Generalización del cálculo holomorfo

Deferrari, Graciela Inés

1987

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

GENERALIZACION DEL CALCULO HOLOMORFO

Autor
Graciela Inés Deferrari

Director de tesis

Dr. Angel R. Larotonda

Lugar de trabajo

Departamento de Matemáticas
Universidad de Buenos Aires

Tesis para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

- 1987 -

mi querido abuel
Samue quién despertó en mí
amor por la Matemátic

AGRADECIMIENTOS

A mi marido y a mis hijos sin cuya ayuda y comprensión no me hubiera sido posible concluir este trabajo.

Al Dr. Angel Larotonda por su irremplazable colaboración.

A María Angélica Tancredi por su inmensa paciencia.

A mis amigos Patricia Fauring e Ignacio Zalduendo por su incondicional apoyo.

INDICE

Introducción

El objeto de este trabajo consiste esencialmente en plantear la problemática del cálculo holomorfo para álgebras de Banach conmutativas en términos de la teoría de haces analíticos.

En esta formulación resulta natural comparar las nociones de espectro simultáneo sp(a) y espectro analítico sp(a,1), este último considerado como el conjunto de inexactitud del complejo de Koszul asociado a la n-upla $(a_1,\ldots,a_n)$. Se da un ejemplo en C^2 en el cual ambas nociones difieren, conceptualmente mas sencillo que el ejemplo de Taylor en C^5.

Por otro lado se introduce el haz estructural $\mathcal{A}$ en C^n asociado a una n-upla $(a_1,\ldots,a_n) \in A^n$; este haz -analítico pero rara vez coherente- resume en sí toda la información sobre la n-upla en cuestión, y brinda un marco adecuado al estudio de la denominada "propiedad de extensión única" y presumiblemente al estudio de las familias descomponibles de operadores.

CAPITULO I

Introducción

En este capítulo introducimos en primer término la noción de "propiedad de extensión única" ("p.e.u.") de una n-upla $a = (a,\dots,a_n)$ de elementos de un álgebra de Fréchet. La teoría de ε-producto y de nuclearidad nos permitirá tener una extensión del teorema B que nos dará definiciones equivalentes de la "p.e.u.".

En segundo lugar introducimos la noción de espectro de un elemento x del álgebra "respecto" de la n-upla $a = (a_1,\dots,a_n)$ y probamos algunas propiedades interesantes de este conjunto.

1. <u>ε-producto</u>

Sea E un espacio topológico localmente convexo, E'_c el dual de E con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de E.

<u>Definición I.1.1.</u> Sean E,F espacios localmente convexos, llamamos ε-producto de F y E al espacio $F \epsilon E = L(E'_c,F) = \{f:E'_c \to F$ lineales y continuas$\}$.

<u>Observación I.1.2.</u> Si $i:E \to (E'_c)'_c$ indica la aplicación $i(x)(\varphi) = \varphi(x)$ y $f^*:F'_c \to (E'_c)'$ es la aplicación $f^*(\varphi) = f\circ\varphi$ para $f \in L(E'_c,F)$, entonces el teorema de Mackey (ver [1]) asegura que i es un isomorfismo, con lo cual el morfismo $h:L(E'_c,F) \to L(F'_c,E)$ definido por $h(f) = i^{-1}\circ f^*$ es un isomorfismo. Resulta así $E \epsilon F \cong F \epsilon E$ canónicamente.

<u>Lema I.1.3.</u> Sean E un espacio de Frechet y U un abierto de C^n. Si para $f \in C(U,E)$ definimos $\theta(f):E' \to C(U)$ como $\theta(f)(\varphi) = \varphi\circ f$ entonces

a. $\theta(f) \in C(U) \epsilon E$

b. $\theta:C(U,E) \to C(U) \epsilon E$ es un isomorfismo.

<u>Demostración</u>

a. En primer lugar, es inmediato que $\theta(f)$ es lineal. Veamos entonces que $\theta(f)$ es continua. Sea $K \subset U$ compacto; si $K_1 = f(K)$ (compacto en E), resulta que $\sup_{z\in K}|\theta(f)(\varphi)(z)| = \sup_{z\in K}|\varphi\circ f(z)| = \sup_{x\in K_1}|\varphi(x)|$.

b. La inyectividad de θ no presenta problema alguno. Analicemos entonces la suryectividad. Sea $F:E'_c \to C(U)$ lineal y continua. Resulta entonces que las aplicaciones $F^*:C(U)'_c \to (E'_c)'$, $i^{-1}:(E'_c)' \to E$ y $\delta:U \to C(U)'_c$, esta última definida por

$\delta(z)(g) = g(z)$, son continuas. Si definimos $f: U \to E$ como $f = i^{-1} \circ F^* \circ \delta$, tenemos que $f \in C(U,E)$ y $\theta(f) = F$. En efecto, dada $\varphi \in E'$, $\theta(f)(\varphi)(z) = \varphi \circ f(z) = \varphi(f(z)) = \varphi(i^{-1} \circ F^* \circ \delta(z)) =$ $= \varphi(i^{-1}(F^* \circ \delta(z))) = (F^* \circ \delta)(z)(\varphi) = F^*(\delta(z))(\varphi) = \delta(z)(F)(\varphi) =$ $= \delta(z)(F(\varphi)) = F(\varphi)(z)$.

Lema I.1.4. Sea $f \in C^\infty(U,E)$ y sea $\theta(f)(\varphi) = \varphi \circ f \in C^\infty(U)$. Si consideramos en $C^\infty(U)$ la topología de la convergencia uniforme de la función y sus derivadas sobre compactos de U, entonces tenemos:

a. $\theta(f) \in C^\infty(U) \in E$

b. $\theta: C^\infty(U,E) \to C^\infty(U) \in E$ es un isomorfismo.

Demostración

a. La linealidad de $\theta(f)$ es inmediata. Veamos entonces la continuidad: si $K \subset U$ es un compacto resulta que

$$\sup_{z \in K} |D^\alpha(\theta(f)(\varphi))(z)| = \sup_{z \in K} |D^\alpha(\varphi \circ f)(z)| =$$
$$= \sup_{z \in K} |\varphi(D^\alpha f(z))| \leq \sup_{x \in K_\alpha} |\varphi(x)|, \text{ donde } K_\alpha = \{D^\alpha f(z),\ z \in K\}$$

(compacto de E).

b. La inyectividad se demuestra trivialmente. Estudiemos entonces la suryectividad. Sea $F: E'_c \to C^\infty(U)$ lineal y continua, si $j: C^\infty(U) \to C(U)$ es la inclusión entonces $j \circ F \in L(E'_c, C(U))$ y el lema 1.3 asegura que existe $f \in C(U,E)$ tal que $F(\varphi) = \varphi \circ f$ para toda $\varphi \in E'$. Veamos que $f \in C^\infty(U,E)$.

Pensando a U como abierto de R^{2n} ($z \in U$, $z = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$), sea $D_i: C^\infty(U) \to C(U)$ definida como $D_i(g) = \frac{\partial g}{\partial x_i}$; entonces $D_i \circ F \in L(E'_c, C(U))$ y por lo tanto existe $f_i \in C(U,E)$ tal que $D_i \circ F(\varphi) = \varphi \circ f_i$ para toda $\varphi \in E'$. Veamos que $f \in C^1(U,E)$ y $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i$.

- Sean $z_0 \in U$, $r > 0$ tal que $\overline{B(z_0,r)} \subset U$, $e_i = (0 \ldots \overset{i}{\widehat{1}}, \ldots 0) \in R^{2n}$, entonces

$$|\varphi(\frac{f(z_0+h\, e_i)-f(z_0)}{h} - f_i(z_0))| = |\frac{F(\varphi)(z_0+h\, e_i)-F(\varphi)(z_0)}{h} - D_i(F(\varphi))(z_0)| =$$

$$= |D_i(F(\varphi))(z_0+\theta_h\, e_i) - D_i(F(\varphi))(z_0)| = |\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F(\varphi)(z_0+\theta'_h\, e_i)\theta_h|$$

con $\theta_h, \theta'_h \in R$, $|\theta'_h| \leq |\theta_h| \leq |h| \leq r$. Por lo tanto tenemos que

$$|\varphi(\frac{f(z_0+h\, e_i)-f(z_0)}{h} - f_i(z_0))| \leq |h| . \sup_{|z-z_0|\leq r} |\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F(\varphi)(z)|$$

para todo h tal que $|h| \leq r$ y para toda $\varphi \in E'$.

- La continuidad de F asegura la existencia de $K \subset E$ compacto tal que $\sup\limits_{\substack{|z-z_0|\leq r \\ |\alpha|\leq 2}} |D^\alpha(F(\varphi))(z)| \leq \sup\limits_{x\in K} |\varphi(x)|$ y así si p es una semi norma de E, existe $M > 0$ tal que $K \subset \{x \in E / p(x) \leq M\}$. Tenemos entonces que si $\|\varphi\|_p = \sup\{|\varphi(x)|,\ p(x) \leq 1\}$

$$p(\frac{f(z_0+h\, e_i)-f(z_0)}{h} - f_i(z_0)) = \sup_{\substack{\varphi\in E' \\ \|\varphi\|_p\leq 1}} |\varphi(\frac{f(z_0+h\, e_i)-f(z_0)}{h} - f_i(z_0))| \leq$$

$$|h| . \sup_{\substack{\varphi\in E' \\ \|\varphi\|_p\leq 1}} \sup_{\substack{|z-z_0|\leq r \\ |\alpha|\leq 2}} |D^\alpha(F(\varphi))(z)| \leq |h| . \sup_{\substack{\varphi\in E' \\ \|\varphi\|_p\leq 1}} \sup_{x\in K} |\varphi(x)| \leq M|h|,$$

con lo cual $\lim\limits_{|h|\to 0} \dfrac{f(z_0+h\, e_i)-f(z_0)}{h} = f_i(z_0)$.

Inductivamente se prueba entonces que $f \in C^\infty(U,E)$ quedando así demostrado el lema.

Corolario I.1.5. $\theta(\mathcal{O}(U,E)) = \mathcal{O}(U) \epsilon E$

Demostración

Sea $f \in \mathcal{O}(U,E)$, entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0$ para todo $i = 1,\ldots n$, con lo cual para toda $\varphi \in E'$, tenemos $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}(\theta(f)(\varphi)) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}(\varphi \circ f) = \varphi \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} f = 0$, lo que demuestra que $\theta(f) \in \mathcal{O}(U) \epsilon E$.

Sea ahora $F \in \mathcal{O}(U) \epsilon E$; el lema I.1.4 asegura que existe $f \in C^\infty(U,E)$ tal que para toda $\varphi \in E'$, $\theta(f)(\varphi) = F(\varphi)$ y así $0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}(F(\varphi)) = \varphi(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} f)$; de donde $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} f = 0$ y por lo tanto $f \in \mathcal{O}(U,E)$.

Definiremos ahora el ε producto de un haz de espacios de Frêchet y un espacio de Frêchet.

Definición I.1.6. Sea E un espacio de Frêchet y $\mathcal{S}$ un haz sobre un espacio X, $\mathcal{S} \epsilon E$ será el haz definido por el prehaz $\{\mathcal{S}(U) \epsilon E, U$ abierto de $X\}$.

Observación I.1.7. $\mathcal{S} \epsilon E(U) = \mathcal{S}(U) \epsilon E$.

2. Nuclearidad

Si E_1, E_2, F son espacios localemnte convexos toda $h \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$ induce canónicamente una aplicación $\bar{h}: E_1 \epsilon F \to E_2 \epsilon F$ definida como $\bar{h}(f) = h \circ f$ para $f \in \mathcal{L}(F'_c, E_1)$. Lo mismo ocurre si $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ son haces sobre un espacio X, F es un espacio localmente convexo y $h: \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ es un morfismo de haces. Estudiaremos en este párrafo, bajo qué condiciones la exactitud de $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$, $0 \to \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_3 \to 0$ induce exactitud en

$0 \to E_1 \in F \to E_2 \in F \to E_3 \in F \to 0$ y $0 \to S_1 \in F \to S_2 \in F \to S_3 \in F \to 0$ respectivamente.

Definición I.2.1. Un espacio localmente convexo E se dice nuclear sii existe una base de entornos del $0, (U_i)_{i\in I}$ tal que para todo $i \in I$, existe $j \in I$ y una sucesión $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de elementos de E' tales que:

a. si $\|\varphi_n\|_i = \sup\limits_{x\in U_i} |\varphi_n(x)|$ entonces $\sum\limits_n \|\varphi_n\|_i < \infty$

b. $P_{U_i}(x) = \inf\{\lambda > 0/\frac{1}{\lambda}\, x \in U_i\} \leq \sum\limits_n |\varphi_n(x)|$ para todo $x \in E$

Teorema I.2.2. Sea E un espacio localmente convexo. Entonces E es nuclear sii existe una base de entornos del $0, (U_i)_{i\in I}$ tal que

a. para toda $i \in I$, si $E'(U_i^0) = \{\varphi \in E'/\|\varphi\|_i < \infty\} = \{\varphi \in E'/ \varphi \in \lambda\, U_i^0$ para algún $\lambda\}$ resulta: $(E'(U_i^0), \|\ \|_i)$ es un espacio de Hilbert.

b. para todo $i \in I$, existe $j \in I$ tal que $U_j \subset U_i$ y la aplicación inclusión $\alpha: E'(U_i^0) \to E'(U_j^0)$ satisface que existen $(e_s)_{s\in S}$, $(w_t)_{t\in T}$ bases ortonormales de $E'(U_i^0)$ y $E'(U_j^0)$ respectivamente con $\sum |\langle \alpha(e_s), w_t\rangle|^2 < \infty$.

Demostración

(ver [2] capítulo 4)

Proposición I.2.3. Si E es un espacio localmente convexo nuclear entonces

i. todo subespacio de E es nuclear

ii. si F es un subespacio cerrado de E, E/F es nuclear.

Demostración

(ver [2] capítulo 5)

Proposición I.2.4. Si $(E_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios localmente convexos nucleares, entonces $\prod_{i\in I} E_i$ es nuclear.

Demostración

(ver [2] capítulo 5)

Teorema I.2.5. Si U es un abierto de R^n entonces $C^\infty(U)$ es nuclear.

Demostración

(ver [2] capítulo 6)

Teorema I.2.6. Si U es un polidisco de C^n, entonces $\mathcal{O}(U)$ es nuclear.

Demostración

(ver [3] pág 322)

Definición I.2.7. Sea $\mathcal{S}$ un haz de espacios localmente convexos sobre un espacio topológico X. Decimos que $\mathcal{S}$ es nuclear si existe una base de abiertos de X, $(U_i)_{i\in I}$ tal que $\mathcal{S}(U_i)$ es nuclear para todo $i \in I$.

Teorema I.2.8. Sean U un abierto de C^n y $\mathcal{S}$ un haz analítico coherente sobre U, entonces $\mathcal{S}$ es nuclear.

Demostración

Sea $V \subset U$ un polidisco; el Teorema A [5] asegura que existe $q \in N$ y $\alpha:\mathcal{O}^q/_V \to \mathcal{S}/_V$ una aplicación suryectiva de $\mathcal{O}(V)$-módulos. Así, se tiene la sucesión exacta de haces coherentes $0 \to \mathrm{Ker}\,\alpha \to \mathcal{O}^p/_V \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S}/_V \to 0$, que induce la sucesión exacta: $0 \to H^0(V, \mathrm{Ker}\,\alpha) \to \mathcal{O}(V)^p \to \mathcal{S}(V) \to 0$. Luego $\mathcal{S}(V) \cong \mathcal{O}(V)^p/_{H^0(V,\ \mathrm{Ker}\,\alpha)}$. Teniendo en cuenta entonces las proposiciones I.2.3, I.2.4 y el teorema I.2.6, $\mathcal{S}(V)$ resulta nuclear lo que demuestra el teorema.

Teorema I.2.9. Sean E_1, E_2, F espacios localmente convexos, $f \in L(E_1, E_2)$ suryectiva. Entonces si F ó E_2 son nucleares la aplicación $\bar{f}: E_1 \epsilon F \to E_2 \epsilon F$ inducida por f (esto es: $\bar{f}(G)(\varphi) = f \circ G(\varphi)$ para $G \in L(F', E_1)$, $\varphi \in F'$) resulta también suryectiva.

Demostración

(ver [3] pág. 323)

Corolario I.2.10. Sean E_1, E_2, E_3, F espacios localmente convexos. Entonces si E_3 ó F son nucleares y $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ es una sucesión exacta, la sucesión inducida $0 \to E_1 \epsilon F \to E_2 \epsilon F \to$ $\to E_3 \epsilon F \to 0$ resulta exacta

Demostración

Es inmediata a partir del teorema I.2.9.

Corolario I.2.11. Si $0 \to S_1 \to S_2 \to S_3 \to 0$ es una sucesión exacta de haces analíticos coherentes sobre U un abierto de C^n y E es un espacio de Fréchet, entonces la sucesión inducida $0 \to S_1 \epsilon E \to S_2 \epsilon E \to S_3 \epsilon E \to 0$ resulta exacta.

Demostración

La sucesión exacta $0 \to S_1 \to S_2 \to S_3 \to 0$ induce una sucesión exacta larga $0 \to S_1(V) \to S_2(V) \to S_3(V) \to H'(V, S_1) \to \ldots$; la coherencia de los haces asegura que $0 \to S_1(V) \to S_2(V) \to S_3(V) \to 0$ es exacta para V polidisco. Por lo tanto para todo V polidisco la sucesión $0 \to S_1(V) \epsilon E \to S_2(V) \epsilon E \to S_3(V) \epsilon E \to 0$ resulta exacta lo cual demuestra el teorema.

Observación I.2.12. El corolario anterior es evidente cuando los haces S_i son localmente libres, por ([4]); sin embargo en el Teorema II.2.4. será necesario usar la conclusión con toda su generalidad.

3. Una extensión del Teorema B

Sea E un espacio de Fréchet, $s = (s_1,\dots,s_n)$ una n-upla de indeterminadas. Sea para $1 \leqslant p \leqslant n$

$$\Lambda^p(E,s) = \bigoplus_{1\leqslant i_1<\dots<i_p\leqslant n} E\, s_{i_1}\wedge\dots\wedge s_{i_p} \cong E^{\binom{n}{p}}, \text{ para } p = 0$$

$\Lambda^p(E,s) = E$, para $p > n$ $\Lambda^p(E,s) = 0$. Sea $\Lambda(E,s) = \bigoplus_{p\geqslant 0} \Lambda^p(E,s)$.

E induce en $\Lambda^p(E,s)$ y por ende en $\Lambda(E,s)$ una topología que los convierte en espacio de Fréchet. Notemos que $\Lambda^p(E,s) \simeq \Lambda^p(C^n) \otimes_C E$.

<u>Lema I.3.1.</u> Si E es un espacio de Fréchet, U es un abierto de C^n y $s = (s_1,\dots,s_n)$ una n-upla de indeterminadas entonces:

a. $\Lambda^p(C(U,E),s) \cong \Lambda^p(C(U),s)\ \epsilon\ E$

b. $\Lambda^p(C^\infty(U,E),s) \cong \Lambda^p(C^\infty(U),s)\ \epsilon\ E$

c. $\Lambda^p(\mathcal{O}(U,E),s) \cong \Lambda^p(\mathcal{O}(U),s)\ \epsilon\ E$ canónicamente

<u>Demostración</u>

Si $\theta_p : \Lambda^p(C(U,E),s) \to \Lambda^p(C(U),s)\ \epsilon\ E$ indica la aplicación $\theta_p(f\, s_{i_1}\wedge\dots\wedge s_{i_p})(\varphi) = \varphi\circ f\, s_{i_1}\wedge\dots\wedge s_{i_p}$ entonces, claramente θ_p es un isomorfismo, $\theta_p(\Lambda^p(C^\infty(U,E),s) = \Lambda^p((C^\infty(U),s)\ \epsilon\ E$ y $\theta_p(\Lambda^p(\mathcal{O}(U,E),s) = \Lambda^p(\mathcal{O}(U),s)\ \epsilon\ E$.

Sea E un espacio de Fréchet, $U \subseteq C^n$ abierto, $d\bar z = (d\bar z_1,\dots,d\bar z_n)$. Sea $\bar\partial : \Lambda^p(C^\infty(U,E),d\bar z) \to \Lambda^{p+1}(C^\infty(U,E),d\bar z)$ la aplicación $\bar\partial(f\, d\bar z_{i_1}\wedge\dots\wedge d\bar z_{i_p}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar z_j}\, d\bar z_j \wedge d\bar z_{i_1}\wedge\dots\wedge d\bar z_{i_p}$. Tenemos que $\bar\partial\circ\bar\partial = 0$ quedando así definido un complejo que notaremos $(\Lambda(C^\infty(U,E),d\bar z),\bar\partial)$.

<u>Teorema I.3.2.</u> Si E es un espacio de Fréchet, U un abierto de C^n holomorficamente convexo y $L(U,E)$ es el complejo $(\Lambda(C^\infty(U,E),d\bar z),\bar\partial)$ entonces $H^p(U,\mathcal{O}^E) \cong H^p(L(U,E)) = 0$ para todo $p \geqslant 1$

Demostración

Sea $L(U) = (L(U,C))$. Sabemos que $H^p(L,(U)) = 0$ para todo $p \geq 1$ ([5] capítulo 4), con lo cual tenemos la exactitud de la sucesión

$$0 \to \bar\partial(\Lambda^{p-1}(C^\infty(U),d\bar z)) \to \Lambda^p(C^\infty(U),d\bar z) \xrightarrow{\bar\partial} \bar\partial(\Lambda^p(C^\infty(U),d\bar z)) \to 0.$$

Además, el teorema I.2.5 y las proposiciones I.2.3 y I.2.4 nos permiten asegurar que $\bar\partial(\Lambda^p(C^\infty(U),d\bar z)$ es nuclear y así, gracias al corolario I.2.10 resulta la exactitud de la sucesión

$$0 \to \bar\partial(\Lambda^{p-1}(C^\infty(U),d\bar z)) \in E \to \Lambda^p(C^\infty(U),d\bar z) \in E \xrightarrow{\bar\partial_0} \bar\partial(\Lambda^p(C^\infty(U),d\bar z)) \in E \to 0$$

donde $\bar\partial_0$ es la aplicación: $\bar\partial_0(F)(\varphi) = \bar\partial(F(\varphi))$ para $\varphi \in E'_c$ y $F \in L(E'_c,\Lambda^p(C^\infty(U),d\bar z))$.

Si θ_p es la aplicación del lema anterior, entonces $\theta_p \circ \bar\partial = \bar\partial_0 \circ \theta_{p-1}$. En efecto: dada $f \in C^\infty(U,E)$,

$\theta_p \circ \bar\partial(f\, d\bar z_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar z_{i_{p-1}}) = \theta_p(\bar\partial f \wedge d\bar z_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar z_{i_{p-1}})$;

entonces si $\varphi \in E'_c$, $\theta_p \circ \bar\partial(f\, dz_{i_p} \wedge \ldots \wedge dz_{i_{p-1}})(\varphi) =$

$= \varphi \circ \bar\partial f \wedge d\bar z_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar z_{i_{p-1}} = \bar\partial(\varphi \circ f) \wedge d\bar z_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar z_{i_{p-1}} =$

$= \bar\partial(\theta_{p-1}(f\, d\bar z_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar z_{i_{p-1}})(\varphi)) = \bar\partial_0(\theta_{p-1}(f\, d\bar z_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar z_{i_{p-1}})(\varphi) =$

$= \bar\partial_0 \circ \theta_{p-1}(f\, d\bar z_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar z_{i_{p-1}})(\varphi)$

Luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \bar\partial(\Lambda^{p-1}(C^\infty(U),d\bar z)) \in E & \to & \Lambda^p(C^\infty(U),d\bar z) \in E & \xrightarrow{\bar\partial_0} & \bar\partial(\Lambda^p(C^\infty(U),d\bar z)) \in E & \to 0 \\
 & \uparrow\theta_p & & \uparrow\theta_p & & \uparrow\theta_{p+1} & \\
0 \to & \bar\partial(\Lambda^{p-1}(C^\infty(U,E),d\bar z) & \to & \Lambda^p(C^\infty(U,E),d\bar z) & \xrightarrow{\bar\partial} & \bar\partial(\Lambda^p(C^\infty(U,E),d\bar z) & \to 0,
\end{array}$$

de donde la última sucesión es exacta quedando así demostrado el teorema.

4. Comparación entre dos complejos

Sean A un álgebra de Fréchet, $a = (a_1,\ldots,a_n)$ una n-upla de elementos de A, U un abierto de C^n y $dz = (dz_1,\ldots,dz_n)$. Si c indica el elemento de $\Lambda^1(\mathcal{O}(U,A),dz)$, $c(z) = \sum_{i=1}^{n} (z_i-a_i)dz_i$, entonces para todo p, la aplicación $e_c:\Lambda^p(\mathcal{O}(U,A),dz) \to \Lambda^{p+1}(\mathcal{O}(U,A),dz)$ $e_c(w) = c \wedge w$ satisface $e_c\circ e_c = 0$, produciendo así el complejo $(\Lambda(\mathcal{O}(U,A),dz)e_c)$ que notaremos $\mathcal{R}(U,A)$.

Si $\Lambda^{p,q}(C^\infty(U,A)dz,d\bar{z})$ es el subespacio de $\Lambda(C^\infty(U,A),dz,d\bar{z})$ formado por las formas de grado p en dz y q en $d\bar{z}$, el elemento c también define una aplicación que seguiremos llamando e_c, del subespacio $\Lambda^{p,q}(C^\infty(U,A),dz,d\bar{z})$ en el subespacio $\Lambda^{p+1,q}(C^\infty(U,A),dz,d\bar{z})$ $(e_c(w) = c \wedge w)$. Luego, teniendo en cuenta que la aplicación $\bar{\partial}:\Lambda^{p,q}(C^\infty(U,A),dz,d\bar{z}) \to \Lambda^{p,q+1}(C^\infty(U,A),dz,d\bar{z})$ satisface $\bar{\partial}\circ e_c + e_c\circ\bar{\partial} = 0$, queda definido el complejo $(\Lambda(C^\infty(U,A),dz,d\bar{z}),\ \bar{\partial}+e_c)$ que notaremos $a(U,A)$.

<u>Observación I.4.1.</u> $\Lambda^p(\mathcal{O}(U,A),dz)$ puede pensarse como el subespacio de $\Lambda^{p,0}(C^\infty(U,A),dz,d\bar{z})$ formado por todas las formas w tales que $\bar{\partial}w = 0$, resultando además que $\bar{\partial}+e_c = e_c$ en este subespacio.

<u>Teorema I.4.2.</u> Si U es un abierto de C^n holomorficamente convexo, entonces $H^p(a(U,A) \cong H^p(\mathcal{R}(U,A))$ para todo p.

<u>Demostración</u>

Dada la observación anterior, con la notación del apéndice (pág 44) gracias al teorema demostrado allí, basta ver que $'H^q\ ''H^p(a(U,A)) = 0$

para todo $p \geq 1$ y para todo q. Probaremos aquí que $''H^p(a(U,A)) = 0$ para todo $p \geq 1$. Sea entonces para $q \geq 0$, el espacio de Fréchet $E_q = \Lambda^q(A,d\bar{z})$. Tenemos que para todo p, la aplicación $\psi_p : \Lambda^{p,q}(C^\infty(U,A),dz,d\bar{z}) \to \Lambda^p(C^\infty(U,E_q),d\bar{z})$ definida por

$$\psi_p(f\, dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_q} \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_p}) = (f\, dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_q})d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_p}$$

resulta un isomorfismo y satisface $\bar{\partial}\circ\psi_p = \psi_{p+1}\circ\bar{\partial}$. Por lo tanto $''H^p(A(U,A))$ es isomorfo a $\bigoplus_q H^p(L(U,E_q))$. Luego como U es holomorficamente convexo, el teorema I.3.2 nos permite asegurar que $H^p(L(U,E_q)) = 0$ para todo $p \geq 1$, quedando así completada la demostración.

<u>Corolario I.4.3.</u> Sean $C_z^{\infty A}$ el anillo de gérmenes en z de funciones C^∞ a valores en A y $\mathcal{O}_z^A$ el anillo de gérmenes en z de funciones holomorfas a valores en A. Sean los complejos

$$a_z(A) = (\Lambda(C_z^{\infty A},dz,d\bar{z}),\bar{\partial}+e_c), \quad R_z(A) = (\Lambda(\mathcal{O}_z^A,dz),e_c).$$

Entonces del teorema anterior resulta que para todo p

$$H^p(a_z(A)) \cong H^p(R_z(A))$$

5. <u>Propiedad de extensión única</u>

Notaremos:

$$H^p(C^\infty(U,A),\bar{\partial}+e_c) = H^p(a(U,A))$$
$$B^p(C^\infty(U,A),\bar{\partial}+e_c) = B^p(a(U,A)) = (\bar{\partial}+e_c)(\Lambda^{p-1}(C^\infty(U,A),dz,d\bar{z}))$$
$$Z^p(C^\infty(U,A),\bar{\partial}+e_c) = Z^p(a(U,A)) = \mathrm{Ker}\ \bar{\partial}+e_c \subset \Lambda^p(C^\infty(U,A),dz,d\bar{z})$$
$$H^p(C_z^\infty,\bar{\partial}+e_c) = H^p(a_z(A))$$
$$B^p(C_z^\infty,\bar{\partial}+e_c) = B^p(a_z(A))$$
$$Z^p(C_z^\infty,\bar{\partial}+e_c) = Z^p(a_z(A))$$

$H^p(\mathcal{O}(U,A),e_c) = H^p(\mathcal{R}(U,A))$

$B^p(\mathcal{O}(U,A),e_c) = B^p(\mathcal{R}(U,A))$

$Z^p(\mathcal{O}(U,A)),e_c) = Z^p(\mathcal{R}(U,A))$

$H^p(\mathcal{O}^A_z,e_c) = H^p(\mathcal{R}_z(A))$

$B^p(\mathcal{O}^A_z,e_c) = B^p(\mathcal{R}_z(A)$

$Z^p(\mathcal{O}^A_z,e_c) = Z^p(\mathcal{R}_z(A))$

Lema I.5.1. Si V_1 y V_2 son subconjuntos abiertos de C^n y w es un elemento de $\Lambda^q(C^\infty(V_1 \cap V_2,A),dz,d\bar{z})$ entonces, existen $w_1 \in \Lambda^q(C^\infty(V_1,A),dz,d\bar{z})$ y $w_2 \in \Lambda^q(C^\infty(V_2,A),dz,d\bar{z})$ tales que $w = w_1 - w_2$.

Demostración

Sean $(W_j)_{j\in J}$ un cubrimiento abierto localmente finito de $V_1 \cup V_2$ subordinado al cubrimiento $\{V_1,V_2\}$ y $(\varphi_j)_{j\in J}$ una partición C^∞ de la unidad tal que sop $\varphi_j \subset W_j$ para todo j.

Sean $J_1 = \{j \in J$ tal que $W_j \subset V_2\}$ y $J_2 = J - J_1$.

Si $i = 1,2$ y $j \in J_i$, sea $w_{i,j}(z) = (-1)^{i+1}\varphi_j(z)w(z)$ si $z \in W_j \cap V_i$, $w_{i,j}(z) = 0$ si $z \in V_i - W_j \cap V_i$.

Teniendo en cuenta que $w \in \Lambda^q(C^\infty(V_1 \cap V_2),dz,d\bar{z})$, que sop $\varphi_j \subset W_j$ y que para $j \in J_i$, $W_j \cap V_i \subset V_1 \cap V_2$, resulta que $w_{i,j} \in \Lambda^q(C^\infty(V_i,A),dz,d\bar{z})$.

Por otro lado, como el cubrimiento $(W_j)_{j\in J}$ es localmente finito, las formas $w_i = \sum_{j\in J_i} w_{i,j}$ están bien definidas y pertenecen a $\Lambda^q(C^\infty(V_i,A),dz,d\bar{z})$.

Por último, para $z \in V_1 \cap V_2$, $w_1(z) - w_2(z) = \sum_{j\in J_1} \varphi_j(z)\, w(z) +$

$$+ \sum_{j\in J_2} \varphi_j(z)\, w(z) = \sum_{j\in J} \varphi_j(z)\, w(z) = w(z)$$

Lema I.5.2. Sean V_1, V_2 abiertos de C^n que satisfacen $H^{p-1}(C^\infty(V_1 \cap V_2, A), \bar\partial + e_c) = 0$. Dada $w \in \Lambda^p(C^\infty(V_1 \cup V_2, A), dz, d\bar z)$ si $w/_{V_i} \in B^p(C^\infty(V_i, A), \bar\partial + e_c)$ para $i = 1,2$, entonces resulta que $w \in B^p(C^\infty(V_1 \cup V_2, A), \bar\partial + e_c)$.

Demostración

Sea para $i = 1,2$ $w_i \in \Lambda^{p-1}(C^\infty(V_i, A), dz, d\bar z)$ tal que $w/_{V_i} = (\bar\partial + e_c) w_i$.
Entonces $(\bar\partial + e_c)(w_1 - w_2) = 0$ en $V_1 \cap V_2$. Como $H^{p-1}(C^\infty(V_1 \cap V_2, A), \bar\partial + e_c) = 0$ existe $w_3 \in \Lambda^{p-2}(C^\infty(V_1 \cap V_2, A), dz, d\bar z)$ tal que $w_1 - w_2 = (\bar\partial + e_c) w_3$.
El lema anterior asegura la existencia de $w_{3,1} \in \Lambda^{p-2}(C^\infty(V_1, A), dz, d\bar z)$, $w_{3,2} \in \Lambda^{p-2}(C^\infty(V_2, A), dz, d\bar z)$ que satisfacen $w_3 = w_{3,1} - w_{3,2}$ en $V_1 \cap V_2$.
Entonces, definiendo $w_i' = w_i - (\bar\partial + e_c) w_{3,i}$ $(i = 1,2)$, resulta que $w_i' \in \Lambda^{p-1}(C^\infty(V_i, A), dz, d\bar z)$ y $w_1' = w_1 - (\bar\partial + e_c) w_{3,1} = w_2 - (\bar\partial + e_c) w_{3,2} = w_2'$ en $V_1 \cap V_2$.
Luego, si $w_{1,2}(z) = w_1'(z)$ si $z \in V_1$, $w_{1,2}(z) = w_2'(z)$ si $z \in V_2$, tenemos $w_{1,2}$ bien definida. Además $w_{1,2}$ es un elemento de $\Lambda^{p-1}(C^\infty(V_1 \cup V_2), dz, d\bar z)$ y $(\bar\partial + e_c) w_{1,2} = (\bar\partial + e_c)\ w_i' = (\bar\partial + e_c) w_i$ en V_i.
Por lo tanto $(\bar\partial + e_c) w_{1,2} = w$, quedando demostrado el lema.

Lema I.5.3. Sea U un abierto de C^n tal que $H^q(C^\infty(V, A), \bar\partial + e_c) = 0$ para todo $V \subset U$ y para todo $q < p$.
Si w es un elemento de $\Lambda^p(C^\infty(U, A), dz, d\bar z)$ tal que para todo $z \in U$, el gérmen de w en z, $\tilde w_z \in B^p(C_z^{\infty A}, \bar\partial + e_c)$ entonces $w \in B^p(C^\infty(U, A), \bar\partial + e_c)$.

Demostración

Sea $(K_i)_{i \in N}$ una sucesión de subconjuntos compactos de U tales que $K_i \subset K_{i+1}^0$ para todo i y $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$.
Sea para $z \in U$, V_z un entorno de z contenido en U y $w_z \in \Lambda^{p-1}(C^\infty(V_z, A), dz, d\bar z))$ tal que $w = (\bar\partial + e_c) w_z$ en V_z.

Dado que K_i es compacto, existen $z_1,\dots,z_m$ tales que $K_i \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_{z_j}$.
Si $U_i = \bigcup_{j=1}^{m} V_{z_j}$, como $H^{p-1}(C^\infty(V,A),\bar\partial+e_c) = 0$ para todo $V \subset U$, el lema anterior asegura que existe $w_i \in \Lambda^{p-1}(C^\infty(U_i,A),dz,d\bar z)$ tal que $w = (\bar\partial+e_c)\, w_i$ en U_i.

Podemos suponer que $K_i \subset U_i \subset \bar U_i \subset K^0_{i+1} \subset K_{i+1} \subset U_{i+1}$.

Veamos ahora que existe una sucesión $(w_i')_{i\in N}$, con $w_i' \in \Lambda^{p-1}(C^\infty(U_i,A),dz,d\bar z)$, $w_{i+1}'/K^0_{i+1} = w_i'$ y $(\bar\partial+e_c)w_i' = w$.

En efecto: sea $(W_i)_{i\in N}$ una sucesión de conjuntos abiertos tales que $K_i \subset W_i \subset \bar W_i \subset U_i$; sea para cada $i \in N, \varphi_i \in C^\infty(U)$ tal que $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1$, $\varphi_i = 0$ en W_i^c, $\varphi_i = 1$ en K_i.

Sea $w_1' = w_1$. Supongamos tener para $i = 1,\dots,n$ $w_i' \in \Lambda^{p-1}(C^\infty(U_i,A),dz,d\bar z)$ que satisfacen $w_{i+1}'/K^0_{i+1} = w_i'$, $(\bar\partial+e_c)w_i' = w$ en U_i. Entonces $(\bar\partial+e_c)(w_n'-w_{n+1}) = 0$ en U_n, por lo tanto existe $w^{n,n+1} \in \Lambda^{p-2}(C^\infty(U_n,A),dz,d\bar z)$ que satisface $w_n'-w_{n+1} = (\bar\partial+e_c)w^{n,n+1}$ en U_n. Luego $w_n' = w_{n+1} + (\bar\partial+e_c)(\varphi_n . w^{n,n+1})$ en K_n^0 pues $\varphi_n = 1$ en K_n.

Si entonces $w_{n+1}' = w_{n+1} + (\bar\partial+e_c)(\varphi_n . w^{n,n+1})$, vemos que $w_{n+1}' \in \Lambda^{p-1}(C^\infty(U_{n+1},A),dz,d\bar z)$ pues $\varphi_n = 0$ en un entorno de U_n^c y $w^{n,n+1} \in \Lambda^{p-2}(C^\infty(U_n,A),dz,d\bar z)$.

Además $(\bar\partial+e_c)w_{n+1}' = (\bar\partial+e_c)w_{n+1} = w$ en U_{n+1}. Sea entonces $w^1(z) = w_i'(z)$ si $z \in K_i^0$. Así, w^1 está bien definida, $w^1 \in \Lambda^{p-1}(C^\infty(U,A),dz,d\bar z)$ y $(\bar\partial+e_c)w^1 = w$, quedando demostrado el lema.

<u>Corolario I.5.4.</u> Si U es un abierto de C^n que satisface

i. para todo $z \in U$ y para todo $q \leqslant p$ $H^q(C_z^{\infty A},\bar\partial+e_c) = 0$

ii. para todo V subconjunto abierto de U y para todo $q < p$ $H^q(C^\infty(V,A),\bar\partial+e_c) = 0$, entonces para todo subconjunto abierto V de U $H^p(C^\infty(V,A),\bar\partial+e_c) = 0$.

Demostración

Resulta inmediata a partir del lema anterior.

Teorema I.5.5. Si U es un abierto de C^n, son equivalentes:

i. $H^p(\mathcal{O}_z^A, e_c) = 0$ para todo $p \leq n-1$, para todo $z \in U$

ii. $H^p(C_z^{\infty A}, \bar{\partial}+e_c) = 0$ para todo $p \leq n-1$, para todo $z \in U$

iii. $H^p(C^\infty(V,A), \bar{\partial}+e_c) = 0$ para todo $p \leq n-1$, para todo V abierto de U

iv. $H^p(\mathcal{O}(V,A), e_c) = 0$ para todo $p \leq n-1$, para todo V abierto de U que sea holomorficamente convexo.

Demostración

i. $\Rightarrow$ ii. es inmediato a partir del corolario I.4.3.

ii. $\Rightarrow$ iii. por el corolario I.5.4 basta ver que $H^0(C^\infty(V,A), \bar{\partial}+e_c) = 0$ para todo V abierto de U. Sea entonces V un abierto de U y $f \in C^\infty(V,A)$ tal que $(\bar{\partial}+e_c)f = 0$; si $\tilde{f}_z$ es el germen de f en z, tenemos $(\bar{\partial}-e_c)\tilde{f}_z = 0$, con lo cual $\tilde{f}_z = 0$ para todo $z \in V$ y por ende $f = 0$ en V.

iii. $\Rightarrow$ iv. es inmediato a partir del teorema I.4.2.

iv. $\Rightarrow$ i. resulta trivial.

Definición I.5.6. Sean A un álgebra de Fréchet, $a = (a_1,...,a_n)$ una n-upla de elementos de A tal que $sp(a_1,...,a_n)$ es compacto. Decimos que a tiene la "propiedad de extensión única" (p.e.u.) sii $H^p(\mathcal{O}_z^A, e_c) = 0$ para todo $z \in C^n$ y para todo $p \leq n-1$.

Observación I.5.7. El teorema I.5.5. nos permite dar definiciones equivalentes de esta propiedad.

Proposición I.5.8. Sea $a = (a_1,...,a_n)$ una n-upla de elementos de A que tiene la "p.e.u." y U un entorno abierto holomorficamente convexo de sp(a). Entonces, si x es un elemento de A tal que su germen en $z_0, \tilde{x}_{z_0} \in B^n(\mathcal{O}^A_{z_0}, e_c)$ para todo $z_0 \in U$, resulta que $x = 0$.

Demostración

Como $\tilde{x}_{z_0} dz \in B^n(\mathcal{O}^A_{z_0}, e_c)$ para todo $z_0 \in U$, tenemos que $\tilde{x}_{z_0} dz \in B^n(C^{\infty A}_{z_0}, \bar{\partial}+e_c)$ para todo $z_0 \in U$. Luego por el lema I.5.3 resulta que $x\ dz \in B^n(C^{\infty}(U,A), \bar{\partial}+e_c)$.

Dado que V es holomorficamente convexo, el teorema I.4.2 asegura que $x\ dz \in B^n(\mathcal{O}(U,A), e_c)$. Por lo tanto existen $g_1, \ldots, g_n$ elementos de $\mathcal{O}(U,A)$ que satisfacen $x = \sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i) g_i(z)$ para todo $z \in U$. Entonces, siendo $\theta : \mathcal{O}(U,A) \to A$ el cálculo holomorfo obtenemos

$x = \theta(x) = \sum_{i=1}^{n} \theta(z_i - a_i) . \theta g_i = 0.$

6. Espectro relativo

Definición I.6.1. Sean A un álgebra de Fréchet, $a = (a_1, \ldots a_n)$ una n-upla de elementos de A y x un elemento de A, llamaremos resolvente de x respecto de a, notando $r(a,x)$, al conjunto $\{z_0 \in C^n / x\ dz \in B^n(C^{\infty A}_{z_0}, \bar{\partial}+e_c)\}$.

Definición I.6.2. Llamaremos espectro de x respecto de a, notando $sp(a,x)$ a $r(a,x)^c$.

Observación I.6.3. Del corolario I.4.3. se deduce inmediatamente que $r(a,x) = \{z_0 \in C^n / x\ dz \in B^n(\mathcal{O}^A_{z_0}, e_c)\} = \{z_0 \in C^n$/existen V_{z_0} entorno de z_0 y $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(V_{z_0}, A)$ que satisfacen $x = \sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i) f_i(z)$ en $V_{z_0}\}$.

Proposición I.6.4.

i. $sp(a,x)$ es cerrado

ii. $sp(a,0) = \emptyset$

iii. $sp(a,bx) \subset sp(a,x)$ para todo $b \in A$

iv. $sp(a,x+y) \subset sp(a,x) \cup sp(a,y)$

Demostración

Se desprende inmediatamente de la definición.

Sea K un subconjunto de C^n. Notaremos con I_K el subconjunto de A, $I_K = \{x \in A/sp(a,x) \subset K\}$.

Proposición I.6.5.

i. I_K es un ideal de A.

ii. Si K contiene a $sp(a,1)$ entonces $I_K = A$.

Demostración

Es inmediata a partir de la proposición anterior.

Vamos a estudiar la relación entre $sp(a,1)$ y $sp(a)$.

Lema I.6.6. Si A es un álgebra de Fréchet y $\{a_1,\ldots,a_n\}$ es un subconjunto finito de A contenido en un ideal propio de A, entonces existe un carácter de A, h, tal que $h(a_i) = 0$ para todo i.

Demostración

(ver [6] pág. 177)

Lema I.6.7. Si A es un álgebra de Fréchet, U un abierto de C^n holomorficamente convexo y $X(\mathcal{O}(U,A))$ el conjunto de caracteres de $\mathcal{O}(U,A)$, entonces $X(\mathcal{O}(U,A)) = \{\varphi_0\ \delta_{z_0},$ carácter de A, $z_0 \in U\}$. $(\delta_{z_0}(f) = f(z_0),\ f \in \mathcal{O}(U,A))$.

Demostración

Sea h un elemento de $X(\mathcal{O}(U,A))$. Si consideramos a $\mathcal{O}(U)$ como subanillo de $\mathcal{O}(U,A)$, identificando $f \in \mathcal{O}(U)$ con $f.1$ en $\mathcal{O}(U,A)$ donde 1 es la identidad de A, resulta que h restringido a $\mathcal{O}(U)$ es un carácter de $\mathcal{O}(U)$. Por lo tanto, existe $z_0 \in U/h(f) = f(z_0)$ para toda $f \in \mathcal{O}(U)$ (ver [6] cap. V. párr. 7).

Por otro lado si pensamos a A como subanillo de $\mathcal{O}(U,A)$, identificando los elementos b de A, con la función identicamente igual a b sobre U, resulta que h restringido a A es un carácter de A y así, existe φ carácter de A tal que $h(b) = \varphi(b)$ para todo $b \in A$.

Por último, dado que el subespacio de $\mathcal{O}(U,A)$ generado por los elementos $b.f$ con $b \in A$ y $f \in \mathcal{O}(U)$ es denso en $\mathcal{O}(U,A)$ (ver [4]) y que $h(b.f) = \varphi(b).f(z_0) = \varphi(\delta_{z_0}(b.f))$ resulta que $h = \varphi \circ \delta_{z_0}$.

Para terminar, resulta inmediato que si $\varphi \in X(A)$ y $z_0 \in U$ entonces $\varphi \circ \delta_{z_0} \in X(\mathcal{O}(U,A))$.

<u>Observación I.6.8.</u> Con la misma demostración, si U es un abierto cualquiera de C^n, los carácteres de $\mathcal{O}(U,A)$ se obtienen de manera análoga, pero con $z_0 \in \hat{U}$, cápsula de holomorfía de U.

<u>Teorema I.6.9.</u> $sp(a,1) \subset sp(a)$.

<u>Demostración</u>

Sea $z_0 \notin sp(a)$, entonces existe un polidisco V de centro z_0 incluido en $sp(a)^c$. Supongamos que $z_0 \notin sp(a,1)$; luego, para todo entorno abierto U de z_0, existe un ideal propio de $\mathcal{O}(U,A)$, I_U tal que $z_i - a_i \in I_U$ para todo $i = 1,\ldots,n$. Entonces, como $\mathcal{O}(V,A)$ es un álgebra de Fréchet, el lema I.6.6 nos permite afirmar que existe $h \in X(\mathcal{O}(V,A))$ tal que $h(z_i - a_i) = 0$ para todo $i = 1,\ldots,n$. Así, teniendo en cuenta el lema I.6.7, sabemos que existe $\varphi \in X(A)$ y $w \in V$ tal que $h = \varphi \circ \delta_w$. Por lo tanto $\varphi \circ \delta_w(z_i - a_i) = 0$ para todo $i = 1,\ldots,n$. Entonces $w_i = \varphi(a_i)$ para todo $i = 1,\ldots,n$, con lo cual $w = (\varphi(a_1),\ldots,\varphi(a_n))$ resulta un elemento de $sp(a)$, absurdo ya que $V \cap sp(a) = \emptyset$.

7. Un ejemplo

En general la inclusión del Teorema I.6.9 es estricta. Veremos un ejemplo.

Sean $U = \{z \in C^2 / \max_{i=1,2} |z_i| < \frac{1}{4}\} \cup \{z \in C^2 / \frac{1}{2} < \max_{i=1,2} |z_i| < 1\}$ y $X = C(\overline{U}) \times C^1(\overline{U})$, donde $C^1(\overline{U}) = \{f \in C^1(U)$ tal que tanto f como sus derivadas de primer orden (pensando U como subconjunto de R^4) pueden extenderse con continuidad a $\overline{U}\}$.

Consideremos en X la norma producto: $\|(f,g)\| = \sup_{z\in\overline{U}} |f(z)| + \sup_{z\in\overline{U}} |g(z)| + \sup_{\substack{z\in\overline{U}\\ i=1,2,3,4}} |\frac{\partial g}{\partial x_i}(z)|$. Resulta claro que X es un espacio de Banach. Sea $L(X) = \{F: X \to X$ lineales y continuas$\}$ y a_1, a_2, b_1, b_2 los elementos de $L(X)$:

$$a_1(f,g) = \begin{pmatrix} z_1 & \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} \\ 0 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = (z_1 f + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} g,\ z_1 g),$$

$$a_2(f,g) = \begin{pmatrix} z_2 & \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = (z_2 f + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} g,\ z_2 g).$$

$$b_1(f,g) = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = (z_1 f,\ z_1 g),$$

$$b_2(f,g) = \begin{pmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = (z_2 f,\ z_2 g).$$

Es fácil comprobar que $a_1a_2 = a_2a_1$, $b_1b_2 = b_2b_1$, $a_ib_j = a_jb_i$ $i,j = 1,2$. Sea A una subálgebra conmutativa cerrada que contiene a $\{a_1,a_2,b_1,b_2\}$ maximal de $L(X)$. Si $a = (a_1,a_2)$, veremos que $sp(a,1) \underset{\neq}{\subset} sp(a)$.

<u>Proposición I.7.1.</u> Sean A un álgebra de Fréchet, $a = (a_1,\dots,a_n)$ $b = (b_1,\dots,b_n)$ dos n-uplas de elementos de A tales que $(a_i-b_i)^n = 0$ para todo $i = 1,\dots,n$ y para algún m. Entonces

a. $sp(a,1) = sp(b,1)$ y b. $sp(a) = sp(b)$

<u>Demostración</u>

a. Es claro que basta demostrar $r(a,1) \subset r(b,1)$. Sea $z_0 \in r(a,1)$, sabemos que existe V_{z_0}, un entorno abierto de z_0 y $(f_1,\dots,f_n)$, una n-upla de elementos de $\mathcal{O}(V_{z_0},A)$ que satisfacen $1 = \sum_{i=1}^{n} (z_i-z_i)\ f_i(z)$ en V_{z_0}. Sea ahora h un carácter de A; como $(a_i-b_i)^m = 0$ para $i = 1,\dots,n$, resulta que $h(a_i-b_i) = 0$ para todo $i = 1,\dots,n$ y por lo tanto $1 = h(1) =$
$= h(\sum_{i=1}^{n} ((z_i-b_i) + (a_i-b_i))\ f_i(z)) = h(\sum_{i=1}^{n} (z_i-b_i)\ f_i(z))$.
Luego si $u(z) = \sum_{i=1}^{n} (z_i-b_i)\ f_i(z)$, del lema I.6.6 se desprende que $u(z)$ es inversible para todo $z \in V_{z_0}$.
Así, si definimos en V_{z_0}, $g_i(z) = u^{-1}(z).f_i(z)$, tenemos que $g_i \in \mathcal{O}(V_{z_0},A)$ y $1 = \sum_{i=1}^{n} (z_i-b_i)\ g_i(z)$.

b. Se desprende fácilmente de la demostración de a.

<u>Corolario I.7.2.</u> Si $a = (a_1,a_2)$ y $b_1 = (b_1,b_2)$ son los pares definidos anteriormente, entonces $sp(a,1) = sp(b,1)$ y $sp(a) = sp(b)$.

<u>Demostración</u>

Gracias a la proposición I.6.11, basta ver que $(a_i-b_i)^2 = 0$ para $i = 1,2$. Entonces

$$(a_i-b_i)^2 = \left\| \begin{pmatrix} z_i & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \\ 0 & z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_i & 0 \\ 0 & z_i \end{pmatrix} \right\|^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

<u>Proposición I.7.3.</u> $sp(b,1) \subset \bar{U}$

<u>Demostración</u>

Sea $w^0 \in (\bar{U})^c$, entonces existe i tal que $\frac{1}{4} < |w_i^0| < \frac{1}{2}$ ó $|w_i^0| > 1$. Luego existen $\varepsilon > 0$ y V_{w^0} entorno abierto de w^0 tales que $\bar{V}_{w^0}$ está contenido en $V = \{\frac{1}{2}-\varepsilon > |w_i| > \frac{1}{4}+\varepsilon\} \cup$ $\cup \{|w_i| > 1-\varepsilon\}$. Sea $U' = (\{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2} \geq |w_i| \geq \frac{1}{4}+\frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|w_i| > 1-\frac{\varepsilon}{2}\})^c$.
Resulta que V es un entorno de $\bar{V}_{w^0}$, U' es un entorno de $\bar{U}$ y $w_i-z_i \neq 0$ en $V \times U'$. Por lo tanto la función $u: V\times U' \to C$ definida como $u(w,z) = \frac{1}{z_i-w_i}$ es analítica. Sea para $w \in V_{z^0}$, $f_i(w): X \to X$ definida como $f_i(w)(f,g) = (\frac{1}{z_i-w_i} f, \frac{1}{z_i-w_i} g)$. La analiticidad de u respecto de z asegura la conmutatividad de $f_i(w)$ con a_1, a_2; con lo cual, para todo $w \in V_{w^0}$, $f_i(w) \in A$.
Además, la analiticidad de u respecto de w induce la analiticidad de la aplicación $f_i: V_{w^0} \to A$.
Por último, $f_i(w)(b_i-w_i)(f,g) = f_i(w)((z_i-w_i)f, (z_i-w_i)g) = (f,g)$.

<u>Corolario I.7.4.</u> $sp(a,1) \subset \bar{U}$

<u>Demostración</u>

Es consecuencia inmediata del corolario I.7.2 y la proposición I.7.3.

<u>Proposición I.7.5.</u> $\{z \in C^2 / |z_i| \leq 1\} \subset sp(b)$

<u>Demostración</u>

Sea $z^0 \notin sp(b)$, entonces existe c_1 y c_2 elementos de A tales que $c_1(b_1-z_1^0) + c_2(b_2-z_2^0) = 1$. Por lo tanto especializando esta igualdad en el elemento $(0,1)$ de X, tenemos:

$(c_1(b_1-z_1^0) + c_2(b_2-z_2^0))(0,1) = (0,1)$. Así si $c_i(f,g) = \begin{pmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i \\ c_{21}^i & c_{22}^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$

$i = 1,2$, resulta que $(z_1-z_1^0)\ c_{22}^1(1)(z) + (z_2-z_2^0)\ c_{22}^2(1)(z) = 1$ para todo $z \in \overline{U}$.

Sean $v^i:\overline{U} \to C$, $v^i(z) = c_{22}^i(1)(z)$. La conmutatividad de c^i con $\{a_1,a_2,b_1,b_2\}$ asegura que $c_i\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial\overline{z}_j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial\overline{z}_j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} c_i$ y por lo tanto

$$0 = c_i\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial\overline{z}_j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial\overline{z}_j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{12}^i(1) \\ c_{22}^i(1) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\ c_{22}^i(1), 0\right)$$ Se

desprende entonces que las funciones v^i son holomorfas en U.

Entonces, existen $\tilde{v}_i$ definidas en $\{|z_j| < 1\}$ holomorfas tales que $\tilde{v}_i/_U = v_i$ y $(z_1-z_1^0)\tilde{v}_1(z) + (z_2-z_2^0)\tilde{v}_2(z) = 1$([7] Teor. I.C.5).

Luego, $z^0 \in \{|z_j| \geq 1\}$, lo cual prueba la proposición.

<u>Corolario I.7.6.</u> $sp(a,1) \subset \overline{U} \subset \{|z_i| \leq 1\} = sp(a)$.

<u>Demostración</u>

Gracias al corolario I.7.4 y a la proposición I.7.5 basta observar que $\{|z_i| \leq 1\} \supset sp(a)$ dado que $\|a_i\| \leq 1 \quad i = 1,2$.

CAPITULO II

Introducción

En este capítulo introducimos la noción de álgebras a-representables para n-uplas $a = (a_1,\ldots,a_n)$ de un álgebra de Fréchet. Para dichas álgebras obtenemos una suerte de extensión del cálculo holomorfo para los gérmenes de funciones analíticas sobre subconjuntos compactos del espectro de a y también un teorema de tipo Shilov. Por último, damos algunos ejemplos interesantes.

1. Algebras a-representables

Sea A un álgebra de Fréchet, $a = (a_1,\dots,a_n)$ una n-upla de elementos de A.

Definición II.1.1.

i. Sea $\mathcal{I} \in \mathcal{O}^A$ el haz sobre C^n de ideales generados por $z_1-a_1,\dots,z_n-a_n$; esto es $\mathcal{I}_{z_0}$ es el ideal de $\mathcal{O}^A_{z_0}$ generado por los gérmenes en z_0 de z_i-a_i $i = 1,\dots,n$, para cada $z_0 \in C^n$

ii. Sea $\mathcal{A}$ el haz de fibras $\mathcal{A}_{z_0} = \mathcal{O}^A_{z_0}/\mathcal{I}_{z_0}$.

Observación II.1.2.

i. Se tiene una sucesión exacta canónica $0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}^A \to \mathcal{A} \to 0$

ii. Si $z_0 \notin sp(a,1)$ antonces $\mathcal{A}_{z_0} = 0$. En efecto, existen $f_1,\dots,f_n$ elementos de $\mathcal{O}(V,A)$ para algún entorno V de z_0 tales que $1 = \sum_{i=1}^{n} (z_i-a_i)f_i$; con lo cual, si para $f \in \mathcal{O}(U,A)$ $\tilde{f}^{z_0}$ es el germen de f en z_0, tenemos $1 = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{(z_i-a_i)}^{z_0} \tilde{f}_i^{z_0}$ y así $\mathcal{O}^A_{z_0} = \mathcal{I}_{z_0}$.

Definición II.1.3.

Sea $\mathcal{N} \subset (\mathcal{O}^A)^n$ el haz sobre C^n, cuyas fibras $\mathcal{N}_{z_0}$ consisten de las n-uplas $(\tilde{f}_1^{z_0},\dots, \tilde{f}_n^{z_0})$ de gérmenes en z_0 de funciones analíticas en un entorno de z_0 tales que $\sum_{i=1}^{n} (z_i-a_i)\tilde{f}_i^{z_0} = 0$.

Observación II.1.4. Si $\lambda : (\mathcal{O}^A)^n \to \mathcal{I}$ indica la aplicación, $\lambda(\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_n) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{(z_i-a_i)}\tilde{f}_i$, tenemos la sucesión exacta $0 \to \mathcal{N} \xrightarrow{i} (\mathcal{O}^A)^n \to \mathcal{I} \to 0$.

Definición II.1.5. Decimos que A es a-representable si

1. sp(a) es un compacto holomorficamente convexo
2. $H^1(sp(a),N) = 0$, $H^2(sp(a),N) = 0$

Teorema II.1.6. Si sp(a) es un compacto holomorficamente convexo y a tiene la p.e.u. entonces A es a-representable.

Demostración

Si a tiene la p.e.u. $H^p(\mathcal{O}(V,A),e_c) = 0$ para todo $p \leq n-1$ y para todo V subconjunto abierto holomorficamente convexo de C^n. Entonces para todo $z \in C^n$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_z^A \xrightarrow{e_c} \Lambda^1(\mathcal{O}_z^A,dz) \xrightarrow{e_c} \ldots\ldots \to \Lambda^{n-1}(\mathcal{O}_z^A,dz) \xrightarrow{e_c} N_z \to 0.$$

Por otro lado, el teorema I.3.2 asegura que $H^p(V,\Lambda^i(\mathcal{O}_z^A,dz)) \cong$ $\cong H^p(V,\mathcal{O}_z^{\Lambda^i(A,dz)}) = 0$ para todo V holomorficamente convexo, para todo $p \geq 1$; esto es, los haces $\Lambda^i(\mathcal{O}^A,dz)$ son acíclicos. Así, con un argumento usual, $H^p(V,N) = 0$ para todo V subconjunto holomorficamente convexo de C^n y para todo $p \geq 1$ y entonces $H^p(sp(a),N) = 0$ para todo $p \geq 1$.

Lema II.1.7. Sea U un subconjunto abierto holomorficamente convexo de C^n, entonces

a. $H^i(U,I) \cong H^{i+1}(U,N)$ para todo $i \geq 1$

b. si A es a-representable y $U \supset sp(a)$ resulta:

$$H^i(U,I) = 0 \text{ para todo } i \geq 1, \quad H^0(U,I) \cong H^0(U,\mathcal{O}^{A^n})/_{H^0(U,N)}$$

Demostración

a. Basta notar que la sucesión exacta $0 \to N \to \mathcal{O}^{A^n} \to I \to 0$ da lugar a la sucesión exacta larga

$$0 \to H^0(U,N) \to H^0(U,\mathcal{O}^{A^n}) \to H^0(U,I) \to H^1(U,N) \to H^1(U,\mathcal{O}^{A^n}) \to H^1(U,I) \to$$
$$\to H^2(U,N) \to \ldots \to H^i(U,\mathcal{O}^{A^n}) \to H^i(U,I) \to H^{i+1}(U,N) \to H^{i+1}(U,\mathcal{O}^{A^n}) \to .$$

y tener en cuenta que $H^i(U,\mathcal{O}^{A^n}) = 0$ para todo $i \geqslant 1$.

b. Resulta inmediato.

2. Secciones del haz $\mathcal{A}$

Lema II.2.1. Si U es un subconjunto abierto holomorficamente convexo de C^n y I es un ideal finitamente generado de $\mathcal{O}(U)$, entonces I es cerrado.

Demostración

(ver [5] Cap. 6 pág. 169).

Lema II.2.2. Si U es un subconjunto abierto holomorficamente convexo de C^n, I es un ideal cerrado de $\mathcal{O}(U)$ y $\mathcal{S}$ es el haz de ideales generado por I resulta que $\mathcal{S}$ es coherente y $\mathcal{S}(U) = H^0(U,\mathcal{S}) = I$.

Demostración

(ver [5] Cap. 7 pág. 179).

Lema II.2.3. Sean U un subconjunto abierto de C^n, $I_1 \subset \mathcal{O}(U\times U)$ el ideal generado por $\{z_i - \xi_i \; i = 1,\dots,n\}$, $I_2 \subset \mathcal{O}(U\times U)$ el ideal de las funciones holomorfas en $U\times U$ y nulas sobre la diagonal. Resulta entonces que $I_1 = I_2$.

Demostración

Notemos primero que I_1 es cerrado gracias al lema II.2.1 y que trivialmente I_2 resulta cerrado. Sean entonces $\mathcal{S}_1$ el subhaz de $\mathcal{O}(U)$ generado por I_1 y $\mathcal{S}_2$ el subhaz de $\mathcal{O}(U)$ generado por I_2. Si probamos que $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ resultará del lema II.2.2 que

$I_1 = \mathcal{S}_1(U) = \mathcal{S}_2(U) = I_2$.

Entonces basta ver que para todo $x \in U\times U$, $S_{2_x} \subset S_{1_x}$, dado que $I_1 \subset I_2$. Sea Δ la diagonal de $U\times U$. Analizaremos los casos a) $x = (z_0,\xi_0) \notin \Delta$, b) $x = (z_0,\xi_0) \notin \Delta$

a. sea $(z_0,\xi_0) \notin \Delta$, entonces existen i y $W \subset U\times U$ entorno de (z_0,ξ_0) tales que $\frac{1}{z_i-\xi_i}$ es inversible en W y por lo tanto $S_{1(z_0,\xi_0)} = \mathcal{O}_{(z_0,\xi_0)} \supset S_{2(z_0,\xi_0)}$

b. Sea $(z_0,\xi_0) \in \Delta$ y $f \in S_{2(z_0,\xi_0)}$. Supongamos primero que $z_0 = 0$. Sea $r > 0$ tal que f es holomorfa en $\{|z_i| < 2r, |\xi_i| < 2r\}$. Luego para todo ξ tal que $|\xi_i| < r$, $f_\xi(z) = f(z,\xi)$ es holomorfa en $|z_i-\xi_i| < r$ y $f_\xi(\xi) = 0$; por lo tanto

$$f_\xi(z) = \sum_{|\alpha|\geq 1} \frac{(z-\xi)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f_\xi(\xi).$$

Entonces: i) $D^\alpha f_\xi(\xi) = D_z^\alpha f(z,\xi)$ por ser f holomorfa en $|z_i| < r$, $|\xi_i| < r$ y ii) Si $M = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \sup_{\substack{|z_i|\leq r\\ |\xi_i|\leq r}} |f(z,\xi)|$,

considerando que

$$D^\alpha f_\xi(\xi) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1-\ _1|=\frac{r}{2}} \cdots\cdots \int_{|z_n-\ _n|=\frac{r}{2}} \frac{f(z,\xi)}{(z-\xi)^{\alpha+(1,1\ldots 1)}}\, dz,$$

resulta $|D^\alpha f_\xi(\xi)| \leq \frac{M\,\alpha!}{(\frac{r}{2})^{|\alpha|}}$. Así, si para todo $i = 1,\ldots,n$ definimos

$$g_i(z,\xi) = \sum_{\substack{\alpha/\alpha_j=0\ j<i\\ \alpha_i\geq 1}} \frac{(z-\xi)^{\alpha-(0,\ldots,\overset{i}{\widehat{1}},\ldots 0)} D^\alpha f_\xi(\xi)}{\alpha!},$$

de i) y ii) se desprende que $g_i(z,\xi)$ es holomorfa en

$\{|\xi_i| < \frac{r}{2}, \ |z_i| < \frac{r'}{2}\}$ para $r' < r$. Además, $f(z,\xi) =$
$= \sum_{i=1}^{n} (z_i - \xi_i)\, g_i(z,\xi)$ en $\{|z_i| < \frac{r'}{2}, \ |\xi_i| < \frac{r}{2}\}$.

Sea ahora $z_0 \in U$ cualquiera, entonces $h(z,\xi) =$
$= f(z^0+z, \ z^0+\xi) \in S_{2(0,0)}$ y por lo tanto existen $g_1 \dots g_n$ funciones analíticas en un entorno del $(0,0)$ tales que $h(z,\xi) = \sum_{i=1}^{n} (z_i - \xi_i)\, g_i(z,\xi)$. Luego $f(z,\xi) = h(z-z_0, \ \xi - z_0) =$
$= \sum_{i=1}^{n} (z_i - \xi_i)\, g_i(z-z_0, \ \xi-z_0)$ donde $g_i(z-z_0, \ \xi-z_0)$ resultan analíticas en un entorno de (z_0, z_0).

Lema II.2.4. Sean A un álgebra de Fréchet, U un subconjunto abierto holomorficamente convexo de $\mathbb{C}^n$. Si f es un elemento de $\mathcal{O}(U\times U, A)$ nulo sobre la diagonal, resulta que f pertenece al ideal de $\mathcal{O}(U\times U,A)$ generado por $\{z_i - \xi_i \ \ i = 1,\dots,n\}$.

Demostración

Teniendo en cuenta que $\mathcal{O}(U\times U,A) = \mathcal{O}(U\times U) \in A$, resulta que si f es nula sobre la diagonal, f es un elemento de $L(A'_c, I)$ donde I es el ideal de $\mathcal{O}(U\times U)$ generado por $\{z_i - \xi_i \ \ i = 1,\dots,n\}$.
Sea $\mathcal{I}$ el subhaz de $\mathcal{O}(U\times U)$ generado por I y consideremos la sucesión exacta $0 \to K \overset{i}{\to} \mathcal{O}^n \overset{\lambda}{\to} \mathcal{I} \to 0$, donde $\lambda(g_1,\dots,g_n) =$
$= \sum_{i=1}^{n} (z_i - \xi_i) g_i$, K es el Ker λ e i es la inclusión.
Observando que K, $\mathcal{O}^n$ e $\mathcal{I}$ son haces coherentes y A es un espacio de Fréchet, podemos aplicar el corolario I.2.11 y deducir la exactitud de la sucesión $0 \to K \epsilon A \overset{i}{\to} \mathcal{O}^n \epsilon A \overset{\lambda}{\to} \mathcal{I} \epsilon A \to 0$.
Además, como $U\times U$ es holomorficamente convexo y K es coherente, $H^q(U\times U, K) = 0$ para todo $q \geq 1$ y por lo tanto del corolario I.2.11 se deduce que $H^q(U\times U, K \epsilon A) = 0$

Notando por último que $H^0(U\times U, \mathcal{O}^n \epsilon A) = \mathcal{O}(U\times U, A)^n$ y que $H^0(\mathcal{I} \epsilon A) = \mathcal{I}(U) \epsilon A = I \epsilon A$ (observación I.1.7), podemos concluir que la sucesión $\mathcal{O}(U\times U, A)^n \xrightarrow{\lambda} I\epsilon A \to 0$ también es exacta, lo cual demuestra el lema.

Proposición II 2.5. Si U es un entorno abierto holomorficamente convexo de sp(a) y $\theta_U : \mathcal{O}(U,A) \to A$ es el cálculo holomorfo, entonces $\operatorname{Ker} \theta_U = I(U)$ donde $I(U)$ es el ideal de $\mathcal{O}(U,A)$ generado por $\{z_i - a_i \quad i = 1,\dots,n\}$.

Demostración

Dado que $I(U)$ es un subconjunto de $\operatorname{Ker} \theta_U$ trivialmente, basta probar que $\operatorname{Ker} \theta_U \subset I(U)$.

Si f es un elemento de $\mathcal{O}(U,A)$ cualquiera, resulta que $f(z)-f(\xi)$ es un elemento de $\mathcal{O}(U\times U, A)$ nulo sobre la diagonal y por lo tanto el lema II.2.4 asegura la existencia de $g_1,\dots,g_n$ elementos de $\mathcal{O}(U\times U, A)$ tales que $f(z)-f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (z_i - \xi_i)\, g_i(z,\xi)$.

Dado entonces z fijo, si θ_U^{ξ} es el cálculo holomorfo en la variable ξ, resulta que $f(z) - \theta_U^{\xi} f = \sum_{i=1}^{n} (z_i - z_i)\theta_U^{\xi} g_i$.

Si $h_i : U \to A$ indica las funciones $h_i(z) = \theta_U^{\xi} g_i(z,\xi)$, se tiene que h_i son holomorfas tales que $f(z) - \theta_U f = \sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i) h_i$. Por lo tanto si $\theta_U(f) = 0$, $f \in I(U)$.

Proposición II.2.6. Si U es un subconjunto abierto holomorficamente convexo de C^n; $\mathcal{I}$ y $\mathcal{N}$, los haces del lema II.1.7 e I(U), el ideal de la proposición anterior, resulta que $H^1(U,\mathcal{N}) \cong$ $\cong H^0(U,\mathcal{I})/_{I(U)}$.

Demostración

Consideremos la sucesión exacta $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{O}^{A^n} \xrightarrow{\lambda_a} \mathcal{I} \to 0$ donde

$\lambda_a(g_1,\ldots,g_n) = \sum_{i=1}^{n} (z_i - z_i)g_i$. Teniendo en cuenta que $H^1(U,\mathcal{O}^{A^n})$ se concluye que la sucesión

$0 \to H^0(U,\mathcal{N}) \to \mathcal{O}(U,A)^n \xrightarrow{\lambda_a} H^0(U,\mathcal{I}) \to H^1(U,\mathcal{N}) \to 0$ también es exacta con lo cual $H^1(U,\mathcal{N}) \cong H^0(U,\mathcal{I})/_{I(U)}$ ya que $\mathcal{I}_m\, \lambda_a = I(U)$.

Corolario II.2.7. Si A es a-representable y U es un entorno abierto holomorficamente convexo de sp(a) entonces

$H^0(U,\mathcal{I}) = I(U) = \mathrm{Ker}\,\theta_U$

Demostración

Resulta inmediata a partir de la proposición II.2.6.

Teorema II.2.8. Si A es a-representable, entonces $A \cong \mathcal{A}(sp(a)) = H^0(sp(a),\mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es el haz definido al principio de este capítulo.

Demostración

Sea U un entorno holomorficamente convexo de sp(a). La exactitud de la sucesión $0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}^A \to \mathcal{A} \to 0$ induce la exactitud de la sucesión larga

$$0 \to H^0(U,\mathcal{I}) \to \mathcal{O}(U,A) \to H^0(U,\mathcal{A}) \to H^1(U,\mathcal{I}) \to \ldots$$

Así, dado que el lema II.1.7 asegura que $H^1(U,\mathcal{I}) = 0$ resulta $H^0(U,\mathcal{A}) \cong \mathcal{O}(U,A)/_{H^0(U,\mathcal{I})}$. Por otro lado si $\theta_U:\mathcal{O}(U,A) \to A$ es el cálculo holomorfo, que como se sabe es suryectivo, tenemos que $A \cong \mathcal{O}(U,A)/_{\mathrm{Ker}\,\theta_U}$. Por último, el corolario II.2.7 nos permite concluir que $A \cong H^0(U,\mathcal{A})$ canónicamente.

3. Un cálculo holomorfo

Sea A un álgebra de Fréchet a-representable para una n-upla $a = (a_1,\dots,a_n)$ de elementos de A. Sean para K subconjunto compacto del sp(a), $I_K = \{x \in A/sp(a,x) \subset K\}$, $L_A(I_K)$ el álgebra de morfismos A-lineales de I_K en sí mismo.

Vamos a construir para cada U entorno abierto de K un morfismo $\theta_U:\mathcal{O}(U,A) \to L_A(I_K)$ que satisfaga $\theta_U(z_i) = a_i$ donde a_i se piensa como elemento de $L_A(I_K)$. Así tendremos lo siguiente:

<u>Teorema II.3.1.</u> Si K es un subconjunto compacto del sp(a), existe un morfismo de anillos $\theta_K:\mathcal{O}(K,A) \to L_A(I_K)$ tal que $\theta_K(z_i) = a_i$ para $i = 1,\dots,n$.

<u>Demostración</u>

Sea U un entorno abierto de K y A el haz definido en el párrafo 1 de este capítulo. Vamos a definir un morfismo $\phi_U:A(U) \to L_A(I_K)$ que luego compondremos con el morfismo canónico $\pi:\mathcal{O}(U,A) \to A(U)$.

Si U_1, U_2 son dos abiertos de C^n tales que $U_1 \subset U_2$, $i_{U_1}:\mathcal{O}(U_2,A) \to \mathcal{O}(U_1,A)$ indicará la función definida como $i_{U_1}(f) = f/_{U_1}$. Esta aplicación induce canónicamente dos aplicaciones que notaremos de la misma manera: $i_{U_1}:A(U_2) \to A(U_1)$, $i_{U_1}:A \to A(U_1)$; la segunda resulta de pensar a cada elemento de A como función analítica constante sobre U_1. Observemos que el teorema II.2.8 afirma que si U_1 es un entorno holomorficamente convexo del sp(a), entonces $i_{U_1}:A \to A(U_1)$ es un isomorfismo (*).

Sea ahora $f \in A(U)$ y $x \in I_K$. Veremos que el elemento de $A(U)$, $f.i_U(x)$ es en realidad $i_U(y)$ con $y \in I_K$. En efecto: sean $V = K^c$, $\psi_1:A(U \cup V) \to A(U) \times A(V)$, $\psi_2:A(U) \times A(V) \to A(U \cap V)$ las aplicaciones definidas como $\psi_1(f) = (i_U(f), i_V(f))$,

$\psi_2(f,g) = i_{U\cap V}(f)-i_{U\cap V}(g)$. Resulta muy fácil ver que $\psi_2 \circ \psi_1 = 0$ y que la sucesión

$$(*) \qquad 0 \to A(U \cup V) \xrightarrow{\psi_1} A(U)\times A(V) \xrightarrow{\psi_2} A(U \cap V)$$

es exacta.

Si $x \in I_K$, resulta que para todo $z_0 \in V$, $x = e_{c(z)}\, w(z)$ en un entorno de z_0, con lo cual el germen de x en z_0 es un elemento de I_{z_0} y por lo tanto $i_{U\cap V}(x)(z_0) = 0$.

Entonces $\psi_2(f.i_U(x),0) = i_{U\cap V}(f.i_U(x)) = i_{U\cap V}(f).i_{U\cap V}(x) = 0$ y así la exactitud de la sucesión (*) y la observación (°) asegura la existencia de un único elemento de A tal que $i_U(y) = f.i_U(x)$, $i_V(y) = 0$. Luego, para todo z_0 elemento de K^c, el germen de y en z_0 pertenece a I_{z_0} con lo cual z_0 es un elemento de $r(a,y)$ e $y \in I_K$.

Sea entonces $\phi_U(f)(x) = y$. Tenemos:

a) $\phi_U(f)$ es A-lineal pues

i) $\phi_U(f)(x_1+x_2) = \phi_U(f)(x_1) + \phi_U(f)(x_2)$ trivialmente

ii) dado $b \in A$, $b.\phi_U(f)(x)$ es un elemento de I_K y por lo tanto $\psi_1(b.\phi_U(f)(x)) = (i_U(b).f.i_U(x),0) = (f.i_U(bx),0)$, resultando que $\phi_U(f)(bx) = b.\phi_U(f)(x)$.

b) $\phi_U: A(U) \to L_A(I_K)$ es un morfismo de A-álgebras dado que $\psi_1(\phi_U(f)\circ\phi_U(g)(x)) = \psi_1(\phi_U(f)(\phi_U(g)(x))) = (f.i_U(\phi_U(g)(x)),0) = (f.g.i_U(x),0)$.

Por último si $\theta_U = \Pi\circ\phi_U$, se tiene que $\theta_U(z_i-a_i) = 0$ pues $\Pi(z_i-a_i) = 0$. Además, si $U_1 \subset U_2$ y $i_{U_1}: O(U_2,A) \to O(U_1,A)$ tenemos $\theta_{U_1}\circ i_{U_1} = \theta_{U_2}$, quedando así demostrado el teorema.

<u>Observación II.3.2.</u> Si $K = sp(a,1)$, entonces $I_K = A$, $L_A(I_K) = A$ y así θ es un cálculo holomorfo.

4. Un teorema de Shilov

Teorema II.4.1. Sea A un álgebra de Fréchet a-representable y K un subconjunto compacto del sp(a). Si existen K_1 y K_2 compactos no vacíos tales que $K = K_1 \uplus K_2$, entonces $L_A(I_K)$ tiene elementos idempotentes no triviales.

Demostración

Sean U_1, U_2 abiertos disjuntos tales que $K_i \subset U_i$ $i = 1,2$.
Sean $U = U_1 \cup U_2$ y f el elemento de $O(U,A)$ definido como $f(z) = 1$ para $z \in U_1$, $f(z) = 0$ para $z \in U_2$. Entonces resulta fácil comprobar que si θ_U es la aplicación definida en el teorema II.3.1

a) $\theta_U(f) \in L_A(I_K)$, b) $(\theta_U(f))^2 = \theta_U(f^2) = \theta_U(f)$,

c) $\theta_U(f) \neq 0$ y $\theta_U(f) \neq 1$ pues si $x \in I_K$, $\theta_U(f)(x) = f.i_U(x) =$
$= i_U(x)$ si $x \in U_1$ y $\theta_U(f)(x) = f.i_U(x) = 0$ si $x \in U_2$.

5. Ejemplo

Mostraremos un ejemplo de un elemento a de un álgebra que satisface $N = 0$. Entonces, resultará A un álgebra a-representable.
Sean $H = \ell^2(N)$, $\ell_i \in H$ $(\ell_i)_j = \delta_{i,j}$. Sea $a:H \to H$ definida como $a(\ell_i) = \ell_{i-1}$ si $i \geq 2$, $a(\ell_1) = 0$. Sea A la subálgebra de $L(H)$ generada por a.

Proposición II.5.1. $sp(a) = \{z \in C/|z| \leq 1\}$.

Demostración

i) $sp(a) \subset \{|z| \leq 1\}$, en efecto: dado $x \in \ell^2$ $\|a(x)\| =$
$= \sum_{i=2}^{\infty} |x_i|^2 \leq \|x\|$, por lo tanto $sp(a) \subset \{|z| \leq \|a\|\} \subset$
$\subset \{|z| \leq 1\}$.

ii. $sp(a) \supset \{|z| < 1\}$.

Sea z tal que $|z| < 1$, $(z-a)(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \ell_i) = \sum_{i=1}^{\infty} z\, x_i\, \ell_i - \sum_{i=2}^{\infty} x_i\, \ell_{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} (z\, x_i - x_{i+1})\ell_i$, entonces si $x_i = z^i$ resulta que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, \ell_i$ es un elemento de ℓ^2 y $(z-a)(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, \ell_i) = 0$; en consecuencia $z-a$ no es inversi_ ble en A y por lo tanto z es un elemento del $sp(a)$.

Por último, dado que A un álgebra de Banach, $sp(a)$ es cerrado y se deduce entonces la proposición.

Proposición II.5.2.

a. si $|z| < 1$, resulta $z-a:H \to H$ suryectiva

b. si $z \neq 0$ entonces $\{\ell_i \quad i \geq 1\} \subset Im(z-a)$

Demostración

a. Sea $a^*:H \to H$ el adjunto de a, $\langle a^*(\ell_i),\ell_j\rangle = \langle \ell_i, a(\ell_j)\rangle = \langle \ell_i, \ell_{j-1}\rangle = \delta_{i+1,j}$, $\langle a^*(\ell_i),\ell_1\rangle = 0$. Por lo tanto $a^*(\ell_i) = \ell_{i+1}$, $a.a^* = id_H$ y $\|a^*\| = 1$. Entonces para todo z tal que $0 < |z| < 1$, $z(a^* - \frac{1}{z})$ es inversible en $L(H)$. Si $b:H \to H$ $b = a^*(za^*-1)^{-1}$, tenemos que $(z-a).b = (za^*-1)(za^*-1)^{-1} = 1$, obteniendo así el resultado para $0 < |z| < 1$. Si $z = 0$, $(-a)(-a^*) = 1$ lo cual completa a.

b. Sea z tal que $|z| > 0$, vamos a encontrar que todo $i \in N$, un elemento de H, $y_i = (y_{ik})_{k\geq 1}$ tal que $(z-a)(y_{ik})_{k\geq 1} = \ell_i$. Así, dado que $(z-a)(\sum_{k\geq 1} y_{ik}\, \ell_k) = \sum_{k\geq 1} (zy_{ik} - y_{ik+1})\ell_k$, deberá ocurrir $zy_{ik} - y_{ik+1} = \delta_{ik}$ y por lo tanto $y_{ik} = z^{k-1}y_{i1}$ para $k \leq i$, $y_{ik} = z^{k-1}y_{i,1} - z^{k-(i+1)}$ para $k \geq i+1$. Tomando entonces $y_{i1} = z^{-i}$ resulta que $y_{ik} = z^{k-(i+1)}$ para $k \leq i$, $y_{ik} = 0$ para $k \geq i+1$, con lo cual $y_i = \sum_{k\geq 1} y_{ik}\, \ell_k$ es un elemento de H y $(z-a)y_i = \ell_i$.

Proposición II.5.3. $N_z = 0$ para todo $z \in C^n$.

Demostración

Sean $z_0 \in C^n$, V_{z_0} un entorno de z_0 y f un elemento de $O(V_{z_0},A)$ tal que $(z-a)f(z) = 0$ en V_{z_0}. Se tiene que $f(z)(z-a)(x) = 0$ para todo $x \in H$, con lo cual como $\ell_i \in Im(z-a)$ para todo $i \in N$, $f(z)(\ell_i) = 0$ para todo $i \in N$ y en consecuencia $f(z) = 0$ en V_{z_0}.

Corolario II.5.4. A es a-representable.

6. Ejemplo

Mostraremos ahora un ejemplo de un elemento a de un álgebra A_1 tal que A_1 no es a-representable. Este ejemplo es interesante ya que se vincula estrechamente con la teoría expuesta en [9].

Sea $A_1 = A \times H$, donde A y H son los del ejemplo anterior, identificando (a,0) con a y donde el producto está definido como $(b,x).(c,y) = (bc, by + cx)$.

Proposición II.6.1. $sp(a) = \{z \in C / |z| \leq 1\}$.

Demostración

Con las identificaciones b en (b,0) para $b \in A$ y x con (0,x) para $x \in H$, la demostración resulta idéntica a la de la proposición II.5.1.

Proposición II.6.2.

a. Si $|z_0| < 1$, $N_{z_0} = O_{z_0}.\tilde{u}_{z_0}$ donde $\tilde{u}_{z_0}$ es el germen en z_0 de la función $u(z) = \sum_{k \geq 1} z^{k-1} \ell_k$.

b. Si $|z_0| \geq 1$, $N_{z_0} = 0$.

Demostración

a. Sean z_0 tal que $|z_0| < 1$, V_{z_0} entorno de z_0 y $f_1 \in \mathcal{O}(V_{z_0}, A)$, $f_2 \in \mathcal{O}(V_{z_0}, H)$ tales que $(z-a)(f_1(z), f_2(z)) = 0$ para todo $z \in V_{z_0}$. Por un lado, la proposición II.5.2. permite asegurar que $f_1(z) = 0$ en V_{z_0}. Por otro lado $f_2(z) = \sum_{k\geq 1} \varphi_k(z)\, \ell_k$ con $\varphi_k \in \mathcal{O}(V_{z_0})$ y $\sum |\varphi_k(z)|^2 < \infty$ para todo $z \in V_{z_0}$; entonces $(z-a)\, f_2(z) = 0$ para todo $z \in V_{z_0}$ implica que $z\varphi_k(z) - \varphi_{k+1}(z) = 0$ para todo $z \in V_{z_0}$. Por lo tanto $\varphi_k(z) = z^{k-1}\, \varphi_1(z)$ para todo $k \geq 1$ y para todo $z \in V_{z_0}$, de donde se deduce que $f_2(z) = u(z).\varphi_1(z)$ con $\varphi_1 \in \mathcal{O}(V_{z_0})$.

b. Sean z_0 tal que $|z_0| \geq 1$, V_{z_0} entorno conexo de z_0 y $f_1 \in \mathcal{O}(V_{z_0}, A)$, $f_2 \in \mathcal{O}(V_{z_0}, H)$ tales que $(z-a)(f_1(z), f_2(z)) = 0$ para todo $z \in V_{z_0}$. Como en a. $f_1(z) = 0$ para todo $z_0 \in V_{z_0}$. Por otro lado $z-a$ resulta inyectiva cuando $|z| \geq 1$. En efecto, si $0 \neq (x_k)_{k\geq 1}$ satisface $(z-a)((x_k)_{k\geq 1}) = 0$ entonces $z\, x_k = x_{k+1}$ para todo $k \geq 1$ de donde $(x_k)_{k\geq 1} = (z^{k-1} x_1) \in H$ si y sólo si $|z| < 1$. Luego $f_2(z) = 0$ para todo z tal que $|z| \geq 1$ que implica, considerando que V_{z_0} es un abierto conexo, que $f_2(z) = 0$ para todo $z \in V_{z_0}$.

Corolario II.6.3. Si U es un abierto conexo que contiene a $\{|z| \leq 1\}$, entonces $\mathcal{N}(U) = 0$.

Demostración

Si f es un elemento de $\mathcal{N}(U)$, la proposición II.6.2. asegura que $f(z) = 0$ para todo z tal que $|z| = 1$. Luego como f es analítica en U, f resulta nula.

Proposición II.6.4. Si U es un abierto de $\mathbb{C}$ que contiene a $\{|z| \leq 1\}$, entonces $I(U) \neq H^0(U, \mathcal{I})$.

Demostración

Sea e_1 el elemento de H, $e_1 = (1,0,0,\ldots)$. Si $i:A_1 \to \mathcal{O}(U,A_1)$ es la inclusión canónica $i(b)(z) = b$ para todo $z \in U$, entonces $i(e_1) \in H^0(U,\mathcal{I}) - I(U)$. En efecto, en primer término $i(e_1) \in H^0(U,\mathcal{I})$ ya que:

a. si $g:\{|z| < 1\} \to \mathcal{L}(H)$, indica la aplicación $a^*(za^*-1)^{-1}$ resulta que g es analítica y por lo tanto la función $g_1:\{|z| < 1\} \quad A_1$ dada por $g_1(z) = g(z)(e_1)$ es analítica y $e_1 = (z-a)g_1(z)$.

b. si $g_2:\{|z| > 0\} \to A_1$ indica la aplicación $g_2(z) = \frac{1}{z} e_1$, g_2 es analítica y $(z-a)g_2(z) = e_1$.

Por último, $i(e_1) \notin I(U)$: supongamos que esto no es cierto, entonces existe una función analítica $g:U \to A_1$ tal que $e_1 = (z-a)g(z)$ en U. Luego, teniendo en cuenta lo hecho en la proposición II.5.2 parte b, si $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)e_k$, resulta que para todo $z \neq 0$, $g_k(z) = z^{k-1} g_1(z) - z^{k-2} = z^{k-2}(z\, g_1(z)-1)$ y así $\sum_{k=2}^{\infty} |z^{k-2}|^2|z\, g_1(z)-1|^2$ es convergente para todo $z \neq 0$, con lo cual $z\, g_1(z) = 1$ para todo z tal que $|z| \geq 1$.

Teniendo en cuenta entonces que g_1 es analítica en U, y que $\{|z| = 1\} \subset U$, resulta que $z\, g_1(z) = 1$ en U que es absurdo ya que $0 \in U$.

Corolario II.6.5. Si U es un abierto de C que contiene a $\{|z| \leq 1\}$, entonces $H^1(U,\mathcal{N}) \neq 0$.

Demostración

Resulta inmediata a partir de la proposición II.2.6. y del corolación II.6.5.

<u>Corolario II.6.6.</u> A_1 no es a-representable.

<u>Demostración</u>

Inmediata a partir del Corolario II.6.5.

<u>Observación.</u> Si $\theta_U : \mathcal{O}(U,A_1) \to A_1$ es el cálculo holomorfo, entonces $\theta_U(H^0(U,\mathcal{I}))$ es un subconjunto denso de H.

<u>Demostración</u>

En primer término si $f \in H^0(U,\mathcal{I})$ y $f = (f_1,f_2)$, $f_1 \in \mathcal{O}(U,A)$, $f_2 \in \mathcal{O}(U,H)$, entonces como A tiene la p.e.u. resulta que $f_1 \in (z-a).\mathcal{O}(U,A)$, con lo cual la primer componente de $\theta_U(f)$ es nula y entonces $\theta_U(f) \in H$. En segundo lugar, como en la demostración de la proposición II.6.4, se prueba que $i(e_n) \in H^0(U,\mathcal{I})$ para todo n natural, con lo cual si S es el subespacio de H generado algebraicamente por $\{e_n : n \geqslant 1\}$, resulta que $i(S) \subset H^0(U,\mathcal{I})$ y $\theta_U(i(S)) = S$ que es denso en H.

APENDICE

Teorema

Sea $K = \bigoplus_{p,q\geq 0} K^{p,q}$ un módulo bi-graduado, $d':K^{p,q} \to K^{p+1,q}$ y $d'':K^{p,q} \to K^{p,q+1}$ morfismos de módulos que satisfacen

i) $d'\circ d' = 0$, ii) $d''\circ d'' = 0$, iii) $d'\circ d'' + d''\circ d' = 0$.

Sea $K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$, la aplicación $d'+d'':K^n \to K^{n+1}$ define un complejo $(K,d'+d'')$

Sea $K^{p,*} = \bigoplus_{q\geq 0} K^{p,q}$, $(K^{p,*},d'')$ es un complejo que da lugar a los grupos de cohomología $H^q(K^{p,*},d'') = {}''H^q(K^{p,*})$

La aplicación $d':K^{p,q} \to K^{p+1,q}$ induce un morfismo $d':{}''H^q(K^{p,*}) \to {}''H^q(K^{p+1,*})$ ya que gracias a iii) $d'\mathrm{Ker}\, d'' \subset \mathrm{Ker}\, d''$ y $d'\mathrm{Im}\, d'' \subset \mathrm{Im}\, d''$.

Sea ${}''H^q(K) = \bigoplus_p {}''H^q(K^{p,*})$. Se tienen los complejos $({}''H^q(K),d')$ que dan lugar a los grupos de cohomología ${}'H^p\, {}''H^q(K)$.

Sea $\mathcal{R} = \bigoplus_p \mathcal{R}^p$ donde $\mathcal{R}^p = \{w \in K^{p,q}$ tal que $d''w = 0\}$, tenemos el complejo $(\mathcal{R},d')$.

El teorema dice que si ${}'H^p\, {}''H^q(K) = 0$ para todo $p \geq 0$ y para todo $q \geq 1$, entonces $H^p(K,d'+d'') \cong H^p(\mathcal{R},d')$.

Demostración

(ver [8] pág. 86)

BIBLIOGRAFIA

1. Bourbaki. Livre V, Espaces vectoriels topologiques ch IV, pârrafo 2, n° 3.

2. Albrecht Pietsch. Nuclear Locally Convex Spaces. Ergebnisse der Mathematik un ihrer Grenzgebiete. Band 66. Springer 1972.

3. Lutz Bungart. Holomorfphic Functions with values in locally convex spaces and aplications to integral formulas. Transactions of the Americal Mathematical Society 111 (1964) 317-344.

4. A Grothendieck. Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires. Memoirs of the American Mathematical Society 16 (1955).

5. Gauert R. Remmet. Theory of Stein Spaces. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 236-Springer N.Y. 1979.

6. Richard Arens. Dense Inverse Limit Rings. Michigan Math. Journal 5. 1958.

7. R.C.Gunning and H. Rossi. Analytic functions of several complex variables. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs. N.Y. 1965.

8. R. Godement. Topologie algébrique et théorie de faisceaux. Hermann. Paris. 1958.

9. Michael J. Cowen and Ronald Douglas. Operator theory and complex Geometry. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Volume 30. Part 2.