-04	40000	2.26E+04	0.7803E-05
50000	5.70E+03	0.9834E-05	50000	2.60E+04	0.6146E-05
60000	6.34E+03	0.8141E-05	60000	2.92E+04	0.5056E-05
70000	6.94E+03	0.6941E-05	70000	3.22E+04	0.4286E-05
80000	7.50E+03	0.6046E-05	80000	3.50E+04	0.3715E-05
90000	8.04E+03	0.5353E-05	90000	3.77E+04	0.3274E-05
100000	8.54E+03	0.4801E-05	100000	4.02E+04	0.2925E-05

TABLA II (cont.)

Caso $z_0/L = -10^{-4}$

\bar{z}/z_0	$\frac{k^2}{0.74} \frac{\bar{x}}{z_0}$	\bar{c}_y
10	1.06E+01	0.4027E-01
15	2.08E+01	0.2302E-01
20	3.26E+01	0.1571E-01
30	5.94E+01	0.9311E-02
40	8.91E+01	0.6487E-02
50	1.21E+02	0.4926E-02
60	1.55E+02	0.3945E-02
70	1.89E+02	0.3277E-02
80	2.25E+02	0.2794E-02
90	2.62E+02	0.2431E-02
100	3.00E+02	0.2148E-02
150	4.96E+02	0.1346E-02
200	7.01E+02	0.9743E-03
300	1.12E+03	0.6266E-03
400	1.55E+03	0.4632E-03
500	1.97E+03	0.3690E-03
600	2.40E+03	0.3078E-03
700	2.81E+03	0.2650E-03
800	3.22E+03	0.2334E-03
900	3.62E+03	0.2090E-03
1000	4.02E+03	0.1897E-03
1500	5.90E+03	0.1321E-03
2000	7.65E+03	0.1031E-03
3000	1.08E+04	0.7334E-04
4000	1.37E+04	0.5765E-04
5000	1.63E+04	0.4775E-04
6000	1.87E+04	0.4087E-04
7000	2.10E+04	0.3576E-04
8000	2.32E+04	0.3182E-04
9000	2.53E+04	0.2866E-04
10000	2.73E+04	0.2608E-04
15000	3.64E+04	0.1798E-04
20000	4.43E+04	0.1370E-04
30000	5.82E+04	0.9235E-05
40000	7.03E+04	0.6939E-05
50000	8.12E+04	0.5542E-05
60000	9.14E+04	0.4605E-05
70000	1.01E+05	0.3933E-05
80000	1.10E+05	0.3429E-05
90000	1.18E+05	0.3037E-05
100000	1.26E+05	0.2723E-05

TABLA II (cont.)

Caso Neutral				Caso $z_0/L = +10^{-4}$			
\bar{z}/z_0	$\frac{k^2}{0.74}$	$\frac{\bar{x}}{z_0}$	\bar{c}_y	\bar{z}/z_0	$\frac{k^2}{0.74}$	$\frac{\bar{x}}{z_0}$	\bar{c}_y
10	1.01E+01	0.4097E-01		10	1.02E+01	0.4071E-01	
15	2.03E+01	0.2313E-01		15	2.05E+01	0.2292E-01	
20	3.22E+01	0.1567E-01		20	3.27E+01	0.1548E-01	
30	5.94E+01	0.9209E-02		30	6.07E+01	0.9046E-02	
40	8.99E+01	0.6375E-02		40	9.25E+01	0.6227E-02	
50	1.23E+02	0.4814E-02		50	1.27E+02	0.4677E-02	
60	1.58E+02	0.3837E-02		60	1.65E+02	0.3707E-02	
70	1.95E+02	0.3172E-02		70	2.04E+02	0.3048E-02	
80	2.33E+02	0.2693E-02		80	2.45E+02	0.2575E-02	
90	2.72E+02	0.2332E-02		90	2.88E+02	0.2219E-02	
100	3.13E+02	0.2052E-02		100	3.33E+02	0.1942E-02	
150	5.28E+02	0.1260E-02		150	5.79E+02	0.1165E-02	
200	7.61E+02	0.8954E-03		200	8.56E+02	0.8098E-03	
300	1.26E+03	0.5557E-03		300	1.49E+03	0.4838E-03	
400	1.79E+03	0.3973E-03		400	2.23E+03	0.3348E-03	
500	2.35E+03	0.3068E-03		500	3.07E+03	0.2512E-03	
600	2.93E+03	0.2486E-03		600	4.00E+03	0.1985E-03	
700	3.53E+03	0.2082E-03		700	5.03E+03	0.1625E-03	
800	4.14E+03	0.1786E-03		800	6.15E+03	0.1367E-03	
900	4.76E+03	0.1561E-03		900	7.37E+03	0.1172E-03	
1000	5.39E+03	0.1384E-03		1000	8.68E+03	0.1022E-03	
1500	8.69E+03	0.8732E-04		1500	1.68E+04	0.6009E-04	
2000	1.22E+04	0.6308E-04		2000	2.75E+04	0.4114E-04	
3000	1.94E+04	0.3999E-04		3000	5.75E+04	0.2401E-04	
4000	2.71E+04	0.2898E-04		4000	1.00E+05	0.1630E-04	
5000	3.49E+04	0.2259E-04		5000	1.57E+05	0.1201E-04	
6000	4.30E+04	0.1844E-04		6000	2.28E+05	0.9333E-05	
7000	5.13E+04	0.1554E-04		7000	3.17E+05	0.7516E-05	
8000	5.96E+04	0.1340E-04		8000	4.22E+05	0.6216E-05	
9000	6.82E+04	0.1176E-04		9000	5.47E+05	0.5247E-05	
10000	7.68E+04	0.1047E-04		10000	6.91E+05	0.4501E-05	

TABLA 11 (cont.)

Caso $z_0/L = +10^{-3}$			Caso $z_0/L = +10^{-2}$		
\bar{z}/z_0	$\frac{k^2}{0.74} \frac{\bar{x}}{z_0}$	\bar{c}_y	\bar{z}/z_0	$\frac{k^2}{0.74} \frac{\bar{x}}{z_0}$	\bar{c}_y
10	1.10E+01	0.3862E-01	10	2.12E+01	0.2747E-01
15	2.29E+01	0.2129E-01	15	5.19E+01	0.1417E-01
20	3.73E+01	0.1411E-01	20	9.76E+01	0.8928E-02
30	7.30E+01	0.7968E-02	30	2.41E+02	0.4678E-02
40	1.17E+02	0.5328E-02	40	4.64E+02	0.2956E-02
50	1.68E+02	0.3903E-02	50	7.80E+02	0.2066E-02
60	2.26E+02	0.3026E-02	60	1.20E+03	0.1539E-02
70	2.92E+02	0.2441E-02	70	1.74E+03	0.1197E-02
80	3.65E+02	0.2026E-02	80	2.41E+03	0.9619E-03
90	4.46E+02	0.1719E-02	90	3.22E+03	0.7918E-03
100	5.34E+02	0.1484E-02	100	4.18E+03	0.6646E-03
150	1.09E+03	0.8419E-03	150	1.17E+04	0.3349E-03
200	1.86E+03	0.5622E-03	200	2.47E+04	0.2036E-03
300	4.07E+03	0.3169E-03	300	7.30E+04	0.9934E-04
400	7.32E+03	0.2099E-03	400	1.60E+05	0.5903E-04
500	1.17E+04	0.1518E-03	500	2.96E+05	0.3919E-04
600	1.74E+04	0.1161E-03	600	4.93E+05	0.2793E-04
700	2.45E+04	0.9228E-04	700	7.61E+05	0.2094E-04
800	3.32E+04	0.7547E-04	800	1.11E+06	0.1629E-04
900	4.35E+04	0.6307E-04	900	1.55E+06	0.1303E-04
1000	5.55E+04	0.5364E-04	1000	2.10E+06	0.1067E-04
1500	1.46E+05	0.2832E-04	1500	6.74E+06	0.4905E-05
2000	2.98E+05	0.1772E-04	2000	1.56E+07	0.2810E-05
3000	8.42E+05	0.8949E-05	3000	5.10E+07	0.1274E-05
4000	1.80E+06	0.5428E-05	4000	1.19E+08	0.7244E-06
5000	3.27E+06	0.3653E-05	5000	2.30E+08	0.4667E-06
6000	5.37E+06	0.2630E-05	6000	3.95E+08	0.3256E-06
7000	8.20E+06	0.1986E-05	7000	6.24E+08	0.2400E-06
8000	1.19E+07	0.1553E-05	8000	9.29E+08	0.1843E-06
9000	1.65E+07	0.1249E-05	9000	1.32E+09	0.1459E-06
10000	2.22E+07	0.1026E-05	10000	1.80E+09	0.1184E-06

TABLA III

Valores de los parámetros R_i , L , u_{*} y Q para las diferentes rondas consideradas del Proyecto Prairie Grass.

Ronda	R_i	L (m)	u_{*} (m/s)	Q (g/s)
32	0.094	9.174	0.133	41.4
58	0.086	10.638	0.139	40.5
36	0.075	13.158	0.126	40.0
59	0.074	13.514	0.165	40.2
18	0.063	16.949	0.173	57.6
35s	0.041	29.412	0.190	41.8
54	0.039	31.250	0.191	43.4
41	0.035	35.714	0.232	39.9
60	0.031	41.667	0.225	38.5
17	0.027	47.619	0.197	56.5
56	0.023	58.824	0.237	45.9
37	0.018	76.923	0.266	40.3
42	0.018	76.923	0.279	56.4
21	0.014	100.000	0.309	50.9
38	0.013	111.111	0.276	45.4
55	0.012	111.111	0.304	45.3
22	0.011	125.000	0.387	48.4
24	0.008	166.667	0.327	41.2
57	-0.010	-200.000	0.408	101.5
34	-0.037	-52.632	0.546	97.4
20	-0.048	-41.667	0.548	101.2
27	-0.056	-35.714	0.372	98.8
30	-0.057	-34.483	0.413	98.4
49	-0.059	-33.333	0.399	102.0
50	-0.062	-32.258	0.395	102.8
26	-0.068	-29.412	0.387	97.6
44	-0.079	-25.000	0.362	100.7
19	-0.168	-11.905	0.369	101.8
43	-0.199	-10.000	0.323	98.9
15	-0.377	-5.291	0.211	95.5
25	-0.425	-4.695	0.719	101.4
16	-0.798	-2.506	0.223	93.0

TABLA IV

Valores experimentales de la concentración lateral integrada para las diferentes rondas consideradas.

Ronda	C_y (mg/m ²)				
	50 m	100 m	200 m	400 m	800 m
32	—	7468.5	5127.2	3346.7	2292.6
58	—	6816.9	4578.0	2957.2	2058.9
36	—	7065.7	4195.4	2443.2	1655.8
59	—	5343.4	3436.8	2103.6	1249.2
18	6345.3	4335.8	2692.0	1649.7	1098.7
35s	3831.3	2446.3	1362.4	780.1	409.6
54	3577.0	2272.4	1341.3	777.7	456.4
41	3262.2	2225.3	1300.0	780.9	461.0
60	2482.5	1557.3	938.8	490.4	290.8
17	6221.2	3830.8	2058.8	1084.1	621.7
56	3278.8	1982.6	1085.1	585.5	334.9
37	2472.3	1571.7	860.4	472.6	272.9
42	3021.0	1778.6	993.4	514.9	288.2
21	3008.4	1871.1	1012.5	526.0	285.2
38	3597.9	2155.0	1173.4	637.5	359.7
55	2531.2	1491.8	829.9	384.3	208.7
22	2307.8	1339.7	721.7	357.0	158.5
24	2042.4	1184.6	662.7	360.4	168.8
57	4630.8	2284.1	1517.2	721.6	303.2
34	3149.1	1828.6	998.8	436.8	183.2
20	3746.3	1939.2	957.0	386.0	143.2
27	4568.8	2475.7	1260.4	494.0	191.2
30	4425.9	2433.1	1162.2	418.4	235.2
49	4480.3	2482.8	1231.4	478.4	164.8
50	4582.0	2432.2	940.6	422.8	123.2
26	4074.4	2323.3	1115.6	423.2	136.0
44	4932.7	2519.1	1248.0	500.0	155.2
19	4875.7	2400.0	975.4	291.2	64.0
43	5494.7	2707.5	1247.2	429.6	135.2
15	7508.3	3522.9	1417.2	392.0	117.6
25	8370.1	2817.9	791.4	298.8	64.8
16	5255.3	1832.1	511.8	108.4	17.6

TABLA V

Diferencias relativas entre los valores de la concentración lateral integrada de contaminantes estimados por el modelo y los observados en el Proyecto Prairie Grass (ϵ).

ζ_0^z/L	arco	50 m	100 m	200 m	400 m	800 m	Ronda
$\zeta_0 < -7 \cdot 10^{-4}$		-0.156	+0.048	+0.399	+1.237	+3.100	16
		-0.079	+0.324	+0.931	+0.826	+1.769	25
$-7 \cdot 10^{-4} < \zeta_0$		-0.148	-0.101	-0.067	+0.227	+0.356	15
		-0.086	+0.009	+0.020	+0.181	+0.317	43
		$\bar{\epsilon} = -0.117$	$\bar{\epsilon} = +0.070$	$\bar{\epsilon} = +0.321$	$\bar{\epsilon} = +0.618$	$\bar{\epsilon} = +1.386$	
$\zeta_0 < -2.4 \cdot 10^{-4}$		-0.043	+0.079	+0.276	+0.759	+1.868	19
		+0.051	+0.200	+0.284	+0.506	+0.961	44
		+0.172	+0.206	+0.351	+0.719	+1.244	26
		+0.083	+0.199	+0.677	+0.827	+1.667	50
$-2.4 \cdot 10^{-4} < \zeta_0$		+0.090	+0.158	+0.266	+0.603	+1.000	49
		$\bar{\epsilon} = +0.071$	$\bar{\epsilon} = +0.168$	$\bar{\epsilon} = +0.371$	$\bar{\epsilon} = +0.683$	$\bar{\epsilon} = +1.348$	
$\zeta_0 < 0$		+0.033	+0.107	+0.260	+0.733	+0.327	30
		+0.120	+0.218	+0.304	+0.659	+0.861	27
		-0.040	+0.096	+0.219	+0.531	+0.853	20
		+0.119	+0.144	+0.159	+0.375	+0.532	34
		+0.111	+0.351	+0.138	+0.288	+0.609	45
	$\bar{\epsilon} = +0.069$	$\bar{\epsilon} = +0.183$	$\bar{\epsilon} = +0.216$	$\bar{\epsilon} = +0.517$	$\bar{\epsilon} = +0.636$		

TABLA V (cont.)

arco $\zeta_0 \equiv z_0/L$	50 m	100 m	200 m	400 m	800 m	Ronda
$0 < \zeta_0$ $\zeta_0 < 10^{-4}$	+0.334 +0.183 +0.290 +0.002 +0.206 +0.490 +0.364 $\bar{\epsilon} = +0.267$	+0.403 +0.247 +0.344 +0.027 +0.193 +0.565 +0.327 $\bar{\epsilon} = +0.301$	+0.426 +0.326 +0.387 +0.083 +0.207 +0.627 +0.408 $\bar{\epsilon} = +0.352$	+0.448 +0.498 +0.686 +0.121 +0.379 +0.792 +0.463 $\bar{\epsilon} = +0.484$	+0.716 +0.897 +0.756 +0.124 +0.447 +0.847 +0.461 $\bar{\epsilon} = +0.607$	24 22 55 38 21 42 37
$10^{-4} < \zeta_0$ $\zeta_0 < 5 \cdot 10^{-4}$	+0.342 +0.062 +0.603 +0.242 +0.521 +0.379 +0.345 $\bar{\epsilon} = +0.356$	+0.386 +0.085 +0.614 +0.157 +0.533 +0.387 +0.303 $\bar{\epsilon} = +0.352$	+0.490 +0.199 +0.598 +0.191 +0.576 +0.514 +0.314 $\bar{\epsilon} = +0.412$	+0.605 +0.337 +0.806 +0.179 +0.632 +0.588 +0.323 $\bar{\epsilon} = +0.496$	+0.651 +0.381 +0.815 +0.201 +0.682 +0.833 +0.229 $\bar{\epsilon} = +0.542$	56 17 60 41 54 35s 18
$\zeta_0 > 5 \cdot 10^{-4}$		-0.191 -0.197 -0.202 -0.196 $\bar{\epsilon} = -0.190$	-0.202 -0.141 -0.237 -0.242 $\bar{\epsilon} = -0.206$	-0.188 -0.080 -0.257 -0.266 $\bar{\epsilon} = -0.198$	-0.148 -0.154 -0.331 -0.326 $\bar{\epsilon} = -0.240$	59 36 58 32

TABLA VI

Comparación entre las predicciones obtenidas mediante los modelos gaussiano y el "s", dándose a través de la diferencia relativa entre los valores de la concentración lateral de contaminantes estimada y la observada en el Proyecto Prairie Grass.

Ronda	$\zeta_0 (10^{-5})$	Modelo	$\frac{\bar{c}_c - \bar{c}_e}{\bar{c}_e}$			
			100 m	200 m	400 m	800 m
44	-32	Gauss "s"	-0.009 +0.200	+0.115 +0.284	+0.533 +0.506	+1.944 +0.961
34	-15	Gauss "s"	-0.275 +0.144	-0.269 +0.159	+0.066 +0.375	+0.520 +0.532
38	+ 7	Gauss "s"	-0.373 +0.027	-0.358 +0.083	-0.349 +0.121	-0.310 +0.124
21	+ 8	Gauss "s"	-0.390 +0.193	-0.372 +0.207	-0.334 +0.379	-0.266 +0.449
18	+47	Gauss "s"	-0.429 +0.303	-0.358 +0.314	-0.469 +0.323	-0.530 +0.229
32	+87	Gauss "s"	-0.728 -0.196	-0.723 -0.242	-0.785 -0.266	-0.815 -0.326

FIGURAS

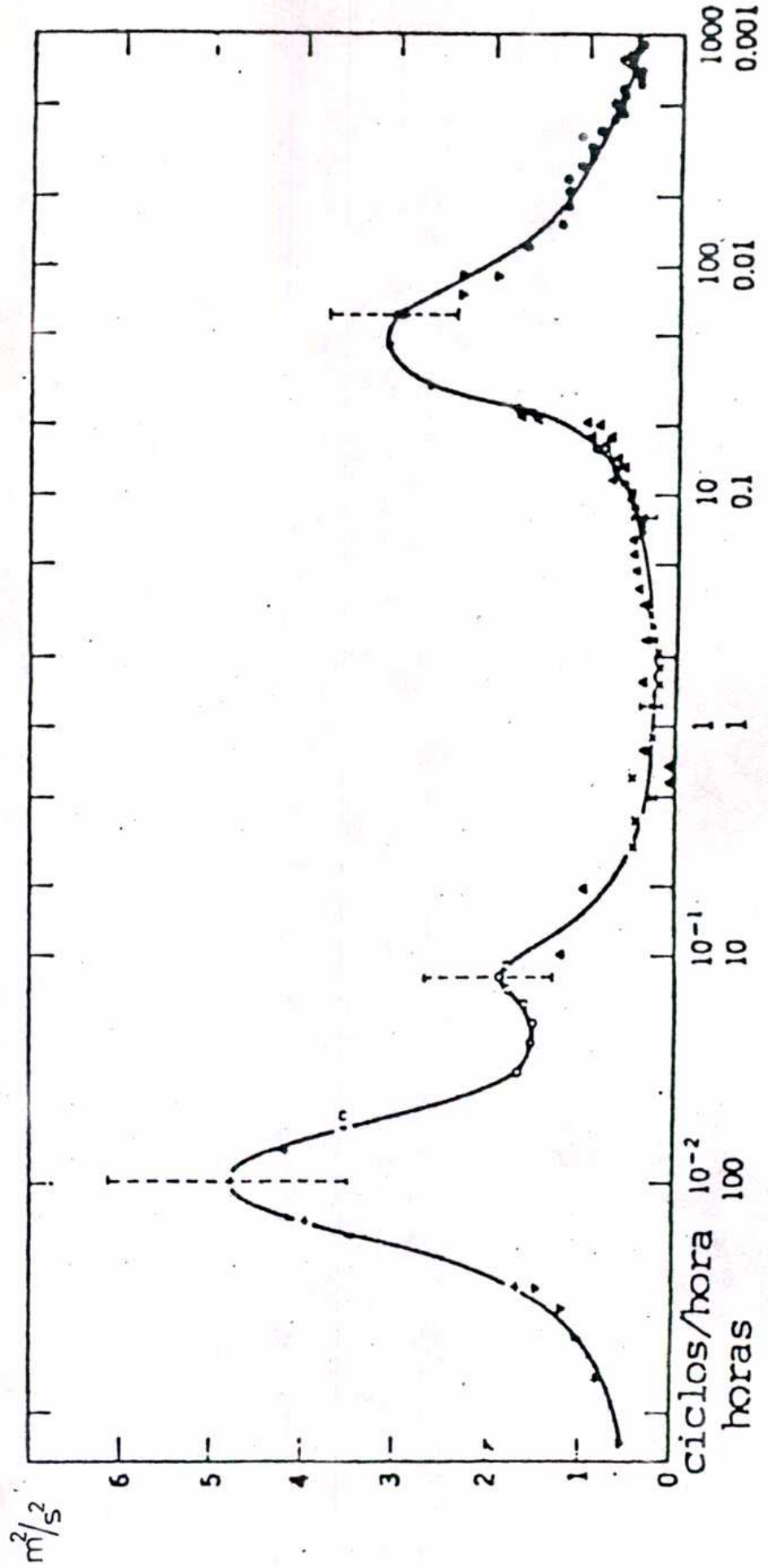


Figura 1. : Espectro de potencia del viento medido
a 125 m (Van der Hoven, 1957)

FIGURA 2

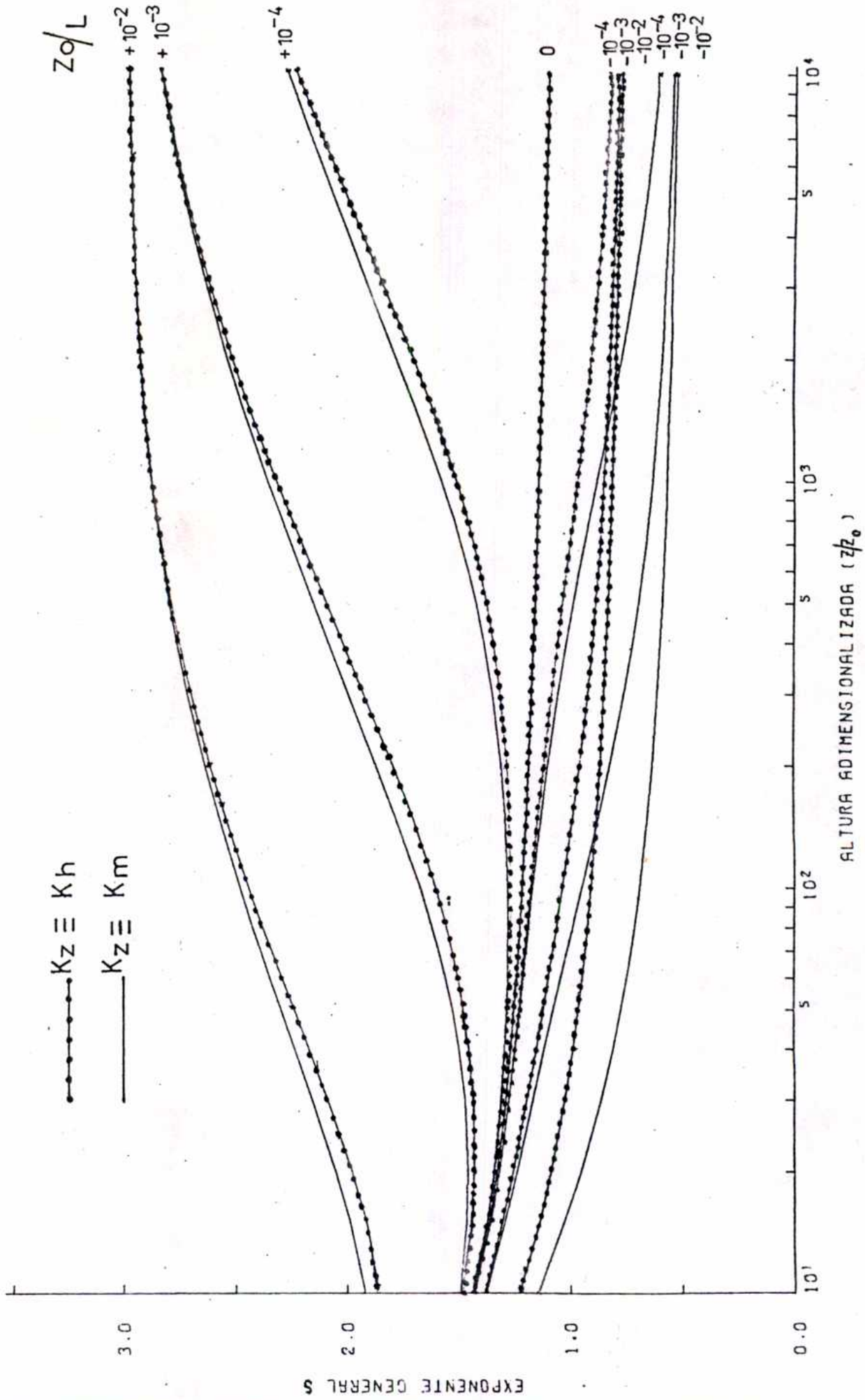


FIGURA 3

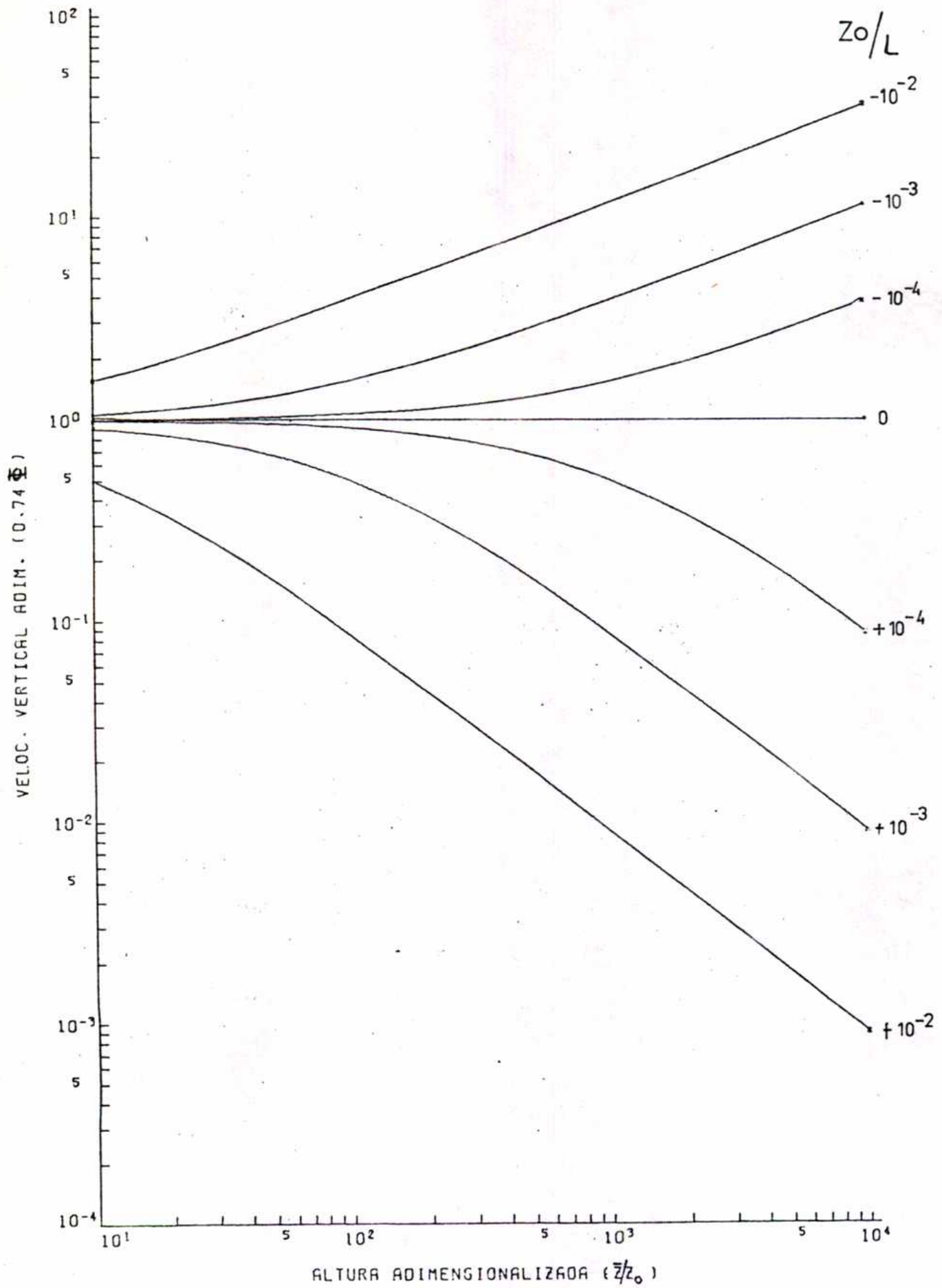
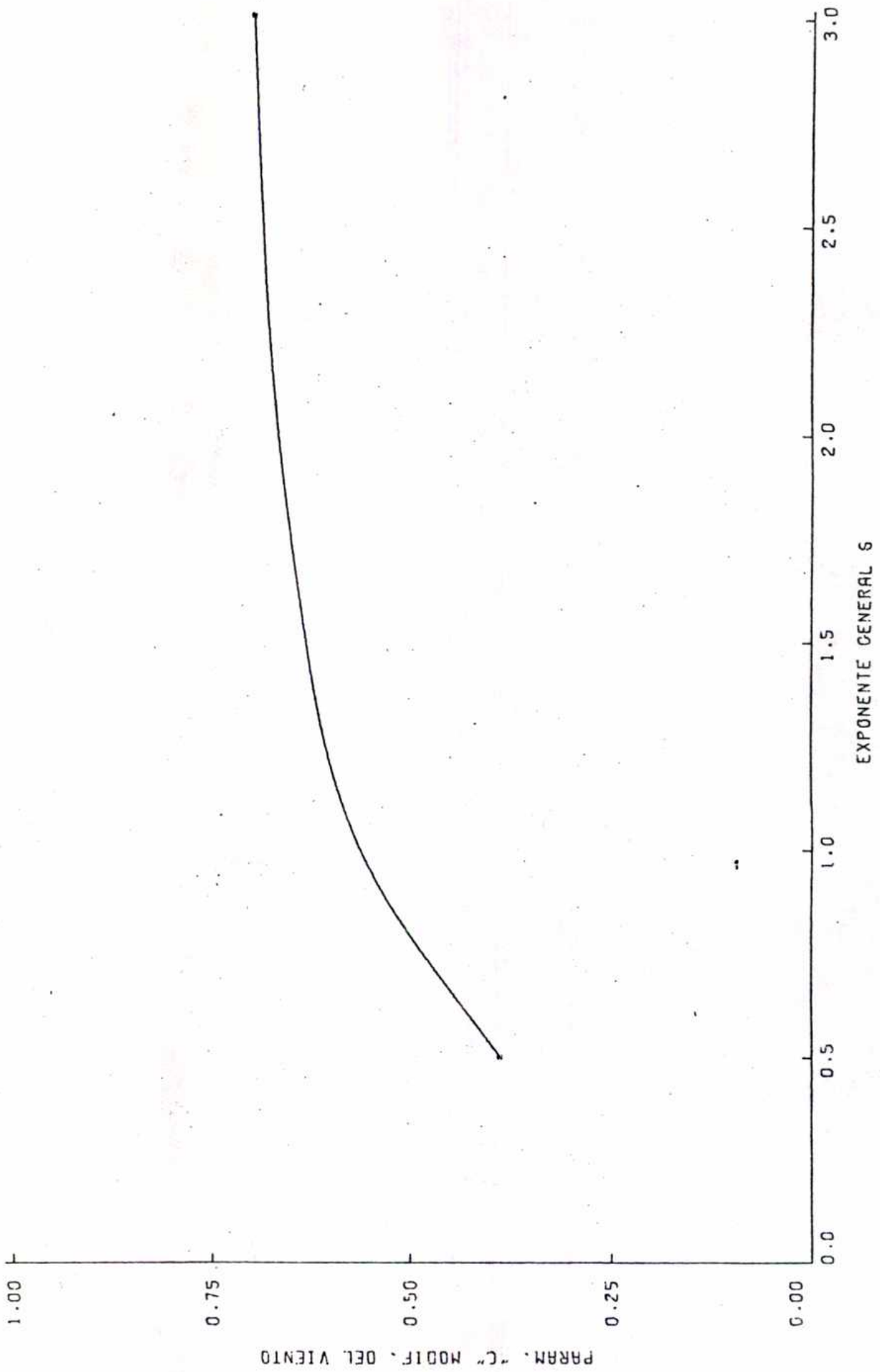


FIGURA 4



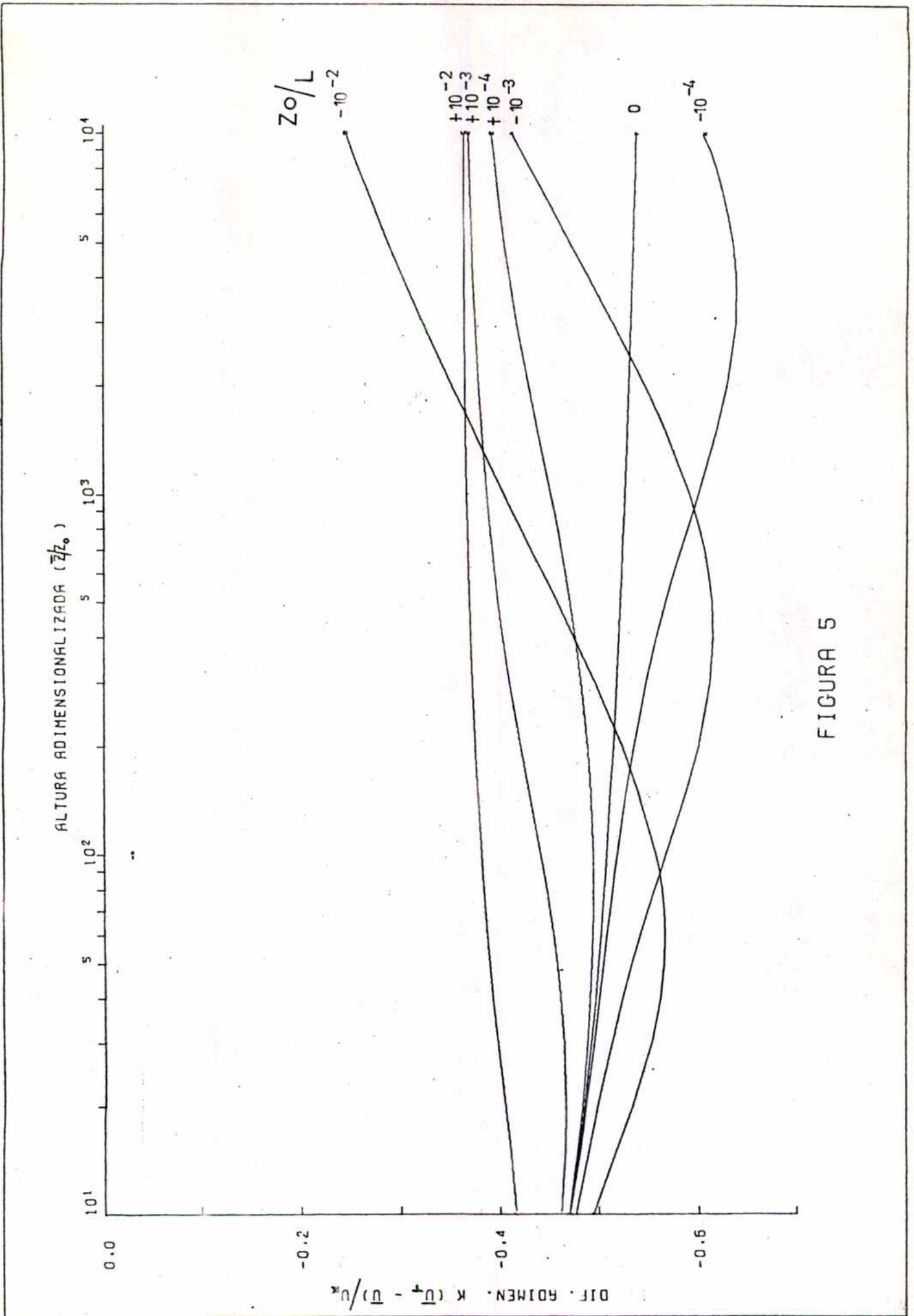


FIGURA 5

FIGURA 6

$$+10^{-2} = Z_0/L$$

$$+10^{-3}$$

$$+10^{-4}$$

$$0$$

$$-10^{-4}$$

$$-10^{-3}$$

$$-10^{-2}$$

10⁴ 5 10³ 5 10² 5 10¹

ALTURA ADIMENSIONALIZADA (\sqrt{z})

10⁰ 5 10¹ 5 10² 5 10³ 5 10⁴ 5 10⁵ 5 10⁶ 5 10⁷ 5 10⁸ 5 10⁹ 5 10¹⁰

DIST. A LA FUENTE ($K^2/0.74$)(\bar{x}/z_0)

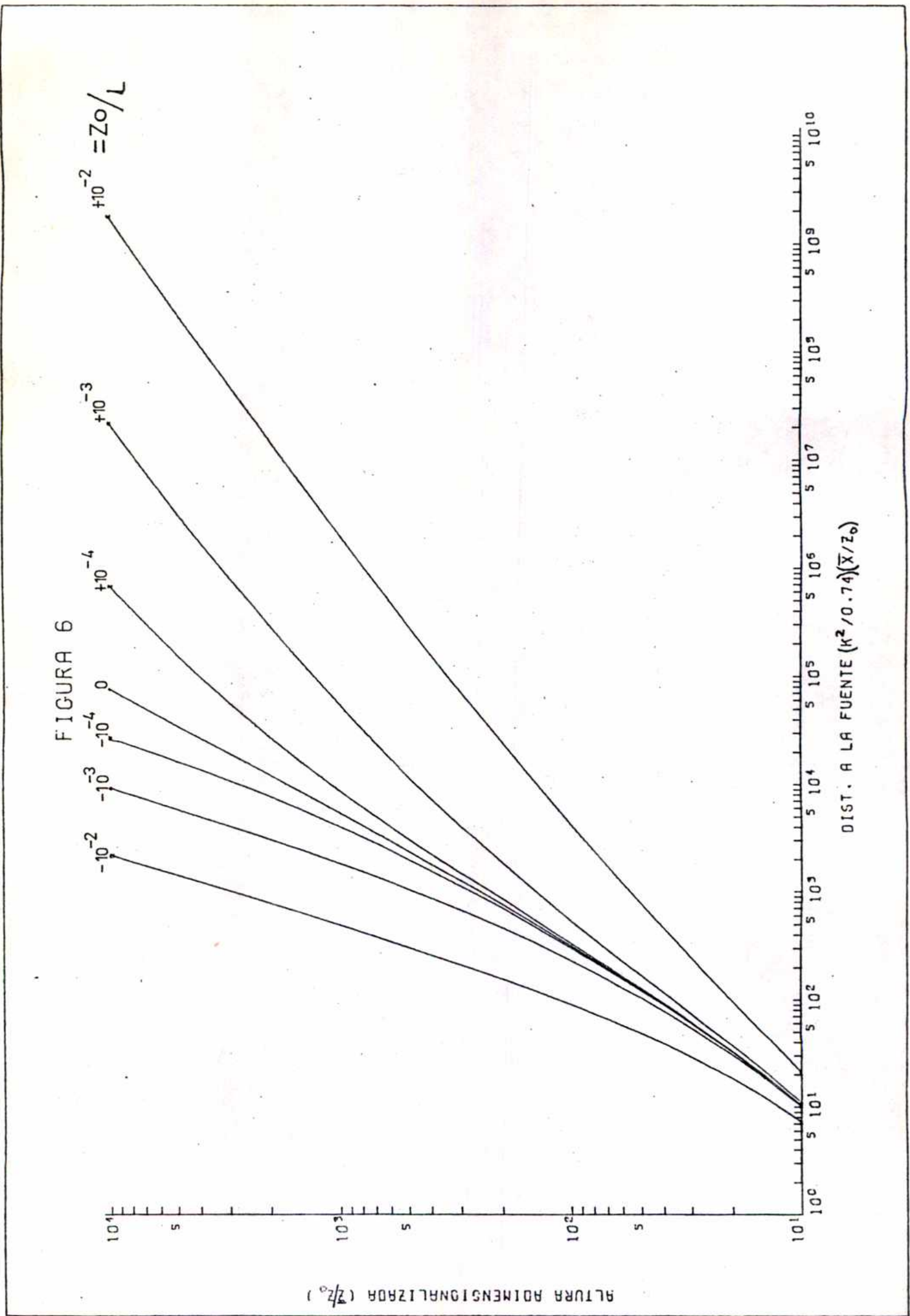


FIGURA 7

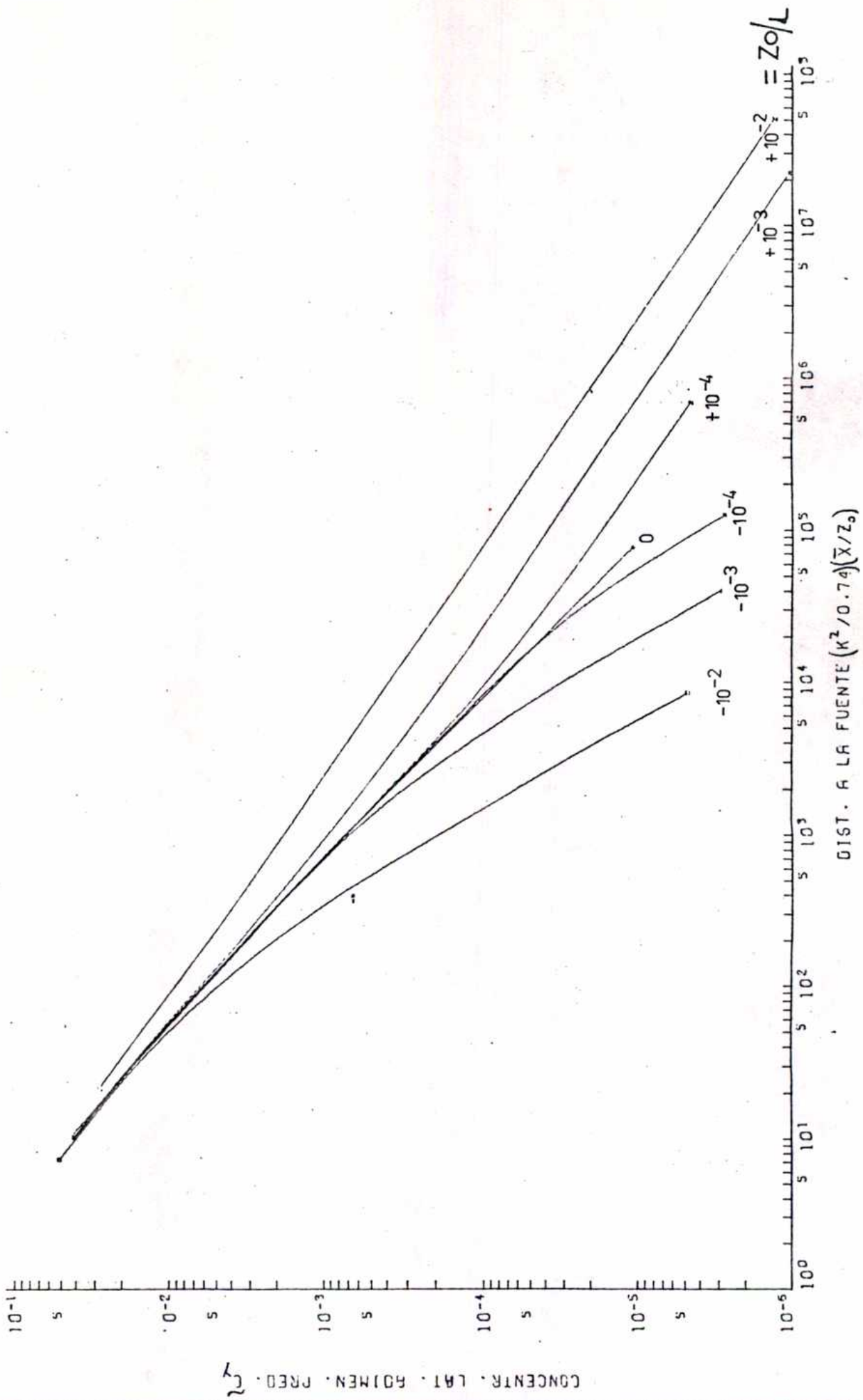
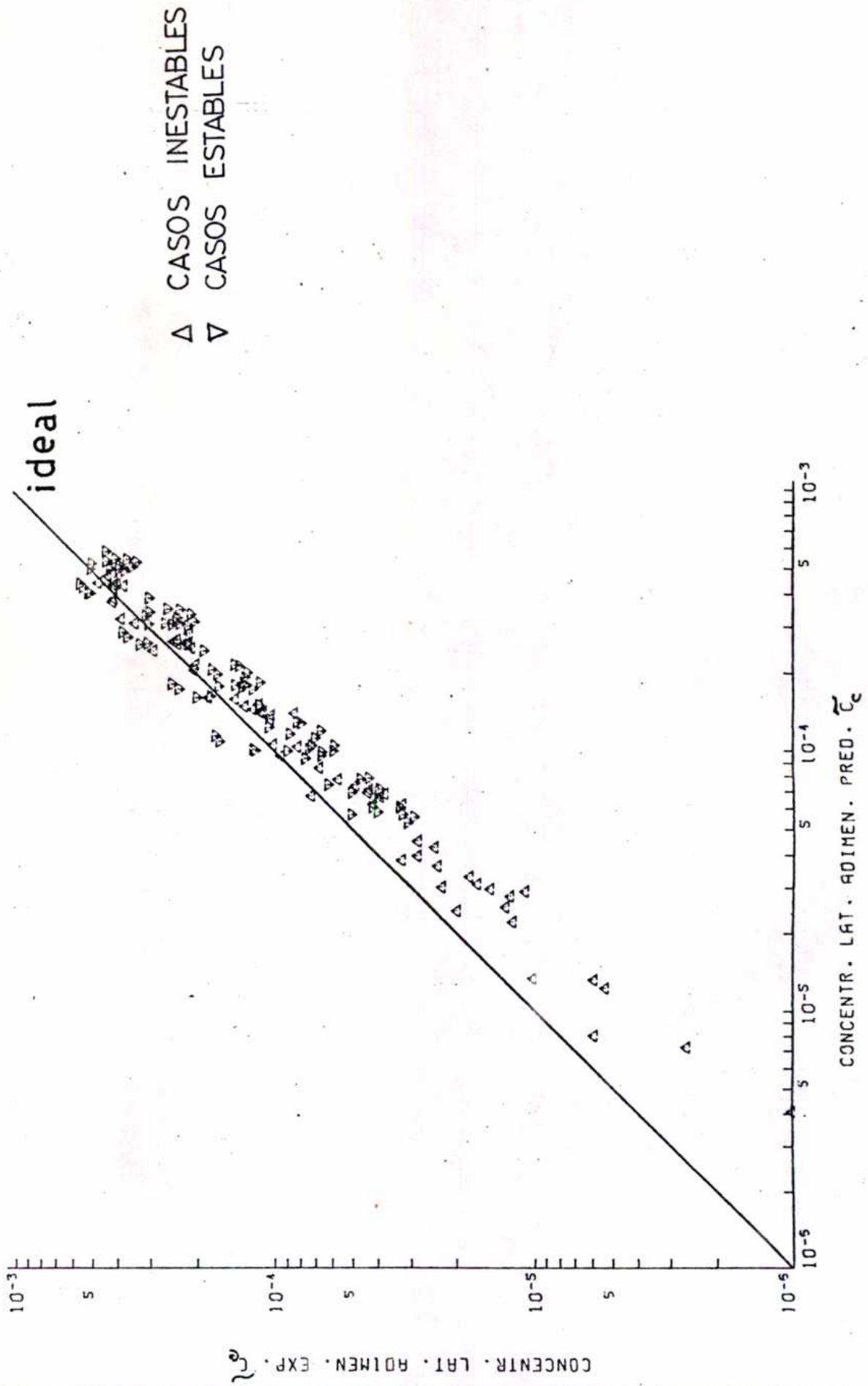


FIGURA 8



LISTA DE SIMBOLOS

LISTA DE SIMBOLOS

a : parámetro incluido en la expresión potencial aproximante de la función B.

$$a' : \frac{2 z^{\frac{m-n+2}{2}}}{m-n+2} \sqrt{\frac{u_1}{K_1}} z_1^{\frac{m-n}{2}}$$

$$a_o : \frac{\Gamma(2/s) z_o}{\Gamma(1/s) \bar{z}}$$

A : coeficiente de viscosidad turbulenta

$$A_o : \frac{Q}{u_1 \Gamma(s^*)} \left(\frac{z_1}{m-n+2} \right)^{2s^*-1} \left(\frac{u_1}{K_1 x} \right)^{\frac{m+1}{m-n+2}}$$

$$A'_o : C_y(z' = 0) = C_y(z_2)$$

b : parámetro incluido en la expresión potencial aproximante de la función B

B : función obtenida como resultado de las integraciones necesarias para hallar la velocidad de transporte en condiciones inestables

B_v : función cilíndrica

c : factor modificador de la velocidad media del viento

c_p : calor específico del aire a presión constante

C : concentración de los contaminantes en el aire

- C' : fluctuación turbulenta de la concentración de contaminantes en el aire
- C_0, C_1 : constantes arbitrarias
- C'_1 :
$$\frac{2 Q z_1^n}{u_1 \Gamma(s^*)} \frac{z^{\frac{1-n}{2}}}{(m-n+2)^{s^*}} \left(\frac{u_1}{K_1} \right)^{\left(\frac{s^*+1}{2}\right)(n-m)}$$
- C_y : concentración lateral integrada de contaminantes en aire
- \tilde{C}_c : valor estimado de la concentración lateral integrada adimensionalizada
- \tilde{C}_e : valor experimental de la concentración lateral integrada adimensionalizada
- \tilde{C}_y : concentración lateral integrada adimensionalizada
- \mathcal{C}_y : transformada de Laplace de C_y
- d : factor de la dispersión vertical de los contaminantes
- d' : ídem al factor d pero en $z = z_2$
- e : 2.7182818
- g : aceleración de la gravedad
- G^* :
$$\frac{\Gamma(n/s)}{\Gamma(1/s)} \left[\frac{\Gamma(1/s)}{\Gamma(2/s)} \right]^{n-1}$$

H	: altura efectiva de emisión
H_3	: flujo turbulento de calor
i	: $\sqrt{-1}$
I_ν, J_ν, K_ν	: funciones modificadas de Bessel
k	: constante de von Kármán
K	: coeficiente de difusividad turbulenta
K_h	: coeficiente de difusividad turbulenta para el calor
K_m	: coeficiente de difusividad turbulenta para la cantidad de movimiento
K_x, K_y, K_z	: coeficientes de difusión turbulenta según x, y, z
K_1	: coeficiente de difusividad turbulenta en un dado nivel de referencia $z = z_1$
K_1'	: $\overline{v'^2} t_L$
$K_{ij} \equiv \mathbb{K}$: tensor de la difusividad turbulenta
L	: longitud de estabilidad atmosférica de Monin-Obukhov
m	: exponente general del perfil vertical potencial de la velocidad media del viento
n	: exponente general del perfil vertical potencial del coeficiente de difusión turbulenta

- p : parámetro de la transformación de Laplace
- q : $\frac{u_1 z_1^{n-m}}{K_1} p$, o equivalente $\beta \gamma_1$
- q_0 : masa específica de los contaminantes
- Q : intensidad o caudal de la fuente emisora de contaminantes
- r : coeficiente de correlación
- r' : constante utilizada en el perfil vertical de la velocidad del viento (Calder, 1949)
- R_L : coeficiente de autocorrelación de tipo lagrangeano
- Ri : número de Richardson en forma de gradiente
- Ri_f : número de Richardson en forma de flujo
- s : exponente general de la concentración de contaminantes
- s' : ídem al exponente s pero en $z = z_2$
- s^* : $\frac{m+1}{m-n+2}$
- SO_2 : dióxido de azufre
- t : tiempo
- t' : $d |z|^s$
- t_1 : un valor dado del tiempo

t_*	:	$\frac{\Gamma(2/s) z}{\Gamma(1/s) \bar{z}}$
t_*'	:	t_*^s
t_L	:	escala lagrangeana temporal de la turbulencia
T	:	período de tiempo
T_p	:	período espectral
u, v, w	:	componentes de la velocidad del viento según x, y, z
u', v', w'	:	componentes turbulentas de la velocidad del viento según x, y, z
u_*	:	velocidad de fricción
u_1	:	velocidad del viento en un dado nivel de referencia $z = z_1$
$\overline{u'w'}$:	flujo vertical turbulento de la cantidad específica de movimiento
\bar{u}_T	:	velocidad media de transporte de contaminantes
V	:	volumen
V_i'	:	componente i -ésima de la fluctuación turbulenta de la velocidad
\vec{V}	:	vector velocidad
\vec{V}'	:	fluctuación turbulenta del vector velocidad

- $\overline{w'\theta'}$: flujo vertical turbulento de la temperatura
- x, y, z : coordenadas espaciales cartesianas
- \bar{x}, \bar{z} : coordenadas del centro de masa de la nube de contaminantes
- z_0 : longitud de rugosidad del terreno
- z_1 : nivel de referencia para los perfiles verticales de la velocidad del viento y del coeficiente de difusión turbulenta
- z_2 : nivel más bajo en que se ha medido la concentración
- z_i : altura de la capa límite planetaria
- z' : $\gamma_1 z^\beta$
- z'' : $\frac{2q}{m-n+2} z^{\frac{m-n+2}{2}}$
- α, β : exponentes constantes de la variable z'
- α' : constante utilizada en el perfil vertical del viento (Calder, 1949)
- β' : constante utilizada en el perfil vertical de la difusividad turbulenta (Deacon, 1949)
- $\bar{\alpha}$: $\frac{\Gamma(1/s) \bar{z}}{\Gamma(2/s) z_0}$
- γ : 0.5772157, la constante de Euler
- γ_1 : parámetro que vincula z con z'
- $\Gamma(x)$: función gamma de x

- δ : separación angular entre los medidores de la concentración de los contaminantes
- ϵ : diferencia relativa entre los valores de la concentración lateral integrada de contaminantes estimados por el modelo y los observados en experimentos
- $\bar{\epsilon}$: promedio de un conjunto de valores de ϵ
- $\zeta \equiv z/z_0$: altura adimensionalizada con la longitud de rugosidad del terreno
- $\zeta_0 \equiv z_0/L$: relación entre la longitud de rugosidad del terreno y la longitud de Monin-Obukhov
- $\eta \equiv z/L$: altura adimensionalizada con la longitud de Monin-Obukhov
- η' : variable de integración
- θ : temperatura potencial del aire
- θ' : parte turbulenta de la temperatura potencial del aire ;
- θ_* : temperatura característica
- ξ : intervalo de tiempo
- $\mu \equiv (1+15|\eta|)^{1/4}$ } : funciones intervinientes en la velocidad media del viento
 $\mu_0 \equiv (1+15|\zeta_0|)^{1/4}$ } en condiciones de inestabilidad atmosférica
- μ' : $(1 - 15\eta')^{1/4}$

μ_D	: coeficiente dinámico de viscosidad
ν	: índice de las funciones cilíndricas
ν'	: $\frac{1 - n}{m - n + 2}$
ν''	: $-\nu'$
π	: 3.1415926
ρ	: densidad del fluido
σ_z	: coeficiente vertical de dispersión atmosférica
τ	: esfuerzo de corte o tensión de Reynolds
τ_0	: esfuerzo de corte o tensión de Reynolds en superficie
ϕ_h	: perfil adimensional de temperatura
ϕ_m	: perfil adimensional de la velocidad del viento
ϕ	: función adimensionalizada que depende de la estabilidad atmosférica
ψ	: función adimensional modificadora de la velocidad del viento en condiciones diabáticas
$\Psi \equiv \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$: derivada logarítmica de la función gamma
ω	: función de la variable z'

£ : escala de longitud

∇ : gradiente

(I) (II) } : designan integrales en forma general
(1) (2) (3) (4) (5) }

