

Tesis de Posgrado

Productos alabeados de variedades de Riemann

Dobarro, Fernando Rubén

1987

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Dobarro, Fernando Rubén. (1987). Productos alabeados de variedades de Riemann. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2038_Dobarro.pdf

Cita tipo Chicago:

Dobarro, Fernando Rubén. "Productos alabeados de variedades de Riemann". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1987.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2038_Dobarro.pdf

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Tema de Tesis:
PRODUCTOS ALABEADOS DE VARIETADES DE RIEMANN

Autor:
Fernando Rubén Dobarro

Director de Tesis
Dr. Enrique J. Lami Dozo

Lugar de Trabajo:
Departamento de Ciencias Matemáticas

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

1987

*Tesis - 2038 -
ej. 2*

Registro 2008

INDICE

Introducción	1
Notación	7
Capítulo 0: Preliminares	11
A. Generalidades	11
B. La Derivada Covariante	13
C. Curvaturas	15
D. Hessiano. Gradiente. Divergencia. Laplaciano en una v.r.	16
E. Fórmulas de Green	17
F. Problemas de Autovalores (Valores Propios) de Δ en una v.r.	19
Capítulo 1: Productos Alabeados (p.a.) (Warped Products): Su Geometría	23
A. Productos Alabeados. Definición y Algunas Propiedades. Ejemplos	23
B. Convenciones Notacionales. Conexión de Levi-Civita en un p.a.	28
C. Angulos en p.a.	29
D. Longitud de una Curva en $M \times_f N$. Diámetro.	30
E. Geodésicas en $M \times_f N$.	32
F. Aplicación Exponencial. Cut-locus y Radio de Inyectividad	34
G. Medida Canónica de Riemann	38
H. Tensor de Curvatura y sus Contracciones	38
I. Curvatura. Ejemplos	44
J. Hessiano en $M \times_f N$	47
Capítulo 2: Operador de Laplace-Beltrami en p.a.: Sus Autovalores	49
A. El Laplaciano en un p.a.	49
B. Espectro de $M \times_f N$	50
C. El Primer Autovalor	56
Capítulo 3: Productos Alabeados de Curvatura Escalar Constante	59
A. Ejemplos y Planteo del Problema	59
B. Tratamiento del Problema	63

Capítulo 4: ¿Qué funciones pueden ser curvatura escalar de un producto alabeado?	75
A. <i>Funciones pertenecientes a $C^\infty(M \times N)$</i>	75
B. <i>Funciones pertenecientes a $C^\infty(M)$</i>	76
Referencias	81

INTRODUCCION

Durante los últimos años adquirieron especial interés temas de investigación que ligan la geometría diferencial y el análisis, en particular el análisis no lineal en variedades, cuyo desarrollo es muy reciente.

S. T. Yau, L. Nirenberg, T. Aubin, L. Caffarelli y J. Kazdan entre otros han dado un fuerte impulso a la investigación en este terreno al desarrollar nuevas técnicas para el tratamiento de problemas específicos de estas áreas, las que seguramente serán de aplicación en otros campos. Ver [Yau], [Ka],[Au 1].

El presente trabajo se ubica en este área. Nos dedicamos al estudio de la geometría de los productos alabeados (p.a. o warped products) definidos en el Capítulo 1.A, los cuales como mencionamos allí son una generalización de las superficies de revolución. Estos productos fueron introducidos por Bishop-O'Neil en [B-O] con el objeto de desarrollar una familia de variedades riemannianas (v.r.) de curvatura seccional negativa. Otras aplicaciones se pueden ver en [Z]. Damos además en 1.A una serie de ejemplos de p.a., de los cuales posteriormente estudiamos en especial su curvatura.

En el resto del Capítulo 1 damos los aspectos clásicos de la geometría riemanniana de un p.a. apoyándonos en la relación obtenida en [B-O] entre las conexiones de Levi-Civita de un p.a., las de sus factores y el peso. En particular hallamos una primera fórmula relacionando las diversas curvaturas escalares.

Recordando que los autovalores del operador de Laplace-Beltrami de una v.r. contienen una amplia información sobre la geometría de dicha variedad, dedicamos el Capítulo 2 al estudio del espectro de un p.a. cuyos factores son compactos.

Extendemos allí un resultado análogo al probado para productos usuales en [B-G-M] que describe los autovalores y autofunciones de un p.a., lo hacemos aplicando resultados generales sobre operadores de Schrödinger en una v.r. compacta.

Notando que el primer elemento no nulo del espectro de una v.r. compacta está ligado a la curvatura [Ch], nos ocupamos de determinarlo explícitamente.

En los Capítulos 3 y 4 nos ocupamos de analizar qué funciones pueden ser curvatura escalar de un producto alabeado de dos v.r. dadas. Este problema tiene sentido desde que se conocen obstrucciones de distinto tipo para que una función C^∞ sobre una variedad sea curvatura escalar para alguna métrica de Riemann.

En el Capítulo 3 el problema es, si dadas dos v.r. (M^m, g) y (N^n, h) existe un peso f tal que el correspondiente p.a. tenga curvatura escalar λ , esto nos lleva a buscar soluciones del problema

$$(i) \quad -2n \Delta_g f - n(n-1) f^{-1} |\nabla f|^2 + R_g f + f^{-1} S = \lambda f, \quad f \in C^\infty(M^m), \quad f > 0$$

donde $n = \dim N$ y R_g y S son las curvaturas escalares de (M^m, g) y (N^n, h) respectivamente. Observemos entonces que una condición necesaria para la existencia de solución de (i), es que S sea constante.

Ejiri en [Ej 1] estudia este problema para el caso $M^m = S^1$, llevándolo a la búsqueda de soluciones periódicas en \mathbb{R} de la correspondiente ecuación diferencial ordinaria y utilizando el lema de Gronwall. Nosotros modificaremos la relación obtenida en el teorema 1.6, escribiendo el peso f como $u^{\frac{2}{n+1}}$ con $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$, de manera tal que (i) se convierta en el siguiente problema semilineal con parte lineal autoadjunta $L := -4 \frac{n}{n+1} \Delta_g + R_g$, en la que no intervienen las derivadas primeras:

$$(ii) \quad L u + S u^\alpha = \lambda u, \quad u \in C^\infty(M), \quad u > 0$$

donde $\alpha = \frac{n-3}{n+1} < 1$.

En 3.B nos dedicamos al estudio de (ii), con (M^m, g) v.r. compacta conexa y (N^n, h) v.r. con curvatura escalar S constante. La resolución está dividida en tres casos, según el signo de S :

$S = 0$: Aquí (ii) se convierte en un problema lineal de autovalores para el operador de Schrödinger L y se sabe que, salvo constantes, admite una única solución u_1 asociada al autovalor principal de λ_1 de L .

En el caso particular de (M^2, g) y S^1 esto dice que la autofunción principal u_1 del operador elíptico canónico $-\Delta_g + \kappa$ cumple que el p.a. $M^2 \times_{u_1} S^1$ tiene curvatura escalar igual al autovalor principal λ_1 de $-\Delta_g + \kappa$, donde κ es la curvatura gaussiana de (M^2, g) .

$S < 0$: ($n \geq 3$) Aquí la no linealidad es hölderiana con $0 \leq \alpha < 1$.

Se obtiene como condición necesaria que al ser $S < 0$, debe ser $\lambda < \lambda_1$. Por lo tanto, tenemos principio del máximo, lo que sugiere aplicar técnicas de orden.

Siendo u_1 la autofunción asociada al autovalor principal λ_1 de L , la función $\underline{t} u_1(\bar{t} u_1)$ para $\underline{t} > 0$ pequeño (\bar{t} grande) es una subsolución (supersolución) de (ii). Utilizando la compactidad y positividad fuerte de $(L - \lambda I)^{-1}$ en $C(M)$, obtenemos la única solución como punto fijo de $(L - \lambda I)^{-1} (|S| |u|^\alpha)$.

$S > 0$: ($n \geq 3$) Estamos también ante una no linealidad hõlderiana con $0 \leq \alpha < 1$, pero la condición necesaria es ahora que $\lambda > \lambda_1$, esto complica la situación en relación al caso anterior porque al no tener principio del máximo no podemos afirmar que el operador $(L - \lambda I)^{-1}$ sea fuertemente positivo. Más aún, sabemos por un resultado de Clément-Peletier [C-P] que cuando $\lambda > \lambda_1$ pero cerca de λ_1 , vale el principio del antimáximo, es decir $(L - \lambda I)^{-1}$ envía funciones negativas en positivas, o sea invierte el orden. Esto permite resolver (ii) para el caso $n = 3$, nada más. Nos planteamos entonces la utilización de otra técnica. Observando que la no linealidad en (ii) es del tipo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S t^\alpha}{t} = 0$$

obtendremos las soluciones como una bifurcación del infinito a la derecha cerca de λ_1 (ver [Ra 2]). Probaremos en el teorema 3.4 que existe un peso $f(\lambda)$ tal que el correspondiente p.a. tiene curvatura escalar λ .

Como la no linealidad en (3.5) no es diferenciable cerca del 0,

no podemos aplicar directamente los resultados globales de bifurcación de Rabinowitz en [Ra 1-2] y debemos extenderlos al caso de no linealidades hölderianas.

Posteriormente en los teoremas 3.5, 3.6 y 3.7 estudiamos como es la rama de soluciones $(\lambda, u(\lambda))$ y comparamos las soluciones aquí obtenidas con las encontradas por Ejiri en [Ej 1-2], viendo que son de naturaleza diferente.

En el Capítulo 4 damos algunos resultados parciales sobre problema planteado anteriormente de ver qué funciones \tilde{R} de $C^\infty(M \times N)$ pueden ser curvatura escalar de un p.a. de dos v.r. dadas (M^m, g) y (N^n, h) , con M compacta conexa.

En 4.A nos ocupamos del caso S no constante, y obtenemos como condición necesaria y suficiente que \tilde{R} debe ser de la forma $\varphi + S \psi$ con $\varphi, \psi \in C(M)$, $\psi > 0$ y $L \psi^{\frac{-n+1}{4}} = \varphi \psi^{\frac{-n+1}{4}}$. Esta última expresión nos lleva a plantear el problema de ver cuando el autovalor principal del problema con peso φ

$$(iii) \quad L u = \lambda \varphi u$$

es 1.

En 4.B tratamos el caso S constante, el cual nos lleva al estudio del problema

$$(iv) \quad L_{\tilde{R}} u + S u^\alpha = 0 \quad u \in C^\infty(M), \quad u > 0$$

donde $L_{\tilde{R}} := -4 \frac{n}{n+1} \Delta_g + (R_g - \tilde{R})$ y $\alpha = \frac{n-3}{n+1} < 1$. Nuevamente,

como en el capítulo 3, lo tratamos separando en tres casos:

$S = 0$: Bajo estas condiciones (iv) nos lleva nuevamente a plantear el problema ¿cuándo el autovalor principal de (iii) es 1?

$S < 0$: ($n \geq 3$) Condición necesaria de la existencia de solución de (iv) bajo estas condiciones es que el autovalor principal $\lambda_1(\tilde{R})$ de $L_{\tilde{R}}$ sea > 0 . En tal caso, tenemos principio del máximo para $L_{\tilde{R}}$, entonces aplicando métodos de orden probamos la existencia de solución de (iv) de manera análoga al caso $S < 0$ del Capítulo 3.

$S > 0$: ($n \geq 3$) Aquí la condición necesaria de la existencia de solución es $\lambda_1(\tilde{R}) < 0$, lo que nos deja nuevamente sin principio del máximo para $L_{\tilde{R}}$ (como en el caso $S > 0$ del Capítulo 3). En esta situación, dejamos planteado un posible camino, que es el estudio de la rama de soluciones del problema (4.9), que se puede tratar de forma análoga al caso $S > 0$ del Capítulo 3. Lo que nos interesaría, es garantizar que esta rama llegue hasta el 0, pues (4.9) con $\lambda = 0$ es (iv).

En cualquiera de los tres casos queda planteado el estudio del signo del autovalor principal de un problema con peso de operador tipo Schrödinger en variedades de Riemann compactas conexas, en función del peso, al igual que determinar para qué pesos este es 1.

En el Capítulo 0 damos una buena reseña del tipo de objetos y resultados sobre geometría diferencial y análisis utilizados en el resto del trabajo. Indicamos también donde se puede ampliar información sobre estos.

NOTACION

v.r.	variedad riemanniana
p.a.	producto alabeado = warped product
$(M^m, g) = (M, g)$	v.r. de dimensión m con métrica de Riemann g
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	métrica g en (M, g)
$\Delta = \Delta_g$	operador de Laplace-Beltrami en una v.r. (M^m, g)
$C^\infty(M), C_{>0}^\infty(M)$	espacio de funciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ que son de clase C^∞ (positivas)
$T_p M$	espacio tangente en p a la variedad M
$T_p^* M$	espacio cotangente en p a la variedad M
TM	fibrado tangente de M
T^*M	fibrado cotangente de M
R, S, \tilde{R}	curvaturas, en cada caso se especifica en cuál y en qué variedad
	curvatura gaussiana
$X(M)$	campos vectoriales C^∞ sobre M
$\#, \flat$	isomorfismo musical entre TM y T^*M
S^n	esfera de centro 0 y radio 1 con la métrica canónica

$B^m(\rho)$	bola cerrada de centro 0 y radio 1 con la métrica canónica
f_*	aplicación lineal tangente
f^*	aplicación lineal cotangente
\dot{c}	vector velocidad de una curva C^1
$\ell(c) = \ell_m(c)$	longitud de la curva C en la v.r. (M,g)
$d(p,q)$	distancia riemanniana entre los puntos p y q
$\text{Diam}(M,g)$	diámetro de la v.r. (M,g)
v_g	medida canónica de una v.r.
df_p	diferencial de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ en $p \in M$
X, Y, Z, U, V, W	campos vectoriales
∇	conexión de Levi-Civita
$\nabla_X Y$	derivada covariante del campo Y en la dirección del campo X
Γ_{ij}^k	símbolos de Christoffel
∂_i	$\frac{\partial}{\partial x^i}$
	producto tensorial
\oplus	suma directa
$[,]$	corchete de Lie

$\sigma(P)$	curvatura seccional del 2-plano $\cdot P$
$\text{Ric}(X,Y)$	tensor de Ricci
$\text{Ric}_p(X)$	curvatura de Ricci en la dirección del campo X en el punto $p \in M$
$\text{Scal}(p)$	curvatura escalar en $p \in M$
$\nabla^2 f = \text{Hess } f = \nabla^2 f$	Hessiano de f
$df^\# = \nabla f$	dual de la 1-forma df o gradiente de f
$\text{Div}_g X$	divergencia de X con respecto a la métrica g
\sqrt{g}	$\sqrt{ \det g_{ij} }$
$L^2(M) = L^2_{dg}(M)$	espacio funciones v_g -medibles de cuadrado integrable en (M,g)
$C^\infty_0(M)$	$f \in C^\infty(M)$ de soporte compacto en M
$C^k(\bar{M})$	funciones de clase C^k hasta el borde de M
$H^1(M), H^1_0(M)$	espacio de Sobolev de (M,g)
\sim	casi siempre indica que el objeto con el que se trabaja es en el p.a.
$HA(VA)$	parte horizontal (vertical) del campo $A \in X(M \times N)$
$P = P_f = M \times_f N$	$\exp_x: U \subset T_x N \rightarrow M$ aplicación exponencial en M
$\delta = \delta^M$	radio de inyectividad de (M,g)

$$|\nabla f|^2 = g(\nabla f, \nabla f) = \nabla^i f \nabla_i f$$

$C^{k, \beta}(M)$ espacio de Höder $0 \leq \beta \leq 1$ ($\beta = 1$ Lipschitz)

utilizamos la convención de la suma de Einstein.

CAPITULO 0: PRELIMINARES

Definiciones y Preliminares sobre Geometría Riemanniana.

Nos proponemos aquí introducir los objetos básicos y convenciones que utilizaremos en este trabajo.

Para más información el lector interesado en Geometría Riemanniana puede dirigirse a [B-G-M], [Cha], [C-E], [dC], [B-C], [Bera], [Au 1]. Todas las variedades consideradas serán conexas y C^∞ .

A. Generalidades.

1. Una variedad de Riemann (v.r) (M, g) es una variedad M dotada de una métrica riemanniana g : para cada punto $p \in M$, g_p es un producto escalar sobre el espacio tangente $T_p M$ el cual depende en forma C^∞ de p . A veces notaremos $g(\cdot, \cdot) =: \langle \cdot, \cdot \rangle$.

2. Una isometría $f: (M, g) \rightarrow (N, h)$ entre dos variedades de Riemann es un difeomorfismo f de M sobre N tal que $f^*h = g$, o sea para todo $p \in M$ y $x \in T_p M$, $h_{f(p)}(f_* X, f_* X) = g_p(X, X)$

3. Sobre una v.r. se puede definir la longitud de una curva C^1 $c: [0, 1] \rightarrow M$ por

$$l(c) = \int_0^1 \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle^{1/2} dt$$

donde $\dot{c}(t)$ es el vector velocidad de la curva. Se define la

distancia riemanniana entre dos puntos $p, q \in M$, $d(p, q)$, como el ínfimo de las longitudes de las curvas en M que unen p y q .

4. (i) d es una distancia (en el sentido de espacios métricos) y define la misma topología sobre M que la dada por la estructura de variedad diferenciable.

(ii) Por el teorema de Hopf-Rinow ([dC], [Au 1]) si el espacio métrico (M, d) es completo, todo par de puntos puede ser unido por una curva que realiza la distancia. Este será una geodésica (ver B.5).

5. Todas las variedades consideradas en este trabajo serán completas, salvo mención explícita.

6. El diámetro $\text{Diam}(M, g) := \sup \{d(p, q) : p, q \in M\}$. Es finito si y sólo si M es compacta (porque se supone (M, g) completa).

7. Sea $\{x^i\}$ una carta local en $p \in M$. La métrica g en estas coordenadas tiene asociada la matriz (g_{ij}) , donde $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$. La medida $[\text{Det}(g_{ij})]^{1/2} dx^1, \dots, dx^n$ no depende de la elección de la carta y define la llamada medida riemanniana canónica notada v_g (ver [B-G-M]). Dada una función continua f sobre M escribiremos

$$\int_M f(p) dv_g(p), \int_M f dv_g \quad \circ \quad \int_M f$$

para la integral de la función f sobre M .

B. La Derivada Covariante.

1. Dada una variedad M y una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definimos la diferencial de f , df como:

$$df_p(U) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) u_i$$

donde $\{x^i\}$ es un sistema de coordenadas centrado en p y $U \in T_p M$ se representa en el citado sistema como $U = \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial}{\partial x^i}$.
 df está definida en forma invariante sobre TM .

2. Toda variedad de Riemann (M, g) tiene asociada naturalmente una noción intrínseca de derivación y en forma única con las siguientes propiedades:

$$\nabla : X(M) \times X(M) \rightarrow X(M)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

$(X, Y, Z \in X(M) = \{\text{campos vectoriales } C^\infty \text{ sobre } M\} \text{ y } f \in C^\infty(M)).$

$$(i) \quad X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

$$(ii) \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

(iii) ∇ es \mathbb{R} -bilineal

$$(iv) \quad \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$$

$$(v) \quad \nabla_X (fY) = (Xf) \cdot Y + f \nabla_X Y.$$

La aplicación ∇ se llama conexión de Levi-Civita de la variedad de Riemann (M, g) .

Se puede probar que $(\nabla_X Y)(p)$ depende sólo del valor del campo

vectorial X en el punto p . Esto no vale para Y .

En un sistema de coordenadas local los símbolos de la conexión de Levi-Civita son

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

donde $\nabla_{\partial_j} \partial_i = \Gamma_{ij}^k \partial_k$.

3. Se puede extender la conexión de Levi-Civita a tensores.

Para este propósito se requiere que valga la regla de Leibnitz, o sea: si u, v, X son secciones de TM y w es una sección de T^*M

$$(i) \quad \nabla_X(u \otimes v) = (\nabla_X u) \otimes v + u \otimes (\nabla_X v)$$

$$(ii) \quad X(w(u)) = (\nabla_X w)(u) + w(\nabla_X u)$$

4. El isomorfismo "musical" $TM \xrightarrow{\#} T^*M$ lo definimos como:
para $u \in TM$ y $f \in T^*M$

$$g(u, f^\#) = f(u)$$

$$u^\# = g(u, \cdot)$$

5. Sea $c: (-a, a) \rightarrow M$ una curva C^∞ en M . Un campo vectorial $C^\infty X: (-a, a) \rightarrow TM$ a lo largo de c , se dice que es paralelo a lo largo de dicha curva si $\nabla_{\dot{c}(t)} X = 0$ para todo t . Una geodésica es una curva $c(t)$ cuyo campo vectorial tangente $\dot{c}(t)$ es paralelo a lo largo de $c(t)$, o sea $\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0$.

C. *Curvaturas.*

1. El tensor de curvatura R de una variedad de Riemann (M, g) lo definimos como: Dado $X, Y \in X(M)$ se define

$$\begin{aligned} R(X, Y) : X(M) &\rightarrow X(M) \\ (X, Y) &\mapsto R(X, Y) := [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} \end{aligned}$$

es decir para cada $U \in X(M)$

$$R(X, Y)U = \nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X U - \nabla_{[X, Y]} U .$$

Así definido R es antisimétrico, es decir, si $X, Y \in X(M)$

$$R(X, Y) + R(Y, X) = 0 .$$

2. (i) Si P es un 2-plano generado por $\{X, Y\}$ definimos la curvatura seccional σ de (M, g) respecto al 2-plano P por

$$\sigma(P) := \frac{\langle R(X, Y) Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}$$

Se puede probar que la definición es independiente de la base. Si tomamos la base de P g -ortonormal

$$\sigma(P) = \langle R(X, Y) Y, X \rangle$$

(ii) El tensor de Ricci de (M, g) es el tensor $(0, 2)$ simétrico definido por

$$\text{Ric}(X, Y) := \sum_{i=1}^m \langle R(X, E_i) E_i, Y \rangle = \sum_{i=1}^m \langle R(E_i, X) Y, E_i \rangle$$

donde $(E_i)_i$ es una base ortonormal de $T_p M$.

En particular $\text{Ric}_p(X) := \text{Ric}_p(X, X)$ es la llamada curvatura de Ricci en la dirección del campo X en el punto $p \in M$.

(iii) La curvatura escalar en $p \in M$ de la v.r. (M, g) es

$$\text{Scal}(p) := \sum_{i,j=1}^m \langle R(E_i, E_j)E_j, E_i \rangle_p = \sum_{j=1}^m \text{Ric}_p(E_j, E_j)$$

donde $(E_i)_i$ es una base ortonormal de $T_p M$.

Observación: Todas estas curvaturas son funciones C^∞ de sus argumentos.

D. *Hessiano. Gradiente. Divergencia. Laplaciano en una v.r.*

1. Sea $f \in C^\infty(M)$ con (M, g) v.r. Sean $X, Y \in X(M)$. Definimos

$$\nabla df(X; Y) := \nabla_X(df) Y.$$

La aplicación R -bilineal ∇df es llamada el Hessiano de f y notada $\text{Hess } f$ (con respecto a la métrica de Riemann g).

Por B.3(ii) $\text{Hess } f(X, Y) = X.(df(Y)) - df(\nabla_X Y)$

$\text{Hess } f$ es un tensor de tipo $(0, 2)$ simétrico.

2. Sea $f \in C^\infty(M)$, (M, g) v.r. El campo vectorial $df^\#$, dual de la 1-forma df se llama el gradiente de f ; este depende de la métrica riemanniana g mientras que df no. En un sistema de coordenadas locales, sus componentes son $\nabla^i f = g^{ij} \nabla_j f = g^{ij} \partial_j f$.

Notaremos también a $df^\#$ como ∇f .

3. Sea (M, g) v.r. Dado $X \in X(M)$ definimos la divergencia de X con respecto a la métrica de Riemann g a:

$$(\text{Div}_g X)(p) := \text{Traza} \{u \mapsto \nabla_u X\}$$

donde la traza del endomorfismo $u \mapsto \nabla_u X$ es tomada en $T_p M$. Si $\{E_i\}_i$ es una base ortonormal de $T_p M$

$$(\text{Div}_g X)(p) = \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle_p$$

Si en un sistema de coordenadas $X = \eta^i \partial_i$, resulta

$$(*) \text{Div}_g X = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\eta^i \sqrt{g}) .$$

4. El operador de Laplace-Beltrami (o laplaciano) que actúa sobre funciones $C^\infty(M)$ es definido por

$$\Delta f := \Delta_g f := -\text{Div}_g(df^\#) \quad (\text{observar el signo elegido}).$$

Observemos que así $\Delta f = \nabla^i \nabla_i f = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j f) =$
 $= \text{Traza} (\text{Hess} (f))$ (ver [Bera], [Cha]).

E. *Fórmulas de Green.*

Sea (M, g) una v.r.

1. La fórmula (*) en D.3 admite la siguiente interpretación: Dada $X \in X(M)$, sea ϕ_t el flujo inducido sobre M por X . Sea K un compacto fijo en M y sea

$$v(t) = \int_{\phi_t(K)} dV_g .$$

Entonces

$$v'(0) = \int_K \text{Div } X \, dv_g$$

De aquí $\text{Div } X$ mide la distorsión infinitesimal del volumen por el flujo generado por X .

. En 2 y 3 supondremos M sin borde..

2. *Teorema de la Divergencia:* (I) Si X es un campo vectorial C^1 sobre M con soporte compacto, entonces

$$\int_M \text{Div } X \, dv_g = 0$$

3. *Fórmulas de Green:* (I) Sean $h \in C^1(M)$, $f \in C^2(M)$ tales que $h \cdot \nabla f$ tiene soporte compacto. Entonces

$$\int_M \{h \Delta f + \langle \nabla h, \nabla f \rangle\} \, dv_g = 0 .$$

De aquí se deduce que si $h, f \in C^2(M)$

$$\int_M (h \Delta f - f \Delta h) \, dv_g = 0 .$$

. Supongamos ahora que M tiene borde ∂M con la métrica y la medida inducidas, la densidad de la medida la notaremos dA .

Sea ν el campo normal exterior unitario sobre ∂M .

4. *Teorema de la Divergencia:* (II) Sea X un campo vectorial C^1 sobre \bar{M} con soporte compacto en \bar{M} . Entonces

$$\int_M (\text{Div } X) \, dv_g = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \, dA .$$

5. *Fórmulas de Green: (II)* Sean $h \in C^1(\bar{M})$, $f \in C^2(\bar{M})$ tales que $h \cdot \nabla f$ tiene soporte compacto en \bar{M} . Entonces

$$\int_M \{h \Delta f + \langle \nabla h, \nabla f \rangle\} dv_g = \int_{\partial M} h(\nabla f) dA.$$

De aquí se deduce que si $h, f \in C^2(\bar{M})$ y de soporte compacto en \bar{M} ,

$$\int_M \{h \Delta f - f \Delta h\} dv_g = \int_{\partial M} \{h(\nabla f) - h(\nabla h)\} dA.$$

F. *Problemas de Autovalores (Valores Propios) de Δ en una v.r.*

1. Sea $L^2(M)$ el espacio de funciones medibles sobre M tal que

$$\int_M |f|^2 < +\infty$$

En $L^2(M)$ se define el producto interno usual y la norma inducida

$$(f, h) = \int_M hf \quad \|f\|^2 = (f, f) \quad f, h \in L^2(M)$$

$L^2(M)$ es un espacio de Hilbert.

2. *Problema de autovalores cerrado:* Sea M compacta conexa. Obtener los $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales existe $\phi \in C^2(M)$, $\phi \neq 0$ tal que

$$\Delta \phi + \lambda \phi = 0 \quad (M)$$

3. *Problema de autovalores de Neumann:* Para $\partial M \neq \emptyset$, \bar{M} con

pacta conexa, obtener los $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que existe $\phi \in C^2(M) \cap C^1(\bar{M})$, $\phi \neq 0$ tal que

$$\begin{cases} \Delta\phi + \lambda\phi = 0 & (M) \\ \nu\phi = 0 & (\partial M) \end{cases}$$

4. *Problema de autovalores de Dirichlet:* Para $M \neq \emptyset$, \bar{M} compacta conexa, obtener los $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que existe $\phi \in C^2(M) \cap C^0(\bar{M})$, $\phi \neq 0$ tal que

$$\begin{cases} \Delta\phi + \lambda\phi = 0 & (M) \\ \phi = 0 & (\partial M) \end{cases}$$

5. *Teorema:* Para cada uno de los problemas de autovalores anteriores, el conjunto de los autovalores consiste en una sucesión

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \uparrow +\infty$$

y cada autoespacio asociado es de dimensión finita. Autoespacios asociados a valores propios distintos son ortogonales en $L^2(M)$ y $L^2(M)$ es la suma directa de todos los autoespacios. Además cada autofunción es C^∞ sobre \bar{M} .

6. La clausura de $C^\infty(M)$ (respec. $C_0^\infty(M)$) para la norma $\|\cdot\|_1$

$$\|f\|_1 := \left(\int_M |f|^2 dv_g + \int_M |\nabla f|^2 dv_g \right)^{1/2}$$

será notada por $H^1(M)$ (respec. $H_0^1(M)$).

Las siguientes inclusiones son válidas:

$$H_0^1(M) \subset H^1(M) \subset L^2(M)$$

Estos espacios son llamados espacios de Sobolev (ver [Au 1],[G-T]).

7. El operador de Laplace $-\Delta$ para los problemas anteriores es operador no acotado en $L^2(M)$ con dominio D_* ($*$ = C,N,D)

$$D_C = C^\infty(M) \quad (\text{cerrado})$$

$$D_N = \{f \in C^\infty(M) : \nu f = 0 \text{ en } \partial M\} \quad (\text{Newmann})$$

$$D_D = \{f \in C^\infty(M) : f = 0 \text{ en } \partial M\} \quad (\text{Dirichlet})$$

De las fórmulas de Green se concluye que $-\Delta$ es

$$\text{simétrico (autoadjunto)} \quad (f, -\Delta h)_{L^2} = (-\Delta f, h)_{L^2} \quad f, h \in D_*$$

y

$$\text{positivo} \quad (-\Delta f, f)_{L^2} = \int_M |\nabla f|^2 \quad f \in D_*$$

. Para más información sobre estos temas ver [Bera],[G-T],[Au 1],[Ba].

CAPITULO 1: PRODUCTOS ALABEADOS, SU GEOMETRIA.

A. *Productos Alabeados (Warped Products). Definición y Algunas Propiedades. Ejemplos.*

Dadas dos variedades de Riemann (M^m, g) y (N^n, h) y una función $f: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ C^∞ , definimos sobre $M \times N$ la siguiente métrica

$$\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = g(\pi_* \tilde{X}, \pi_* \tilde{Y}) + f^2(\pi(\cdot)) h(\eta_* \tilde{X}, \eta_* \tilde{Y})$$

donde \tilde{X}, \tilde{Y} son campos de vectores sobre $M \times N$ y π, η son las proyecciones canónicas de $M \times N$ en M, N respectivamente.

$M \times N$ con dicha métrica es lo que llamamos producto alabeado (warped product) de peso f de (M^m, g) y (N^n, h) . Lo notaremos $M \times_f N$.

Los productos alabeados fueron introducidos por Bishop-O'Neil [B-O] con el objeto de generar una familia de variedades completas con curvatura seccional negativa.

Estos son una generalización de las superficies de revolución donde M es la curva generatriz, N la circunferencia de radio 1 y $f(p)$ la distancia de $p \in M$ al eje de revolución r (suponemos que M no corta a r). En efecto:

si $M = \{(\alpha(t), \beta(t)) \in \mathbb{R}^2; \alpha(t) > 0 \ \forall t\}$, $N = S^1$ y
 $r = \text{eje } x_3$,
 entonces $M \times N = \{(\alpha(t), \beta(t), e^{is}) \in \mathbb{R}^4 : t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}\} \equiv$

$$\begin{aligned} &\equiv \{(\alpha(t) \cos s, \alpha(t) \sin s, \beta(t)) \in \mathbb{R}^3\} \\ &\equiv \text{superficie de revoluci3n alrededor el eje } x_3. \end{aligned}$$

Un campo de vectores \tilde{X} sobre $M \times S^1$ es de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\tilde{x}) &= \tilde{a}(\tilde{x}) (\alpha'(t) \cos s, \alpha'(t) \sin s, \beta'(t)) + \\ &\quad + \tilde{b}(\tilde{x}) (-\alpha(t) \sin s, \alpha(t) \cos s, 0) \end{aligned}$$

donde $\tilde{x} = (\alpha(t) \cos s, \alpha(t) \sin s, \beta(t))$

$$\tilde{a}, \tilde{b} \in C^\infty(M \times S^1).$$

La m3trica inducida por \mathbb{R}^3 es

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y})(\tilde{x}) &= \tilde{a}(\tilde{x}) \tilde{c}(\tilde{x}) (\beta'(t)^2 + \alpha'(t)^2) + \\ &\quad + \tilde{b}(\tilde{x}) \tilde{d}(\tilde{x}) \alpha(t)^2, \end{aligned}$$

donde \tilde{Y} es otro campo sobre $M \times N$ de coordenadas \tilde{c}, \tilde{d} .

Dados dos campos X_1, Y_1 sobre M

$$\begin{aligned} X_1(x_1) &= a_1(x_1) (\alpha'(t), \beta'(t)) \\ Y_1(x_1) &= a_2(x_1) (\alpha'(t), \beta'(t)) \end{aligned} \quad x_1 = (\alpha(t), \beta(t))$$

la m3trica inducida por \mathbb{R}^2 da

$$g(X_1, Y_1)(x_1) = a_1(x_1) a_2(x_1) (\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2)$$

Adem3s, dados dos campos X_2, Y_2 sobre S^1

$$\begin{aligned} X_2(x_2) &= b_2(x_2) (-\sin s, \cos s) \\ Y_2(x_2) &= d_2(x_2) (-\sin s, \cos s) \end{aligned} \quad x_2 = (\cos s, \sin s)$$

la m3trica h inducida por \mathbb{R}^2 da

$$h(X_2, Y_2)(x_2) = b_2(x_2) d_2(x_2)$$

Además: $\pi : M \times S^1 \rightarrow M$,

$$(\alpha(t) \cos s, \alpha(t) \operatorname{sen} s, \beta(t)) \mapsto x_1 = (\alpha(t), \beta(t))$$

$$(\pi_* \tilde{X})(x_1) = \tilde{a}(\tilde{x})(\alpha'(t), \beta'(t))$$

$\eta : M \times S^1 \rightarrow S^1$,

$$(\alpha(t) \cos s, \alpha(t) \operatorname{sen} s, \beta(t)) \mapsto (\cos s, \operatorname{sen} s)$$

$$(\eta_* \tilde{X})(\tilde{x}_2) = \tilde{b}(\tilde{x})(-\operatorname{sen} s, \cos s)$$

Por lo tanto la métrica inducida por \mathbb{R}^3 sobre $M \times S^1$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y})(\tilde{x}) &= \tilde{a}(\tilde{x}) \tilde{c}(\tilde{x}) (\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2) + \tilde{b}(\tilde{x}) \tilde{d}(\tilde{x}) \alpha(t)^2 \\ &= g(\pi_* \tilde{X}, \pi_* \tilde{Y}) + f^2(\pi(\tilde{x})) h(\eta_* \tilde{X}, \eta_* \tilde{Y}) \end{aligned}$$

pues $f^2(\pi(\tilde{x})) = \operatorname{dist}((\alpha(t) \cos s, \alpha(t) \operatorname{sen} s, \beta(t)), r) = \alpha(t)^2$.

O sea que efectivamente las superficies de revolución son productos alabeados. Un caso particular de estos es el toro $S^1 \times S^1$ con la métrica inducida por \mathbb{R}^3 .

Observaciones: (Bishop-O'Neil [B-O]) Sea $P := M \times_f N$.

- (1) Para cada $q \in N$, la restricción de π a la sección horizontal u *hoja* $\pi^{-1}(q) = M \times \{q\}$ es una isometría.
- (2) Para cada $p \in M$ la restricción de η a la sección vertical o *fibra* $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times N$ es una homometría con factor de escala $1/f(p)$.
- (3) Como π_* no aumenta la longitud, π no aumenta la longitud

sobre curvas. De esto y del carácter de minimizante de una geodésica, obtenemos que una geodésica (intrínseca) de una hoja es una geodésica de P , o sea las hojas son totalmente geodésicas, es decir las geodésicas de las hojas son geodésicas en P .

- (4) Si ϕ es una isometría de N , entonces $1 \times \phi$ es una isometría de P .
- (5) Si ψ es una isometría de M tal que el peso f satisface $f = f \circ \psi$ entonces $\psi \times 1$ es una isometría de P .
- (6) P es completa si y sólo si M y N son completas. En particular si una es compacta y la otra es completa, P es completa.

Aclaración: Salvo mención explícita las variedades consideradas serán completas y conexas.

Otros ejemplos: (1) [Ej 2] $S^1 \times S^n$ con la métrica

$$dt^2 + f^2(t) dg^2$$

donde dg es la métrica canónica de S^n . Más generalmente Ejiri estudia $S^1 \times N^n$ donde (N, g) es una variedad de Riemann compacta [Ej 1]. En estos casos este autor identifica $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ con una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ 2π -periódica.

(2) Coordenadas esféricas en \mathbb{R}^n : Si permitimos que el peso f se anule en un punto tenemos que las coordenadas esféricas en \mathbb{R}^n

lo proveen de una estructura de producto alabeado $\mathbb{R}_{\geq 0} \times_f S^{n-1}$,
a saber: Fijado $p \in \mathbb{R}^n$, $x = p + t\xi$ donde

$$\begin{aligned} t \in M &= \mathbb{R}_{\geq 0} & dt^2 + t^2 |d\xi|^2 \\ \xi \in N &= S^{n-1} \\ f(t) &= t \end{aligned}$$

Observemos que f se anula en el borde de $M \equiv \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(3) Coordenadas esféricas en S^n : Fijado un punto $p \in S^n$,
identificamos de manera obvia $(S^n)_p$, el espacio tangente a S^n
en p , con el complemento ortogonal de $\mathbb{R}p$ en \mathbb{R}^{n+1} , cuya in-
tersección con S^n podría ser "el ecuador de p ", esto es, S^{n-1} .
Para $x \in S^n$ sea

$$x = (\cos t)p + (\sin t)\xi$$

donde $t \in [0, \pi]$, $\xi \in S^{n-1}$. Entonces

$$\begin{aligned} dx &= \{-(\sin t)p + (\cos t)\xi\} dt + (\sin t) d\xi \\ |dx|^2 &= (dt)^2 + \sin^2 t |d\xi|^2 \end{aligned}$$

(4) Espacio hiperbólico: Sobre la bola unidad B de \mathbb{R}^n defi-
nimos la métrica de Riemann

$$ds^2 = \frac{4 |dx|^2}{(1 - |x|^2)^2}$$

Definimos ahora coordenadas esféricas alrededor de $x = 0$ por

$$x = r \xi \qquad r = \tanh \left(\frac{t}{2} \right)$$

donde $r \in [0,1]$, $t \in [0,\infty)$, $\xi \in S^{n-1}$, entonces el mismo tipo de cálculo efectuado para la esfera nos lleva a:

$$ds^2 = (dt)^2 + \sinh^2 t |d\xi|^2$$

Tanto en el caso de las coordenadas esféricas en \mathbb{R}^n , como en S^n , se ve que la métrica es independiente del punto $p \in M$. Esto no es válido para el espacio hiperbólico, sin embargo, elegir otro punto de B da una variedad isométrica al espacio hiperbólico (ver [Cha] p. 37-38).

B. Convenciones Notacionales. Conexión de Levi-Civita en un p.a.

Con el objeto de estudiar la geometría de los p.a. fijemos primero la notación y algunas convenciones, las cuales coinciden básicamente con las establecidas en [B-0].

La descomposición de los vectores tangente en parte horizontal y vertical juega un rol importante en el desarrollo de este estudio. Las partes horizontal y vertical de un campo A sobre $P = P_f = M \times_f N$ serán notadas por $H A$ y $V A$.

Un campo vectorial X (respec. V) sobre M (respec. N) será identificado con el campo vectorial horizontal (respec. vertical) sobre P_f que está π -relacionado (respec. η -relacionado) a X (respec. V). Además, $\langle X, Y \rangle := g(X, Y)$ y $\langle U, V \rangle := h(U, V)$, donde $X, Y \in TM$ y $U, V \in TN$.

La función f será identificada con $f \circ \pi$. Esto introduce dos significados para el gradiente ∇f de f , pero estos coinciden

bajo una identificación previa. En efecto, $f \circ \pi$ es constante sobre fibras, entonces $\text{grad}(f \circ \pi)$ es horizontal, para otro campo horizontal X sobre $P_f (= X \text{ sobre } M)$ tenemos $g(X, \text{grad}(f \circ \pi)) = X(f \circ \pi) = Xf \circ \pi = g(X, \nabla f)$.

El tensor de curvatura sobre M es notado por R , sobre N por S y sobre $M \times_f N$ por \tilde{R} .

La conexión riemanniana sobre M es notada por ∇ , sobre N por D y sobre $M \times_f N$ por $\tilde{\nabla}$.

Bajo estas convenciones [B-0] p.24 prueban el siguiente

Lema 1.1: Sean X, Y campos sobre M y V, W campos sobre N . Entonces:

$$(1) \quad \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y \quad \text{o sea, coinciden en } M \text{ o } P.$$

$$(2) \quad \tilde{\nabla}_X V = \tilde{\nabla}_V X = (Xf/f) \cdot V$$

$$(3) \quad H(\tilde{\nabla}_V W) = -f(V, W) \nabla f = -(\tilde{g}(V, W)/f) \nabla f$$

$$(4) \quad V(\tilde{\nabla}_V W) = D_V W.$$

C. *Ángulos en p.a.*

Conservación del ángulo.

Dado $p = (m, n) \in M \times N$, $T_p(M \times N) = T_m M \oplus T_n N$. Entonces si $X, Y \in T_m M$

$$\cos \text{áng}((X, 0), (Y, 0)) = \frac{g(m)(X, Y)}{\|X\|_{\hat{g}} \|Y\|_g} = \cos \text{áng}(X, Y),$$

si $U, V \in T_n N$

$$\cos \text{áng}((0,U), (0,V)) = \frac{f^2(m) h(n)(U,V)}{f^2(m) \|U\|_h \|V\|_h} = \cos \text{áng}(U,V)$$

y si $X \in T_m M$ y $U \in T_n N$

$$\cos \text{áng}((X,0), (0,U)) = 0 .$$

O sea que los ángulos para pares de vectores horizontales, verticales o uno horizontal y el otro vertical, son invariantes por cambio de peso f . Esto no ocurre para vectores donde uno de los dos tiene componentes horizontal y vertical no nulas.

Teorema de Pitágoras en el tangente.

El producto usual de variedades de Riemann, se lo define de manera que valga el teorema de Pitágoras:

$$(g \oplus h)((X,U), (X,U)) = g(X,X) + h(U,U)$$

este deja de valer en los p.a. (salvo $f = 1$) pues

$$\tilde{g} = g + f^2 h \text{ implica}$$

$$\tilde{g}((X,U), (X,U)) = g(X,X) + f^2 \cdot h(U,U) .$$

D. *Longitud de una curva en $M \times_f N$. Diámetro.*

Dada una curva $c(t): [0,1] \rightarrow M \times N$ en $M \times_f N$ podemos representarla como

$$c(t) = (c_1(t), c_2(t)) \quad \text{con} \quad \begin{aligned} c_1(t) &= \pi(c(t)) \\ c_2(t) &= \eta(c(t)) \end{aligned}$$

así $\dot{c}(t) = \pi_* \dot{c}(t) + \eta_* \dot{c}(t) = \dot{c}_1(t) + \dot{c}_2(t)$

$$y \quad \tilde{g}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = g(\dot{c}_1(t), \dot{c}_1(t)) + f^2(c_1(t)) h(\dot{c}_2(t), \dot{c}_2(t))$$

de donde su longitud será

$$\begin{aligned} \ell(c) &= \int_0^1 [g(\dot{c}_1(t), \dot{c}_1(t)) + f^2(c_1(t)) h(\dot{c}_2(t), \dot{c}_2(t))]^{\frac{1}{2}} dt \leq \\ &\leq \ell_M(c_1) + \int_0^1 f(c_1(t)) [h(\dot{c}_2(t), \dot{c}_2(t))]^{\frac{1}{2}} dt \leq \\ &\leq \ell_M(c_1) + \|f\|_{C(M)} \ell_N(c_2) \end{aligned}$$

puesto que $(a+b)^{\frac{1}{2}} \leq a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ para $a, b \geq 0$. Cuando f es constante la última desigualdad es una igualdad.

En particular:

$$(i) \quad \text{si } c_2(t) \text{ es constante : } \ell(c) = \ell_M(c_1)$$

$$(ii) \quad \text{si } c_1(t) \text{ es constante : } \ell(c) = f(c_1(t)) \ell_N(c_2(t)).$$

Del carácter de minimizante local de la distancia, de una geodésica y de (i) resulta que las geodésicas de las hojas horizontales son geodésicas de $M \times_f N$. Notemos que este argumento no es válido en fibras verticales (ver el lema 1.1).

Una noción ligada a la de longitud de curvas, es la del diámetro de una variedad. Dados $P = (x, y), \bar{P}(\bar{x}, \bar{y}) \in M \times N$

$$\tilde{d}((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) := \inf_{c \in C_{P\bar{P}}} \ell(c)$$

donde

$$C_{P\bar{P}} = \left\{ c: [0, 1] \rightarrow M \times N \text{ de clase } C^1 \text{ tal que } \begin{array}{l} c(0) = P \\ c(1) = \bar{P} \end{array} \right\},$$

entonces por la desigualdad anterior

$$\tilde{d}((x,y), (\bar{x}, \bar{y})) \leq d_M(x, \bar{x}) + \|f\|_{C(M)} d_N(y, \bar{y})$$

Como

$$\text{Diam } (M \times_f N) = \sup\{\tilde{d}((x,y), (\bar{x}, \bar{y})) : (x,y), (\bar{x}, \bar{y}) \in M \times N\}$$

resulta

$$\text{Diam } (M \times_f N) \leq \text{Diam } M + \|f\|_{C(M)} \text{Diam } N$$

E. *Geodésicas en* $P = M \times_f N$.

Recordemos que un campo vectorial A sobre P se dice paralelo al largo de una curva C^∞ sobre P , $C: (-a, a) \rightarrow P$ si $\tilde{\nabla}_{\dot{c}(t)} A = 0$ para todo t .

Descomponiendo $A = X \oplus U$ con $X = HA$ y $U = VA$ en cada punto y $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$ con $\dot{c}(t) = \dot{c}_1(t) \oplus \dot{c}_2(t)$, por el lema 1.1 la ecuación de campo paralelo es:

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\nabla}_{\dot{c}_1 \oplus \dot{c}_2} X \oplus U = \tilde{\nabla}_{\dot{c}_1} X + \tilde{\nabla}_{\dot{c}_1} U + \tilde{\nabla}_{\dot{c}_2} X + \tilde{\nabla}_{\dot{c}_2} U \\ &= [\nabla_{\dot{c}_1} X - f(\dot{c}_2, U) \nabla f] \oplus \\ &\quad \oplus [(\dot{c}_1 f/f) U + (Xf/f) \dot{c}_2 + D_{\dot{c}_2} U] \end{aligned}$$

lo que es equivalente a

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{c}_1} X = f(\dot{c}_2, U) \nabla f & (\text{en } M) \\ D_{\dot{c}_2} U = -[(\dot{c}_1 f/f) U + (Xf/f) \dot{c}_2] & (\text{en } N) \end{cases}$$

Aplicando esto al caso $A = \dot{c}$ obtenemos las ecuaciones de las

geodésicas en $M \times_f N$, a saber:

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{c}_1} \dot{c}_1 = f(\dot{c}_2, \dot{c}_2) \nabla f & (\text{en } M) \\ D_{\dot{c}_2} \dot{c}_2 = -2(\dot{c}_1 f/f) \dot{c}_2 & (\text{en } N). \end{cases}$$

De aquí podemos ver nuevamente que las hojas (horizontales) son totalmente geodésicas en $M \times_f N^{(*)}$. Por otra parte, veamos cuando una curva en una fibra (vertical), o sea c_1 constante, es una geodésica en P , esto es:

$$\begin{cases} 0 = f(m_0) (\dot{c}_2, \dot{c}_2) \nabla f|_{m_0} & (c_1(t) = m_0) \\ D_{\dot{c}_2} \dot{c}_2 = 0 \end{cases}$$

como $f > 0$ y la curva es regular ($(\dot{c}_2, \dot{c}_2) > 0$) resulta que las fibras son totalmente geodésicas en $P^{(*)}$ si y sólo si m_0 es un punto crítico de f (ver [B-0] p.24).

Observemos que en el caso del producto usual, o sea $f \equiv 1$, las ecuaciones de las geodésicas se reducen a:

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{c}_1} \dot{c}_1 = 0 & (\text{en } M) \\ D_{\dot{c}_2} \dot{c}_2 = 0 & (\text{en } N). \end{cases}$$

(*) Cuando hablamos de hojas (fibras) totalmente geodésicas en P , estamos considerando las hojas (fibras) como subvariedades de P , o sea con la métrica \tilde{g} restringida a las hojas (fibras). Cabe recordar aquí las Observaciones 1, 2, 3 de A. Para el caso de fibras observemos que la condición de geodésica no se altera por homometrías (también llamadas cambios de escala).

F. *Aplicación Exponencial*

Para x un punto en una variedad de Riemann completa (M, g) definimos la aplicación exponencial en el punto x ,

$\exp_x: U \subset T_x M \rightarrow M$ como sigue:

Dado un vector $X \in T_x M$ definimos $\exp_x X$ como el punto $c_X(1)$ sobre la geodésica c_X que parte de x con velocidad inicial X .

En el caso de un producto usual, o sea $f \equiv 1$, resulta que si A es un vector tangente en $(m, n) \in M \times N$, $A = X \oplus U$ con $X \in H$ y $U \in V$ las ecuaciones de la geodésica que parte de (m, n) con velocidad inicial A son en realidad dos problemas de Cauchy separados uno en M y el otro en N . Vemos que descomponiendo los vectores tangentes en componente horizontal y componente vertical, la aplicación exponencial se descompone en

$$\exp_{(m,n)}^P X \oplus U = \exp_{(m,n)}^P X \oplus \exp_{(m,n)}^P U = \exp_{(m,n)}^P X$$

o también

$$\exp_{(m,n)}^P X \oplus U = (\exp_m^M X, \exp_n^N U)$$

Notemos que $\pi(\exp_{(m,n)}^P X) = m$ y $\eta(\exp_{(m,n)}^P U) = n$.

Cut-locus y Radio de Inyectividad.

Dada una variedad de Riemann completa (M, g) , por el teorema de Hopf-Rinow $\exp_m(r X)$ con $\|X\| = 1$ está definida para todo

$r \in \mathbb{R}$ y $X \in S^{m-1}$.

Consideramos la siguiente aplicación

$$X \mapsto \mu(X) : S^{m-1} \rightarrow (0, +\infty]$$

siendo $\mu(X) = \sup \{r : [0, r] \ni s \mapsto \exp_m s X = C(s)$ es una geodésica minimizante $\}$.

Es obvio que para $0 < r \leq \mu(X)$ la geodésica $C(s)$ es minimizante. Definimos

$$\text{cut-locus } (m) = \{\exp_m[\mu(X) \cdot X] : X \in S^{m-1}\}$$

Es posible mostrar que $\mu(X)$ es una función continua sobre S^{m-1} con valores en $(0, +\infty]$ (ver [B-C] p.239). De esto el cut-locus de un punto es un subconjunto cerrado de (M, g) , se puede ver también que es un conjunto de medida 0 (ver Cap.0, A.7 y luego [B-G-M] p.59). Cuando M es completa, \exp_m es un difeomorfismo de

$$\theta = \{r X \in T_m M : 0 \leq r < \mu(X)\} \text{ sobre } \Omega = \exp_m \theta$$

M es la unión de dos conjuntos disjuntos: Ω y el cut-locus de m . $\delta_m = \inf \mu(X), X \in S^{m-1}$ es el llamado radio de inyectividad de m . $\delta_m > 0$.

Definimos el radio de inyectividad δ de (M, g) como

$$\delta = \sup \{\delta : \delta \leq \delta_m \text{ con } m \in M\} = \inf_{m \in M} \delta_m$$

y puede ser 0, pero si M es compacta $\delta > 0$ (ver [Au 1] p.14)

Para más información sobre cut-locus y radio de inyectividad ver

[B-C], [Cha], [Au 1], [B-G-M].

Lema 1.2: Sea (N, h) una variedad de Riemann y sea $k > 0$.

Definiendo $\bar{h} = kh$ y fijando $n \in N$ resulta

$$\bar{\mu}(U) = k^{-1} \mu(k^{-1}U) \quad \text{donde} \quad \|U\|_{\bar{h}} = 1, U \in T_n N$$

De aquí

$$\bar{\delta} = k^{-1} \delta$$

En efecto, primero observamos que $\|U\|_{\bar{h}} = 1 \Leftrightarrow \|k^{-1}U\|_h = 1$, luego podemos calcular $\bar{\mu}(U)$ y $\mu(k^{-1}U)$. Para ello observamos primeramente que una curva es \bar{h} -minimizante sii es h -minimizante, de donde una curva es \bar{h} -geodésica sii es h -geodésica. Además,

$$\overline{\exp}_n s k^{-1}U = \exp_n s (k^{-1}U)$$

De esto

$$\begin{aligned} \{r : [0, r] \ni s \mapsto \overline{\exp}_n s U \text{ es } \bar{h}\text{-minimizante}\} &= \\ &= k^{-1} \{t : [0, t] \ni s \mapsto \exp_n s (k^{-1}U) \text{ es } h\text{-minimizante}\} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\bar{\mu}(U) = k^{-1} \mu(k^{-1}U)$$

y entonces $\bar{\delta}_n = k^{-1} \delta_n$, por lo tanto

$$\bar{\delta} = k^{-1} \delta$$

Nos ocuparemos ahora del radio de inyectividad de un p.a. Recordando que las hojas (horizontales) son totalmente geodésicas en P , observamos que para todo $p = (m, n) \in P$

$$(1) \quad \delta_p^P \leq \delta_m^M$$

de donde

$$\delta^P \leq \delta^M$$

Por otra parte, si existe $m \in M$ tal que $\nabla f(m) = 0$, la fibra en m , o sea $\{m\} \times N$, es totalmente geodésica en P y aplicando el lema 1.2 vemos que dado $(0, U) \in T_p P$ tal que $1 = \|(0, U)\|_{\tilde{g}} = f(m) \|U\|_h = \|U\|_{f(m) \cdot h =: \bar{h}}$ resulta

$$\mu_p^P [(0, U)] = \mu_n^N(U) = f(m)^{-1} \mu_n^N(f(m)^{-1} U)$$

de donde

$$\delta_p^P \leq f(m)^{-1} \delta_n^N$$

por lo tanto

$$(2) \quad \delta^P \leq \left(\inf_{\nabla f(m)=0} f(m) \right)^{-1} \delta^N$$

Así de (1) y (2) obtenemos que si existe $m \in M$ tal que $\nabla f(m) = 0$ es

$$\delta^P \leq \min \left(\delta^M, \left(\inf_{\nabla f(m)=0} f(m) \right)^{-1} \delta^N \right)$$

G. *Medida Canónica de Riemann.*

Sabemos que asociada a una métrica de Riemann existe una medida canónica (ver Cap. 0, A.7). Veamos explícitamente cual es esta en un p.a. Trabajaremos con notación matricial para los tensores métricos:

$$(\tilde{g}_{ij}) = \left[\begin{array}{c|c} (g_{ij}) & 0 \\ \hline 0 & f^2(h_{ij}) \end{array} \right] \quad (\tilde{g}^{ij}) = \left[\begin{array}{c|c} (g^{ij}) & 0 \\ \hline 0 & f^{-2}(h^{ij}) \end{array} \right]$$

Así, $\text{Det}(\tilde{g}_{ij}) = \text{Det } g \, f^{2n} \text{ Det } h$, o sea que

$$dv_{\tilde{g}} = f^n \, dv_g \otimes dv_h$$

Por lo tanto, si $\varphi(x,y)$ es una función continua sobre $M \times N$ resulta:

$$\int_{M \times N} \varphi \, dv_{\tilde{g}} = \int_{M \times N} \varphi(x,y) \, f^n(x) \, dv_g \otimes dv_h$$

H. *Tensor de Curvatura y sus Contracciones.*

Observemos que trabajamos con la definición siguiente de tensor de curvatura (ver Cap. 0, C.1).

$$R_{XY} Z := R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Notemos S al tensor de curvatura de N y \tilde{R} el de $M \times_f N = P$.

Lema 1.3: (ver [B-0]) Sean $X, Y, Z \in X(M)$ y $U, V, W \in X(N)$.

Entonces:

- (1) $\tilde{R}_{VU} W = S_{VU} W - |\nabla f|^2 [(U, W)V - (V, W)U]$
- (2) $\tilde{R}_{VX} Y = -\frac{1}{f} \nabla^2 f(X, Y)V = -\frac{1}{f} \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle V$
- (3) $\tilde{R}_{YX} V = \tilde{R}_{WV} X = 0$
- (4) $\tilde{R}_{VX} W = \tilde{R}_{WX} V = f(V, W) \nabla_X \nabla f$
- (5) $\tilde{R}_{YX} Z$ es el mismo en M o P .

A partir de este lema veamos como queda definido el tensor de Ricci (ver Cap. 0, C.2):

$$\text{Ric}_P(S, T) = \sum_{i=1}^{m+n} \tilde{g}(\tilde{R}(E_i, S)T, E_i)$$

donde $(E_i)_i$ es una base ortonormal de (P, \tilde{g}) en un punto.

Elijamos $(E_i)_{1 \leq i \leq m}$ base g -ortonormal del $T_m M$

$(\tilde{E}_i)_{m < i \leq m+n}$ base h -ortonormal del $T_n N$

Si definimos $E_i = \begin{cases} E_i & 1 \leq i \leq m \\ f^{-1} \tilde{E}_i & m < i \leq m+n \end{cases}$ resulta $(E_i)_{1 \leq i \leq m+n}$

una base \tilde{g} -ortonormal de $T_{(m, n)}(M \times N)$.

Para una base así construida y campos como en el lema 1.3

$$\text{Ric}_P(X, Y) = \text{Ric}_M(X, Y) + \sum_{m+1}^{m+n} \tilde{g}\left(-\frac{1}{f} \nabla^2 f(X, Y) E_i, E_i\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Ric}_M(X, Y) - \frac{1}{f} n \nabla^2 f(X, Y) \\
&= \text{Ric}_M(X, Y) - \frac{1}{f} n \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle
\end{aligned}$$

$\text{Ric}_P(X, U) = 0$ porque $\nabla_X \nabla f$ es horizontal y E_i es vertical para $m+1 \leq i \leq m+n$.

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_P(U, V) &= \sum_1^m \tilde{g}(-f(U, V) \nabla_{E_i} \nabla f, E_i) + \\
&\quad + \sum_{m+1}^{m+n} \tilde{g}(S_{E_i} U \cdot V - |\nabla f|^2 [(U, V) E_i - (E_i, V) U], E_i) \\
&= -f(U, V) \sum_1^m \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle + \\
&\quad + \text{Ric}_N(U, V) - |\nabla f|^2 (U, V) n + |\nabla f|^2 \sum_{m+1}^{m+n} (\tilde{E}_i \cdot V)(U, \tilde{E}_i) \\
&= \text{Ric}_N(U, V) - n |\nabla f|^2 (U, V) - f(U, V) \sum_{i=1}^m \nabla^2 f(E_i, E_i) + \\
&\quad + |\nabla f|^2 \sum_{i=m+1}^{m+n} (U, \tilde{E}_i) (\tilde{E}_i, V)
\end{aligned}$$

O sea hemos probado el siguiente:

Lema 1.4: Sean $X, Y \in X(M)$ y $U, V \in X(N)$. Entonces

$$\begin{aligned}
(1) \quad \text{Ric}_P(X, Y) &= \text{Ric}_M(X, Y) - n f^{-1} \nabla^2 f(X, Y) = \text{Ric}_M(X, Y) - \\
&\quad - n f^{-1} \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle
\end{aligned}$$

$$(2) \quad \text{Ric}_P(X, U) = \text{Ric}_P(U, X) = 0$$

$$(3) \quad \text{Ric}_P(U, V) = \text{Ric}_N(U, V) - n |\nabla f|^2 (U, V) - f(U, V) \sum_{i=1}^m \nabla^2 f(E_i, E_i) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=m+1}^{m+n} (U, \tilde{E}_i) (\tilde{E}_i, V) \\
& = \text{Ric}_N(U, V) - [n|\nabla f|^2 + f \sum_{i=1}^m \nabla^2 f(E_i, E_i)] (U, V) + \\
& + \sum_{i=m+1}^{m+n} (U, \tilde{E}_i) (\tilde{E}_i, V) |\nabla f|^2
\end{aligned}$$

Recordando que $\Delta f = \text{tr Hess } f$ podemos también escribir

$$\begin{aligned}
(3') \quad \text{Ric}_P(U, V) & = \text{Ric}_N(U, V) - [n|\nabla f|^2 + f \Delta f] (U, V) + \\
& + \sum_{i=m+1}^{m+n} (U, \tilde{E}_i) (\tilde{E}_i, V) |\nabla f|^2 .
\end{aligned}$$

Corolario 1.5: En coordenadas locales (x^i) que definen en un punto p el sistema ortonormal $(E_i)_i$ de $T_p P$, la forma matricial de Ric_p es

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{ij} - n f^{-1} \nabla^2 f (\partial_i, \partial_j) & 0 \\ \hline 0 & S_{ij} - f^{-2} [(n-1)|\nabla f|^2 + f \Delta f] h_{ij} \end{array} \right]$$

A partir de lema 1.4 busquemos una expresión de la curvatura escalar de P en base a las curvaturas escalares de M y N .

Recordemos primero la definición de curvatura escalar (ver Cap.

0, C.2) (aquí $R := \text{Scal}_M$, $S := \text{Scal}_N$)

$$\begin{aligned}
\tilde{R} := \text{Scal}_P & := \sum_{j=1}^{m+n} \text{Ric}_P(E_j, E_j) \\
& = R - n f^{-1} \sum_{j=1}^m \nabla^2 f(E_j, E_j) + f^{-2} \sum_{j=m+1}^{m+n} \text{Ric}_N(\tilde{E}_j, \tilde{E}_j) - \\
& - [n|\nabla f|^2 + f \sum_{i=1}^m \nabla^2 f(E_i, E_i)] f^{-2} n +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f^{-2} |\nabla f|^2 \sum_{j=m+1}^{m+n} \sum_{i=m+1}^{m+n} (\tilde{E}_j, \tilde{E}_j) (\tilde{E}_i, \tilde{E}_i) \\
& = -2n f^{-1} \Delta f - n(n-1) f^{-2} |\nabla f|^2 + R + f^{-2} S .
\end{aligned}$$

O sea

Teorema 1.6: La curvatura escalar \tilde{R} del p.a. P es

$$(\tilde{R}) \quad \tilde{R} = -2n f^{-1} \Delta f - n(n-1) f^{-2} |\nabla f|^2 + R + f^{-2} S$$

donde f es el peso, R la curvatura escalar de M y S la de N .

Podemos también determinar la curvatura de Ricci en la dirección de un campo $T = X \otimes V$ (ver Cap. 0, C.2)

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_P(T) &= \sum_{j=1}^{m+n} \text{Ric}_P(E_j, T) = \sum_{j=1}^m \text{Ric}_P(E_j, X) + \sum_{j=m+1}^{m+n} \text{Ric}_P(E_j, V) \\
&= \text{Ric}_M(X) - n f^{-1} \sum_{j=1}^m \nabla^2 f(E_j, X) + \text{Ric}_N(V) + \\
&\quad - f^{-1} [n |\nabla f|^2 + f \sum_{i=1}^m \nabla^2 f(E_i, E_i)] \sum_{j=m+1}^{m+n} (\tilde{E}_j, V) + \\
&\quad + f^{-1} \sum_{j=m+1}^{m+n} (\tilde{E}_j, V) |\nabla f|^2 = \text{Ric}_M(X) + \text{Ric}_N(V) + \\
&\quad - n f^{-1} \sum_{j=1}^m \nabla^2 f(E_j, X) + \\
&\quad - f^{-1} \sum_{j=m+1}^{m+n} (\tilde{E}_j, V) [(n-1) |\nabla f|^2 + f \Delta f]
\end{aligned}$$

O sea

Teorema 1.7: La curvatura de Ricci de P en la dirección de un campo $T = X \otimes V$ es

$$\begin{aligned} \text{Ric}_P(T) = & \text{Ric}_M(X) + \text{Ric}_N(V) - n f^{-1} \sum_{j=1}^m \nabla^2 f(E_j, X) + \\ & - \sum_{j=m+1}^{m+n} (\tilde{E}_j, V) [(n-1) f^{-1} |\nabla f|^2 + \Delta f] \end{aligned}$$

Respecto a la expresión de la curvatura seccional en P , mencionaremos el resultado probado por Bishop-O'Neil [B-O]. Notamos por $K(X, Y)$ la curvatura seccional en M del plano generado por X, Y y por $L(V, W)$ la curvatura seccional en $n \in N$ del plano generado por V, W .

Sea Π un plano tangente a P en $p = (m, n)$ y sean los vectores $X+V, Y+W$ una base ortonormal en P para Π donde X, Y son horizontales y V, W verticales.

Luego de un largo cálculo y aplicando el lema 1.3, la curvatura seccional del plano Π de $T_p P$ es

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\Pi) = & \tilde{g}(\tilde{R}_{Y+W, X+V} X+V, Y+W) \\ = & K(X, Y) |X \wedge Y|^2 - f(m) \{ (W, W) \nabla^2 f(X, X) + \\ & - 2(V, W) \nabla^2 f(X, Y) + (V, V) \nabla^2 f(Y, Y) \} \\ & + f^2(m) [L(V, W) - |\nabla f(m)|^2] (V \wedge W, V \wedge W) \end{aligned}$$

donde la expresión entre llaves significa: las formas bilineales simétricas $(,)$ sobre N_n y $\nabla^2 f$ sobre M_m combinadas dan origen a la forma bilineal simétrica $(,)$ sobre la suma directa $P_p = M_m + N_n$. Esta forma extendida a bivectores en el sentido usual, obtenemos que la expresión entre llaves es el cuadrado de la norma de $X \wedge W - Y \wedge V$.

I. Curvatura. Ejemplos.

Dada una superficie, dos veces su curvatura gaussiana κ es la curvatura escalar y coincide con dos veces la curvatura seccional.

En el caso de una superficie de revolución S , ya vimos que el producto alabeado de una curva C por S^1 con peso f igual a la distancia al eje de revolución, es isométrica a S con la métrica inducida por \mathbb{R}^3 . La curvatura escalar \tilde{R} de S está dada por

$$\underline{2\kappa = \tilde{R} = -2f^{-1} \left(\frac{1}{2} (g^{-1})' f' + g^{-1} f'' \right)}$$

para $S = \{(\alpha(t) \cos s, \alpha(t) \sin s, \beta(t))\}$, $g = \alpha'^2 + \beta'^2$, $f = \alpha$ (ver [K1], p.66).

Ejemplo 1: El toro en \mathbb{R}^3 :

Para $a > 1$ fijo

$$T = \{(\cos t + a) \cos s, (\cos t + a) \sin s, \sin t\}$$

describe el toro en \mathbb{R}^3 isométrico a $S^1 \times S^1$.

Tenemos que $\alpha(t) = f(t) = \cos t + a$, $\beta(t) = \sin t$, $g \equiv 1$ por lo tanto

$$\tilde{R} = 2\kappa = \frac{2 \cos t}{\cos t + a}$$

Ejemplo 2: El elipsoide de revolución:

En este caso (con cuidado en los polos)

$$S = \{(a \cos t \cos s, a \cos t \sin s, b \sin t); t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$$

y se tiene

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= f(t) = a \cos t & \beta(t) &= b \sin t \\ \alpha'(t) &= f'(t) = -a \sin t & \beta'(t) &= b \cos t & g &= a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \\ f''(t) &= -a \cos t \end{aligned}$$

$$g^{-1} = (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{-1} \quad (g^{-1})' = \frac{(a^2 - b^2) 2 \sin t \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^2}$$

por lo tanto

$$\tilde{R} = 2\kappa = 2 \frac{b^2}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^2} > 0 \quad \text{para todo } t$$

Notemos que en el caso de la esfera S^2 da $\kappa \equiv 1$.

Ejemplo 3: La pseudoesfera:

Podemos citar también el caso de la pseudoesfera, el cual se particulariza por tener curvatura gaussiana constante igual a -1.

Aquí

$$\begin{aligned} S &= \{(e^{-t} \cos s, e^{-t} \sin s, \int_0^t (1 - e^{-2r})^{\frac{1}{2}} dr); t \geq 0\} \\ \alpha(t) &= f(t) = e^{-t} & \beta(t) &= \int_0^t (1 - e^{-2r})^{1/2} dr \\ \alpha'(t) &= f'(t) = -e^{-t} & \beta'(t) &= (1 - e^{-2t})^{1/2} & g &= 1 \\ f''(t) &= e^{-t} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\tilde{R} = 2\kappa = -2 \frac{e^{-t}}{e^{-t}} = -2 \quad \text{es decir } \kappa \equiv -1.$$

Ejemplo 4: Ejiri [Ej 2]:

$S^1 \times S^n$ con la métrica

$$dt^2 + f^2(t) dg^2$$

donde la esfera (S^n, g) tiene la métrica canónica. En este caso la ecuación de la curvatura escalar se reduce (recordando que $g_{11} = 1$ para S^1 en una parametrización adecuada) a:

$$\tilde{R} = -2n f^{-1} f'' - n(n-1) f^{-2} (f')^2 + f^{-2} n(n-1)$$

recordando que la curvatura escalar de S^n con la métrica canónica es $n(n-1)$.

Ejemplo 5: Discos en espacios de curvatura constante:

Con respecto a los otros ejemplos de p.a. citados, a saber: coordenadas esféricas en \mathbb{R}^n , coordenadas esféricas en S^n y espacio hiperbólico, estos describen todos los espacios simplemente conexos de curvatura seccional constante K_0 .

Para $K_0 = 0$ es $P = \mathbb{R}^n$

$K_0 > 0$ es $P = S^n(\rho)$ con $K_0 = \frac{1}{\rho^2}$

$K_0 < 0$ es $P = B^n(\rho)$ con $K_0 = -\frac{1}{\rho^2}$

Ver [Cha], p.37 - [Bera], II.8 - [B-G-M], II.E.III.

De aquí resulta que todos estos ejemplos son de curvatura escalar constante, notamos que esto se puede obtener haciendo el cálculo en nuestra expresión de la curvatura escalar de un p.a.

En este trabajo no nos ocuparemos específicamente de la curvatura

seccional de p.a., por lo cual remitimos a [B-0] para ver algunos resultados más sobre este tema.

J. *Hessiano en* $M \times_f N$.

Dado $\varphi \in C^\infty(M \times N)$. Sean $A = X \otimes U$ y $B = Y \otimes V$ dos campos vectoriales sobre $M \times N$. Entonces $\tilde{\nabla} d\varphi(A;B) := \tilde{\nabla}_A (d\varphi)B$ es el $\tilde{\text{Hess}} \varphi(A,B)$ el cual es igual a:

$$\tilde{\text{Hess}} \varphi(A,B) = A \cdot (d\varphi(B)) - d\varphi(\tilde{\nabla}_A B)$$

Recordemos que este es un tensor simétrico de tipo (0,2).

Mediante el Lema 1.1 obtenemos que:

$$\begin{aligned} \tilde{\text{Hess}} \varphi(A,B) &= (X \otimes U) [(d^M \varphi + d^N \varphi) (Y \otimes V)] - (d^M \varphi + d^N \varphi) \tilde{\nabla}_{X \otimes U} Y \otimes V \\ &= X d^M \varphi Y - d^M \varphi \nabla_X Y + U d^N \varphi V - d^N \varphi D_U V + \\ &\quad + d^M \varphi (f(U,V) \nabla f) - d^N \varphi [(Xf/f) V + (Yf/f) U] . \end{aligned}$$

O sea

$$\begin{aligned} \tilde{\text{Hess}} \varphi(A,B) &= \text{Hess}^M \varphi(X,Y) + \text{Hess}^N \varphi(U,V) + d^M \varphi (f(U,V) \nabla f) + \\ &\quad - d^N \varphi [(Xf/f) V + (Yf/f) U] \end{aligned}$$

Nota: Todo lo desarrollado hasta aquí, se puede hacer en el caso en que las variedades de Riemann (M,g) y (N,h) sean variedades con o sin borde y cuando la función f era una función estrictamente positiva en el interior de M .

Hemos también citado algunos ejemplos en los cuales, se permite

que la función f se anule en un punto del borde, por ejemplo las coordenadas polares en \mathbb{R}^n, S^n y el espacio hiperbólico, así como también el caso del elipsoide de revolución (polos). Es to último está ligado a la noción de singularidad cónica en una variedad de Riemann (ver [Che], [Zu], [Cho]) pues las métricas involucradas en tales variedades, alrededor de un punto cónico, son de tipo alabeado.

CAPITULO 2: OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI EN P.A.: SUS AUTOVALORES

A. El Laplaciano en un p.a.

Recordando que el operador de Laplace-Beltrami es la traza del Hessiano (ver Cap.0, D.4), podemos obtener su expresi3n en un p.a.

Construimos una base ortonormal cerca de un punto $p = (m,n)$ como en (Ricci) y as3 si $\varphi \in C^\infty(M \times N)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} \varphi &= \text{Traza } \tilde{\text{Hess}} \varphi \\ &= \sum_{i=1}^{m+n} \tilde{\text{Hess}} \varphi (E_i, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \text{Hess}^M \varphi (E_i, E_i) + \sum_{i=m+1}^{m+n} \text{Hess}^N \varphi (f^{-1} \tilde{E}_i, f^{-1} \tilde{E}_i) + \\ &\quad + \sum_{i=m+1}^{m+n} d^M \varphi (f(f^{-1} \tilde{E}_i, f^{-1} \tilde{E}_i) \nabla f) \quad \text{en } p = (m,n). \end{aligned}$$

Luego, para todo p

$$(2.1) \quad \tilde{\Delta} \varphi = \Delta^M \varphi + f^{-2} \Delta^N \varphi + n d^M \varphi (f^{-1} \nabla f)$$

$$(2.2) \quad \tilde{\Delta} \varphi = \Delta^M \varphi + d^M \varphi (\nabla \log f^n) + f^{-2} \Delta^N \varphi$$

Observando que para un cambio conforme de m3trica $\bar{g} = \eta^{\frac{4}{m-2}} g$ con $\eta \in C_{>0}^\infty(M)$ si $\dim M = m > 2$, tenemos

$$(2.3) \quad \eta^{\frac{4}{m-2}} \Delta^M \left(\frac{4}{\eta^{\frac{4}{m-2}} g} (\cdot) \right) = \Delta_g^M (\cdot) + d^M (\cdot) (\nabla \log \eta^2)$$

de donde tomando $\eta = f^{n/2}$ en (2.3) y reemplazando en (2.2) obtenemos

$$(2.4) \quad \tilde{\Delta} = f^{\frac{2m}{m-2}} \Delta^M + f^{-2} \Delta_h^N \quad \text{con dim } M > 2 .$$

Se puede llegar a estas igualdades y a otras trabajando con la expresión en coordenadas locales del operador de Laplace-Beltrami.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= f^{-n} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_i (\tilde{g}^{ij} f^n \sqrt{g} \sqrt{h} \partial_j) \\ &= f^{-n} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (g^{ij} f^n \sqrt{g} \partial_j) + f^{-2} \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_i (h^{ij} \sqrt{h} \partial_j) \end{aligned}$$

o sea

$$(2.5) \quad \tilde{\Delta} = f^{-n} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (g^{ij} f^n \sqrt{g} \partial_j) + f^{-2} \Delta_h^N$$

Como $v^i = g^{ij} \partial_j$ y $v_i = \partial_i$

$$\text{Div}_g^M (\sqrt{g} f^n v^i v_i) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} f^n g^{ij} \partial_j v)$$

es decir que (2.5) se puede escribir como

$$(2.5') \quad \tilde{\Delta} = f^{-n} \text{Div}_g^M (\sqrt{g} f^n v^i v_i) + f^{-2} \Delta_h^N$$

B. *Espectro de* $M \times_f N$

Sean M, N v.r. compactas sin borde y conexas con $\dim M = m > 2$.

Teniendo en cuenta las distintas expresiones que obtuvimos para el operador de Laplace-Beltrami en p.a., las cuales ligan $\tilde{\Delta}$ con Δ_g^M , Δ_h^N y el peso f , trataremos de ver que podemos decir del espectro de $\tilde{\Delta}$.

Primero recordemos que se sabe del caso $f \equiv 1$ o sea el producto usual de variedades de Riemann (ver [B-G-M], p.143). En este caso

$$\tilde{\Delta} = \Delta_g^M + \Delta_h^N$$

luego, si $-\Delta_g^M v = \lambda v$

y $-\Delta_h^N w = \mu w$

resulta $-\tilde{\Delta}(v.w) = (\lambda + \mu)v.w$

y se puede probar vía el teorema de Stone-Weierstrass que este método de fabricar autovalores y autofunciones genera el espectro de $(M \times N, g+h)$ y todas las autofunciones (ver [B-G-M], p.144).

Tratemos de ver que ocurre en un p.a.

Una primera observación es que una función $w : N \rightarrow \mathbb{R}$ no constante es autofunción de $\tilde{\Delta}$ solo si f es constante. En particular las autofunciones de Δ_h^N no constantes son autofunciones de $\tilde{\Delta}$ si y sólo si f es constante.

Una segunda observación es que si existen autofunciones de $\tilde{\Delta}$ que son funciones $v : M \rightarrow \mathbb{R}$, estas son autofunciones de un problema con peso positivo para el operador de Laplace en M con una métrica conforme a la dada g , a saber:

$$\lambda f^{-\frac{2n}{m-2}} v = -\Delta_h^M \frac{2n}{f^{m-2}} v$$

(ver (2.4)).

Sea $0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots$ el espectro de Δ_h^N . Para cada μ_i el problema de autovalores

$$-f^{\frac{2n}{m-2}} \Delta_h^M \frac{2n}{f^{m-2}} v + \mu_i f^{-2} v = \lambda v$$

tiene un espectro discreto positivo, a saber

$$(\mu_i f^{-2} > 0) \quad 0 < \lambda_i^1 < \lambda_i^2 < \dots$$

Si ahora consideramos $v \in C^\infty(M)$ y $w \in C^\infty(N)$ tales que:

$$-\Delta_h^N w = \mu_i w$$

$$-f^{\frac{2n}{m-2}} \Delta_h^M \frac{2n}{f^{m-2}} v + \mu_i f^{-2} v = \lambda_i^j v$$

entonces $v.w \in C^\infty(M \times N)$ es autofunción de $\tilde{\Delta}$ de autovalor λ_i^j .

En efecto por (2.4)

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(v.w) &= -w f^{\frac{2n}{m-2}} \Delta_h^M \frac{2n}{f^{m-2}} v - f^{-2} v \Delta_h^N w \\ (2.6) \quad &= w \left[-f^{\frac{2n}{m-2}} \Delta_h^M \frac{2n}{f^{m-2}} v + \mu_i f^{-2} v \right] \\ &= \lambda_i^j (v.w) \end{aligned}$$

Lo que aquí conjeturamos es que así se obtiene el espectro de $\tilde{\Delta}$ y todas las autofunciones.

Primero observemos que en el caso del producto usual esto se reduce al procedimiento mencionado anteriormente.

Recordemos el siguiente:

Lema 2.1: (ver [B-G-M] p.143 Lema A.II.1) Sea (M, g) una variedad de Riemann y supongamos dado para cada $i \in \mathbb{N}$ un subespacio vectorial V_i de $C^\infty(M)$ de manera que se verifican:

- (a) Para todo i , existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varphi \in V_i$, se tiene $-\Delta \varphi = \lambda_i \varphi$
- (b) La suma $\sum_{i \in \mathbb{N}} V_i$ es densa en $C^\infty(M)$ en media cuadrática.

Entonces el espectro de (M, g) es el conjunto de los λ_i y para todo i $V_i = P_i(M, g)$, donde $P_i(M, g)$ es el subespacio propio asociado a λ_i .

Consideremos $I_\nu = \{(i, j) : \lambda_i^j = \nu\}$ y

$$U_\nu = \sum_{(k, \ell) \in I_\nu} U_k^\ell$$

donde $U_k^\ell = \langle V_k^\ell \otimes W_k \rangle$ con

W_k el autoespacio asociado a μ_k

V_k^ℓ el autoespacio asociado a λ_k^ℓ

De μ_j creciente en j con $\mu_j \rightarrow \infty$ resulta que I_ν es siempre finito. Además I_ν es no vacío sólo para numerables valores ν_k y

$v_k \rightarrow +\infty$.

Observemos que primero se fija k y luego l .

Si conseguimos verificar las hipótesis del Lema 2.1 para (U_ν) resultará que el espectro de $(M \times N, \tilde{g})$ es (λ_i^j) y el subespacio asociado a un elemento $v \in \text{spec}(M \times N, \tilde{g})$ será U_ν .

La hipótesis (a) es inmediata (ver (2.6)).

Veamos que ocurre con la hipótesis (b): debemos tratar de verificar que

$$\sum_{\nu} U_{\nu}$$

es denso en $C^\infty(M \times N)$ en media cuadrática $d\tilde{g} = f^N dg \otimes dh$.

Observemos primero que fijado μ_k se construyen los λ_k^l y los U_k^l , con los $\lambda_k^l \in \text{spec}(M \times N, \tilde{g})$ y por lo tanto los $U_k^l \subset \sum_{\nu} U_{\nu}$.

Disponemos de la siguiente información:

$$(2.7) \quad \sum_i W_i \quad \text{es denso en } C^\infty(N) \quad \text{en norma } L_{dh}^2(N)$$

y para cada i

$$(2.8) \quad \sum_j V_i^j \quad \text{es denso en } C^\infty(M) \quad \text{en norma } L_{f^N dg}^2(M),$$

(ver [Ba], p.97-102).

Para probar la densidad de $\sum_{\nu} U_{\nu}$ en $C^\infty(M) \otimes C^\infty(N)$ en norma $L_{d\tilde{g}}^2(M \times N)$ bastará con probar que si $\varphi \otimes \psi$ es ortogonal en $L_{d\tilde{g}}^2(M \times N)$ a la familia $(\varphi_i^j \otimes \psi_i)_{i,j}$ entonces $\varphi \otimes \psi \equiv 0$, y esto es cierto pues

$$0 = \langle \varphi(x) \otimes \psi(y), \varphi_i^j(x) \otimes \psi_i(y) \rangle_{L_{f^N dg \otimes dh}^2(M \times N)} =$$

$$= \langle \varphi, \varphi_i^j \rangle_{L^2_{f^{n_dg}}(M)} \cdot \langle \psi, \psi_i \rangle_{L^2_{dh}(N)} \quad \text{para todo } i, j.$$

Supongamos que para algún i_0 $\langle \psi, \psi_{i_0} \rangle_{L^2_{dh}(N)} \neq 0$ entonces

$$\langle \varphi, \varphi_{i_0}^j \rangle_{L^2_{f^{n_dg}}(M)} = 0 \text{ para todo } j, \text{ de donde } \varphi \equiv 0 \text{ por (2.8). Si}$$

$$\langle \psi, \psi_i \rangle_{L^2_{dh}(N)} = 0 \text{ para todo } i, \text{ entonces } \psi \equiv 0 \text{ por (2.7). O sea que}$$

$\varphi \otimes \psi \equiv 0$, por lo tanto $\sum_v U_v$ es densa en $C^\infty(M) \otimes C^\infty(N)$ en norma $L^2_{d\tilde{g}}(M \times N)$.

Luego, como en el caso del producto usual, aplicando Stone-Weierstrass se prueba que $C^\infty(M) \otimes C^\infty(N)$ es denso en $C^\infty(M \times N)$ en norma supremo.

De estas dos densidades resulta que vale (b) del lema 2.1.

Así, queda probado el siguiente:

Teorema 2.2: $\text{Spec}(M \times N, \tilde{g})$ es el conjunto de los λ_i^j con λ_i^j autovalor de

$$(*)_i \quad - \frac{2n}{f^{m-2}} \Delta^M v + \frac{2n}{f^{m-2}} \mu_i v = \lambda_i^j v \quad (M)$$

con $\mu_i \in \text{Spec}(N, h)$. Si $\lambda_i^j \in \text{Spec}(M \times N, \tilde{g})$ resulta que el autoespacio asociado a λ_i^j es

$$U_{\lambda_i^j} = \overline{\{(k, \tilde{\lambda}) \in I_{\lambda_i^j} : U_k^\ell\}}$$

con $I_{\lambda_i^j} = \{(i, j) : \lambda_i^j = \lambda\}$.

Observación: En lugar de $(*_i)$ podemos considerar en base a (2.5)

$$(*'_i) \quad - f^{-n} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (g^{ij} f^n \sqrt{g} \partial_j v) + \mu_i f^{-2} v = v v \quad (M)$$

Esto nos permite evitar el inconveniente que aparece en $(*_i)$ cuando $m = 2$.

C. El Primer Autovalor No Nulo en un p.a.

El cociente de Rayleigh para $(*_i)$ es

$$R_i[v] = \frac{\int_M |\nabla v|^2 d\bar{g} + \mu_i \int_M q v^2 d\bar{g}}{\int_M p v^2 d\bar{g}}$$

$$\text{con } d\bar{g} = f^{\frac{nm}{m-2}} dg$$

$$qd\bar{g} = f^{-(2 + \frac{2n}{m-2}) + \frac{nm}{m-2}} dg = f^{n-2} dg$$

$$pd\bar{g} = f^{-\frac{2n}{m-2} + \frac{nm}{m-2}} dg = f^n dg$$

$$b(v_1, v_2) = \int_M p v_1 v_2 d\bar{g} = \int_M f^n v_1 v_2 dg = \langle v_1, v_2 \rangle_{L^2 f^n dg} \quad (M)$$

vemos por el Principio de Monotonía I (ver [Ba], p.99) con $U =$

$C^\infty(M)$ que si $i \leq i'$ entonces $R_i[v] \leq R_{i'}[v]$ (por ser $\mu_i \geq 0$ para todo i) por lo tanto $\lambda_i^j \leq \lambda_{i'}^j$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Por otra parte, para $\mu_0 = 0$

$$0 = \lambda_0^0 < \lambda_0^1 < \lambda_0^2 \dots$$

y para $\mu_1 > 0$

$$0 < \lambda_1^0 < \lambda_1^1 < \lambda_1^2 \dots$$

Luego como $\mu_j > \mu_1$ si $j \geq 2$, por el Principio de Monotonía $\lambda_1^0 < \lambda_j^0$. Por lo tanto el menor autovalor no nulo es $\min \{\lambda_1^1, \lambda_1^0\}$.

Hemos probado entonces el siguiente:

Teorema 2.3: El primer elemento no nulo del espectro de $(M \times N, \tilde{g})$ o sea el v_1 es $\min (\lambda_1^1, \lambda_1^0)$.

Observación: Si $v_1 = \lambda_1^1$, no necesariamente v_2 será λ_1^0 , y si $v_1 = \lambda_1^0$ tampoco será necesariamente $v_2 = \lambda_1^1$.

Observación: En productos $M \times N$ usuales se pueden obtener todos los casos posibles.

Observación: Todo lo desarrollado en este capítulo vale para variedades compactas conexas con borde, agregando la condición de contorno de Dirichlet o de Newman para el Laplaciano visto que en ambos casos tenemos un problema autoadjunto en $L^2(M \times_f N)$.

CAPITULO 3: PRODUCTOS ALABEADOS DE CURVATURA ESCALAR CONSTANTE

A. *Ejemplos y Planteo del Problema.*

Nos ocuparemos ahora de la curvatura de un p.a.

Obtuvimos en el Capítulo 1 algunas de las relaciones diferenciales que ligan las curvaturas de un p.a. con las de cada factor.

Entre ellos citamos la correspondiente a la curvatura seccional.

Con relación a esta curvatura solo haremos referencia a los resultados obtenidos por Bishop-O'Neil (ver [B-O], p.23-29). Nos

ocuparemos centralmente del estudio de la curvatura escalar en

p.a. Teniendo en cuenta que se conocen obstrucciones de distinto

tipo para que una función C^∞ sobre una variedad sea curvatura

escalar para alguna métrica de Riemann, tiene sentido en nuestro

caso preguntarnos qué funciones pueden ser curvatura escalar

de un producto alabeado. Este es el objetivo de fondo. Como un

primer paso nos planteamos el problema de ver si dadas dos variedades

de Riemann (M, g) y (N, h) existe un peso de manera tal

que el correspondiente p.a. tenga curvatura escalar constante.

El tratamiento de esta pregunta es el objetivo central de este

capítulo.

Con relación a esto citemos el siguiente problema planteado por

Klingenberg (ver [Kl], p.66-67) ¿Cuáles son las superficies de revolución

de curvatura gaussiana constante? (Ver los ejemplos del

Capítulo 1).

Siguiendo la notación empleada en el primer ejemplo de curvatura

(ver Capítulo 1, I), nuestro problema se reduce a buscar solucio-

nes positivas de la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$-g^{-1} \alpha'' - \frac{1}{2} (g^{-1})' \alpha' = \lambda \alpha \quad \text{con } \lambda \text{ constante.}$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $g = \alpha'^2 + \beta'^2 = 1$, entonces nuestra ecuación se reduce a:

$$(3.1) \quad -\alpha'' = \lambda \alpha$$

que tiene la ventaja de ser autoadjunta y de coeficientes constantes. Como $g = \alpha'^2 + \beta'^2 = 1$ tenemos que $\alpha'^2 \leq 1$.

Veamos entonces cuales son las soluciones de (3.1), para esto separamos en tres casos, a saber:

($\lambda = 0$): Aquí $\alpha(t) = at + h$, $0 \leq a \leq 1$, luego la superficie de revolución es:

$a = 0$: cilindro circular recto

$0 < a < 1$: cono circular

$a = 1$: un trozo de plano.

Observación: De aquí en adelante, en estos ejemplos, permitimos singularidades similares a la del cono circular.

($\lambda = 1$): Aquí $\alpha(t) = a \cos t$ con $a > 0$ y $a^2 \sin^2 t \leq 1$, luego

$$\beta(t) = \int_0^t \sqrt{1 - a^2 \sin^2 s} \, ds$$

Entonces la superficie de revolución es:

$a = 1$: esfera

$0 < a < 1$: superficie formada por husos
(spindle-like surface)

$a > 1$: superficie anillada
(column of water about to break into beads).

($\lambda = -1$): Aquí $\alpha(t) = ae^t + be^{-t}$ con $(ae^t - be^{-t})^2 \leq 1$. La superficie de revolución es:

$b = 1, a = 0$: seudoesfera (curva generada al hacer girar la tractriz)

$a, b \neq 0$ implica $\left\{ \begin{array}{l} a = -b = \frac{c}{2} : \text{pila de conos} \\ a = b = \frac{c}{2} : \text{horizontally-fluted column.} \end{array} \right.$

En el caso de un p.a. general la idea es similar, o sea que nuestro problema mediante la aplicación de la relación (\tilde{R}) del Capítulo 1, se reduce a buscar soluciones positivas de la ecuación no lineal en f y sus derivadas primeras

$$-2n \Delta f - n(n-1) f^{-1} |\nabla f|^2 + Rf + f^{-1} S = \lambda f \quad \text{con } \lambda \text{ constante.}$$

Vemos aquí que necesariamente para que exista solución, debe ser S constante.

En el caso $M = S^1$ y N v.r. de curvatura escalar constante (en particular $N = S^n$) tenemos una ecuación diferencial ordinaria en \mathbb{R} , Ejiri (en [Ej 1]) buscó soluciones periódicas a través de un estudio de las soluciones utilizando el lema de Gronwall.

Nosotros modificaremos la relación diferencial (\tilde{R}) con el objeto de llevar el problema no lineal anterior a uno semilineal con parte lineal autoadjunta en el que no intervengan términos de primer orden.

Para esto escribiremos el peso f como

$$f = u^\alpha$$

con $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ y α a determinar de manera que nos que de en (\tilde{R}) una expresión sin términos de primer orden.

Esto es posible, en efecto:

$$\begin{aligned} \nabla u^\alpha &= \alpha u^{\alpha-1} \nabla u \therefore |\nabla u^\alpha|^2 = \alpha^2 u^{2\alpha-2} |\nabla u|^2 \\ (3.2) \quad \Delta_g u^\alpha &= \alpha(\alpha-1) u^{\alpha-2} |\nabla u|^2 + \alpha u^{\alpha-1} \Delta_g u \end{aligned}$$

por lo tanto por (\tilde{R})

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= -2n \alpha u^{-1} \Delta_g u + [-2n \alpha(\alpha-1) - n(n-1)\alpha^2] u^{-2} |\nabla u|^2 + \\ &+ R + u^{-2\alpha} S \end{aligned}$$

de donde tomando $\alpha = \frac{2}{n+1}$ obtenemos el siguiente:

Teorema 3.1: La relación diferencial de la curvatura escalar \tilde{R} de $M \times \frac{2}{u^{n+1}} N$ con las curvaturas escalares de (M^m, g) y (N^n, h) es:

$$(\tilde{R}_1) \quad u \tilde{R} = -4 \frac{n}{n+1} \Delta_g u + R_g u + S u^{\frac{n-3}{n+1}}$$

Obtenemos que la función u satisface una ecuación diferencial de segundo orden semilineal con el exponente de la no linealidad

entre -1 y 1. Esta misma relación la obtuvimos por otro método en [D-LD]. De esta manera, definiendo $L = -\frac{4n}{n+1} \Delta_g + R_g I$ nuestro problema se replantea así:

¿Existen soluciones (u, λ) de la ecuación no lineal

$$(3.3) \quad L u + S u^{\frac{n-3}{n+1}} = \lambda u$$

con $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ y λ constante?

Como vimos antes, una condición necesaria para la existencia de solución es que (N^n, h) sea una variedad de curvatura escalar S constante.

B. Tratamiento del Problema

El caso más simple es cuando $S = 0$, pues desaparece la no linealidad y es válido el siguiente:

Teorema 3.2: Sea M compacta y conexa. Supongamos que N es de curvatura escalar $S = 0$. Entonces existe un peso f tal que la curvatura escalar \tilde{R} de $M \times_f N$ es constante λ_1 . f es única salvo una constante multiplicativa positiva, λ_1 es única y está dado por

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_M \left(\frac{4n}{n+1} |\nabla v|^2 + R v^2 \right) dv : v \in H^1(M), \int_M v^2 = 1 \right\}$$

donde $H^1(M) = \{v \in L^2(M) : |\nabla v|^2 \equiv \nabla^i v \nabla_i v \in L^1(M)\}$ es el espacio de Sobolev de orden 1.

Demostración: Es bien conocido que el problema lineal de autovalores (3.3) con $S = 0$ sobre M compacta y conexa tiene solo una solución no negativa u_1 con $\max_M u_1 = 1$ (ver [Au 1], p.137) (en efecto $u_1 > 0$ en M). u_1 es la llamada autofunción principal del operador elíptico L .

El correspondiente autovalor λ_1 es simple y es llamado el autovalor principal. Entonces $f = u_1^{\frac{2}{n+1}} > 0$ sobre M es el peso que estamos buscando. Toda otra solución es de la forma rf , $r \in \mathbb{R}_{>0}$, porque λ_1 es simple. La fórmula para λ_1 es clásica (ver [Ba]).

El producto alabeado de M con un círculo, es decir $M \times_f S^1$ da una interpretación geométrica de la autofunción principal u_1 de $-\Delta + \frac{R}{2}$ y su correspondiente autovalor λ_1 , el cual en el caso especial de M de dimensión 2 puede ser expresado en términos de la curvatura gaussiana sobre M .

Corolario: Dado un compacto conexo $M = (M^2, g)$ con curvatura gaussiana κ y operador de Laplace-Beltrami Δ , entonces la autofunción principal u_1 del operador canónico elíptico $-\Delta + \kappa$ cumple que el p.a. $M \times_{u_1} S^1$ tiene curvatura escalar constante igual al autovalor principal λ_1 de $-\Delta + \kappa$.

Demostración: Basta tomar $n = 1$ en (\tilde{R}_1) y recordar que $S = 0$ en S^1 y $\frac{R}{2} = \kappa$ en una variedad de dimensión 2.

El caso $S \in \mathbb{R}$, $S < 0$ es similar a $S = 0$ porque la semirrecta $\{(\lambda_1, r u_1), r > 0\}$ se deforma en una curva $\{(\lambda, f(\lambda)) : \lambda < \lambda_1\}$:

Teorema 3.3: Sea $M = (M^m, g)$ una variedad compacta conexa. Supongamos $N = (N^n, h)$ de curvatura escalar constante negativa S y supongamos $n \geq 3$. Sea λ_1 el autovalor principal de $-\frac{4n}{n+1} \Delta_g + R$. Entonces para cada $\lambda < \lambda_1$ existe un único peso $f = f(\lambda)$ tal que $M \times_f N$ tiene curvatura escalar constante λ . Ninguna constante $> \lambda_1$ puede ser curvatura escalar de $M \times_f N$ para algún peso f .

Demostración: Buscamos soluciones de (3.3). Denotamos por u_1 la autofunción positiva de $Lu = \lambda u$ con $\|u_1\|_{L^2} = 1$, es decir $\int_M u_1^2 dv = 1$. Si u es una solución positiva de (3.3), multiplicando (3.3) por u_1 e integrando por partes (L es autoadjunto), obtenemos:

$$\lambda_1 \int_M u u_1 dv + S \int_M u^\alpha u_1 dv = \lambda \int_M u u_1 dv$$

donde $0 \leq \alpha = \frac{n-3}{m+1} < 1$, entonces

$$(3.4) \quad (\lambda - \lambda_1) \int_M u u_1 dv = S \int_M u^\alpha u_1 dv$$

de donde deducimos que $\lambda < \lambda_1$ es condición necesaria para $S < 0$. Fijemos $\lambda < \lambda_1$. Como $0 \leq \alpha < 1$, tenemos que

$$(L - \lambda I) \underline{t} u_1 \leq |S| \underline{t}^\alpha u_1^\alpha$$

para $\underline{t} \in \mathbb{R}_{>0}$ suficientemente pequeño, entonces $\underline{t} u_1$ es una subsolución de (3.3).

También

$$(L - \lambda I) \bar{t} u_1 > |S| \bar{t}^\alpha u_1^\alpha$$

para $\bar{t} \in \mathbb{R}_{>0}$ suficientemente grande, entonces tenemos una supersolución $\bar{t} u_1 > \underline{t} u_1$.

El operador $(L - \lambda I): C^{2,\beta}(M) \rightarrow C^\beta(M)$ es un isomorfismo y su inversa $(L - \lambda I)^{-1}$ es continua para la norma C^0 sobre $C^\beta(M)$ y la norma $C^{1,\beta}(M)$ sobre $C^{2,\beta}(M)$. Además $(L - \lambda I)^{-1}$ es fuertemente positivo, o sea

$$w \in C^\beta(M), w > 0, w \neq 0 \Rightarrow (L - \lambda I)^{-1} w > 0 \text{ en } M,$$

Por lo tanto este se extiende únicamente a una aplicación compacta, también notada $(L - \lambda I)^{-1}$ de $C(M)$ en $C(M)$ la cual es fuertemente positiva (ver [Am 1], [Am 2], [Au 1]). Para cada $w \in C(M)$, $(L - \lambda I)^{-1} w$ es una solución débil de $Lu - \lambda u = w$. El operador no lineal compacto preserva el orden

$$v \mapsto (L - \lambda I)^{-1}(|S||v|^\alpha): C(M)^+ \rightarrow C(M)^+$$

y deja invariante el intervalo de orden $[\underline{t} u_1, \bar{t} u_1] \subset C(M)$, entonces tiene un punto fijo $u \in C(M)$ con $0 < \underline{t} u_1 \leq u \leq \bar{t} u_1$, es decir

$$u = (L - \lambda I)^{-1}(|S||u|^\alpha)$$

entonces por un clásico argumento de bootstrap $u \in C^\infty(M)$, en particular u es una solución clásica positiva de (3.3) (ver [Am 2] en el caso Newmann para más detalles).

Finalmente la no linealidad $|S|t^\alpha$ en (3.3) es tal que $\frac{t^\alpha}{t}$ es

estrictamente decreciente en $t > 0$, entonces u es única ([Li], [Bere]). Como $f = u^{\frac{2}{n+1}}$ obtenemos la unicidad.

La situación es más complicada cuando $S > 0$.

Teorema 3.4: Sea $M = (M^m, g)$ compacta conexa. Supongamos $N = (N^n, h)$ de curvatura escalar constante positiva $S > 0$ y supongamos $n \geq 3$. Sea λ_1 el autovalor principal de $-\frac{4n}{n+1} \Delta_g + R$. Entonces para cada λ en algún intervalo $(\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$ existe un peso $f = f(\lambda)$ tal que $M \times_f N$ tiene curvatura escalar λ . Ninguna constante $\leq \lambda_1$ puede ser curvatura escalar de $M \times_f N$ para ningún f .

Demostración: Si $u > 0$ sobre M es una solución de (3.3) con $S > 0$, por (3.4) $\lambda > \lambda_1$ es una condición necesaria.

Denotamos $u = \max_M |u|$, $v = \frac{u}{\|u\|^2}$ para $u \neq 0$, o sea $u = \frac{v}{\|v\|^2}$.

Obtendremos soluciones como una bifurcación del infinito cerca de $\lambda = \lambda_1$ (ver [Ra 2]). Multiplicando nuestra ecuación (3.3) por $1/\|u\|^2$, reemplazando por v , hemos reducido a buscar soluciones positivas de

$$(3.5) \quad L v + a v = \lambda v - S \|v\|^{2(1-\alpha)} v^\alpha + a v$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro y $a \in \mathbb{R}^+$ es un número fijo que elegimos suficientemente grande para que el operador $L + aI : C^{2,\beta}(M) \rightarrow C^\beta(M)$ sea un isomorfismo con inversa positiva. Entonces como en la demostración precedente, $(L + aI)^{-1} : C(M) \rightarrow C(M)$

es un operador lineal compacto fuertemente positivo tal que $(L + aI)^{-1} v > 0$ sobre M si $v \geq 0$, $v \neq 0$ sobre M .

Ahora buscamos $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times C(M)$ con $v > 0$ sobre M , soluciones de

$$(3.6) \quad v = \mu(L + aI)^{-1} v - S(L + aI)^{-1} f(v)$$

donde $\mu = \lambda + a$, $S > 0$, $f(v) = \|v\|^{2(1-\alpha)} |v|^\alpha$. Vemos fácilmente que $S(L + aI)^{-1} f(v) = o(\|v\|)$ en $C(M)$ para $\|v\|$ cerca de 0. Además de $Lu_1 = \lambda_1 u_1$, se sigue que $\mu_1 = \lambda_1 + a$ es un valor característico simple de la aplicación compacta $(L + aI)^{-1}$. Entonces por el teorema de bifurcación de Rabinowitz [Ra 1], existe un subconjunto conexo cerrado maximal C_{μ_1} de

$$S = \text{adh}_{\mathbb{R} \times C(M)} \{(\lambda, v) \text{ soluciones de (3.6) con } v \neq 0\}$$

tal que $(\mu_1, 0) \in C_{\mu_1}$ y, o bien

(i) C_{μ_1} es no acotado en $\mathbb{R} \times C(M)$

o

(ii) C_{μ_1} se conecta con $(\hat{\mu}, 0)$ donde $\mu_1 \neq \hat{\mu} \in \{\lambda + a : \lambda \text{ autovalor de } L\}$.

Escribimos $v = \gamma u_1 + w$, con $\gamma = v(x_0)$, donde $u_1(x_0) = \|u_1\|$ y $w(x_0) = 0$. Para $\xi > 0$, $0 < \eta < 1$, los conjuntos abiertos en $\mathbb{R} \times C(M)$: $K_{\xi, \eta}^+$, $K_{\xi, \eta}^-$ definidos por

$$(3.7) \quad K_{\xi, \eta}^\pm = \{(\mu, v) \in \mathbb{R} \times C(M) : |\mu - \mu_1| < \xi, \pm \gamma < \eta \|v\|\}$$

satisfacen ambos $K_{\xi, \eta}^\pm \cap C_{\mu_1} \neq \emptyset$ para ξ suficientemente peque-

ño como en el Teorema 1.25 en [Ra 1].

Consecuentemente el subconjunto conexo maximal (o continuo) de C_{μ_1} contenido en $\{(\mu, \gamma u_1 + w) : \gamma > 0\} \cup \{(\mu_1, 0)\}$ es no trivial, denotamos a éste como $C_{\mu_1}^+$. Como $S(L + aI)^{-1} f(v) = o(\|v\|)$ deducimos que $\|w\| = o(\gamma)$ cerca de $\gamma = 0$, entonces $v = \gamma u_1 + w \in C_{\mu_1}^+$ es (estrictamente) positiva sobre M para $\gamma > 0$ suficientemente pequeño.

Entonces hemos obtenido una "rama" de $C(M)$ - soluciones (μ, v) , $v > 0$ sobre M de (3.6). Volviendo a $u = \frac{v}{\|v\|^2}$, $\lambda = \mu - a$ tenemos $C(M)$ - soluciones débiles de (3.3): (λ, u) para λ cerca de λ_1 , $u > 0$ sobre M , $\{\|u\|\}$ no acotada.

Por un argumento de regularidad, cada u es una solución clásica C^∞ y por la condición necesaria $\lambda > \lambda_1$.

Observación 1: La no linealidad

$$v \mapsto (L + aI)^{-1} f(v) = \|v\|^{2(1-\alpha)} (L + aI)^{-1} (|v|^\alpha)$$

no es diferenciable para $\|v\|$ cerca de 0, entonces no pueden aplicarse directamente los resultados de [Ra-1,2].

Observación 2: El operador

$$F(\mu, v) = (L + aI)^{-1} (\mu v - S f(v)) \quad S > 0$$

generalmente transforma una v positiva en una no positiva $F(\mu, v)$, entonces algunos resultados conocidos para aplicaciones de conos en conos ([Li], [Tu]) no se pueden aplicar. Más precisamente,

cuando $n = 3$, (3.3) puede ser escrito como:

$$(3.8) \quad (-3 \Delta_g + RI - \lambda I)u = -S$$

y el teorema 3.3 es una consecuencia del principio del antimáximo (ver [C-P]) el cual dice que $\lambda > \lambda_1$ pero cerca de λ_1 implica que el dato negativo $-S$ sobre M origina una solución positiva u , o sea lo contrario del principio del máximo.

Denotemos

$$C_\infty = \left\{ (\lambda, u) : u \geq 0, u \neq 0, \left(\lambda + a, \frac{u}{\|u\|^2} \right) \in C_{\mu_1}^+ \right\} \subset \\ \subset \mathbb{R} \times C(M)^+$$

las $C(M)$ - soluciones débiles no negativas que bifurcan del infinito. Sabemos ahora que $S > 0$ fijo implica que $u > 0$ para $\lambda > \lambda_1$ cerca de λ_1 . Podemos decir más sobre $\|u\|$ en C_∞ .

Teorema 3.5: Sean M, N y λ_1 como en el teorema 3.4. Para todo $0 < \varepsilon < A$, el conjunto $\{(\lambda, u) \in C_\infty : \lambda_1 + \varepsilon \leq \lambda \leq \lambda_1 + A\}$ es acotado en $\mathbb{R} \times C(M)$.

Demostración: Supongamos que no. Entonces existe una sucesión

$(\lambda_n, u_n) \in C_\infty$ con $\lambda_n \in [\lambda_1 + \varepsilon, \lambda_1 + A]$, $u_n \geq 0$ sobre M , $u_n \neq 0$, $\lim_n \lambda_n = \lambda$ y $\lim_n \|u_n\| = +\infty$, la cual satisface

$$\frac{u_n}{\|u_n\|} = (\lambda_n + a)(L + aI)^{-1} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|} \right) - S(L + aI)^{-1} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|} \right).$$

Siendo $(L + aI)^{-1}: C(M) \rightarrow C(M)$ compacto, podemos suponer, pasan

do a una subsucesión, que $\lim_n (L + aI)^{-1} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|} \right) = \tilde{u}$ en $C(M)$.

Como $\lim_n \frac{u_n^a}{\|u_n\|} = 0$ en $C(M)$, obtenemos que $\frac{u_n}{\|u_n\|}$ tiende a algún

u en $C(M)$, $u \geq 0$, $\|u\| = 1$, entonces

$$u = (\lambda + a)(L + aI)^{-1} u$$

es decir, por propiedades de regularidad, $-4 \frac{n}{n+1} \Delta u + Ru = \lambda u$, $u \geq 0$, $u \neq 0$, entonces $u = u_1$ y $\lambda = \lambda_1$ por unicidad. Esto contradice que $\lambda > \lambda_1 + \epsilon$.

Observación: Si el conjunto C_∞ se conecta con $(\hat{\mu}, 0) \in \mathbb{R} \times C(M)$, $C_{\mu_1}^+$ también, y entonces $\hat{\mu} \neq \mu_1$ y $\hat{\mu}$ es necesariamente un valor característico de $(L + aI)^{-1}$ (ver [Ra-1]) de donde $\hat{\mu} = \hat{\lambda} + a$, $\hat{\lambda} > \lambda_1$, $\hat{\lambda}$ un valor propio de $-4 \frac{n}{n+1} \Delta + R$. Tendríamos entonces una sucesión $(\mu_k, v_k) \in C_{\mu_1}^+$ tal que $\lim_n \mu_k = \hat{\mu}$, $\lim_k v_k =$

$\lim_k \frac{u_k}{\|u_k\|^2} = 0$ en $C(M)$, $v_k \neq 0$, es decir $(\lambda_k, u_k) \in C_\infty$ con

$\lambda_k = \mu_k - a \geq \lambda_1 + \epsilon$, $\{\lambda_k\}$ acotada y $\lim_k \|u_k\| = +\infty$, contradiciendo el teorema 3.5. Entonces C_∞ nunca se conecta con algún $(\lambda, 0)$.

Para $n = 3$, $S > 0$ hemos caracterizado el caso en el cual es válido que para todo $\lambda > \lambda_1$ existe un $u(\lambda) > 0$ sobre M con $(\lambda, u(\lambda)) \in C_\infty$.

Teorema 3.6: Sean M, N y λ_1 como en el teorema 3.3 con $\dim N = 3$. Entonces toda constante $\lambda \in (\lambda_1, \infty)$ es curvatura es-

calar de $M \times_f N$ para algún peso f si y sólo si la curvatura escalar R sobre M es constante.

Demostración: Si R es constante y $\lambda > \lambda_1$, $u(\lambda) = \frac{S}{\lambda - \lambda_1}$ es una solución de (3.8), entonces $f = u^{\frac{1}{2}}$ es un peso constante el cual da λ como curvatura escalar de $M \times_f N$.

Recíprocamente, supongamos que para cada $\lambda > \lambda_1$ corresponde un peso f , es decir una solución u de (3.8). Esto significa para $\lambda = \lambda_k$ ($k > 1$) un autovalor del operador autoadjunto $-3 \Delta_g + R$, que el segundo miembro en la igualdad (3.8) es ortogonal al correspondiente autoespacio. Entonces S es ortogonal a todas las autofunciones excepto la principal u_1 , entonces $S = t u_1$ con $t > 0$ por la completitud del sistema ortonormal de autofunciones, es decir u_1 es constante y (3.8) con $u = u_1$ da R constante.

Ejiri prueba en [Ej 2] que existen numerables inmersiones de $S^1 \times S^n$ en S^{n+2} tales que $S^1 \times S^n$ es un producto alabeado de curvatura escalar $n(n+1)$ con respecto a la métrica inducida. Por un lado, si consideramos la relación (\tilde{R}_1) en $S^1 \times S^n$, tenemos $R = 0$ sobre S^1 y $S = n(n-1)$ sobre S^n con la métrica usual. Entonces [Ej 2] de numerables soluciones positivas de

$$(3.9) \quad -4 \frac{n}{n+1} u'' + S u^{\frac{n-3}{n+1}} = n(n+1) u .$$

En particular para $n = 3$, esta ecuación se transforma en

$$(3.10) \quad -3 u'' - 12 u = -S$$

con $S = 6$.

Por otro lado, la ecuación (3.8) se reduce sobre $S^1 \times S^3$ a

$$(3.11) \quad -3 u'' - \lambda u = -S$$

Esta última ecuación tiene una única solución $u = u(\lambda)$ para $\lambda > \lambda_1$, cuando λ no es valor propio. Pero $\lambda = 12$ es un valor propio de -3Δ sobre S^1 , en efecto los valores propios de $-\Delta$ sobre S^1 con $\lambda_k = (k-1)^2$ con $k = 1, 2, \dots$, o sea que las numerables soluciones de (3.10) dadas en [Ej 2] aparecen para $\lambda = \lambda_3$. Pero entonces tenemos no numerables soluciones positivas de (3.11) para $\lambda = \lambda_k$, $k > 1$, ellas son

$$(3.12) \quad v = \frac{S}{\lambda_k} + t u_k$$

donde $-3 u_k'' = \lambda_k u_k$ y $|t|$ suficientemente pequeño para que v sea positiva. Hemos probado:

Teorema 3.7: Sean M, N y λ_1 como en el teorema 3.4 con $\dim M = 1$ y $\dim N = 3$. Dado un valor propio λ_k , $k > 1$, de $-3 \Delta_g$ existen no numerables pesos f tales que $M \times_f N$ tiene λ_k como curvatura escalar.

Observación: Las $u = f^2$ de este teorema son bifurcaciones secundarias de la rama $\left\{ \frac{S}{\lambda} \right\}$ de soluciones consideradas anteriormente, en los puntos $\lambda = \lambda_k$. En el caso $M = S^1$ y $N = S^n$ con $n > 3$,

la curvatura de $S^1 \times_f S^n$ dada en [Ej 2] es $n(n+1)$ con $u = \frac{n+1}{f^2}$ una solución de (3.9). Esta constante $n(n+1)$ está lejos de las curvaturas escalares obtenidas en el teorema 3.4, las cuales son cercanas a 0, es decir nuestras soluciones de (\tilde{R}_1) y las dadas en [Ej 2] sobre $S^1 \times S^n$ son de distinto tipo.

Con el mismo razonamiento aplicado para llegar al teorema 3.7 podemos probar:

Teorema 3.7': Sean M, N y λ_1 como en el teorema 3.4 con $\dim N = 3$ y R la curvatura escalar de M constante. Dado un valor propio λ_k , $k > 1$, de $-3\Delta_g + R$ existen no numerables pesos f tales que $M \times_f N$ tiene λ_k como curvatura escalar. En la demostración de este teorema usamos que R es constante, pues en tal caso $\lambda_1 = R$.

Observación: Cuando $\dim N = 2$ y $S \neq 0$ la ecuación (3.3) es:

$$-\frac{8}{3}\Delta_g u + Ru - \lambda u = -Su^{-\frac{1}{3}}$$

y nuevamente buscamos soluciones positivas.

En el caso $S < 0$, el teorema 3.3 seguirá siendo válido utilizando técnicas inspiradas en el trabajo [C-R-T].

CAPITULO 4: ¿QUE FUNCIONES PUEDEN SER CURVATURA ESCALAR DE UN PRODUCTO ALABEADO?

A. *Funciones pertenecientes a $C^\infty(M \times N)$.*

Nos ocuparemos ahora de analizar qué funciones pueden ser curvatura escalar de un producto alabeado de dos variedades de Riemann (M^m, g) y (N^n, h) .

Basándonos en la relación diferencial (\tilde{R}_1) , el problema que nos ocupa se plantea como sigue:

Dada $\tilde{R} \in C^\infty(M \times N)$, ¿existe un peso $f = u^{\frac{2}{n+1}}$, $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ tal que u verifique

$$(4.1) \quad 4 \frac{n}{n+1} \Delta_g u + R u + S u^{\frac{n-3}{n+1}} = \tilde{R} u \quad (M)$$

o equivalentemente

$$(4.2) \quad u^{-1} L u + S u^{-\frac{4}{n+1}} = R \quad (M) \quad ?$$

De (4.2) vemos que si $\tilde{R} \in C^\infty(M \times N)$ es la curvatura escalar de un producto alabeado $M \times_f N$ necesariamente $\tilde{R} \in C^\infty(M) + S \cdot C_{>0}^\infty(M)$ donde recordemos que $S \in C^\infty(N)$ es la curvatura escalar de N .

Nuestro problema se transforma entonces en buscar soluciones $u \in C_{>0}^\infty(M)$ de (4.2) bajo la hipótesis $\tilde{R} \in C^\infty(M) + S \cdot C_{>0}^\infty(M)$.

Por otra parte, si S no es constante, o sea si existen y e $y' \in N$ tales que $S(y) \neq S(y')$, la descomposición de una función $\tilde{R} \in C^\infty(M) + S \cdot C_{>0}^\infty(M)$ es única, o sea $\varphi + S \cdot \psi = \bar{\varphi} + S \cdot \bar{\psi}$ con $\varphi, \bar{\varphi} \in C^\infty(M)$, $\psi, \bar{\psi} \in C_{>0}^\infty(M)$ implica $\varphi = \bar{\varphi}$ y $\psi = \bar{\psi}$.

Entonces tomando $\tilde{R} = \varphi + S.\psi$, $\varphi \in C^\infty(M)$, $\psi \in C_{>0}^\infty(M)$, resulta que bajo la hipótesis S no constante, (4.2) es equivalente al sistema

$$(4.3_1) \quad u^{-1} L u = \varphi \quad \text{sii} \quad L u = \varphi u$$

$$(4.3_2) \quad u^{-\frac{4}{n+1}} = \psi \quad \text{sii} \quad u = \psi^{-\frac{n+1}{4}}$$

Tenemos entonces el siguiente:

Teorema 4.1: Sean M, N variedades de Riemann, con S curvatura escalar de N no constante. Para que $\tilde{R} \in C^\infty(M \times N)$ sea curvatura escalar de un producto alabeado, es necesario que \tilde{R} se pueda descomponer en la forma $\tilde{R} = \varphi + S.\psi$ con $\varphi \in C^\infty(M)$ y $\psi \in C_{>0}^\infty(M)$. Además una tal \tilde{R} es curvatura escalar de un p.á. si y sólo si φ y ψ verifican

$$(4.4) \quad L \psi^{-\frac{n+1}{4}} = \varphi \psi^{-\frac{n+1}{4}} \quad (M)$$

De (4.3₁) o (4.4) obtenemos que dada $\varphi \in C^\infty(M)$ existe $\psi \in C_{>0}^\infty(M)$ tal que $\varphi + S.\psi$ es la curvatura escalar de un producto alabeado (de peso $f = \psi^{-1/2}$) si y sólo si el autovalor principal del problema con peso

$$(4.5) \quad L v = \lambda \varphi v \quad (M)$$

es 1. En tal caso ψ es única.

B. *Funciones pertenecientes a $C^\infty(M)$*

En el caso S constante, $\tilde{R} \in C^\infty(M)$ es condición necesaria para

la existencia de solución de (4.2) o equivalentemente de (4.1). Por lo tanto esto nos lleva nuevamente a estudiar un problema en M separando en los casos $S = 0$, $S < 0$ y $S > 0$ como en el capítulo anterior.

Consideremos para cada $R \in C^\infty(M)$ el operador:

$$L_{\tilde{R}} := -4 \frac{n}{n+1} \Delta_g + (R - \tilde{R})$$

y llamemos $\lambda_1(\tilde{R})$ al valor propio principal de $L_{\tilde{R}}$ y $u_1(\tilde{R})$ la correspondiente autofunción.

Con esta notación nuestro problema se traduce en: dada \tilde{R} buscar soluciones positivas u de

$$(4.6) \quad L_{\tilde{R}} u + S u^\alpha = 0 \quad (M)$$

donde $\alpha = \frac{n-3}{n+1}$.

Teorema 4.2: Bajo las hipótesis anteriores sobre M y N , siendo ahora $S = 0$, resulta que $\tilde{R} \in C^\infty(M)$ es curvatura escalar de un p.a. si y sólo si el valor propio principal del problema con peso

$$(4.7) \quad L v = \lambda \tilde{R} v \quad (M)$$

es 1. En tal caso u es única (comparar con (4.5)).

Teorema 4.3: Sea (M^m, g) una variedad compacta conexa. Supongamos (N^n, h) de curvatura escalar constante negativa S y supongamos $n \geq 3$. Si $\tilde{R} \in C^\infty(M)$ es tal que $\lambda_1(\tilde{R}) > 0$ existe un

Único peso f tal que $M \times_f N$ tiene curvatura escalar \tilde{R} . Ninguna $\tilde{R} \in C^\infty(M)$ tal que $\lambda_1(\tilde{R}) \leq 0$ puede ser curvatura escalar de $M \times_f N$ para algún peso f .

Demostración: Buscamos soluciones positivas de (4.6). Si u es una tal solución resulta que como $L_{\tilde{R}}$ es autoadjunto

$$(4.8) \quad \lambda_1(\tilde{R}) \int_M u u_1(\tilde{R}) \, dv + S \int_M u^\alpha u_1(\tilde{R}) \, dv = 0$$

de donde $\lambda_1(\tilde{R}) > 0$ es condición necesaria de la existencia de solución en el caso $S < 0$.

Consideremos entonces $\tilde{R} \in C^\infty(M)$ tal que $\lambda_1(\tilde{R}) > 0$.

Como $0 \leq \alpha < 1$, tenemos que

$$L_{\tilde{R}} \underline{t} u_1(\tilde{R}) \leq |S| \underline{t}^\alpha u_1(\tilde{R})^\alpha$$

para $\underline{t} > 0$ suficientemente pequeño, entonces $\underline{t} u_1(\tilde{R})$ es una subsolución de (4.6). También

$$L_{\tilde{R}} \bar{t} u_1(\tilde{R}) > |S| \bar{t}^\alpha u_1(\tilde{R})^\alpha$$

para $\bar{t} > 0$ suficientemente grande, entonces tenemos una supersolución $\bar{t} u_1(\tilde{R}) > \underline{t} u_1(\tilde{R})$.

El operador $L_{\tilde{R}} : C^{2,\beta}(M) \rightarrow C^\beta(M)$ es un isomorfismo y su inversa $L_{\tilde{R}}^{-1}$ es continua para la norma C^0 sobre $C^\beta(M)$ y la norma $C^{1,\beta}(M)$ sobre $C^{2,\beta}(M)$. Además, $L_{\tilde{R}}^{-1}$ es fuertemente positivo, o sea $w \in C^\beta(M)$, $w \geq 0$, $w \neq 0 \Rightarrow L_{\tilde{R}}^{-1}w > 0$ en M .

Por lo tanto este se extiende unívocamente a una aplicación compacta, también notada $L_{\tilde{R}}^{-1}$ de $C(M)$ en $C(M)$ la cual es fuer-

temente positiva (ver [Am 1], [Am 2]).

Para cada $w \in C(M)$, $L_{\tilde{R}}^{-1}w$ es una solución débil de $L_{\tilde{R}} u = w$.

El operador no lineal compacto preserva el orden

$$v \mapsto L_{\tilde{R}}^{-1}(|S| |v|^\alpha): C(M)^+ \rightarrow C(M)^+$$

y deja invariante el intervalo de orden $[\underline{t} u_1(\tilde{R}), \bar{t} u_1(\tilde{R})] \subset C(M)$ entonces tiene un punto fijo $u \in C(M)$ con $0 < \underline{t} u_1(\tilde{R}) \leq u \leq \bar{t} u_1(\tilde{R})$ es decir

$$u = L_{\tilde{R}}^{-1}(|S| |u|^\alpha)$$

entonces por un argumento de bootstrap $u \in C^\infty(M)$, en particular u es una solución clásica positiva de (4.6) (Ver [Am 2] en el caso Newmann para más detalles).

Finalmente la no linealidad $|S|t^\alpha$ en (4.6) es tal que $\frac{t^\alpha}{t}$ es estrictamente decreciente en $t > 0$, entonces u es única ([Li], [Bere]). Como $f = u^{\frac{2}{n+1}}$ obtenemos la unicidad.

Analícemos la situación en el caso $S > 0$.

A partir de (4.8) vemos que ninguna función $\tilde{R} \in C^\infty(M)$, tal que $\lambda_1(\tilde{R}) \geq 0$, puede ser curvatura escalar de $M \times_f N$ para algún peso f cuando $S > 0$.

Veamos entonces que ocurre cuando $S > 0$ y $\tilde{R} \in C^\infty(M)$ es tal que $\lambda_1(\tilde{R}) < 0$. Por argumentos similares a los usados en el teorema 3.4, podemos asegurar la existencia de soluciones positivas de

$$(4.9) \quad L_{\tilde{R}} u - \lambda u = -S u^\alpha$$

para $\lambda > \lambda_1(\tilde{R})$ pero cerca de $\lambda_1(\tilde{R})$. Entonces nuestro problema se transforma en detectar cuales son los $\tilde{R} \in C^\infty(M)$ tales que $\lambda_1(\tilde{R}) < 0$ y la rama que viene del ∞ que soluciona (4.9) llega hasta el 0, pues en tal caso $u_{\tilde{R}}(\lambda)$ con $\lambda = 0$ sería una de las soluciones buscadas.

Observación: Cuando $\tilde{R} = R$, existe solución de (4.6) solo cuando $S = 0$. Esto coincide con las consecuencias de ser $\lambda_1(R) = 0$.


Observación: Como $\lambda_1(\tilde{R}) = \inf_{H^1(M)} \frac{4 \frac{n}{n+1} \int_M |\nabla u|^2 dv + \int_M R u^2 dv - \int_M \tilde{R} u^2 dv}{\int_M u^2 dv}$

resulta $\lambda_1(\tilde{R}) \leq \lambda_1 - \frac{\int_M \tilde{R} u_1^2 dv}{\int_M u_1^2 dv}$, considerando u_1 en el cociente

de Rayleigh. Tenemos entonces que (suponemos $\int_M u_1^2 dv = 1$)

$$\lambda_1 \underset{(<)}{\leq} \int_M \tilde{R} u_1^2 dv \Rightarrow \lambda_1(\tilde{R}) \underset{(<)}{\leq} 0$$

Observación: Las relaciones que obtuvimos entre el signo de $\lambda_1(\tilde{R})$ y el signo de S , son compatibles con las relaciones obtenidas en el capítulo 3 entre el signo de $(\lambda_1 - \lambda)$ y el de S , pues $\lambda_1(\lambda) = \lambda_1 - \lambda$.



E. Lami Dozo



Fernando Ruben Dobos

REFERENCIAS

- [Am 1] H. Amann, On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces, *J. Funct. Anal.* 11(1972), 346-384.
- [Am 2] H. Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, *SIAM Rev.* 18(1976), 620-709.
- [Au 1] T. Aubin, Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampere equations, A Series on Comprehensive Studies in Mathematics 252, Springer, Berlín.
- [Ba] C. Bandle, Isoperimetric inequalities and applications, Pitman, 1980.
- [B-C] R.L. Bishop - R.J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Acad. Press, 1964.
- [Bera] P.H. Berard, Lectures on spectral geometry, 15° Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CNPq, Poços de Caldas, 1985.
- [Bere] H. Berestiki, Le nombre de solutions de certains problemes semi-linéaires elliptiques, *J. Funct. Anal.* 40(1981), 1-29.
- [B-G-M] M. Berger - P. Gauduchon - E. Mazet, Le spectre d'une variété Riemannienne, *Lecture Notes in Math.*, Vol.194, Springer, 1971.
- [B-O] R.L. Bishop - B. O'Neil, Manifolds of negative curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.* 145(1969), 1-49.
- [C-E] J. Cheeger - D. Ebin, Comparison theorems and its geometric applications, North-Holland, 1975.
- [Cha] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Acad. Press, 1984.

- [Che] J. Cheeger, On the spectral geometry of spaces with cone-like singularities, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 76(1979), 2103-2106.
- [Cho] A. W. Chou, The Dirac operator on spaces with conical singularities and positive scalar curvature, Trans. AMS 289, 1(1985).
- [C-P] Ph. Clément - L.A. Peletier, An anti-maximum principle for second-order elliptic operators, J. Differential Equations 34(1979), 218-229.
- [C-R-T] M.G. Crandall - P.H. Rabinowitz - L. Tartar, On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity, MRC Report 1680(1976).
- [D-LD] F. Dobarro - E. Lami Dozo, Trans. AMS 302, 1, July 1987 (aparecerá).
- [dC] M. do Carmo, Geometria Riemanniana - Escala de Geometria Diferencial, Universidade Federal do Ceará, Julho 1978.
- [Ej 1] N. Ejiri, A negative answer to a conjecture of conformal transformations of Riemann manifolds, J. Math. Soc. Japan 33(1981), 261-266.
- [Ej 2] N. Ejiri, Some compact hypersurfaces of constant scalar curvature in a sphere, J. Geom. 19(1982), 197-199.
- [G-T] D. Gilbard - N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1977.
- [Ka] J. L. Kazdan, Prescribing the curvature of a Riemannian manifold, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 57 AMS (1986).
- [Kl] W. Klingenberg, A course in Differential Geometry, Graduate Texts in Mathematics 51, Springer, Berlin.
- [Li] P.L. Lions, On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations, SIAM Rev. 24(1982), 441-467.

- [Ra 1] P.H. Rabinowitz, Some global results for nonlinear eigenvalue problems, J. Funct. Anal. 7(1971), 487-513.
- [Ra 2] P.H. Rabinowitz, On a bifurcation from infinity, J. Differential Equations 14(1973), 462-475.
- [Tu] E.E.L. Turner, Positive solutions of nonlinear eigenvalue problems, CIME Varenna, 1974, pp. 212-239.
- [Yau] S.T. Yau, Seminar on differential geometry, ed. S.T. Yau, Annals of Math. Studies n°102, Princeton Univ. Press, 1982.
- [Zu] S. Zucker, L_2 cohomology of warped products and arithmetic groups, Invent. Math. 70(1982), 169-218.