Un problema de contorno con condiciones no lineales en la derivada normal

Marquez, Viviana

1987

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

UN PROBLEMA DE CONTORNO CON CONDICIONES NO LINEALES EN LA DERIVADA NORMAL

por

Viviana Márquez

Director de Tesis:
Dr. Julio E. Bouillet

Lugar de Trabajo:
Departamento de Matemática

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

1987

INDICE

INTRODUCCION

El punto de partida de esta tesis fue un trabajo realizado con el Dr. Meir Shillor [MS] donde estudiamos el problema de electropintura con sobrepotenciales. Este problema, que llamamos (P_o), consiste en hallar un par de funciones $(\Psi(x,t), h(x,t))$ tales que $(\Psi(x,t))_{t\geq 0}$ es una familia de funciones armónicas en un dominio anular Ω, con frontera exterior S y frontera interior Γ, y el tiempo t hace las veces de un parámetro; h está definida en $\Gamma\times[0,T]$ y es en las ecuaciones que la contienen donde t pasa a ser una variable más. Ambas satisfacen

$$(P_o)\quad \begin{array}{lll} (1.1) & \Delta_x \Psi = 0 & \text{en } \Omega, \quad 0\leq t\leq T \\ (1.2) & \Psi = 1 & \text{en } S, \quad 0\leq t\leq T \\ (1.3) & \Psi_{\nu_i} = \dfrac{\Psi}{h} & \text{en } \Gamma, \quad 0\leq t\leq T \\ (1.4) & h(x,t) = \sigma(x) + \displaystyle\int_0^t G\left(\left(\frac{\Psi(x,\tau)}{h(x,\tau)} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau & \text{en } \Gamma, \quad 0\leq t\leq T \end{array}$$

donde ν_i es el vector normal interior a Ω sobre Γ; $\varepsilon > 0$, $T > 0$ son constantes dadas, y σ y G funciones dadas sobre las que hacemos las suposiciones (1.5) y (1.6).

El significado físico de este problema se puede encontrar en el Capítulo 1, que resume los resultados obtenidos en [MS] para (P_o): en los teoremas 1.1 y 1.2 se establece la existencia y unicidad de solución así como la regularidad de la misma; dicha solución tiende en forma creciente, cuando $t\uparrow\infty$, a una función que resulta ser la única solución del estado estacionario correspondiente a (P_o), que llamaremos (P_o^∞), y que consiste en hallar un par de funciones $(\bar{\Psi}(x),\bar{h}(x))$ tales que

$$
(P_o^\infty)\quad
\begin{array}{llll}
(1.11) & \Delta\bar{\Psi} = 0 & \text{en } \Omega & \\
(1.12) & \bar{\Psi} = 1 & \text{en } S & \\
(1.13) & \bar{\Psi}_{\nu_i} = \dfrac{\bar{\Psi}}{\bar{h}} & \text{p.p. en } \Gamma & \\
(1.14) & \begin{array}{l} \bar{\Psi}_{\nu_i}(x) = \varepsilon \\ \bar{\Psi}_{\nu_i}(x) \leq \varepsilon \end{array} & \begin{array}{l} \text{si } \bar{h}(x) > \sigma(x) \\ \text{si } \bar{h}(x) = \sigma(x) \end{array} & \text{p.p. en } \Gamma
\end{array}
$$

lo que se enuncia en los teoremas 1.3 y 1.4. Podemos observar que (1.14) se obtiene de poner $h_t = 0$ en (1.4) lo cual nos daría $\frac{\bar{\Psi}}{\bar{h}} = \bar{\Psi}_{\nu_i} \leq \varepsilon$; la condición $\bar{\Psi}_{\nu_i}(x) = \varepsilon$ si $\bar{h}(x) > \sigma(x)$ se deduce del hecho de que si para algún $\bar{x} \in \Gamma$, $r > 0$, $h(\bar{x},r) > \sigma(\bar{x})$ entonces $h_t(\bar{x},t) > 0$ $\forall t \geq r$ ((1.10)) o lo que es lo mismo $\frac{\Psi}{h}(\bar{x},t) = \Psi_{\nu_i}(\bar{x},t) > \varepsilon$. Es interesante destacar que estas dos condiciones que parecen de tipo cualitativo son suficientes para probar la unicidad de solución de (P_o^∞) (teorema 1.4). La equivalencia del problema (P_o^∞) con una inecuación variacional de tipo Signorini se puede encontrar en el teorema 1.5.

En esta tesis estudiaremos el problema que llamaremos (P_α) y que surge de reemplazar (1.1) por una ecuación parabólica, donde $\alpha > 0$ aparece como un parámetro, a saber:

$$\alpha u_t = \Delta_x u \qquad \text{en } \Omega\times(0,T) ,$$

con las mismas condiciones de contorno que para (P_o) y al que le agregamos un dato inicial con hipótesis que resultan naturales si pensamos en la solución del problema de electropintura en $t=0$, para luego hacer $\alpha \to 0$ y tratar de mejorar los resultados obtenidos en [MS], aunque (P_α) no posea un significado físico inmediato.

Para fijar ideas pensemos primero en el problema (P_1) que consiste en hallar un par de funciones $(u(x,t),h(x,t))$ tales que

$$
(P_1)\quad
\begin{array}{llll}
(2.1) & u_t = \Delta_x u & \text{en} & \Omega\times(0,T) \\
(2.2) & u = 1 & \text{en} & S\times(0,T) \\
(2.3) & u_{\nu_i} = \dfrac{u}{h} & \text{en} & \Gamma\times(0,T) \\
(2.4) & h(x,t) = \sigma(x) + \displaystyle\int_0^t G\left(\left(\frac{u(x,\tau)}{h(x,\tau)} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau & \text{en} & \Gamma\times(0,T) \\
(2.5) & u(x,0) = u^o(x) & \text{en} & \Omega
\end{array}
$$

donde ahora hacemos las suposiciones (2.6) y (2.7) sobre las funciones σ, G y u^o (Capítulo 2). Vemos que la condición (2.6) es más general que (1.5) y como vamos a esperar menos regularidad en la solución, comenzaremos por decir (definición 2.1) qué entenderemos por solución débil de (P_1).

Una de las condiciones que debe satisfacer una solución débil (u,h) donde $u \in H^1(\Omega\times(0,T)) \cap L^\infty(\Omega\times(0,T))$ y $h \in$ $\in L^\infty(\Gamma\times(0,T))$ es que es equivalente a

$$\int_{\Omega} u_t(x,t)\varphi(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u(x,t).\nabla\varphi(x)dx + \int_{\Gamma} \frac{u(x,t)}{h(x,t)}\varphi(x) = 0 \ ,$$

$$\forall\varphi \in H^1(\Omega)\ ,\ \varphi = 0 \ \text{en} \ S$$

$$\text{p.p.} \ t \in (0,T) \ ,$$

lo cual se deduce del hecho de que al aparecer la derivada en t en la función u en (2.8) se puede separar variables en las funciones de prueba η .

Para encontrar dicha solución usaremos un proceso iterativo para el cual debemos buscar solución del mismo problema pero para h dada. Definiremos aproximantes y obtendremos las cotas necesarias para poder pasar al límite: lema 2.4 y teorema 2.5. La existencia y unicidad de solución débil de (P_1) se demuestra en los lemas 2.6, 2.7, 2.8 y teorema 2.9. El paso fundamental para la existencia es la obtención de la acotación (2.58) la que permite deducir la fórmula (2.62). El uso de acotaciones similares nos dan la demostración de unicidad, siempre para T suficientemente chico, pero una vez probados los resultados para este caso podemos usarlos, así como también las ideas de sus demostraciones, para estudiar el caso general.

El comportamiento asintótico de la solución débil de (P_1) se estudia en el Capítulo 3. En la definición 3.1 diremos qué entenderemos por solución débil de (P_o^∞), el estado estacionario de (P_o). En el teorema 3.3 podemos observar que en caso de ser σ como en (1.5) y agregando ciertas hipótesis al dato inicial, la solución de (P_1) tiende de manera creciente a la solución del estado estacionario del problema de electropintura, obteniendo de esta forma una aproximación de la misma mediante la solución de un problema parabólico.

Los mismos resultados obtenidos en los Capítulos 2 y 3 se pueden conseguir para el problema (P_α) los resumimos en los teoremas 4.6 y 4.7, donde aparece además una acotación que nos permite pasar al límite cuando $\alpha \to 0$, en el caso de tener como dato inicial a una función armónica (lema 4.8 y teorema 4.9). Como antes, la demostración se realiza primero para T suficientemente chico, donde es esencial la obtención de la fórmula (4.38), y luego lo probamos en general.

Definimos solución débil del problema (P_o) y probamos unicidad de solución (teorema 4.13) y aproximación de la misma por soluciones de (P_α) con dato inicial más general (teorema 4.14). Además, esta solución tiende en forma creciente a la única solución débil de (P_o^∞) (teorema 4.15), de la misma forma que las soluciones de (P_α) (teorema 4.7).

NOTACION

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un dominio anular con frontera exterior S y frontera interior Γ ; $\bar{\Omega} = \Omega \cup S \cup \Gamma$.

Con $(x,t) = (x_1,\ldots,x_n,t)$ notaremos puntos de $\bar{\Omega}\times[0,\infty)$;

$$\nabla = (D_{x_1},\ldots,D_{x_n}) \qquad \Delta = \Delta_x = \sum_{i=1}^{n} D^2_{x_i} \ ;$$

ν_i es el vector normal interior a Ω sobre Γ ;

$$(z)^+ = \text{máx}\ \{0,z\} \quad \text{y} \quad (z)^- = \text{mín}\ \{0,z\}\ .$$

Para cada $t \geq 0$ sea

$$\Omega_t = \Omega\times\{t\} \quad \text{y} \quad \Gamma_t = \Gamma\times\{t\}$$

y para cada $T > 0$ sea

$$Q_T = \Omega\times(0,T) \quad \text{y} \quad R_T = \Gamma\times(0,T)\ .$$

Usaremos frecuentemente la notación abreviada:

$\int_{\Omega_t} g = \int_{\Omega_t} g(x,t)$, sobreentendiendo la integración con respecto a dx , $x \in \Omega$,

en lugar de $\int_{\Omega} g(x,t)\,dx$.

La siguiente nomenclatura es habitual:

$$C^\alpha(K) = \{\phi \in C^0(K) : \sup_{\substack{x,y\in K \\ x\neq y}} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{\|x-y\|^\alpha} < \infty\}\ ,\ \alpha \in (0,1)\ ,$$

$K \subset \mathbb{R}^n$, compacto,

$$\|\phi\|_\alpha = \sup_{x \in K} |\phi(x)| + \sup_{\substack{x,y \in K \\ x \neq y}} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{\|x - y\|^\alpha}$$

$$C^{1,\alpha}(K) = \{\phi \in C^1(K) : \phi_{x_i} \in C^\alpha(K) \ , \ 1 \leqslant i \leqslant n\} \ , \ \alpha \in (0,1) \ ,$$

$K \subset R^n$, compacto,

$$\|\phi\|_{1,\alpha} = \sup_{x \in K} |\phi(x)| + \sum_{i=1}^{n} \|\phi_{x_i}\|_\alpha$$

$$\text{Lips}(\Gamma) = \{\phi : \phi \text{ continua Lipschitz sobre } \Gamma\}$$

$$\|\phi\|_{\text{Lips}(\Gamma)} = \sup_{\substack{x,y \in \Gamma \\ x \neq y}} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{\|x - y\|} + \sup_{x \in \Gamma} |\phi(x)|$$

En los siguientes espacios las derivadas son consideradas en el sentido de las distribuciones:

$$H^1(\Omega) = \{\phi \in L^2(\Omega) : \phi_{x_i} \in L^2(\Omega) \ , \ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega)} = (\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\phi_{x_i}\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$$

$$H^{1,0}(Q_T) = \{\eta \in L^2(Q_T) : \eta_{x_i} \in L^2(Q_T) \ , \ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

$$\|\eta\|_{H^{1,0}(Q_T)} = (\|\eta\|^2_{L^2(Q_T)} + \sum_{i=1}^{n} \|\eta_{x_i}\|^2_{L^2(Q_T)})^{1/2}$$

$$H^1(Q_T) = \{\eta \in L^2(Q_T) : \eta_{x_i} \in L^2(Q_T) \ , \ 1 \leqslant i \leqslant n \ , \ \eta_t \in L^2(Q_T)\}$$

$$\|\eta\|_{H^1(Q_T)} = (\|\eta\|^2_{L^2(Q_T)} + \|\eta_t\|^2_{L^2(Q_T)} + \sum_{i=1}^{n} \|\eta_{x_i}\|^2_{L^2(Q_T)})^{1/2}$$

$$V = \{\phi \in H^1(\Omega) \; : \; \phi = 0 \;\; \text{en} \;\; S\}$$

$$W_T = \{\eta \in H^1(Q_T) \; : \; \eta = 0 \;\; \text{en} \;\; S \times (0,T)\}$$

$$L^\infty(0,T;\, H^1(\Omega)) = \{\eta \; : \; \underset{0<t<T}{\text{sup es}} \; \|\eta\|_{H^1(\Omega_t)} < \infty\}$$

$$\|\eta\|_{L^\infty(0,T;\, H^1(\Omega))} = \underset{0<t<T}{\text{sup es}} \; \|\eta\|_{H^1(\Omega_t)}$$

$$L^\infty(0,T;\, L^2(\Gamma)) = \{\eta \; : \; \underset{0<t<T}{\text{sup es}} \; \|\eta\|_{L^2(\Gamma_t)} < \infty\}$$

$$\|\eta\|_{L^\infty(0,T;\, L^2(\Gamma))} = \underset{0<t<T}{\text{sup es}} \; \|\eta\|_{L^2(\Gamma_t)}$$

$$W^{1,2}(0,T;\, H^1(\Omega)) \equiv H^1(0,T;\, H^1(\Omega)) = \{\eta : \int_0^T \|\eta\|^2_{H^1(\Omega_t)} + \int_0^T \|\eta_t\|^2_{H^1(\Omega_t)} < \infty\}$$

$$\|\eta\|_{H^1(0,T;\, H^1(\Omega))} = \left(\int_0^T \|\eta\|^2_{H^1(\Omega_t)} + \int_0^T \|\eta_t\|^2_{H^1(\Omega_t)}\right)^{1/2}$$

$$W^{1,\infty}(0,T;\, H^1(\Omega)) = \{\eta : \text{máx}\left(\underset{0<t<T}{\text{sup es}} \; \|\eta\|_{H^1(\Omega_t)}, \underset{0<t<T}{\text{sup es}} \; \|\eta_t\|_{H^1(\Omega_t)}\right) < \infty\}$$

$$\|\eta\|_{W^{1,\infty}(0,T;\, H^1(\Omega))} = \text{máx}\left(\underset{0<t<T}{\text{sup es}} \; \|\eta\|_{H^1(\Omega_t)}, \underset{0<t<T}{\text{sup es}} \; \|\eta_t\|_{H^1(\Omega_t)}\right)$$

1. EL PROBLEMA DE ELECTROPINTURA CON SOBREPOTENCIALES

Este problema, que llamaremos (P_0), consiste en hallar un par de funciones $(\psi(x,t),\ h(x,t))$ tales que

$$
(P_0)\quad
\begin{array}{lll}
(1.1) & \Delta\Psi = 0 & \text{en } \Omega\times[0,T] \\
(1.2) & \Psi = 1 & \text{en } S\times[0,T] \\
(1.3) & \Psi_{\nu_i} = \dfrac{\Psi}{h} & \text{en } \Gamma\times[0,T] \\
(1.4) & h(x,t) = \sigma(x) + \displaystyle\int_0^t G\left(\left(\frac{\Psi(x,\tau)}{h(x,\tau)} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau & \text{en } \Gamma\times[0,T]
\end{array}
$$

donde S y $\Gamma \in C^{1,\alpha}$, $\forall\alpha \in (0,1)$; $\varepsilon > 0$, $T > 0$ son constantes dadas.

Hacemos las siguientes suposiciones sobre las funciones σ y G:

$$(1.5)\quad \sigma \in \mathrm{Lips}\,(\Gamma)$$

$$0 < \sigma_* \leqslant \sigma(x) \leqslant \sigma^* < \frac{1}{\varepsilon}$$

$$(1.6)\quad G \in C^1(\mathbb{R})\ ,\quad 0 < k_* \leqslant G' \leqslant k^*\ ,\quad G(0) = 0\ .$$

Problemas similares fueron considerados por Hansen y Mc Geough, [HMG], Aitchison, Lacey y Shillor, [ALS], y Caffarelli y Friedman, [CF]. En todos estos trabajos se supone $G(s) = s$ y $\sigma = 0$.

Un problema del tipo (1.1)-(1.4) se puede considerar (ver [ALS] o [HMG]) como un modelo para el siguiente proceso: Un cuerpo metálico con superficie exterior Γ, que se desea pintar, se sumerge en un recipiente con una solución electrolítica. La solución ocupa el dominio Ω tal que $\partial\Omega = \Gamma \cup S$, donde S es la superficie interior del recipiente. La parte metálica se conecta a una fuente de potencial eléctrico, el recipiente mismo (S) actúa como el otro electrodo y, como resultado del flujo de la corriente eléctrica en la solución y a través de Γ , un proceso de deposición de pintura se lleva a cabo sobre Γ . La presencia de $\varepsilon > 0$ en 1.4, que fue postulada en [ALS], nos dice que solo hay deposición de pintura en aquellos puntos de Γ donde la corriente Ψ_{ν_i} satisface $\Psi_{\nu_i} > \varepsilon$. Uno de los principales propósitos de la construcción del modelo en [ALS] fue poder predecir qué partes de Γ resultan pintadas y cuáles no.

Es conocido (ver p.e. Levich [Le] o Mc Geough [MG]),el hecho de que mientras la corriente eléctrica está pasando a través de una solución, algunos procesos que conducen a una relación no lineal entre el potencial y la corriente, tienen lugar cerca de los electrodos. Esto viene representado por (1.3). Más aún, tomando $\sigma(x) > 0$ se permite que ciertos procesos tengan lugar cerca de Γ , aún cuando no den como resultado deposición de pintura, de manera que en nuestro caso el espesor de pintura (adimensional) es $h(x,t) - \sigma(x)$ para $x \in \Gamma$, $0 \leqslant t$. Nos referimos a estos dos fenómenos, en forma vaga, mencionando el empleo de *sobrepotenciales* ([Le],[MG],[La]).

Lo que sigue es una serie de resultados que citaremos en los próximos capítulos y cuyas demostraciones se pueden encontrar en [MS]

Sea ω_* la solución de

$$\Delta\omega_* = 0 \quad \text{en} \quad \Omega$$

$$\omega_* = 1 \quad \text{en} \quad S$$

$$\omega_{*_{\nu_i}} = \frac{\omega *}{\sigma} \quad \text{en} \quad \Gamma$$

de manera que $\omega_*(x) = \Psi(x,0)$ donde Ψ es solución de (P_o). Si

$$\omega_{*_{\nu_i}} \leqslant \varepsilon \quad \text{en} \quad \Gamma$$

entonces $\Psi(x,t) \equiv \omega_*(x)$ junto con $h(x,t) \equiv \sigma(x)$ son solución del problema (P_o) . Para excluir este caso trivial suponemos que la geometría y los datos son tales que

$$\omega_{*_{\nu_i}} > \varepsilon \quad \text{para algunos puntos} \quad x \in \Gamma \ .$$

<u>Teorema 1.i</u>: Existe una única solución (Ψ,h) del problema (P_o) para cada $T > 0$ que satisface

$$\begin{aligned}
&\Psi \in W^{1,2}(0,T;\ H^1(\Omega)) \cap C^\alpha(\bar{\Omega}\times[0,T]) \\
(1.7) \qquad &\Psi \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \qquad , \ 0 \leqslant t \leqslant T \\
&h,\ h_t, \Psi_{\nu_i} \in C^\alpha(\Gamma\times[0,T]) \ , \quad \forall\alpha \in (0,1) .
\end{aligned}$$

Más aún

$$\Psi \in W^{1,\infty}(0,T;\ H^1(\Omega)) .$$

La demostración se basa en la discretización del tiempo, obteniendo un sistema de problemas elípticos y cotas necesarias a priori.

En realidad podemos obtener más regularidad:

Teorema 1.2:

$$(1.8)\qquad \begin{aligned} &\nabla\Psi \quad \text{es continuo en} \quad \bar{\Omega}\times[0,T] \\ &\Psi_t(\cdot,t) \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \ , \quad 0 \leq t \leq T \\ &\Psi_t \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}\times[0,T]) \\ &\Psi_{\nu_i t} \in C^{\alpha}(\Gamma\times[0,T]) \qquad \forall\alpha \in (0,1)\,. \end{aligned}$$

Además

$$(1.9)\qquad \begin{aligned} &0 < \Psi \leq 1 \qquad \text{en} \quad \bar{\Omega}\times[0,T]\,, \\ &\Psi(x,t_1) < \Psi(x,t_2) \ , \ \forall x \in \Omega\cup\Gamma, \quad \text{si} \quad t_1 < t_2, \end{aligned}$$

y si para algún $\bar{x} \in \Gamma$, $r > 0$

$$h(\bar{x},r) > \sigma(\bar{x})$$

entonces

$$(1.10)\qquad h_t(\bar{x},t) > 0 \qquad \forall t \geq r\ .$$

El estado estacionario asociado al problema (P_o) se describe mediante el siguiente problema que llamaremos (P_o^∞):

Hallar un par de funciones $(\bar{\Psi}(x), \bar{h}(x))$, $\bar{\Psi} \in C^1(\bar{\Omega})$, $\bar{h} \in L^\infty(\Gamma)$, tales que

$$(P_o^\infty)\quad \begin{cases} (1.11) & \Delta\bar{\Psi} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ (1.12) & \bar{\Psi} = 1 \quad \text{en} \quad S \end{cases}$$

$$(P_o^\infty)\quad \begin{cases} (1.13) & \bar{\Psi}_{\nu_i} = \dfrac{\bar{\Psi}}{\bar{h}} & \text{p.p. en } \Gamma \\ (1.14) & \begin{cases} \bar{\Psi}_{\nu_i}(x) = \varepsilon & \text{si } \bar{h}(x) > \sigma(x) \\ \bar{\Psi}_{\nu_i}(x) \leq \varepsilon & \text{si } \bar{h}(x) = \sigma(x) \end{cases} & \text{p.p. en } \Gamma . \end{cases}$$

Entonces obtenemos el

<u>Teorema 1.3</u>: $\Psi(x,t) \nearrow \bar{\Psi}(x)$ en $C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\forall\alpha \in (0,1)$ y débilmente en $H^1(\Omega)$, y $h(x,t) \nearrow \bar{h}(x)$ puntualmente en Γ, cuando $t \to \infty$. Más aún, $\bar{h}(x) \leq 1/\varepsilon$.

y además el

<u>Teorema 1.4</u>: Existe una única solución $(\bar{\Psi},\bar{h})$ del problema (P_o^∞) Más aún

$$(1.15)\quad \begin{aligned} &\bar{\Psi} \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \\ &\bar{h} \in C^\alpha(\Gamma) \qquad \forall\alpha \in (0,1). \end{aligned}$$

Definamos ahora el obstáculo

$$Z(x) = \lim_{t\uparrow\tau(x)} \Psi(x,t) \qquad , x \in \Gamma$$

donde

$$\tau(x) = \sup\{t \geq 0 : h(x,t) = \sigma(x)\} \qquad , x \in \Gamma$$

y el convexo cerrado

$$K = \{\zeta \in H^1(\Omega) \; : \; \zeta = 1 \;\; \text{en} \;\; S \; , \; \zeta \geq Z \;\; \text{en} \;\; \Gamma\}$$

para formular una inecuación variacional, un problema de Signorini, que será equivalente al problema (P_o^∞).

Entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.5: $(\bar{\Psi},\bar{h})$ es solución del problema (P_o^∞) si y sólo si $\bar{\Psi} \in K$ y satisface la inecuación variacional

$$(1.16) \quad \int_\Omega \nabla\bar{\Psi}.\nabla(\zeta - \bar{\Psi}) + \varepsilon \int_\Gamma (\zeta - \bar{\Psi}) \geq 0 \qquad \forall \zeta \in K \; .$$

Finalmente, la condición $\sigma(x) \geq \sigma_* > 0$ es esencial para las demostraciones de los teoremas anteriores, pero estudiamos, en [MS], el caso $\sigma(x) \equiv 0$ suponiendo que S es ahora la frontera interior de Ω, Γ la frontera exterior, ambas en $C^{1,\alpha}$, $\forall \alpha \in (0,1)$, Γ es convexa y $G(s) = s$. Obtuvimos el

Teorema 1.6: Si $\sigma(x) \equiv 0$ se obtiene una solución débil $(\Psi(x,t), h(x,t))$ del problema (P_o) para cada $T > 0$, en el siguiente sentido:

i) $\Psi \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega)) \cap C^\alpha(\bar{\Omega} \times [0,T])$, $\forall \alpha \in (0,1)$

$h \in L^\infty(\Gamma \times (0,T))$,

$h_t \in L^\infty(0,T \; ; \; L^2(\Gamma))$.

ii) $\Delta\Psi = 0$ en $\Omega \times [0,T]$

$\Psi = 1$ en $S \times [0,T]$

iii) existe una función $\Psi_{\nu_i} \in L^\infty(0,T; L^2(\Gamma))$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla\zeta . \nabla\Psi = - \int_{\Gamma} \zeta \, \Psi_{\nu_i} \qquad \text{para casi todo} \quad t \in [0,T],$$

para toda función suave ζ tal que $\zeta = 0$ en un entorno de S, de modo que Ψ_{ν_i} puede considerarse como una derivada normal interior generalizada de Ψ

iv) $h \, \Psi_{\nu_i} = \Psi$ para casi todo punto de $\Gamma \times [0,T]$

v) $h = \int_0^t (\Psi_{\nu_i} - \varepsilon)^+ \, d\tau$ para casi todo punto de $\Gamma \times [0,T]$.

La solución se obtiene como un límite monótono de soluciones con $\sigma(x) \equiv \sigma > 0$, cuando $\sigma \to 0$, para las cuales conseguimos acotaciones a priori.

2. EL PROBLEMA PARABOLICO ASOCIADO AL DE ELECTROPINTURA

El problema parabólico (P_1) asociado a (P_o) consiste en hallar un par de funciones $(u(x,t),\ h(x,t))$ tales que

$$
(P_1)\quad
\begin{array}{lll}
(2.1) & u_t = \Delta u & \text{en } \Omega \times (0,T) \\
(2.2) & u = 1 & \text{en } S \times (0,T) \\
(2.3) & u_{\nu_i} = \dfrac{u}{h} & \text{en } \Gamma \times (0,T) \\
(2.4) & h(x,t) = \sigma(x) + \displaystyle\int_0^t G\left(\left(\frac{u(x,\tau)}{h(x,\tau)} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau & \text{en } \Gamma \times (0,T) \\
(2.5) & u(x,0) = u^o(x) & \text{en } \Omega
\end{array}
$$

donde S y $\Gamma \in C^1$; $\varepsilon > 0$, $T > 0$ son constantes dadas.

Hacemos las siguientes suposiciones sobre las funciones σ , G y u^o :

$$
(2.6)\quad
\begin{array}{l}
\sigma \in L^\infty(\Gamma) \quad , \ 0 < \sigma_* \leqslant \sigma(x) \leqslant \sigma^* \\
G \in C^1(\mathbb{R}) \ , \ 0 \leqslant k_* \leqslant G' \leqslant k^* \qquad G(0) = 0 \\
u^o \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \ , \ u^o = 1 \ \text{ en } S
\end{array}
$$

y suponemos que existe $f \in L^2(\Omega)$ tal que

$$
(2.7)\quad \int_\Omega \nabla u^o . \nabla \varphi + \int_\Gamma \frac{u^o}{\sigma} \varphi = - \int_\Omega f \varphi \qquad \forall \varphi \in V .
$$

<u>Definición 2.1</u>: Una *solución débil de* (P_1) es un par de funciones $(u(x,t),\ h(x,t))$ tal que $u \in H^1(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$, $h \in L^\infty(R_T)$ y satisfacen (2.2), (2.4), (2.5) y

$$
(2.8)\quad \int_{Q_T} u_t \eta + \int_{Q_T} \nabla u . \nabla \eta + \int_{R_T} \frac{u}{h} \eta = 0 , \qquad \forall \eta \in W_T .
$$

Resolvamos primero el problema para h dada por

$$(2.9) \quad h(x,t) = \sigma(x) + \int_0^t G\left(\left(\frac{u^*(x,\tau)}{h^*(x,\tau)} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau \qquad \text{en } \Gamma \times (0,T)$$

donde

$$(2.10) \qquad u^* \in L^\infty(R_T)$$

y además

$$(2.11) \qquad h^* \geqslant \sigma_* \ .$$

Notar que por la definición de h, (2.10), (2.11) y las hipótesis hechas sobre G y σ resulta

$$(2.12) \qquad \begin{aligned} & h \in L^\infty(R_T) \\ & h \geqslant \sigma_* \\ & h_t \in L^\infty(R_T) \ . \end{aligned}$$

Comenzaremos por resolver el siguiente problema $(P_1(h))$: Hallar una función $u(x,t)$ tal que

$$(P_1(h)) \quad \begin{array}{lll} (2.1) & u_t = \Delta u & \text{en } \Omega\times(0,T) \\ (2.2) & u = 1 & \text{en } S\times(0,T) \\ (2.3') & u_{\nu_i} = u/h & \text{en } \Gamma\times(0,T) \\ (2.5) & u(x,0) = u^o(x) & \text{en } \Omega \end{array}$$

En (2.3') h viene dada por (2.9).

<u>Definición 2.2</u>: Una *solución débil de* $(P_1(h))$ es una función $u \in H^1(Q_T)$ que satisface (2.2), (2.5) y

$$(2.13)\quad \int_{Q_T} u_t\eta + \int_{Q_T} \nabla u.\nabla\eta + \int_{R_T} \frac{u}{h}\eta = 0 \qquad \forall \eta \in W_T .$$

En (2.13) h viene dada por (2.9).

Pongamos $v = u-1$ y entonces (2.1), (2.2),(2.3') y (2.5) se transforman en

$$(\widetilde{P}_1(h))\quad \begin{cases} (2.1') & v_t = \Delta v & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ (2.2') & v = 0 & \text{en } S \times (0,T) \\ (2.3'') & v_{\nu_i} = \dfrac{v}{h} + \dfrac{1}{h} & \text{en } \Gamma \times (0,T) \\ (2.5') & v(x,0) = u^o(x) - 1 & \text{en } \Omega . \end{cases}$$

<u>Definición 2.3</u>: Una *solución débil de* $(\widetilde{P}_1(h))$ es una función $v \in W_T$ que satisface (2.5') y para casi todo $t \in (0,T)$

$$(2.14)\quad \int_{\Omega_t} v_t\varphi + \int_{\Omega_t} \nabla v.\nabla\varphi + \int_{\Gamma_t} \frac{v+1}{h}\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in V .$$

Sea $\{w_1,\ldots,w_m,\ldots\}$ una base de V en el siguiente sentido:

i) Para todo m, $\{w_1,\ldots,w_m\}$ es un conjunto linealmente independiente;

ii) Las combinaciones $\{\sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\xi_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq m$, son densas en V.

Además elegimos w_1 de manera tal que $u^o - 1$ pertenezca al subespacio generado por w_1 y el producto escalar $(w_i,w_j)_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}$, $\forall i$, $\forall j$

La idea es aproximar v por funciones v_m definidas por

$$v_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} g_k(t)\; w_k(x) \qquad \text{en} \qquad \Omega \times (0,T)$$

donde (g_k) verifican el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(2.15) \qquad \sum_{k=1}^{m} g_k'(t) \int_{\Omega_t} w_k\, w_j + \sum_{k=1}^{m} g_k(t) \int_{\Omega_t} \nabla w_k . \nabla w_j + \sum_{k=1}^{m} g_k(t) \int_{\Gamma_t} \frac{w_k}{h}\, w_j + \int_{\Gamma_t} \frac{w_j}{h} = 0 \;, \quad 1 \leqslant j \leqslant m \;,$$

o sea,

$$(2.16) \qquad g_j'(t) = - \sum_{k=1}^{m} g_k(t) \left(\int_{\Omega_t} \nabla w_k . \nabla w_j + \int_{\Gamma_t} \frac{w_k}{h}\, w_j \right) - \int_{\Gamma_t} \frac{w_j}{h} \qquad 1 \leqslant j \leqslant m \;,$$

con la condición inicial

$$(2.17) \qquad \begin{aligned} g_1(0) &= \| u^o - 1 \|_{L^2(\Omega)} \\ g_k(0) &= 0 \qquad\qquad k > 1 \;. \end{aligned}$$

El sistema (2.16) junto con las condiciones iniciales (2.17) es equivalente al sistema de ecuaciones integrales

$$g_j(t) = g_j(0) - \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{m} g_k \left(\int_{\Omega_t} \nabla w_k . \nabla w_j + \int_{\Gamma_t} \frac{w_k}{h}\, w_j \right) + \int_{\Gamma_t} \frac{w_j}{h} \right), \quad 1 \leqslant j \leqslant m \;.$$

Por (2.12) existe $M > 0$ tal que

$$\left| \int_{\Omega_t} \nabla w_k . \nabla w_j + \int_{\Gamma_t} \frac{w_k}{h} w_j \right| \leqslant M \qquad \forall \quad \begin{array}{l} 1 \leqslant j,k \leqslant m \\ 0 \leqslant t \leqslant T \end{array} .$$

Lo que sigue es una versión abreviada de la demostración usual de existencia y unicidad de la solución.

Sea $d > 0$ tal que $mMd < 1$

Consideremos el espacio C_m, cuyos elementos son los sistemas ordenados $\bar{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ de m funciones, definidas y continuas para todo t, siempre que $|t| \leqslant d$ y cuya métrica está definida por

$$\rho(\bar{\phi}, \bar{\psi}) = \max_{t,i} |\phi_i(t) - \psi_i(t)| .$$

La aplicación $A\bar{\phi} = \bar{\psi}$ definida por

$$\psi_j(t) = g_j(0) - \int_0^t \Big(\sum_{k=1}^m \phi_k \quad \Big(\int_{\Omega_t} \nabla w_k . \nabla w_j + \int_{\Gamma_t} \frac{w_k}{h} w_j \Big) +$$

$$+ \int_{\Gamma_t} \frac{w_j}{h} \Big) , \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

es contraída pues

$$\psi_j^1(t) - \psi_j^2(t) = - \int_0^t \sum_{k=1}^m (\phi_k^1 \quad - \phi_k^2 \quad) \Big(\int_{\Omega_t} \nabla w_k . \nabla w_j +$$

$$+ \int_{\Gamma_t} \frac{w_k w_j}{h} \Big) \qquad 1 \leqslant j \leqslant m$$

y entonces

$$\max_{t,j} |\psi_j^1(t) - \psi_j^2(t)| \leqslant mMd \max_{t,j} |\phi_j^1(t) - \phi_j^2(t)| \ , \ \text{con } mMd < 1.$$

De aquí se deduce que la ecuación $\bar{\phi} = A\bar{\phi}$ tiene una y sólo una solución $\bar{g} = (g_1,..,g_m)$ en el espacio C_m , y por lo tanto el sistema (2.16) con las condiciones iniciales (2.17) tiene una única solución para $0 \leqslant t \leqslant d$. Repitiendo este argumento y observando que d sólo depende de M y M no depende de t para $0 \leqslant t \leqslant T$, podemos obtener una única solución para $0 \leqslant t \leqslant T$.

El siguiente lema nos da una cota necesaria para poder pasar al límite cuando $m \to \infty$.

<u>Lema 2.4</u>:

$$(2.18) \qquad \|v_m\|_{H^1(Q_T)} \leqslant C_1 \qquad \forall m$$

donde C_1 es una constante que solo depende de T, σ_*, f, u^o y $\|u^*\|_{L^\infty(R_T)}$

La idea es hallar una cota para $\|v_{mt}\|_{L^2(\Omega_o)}$ ((2.32)) donde $v_{mt} = (v_m)_t$ y luego usarla para obtener (2.18). Las $D_x v_m$ quedan acotadas en $L^2(Q_T)$ por (2.25).

<u>Dem.</u>: Multiplicando (2.15) por $g_j(t)$ y sumando en j obtenemos

$$\int_{\Omega_t} v_{mt}\, v_m + \int_{\Omega_t} |\nabla v_m|^2 + \int_{\Gamma_t} \frac{v_m^2}{h} + \int_{\Gamma_t} \frac{v_m}{h} = 0 \ , \quad \forall m \ ,$$

$0 \leqslant t \leqslant T$,

o equivalentemente

$$(2.19)\quad \int_{\Omega_t} \frac{1}{2}(v_m^2)_t + \int_{\Omega_t} |\nabla v_m|^2 + \int_{\Gamma_t} \frac{v_m^2}{h} + \int_{\Gamma_t} \frac{v_m}{h} = 0 ,$$

$$\forall m , \ 0 \leqslant t \leqslant T .$$

Si ahora integramos (2.19) con respecto a t , $t \in (0,T)$ nos queda

$$(2.20)\quad \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} v_m^2 + \int_{Q_T} |\nabla v_m|^2 + \int_{R_T} \frac{v_m^2}{h} + \int_{R_T} \frac{v_m}{h} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} (u^0 - 1)^2 , \quad \forall m .$$

De (2.20) resulta la siguiente acotación

$$(2.21)\quad \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} v_m^2 + \int_{Q_T} |\nabla v_m|^2 + \int_{R_T} \frac{v_m^2}{h} \leqslant \frac{1}{2}\| u^0 - 1\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \left(\int_{R_T} \frac{v_m^2}{h}\right)^{1/2} \left(\int_{R_T} \frac{1}{h}\right)^{1/2} , \quad \forall m .$$

Luego para todo m se verifica

$$(2.22)\quad \int_{R_T} \frac{v_m^2}{h} \leqslant \frac{1}{2}\| u^0 - 1\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\int_{R_T} \frac{v_m^2}{h}\right)^{1/2} \left(\frac{|\Gamma| T}{\sigma_*}\right)^{1/2}$$

y como además

$$(2.23)\quad \left(\int_{R_T} \frac{v_m^2}{h}\right)^{1/2} \left(\frac{|\Gamma| T}{\sigma_*}\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2}\int_{R_T} \frac{v_m^2}{h} + \frac{1}{2}\,\frac{|\Gamma| T}{\sigma_*}$$

obtenemos

$$(2.24)\quad \frac{1}{2}\int_{R_T}\frac{v_m^2}{h} \leqslant \frac{1}{2}\,\|u^o-1\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\,\frac{|\Gamma|T}{\sigma_*}\ .$$

De (2.21) y (2.24) se tiene

$$(2.25)\quad \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} v_m^2 + \int_{Q_T}|\nabla v_m|^2 + \int_{R_T}\frac{v_m^2}{h} \leqslant \frac{1}{2}\,\|u^o-1\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\ (\|u^o-1\|_{L^2(\Omega)} + (\frac{|\Gamma|T}{\sigma_*})^{1/2})\,(\frac{|\Gamma|T}{\sigma_*})^{1/2}$$

con lo cual, $D_x\, v_m$ quedan acotadas en $L^2(Q_T)$ y como $v_m = 0$ en $S\times(0,T)$, lo mismo ocurre con v_m , por el lema de Poincaré.

Busquemos ahora una cota para v_{mt} . Como $h_t \in L^\infty(R_T)$ podemos derivar (2.15) con respecto a t , con lo cual

$$(2.26)\quad \int_{\Omega_t}(v_{mt})_t\, w_j + \int_{\Omega_t}\nabla v_{mt}.\nabla w_j + \int_{\Gamma_t}(\frac{v_{mt}\, h - v_m\, h_t}{h^2})\, w_j\ -$$

$$-\int_{\Gamma_t}\frac{h_t}{h^2}\, w_j = 0\ ,\quad 1\leqslant j\leqslant m\quad ,\ \text{p.p.}\quad t\in(0,T)\,.$$

Multipliquemos (2.26) por $g_j'(t)$ y sumemos en j , entonces

$$\int_{\Omega_t}(v_{mt})_t\, v_{mt} + \int_{\Omega_t}|\nabla v_{mt}|^2 + \int_{\Gamma_t}\frac{(v_{mt})^2}{h} - \int_{\Gamma_t}\frac{v_m\, v_{mt}\, h_t}{h^2}\ -$$

$$-\int_{\Gamma_t}\frac{v_{mt}\, h_t}{h^2} = 0\ ,\quad \forall m\ ,\ \text{p.p.}\ t\in(0,T)\ ,$$

o sea,

$$(2.27)\quad \frac{1}{2}\int_{\Omega_t}[(v_{mt})^2]_t + \int_{\Omega_t}|\nabla v_{mt}|^2 + \int_{\Gamma_t}\frac{(v_{mt})^2}{h} =$$

$$= \int_{\Gamma_t}\frac{v_m\, v_{mt}\, h_t}{h^2} + \int_{\Gamma_t}\frac{v_{mt}\, h_t}{h^2}\ , \ \forall m\ ,\ \text{p.p. } t\in(0,T).$$

Integremos (2.27) con respecto a t , $t \in (0,T)$; obtenemos

$$(2.28)\quad \frac{1}{2}\int_{\Omega_T}(v_{mt})^2 + \int_{Q_T}|\nabla v_{mt}|^2 + \int_{R_T}\frac{(v_{mt})^2}{h} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_o}(v_{mt})^2 + \int_{R_T}\frac{v_m\, v_{mt}\, h_t}{h^2} + \int_{R_T}\frac{v_{mt}\, h_t}{h^2}\ , \ \forall m.$$

Necesitamos acotar $\int_{\Omega_o}(v_{mt})^2$; para ello consideremos (2.15) para $t = 0$, nos queda

$$(2.29)\quad \int_{\Omega_o} v_{mt}\, w_j + \int_{\Omega_o}\nabla u^o.\nabla w_j + \int_{\Gamma_o}\frac{u^o}{\sigma}\, w_j = 0\ ,$$

$$1 \leqslant j \leqslant m\ .$$

Multipliquemos (2.29) por $g_j'(0)$ y sumemos en j , entonces

$$(2.30)\quad \int_{\Omega_o}(v_{mt})^2 + \int_{\Omega_o}\nabla u^o.\nabla v_{mt} + \int_{\Gamma_o}\frac{u^o}{\sigma}\, v_{mt} = 0\ ,\quad \forall m.$$

Si en (2.7) ponemos como función de prueba $\varphi(x) = v_{mt}(x,0)$ obtenemos

$$\int_{\Omega_o} \nabla u^o . \nabla v_{mt} + \int_{\Gamma_o} \frac{u^o}{\sigma} v_{mt} = - \int_{\Omega_o} f \, v_{mt}$$

que junto con (2.30) nos da

$$(2.31) \qquad \int_{\Omega_o} (v_{mt})^2 = \int_{\Omega_o} f \, v_{mt} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_{mt}\|_{L^2(\Omega_o)} .$$

Luego

$$(2.32) \qquad \|v_{mt}\|_{L^2(\Omega_o)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega_o)} .$$

Ahora debemos obtener cotas para los demás sumandos del miembro de la derecha de (2.28).

Comencemos acotando $\int_{R_T} \frac{v_m \, v_{mt} \, h_t}{h^2}$

$$(2.33) \qquad \int_{R_T} \left| \frac{v_m \, v_{mt} \, h_t}{h^2} \right| \leq \left\| \frac{h_t}{h} \right\|_{L^\infty(R_T)} \left(\left(\int_{R_T} \frac{v_m^2}{h} \right)^{1/2} \right.$$

$$\left. \left(\int_{R_T} \frac{(v_{mt})^2}{h} \right)^{1/2} \right).$$

Si ahora queremos acotar $\int_{R_T} \frac{v_{mt} \, h_t}{h^2}$ obtenemos

$$(2.34) \qquad \int_{R_T} \left| \frac{v_{mt} \, h_t}{h^2} \right| \leq \left\| \frac{h_t}{h} \right\|_{L^\infty(R_T)} \left(\int_{R_T} \frac{(v_{mt})^2}{h} \right)^{1/2} \left(\frac{|\Gamma| T}{\sigma_*} \right)^{1/2} .$$

Además

$$(2.35)\qquad \left\|\frac{h_t}{h}\right\|_{L^\infty(R_T)} = \left\|\frac{G((\frac{u^*}{h^*}-\varepsilon)^+)}{h}\right\|_{L^\infty(R_T)} \leqslant \frac{k^*\|u^*\|_{L^\infty(R_T)}}{\sigma_*^2} = C\ .$$

Entonces usando las acotaciones (2.32), (2.33), (2.34) (2.35) en (2.28) obtenemos

$$(2.36)\qquad \frac{1}{2}\int_{\Omega_T}(v_{mt})^2 + \int_{Q_T}|\nabla v_{mt}|^2 + \int_{R_T}\frac{(v_{mt})^2}{h} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\Omega_o)} + C\left(\int_{R_T}\frac{v_m^2}{h}\right)^{1/2}\left(\int_{R_T}\frac{(v_{mt})^2}{h}\right. + C\left(\frac{|\Gamma|T}{\sigma_*}\right)^{1/2}\left(\int_{R_T}\frac{(v_{mt})^2}{h}\right)^{1/2}.$$

Pero

$$(2.37)\qquad C\left(\int_{R_T}\frac{v_m^2}{h}\right)^{1/2}\left(\int_{R_T}\frac{(v_{mt})^2}{h}\right)^{1/2} \leqslant C^2\int_{R_T}\frac{v_m^2}{h} + \frac{1}{4}\int_{R_T}\frac{(v_{mt})^2}{h}$$

y

$$(2.38)\qquad C\left(\frac{|\Gamma|T}{\sigma_*}\right)^{1/2}\left(\int_{R_T}\frac{(v_{mt})^2}{h}\right)^{1/2} \leqslant C^2\,\frac{|\Gamma|T}{\sigma_*} + \frac{1}{4}\int_{R_T}\frac{(v_{mt})^2}{h}\ .$$

De (2.36), (2.37) y (2.38) resulta lo siguiente

$$\int_{R_T} \frac{(v_{mt})^2}{h} \leq \frac{1}{2} \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + C^2 \int_{R_T} \frac{v_m^2}{h} + C^2 \frac{|\Gamma|T}{\sigma_*} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{R_T} \frac{(v_{mt})^2}{h}$$

o sea ,

$$(2.39) \quad \int_{R_T} \frac{(v_{mt})^2}{h} \leq \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\,C^2 \int_{R_T} \frac{v_m^2}{h} + 2\,C^2 \frac{|\Gamma|T}{\sigma_*}.$$

De (2.24), (2.36) y (2.39) se tiene que las $D_x\, v_{mt}$ están acotadas en $L^2(Q_T)$, lo cual implica que v_{mt} están acotadas en $L^2(Q_T)$ Esto, junto con (2.25), nos da

$$\|v_m\|_{H^1(Q_T)} \leq C_1 \qquad \forall m$$

donde C_1 es una constante que solo depende de T, σ_*, f, u^o y $\|u^*\|_{L^\infty(R_T)}$

Habiendo estudiado las aproximantes de la solución v de $(\tilde{P}_1(h))$, pasemos a demostrar el siguiente teorema para el cual mantendremos las hipótesis (2.10) y (2.11).

<u>Teorema 2.5</u>: Existe una única solución débil de $(P_1(h))$. Más aún, $u \in L^\infty(Q_T)$ y satisface

$$(2.40) \quad \|u\|_{L^\infty(Q_T)} \leq C_2 = \text{máx}\{\|u^o\|_{L^\infty(\Omega)}, 1\} = \|u^o\|_{L^\infty(\Omega)}$$

y

(2.41) $$\|u\|_{H^1(Q_T)} \leq C_3$$

donde C_3 es una constante que solo depende de T, σ_*, f, u^o y $\|u^*\|_{L^\infty(R_T)}$

Dem.: De (2.18) existe una subsucesión de (v_m) que volvemos a llamar (v_m) y $v \in H^1(Q_T)$ tales que

(2.42) $$v_m \rightharpoonup v \quad \text{en} \quad H^1(Q_T).$$

Veamos que $u=v+1$ es solución débil de $(P_1(h))$.

Sea $j \in \mathbb{N}$, $t \in (0,T)$ y $\delta > 0$; entonces para $m \geq j$ tenemos, integrando (2.15) entre t y $t+\delta$,

(2.43) $$\int_t^{t+\delta}\int_\Omega v_{mt}\, w_j + \int_t^{t+\delta}\int_\Omega \nabla v_m . \nabla w_j + \int_t^{t+\delta}\int_\Gamma \left(\frac{v_m}{h}\, w_j + \frac{w_j}{h}\right) = 0 .$$

Pasando al límite cuando $m \to \infty$ en (2.43) obtenemos

(2.44) $$\int_t^{t+\delta}\int_\Omega v_t\, w_j + \int_t^{t+\delta}\int_\Omega \nabla v . \nabla w_j + \int_t^{t+\delta}\int_\Gamma \left(\frac{v}{h}\, w_j + \frac{w_j}{h}\right) = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{N} .$$

Dividamos (2.44) por δ y pasemos al límite cuando $\delta \to 0$; nos queda, para casi todo $t \in (0,T)$:

(2.45) $$\int_{\Omega_t} v_t\, w_j + \int_{\Omega_t} \nabla v . \nabla w_j + \int_{\Gamma_t} \frac{v+1}{h}\, w_j = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Sea ahora $\eta \in W_T$, entonces

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla \eta|^2 < \infty$$

y además, para casi todo $t \in (0,T)$

$$\int_{\Omega_t} |\nabla \eta|^2 < \infty$$

con lo cual, como $\{w_j\}$ forman una base de V , tenemos

$$(2.46) \quad \int_{\Omega_t} v_t \, \eta + \int_{\Omega_t} \nabla v . \nabla \eta + \int_{\Gamma_t} \frac{v+1}{h} \eta = 0 \text{ , p.p. } t \in (0,T) .$$

Podemos integrar (2.46) con respecto a t entre 0 y T para obtener

$$(2.47) \quad \int_{Q_T} v_t \, \eta + \int_{Q_T} \nabla v . \nabla \eta + \int_{R_T} \frac{v+1}{h} \eta = 0 \quad , \forall \eta \in W_T \text{ ,}$$

o lo que es lo mismo, si $u = v + 1$

$$(2.13) \quad \int_{Q_T} u_t \, \eta + \int_{Q_T} \nabla u . \nabla \eta + \int_{R_T} \frac{u}{h} \eta = 0 \qquad \forall \eta \in W_T \text{ .}$$

Además, como $v_m = 0$ en $S \times (0,T)$ y $v_m = u^o - 1$ para $t = 0$, entonces $v = 0$ en $S \times (0,T)$ y $v = u^o - 1$ para $t = 0$, de donde obtenemos (2.2) y (2.5).

Vamos a probar la unicidad. Sean u^1 y u^2 dos soluciones débiles de $(P_1(h))$ Entonces ambas satisfacen (2.13), con lo cual obtenemos, restando (2.13) para u^2 de (2.13) para u^1

$$(2.48) \quad \int_{Q_T} (u^1 - u^2)_t \, \eta + \int_{Q_T} \nabla (u^1 - u^2) . \nabla \eta + \int_{R_T} \frac{(u^1 - u^2)}{h} \eta = 0 \ ,$$

$$\forall \eta \in W_T \ .$$

Pongamos como función de prueba $\eta = u^1 - u^2$ en (2.48); resulta

$$\int_{Q_T} \frac{1}{2} [(u^1 - u^2)^2]_t + \int_{Q_T} | \nabla (u^1 - u^2) |^2 + \int_{R_T} \frac{(u^1 - u^2)^2}{h} = 0$$

y como $u^1(x,0) - u^2(x,0) = 0$ obtenemos

$$\int_{\Omega_T} \frac{1}{2} (u^1 - u^2)^2 + \int_{Q_T} | \nabla (u^1 - u^2) |^2 + \int_{R_T} \frac{(u^1 - u^2)^2}{h} = 0$$

con lo cual

$$u^1 \equiv u^2 \qquad \text{en} \qquad Q_T \ .$$

La acotación (2.41) resulta de (2.42) y (2.18). Veamos (2.40).

La función $\eta = (u - C_2)^+$ satisface

$$\eta \in H^1(Q_T) \quad \text{y además} \quad \eta = 0 \quad \text{en} \quad S \times (0,T)$$

entonces podemos utilizarla como función de prueba en (2.13) para obtener

$$\int_{Q_T} (u - C_2)_t \, (u - C_2)^+ + \int_{Q_T} \nabla (u - C_2) . \nabla (u - C_2)^+ +$$

$$+ \int_{R_T} \frac{(u - C_2)(u - C_2)^+}{h} + \int_{R_T} \frac{C_2}{h} (u - C_2)^+ = 0$$

o equivalentemente

$$\int_{Q_T} \frac{1}{2}[(u-C_2)^{+2}]_t + \int_{Q_T} |\nabla (u-C_2)^+|^2 + \int_{R_T} \frac{[(u-C_2)^+]^2}{h} +$$

$$+ \int_{R_T} \frac{C_2}{h} (u-C_2)^+ = 0 ,$$

y como $(u^o - C_2)^+ = 0$ resulta

$$\int_{\Omega_T} \frac{1}{2} [(u-C_2)^+]^2 + \int_{Q_T} |\nabla (u-C_2)^+|^2 + \int_{R_T} \frac{[(u-C_2)^+]^2}{h} +$$

$$+ \int_{R_T} \frac{C_2}{h} (u-C_2)^+ = 0$$

con lo cual $(u-C_2)^+ = 0$ p.p. en Q_T , o sea,

(2.49) $\qquad u \leqslant C_2$ p.p. en Q_T .

Consideremos ahora la función $\eta = (u + C_2)^- \leqslant 0$; como

$\eta \in H^1(Q_T)$ y además $\eta = 0$ en $S \times (0,T)$,

podemos utilizarla como función de prueba en (2.13) para obtener

$$\int_{Q_T} (u+C_2)_t (u+C_2)^- + \int_{Q_T} \nabla (u+C_2) . \nabla (u+C_2)^- +$$

$$+ \int_{R_T} \frac{(u+C_2)(u+C_2)^-}{h} + \int_{R_T} \frac{(-C_2)(u+C_2)^-}{h} = 0$$

o equivalentemente

$$\int_{Q_T} \frac{1}{2} [(u+C_2)^{-2}]_t + \int_{Q_T} |\nabla (u+C_2)^-|^2 + \int_{R_T} \frac{[(u+C_2)^-]^2}{h} +$$

$$+ \int_{R_T} \frac{(-C_2)(u+C_2)^-}{h} = 0$$

y como $(u^o + C_2)^- = 0$ resulta

$$\int_{\Omega_T} \frac{1}{2} [(u+C_2)^-]^2 + \int_{Q_T} |\nabla (u+C_2)^-|^2 + \int_{R_T} \frac{[(u+C_2)^-]^2}{h} +$$

$$+ \int_{R_T} \frac{(-C_2)(u+C_2)^-}{h} = 0 \ ,$$

con lo cual $(u+C_2)^- = 0$ p.p. en Q_T , o sea,

$$-C_2 \leqslant u \quad \text{p.p. en} \quad Q_T \ ,$$

que junto con (2.49) nos da

$$\|u\|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant C_2$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Observemos que, como $u \in H^1(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$, entonces $u \in L^\infty(R_T)$; además, como $\|u\|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant C_2$, resulta

$$\|u\|_{L^\infty(R_T)} \leqslant C_2 \ .$$

Ya obtuvimos los resultados necesarios para poder estudiar el problema (P_1) : hemos resuelto el problema para una h dada y eso nos permitirá realizar un proceso iterativo.

En los lemas 2.6 y 2.7 demostraremos existencia de solución para $T < \dfrac{\sigma_*^2}{2\ k^*\ C_2}$ y en el lema 2.8 unicidad de solución para $T < \dfrac{\sigma_*^2}{2\ k^*\ C_2}$ Las ideas de estos lemas son esenciales para obtener existencia y unicidad de solución en el caso general.

<u>Lema 2.6</u>: Sea $T < \dfrac{\sigma_*^2}{2\ k^* C_2}$. Definimos una sucesión $(u^j,\ h^j)$ inductivamente:

Sea $h^1(x,t) = \sigma(x)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, y sea u^1 la única solución débil de $(P_1(h^1))$. Si suponemos definidas $(u^{j-1},\ h^{j-1})$ tales que satisfagan (2.10) y (2.11) definimos

$$(2.50) \qquad h^j(x,t) = \sigma(x) + \int_0^t G\left(\left(\frac{u^{j-1}(x,\tau)}{h^{j-1}(x,\tau)} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau ,$$

$$\text{en} \quad \Gamma \times (0,T) \quad , \ j \geqslant 2$$

y u^j como la única solución débil de $(P_1(h^j))$. Entonces (h^j) es una sucesión de Cauchy en $L^\infty(R_T)$.

Obsérvese que podemos pensar h^1 definida por (2.9), donde $u^* = 0$ y $h^* = \sigma_*$ y por la observación que sigue a la demostración del teorema 2.5 resulta

$$\|u^1\|_{L^\infty(R_T)} \leqslant C_2 .$$

Como además $h^1 \geqslant \sigma_*$, entonces estamos bajo las hipótesis (2.10) y (2.11) para definir h^2 y obtener u^2 tal que

$$\|u^2\|_{L^\infty(R_T)} \leq C_2$$

con lo cual estamos nuevamente bajo las hipótesis (2.10) y (2.11); así sucesivamente tenemos

$$(2.51) \qquad \|u^j\|_{L^\infty(R_T)} \leq C_2 \qquad \forall j \geq 1$$

Por un razonamiento análogo obtenemos

$$\|u^j\|_{H^1(Q_T)} \leq C_3 \qquad \forall j \geq 1$$

donde ahora C_3 solo depende de T, σ_*, f y u^o, por (2.51).

<u>Dem.</u>: Consideremos la ecuación (2.13) para (u^m, h^m) y (u^{m-1}, h^{m-1}), entonces

$$(2.52) \quad \int_{Q_T} u_t^m \eta + \int_{Q_T} \nabla u^m . \nabla \eta + \int_{R_T} \frac{u^m}{h^m} \eta = 0 \ , \quad \forall \eta \in W_T$$

y

$$(2.53) \quad \int_{Q_T} u_t^{m-1} \eta + \int_{Q_T} \nabla u^{m-1} . \nabla \eta + \int_{R_T} \frac{u^{m-1}}{h^{m-1}} \eta = 0 \ ,$$

$$\forall \eta \in W_T \ .$$

Restando (2.53) de (2.52) obtenemos

$$(2.54) \quad \int_{Q_T} (u^m - u^{m-1})_t \, \eta + \int_{Q_T} \nabla (u^m - u^{m-1}) . \nabla \eta +$$

$$+ \int_{R_T} \left(\frac{u^m}{h^m} - \frac{u^{m-1}}{h^{m-1}}\right) \eta = 0 \ , \quad \forall \eta \in W_T \ .$$

Supongamos que $\|u^m - u^{m-1}\|_{L^\infty(R_T)} > 0$ y que $\{(x,t) \in R_T:$

$(u^m - u^{m-1})(x,t) > M > 0\}$ tenga medida positiva para M tal que $0 < M < \|u^m - u^{m-1}\|_{L^\infty(R_T)}$.

En el caso que $\{(x,t) \in R_T\colon (u^{m-1} - u^m)(x,t) > M > 0\}$ tenga medida positiva para M tal que $0 < M < \|u^m - u^{m-1}\|_{L^\infty(R_T)}$, el razonamiento es análogo.

Sea entonces M tal que $0 < M < \|u^m - u^{m-1}\|_{L^\infty(R_T)}$ y pongamos $\eta = (u^m - u^{m-1} - M)^+$ como función de prueba en (2.54); obtenemos

$$\int_{Q_T} (u^m - u^{m-1} - M)_t (u^m - u^{m-1} - M)^+ + \int_{Q_T} (\nabla (u^m - u^{m-1} - M) .$$

$$. \nabla (u^m - u^{m-1} - M)^+) + \int_{R_T} \left(\frac{u^m}{h^m} - \frac{u^{m-1}}{h^{m-1}}\right)(u^m - u^{m-1} - M)^+ = 0 ,$$

de donde

$$\int_{Q_T} \frac{1}{2} [(u^m - u^{m-1} - M)^{+2}]_t + \int_{Q_T} |\nabla (u^m - u^{m-1} - M)^+|^2 +$$

$$+ \int_{R_T} \left(\frac{u^m}{h^m} - \frac{u^{m-1}}{h^{m-1}}\right)(u^m - u^{m-1} - M)^+ = 0 ,$$

y como $(u^m - u^{m-1} - M)^+ = (u^o - u^o - M)^+ = (-M)^+ = 0$ para $t = 0$, resulta

$$(2.55) \quad \int_{\Omega_T} \frac{1}{2} [(u^m - u^{m-1} - M)^+]^2 + \int_{Q_T} |\nabla (u^m - u^{m-1} - M)^+|^2 +$$

$$+ \int_{R_T} \left(\frac{u^m}{h^m} - \frac{u^{m-1}}{h^{m-1}}\right)(u^m - u^{m-1} - M)^+ = 0 .$$

De (2.55) obtenemos

$$\int_{R_T} \left(\frac{u^m}{h^m} - \frac{u^{m-1}}{h^{m-1}}\right)(u^m - u^{m-1} - M)^+ \leqslant 0$$

con lo cual

$\dfrac{u^m}{h^m} - \dfrac{u^{m-1}}{h^{m-1}} \leqslant 0$ para un subconjunto E_M de medida positi-va de $\{(x,t) \in R_T : (u^m - u^{m-1})(x,t) > M\}$.

Como

$$(2.56) \quad u^m - u^{m-1} = \left(\frac{u^m}{h^m} - \frac{u^{m-1}}{h^{m-1}}\right) h^{m-1} + (h^m - h^{m-1}) \frac{u^m}{h^m}$$

$$\text{en } \Gamma \times (0,T) \ ,$$

resulta

$$M < u^m - u^{m-1} \leqslant |h^m - h^{m-1}| \frac{C_2}{\sigma_*} \quad \text{sobre } E_M ,$$

o sea ,

$$\frac{M\sigma_*}{C_2} < |h^m - h^{m-1}| \quad \text{sobre } E_M ,$$

con lo cual

$$(2.57) \quad \frac{M\sigma_*}{C_2} < \|h^m - h^{m-1}\|_{L^\infty(R_T)}$$

Haciendo M tender a $\|u^m - u^{m-1}\|_{L^\infty(R_T)}$ en (2.57) resulta

$$(2.58) \quad \|u^m - u^{m-1}\|_{L^\infty(R_T)} \leqslant \frac{C_2}{\sigma_*} \|h^m - h^{m-1}\|_{L^\infty(R_T)}$$

Notemos que (2.58) es también válida para el caso $\|u^m - u^{m-1}\|_{L^\infty(R_T)} = 0$.

La definición (2.50) para $j = m$ es

$$(2.59) \qquad h^m = \sigma + \int_0^t G\left(\left(\frac{u^{m-1}}{h^{m-1}} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau \quad \text{en} \quad \Gamma \times (0,T) \ ,$$

y (2.50) para $j = m+1$ es

$$(2.60) \qquad h^{m+1} = \sigma + \int_0^t G\left(\left(\frac{u^m}{h^m} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau \quad \text{en} \quad \Gamma \times (0,T) \ ,$$

con lo que,por (2.56),resulta

$$(2.61) \qquad \|h^{m+1} - h^m\|_{L^\infty(R_T)} \leqslant k^*T \left\|\frac{u^m}{h^m} - \frac{u^{m-1}}{h^{m-1}}\right\|_{L^\infty(R_T)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k^*T}{\sigma_*} \|u^m - u^{m-1}\|_{L^\infty(R_T)} + \frac{k^*T\ C_2}{\sigma_*^2} \|h^m - h^{m-1}\|_{L^\infty(R_T)}$$

De (2.58) y (2.61) obtenemos

$$(2.62) \qquad \|h^{m+1} - h^m\|_{L^\infty(R_T)} \leqslant \frac{2\ k^*T\ C_2}{\sigma_*^2} \|h^m - h^{m-1}\|_{L^\infty(R_T)}$$

Por hipótesis $\dfrac{2\ k^*T\ C_2}{\sigma_*^2} = \beta < 1$

con lo que

$$(2.63) \qquad \|h^{m+1} - h^m\|_{L^\infty(R_T)} \leqslant \beta^{m-1} \|h^2 - h^1\|_{L^\infty(R_T)}$$

La desigualdad (2.63) implica que (h^j) es una sucesión de Cauchy en $L^\infty(R_T)$

El lema 2.6 nos permite pasar al límite cuando $j \to \infty$ para obtener una solución débil de (P_1) Más precisamente:

<u>Lema 2.7</u>: Sea $T < \dfrac{\sigma_*^2}{2\,k^*\,C_2}$. Entonces

$$(2.64) \qquad h^m \to h \qquad \text{en} \quad L^\infty(R_T)$$

$$(2.65) \qquad u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u \qquad \text{en} \quad L^\infty(R_T)$$

$$(2.66) \qquad u^m \to u \qquad \text{en} \quad H^{1,0}(Q_T)$$

$$(2.67) \qquad u^m \rightharpoonup u \qquad \text{en} \quad H^1(Q_T)$$

donde (u,h) es solución débil de (P_1) . Además

$$\|u\|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant C_2 \ .$$

<u>Dem.</u>: Por el lema 2.6 (h^m) es una sucesión de Cauchy en $L^\infty(R_T)$ Entonces existe $h \in L^\infty(R_T)$ tal que

$$h^m \to h \quad \text{en} \quad L^\infty(R_T) \ .$$

Además las fórmulas (2.52) - (2.58) son válidas para dos subíndices j y ℓ cualesquiera, y obtenemos

$$\|u^j - u^\ell\|_{L^\infty(R_T)} \leqslant \frac{C_2}{\sigma_*} \|h^j - h^\ell\|_{L^\infty(R_T)}$$

por lo que (u^m) es también una sucesión de Cauchy en $L^\infty(R_T)$. Luego existe $\tilde{u} \in L^\infty(R_T)$ tal que

$$(2.68) \qquad u^m \to \tilde{u} \qquad \text{en} \quad L^\infty(R_T)$$

Para probar (2.66) consideremos (2.13) para (u^j, h^j) y restémosle (2.13) para (u^ℓ, h^ℓ) ; obtenemos

$$(2.69)\quad \int_{Q_T} (u^j - u^\ell)_t\,\eta + \int_{Q_T} \nabla(u^j - u^\ell).\nabla\eta + \int_{R_T} \left(\frac{u^j}{h^j} - \frac{u^\ell}{h^\ell}\right)\eta = 0,$$

$$\forall\eta \in W_T\ .$$

Pongamos $\eta = u^j - u^\ell$ como función de prueba en (2.69); resulta

$$(2.70)\quad \int_{Q_T} \frac{1}{2}[(u^j - u^\ell)^2]_t + \int_{Q_T} |\nabla(u^j - u^\ell)|^2 + \int_{R_T} \frac{(u^j - u^\ell)^2}{h^\ell} + \int_{R_T} (h^j - h^\ell)\,\frac{u^j}{h^j h^\ell}\,(u^\ell - u^j) =$$

$$= 0\ ,$$

y como $u^j - u^\ell = u^o - u^o = 0$ para $t = 0$ obtenemos

$$(2.71)\quad \int_{\Omega_T} \frac{1}{2}\,(u^j - u^\ell)^2 + \int_{Q_T} |\nabla(u^j - u^\ell)|^2 + \int_{R_T} \frac{(u^j - u^\ell)^2}{h^\ell} + \int_{R_T} \frac{(h^j - h^\ell)\,u^j}{h^j\,h^\ell}\,(u^\ell - u^j) =$$

$$= 0\ .$$

Como (h^m) y (u^m) son sucesiones de Cauchy en $L^\infty(R_T)$, de (2.71) resulta que (u^m) es una sucesión de Cauchy en

$H^{1,0}(Q_T)$, de donde existe $u \in H^{1,0}(Q_T)$ tal que

$$u^m \to u \qquad\qquad \text{en} \quad H^{1,0}(Q_T)$$

y por lo tanto

$$u^m|_{R_T} \to u|_{R_T} \qquad\qquad \text{en} \quad L^2(R_T)$$

Como además vale (2.68) tenemos

$$u|_{R_T} \equiv \tilde{u}$$

de donde $u^m \to u$ en $L^\infty(R_T)$, o sea, (2.65) y además $\|u\|_{L^\infty(R_T)} \leqslant$ $\leqslant C_2$ por (2.51).

Para probar (2.67) basta recordar que

$$\|u^m\|_{H^1(Q_T)} \leqslant C_3$$

y que vale (2.66), por lo que obtenemos

$$u^m \rightharpoonup u \qquad\qquad \text{en} \quad H^1(Q_T) .$$

Veamos que (u,h) es solución débil de (P_1) Sea $\eta \in W_T$, entonces de (2.64), (2.65), (2.66) y (2.67) resulta

$$\int_{Q_T} u_t\, \eta + \int_{Q_T} \nabla u . \nabla \eta + \int_{R_T} \frac{u}{h}\, \eta = 0 .$$

Como todas las u^m satisfacían $u^m = u^o$ para $t = 0$, entonces $u(x,0) = u^o(x)$, $x \in \Omega$ y obtenemos (2.5). De la misma forma se satisface (2.2). Además, como vale (2.64) y (2.65), resulta de

$$h^m = \sigma + \int_0^t G\left(\left(\frac{u^{m-1}}{h^{m-1}} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau \qquad \text{en} \quad \Gamma \times (0,T)$$

y las hipótesis sobre G que

$$h = \sigma + \int_0^t G\left(\left(\frac{u}{h} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau, \qquad \text{en} \quad \Gamma \times (0,T) ,$$

o sea, (2.4)

Además, como u y h satisfacen (2.10) y (2.11), por la unicidad de la solución que nos da el teorema 2.5 tenemos que $u \in L^\infty(Q_T)$ y

$$\|u\|_{L^\infty(Q_T)} \leq C_2 .$$

El siguiente lema nos da la unicidad de solución, para $T < \dfrac{\sigma_*^2}{2k^*C_2}$.

<u>Lema 2.8</u>: Sea $T < \dfrac{\sigma_*^2}{2\, k^* C_2}$, entonces la solución débil de (P_1) es única.

<u>Dem.</u>: Sean (u^1, h^1) , (u^2, h^2) soluciones débiles de (P_1). Como ambas satisfacen (2.10) y (2.11) resulta, del teorema 2.5, que

$$(2.72) \quad \|u^i\|_{L^\infty(Q_T)} \leq C_2 \qquad i = 1,2 .$$

Podemos repetir el razonamiento (2.52) - (2.62) que, para este caso, nos da

$$(2.73) \qquad \|h^2 - h^1\|_{L^\infty(R_T)} \leqslant \beta \|h^2 - h^1\|_{L^\infty(R_T)} \;, \quad \beta < 1$$

de donde

$$(2.74) \qquad h^1 \equiv h^2 \qquad \text{en} \quad R_T \;.$$

De (2.58) para este caso obtenemos

$$(2.75) \qquad u^1 \equiv u^2 \qquad \text{en} \quad R_T \;,$$

y como

$$\int_{\Omega_T} \frac{1}{2}\,(u^1 - u^2)^2 + \int_{Q_T} |\nabla (u^1 - u^2)|^2 + \int_{R_T} \left(\frac{u^1}{h^1} - \frac{u^2}{h^2}\right)(u^1 - u^2) = 0 \;,$$

resulta

$$(2.76) \qquad u^1 \equiv u^2 \qquad \text{en} \quad Q_T \;.$$

Teorema 2.9: Existe una única solución débil de (P_1) para cada $T > 0$.

Además

$$\|u\|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant C_2 \;.$$

Dem.: Supongamos que probamos existencia y unicidad de solución débil de (P_1) , (u,h) para $0 \leqslant t \leqslant T^*$, entonces podemos conseguir existencia y unicidad de solución débil de (P_1) para $0 \leqslant t \leqslant \tilde{T}$, si $\tilde{T} - T^* < \dfrac{\sigma_*^2}{2\,k^*\,C_2}$, usando las ideas y los resultados obtenidos en los lemas 2.6, 2.7, 2.8 y el teorema 2.5.

La solución se obtiene mediante iteraciones; definimos

$$(2.77) \qquad h^1(x,t) = \begin{cases} h(x,t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant T^* , \ x \in \Gamma \\ h(x,T^*) & \text{si} \quad T^* \leqslant t \leqslant \tilde{T} , \ x \in \Gamma . \end{cases}$$

Podemos pensar que h^1 viene dada por (2.9) donde

$$(2.78) \qquad \begin{gathered} u^*(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant T^* , \ x \in \Gamma \\ 0 & \text{si} \quad T^* \leqslant t \leqslant \tilde{T} , \ x \in \Gamma , \end{cases} \\ h^*(x,t) = \begin{cases} h(x,t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant T^* , \ x \in \Gamma \\ h(x,T^*) & \text{si} \quad T^* \leqslant t \leqslant \tilde{T} , \ x \in \Gamma . \end{cases} \end{gathered}$$

Como u^* y h^* satisfacen (2.10) y (2.11), podemos aplicar el teorema 2.5 y obtener una única solución débil de $(P_1(h^1))$, u^1 tal que

$$\|u^1\|_{L^\infty(R_{\tilde{T}})} \leqslant C_2$$

y

$$\|u^1\|_{H^1(Q_{\tilde{T}})} \leqslant C_3$$

y por (2.45) u^1 satisface

$$(2.79) \qquad \int_{Q_{T^*}} u_t^1 \eta + \int_{Q_{T^*}} \nabla u^1 . \nabla \eta + \int_{R_{T^*}} \frac{u^1}{h} \eta = 0 , \quad \forall \eta \in W_{T^*}.$$

La solución u, que habíamos conseguido para $0 \leqslant t \leqslant T^*$, también satisface

$$(2.80) \qquad \int_{Q_{T*}} u_t\, \eta + \int_{Q_{T*}} \nabla u \,.\, \nabla \eta + \int_{R_{T*}} \frac{u}{h}\, \eta = 0 \ , \quad \forall \eta \in W_{T*}.$$

Como ambas cumplen las condiciones (2.2) y (2.5) y el problema $(P_1(h))$ tenía una única solución débil resulta

$$(2.81) \qquad u^1 \equiv u \qquad \text{en} \qquad Q_{T*} \ .$$

Definamos

$$(2.82) \qquad h^2(x,t) = \sigma(x) + \int_0^t G\,\left(\left(\frac{u^1(x,\tau)}{h^1(x,\tau)} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau \ \ \text{en} \ \ R_{\tilde{T}} \ .$$

Como $u^1 \equiv u$ en R_{T*} y $h^1 \equiv h$ en R_{T*}, tenemos

$$(2.83) \qquad h^2(x,t) = \sigma(x) + \int_0^t G\,\left(\left(\frac{u(x,\tau)}{h(x,\tau)} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau \quad \text{en} \quad R_{T*}$$

o sea,

$$(2.84) \qquad h^2 \equiv h \qquad \text{en} \qquad R_{T*} \ .$$

Como u^1 y h^1 satisfacen (2.10) y (2.11), podemos apli car el teorema 2.5 y obtener una única solución débil de $(P_1(h^2))$ u^2 tal que

$$\|u^2\|_{L^\infty(R_{\tilde{T}})} \leqslant C_2$$

y

$$\|u^2\|_{H^1(Q_{\tilde{T}})} \leqslant C_3$$

El mismo razonamiento que hicimos para u^1 nos dice, en este caso, que

$$u^2 \equiv u \qquad \text{en} \qquad Q_{T^*} \, . \tag{2.85}$$

En general, si $m \geqslant 3$ y tenemos definido (u^{m-1}, h^{m-1}), que satisfacen (2.10) y (2.11) y además $u^{m-1} \equiv u$ en Q_{T^*} y $h^{m-1} \equiv h$ en R_{T^*}, definimos

$$h^m(x,t) = \sigma(x) + \int_0^t G\left(\left(\frac{u^{m-1}(x,\tau)}{h^{m-1}(x,\tau)} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau \quad \text{en} \quad R_{\tilde{T}} \tag{2.86}$$

y obtenemos

$$h^m \equiv h \qquad \text{en} \qquad R_{T^*}. \tag{2.87}$$

Sea u^m la única solución débil de $(P_1(h^m))$ que nos da el teorema 2.5; se tiene

$$\|u^m\|_{L^\infty(R_{\tilde{T}})} \leqslant C_2 \tag{2.88}$$

$$\|u^m\|_{H^1(Q_{\tilde{T}})} \leqslant C_3 \tag{2.89}$$

y además

$$u^m \equiv u \qquad \text{en} \qquad Q_{T^*} \, . \tag{2.90}$$

Las mismas demostraciones de los lemas 2.6 y 2.7 se pueden hacer en este caso para conseguir una solución débil de (P_1) (u,h).

Además

$$(2.91) \qquad \|u\|_{L^\infty(Q_{\tilde{T}})} \leq C_2 \ .$$

La unicidad se prueba imitando la demostración del lema 2.8, observando que si (u^1,h^1) y (u^2,h^2) son soluciones débiles de (P_1) para $0 \leq t \leq \tilde{T}$, entonces (u^1,h^1) y (u^2,h^2) son soluciones débiles de (P_1) para $0 \leq t \leq T^*$, y como había unicidad para este último problema, resulta $u^1 \equiv u^2 \equiv u$ y $h^1 \equiv h^2 \equiv h$ para $0 \leq t \leq T^*$.

Repitiendo este argumento un número finito de veces obtenemos la conclusión del teorema para cada $T > 0$.

3. COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LA SOLUCION DEL PROBLEMA PARABOLICO.

Recordemos que el estado estacionario del problema (P_o), que llamamos (P_o^∞), consistía en hallar un par de funciones $(\bar{\Psi}(x), \bar{h}(x))$ tales que

$$(P_o^\infty)\quad \begin{cases} (3.1) & \Delta\bar{\Psi} = 0 & \text{en } \Omega \\ (3.2) & \bar{\Psi} = 1 & \text{en } S \\ (3.3) & \bar{\Psi}_{\nu_i} = \dfrac{\bar{\Psi}}{\bar{h}} & \text{en } \Gamma \\ (3.4) & \begin{cases} \dfrac{\bar{\Psi}(x)}{\bar{h}(x)} = \varepsilon & \text{si } \bar{h}(x) > \sigma(x) \\ \dfrac{\bar{\Psi}(x)}{\bar{h}(x)} \leqslant \varepsilon & \text{si } \bar{h}(x) = \sigma(x) \end{cases} & \text{en } \Gamma, \end{cases}$$

donde ahora S y $\Gamma \in C^1$ y mantenemos sobre σ las hipótesis hechas en (2.6).

<u>Definición 3.1</u>: Una *solución débil de* (P_o^∞) es un par de funciones $(\bar{\Psi},\bar{h})$ tal que $\bar{\Psi} \in H^1(\Omega)$, $\sigma \leqslant \bar{h} \in L^\infty(\Gamma)$, y satisfacen (3.2), (3.4) para casi todo $x \in \Gamma$ y

$$(3.5)\qquad \int_\Omega \nabla\bar{\Psi}.\nabla\varphi + \int_\Gamma \frac{\bar{\Psi}}{\bar{h}}\varphi = 0 \qquad \forall\varphi \in V .$$

Comencemos por estudiar la unicidad del problema (P_o^∞).

<u>Lema 3.2</u>: La solución débil de (P_o^∞) es única.

<u>Dem.</u>: Sean $(\bar{\Psi}^1,\bar{h}^1)$ y $(\bar{\Psi}^2,\bar{h}^2)$ dos soluciones débiles de (P_o^∞). Entonces por (3.5) resulta

$$(3.6) \qquad \int_\Omega \nabla\bar{\Psi}^i . \nabla\varphi + \int_\Gamma \frac{\bar{\Psi}^i}{\bar{h}^i}\varphi = 0 \ , \quad \forall\varphi \in V \qquad i=1,2.$$

Si restamos (3.6) para $i=2$ de (3.6) para $i=1$ obtenemos

$$(3.7) \qquad \int_\Omega \nabla(\bar{\Psi}^1 - \bar{\Psi}^2) . \nabla\varphi + \int_\Gamma \left(\frac{\bar{\Psi}^1}{\bar{h}^1} - \frac{\bar{\Psi}^2}{\bar{h}^2}\right)\varphi = 0 \ , \quad \forall\varphi \in V.$$

Pongamos $\varphi = \bar{\Psi}^1 - \bar{\Psi}^2$ como función de prueba en (3.7), entonces se tiene

$$(3.8) \qquad \int_\Omega |\nabla(\bar{\Psi}^1 - \bar{\Psi}^2)|^2 + \int_\Gamma \left(\frac{\bar{\Psi}^1}{\bar{h}^1} - \frac{\bar{\Psi}^2}{\bar{h}^2}\right)(\bar{\Psi}^1 - \bar{\Psi}^2) = 0 \ .$$

Vamos a probar que $\left(\frac{\bar{\Psi}^1}{\bar{h}^1} - \frac{\bar{\Psi}^2}{\bar{h}^2}\right)(\bar{\Psi}^1 - \bar{\Psi}^2) \geqslant 0$ p.p. en Γ .

El razonamiento que sigue se hará para casi todo $x \in \Gamma$. Tenemos que considerar varios casos:

i) Si $x \in \Gamma$ es tal que $\bar{h}^1(x) > \sigma(x)$ y $\bar{h}^2(x) > \sigma(x)$, entonces

$$(3.9) \qquad \frac{\bar{\Psi}^1(x)}{\bar{h}^1(x)} = \frac{\bar{\Psi}^2(x)}{\bar{h}^2(x)} = \varepsilon$$

ii) Si $x \in \Gamma$ es tal que $\bar{h}^1(x) > \sigma(x)$ y $\bar{h}^2(x) = \sigma(x)$, entonces

$$\frac{\bar{\Psi}^1(x)}{\bar{h}^1(x)} = \varepsilon \geqslant \frac{\bar{\Psi}^2(x)}{\bar{h}^2(x)} \qquad \text{y por lo tanto}$$

$$(3.10) \qquad \bar{\Psi}^1(x) > \bar{\Psi}^2(x)$$

iii) Si $x \in \Gamma$ es tal que $\bar{h}^1(x) = \sigma(x)$ y $\bar{h}^2(x) >$

$> \sigma(x)$, entonces

$$\frac{\bar{\psi}^1(x)}{\bar{h}^1(x)} \leq \varepsilon = \frac{\bar{\psi}^2(x)}{\bar{h}^2(x)} \quad \text{y por lo tanto}$$

(3.11)

$$\bar{\psi}^1(x) < \bar{\psi}^2(x)$$

iv) Si $x \in \Gamma$ es tal que $\bar{h}^1(x) = \bar{h}^2(x) = \sigma(x)$ tenemos

$$(3.12) \quad \left(\frac{\bar{\psi}^1}{\bar{h}^1} - \frac{\bar{\psi}^2}{\bar{h}^2}\right)(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^2)(x) = \frac{1}{\sigma(x)} (\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^2)^2(x) .$$

Por (3.9), (3.10), (3.11) y (3.12) se tiene

$$\int_\Gamma \left(\frac{\bar{\psi}^1}{\bar{h}^1} - \frac{\bar{\psi}^2}{\bar{h}^2}\right)(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^2) \geq 0$$

que junto con (3.8) nos da

$$(3.13) \quad \int_\Omega |\nabla(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^2)|^2 \leq 0$$

de donde

$$(3.14) \quad \bar{\psi}^1 \equiv \bar{\psi}^2 \quad \text{en} \quad \Omega .$$

Como además $\bar{\psi}^1 \equiv \bar{\psi}^2$ en Γ, resulta que, de los cuatro casos anteriores, solo pueden ocurrir i) y iv).

Si ocurre i), por (3.9) tenemos

$$(3.15) \quad \bar{h}^1(x) = \frac{\bar{\psi}^1(x)}{\varepsilon} = \frac{\bar{\psi}^2(x)}{\varepsilon} = \bar{h}^2(x) .$$

Como iv) considera los $x \in \Gamma$ tales que

$$(3.16) \quad \bar{h}^1(x) = \bar{h}^2(x) = \sigma(x)$$

entonces de (3.15) y (3.16) resulta

$$(3.17) \qquad \bar{h}^1 \equiv \bar{h}^2 \quad \text{en} \quad \Gamma$$

y por (3.14) y (3.17) la solución débil del problema (P_o^∞) es única.

Podemos considerar ahora (u,h) solución débil de (P_1) para $0 \leq t < \infty$, ya que gracias a la unicidad de solución débil de (P_1), si $T_1 < T_2$ y (u^i, h^i) es la solución débil de (P_1), para $T = T_i$, $i = 1,2$ resulta

$$u^2 \equiv u^1 \qquad \text{en} \qquad Q_{T_1}$$

y

$$h^2 \equiv h^1 \qquad \text{en} \qquad R_{T_1}$$

Veamos cuál es su comportamiento cuando $t \to \infty$.

<u>Teorema 3.3</u>: Sea (u,h) la solución débil de (P_1) para $0 \leq t < \infty$. Entonces

i) $h \leq \text{máx}\{\frac{C_2}{\varepsilon}, \sigma^*\}$, p.p. en $\Gamma \times (0,\infty)$;

si en (2.6) y (2.7) suponemos $f \geq 0$ y $u^o \geq 0$ entonces,

ii) u es creciente en t para casi todo $x \in \Omega$ y $x \in \Gamma$, y $0 \leq u \leq 1$ p.p. en $\Omega \times (0,\infty)$.

Además, $u \uparrow \bar{\Psi} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y $h \uparrow \bar{h} \in L^\infty(\Gamma)$, cuando $t \to \infty$, donde $(\bar{\Psi}, \bar{h})$ es la única solución débil de (P_o^∞).

La demostración de la parte i) del teorema 3.3, la haremos en el lema 3.4 y la parte ii) en el teorema 3.5. Después probaremos la parte final del teorema 3.3.

Lema 3.4: Sea (u,h) la solución débil de (P_1) para $0 \leq t < \infty$. Entonces

$$h \leq \text{máx}\{ \frac{C_2}{\varepsilon}, \sigma^* \} , \text{ p.p. en } \Gamma \times (0,\infty).$$

Dem.: El razonamiento que sigue se hará para casi todo $x \in \Gamma$. Debemos considerar dos casos:

i) Si $x \in \Gamma$ es tal que $\sigma(x) \geq \frac{C_2}{\varepsilon}$ entonces se tiene

$$\frac{u(x,t)}{h(x,t)} \leq \frac{C_2}{(C_2/\varepsilon)} = \varepsilon \qquad \forall t \geq 0 ,$$

con lo que $h_t(x,t) = 0$, $\forall t \geq 0$, o sea,

$$(3.18) \qquad h(x,t) = \sigma(x) \leq \sigma^* \qquad \forall t \geq 0 .$$

ii) Si $x \in \Gamma$ es tal que $\sigma(x) < \frac{C_2}{\varepsilon}$ entonces queremos ver que

$$h(x,t) \leq \frac{C_2}{\varepsilon} \qquad \forall t \geq 0 .$$

Supongamos que exista $\bar{t} > 0$ tal que

$$(3.19) \qquad h(x,\bar{t}) > \frac{C_2}{\varepsilon}$$

Como h es una función continua en t para x fijo y $h(x,0) = \sigma(x) < \frac{C_2}{\varepsilon}$ entonces existe $\bar{\bar{t}} < \bar{t}$ tal que

$$h(x,\bar{\bar{t}}) = \frac{C_2}{\varepsilon}$$

y por lo tanto

$$h(x,t) \geqslant \frac{C_2}{\varepsilon} \qquad \text{para} \qquad \bar{\bar{t}} \leqslant t \leqslant \bar{t}$$

de donde obtenemos

$$\frac{u(x,t)}{h(x,t)} \leqslant \frac{C_2}{(C_2/\varepsilon)} = \varepsilon \qquad \text{para} \qquad \bar{\bar{t}} \leqslant t \leqslant \bar{t}$$

o sea,

$$h_t(x,t) = 0 \qquad \text{para} \qquad \bar{\bar{t}} \leqslant t \leqslant \bar{t}$$

con lo cual

$$h(x,\bar{t}) = h(x,\bar{\bar{t}}) = \frac{C_2}{\varepsilon}$$

que contradice (3.19) y por lo tanto

$$h(x,t) \leqslant \frac{C_2}{\varepsilon} \qquad \forall t \geqslant 0 \ .$$

De i) y ii) resulta

$$h \leqslant \max \left\{\frac{C_2}{\varepsilon}, \sigma^*\right\} \qquad \text{p.p. en} \quad \Gamma \times (0,\infty).$$

<u>Teorema 3.5</u>: Sea (u,h) la solución débil de (P_1) para $0 \leqslant t < \infty$. Si en (2.6) y (2.7) suponemos $f \geqslant 0$ y $u^o \geqslant 0$, entonces u es creciente en t para casi todo $x \in \Omega$ y $x \in \Gamma$. Además $0 \leqslant u \leqslant 1$ p.p. en $\Omega \times (0,\infty)$.

Antes de pasar a la demostración del teorema 3.5 observemos que, en caso de tener suficiente regularidad, la misma es una consecuencia inmediata del principio del máximo. Veamos primero que $u^o \leq 1$. Por (2.7) tenemos

$$(3.20) \qquad \Delta u^o = f \geq 0 \qquad \text{en} \quad \Omega$$

o sea, u^o es subarmónica y entonces el máximo lo alcanza en un punto $x_o \in S \cup \Gamma$. Por (2.6) $u^o = 1$ en S , luego si $x_o \in \Gamma$ se tiene que $u^o(x_o) \geq 1$.

Además por (2.7)

$$u^o_{\nu_i}(x_o) = \frac{u^o(x_o)}{\sigma(x_o)} > 0$$

lo cual contradice el principio del máximo.

Tenemos, pues, que $x_o \in S$, de donde

$$(3.21) \qquad u^o \leq 1 \qquad \text{en} \quad \bar{\Omega} .$$

Recordemos que $u^o \geq 0$ por hipótesis.

Veamos ahora que $0 \leq u \leq 1$.

Tenemos

$$(2.1) \qquad u_t = \Delta u \qquad \text{en} \quad \Omega \times (0,T)$$

$$(2.2) \qquad u = 1 \qquad \text{en} \quad S \times (0,T)$$

$$(2.3) \qquad u_{\nu_i} = \frac{u}{h} \qquad \text{en} \quad \Gamma \times (0,T)$$

$$(2.5) \qquad u(x,0) = u^o(x) \qquad \text{en} \quad \Omega$$

donde

$$h(x,t) = \sigma(x) + \int_0^t G\left(\left(\frac{u(x,\tau)}{h(x,\tau)} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau .$$

Sea $(x_1,t_1) \in S \times [0,T] \cup \Gamma \times [0,T] \cup \Omega \times \{0\}$ el punto donde

u alcanza el máximo. Si $(x_1,t_1) \in \Gamma \times [0,T]$ entonces por (2.2) y (3.21) resulta

$$u(x_1,t_1) \geqslant 1 \ .$$

Luego por (2.3) y (2.7)

$$u_{\nu_i}(x_1,t_1) = \frac{u(x_1,t_1)}{h(x_1,t_1)} > 0$$

lo cual contradice el principio del máximo. Entonces $(x_1,t_1) \in S \times [0,T] \cup \Omega \times \{0\}$, de donde

$$(3.22) \qquad u \leqslant 1 \quad \text{en} \quad \bar{\Omega} \times [0,T]$$

Sea ahora $(x_2,t_2) \in S \times [0,T] \cup \Gamma \times [0,T] \cup \Omega \times \{0\}$ el punto donde u alcanza el mínimo.

Supongamos $u(x_2,t_2) < 0$, entonces $(x_2,t_2) \in \Gamma \times [0,T]$ y por (2.3) y (2.7) tenemos

$$u_{\nu_i}(x_2,t_2) = \frac{u(x_2,t_2)}{h(x_2,t_2)} < 0$$

lo cual contradice el principio del mínimo. Luego

$$(3.23) \qquad 0 \leqslant u \quad \text{en} \quad \bar{\Omega} \times [0,T]$$

De (3.22) y (3.23) obtenemos

$$0 \leqslant u \leqslant 1 \ .$$

Queremos ver ahora que $u_t \geqslant 0$ Derivando (2.1), (2.2) y (2.3) con respecto a t obtenemos

$$(3.24) \qquad (u_t)_t = \Delta u_t \qquad \text{en} \quad \Omega \times (0,T)$$

$$(3.25) \qquad u_t = 0 \qquad \text{en} \quad S \times (0,T)$$

$$(3.26) \qquad (u_t)_{\nu_i} = \frac{u_t\, h - u\, h_t}{h^2} \qquad \text{en} \quad \Gamma \times (0,T)$$

con la condición inicial

$$(3.27) \qquad u_t(x,0) = \Delta u^o(x) \qquad \text{en} \quad \Omega$$

Sea $(x_3,t_3) \in S \times [0,T] \cup \Gamma \times [0,T] \cup \Omega \times \{0\}$ el punto donde u_t alcanza el mínimo.

Supongamos $u_t(x_3,t_3) < 0$, entonces,por (3.20) y (3.25), $(x_3,t_3) \in \Gamma \times (0,T]$, pero

$$(3.28) \quad (u_t)_{\nu_i}(x_3,t_3) = \frac{u_t(x_3,t_3)\,h(x_3,t_3) - u(x_3,t_3)\,h_t(x_3,t_3)}{h^2(x_3,t_3)} < 0$$

pues $h_t = G((\frac{u}{h} - \varepsilon)^+) \geqslant 0$ y $u \geqslant 0$

Como (3.28) contradice el principio del mínimo tenemos

$$0 \leqslant u_t \qquad \text{en} \qquad \bar{\Omega} \times [0,T]$$

Pasemos ahora a demostrar el teorema 3.5. La idea es definir una sucesión (u^δ) de aproximantes de u que tiendan a u en casi todo punto de Ω y de Γ cuando $\delta \to 0$; cada u^δ se definirá de manera que resulte creciente en t para casi todo x .

<u>Dem.</u>: Sea $M \in \mathbb{N}$ y sea $\delta = \frac{T}{M} > 0$ Definimos funciones

$$h^m \in L^\infty(\Gamma) \qquad 0 \leqslant m \leqslant M$$

de la siguiente manera:

$$h^m(x) = h(x,m\delta) \qquad x \in \Gamma ,$$

y funciones

$$u^m \in H^1(\Omega) \qquad 0 \leqslant m \leqslant M$$

tales que

$$u^m = 1 \quad \text{en} \quad S \qquad 0 \leqslant m \leqslant M ,$$

$$(2.7) \quad \int_\Omega \nabla u^o.\nabla\varphi + \int_\Gamma \frac{u^o}{h^o}\varphi = -\int_\Omega f\varphi , \quad \forall\varphi \in V ,$$

y si suponemos definida u^{m-1}, definimos u^m de manera tal que

$$(3.29) \quad \int_\Omega \frac{u^m - u^{m-1}}{\delta}\varphi + \int_\Omega \nabla u^m.\nabla\varphi + \int_\Gamma \frac{u^m}{h^m}\varphi = 0 , \quad \forall\varphi \in V.$$

Observemos que u^m está bien definida por el teorema de Riesz, pues poniendo $\tilde{v} = u^m - 1$, (3.29) es equivalente a

$$\int_\Omega \frac{\tilde{v}}{\delta}\varphi + \int_\Omega \nabla\tilde{v}.\nabla\varphi + \int_\Gamma \frac{\tilde{v}}{h^m}\varphi = \int_\Omega \frac{u^{m-1}-1}{\delta}\varphi - \int_\Gamma \frac{\varphi}{h^m} ,$$

$$\forall\varphi \in V .$$

Ahora bien, como

$$\langle z,\varphi\rangle = \int_\Omega \frac{z\varphi}{\delta} + \int_\Omega \nabla z.\nabla\varphi + \int_\Gamma \frac{z}{h^m}\varphi$$

es un producto escalar en V equivalente a

$$\langle z,\varphi\rangle_V = \int_\Omega z\varphi + \int_\Omega \nabla z.\nabla\varphi$$

y

$$F(\varphi) = \int_{\Omega} \frac{u^{m-1} - 1}{\delta} \varphi - \int_{\Gamma} \frac{\varphi}{h^m}$$

satisface

$$|F(\varphi)| \leqslant C \, \|\varphi\|_V \qquad \forall\varphi \in V \;,$$

donde C es una constante que no depende de φ, entonces, por el teorema de Riesz, existe una única $\tilde{v} \in V$ tal que

$$F(\varphi) = \langle \tilde{v}, \varphi \rangle \qquad \forall\varphi \in V \;.$$

Además si u^o y $\tilde{u}^o$ satisfacen (2.7) y $u^o = \tilde{u}^o = 1$ en S, entonces

$$\int_{\Omega} \nabla (u^o - \tilde{u}^o) . \nabla\varphi + \int_{\Gamma} \frac{u^o - \tilde{u}^o}{h^o} \varphi = 0 \qquad \forall\varphi \in V$$

y tomando $\varphi = u^o - \tilde{u}^o$ como función de prueba en la igualdad anterior resulta

$$\int_{\Omega} |\nabla (u^o - \tilde{u}^o)|^2 + \int_{\Gamma} \frac{(u^o - \tilde{u}^o)^2}{\sigma} = 0$$

con lo cual

$$\tilde{u}^o \equiv u^o \qquad \text{en } \Omega.$$

Veamos que

(3.30) $\quad u^m \geqslant u^{m-1}$ p.p. en Ω y p.p. en Γ , $1 \leqslant m \leqslant M$.

Para $m = 1$ debemos ver que $u^1 \geqslant u^o$. Tomemos $\varphi =$

$=(u^1-u^o)^- \leqslant 0$ como función de prueba en (3.29), luego

$$(3.31) \quad \int_\Omega \frac{(u^1-u^o)}{\delta}(u^1-u^o)^- + \int_\Omega \nabla u^1 . \nabla (u^1-u^o)^- + \\ + \int_\Gamma \frac{u^1}{h^1}(u^1-u^o)^- = 0$$

y por (2.7) tomando como función de prueba $\varphi = (u^1-u^o)^- \leqslant 0$ tenemos

$$(3.32) \quad -\int_\Omega \nabla u^o . \nabla (u^1-u^o)^- - \int_\Gamma \frac{u^o}{\sigma}(u^1-u^o)^- = \\ = \int_\Omega f(u^1-u^o)^- \leqslant 0$$

Sumando (3.31) y (3.32) se tiene

$$(3.33) \quad \int_\Omega \frac{[(u^1-u^o)^-]^2}{\delta} + \int_\Omega |\nabla (u^1-u^o)^-|^2 + \\ + \int_\Gamma \left(\frac{u^1}{h^1} - \frac{u^o}{h^o}\right)(u^1-u^o)^- \leqslant 0$$

Pero como $h^1 \geqslant h^o$ resulta

$$\left(\frac{u^1}{h^1} - \frac{u^o}{h^o}\right)(u^1-u^o)^- \geqslant 0$$

y por (3.33)

$$(u^1-u^o)^- = 0$$

o sea,

$$u^1 \geqslant u^o \qquad \text{p.p. en } \Omega \text{ y p.p. en } \Gamma .$$

Supongamos que hemos probado que

$$u^{m-1} \geqslant u^{m-2} \qquad \text{p.p. en} \quad \Omega \quad \text{y p.p. en} \quad \Gamma \qquad m \geqslant 2 \ ,$$

veamos que

$$u^{m} \geqslant u^{m-1} \qquad \text{p.p. en} \quad \Omega \quad \text{y p.p. en} \quad \Gamma$$

pero por (3.29) utilizando como función de prueba $\varphi = (u^m - u^{m-1})^-$ tenemos

$$(3.34) \quad \int_\Omega \frac{(u^m - u^{m-1})}{\delta} (u^m - u^{m-1})^- + \int_\Omega \nabla u^m . \nabla (u^m - u^{m-1})^- + \\ + \int_\Gamma \frac{u^m}{h^m} (u^m - u^{m-1})^- = 0$$

y además

$$(3.35) \quad - \int_\Omega \nabla u^{m-1} . \nabla (u^m - u^{m-1})^- - \int_\Gamma \frac{u^{m-1}}{h^{m-1}} (u^m - u^{m-1})^- = \\ = \int_\Omega \frac{(u^{m-1} - u^{m-2})}{\delta} (u^m - u^{m-1})^- \leqslant 0 \ .$$

Si sumamos (3.34) y (3.35) tenemos

$$(3.36) \quad \int_\Omega \frac{[(u^m - u^{m-1})^-]^2}{\delta} + \int_\Omega |\nabla (u^m - u^{m-1})^-|^2 + \\ + \int_\Gamma \left(\frac{u^m}{h^m} - \frac{u^{m-1}}{h^{m-1}}\right) (u^m - u^{m-1})^- \leqslant 0$$

y como $h^m \geqslant h^{m-1}$ resulta

$$\left(\frac{u^m}{h^m} - \frac{u^{m-1}}{h^{m-1}}\right) (u^m - u^{m-1})^- \geqslant 0$$

y por (3.36)

$$(u^m - u^{m-1})^- = 0$$

o sea,

$$u^m \geqslant u^{m-1} \qquad \text{p.p. en } \Omega \text{ y p.p. en } \Gamma .$$

Además, queremos ver que

$$(3.37) \qquad u^m \leqslant 1 \quad \text{p.p. en } \Omega, \quad 0 \leqslant m \leqslant M .$$

Pongamos como función de prueba $\varphi = (u^m - 1)^+$ en (3.29) para obtener

$$(3.38) \int_\Omega \frac{(u^m - u^{m-1})}{\delta} (u^m - 1)^+ + \int_\Omega |\nabla (u^m - 1)^+|^2 + \\ + \int_\Gamma \frac{u^m}{h^m} (u^m - 1)^+ = 0$$

Como

$$0 \leqslant u^o \leqslant u^m$$

y además vale (3.30) se tiene

$$(u^m - 1)^+ = 0$$

o sea,

$$u^m \leqslant 1 \qquad \text{p.p. en } \Omega .$$

Definimos $u^\delta \in H^1(Q_T)$ como sigue:

$$(3.39)\qquad u^{\delta}(x,t) = \left(\frac{t-(m-1)\delta}{\delta}\right) u^m(x) + \left(1 - \frac{t-(m-1)\delta}{\delta}\right) u^{m-1}(x),$$

$$x \in \Omega,\ (m-1)\delta \leq t \leq m\delta\ ,\quad 1 \leq m \leq M\ .$$

Veamos que

$$(3.40)\qquad \|u^{\delta}\|_{H^1(Q_T)} \leq C_4$$

donde C_4 es una constante que no depende de δ.

Acotemos primero $D_x u^{\delta}$.

Si $0 \leq t \leq \delta$ tenemos

$$\int_{\Omega_t} |\nabla u^{\delta}|^2 \leq \frac{t}{\delta} \int_{\Omega} |\nabla u^1|^2 + \left(1 - \frac{t}{\delta}\right) \int_{\Omega} |\nabla u^o|^2$$

$$\leq \int_{\Omega} \frac{u^1 - u^o}{\delta}(1-u^1) + \int_{\Gamma} \frac{u^1}{h^1}(1-u^1) + \int_{\Omega} f(1-u^o) +$$

$$+ \int_{\Gamma} \frac{u^o}{\sigma}(1-u^o)$$

de donde

$$(3.41)\qquad \int_{\Omega_t} |\nabla u^{\delta}|^2 \leq \int_{\Omega} \frac{u^1 - u^o}{\delta} + \|f\|_{L^1(\Omega)} + \frac{2|\Gamma|}{\sigma_*}$$

$$0 \leq t \leq \delta.$$

En general, para $(m-1)\delta \leq t \leq m\delta$, $2 \leq m \leq M$, se tiene

$$\int_{\Omega_t} |\nabla u^{\delta}|^2 \leq \left(\frac{t-(m-1)\delta}{\delta}\right) \int_{\Omega} |\nabla u^m|^2 + \left(1 - \frac{t-(m-1)\delta}{\delta}\right) \int_{\Omega} |\nabla u^{m-1}|^2$$

$$\leq \int_{\Omega} \frac{u^m - u^{m-1}}{\delta}(1-u^m) + \int_{\Gamma} \frac{u^m}{h^m}(1-u^m) +$$

$$+ \int_\Omega \frac{u^{m-1} - u^{m-2}}{\delta}(1 - u^{m-1}) + \int_\Gamma \frac{u^{m-1}}{h^{m-1}} (1 - u^{m-1}) \;,$$

de donde

$$(3.42) \qquad \int_{\Omega_t} |\nabla u^\delta|^2 \leqslant \int_\Omega \frac{u^m - u^{m-1}}{\delta} + \int_\Omega \frac{u^{m-1} - u^{m-2}}{\delta} + \frac{2|\Gamma|}{\sigma_*} \;,$$

$$(m-1)\delta \leqslant t \leqslant m\delta \;, \quad 2 \leqslant m \leqslant M \;.$$

Por (3.41) y (3.42) tenemos

$$(3.43) \qquad \int_0^T \int_{\Omega_t} |\nabla u^\delta|^2 \leqslant \int_\Omega (u^1 - u^o) + \delta \|f\|_{L^1(\Omega)} + $$

$$+ \sum_{m=2}^{M} \int_\Omega (u^m - u^{m-2}) + M\delta \frac{2|\Gamma|}{\sigma_*}$$

$$= \int_\Omega (u^M + u^{M-1} - u^1 - u^o + u^1 - u^o) +$$

$$+ \delta \|f\|_{L^1(\Omega)} + T \frac{2|\Gamma|}{\sigma_*}$$

de donde

$$(3.44) \qquad \int_0^T \int_{\Omega_t} |\nabla u^\delta|^2 \leqslant 2|\Omega| + \frac{2T|\Gamma|}{\sigma_*} + T \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

Además, como $0 \leqslant u^m \leqslant 1$, $0 \leqslant m \leqslant M$, tenemos $0 \leqslant u^\delta \leqslant 1$ y

$$(3.45) \qquad \int_0^T \int_{\Omega_t} |u^\delta|^2 \leqslant |\Omega| \; T$$

Veamos qué pasa con u_t^δ .

Para $(m-1)\delta \leqslant t \leqslant m\delta$, $1 \leqslant m \leqslant M$, se tiene

$$(3.46) \qquad u_t^\delta = \frac{u^m - u^{m-1}}{\delta}$$

Si ponemos $\varphi = u^m - u^{m-1}$ como función de prueba en (3.29) obtenemos

$$\int_\Omega \frac{(u^m - u^{m-1})^2}{\delta} = \int_\Omega \nabla u^m . \nabla (u^{m-1} - u^m) + \int_\Gamma \frac{u^m}{h^m} (u^{m-1} - u^m)$$
$$\leq \int_\Omega \nabla u^m . \nabla u^{m-1} - \int_\Omega \nabla u^m . \nabla u^m .$$

Entonces

$$\int_0^T \int_{\Omega_t} (u_t^\delta)^2 = \sum_{m=1}^{M} \int_{(m-1)\delta}^{m\delta} \int_\Omega \left(\frac{u^m - u^{m-1}}{\delta}\right)^2$$
$$= \sum_{m=1}^{M} \int_\Omega \frac{(u^m - u^{m-1})^2}{\delta} \leq \sum_{m=1}^{M} \left(\int_\Omega \nabla u^m . \nabla u^{m-1} - \right.$$
$$\left. - \int_\Omega \nabla u^m . \nabla u^m\right) ,$$

o sea,

$$(3.47) \quad \int_0^T \int_{\Omega_t} (u_t^\delta)^2 \leq \int_\Omega \nabla u^1 . \nabla u^o + \sum_{m=2}^{M} \int_\Omega \nabla (u^m - u^{m-1}) . \nabla u^{m-1} -$$
$$- \int_\Omega |\nabla u^M|^2 ,$$

pero por (3.29)

$$(3.48) \quad \int_\Omega \nabla (u^m - u^{m-1}) . \nabla u^{m-1} = \int_\Omega \frac{u^{m-1} - u^{m-2}}{\delta} (u^{m-1} - u^m) +$$
$$+ \int_\Gamma \frac{u^{m-1}}{h^{m-1}} (u^{m-1} - u^m) \leq 0 \ , \ 2 \leq m \leq M .$$

Luego, por (3.47) y (3.48) tenemos

$$(3.49) \quad \int_0^T \int_{\Omega_t} (u_t^\delta)^2 \leq \int_\Omega \nabla u^1 . \nabla u^o = \int_\Omega f(1 - u^1) + \int_\Gamma \frac{u^o}{\sigma} (1 - u^1) ,$$

de donde

(3.50) $$\int_0^T \int_{\Omega_t} (u_t^\delta)^2 \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + \frac{|\Gamma|}{\sigma_*}$$

Por (3.44), (3.45) y (3.50) tenemos (3.40), o sea,

$$\|u^\delta\|_{H^1(Q_T)} \leq C_4$$

donde C_4 es una constante que depende de T, σ_* y f pero es independiente de δ.

Entonces existe $\tilde{u} \in H^1(Q_T)$ y una subsucesión de (u^δ) que volvemos a llamar (u^δ) tal que

(3.51) $$u^\delta \xrightarrow[(\delta \to 0)]{} \tilde{u} \qquad \text{en} \qquad H^1(Q_T)$$

(3.52) $$\begin{aligned} u^\delta &\xrightarrow[(\delta \to 0)]{} \tilde{u} \qquad \text{en} \qquad L^2(Q_T) \\ u^\delta &\xrightarrow[(\delta \to 0)]{} \tilde{u} \qquad \text{en} \qquad L^2(R_T) \end{aligned}$$

(3.53) $$\begin{aligned} u^\delta &\xrightarrow[(\delta \to 0)]{} \tilde{u} \quad \text{para casi todo punto de} \quad \Omega \times (0,T) \\ u^\delta &\xrightarrow[(\delta \to 0)]{} \tilde{u} \quad \text{para casi todo punto de} \quad \Gamma \times (0,T). \end{aligned}$$

Por (3.30) y la definición (3.39), cada u^δ es una función creciente en t para casi todo $x \in \Omega$ y $x \in \Gamma$, entonces por (3.53) $\tilde{u}$ tiene la misma propiedad.

Queremos ver que $\tilde{u} \equiv u$ y para ello debemos ver que

(3.54) $$\int_{Q_T} \tilde{u}_t \, \eta + \int_{Q_T} \nabla\tilde{u}.\nabla\eta + \int_{R_T} \frac{\tilde{u}}{h} \, \eta = 0 \qquad \forall \eta \in W_T \, .$$

Entonces por (3.51) y el hecho de que para cada δ, $u^\delta \equiv u^o$ para

$t=0$ resulta $\tilde{u} \equiv u^o$ para $t=0$: (2.5). Además, por la misma razón $\tilde{u}=1$ en $S\times(0,T)$: (2.2), y como el problema $(P_1(h))$ tiene única solución débil, resulta

$$\tilde{u} \equiv u \tag{3.55}$$

de donde u es creciente en t para casi todo $x \in \Omega$ y $x \in \Gamma$.

La acotación

$$0 \leqslant u \leqslant 1 \tag{3.56}$$

se obtiene de (3.53), (3.55) y el hecho de que $0 \leqslant u^\delta \leqslant 1$ para cada δ.

Vamos a probar (3.54).

Para cada t tal que $0 \leqslant t \leqslant \delta$, consideremos la ecuación (2.7) multiplicada por $(1-\frac{t}{\delta})$, obtenemos

$$\int_{\Omega_t} (1-\frac{t}{\delta})\, f\varphi + \int_{\Omega_t} \nabla[(1-\frac{t}{\delta})\, u^o].\nabla\varphi + \int_{\Gamma_t} (1-\frac{t}{\delta})\, \frac{u^o}{h^o}\,\varphi = 0 = \tag{3.57}$$

$$= \int_{\Gamma_t} (1-\frac{t}{\delta})\, \frac{u^o}{h(t)}\,\varphi - \int_{\Gamma_t} (1-\frac{t}{\delta})\, \frac{u^o}{h(t)}\,\varphi \,, \quad \forall\varphi \in V.$$

Si ahora multiplicamos (3.29) por $\frac{t}{\delta}$ tenemos

$$\int_{\Omega_t} \frac{t}{\delta}\, (\frac{u^1-u^o}{\delta})\varphi + \int_{\Omega_t} \nabla(\frac{t}{\delta}\, u^1).\nabla\varphi + \int_{\Gamma_t} \frac{t}{\delta}\, \frac{u^1}{h^1}\,\varphi = 0 = \tag{3.58}$$

$$= \int_{\Gamma_t} \frac{t}{\delta}\, \frac{u^1}{h(t)}\,\varphi - \int_{\Gamma_t} \frac{t}{\delta}\, \frac{u^1}{h(t)}\,\varphi \qquad \forall\varphi \in V .$$

Sumemos (3.57) y (3.58) e integremos con respecto a t entre 0 y

δ para obtener

$$(3.59) \quad \frac{\delta}{2}\int_\Omega f\varphi + \frac{\delta}{2}\int_\Omega \frac{(u^1 - u^0)}{\delta}\varphi + \int_0^\delta \int_{\Omega_t} \nabla u^\delta . \nabla\varphi +$$

$$+ \int_0^\delta \int_{\Gamma_t} \frac{u^\delta}{h}\varphi = \int_0^\delta \int_{\Gamma_t} (1 - \frac{t}{\delta}) u^0 (\frac{1}{h} - \frac{1}{h^0}) \varphi +$$

$$+ \int_0^\delta \int_{\Gamma_t} \frac{t}{\delta} u^1 (\frac{1}{h} - \frac{1}{h^1}) \varphi \qquad \forall\varphi \in V$$

En general, para $(m-1)\delta \leq t \leq m\delta \qquad 2 \leq m \leq M$, se tiene

$$(3.60) \quad \frac{\delta}{2}\int_\Omega \frac{u^{m-1} - u^{m-2}}{\delta}\varphi + \frac{\delta}{2}\int_\Omega \frac{u^m - u^{m-1}}{\delta}\varphi +$$

$$+ \int_{(m-1)\delta}^{m\delta} \int_{\Omega_t} \nabla u^\delta . \nabla\varphi + \int_{(m-1)\delta}^{m\delta} \int_{\Gamma_t} \frac{u^\delta}{h}\varphi =$$

$$= \int_{(m-1)\delta}^{m\delta} \int_{\Gamma_t} (1 - \frac{t-(m-1)\delta}{\delta}) \; u^{m-1} \; (\frac{1}{h} - \frac{1}{h^{m-1}}) \varphi +$$

$$+ \int_{(m-1)\delta}^{m\delta} \int_{\Gamma_t} (\frac{t-(m-1)\delta}{\delta}) \; u^m \; (\frac{1}{h} - \frac{1}{h^m}) \varphi \quad , \forall\varphi \in V.$$

Sea ahora $\varphi \in V$, tenemos para $1 \leq m \leq M$

$$(3.61) \quad \left| \int_{(m-1)\delta}^{m\delta} \int_{\Gamma_t} (1 - \frac{t-(m-1)\delta}{\delta}) \; u^{m-1} (\frac{1}{h} - \frac{1}{h^{m-1}}) \varphi \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sigma_*^2} \frac{k^*}{\sigma_*} \delta . \delta \int_\Gamma |\varphi| = \|\varphi\|_{L^1(\Gamma)} \frac{k^*}{\sigma_*^3} \delta^2$$

recordando que por hipótesis y (3.37)

$$0 \leqslant u^{o} \leqslant 1$$

de donde

$$\|u\|_{L^{\infty}(R_T)} \leqslant 1$$

Además tenemos

$$(3.62) \quad \left| \int_{(m-1)\delta}^{m\delta} \int_{\Gamma_t} \left(\frac{t-(m-1)\delta}{\delta}\right) u^m \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h^m}\right) \varphi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma_*^2} \frac{k^*}{\sigma_*} \delta . \delta \int_{\Gamma} |\varphi| = \|\varphi\|_{L^1(\Gamma)} \frac{k^*}{\sigma_*^3} \delta^2$$

Sean $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$, entonces existen $0 \leqslant j < \ell \leqslant M$ tales que

$$(j-1)\delta < t_1 \leqslant j\delta < \ell\delta \leqslant t_2 < (\ell+1)\delta$$

Entonces por (3.59), (3.60), (3.61) y (3.62) se tiene

$$(3.63) \quad \left| \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} \frac{u^j - u^{j-1}}{\delta} \varphi + \delta \sum_{m=j+1}^{\ell-1} \int_{\Omega} \frac{u^m - u^{m-1}}{\delta} \varphi + \right.$$

$$+ \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} \frac{u^{\ell} - u^{\ell-1}}{\delta} \varphi + \int_{j\delta}^{\ell\delta} \int_{\Omega_t} \nabla u^{\delta} . \nabla \varphi +$$

$$\left. + \int_{j\delta}^{\ell\delta} \int_{\Gamma_t} \frac{u^{\delta}}{h} \varphi \right| \leqslant \frac{2\ k^*}{\sigma_*^3} \|\varphi\|_{L^1(\Gamma)} \left[(\ell-j)\delta \right] \delta$$

donde $\dfrac{u^j - u^{j-1}}{\delta}$ se reemplaza por f si $j = 0$.

Por (3.63) y (3.46) se tiene

$$(3.64)\quad \left|\frac{\delta}{2}\int_{\Omega}\frac{u^{j}-u^{j-1}}{\delta}\,\varphi+\int_{j\delta}^{\ell\delta}\int_{\Omega_t}u_t^{\delta}\,\varphi-\frac{\delta}{2}\int_{\Omega}\frac{u^{\ell}-u^{\ell-1}}{\delta}\,\varphi+\right.$$

$$\left.+\int_{j\delta}^{\ell\delta}\int_{\Omega_t}\nabla u^{\delta}.\nabla\varphi+\int_{j\delta}^{\ell\delta}\int_{\Gamma_t}\frac{u^{\delta}}{h}\,\varphi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\,k^*}{\sigma_*^3}\,\|\varphi\|_{L^1(\Gamma)}\,(t_2-t_1)\,\delta$$

Pero como en realidad queremos integrar con respecto a t entre t_1 y t_2 debemos acotar:

$$(3.65)\quad \int_{t_1}^{j\delta}\int_{\Omega_t}|u_t^{\delta}\,\varphi|\leqslant\|u_t^{\delta}\|_{L^2(Q_T)}\,\delta^{1/2}\,\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant\delta^{1/2}\,C_4\,\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

donde la última desigualdad vale por (3.40).

De la misma manera:

$$(3.66)\quad \int_{\ell\delta}^{t_2}\int_{\Omega_t}|u_t^{\delta}\,\varphi|\leqslant\|u_t^{\delta}\|_{L^2(Q_T)}\,\delta^{1/2}\,\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant\delta^{1/2}\,C_4\,\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

$$(3.67)\quad \int_{t_1}^{j\delta}\int_{\Omega_t}|\nabla u^{\delta}.\nabla\varphi|\leqslant n\,\|\nabla u^{\delta}\|_{L^2(Q_T)}\,\delta^{1/2}\,\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant\delta^{1/2}\,n\,C_4\,\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

$$(3.68)\quad \int_{\ell\delta}^{t_2}\int_{\Omega_t} |\nabla u^\delta . \nabla\varphi| \leq n \; \|\nabla u^\delta\|_{L^2(Q_T)} \; \delta^{1/2} \; \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq \delta^{1/2} \; n \; C_4 \; \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

$$(3.69)\quad \int_{t_1}^{j\delta}\int_{\Gamma_t} |\frac{u^\delta}{h}\varphi| \leq \frac{1}{\sigma_*} \, \delta \; \|\varphi\|_{L^1(\Gamma)}$$

$$(3.70)\quad \int_{\ell\delta}^{t_2}\int_{\Gamma_t} |\frac{u^\delta}{h}\varphi| \leq \frac{1}{\sigma_*} \, \delta \; \|\varphi\|_{L^1(\Gamma)}$$

Además,

$$(3.71)\quad |\frac{\delta}{2}\int_\Omega \frac{u^j - u^{j-1}}{\delta}\varphi| = \frac{1}{2}\,|\int_{(j-1)\delta}^{j\delta}\int_{\Omega_t} u_t^\delta\,\varphi| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\|u_t^\delta\|_{L^2(Q_T)} \; \delta^{1/2}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\, C_4 \; \delta^{1/2}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

y si $j = 0$,

$$(3.72)\quad |\frac{\delta}{2}\int_\Omega f\varphi| \leq \frac{\delta}{2}\,\|f\|_{L^2(\Omega)} \; \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \; .$$

También tenemos,

$$(3.73)\quad |\frac{\delta}{2}\int_\Omega \frac{u^\ell - u^{\ell-1}}{\delta}\varphi| = \frac{1}{2}\,|\int_{(\ell-1)\delta}^{\ell\delta}\int_{\Omega_t} u_t^\delta\,\varphi| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\|u_t^\delta\|_{L^2(Q_T)} \; \delta^{1/2} \; \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\, C_4 \; \delta^{1/2} \; \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \; .$$

Por (3.64) - (3.73), (3.51) y (3.52) tenemos

$$(3.74) \quad \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_t} \tilde{u}_t\, \varphi + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_t} \nabla\tilde{u}.\nabla\varphi + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_t} \frac{\tilde{u}}{h}\varphi = 0$$

$$\forall\varphi \in V,$$

pero podemos dividir (3.74) por $t_2 - t_1$ y hacer tender t_2 a t_1 para obtener para casi todo $t \in (0,T)$:

$$(3.75) \quad \int_{\Omega_t} \tilde{u}_t\, \varphi + \int_{\Omega_t} \nabla\tilde{u}.\nabla\varphi + \int_{\Gamma_t} \frac{\tilde{u}}{h}\varphi = 0 \qquad \forall\varphi \in V\,,$$

de donde

$$(3.76) \quad \int_{Q_T} \tilde{u}_t\, \eta + \int_{Q_T} \nabla\tilde{u}.\nabla\eta + \int_{R_T} \frac{\tilde{u}}{h}\,\eta = 0 \qquad \forall\eta \in W_T\,,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Observemos que si $f \geqslant 0$ y $u^o \geqslant 0$ la demostración del teorema 3.5 nos proporciona otro método para encontrar solución débil del problema $(P_1(h))$ donde h viene dada por (2.9), y (2.10) y (2.11) son válidas.

Pasemos ahora a demostrar la última parte del teorema 3.3.

<u>Dem.</u>: Por las partes i) y ii) podemos definir

$$(3.77) \qquad u^{\infty}(x) = \lim_{t\uparrow\infty} u(x,t) \quad , \text{ p.p. } x \in \Omega \text{ y p.p. } x \in \Gamma \cup S$$

y

$$(3.78) \qquad \bar{h}(x) = \lim_{t\uparrow\infty} h(x,t) \quad , \text{ p.p. } x \in \Gamma.$$

Como (u,h) es solución débil de (P_1) resulta

$$(3.79)\qquad \int_\Omega \nabla\left(\frac{1}{T}\int_0^T u\right).\nabla\varphi + \int_\Gamma \left(\frac{1}{T}\int_0^T \frac{u}{h}\right)\varphi =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_{\Omega_o} u^o\,\varphi - \int_{\Omega_T} u\,\varphi\right)\ ,\quad \forall\varphi\in V$$

y poniendo $\varphi = \frac{1}{T}\int_0^T (u-1)$ como función de prueba en (3.79) obtenemos

$$(3.80)\qquad \int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{1}{T}\int_0^T u\right)\right|^2 + \int_\Gamma \frac{1}{T^2}\left[\int_0^T \left(\frac{u}{h}\right).\int_0^T (u-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_{\Omega_o}\left(\frac{u^o}{T}\int_0^T (u-1)\right) - \int_{\Omega_T}\left(\frac{u}{T}\int_0^T (u-1)\right)\right]$$

Sea $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $T_i < T_j$ si $i<j$ y $\lim\limits_{i\to\infty} T_i = +\infty$.

Entonces como $0\leqslant u\leqslant 1$, de (3.80) resulta que

$$\left(\frac{1}{T_i}\int_0^{T_i} u\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

es una sucesión de funciones acotada en $H^1(\Omega)$; por lo tanto existe $\bar{\Psi}\in H^1(\Omega)$ y una subsucesión de (T_i) que volvemos a llamar (T_i) tal que

$$(3.81)\qquad \frac{1}{T_i}\int_0^{T_i} u \xrightarrow[(i\to\infty)]{} \bar{\Psi} \qquad \text{en } H^1(\Omega)$$

$$(3.82)\qquad \frac{1}{T_i}\int_0^{T_i} u \xrightarrow[(i\to\infty)]{} \bar{\Psi} \qquad \text{en } L^2(\Omega) \text{ y en } L^2(\Gamma\cup S)$$

$$(3.83) \qquad \frac{1}{T_i}\int_0^{T_i} u \xrightarrow[(i \to \infty)]{} \bar{\Psi} \quad \text{p.p. en } \Omega \text{ y p.p. en } \Gamma \cup S.$$

Como además por (3.77),

$$(3.84) \qquad \frac{1}{T_i}\int_0^{T_i} u \xrightarrow[(i \to \infty)]{} u^\infty \quad \text{p.p. en } \Omega \text{ y p.p. en } \Gamma \cup S$$

resulta,de (3.83) y (3.84)

$$(3.85) \qquad u^\infty \equiv \bar{\Psi} \qquad \text{en} \quad \Omega \cup \Gamma \cup S.$$

Por (3.77), (3.78) y (3.85) tenemos

$$(3.86) \qquad \frac{1}{T_i}\int_0^{T_i} \frac{u}{h} \xrightarrow[(i \to \infty)]{} \frac{\bar{\Psi}}{\bar{h}} \quad \text{p.p. en } \Gamma$$

y por (3.79), (3.81), (3.86) y el teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue

$$(3.87) \qquad \int_\Omega \nabla\bar{\Psi}.\nabla\varphi + \int_\Gamma \frac{\bar{\Psi}}{\bar{h}}\varphi = 0 \qquad \forall\varphi \in V ,$$

con lo cual hemos probado (3.5).

Además, por (3.77) y (3.85),

$$(3.88) \qquad 0 \leqslant \bar{\Psi} \leqslant 1 \qquad \text{p.p. en } \Omega$$

$$(3.89) \qquad \bar{\Psi} = 1 \qquad \text{p.p. en } S, \text{ o sea (3.2) y}$$

$$(3.90) \qquad \sigma \leqslant \bar{h} \leqslant \text{máx}\,\{\frac{C_2}{\varepsilon}, \sigma^*\} \qquad \text{p.p. en } \Gamma .$$

Probemos (3.4), o sea,

$$\frac{\bar{\Psi}(x)}{\bar{h}(x)} = \varepsilon \qquad , \text{ si } \quad \bar{h}(x) > \sigma(x)$$

p.p. en Γ .

$$\frac{\bar{\Psi}(x)}{\bar{h}(x)} \leqslant \varepsilon \qquad , \text{ si } \quad \bar{h}(x) = \sigma(x)$$

El razonamiento que sigue se hará para casi todo $x \in \Gamma$.

Como $h(x,t) = \sigma(x) + \int_0^t G\left(\left(\frac{u(x,\tau)}{h(x,\tau)} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau \quad , \; x \in \Gamma, \; t \geqslant 0$

de la parte i) y (2.6) resulta

$$\text{(3.91)} \qquad \lim_{t\uparrow\infty} \left(\frac{u(x,t)}{h(x,t)} - \varepsilon\right)^+ = 0 \qquad\qquad x \in \Gamma$$

o sea,

$$\text{(3.92)} \qquad \frac{\bar{\Psi}(x)}{\bar{h}(x)} \leqslant \varepsilon \qquad\qquad x \in \Gamma,$$

de donde, si $\bar{h}(x) = \sigma(x)$ tenemos

$$\text{(3.93)} \qquad \frac{\bar{\Psi}(x)}{\bar{h}(x)} \leqslant \varepsilon \; .$$

Si $\bar{h}(x) > \sigma(x)$ debemos probar que vale la igualdad en (3.92). Supongamos que

$$\text{(3.94)} \qquad \frac{\bar{\Psi}(x)}{\bar{h}(x)} < \varepsilon$$

entonces existe $\bar{t} > 0$ tal que

$$\text{(3.95)} \qquad \frac{u(x,t)}{h(x,t)} \leqslant \varepsilon \qquad\qquad \text{para} \quad t \geqslant \bar{t} \; .$$

Además, podemos elegir $\bar{t}$ como el mínimo con esa propiedad. Como $\bar{h}(x) > \sigma(x)$ resulta $\bar{t} > 0$, con lo cual podemos elegir una sucesión $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$(3.96)\qquad \begin{array}{ll} t_m < \bar{t} & t_m \uparrow \bar{t} \quad \text{y} \\ u(x,t_m) > \varepsilon\, h(x,t_m) \ . & \end{array}$$

Por ii), (3.77) y (3.85) tenemos

$$(3.97)\qquad \bar{\Psi}(x) \geq u(x,t_m) > \varepsilon\, h(x,t_m)$$

y haciendo tender m a infinito en (3.97) resulta

$$(3.98)\qquad \bar{\Psi}(x) \geq \varepsilon\, h(x,\bar{t})$$

pero por (3.95)

$$h_t(x,t) = 0 \qquad , \text{ para } \ t \geq \bar{t}$$

con lo cual

$$(3.99)\qquad h(x,\bar{t}) = h(x,t) = \bar{h}(x) \quad \text{para} \quad t \geq \bar{t}\ .$$

De (3.98) y (3.99) obtenemos

$$(3.100)\qquad \frac{\bar{\Psi}(x)}{\bar{h}(x)} \geq \varepsilon$$

que contradice (3.94).

Luego si $\bar{h}(x) > \sigma(x)$ entonces

$$\frac{\bar{\Psi}(x)}{\bar{h}(x)} = \varepsilon$$

y queda probado el teorema.

4. EL PROBLEMA DE ELECTROPINTURA COMO LIMITE DE PROBLEMAS PARABOLICOS

Los resultados de los capítulos 2 y 3 siguen siendo válidos,con ligeras modificaciones, para el siguiente problema (P_α):

Hallar un par de funciones $(u^\alpha(x,t),\ h^\alpha(x,t))$ tales que

$$(P_\alpha)\quad \begin{array}{lll} (4.1) & \alpha\, u^\alpha_t = \Delta u^\alpha & \text{en } \Omega\times(0,T) \\ (4.2) & u^\alpha = 1 & \text{en } S\times(0,T) \\ (4.3) & u^\alpha_{\nu_i} = \dfrac{u^\alpha}{h^\alpha} & \text{en } \Gamma\times(0,T) \\ (4.4) & h^\alpha(x,t) = \sigma(x) + \displaystyle\int_0^t G\left(\left(\frac{u^\alpha(x,\tau)}{h^\alpha(x,\tau)} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau & \text{en } \Gamma\times(0,T) \\ (4.5) & u^\alpha(x,0) = u^o(x) & \text{en } \Omega\ , \end{array}$$

donde S y $\Gamma \in C^1$; $\varepsilon > 0$, $T > 0$, $\alpha > 0$ son constantes dadas.

Mantenemos las hipótesis (2.6) y (2.7), hechas sobre las funciones σ , G y u^o.

<u>Definición 4.1</u>: Una *solución débil de* (P_α) es un par de funciones $(u^\alpha(x,t), h^\alpha(x,t))$ tal que $u^\alpha \in H^1(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$, $h^\alpha \in L^\infty(R_T)$ y satisfacen (4.2), (4.4), (4.5) y

$$(4.6)\qquad \int_{Q_T} \alpha\, u^\alpha_t\, \eta + \int_{Q_T} \nabla u^\alpha . \nabla\eta + \int_{R_T} \frac{u^\alpha}{h^\alpha} . \eta = 0 \qquad \forall \eta \in W_T .$$

Definamos

$$(4.7)\qquad h^\alpha(x,t) = \sigma(x) + \int_0^t G\left(\left(\frac{u^*(x,\tau)}{h^*(x,\tau)} - \varepsilon\right)^+\right) d\tau \quad \text{en } \Gamma\times(0,T)$$

donde u^* y h^* satisfacen (2.10) y (2.11).

Comenzaremos por resolver el siguiente problema $(P_\alpha(h^\alpha))$: Hallar una función $u^\alpha(x,t)$ tal que

$$(P_\alpha(h^\alpha))\quad \begin{cases} (4.1) & \alpha\, u_t^\alpha = \Delta u^\alpha & \text{en } \Omega\times(0,T) \\ (4.2) & u^\alpha = 1 & \text{en } S\times(0,T) \\ (4.3') & u_{\nu_i}^\alpha = \dfrac{u^\alpha}{h^\alpha} & \text{en } \Gamma\times(0,T) \\ (4.5) & u^\alpha(x,0) = u^o(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

En (4.3') h^α viene dada por (4.7).

<u>Definición 4.2</u>: Una *solución débil de* $(P_\alpha(h^\alpha))$ es una función $u^\alpha \in H^1(Q_T)$ que satisface (4.2), (4.5) y

$$(4.8)\quad \int_{Q_T} \alpha\, u_t^\alpha\, \eta + \int_{Q_T} \nabla u^\alpha . \nabla\eta + \int_{R_T} \frac{u^\alpha}{h^\alpha}\,\eta = 0 \qquad \forall\eta \in W_T.$$

En (4.8) h^α viene dada por (4.7).

Pongamos $v^\alpha = u^\alpha - 1$ y entonces (4.1), (4.2), (4.3') y (4.5) se transforman en

$$(\tilde{P}_\alpha(h^\alpha))\quad \begin{cases} (4.1') & \alpha\, v_t^\alpha = \Delta v^\alpha & \text{en } \Omega\times(0,T) \\ (4.2') & v^\alpha = 0 & \text{en } S\times(0,T) \\ (4.3'') & v_{\nu_i}^\alpha = \dfrac{v^\alpha}{h^\alpha} + \dfrac{1}{h^\alpha} & \text{en } \Gamma\times(0,T) \\ (4.5') & v^\alpha(x,0) = u^o(x) - 1 & \text{en } \Omega\,. \end{cases}$$

<u>Definición 4.3</u>: Una *solución débil de* $(\tilde{P}_\alpha(h^\alpha))$ es una función $v^\alpha \in W_T$ que satisface (4.5') y para casi todo $t \in (0,T)$

$$(4.9)\quad \int_{\Omega_t} \alpha\, v_t^\alpha \varphi + \int_{\Omega_t} \nabla v^\alpha . \nabla\varphi + \int_{\Gamma_t} \frac{v^\alpha + 1}{h^\alpha}\,\varphi = 0 \qquad \forall\varphi \in V\,.$$

Todo lo hecho en el capítulo 2 se puede repetir ahora. Indicaremos solo los cambios que se producen en este caso. Vamos a aproximar v^α por funciones v_m^α definidas por

$$v_m^\alpha(x,t) = \sum_{k=1}^{m} g_k^\alpha(t)\ w_k(x) \qquad \text{en} \quad \Omega\times(0,T),$$

donde (g_k^α) verifican el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(4.10) \qquad \sum_{k=1}^{m} \alpha\,(g_k^\alpha)'(t) \int_{\Omega_t} w_k w_j + \sum_{k=1}^{m} g_k^\alpha(t) \int_{\Omega_t} \nabla w_k \cdot \nabla w_j +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} g_k^\alpha(t) \int_{\Gamma_t} \frac{w_k}{h^\alpha}\, w_j + \int_{\Gamma_t} \frac{w_j}{h^\alpha} = 0 \,, \quad 1 \leqslant j \leqslant m \,,$$

con la condición inicial

$$(4.11) \qquad \begin{aligned} g_1^\alpha(0) &= \|u^o - 1\|_{L^2(\Omega)} \\ g_k^\alpha(0) &= 0 \qquad\qquad k > 1 \,. \end{aligned}$$

El lema 2.4 se transforma en el

<u>Lema 4.4</u>:

$$(4.12) \qquad \|v_m^\alpha\|_{H^1(Q_T)} \leqslant C_1^\alpha \qquad \forall m \,,$$

donde C_1^α es una constante que solo depende de T, σ_*, f, u^o, $\|u^*\|_{L^\infty(R_T)}$ y α; y si $0 < \alpha \leqslant A$ y en (2.7) $f \equiv 0$

$$(4.13) \qquad \|v_m^\alpha\|_{H^1(Q_T)} \leqslant \tilde{C}_1 \qquad \forall m \,,$$

donde $\tilde{C}_1$ es una constante que solo depende de T, σ_*,

$\|u^*\|_{L^\infty(R_T)}$ y A .

Dem.: Repitiendo el razonamiento hecho en (2.19) - (2.39) con las modificaciones correspondientes, obtenemos (4.12).

Para obtener (4.13) observemos que, en este caso, la fórmula (2.25) se transforma en

$$(4.14) \quad \frac{\alpha}{2}\int_{\Omega_T}(v_m^\alpha)^2 + \int_{Q_T}|\nabla v_m^\alpha|^2 + \int_{R_T}\frac{(v_m^\alpha)^2}{h^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{2}\|u^o - 1\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ (\sqrt{\alpha}\|u^o - 1\|_{L^2(\Omega)} + (\frac{|\Gamma|T}{\sigma_*})^{1/2})(\frac{|\Gamma|T}{\sigma_*})^{1/2} ,$$

la fórmula (2.36) en

$$(4.15) \quad \frac{\alpha}{2}\int_{\Omega_T}(v_{mt}^\alpha)^2 + \int_{Q_T}|\nabla v_{mt}^\alpha|^2 + \int_{R_T}\frac{(v_{mt}^\alpha)^2}{h^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant C\,(\int_{R_T}\frac{(v_m^\alpha)^2}{h^\alpha})^{1/2}(\int_{R_T}\frac{(v_{mt}^\alpha)^2}{h^\alpha})^{1/2} +$$

$$+ C\,(\frac{|\Gamma|T}{\sigma_*})^{1/2}(\int_{R_T}\frac{(v_{mt}^\alpha)^2}{h^\alpha})^{1/2}$$

donde $C = \dfrac{k^*\|u^*\|_{L^\infty(R_T)}}{\sigma_*^2}$,

y la fórmula (2.39) en

$$(4.16) \quad \int_{R_T}\frac{(v_{mt}^\alpha)^2}{h^\alpha} \leqslant 2\,C^2\int_{R_T}\frac{(v_m^\alpha)^2}{h^\alpha} + 2\,C^2\,\frac{|\Gamma|T}{\sigma_*}$$

que nos dan las acotaciones necesarias.

Habiendo estudiado las aproximantes de la solución v^α

de $(\tilde{P}_\alpha(h^\alpha))$ pasemos a enunciar el siguiente teorema para el cual mantendremos las hipótesis (2.10) y (2.11).

Teorema 4.5: Existe una única solución débil de $(P_\alpha(h^\alpha))$. Más aún, $u^\alpha \in L^\infty(Q_T)$ y satisface

(4.17) $$\|u^\alpha\|_{L^\infty(Q_T)} \leq C_2 = \text{máx}\,\{\|u^o\|_{L^\infty(\Omega)}, 1\} = \|u^o\|_{L^\infty(\Omega)}$$

(4.18) $$\|u^\alpha\|_{H^1(Q_T)} \leq C_3^\alpha$$

donde C_3^α es una constante que solo depende de T, σ_*, f, u^o, $\|u^*\|_{L^\infty(R_T)}$ y α, y si $0 < \alpha \leq A$ y en (2.7) $f \equiv 0$

(4.19) $$\|u^\alpha\|_{H^1(Q_T)} \leq \tilde{C}_3$$

donde $\tilde{C}_3$ es una constante que solo depende de T, σ_*, $\|u^*\|_{L^\infty(R_T)}$ y A.

La demostración, que omitiremos, se obtiene a partir de los mismos razonamientos que hicimos en la demostración del teorema 2.5.

Ya obtuvimos los resultados necesarios para poder estudiar el problema (P_α): hemos resuelto el problema para una h^α dada y eso nos permitirá realizar un proceso iterativo. Vamos a resumir los análogos, para este caso, a los lemas 2.6, 2.7, 2.8 y teorema 2.9 en el siguiente

Teorema 4.6: Existe una única solución débil de (P_α) para cada $T > 0$.

Además

(4.20) $$\|u^\alpha\|_{L^\infty(Q_T)} \leq C_2$$

(4.21) $$\|u^\alpha\|_{H^1(Q_T)} \leq C_4^\alpha$$

y si $0 < \alpha \leq A$ y en (2.7) $f \equiv 0$

(4.22) $$\|\dot{u}^\alpha\|_{H^1(Q_T)} \leq \tilde{C}_4$$

donde C_4^α y $\tilde{C}_4$ son constantes que solo dependen de T, σ_*, f, u^o y α, y de T, σ_* y A respectivamente.

La demostración se obtiene a partir de los mismos razonamientos hechos en los lemas 2.6, 2.7, 2.8 y el teorema 2.9 y la omitiremos.

Acerca del comportamiento asintótico de la solución débil del problema (P_α) obtenemos el siguiente teorema cuya demostración es análoga a la del teorema 3.3.

Teorema 4.7: Sea (u^α, h^α) la solución débil de (P_α) para $0 \leq t < \infty$. Entonces

i) $h^\alpha \leq \max\{\frac{C_2}{\varepsilon}, \sigma^*\}$ p.p. en $\Gamma\times(0,\infty)$;

si en (2.6) y (2.7) suponemos $f \geq 0$ y $u^o \geq 0$ entonces

ii) u^α es creciente en t para casi todo $x \in \Omega$ y $x \in \Gamma$, y $0 \leq u^\alpha \leq 1$ p.p. en $\Omega\times(0,\infty)$.

Además, $u^\alpha \uparrow \bar{\Psi} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y $h^\alpha \uparrow \bar{h} \in L^\infty(\Gamma)$, cuando $t \to \infty$, donde $(\bar{\Psi}, \bar{h})$ es la única solución débil de (P_o^∞).

Vamos a estudiar el límite de (u^{α},h^{α}) cuando $\alpha \to 0$. En el lema 4.8 y teorema 4.9 veremos el comportamiento de una subsucesión muy particular, lo cual nos permitirá estudiar el límite en el caso general: teorema 4.14.

<u>Lema 4.8</u>: Sea $T < \min \{ \frac{\sigma_*^2}{2\sqrt{2}\, k^*} , \frac{\sigma_*^3}{\gamma\, 4\sqrt{2}\, k^*} \}$ donde $\gamma = \max \{ \frac{1}{\varepsilon} , \sigma^* \}$ y para cada $m \in \mathbb{N}$, sea (u^m,h^m) la solución débil del problema $(P_{1/m})$ correspondiente a $f \equiv 0$ en (2.7). Entonces (u^m) es una sucesión de Cauchy en $H^{1,0}(Q_T)$ y (h^m) es una sucesión de Cauchy en $L^2(R_T)$.

<u>Observación</u>: Para la demostración del lema es esencial la obtención de la acotación (4.38).

<u>Dem.</u>: Veamos que con esas hipótesis $u^o \geqslant 0$.

Como $f \equiv 0$ se tiene

$$(2.7) \qquad \int_\Omega \nabla u^o . \nabla\varphi + \int_\Gamma \frac{u^o}{\sigma} \varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in V ,$$

y poniendo $\varphi = (u^o)^-$ como función de prueba en (2.7) obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u^o . \nabla (u^o)^- + \int_\Gamma \frac{u^o}{\sigma} (u^o)^- = 0$$

o sea,

$$(4.23) \qquad \int_\Omega |\nabla (u^o)^-|^2 + \int_\Gamma \frac{[(u^o)^-]^2}{\sigma} = 0$$

con lo cual

$$(u^o)^- \equiv 0 \qquad \text{en } \Omega$$

o equivalentemente

$$(4.24) \qquad 0 \leq u^o \qquad \text{p.p. en } \Omega .$$

Además, por la demostración de la parte ii) del teorema 4.7,

$$(4.25) \qquad u^o \leq 1 \qquad \text{p.p. en } \Omega ,$$

de donde

$$(4.26) \qquad C_2 = \text{máx}\,\{\|u^o\|_{L^\infty(\Omega)}, 1\} = 1$$

y entonces

$$(4.27) \qquad \begin{aligned} &0 \leq u^m \leq 1 \qquad \text{p.p. en } \Omega\times(0,T) \\ &h^m \leq \text{máx}\,\{\frac{1}{\varepsilon}, \sigma^*\} = \gamma \quad , \text{ p.p. en } \Gamma\times(0,T),\ m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sean (u^j,h^j) y (u^ℓ,h^ℓ) las soluciones débiles de los problemas $(P_{1/j})$ y $(P_{1/\ell})$, respectivamente, correspondientes a $f \equiv 0$ en (2.7). Entonces

$$(4.28) \qquad \int_{Q_T} \frac{1}{j}\, u_t^j\, \eta + \int_{Q_T} \nabla u^j . \nabla \eta + \int_{R_T} \frac{u^j}{h^j}\, \eta = 0 \quad , \forall \eta \in W_T$$

y

$$(4.29) \qquad \int_{Q_T} \frac{1}{\ell}\, u_t^\ell\, \eta + \int_{Q_T} \nabla u^\ell . \nabla \eta + \int_{R_T} \frac{u^\ell}{h^\ell}\, \eta = 0 \quad , \forall \eta \in W_T .$$

De (4.28) y (4.29) tenemos

$$(4.30) \qquad \int_{Q_T} \frac{1}{j}\, (u^j - u^\ell)_t\, \eta + \int_{Q_T} (\frac{1}{j} - \frac{1}{\ell})\, u_t^\ell\, \eta +$$

$$+ \int_{Q_T} \nabla (u^j - u^\ell) . \nabla \eta + \int_{R_T} (\frac{u^j}{h^j} - \frac{u^\ell}{h^\ell})\eta = 0 \quad , \forall \eta \in W_T ,$$

y poniendo $\eta = u^j - u^\ell$ como función de prueba en (4.30) resulta

$$(4.31) \quad \int_{Q_T} \frac{1}{2j} [(u^j - u^\ell)^2]_t + \int_{Q_T} (\frac{1}{j} - \frac{1}{\ell}) \; u_t^\ell \; (u^j - u^\ell) +$$

$$+ \int_{Q_T} |\nabla (u^j - u^\ell)|^2 + \int_{R_T} (\frac{u^j}{h^j} - \frac{u^\ell}{h^\ell}) (u^j - u^\ell) = 0 \; .$$

Como $u^j = u^\ell$ para $t = 0$, tenemos

$$(4.32) \quad \int_{\Omega_T} \frac{1}{2j} (u^j - u^\ell)^2 + \int_{Q_T} (\frac{1}{j} - \frac{1}{\ell}) \; u_t^\ell \; (u^j - u^\ell) +$$

$$+ \int_{Q_T} |\nabla (u^j - u^\ell)|^2 + \int_{R_T} \frac{(u^j - u^\ell)^2}{h^\ell} +$$

$$+ \int_{R_T} \frac{(h^\ell - h^j) \; u^j (u^j - u^\ell)}{h^j \; h^\ell} = 0 \; .$$

Acotemos el último sumando de (4.32): por (4.20) y (4.26)

$$(4.33) \quad \int_{R_T} \left| \frac{(h^j - h^\ell) \; u^j (u^j - u^\ell)}{h^j \; h^\ell} \right| \leqslant \frac{1}{\sigma_*^2} \int_{R_T} |h^j - h^\ell| \, |u^j - u^\ell|$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma_*^2} \left(\int_{R_T} |h^j - h^\ell|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{R_T} |u^j - u^\ell|^2 \right)^{1/2}$$

y ahora busquemos una cota para $\left(\int_{R_T} |h^j - h^\ell|^2 \right)^{1/2}$.

Por (4.4) y (2.6), (4.20) y (4.26), si $x \in \Gamma$ y $0 \leqslant t \leqslant T$ resulta

$$(4.34) \quad |(h^j - h^\ell)(x,t)| \leqslant \int_0^T k^* \left| \frac{u^j}{h^j} - \frac{u^\ell}{h^\ell} \right| (x,\tau) \, d\tau$$

$$\leq \frac{k^*}{\sigma_*}\int_0^T |u^j - u^\ell|(x,\tau)\,d\tau + \frac{k^*}{\sigma_*^2}\int_0^T |h^j - h^\ell|(x,\tau)\,d\tau$$

$$\leq \frac{k^*\,T^{1/2}}{\sigma_*}\left(\int_0^T |u^j - u^\ell|^2(x,\tau)\,d\tau\right)^{1/2} + \frac{k^*\,T^{1/2}}{\sigma_*^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^T |h^j - h^\ell|^2(x,\tau)\,d\tau\right)^{1/2}$$

de donde

$$(4.35)\quad |(h^j - h^\ell)(x,t)|^2 \leq \frac{2(k^*)^2T}{\sigma_*^2}\int_0^T |u^j - u^\ell|^2(x,\tau)\,d\tau + $$

$$+ \frac{2(k^*)^2T}{\sigma_*^4}\int_0^T |h^j - h^\ell|^2(x,\tau)\,d\tau\ .$$

Integremos (4.35) con respecto a t entre 0 y T para obtener

$$(4.36)\quad \int_0^T |h^j - h^\ell|^2(x,t)\,dt \leq \frac{2(k^*)^2T^2}{\sigma_*^2}\int_0^T |u^j - u^\ell|^2(x,\tau)\,d\tau + $$

$$+ \frac{2(k^*)^2T^2}{\sigma_*^4}\int_0^T |h^j - h^\ell|^2(x,\tau)\,d\tau$$

integremos (4.36) sobre Γ y acotemos recordando que

$$T < \frac{\sigma_*^2}{2\sqrt{2}\,k^*}$$

$$(4.37)\quad \left(\int_{R_T} |h^j - h^\ell|^2\right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{2}\,k^*\,T}{\sigma_*}\left(\int_{R_T} |u^j - u^\ell|^2\right)^{1/2} + $$

$$+ \frac{\sqrt{2}\,k^*\,T}{\sigma_*^2}\left(\int_{R_T} |h^j - h^\ell|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}\ k^*\ T}{\sigma_*}\ \Big(\int_{R_T} |u^j - u^\ell|^2\Big)^{1/2} + \frac{1}{2}\ \Big(\int_{R_T} |h^j - h^\ell|^2\Big)^{1/2}$$

de donde

$$(4.38)\qquad \Big(\int_{R_T} |h^j - h^\ell|^2\Big)^{1/2} \leqslant \frac{2\sqrt{2}\ k^*T}{\sigma_*}\ \Big(\int_{R_T} |u^j - u^\ell|^2\Big)^{1/2} .$$

Si usamos la acotación (4.38) en (4.33) obtenemos

$$(4.39)\qquad \int_{R_T} \Big|\frac{(h^j - h^\ell)\, u^j (u^j - u^\ell)}{h^j\ h^\ell}\Big| \leqslant \frac{2\sqrt{2}\ k^*T}{\sigma_*^3} \int_{R_T} |u^j - u^\ell|^2 .$$

Ahora bien, de (4.32) se tiene

$$(4.40)\qquad \int_{Q_T} |\nabla (u^j - u^\ell)|^2 + \int_{R_T} \frac{(u^j - u^\ell)^2}{h^\ell} \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\frac{1}{\ell} - \frac{1}{j}\Big| \Big(\int_{Q_T} |u_t^\ell|^2\Big)^{1/2} (T|\Omega|)^{1/2} + \frac{2\sqrt{2}\ k^*T}{\sigma_*^3} \int_{R_T} |u^j - u^\ell|^2 .$$

Además, como $T < \dfrac{\sigma_*^3}{\gamma\ 4\sqrt{2}\ k^*}$, y valen (4.22) y (4.27), resulta

de (4.40)

$$\int_{Q_T} |\nabla (u^j - u^\ell)|^2 + \frac{1}{\gamma} \int_{R_T} |u^j - u^\ell|^2 \leqslant \Big|\frac{1}{\ell} - \frac{1}{j}\Big|\ \tilde{C}_4 (T|\Omega|)^{1/2} +$$

$$+\ \frac{1}{2\gamma} \int_{R_T} |u^j - u^\ell|^2 ,$$

o sea

$$(4.41)\qquad \int_{Q_T} |\nabla (u^j - u^\ell)|^2 + \frac{1}{2\gamma} \int_{R_T} |u^j - u^\ell|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\frac{1}{\ell} - \frac{1}{j}\Big|\ \tilde{C}_4\ (T|\Omega|)^{1/2}$$

donde $\tilde{C}_4$ es la cota para las derivadas en t obtenidas en el teorema 4.6 gracias al hecho de que $f \equiv 0$.

De (4.41) podemos deducir que (u^m) es una sucesión de Cauchy en $H^{1,0}(Q_T)$ y en $L^2(R_T)$ y entonces de (4.38) obtenemos que (h^m) es una sucesión de Cauchy en $L^2(R_T)$ y queda demostrado el lema.

Teorema 4.9: Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea (u^m,h^m) la solución débil del problema $(P_{1/m})$ correspondiente a $f \equiv 0$ en (2.7). Entonces (u^m) es una sucesión de Cauchy en $H^{1,0}(Q_T)$, (h^m) es una sucesión de Cauchy en $L^2(R_T)$ y existen $h \in L^\infty(R_T)$, $\Psi \in H^1(Q_T) \cap$ $\cap\, L^\infty(Q_T)$ tales que

$$(4.42) \qquad h^m \xrightarrow[(m\to\infty)]{} h \qquad \text{en } L^2(R_T)$$

$$(4.43) \qquad u^m \xrightarrow[(m\to\infty)]{} \Psi \qquad \text{en } H^{1,0}(Q_T)$$

$$(4.44) \qquad u^m \xrightarrow[(m\to\infty)]{} \Psi \qquad \text{en } H^1(Q_T)$$

donde (Ψ,h) satisfacen (1.2), (1.4) y

$$(4.45) \qquad \int_{Q_T} \nabla\Psi . \nabla\eta + \int_{R_T} \frac{\Psi}{h}\,\eta = 0 \ , \quad \forall \eta \in W_T \ .$$

Dem.: Sea $0 < T^* < T$ y supongamos que (u^m) y (h^m) sean sucesiones de Cauchy en $H^{1,0}(Q_{T^*})$ y $L^2(R_{T^*})$, respectivamente. Vamos a probar que (u^m) es una sucesión de Cauchy en $H^{1,0}(\Omega\times(T^*,\tilde{T}))$ y (h^m) es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Gamma\times(T^*,\tilde{T}))$ donde $T^* < \tilde{T} \leq T$ y $\tilde{T} - T^* < \min\{\frac{\sigma_*^2}{4k^*} , \frac{\sigma_*^3}{\gamma\, 8\, k^*}\}$. Si repetimos el razonamiento hecho en (4.28) - (4.32) obtenemos en este caso

$$(4.46) \qquad \int_{\Omega_{\tilde{T}}} \frac{1}{2j}(u^j - u^\ell)^2 - \int_{\Omega_{T^*}} \frac{1}{2j}(u^j - u^\ell)^2 +$$

$$+ \int_{T^*}^{\widetilde{T}} \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{\ell}\right) u_t^\ell \, (u^j - u^\ell) + \int_{T^*}^{\widetilde{T}} \int_{\Omega_t} |\nabla (u^j - u^\ell)|^2 +$$

$$+ \int_{T^*}^{\widetilde{T}} \int_{\Gamma_t} \frac{(u^j - u^\ell)^2}{h^\ell} + \int_{T^*}^{\widetilde{T}} \int_{\Gamma_t} \frac{(h^\ell - h^j) u^j (u^j - u^\ell)}{h^j \, h^\ell} = 0 \, .$$

Acotemos el último sumando de (4.46). Como en (4.33) resulta

$$(4.47) \quad \int_{T^*}^{\widetilde{T}} \int_{\Gamma_t} \left| \frac{(h^j - h^\ell) u^j (u^j - u^\ell)}{h^j \, h^\ell} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma_*^2} \left(\int_{T^*}^{\widetilde{T}} \int_{\Gamma_t} |h^j - h^\ell|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{T^*}^{\widetilde{T}} \int_{\Gamma_t} |u^j - u^\ell|^2 \right)^{1/2} ,$$

y ahora busquemos una cota para $\left(\int_{T^*}^{\widetilde{T}} \int_{\Gamma_t} |h^j - h^\ell|^2 \right)^{1/2}$.

Como en (4.34), si $x \in \Gamma$ y $T^* \leqslant t \leqslant \widetilde{T}$ resulta

$$(4.48) \quad |(h^j - h^\ell)(x,t)| \leqslant \frac{k^* (T^*)^{1/2}}{\sigma_*} \left(\int_0^{T^*} |u^j - u^\ell|^2 (x,\tau) \, d\tau \right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{k^* (T^*)^{1/2}}{\sigma_*^2} \left(\int_0^{T^*} |h^j - h^\ell|^2 (x,\tau) \, d\tau \right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{k^* (\widetilde{T} - T^*)^{1/2}}{\sigma_*} \left(\int_{T^*}^{\widetilde{T}} |u^j - u^\ell|^2 (x,\tau) \, d\tau \right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{k^* (\widetilde{T} - T^*)^{1/2}}{\sigma_*^2} \left(\int_{T^*}^{\widetilde{T}} |h^j - h^\ell|^2 (x,\tau) \, d\tau \right)^{1/2} ,$$

de donde

$$(4.49) \quad |(h^j - h^\ell)(x,t)|^2 \leqslant \frac{4 (k^*)^2 T^*}{\sigma_*^2} \int_0^{T^*} |u^j - u^\ell|^2 (x,\tau) \, d\tau +$$

$$+ \frac{4 (k^*)^2 T^*}{\sigma_*^4} \int_0^{T^*} |h^j - h^\ell|^2 (x,\tau) \, d\tau +$$

$$+\ \frac{4(k^*)^2(\tilde{T}-T^*)}{\sigma_*^2}\int_{T^*}^{\tilde{T}}|u^j-u^\ell|^2(x,\tau)\,d\tau\ +$$

$$+\ \frac{4(k^*)^2(\tilde{T}-T^*)}{\sigma_*^4}\int_{T^*}^{\tilde{T}}|h^j-h^\ell|^2(x,\tau)\,d\tau$$

Integremos (4.49) con respecto a x y t para obtener

$$(4.50)\qquad \left(\int_{T^*}^{\tilde{T}}\int_{\Gamma_t}|h^j-h^\ell|^2\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\,k^*\,(T^*)^{1/2}(\tilde{T}-T^*)^{1/2}}{\sigma_*}\left(\int_{R_{T^*}}|u^j-u^\ell|^2\right)^{1/2}+$$

$$+\ \frac{2\,k^*\,(T^*)^{1/2}(\tilde{T}-T^*)^{1/2}}{\sigma_*^2}\left(\int_{R_{T^*}}|h^j-h^\ell|^2\right)^{1/2}+$$

$$+\ \frac{2\,k^*\,(\tilde{T}-T^*)}{\sigma_*}\left(\int_{T^*}^{\tilde{T}}\int_{\Gamma_t}|u^j-u^\ell|^2\right)^{1/2}+$$

$$+\ \frac{2\,k^*\,(\tilde{T}-T^*)}{\sigma_*^2}\left(\int_{T^*}^{\tilde{T}}\int_{\Gamma_t}|h^j-h^\ell|^2\right)^{1/2}.$$

Acotemos el último sumando de (4.50) recordando que $\tilde{T}-T^*<\dfrac{\sigma_*^2}{4\,k^*}$, para obtener

$$(4.51)\qquad \left(\int_{T^*}^{\tilde{T}}\int_{\Gamma_t}|h^j-h^\ell|^2\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\,k^*\,(T^*)^{1/2}(\tilde{T}-T^*)^{1/2}}{\sigma_*}\left(\int_{R_{T^*}}|u^j-u^\ell|^2\right)^{1/2}+$$

$$+\ \frac{4\,k^*\,(T^*)^{1/2}(\tilde{T}-T^*)^{1/2}}{\sigma_*^2}\left(\int_{R_{T^*}}|h^j-h^\ell|^2\right)^{1/2}+$$

$$+\ \frac{4\,k^*\,(\tilde{T}-T^*)}{\sigma_*}\left(\int_{T^*}^{\tilde{T}}\int_{\Gamma_t}|u^j-u^\ell|^2\right)^{1/2}.$$

De (4.47) y (4.51) se tiene

$$(4.52)\quad \int_{T^*}^{\tilde{T}} \int_{\Gamma_t} \left| \frac{(h^j - h^\ell)\ u^j (u^j - u^\ell)}{h^j\ h^\ell} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\, k^* (T^*)^{1/2} (\tilde{T} - T^*) |\Gamma|^{1/2}}{\sigma_*^3} \left(\int_{R_{T^*}} |u^j - u^\ell|^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{4\, k^* (T^*)^{1/2} (\tilde{T} - T^*) |\Gamma|^{1/2}}{\sigma_*^4} \left(\int_{R_{T^*}} |h^j - h^\ell|^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{4\, k^* (\tilde{T} - T^*)}{\sigma_*^3} \int_{T^*}^{\tilde{T}} \int_{\Gamma_t} |u^j - u^\ell|^2 \ .$$

De (4.46) y (4.52) , como $\tilde{T} - T^* < \dfrac{\sigma_*^3}{\gamma\ 8\, k^*}$, repitiendo el razonamiento que hicimos para obtener (4.41) tenemos

$$(4.53)\quad \int_{T^*}^{\tilde{T}} \int_{\Omega_t} |\nabla (u^j - u^\ell)|^2 + \frac{1}{2\gamma} \int_{T^*}^{\tilde{T}} \int_{\Gamma_t} |u^j - u^\ell|^2 \leqslant \frac{1}{2j}\ |\Omega| +$$

$$+ \left|\frac{1}{j} - \frac{1}{\ell}\right| (\tilde{T} - T^*)^{1/2} |\Omega|^{1/2}\ \tilde{C}_4 +$$

$$+ \frac{4\, k^* (T^*)^{1/2} (\tilde{T} - T^*) |\Gamma|^{1/2}}{\sigma_*^3} \left(\int_{R_{T^*}} |u^j - u^\ell|^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{4\, k^* (T^*)^{1/2} (\tilde{T} - T^*) |\Gamma|^{1/2}}{\sigma_*^4} \left(\int_{R_{T^*}} |h^j - h^\ell|^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2j}\ |\Omega| + \left|\frac{1}{j} - \frac{1}{\ell}\right|\ T^{1/2} |\Omega|^{1/2}\ \tilde{C}_4 +$$

$$+ \frac{4\, k^* T^{3/2} |\Gamma|^{1/2}}{\sigma_*^3} \left(\int_{R_{T^*}} |u^j - u^\ell|^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{4\,k^* T^{3/2} |\Gamma|^{1/2}}{\sigma_*^4} \left(\int_{R_{T^*}} |h^j - h^\ell|^2 \right)^{1/2} .$$

De (4.53) deducimos que (u^m) es una sucesión de Cauchy en $H^{1,0}(\Omega\times(T^*,\tilde{T}))$ y en $L^2(\Gamma\times(T^*,\tilde{T}))$ y por (4.51) (h^m) es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Gamma\times(T^*,\tilde{T}))$.

Si repetimos este argumento un número finito de veces, comenzando con la conclusión del lema 4.8, podemos obtener que (u^m) y (h^m) son sucesiones de Cauchy en $H^{1,0}(Q_T)$ y $L^2(R_T)$ respectivamente.

Por lo tanto existen $\Psi \in H^{1,0}(Q_T)$ y $h \in L^2(R_T)$ tales que

$$(4.43) \qquad u^m \xrightarrow[(m\to\infty)]{} \Psi \qquad \text{en } H^{1,0}(Q_T)$$

y

$$(4.42) \qquad h^m \xrightarrow[(m\to\infty)]{} h \qquad \text{en } L^2(R_T) .$$

Además, por (4.22) y (4.43), se tiene que $\Psi \in H^1(Q_T)$ y

$$(4.44) \qquad u^m \xrightarrow[(m\to\infty)]{} \Psi \qquad \text{en } H^1(Q_T) .$$

De (4.43) tenemos

$$(4.54) \qquad u^m \xrightarrow[(m\to\infty)]{} \Psi \qquad \text{en } L^2(R_T) ,$$

y entonces de (4.42) y (4.54) sabemos que existe una subsucesión de (h^m) y una subsucesión de (u^m) que volvemos a llamar (h^m) y (u^m) respectivamente, tales que

$$(4.55) \qquad h^m \xrightarrow[(m \to \infty)]{} h \qquad \text{p.p. en} \quad \Gamma\times(0,T)$$

y

$$(4.56) \qquad u^m \xrightarrow[(m \to \infty)]{} \Psi \qquad \text{p.p. en} \quad \Gamma\times(0,T).$$

Como u^m satisface (4.2) para todo m y vale (4.43), se tiene que Ψ satisface (1.2). De (4.4), (4.55) y (4.56) tenemos que (Ψ,h) satisfacen (1.4), y por (4.6), (4.44), (4.55) y (4.56)

$$(4.45) \qquad \int_{Q_T} \nabla\Psi . \nabla\eta + \int_{R_T} \frac{\Psi}{h}\,\eta = 0 \qquad \forall\eta \in W_T .$$

Por (4.27) y (4.43) resulta

$$(4.57) \qquad 0 \leqslant \Psi \leqslant 1 \qquad \text{p.p. en} \quad \Omega\times(0,T)$$

y por (4.27) y (4.55) tenemos

$$(4.58) \qquad h \leqslant \gamma = \text{máx}\,\{\frac{1}{\varepsilon}, \sigma^*\}, \quad \text{p.p. en} \quad \Gamma\times(0,T),$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Vamos a decir qué entenderemos por solución débil del problema de electropintura.

<u>Definición 4.10</u>: Una *solución débil de* (P_o) es un par de funciones $(\Psi(x,t),h(x,t))$ tales que $\Psi \in H^1(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$, $h \in L^\infty(R_T)$, y satisfacen (1.2), (1.4) y

$$(4.59) \qquad \int_{Q_T} \nabla\Psi . \nabla\eta + \int_{R_T} \frac{\Psi}{h}\,\eta = 0 \qquad \forall\eta \in W_T .$$

Corolario 4.11: Existe una solución débil de (P_o).
La demostración es inmediata a partir del teorema 4.9.

Veamos ahora algunas propiedades de una solución débil de (P_o).

Lema 4.12: Sea (Ψ,h) una solución débil de (P_o), entonces

i) $0 \leq \Psi \leq 1$ p.p. en $\Omega\times(0,T)$

ii) $h \leq \gamma = \max\{\frac{1}{\varepsilon}, \sigma^*\}$, p.p. en $\Gamma\times(0,T)$

La demostración de i) se sigue de poner como función de prueba en (4.59) $\eta = (\Psi)^-$ y $\eta = (\Psi - 1)^+$.

La demostración de ii) es la misma que la del lema 3.4.

Teorema 4.13: La solución débil de (P_o) es única.
La demostración se realiza usando las mismas técnicas utilizadas en la demostración de la unicidad de solución débil de (P_1) y la omitiremos.

Demostraremos ahora el teorema que permite conseguir la solución débil del problema de electropintura como límite de soluciones débiles de problemas parabólicos de una manera más general que la considerada en el teorema 4.9.

Teorema 4.14: Para cada $\alpha > 0$, sea (u^α,h^α) la solución débil del problema (P_α) correspondiente al dato inicial u_α^o que satisface

$$(4.60) \qquad \|u_\alpha^o\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$$

donde K es una constante positiva. Entonces

$$(4.61) \qquad u^\alpha \xrightarrow[(\alpha \to 0)]{} \Psi \qquad \text{en} \quad H^{1,0}(Q_T)$$

$$(4.62) \qquad h^\alpha \xrightarrow[(\alpha \to 0)]{} h \qquad \text{en} \quad L^2(R_T) \ ,$$

donde (Ψ,h) es la única solución débil de (P_o).

Dem.: La demostración es similar a la del lema 4.8 y teorema 4.9 y por eso solo indicaremos las fórmulas y acotaciones más importantes.

Veamos que si $T < \min \{ \frac{\sigma_*^2}{2\sqrt{2}\, k^*} , \frac{\sigma_*^3}{4\gamma\sqrt{2}\, k^* K} \}$

entonces

$$u^\alpha \xrightarrow[(\alpha \to 0)]{} \Psi \qquad \text{en} \quad H^{1,0}(Q_T)$$

$$h^\alpha \xrightarrow[(\alpha \to 0)]{} h \qquad \text{en} \quad L^2(R_T) .$$

Repitiendo el razonamiento hecho en (4.28) - (4.32) obtenemos

$$(4.63) \qquad \int_{\Omega_T} \frac{\alpha}{2} (u^\alpha - \Psi)^2 - \int_{\Omega_o} \frac{\alpha}{2} (u^\alpha - \Psi)^2 + \int_{Q_T} \alpha\, \Psi_t (u^\alpha - \Psi) +$$
$$+ \int_{Q_T} |\nabla (u^\alpha - \Psi)|^2 + \int_{R_T} \frac{(u^\alpha - \Psi)^2}{h} +$$
$$+ \int_{R_T} \frac{(h - h^\alpha)\ u^\alpha\ (u^\alpha - \Psi)}{h^\alpha\ h} = 0 .$$

Como en (4.34) - (4.38) obtenemos en este caso

$$(4.64) \quad \left(\int_{R_T} |h^\alpha - h|^2\right)^{1/2} \leq \frac{2\sqrt{2}\ k^*\ T}{\sigma_*} \left(\int_{R_T} |u^\alpha - \Psi|^2\right)^{1/2} .$$

De (4.63) y (4.64) tenemos

$$(4.65) \quad \int_{Q_T} |\nabla(u^\alpha - \Psi)|^2 + \int_{R_T} \frac{(u^\alpha - \Psi)^2}{h} \leq \frac{\alpha}{2}(K+1)^2|\Omega| +$$

$$+ \alpha(K+1)\left(\int_{Q_T} |\Psi_t|^2\right)^{1/2} (T|\Omega|)^{1/2} +$$

$$+ \frac{2\sqrt{2}\ k^*\ T\ K}{\sigma_*^3} \int_{R_T} |u^\alpha - \Psi|^2 ,$$

de donde

$$(4.66) \quad \int_{Q_T} |\nabla(u^\alpha - \Psi)|^2 + \frac{1}{2\gamma}\int_{R_T} |u^\alpha - \Psi|^2 \leq \frac{\alpha}{2}(K+1)^2|\Omega| +$$

$$+ \alpha(K+1)\left(\int_{Q_T} |\Psi_t|^2\right)^{1/2} (T|\Omega|)^{1/2} .$$

De (4.66) podemos deducir que $u^\alpha \underset{(\alpha \to 0)}{\longrightarrow} \Psi$ en $H^{1,0}(Q_T)$ y en $L^2(R_T)$ y entonces de (4.64) obtenemos que

$$h^\alpha \underset{(\alpha \to 0)}{\longrightarrow} h \qquad \text{en } L^2(R_T).$$

Sea ahora $0 < T^* < T$ y supongamos que $u^\alpha \underset{(\alpha \to 0)}{\longrightarrow} \Psi$ y $h^\alpha \underset{(\alpha \to 0)}{\longrightarrow} h$ en $H^{1,0}(Q_{T^*})$ y $L^2(R_{T^*})$ respectivamente.

Vamos a probar que $u^\alpha \underset{(\alpha \to 0)}{\longrightarrow} \Psi$ en $H^{1,0}(\Omega \times (T^*, \tilde{T}))$ y $h^\alpha \underset{(\alpha \to 0)}{\longrightarrow} h$ en $L^2(\Gamma \times (T^*, \tilde{T}))$ donde $T^* < \tilde{T} \leq T$ y

$$\tilde{T} - T^* < \min \left\{ \frac{\sigma_*^2}{4\, k^*} , \frac{\sigma_*^3}{\gamma\, 8\, k^*\, K} \right\}$$

Como en (4.46) tenemos, en este caso,

$$(4.67) \quad \int_{\Omega_{\tilde{T}}} \frac{\alpha}{2} (u^\alpha - \Psi)^2 - \int_{\Omega_{T^*}} \frac{\alpha}{2} (u^\alpha - \Psi)^2 + \int_{T^*}^{\tilde{T}} \int_{\Omega_t} \alpha\, \Psi_t (u^\alpha - \Psi) +$$

$$+ \int_{T^*}^{\tilde{T}} \int_{\Omega_t} |\nabla (u^\alpha - \Psi)|^2 + \int_{T^*}^{\tilde{T}} \int_{\Gamma_t} \frac{(u^\alpha - \Psi)^2}{h} +$$

$$+ \int_{T^*}^{\tilde{T}} \int_{\Gamma_t} \frac{(h - h^\alpha)\, u^\alpha\, (u^\alpha - \Psi)}{h^\alpha\, h} = 0$$

Repitiendo el mismo razonamiento que hicimos en (4.48) - (4.51) obtenemos

$$(4.68) \quad \left(\int_{T^*}^{\tilde{T}} \int_{\Gamma_t} |h^\alpha - h|^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{4\, k^* (T^*)^{1/2} (\tilde{T} - T^*)^{1/2}}{\sigma_*} \, .$$

$$. \left(\int_{R_{T^*}} |u^\alpha - \Psi|^2\right)^{1/2} + \frac{4\, k^* (T^*)^{1/2} (\tilde{T} - T^*)^{1/2}}{\sigma_*^2} \, .$$

$$. \left(\int_{R_{T^*}} |h^\alpha - h|^2\right)^{1/2} + \frac{4\, k^* (\tilde{T} - T^*)}{\sigma_*} \, .$$

$$. \left(\int_{T^*}^{\tilde{T}} \int_{\Gamma_t} |u^\alpha - \Psi|^2\right)^{1/2} .$$

De (4.67) y (4.68) tenemos

$$(4.69) \quad \int_{T^*}^{\tilde{T}} \int_{\Omega_t} |\nabla (u^\alpha - \Psi)|^2 + \frac{1}{2\gamma} \int_{T^*}^{\tilde{T}} \int_{\Gamma_t} |u^\alpha - \Psi|^2 \leqslant \frac{\alpha}{2} (K+1)^2 |\Omega| +$$

$$+ \alpha (K+1)\, T^{1/2} |\Omega|^{1/2} \left(\int_{Q_T} |\Psi_t|^2\right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{4\ k^*\ T^{3/2}|\Gamma|^{1/2}\ K(K+1)}{\sigma_*^3} \left(\int_{R_{T^*}} |u^\alpha - \Psi|^2\right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{4\ k^*\ T^{3/2}|\Gamma|^{1/2}\ K(K+1)}{\sigma_*^4} \left(\int_{R_{T^*}} |h^\alpha - h|^2\right)^{1/2} .$$

De (4.69) deducimos que $u^\alpha \xrightarrow[(\alpha \to 0)]{} \Psi$ en $H^{1,0}(\Omega\times(T^*,\tilde{T}))$ y en $L^2(\Gamma\times(T^*,\tilde{T}))$ y por (4.68) $h^\alpha \xrightarrow[(\alpha \to 0)]{} h$ en $L^2(\Gamma\times(T^*,\tilde{T}))$.

Si repetimos este argumento un número finito de veces, podemos obtener

(4.61) $\quad u^\alpha \xrightarrow[(\alpha \to 0)]{} \Psi \quad$ en $H^{1,0}(Q_T)$

(4.62) $\quad h^\alpha \xrightarrow[(\alpha \to 0)]{} h \quad$ en $L^2(R_T)$.

Finalmente vamos a estudiar el comportamiento en el infinito de la solución débil del problema (P_o).

<u>Teorema 4.15</u>: Sea (Ψ,h) la solución débil de (P_o) para $0 \leq t < \infty$. Entonces

i) $h \leq \text{máx}\, \{\frac{1}{\varepsilon}, \sigma^*\}$ p.p. en $\Gamma\times(0,\infty)$;

ii) Ψ es creciente en t para casi todo $x \in \Omega$ y $x \in \Gamma$, y $0 \leq \Psi \leq 1$ p.p. en $\Omega\times(0,\infty)$.

Además, $\Psi \uparrow \bar{\Psi} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y $h \uparrow \bar{h} \in L^\infty(\Gamma)$, cuando $t \to \infty$, donde $(\bar{\Psi},\bar{h})$ es la única solución débil de (P_o^∞)

<u>Dem.</u>: La demostración de i) es análoga a la del lema 3.4.

Además, de (4.43) y la parte ii) del teorema 4.7 obtenemos ii).
La parte final se prueba de la misma manera que la última parte del teorema 3.3.

Comentarios finales: Si bien es cierto que en esta tesis se discute un problema parabólico, es interesante comparar los resultados obtenidos en el caso elíptico con sus análogos de [MS]. Obtuvimos existencia y unicidad de solución del problema (P_0) (teoremas 4.9 y 4.13) y de (P_0^∞) (lema 3.2 y teorema 3.3) en el caso de tener datos más generales que los considerados en los teoremas 1.1 y 1.4, es decir, pedimos $\sigma \in L^\infty(\Gamma)$, $0 < \sigma_* \leqslant \sigma(x) \leqslant \sigma^*$ en lugar de $\sigma \in \text{Lips}\ (\Gamma)$, $0 < \sigma_* \leqslant \sigma(x) \leqslant \sigma^* < 1/\varepsilon$, y S y $\Gamma \in C^1$ en lugar de $C^{1,\alpha}$, $\forall\alpha \in (0,1)$, si bien es cierto que las soluciones de $(P_0)(\Psi,h)$ y $(P_0^\infty)(\bar\Psi,\bar h)$ se encuentran ahora en otros espacios, $\Psi \in H^1(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$, $h \in L^\infty(R_T)$, $\bar\Psi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\bar h \in L^\infty(\Gamma)$ y las ecuaciones se satisfacen en sentido débil.

Por último, podemos describir los resultados de los capítulos 3 y 4 mediante el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
(P_\alpha):\ (u^\alpha,h^\alpha) \arrow[r, "\substack{(\text{teorema } 4.7)\\ (f\geqslant 0\ ,\ u^0\geqslant 0)}", "t\to\infty"'] \arrow[d, "\alpha\to 0", "(\text{teorema } 4.14)"'] & (P_0^\infty):\ (\bar\Psi,\bar h) \\
(P_0):\ (\psi\ ,\ h) \arrow[ur, "t\to\infty\quad(\text{teorema } 4.15)"'] &
\end{tikzcd}$$

REFERENCIAS

[ALS] J. M. Aitchison, A. A. Lacey, M. Shillor. A model for an electropaint process. IMA J. Appl. Math., 33 (1984), pp. 17-31.

[CF] L. A. Caffarelli, A. Friedman. A nonlinear evolution problem associated with an electropaint process. S.I.A.M. J. Math. Anal., Vol.16, N°5,(1985), pp. 955-969.

[HMG] E. B. Hansen, J. A. McGeough. On electropainting. SIAM J. Appl. Math. 43(4) (1983), pp. 627-638.

[La] A. A. Lacey. Tool design for electrochemical machining in the presence of overpotentials. Preprint.

[Le] V. G. Levich. Physiochemical Hydrodynamics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[MG] J. A. McGeough. Principles of Electrochemical Machining. Chapman Hall, London, 1974.

[MS] V. Márquez, M. Shillor. The electropainting problem with overpotentials. Por aparecer en SIAM J. Math. Anal.,18(3), May 1987.

AGRADECIMIENTOS

Al finalizar esta tesis agradezco a todos los que me han ayudado a concretarla: al Dr. Julio E. Bouillet, quien ha guiado mi trabajo todos estos años y en quien encontré apoyo en todo momento; al Dr. Meir Shillor, con quien tuve la suerte de trabajar durante algunos meses y quien me planteó el problema que dio origen a esta tesis; a la gente del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y del Instituto Argentino de Matemática, especialmente a la del Seminario de Ecuaciones Diferenciales; a la Dra. Noemí I. Wolanski y al Dr. Enrique Lami Dozo; a la Srta. Leticia Scoccia, quien con tanto esmero tipeó el manuscrito, y a mis padres, quienes me acompañaron y apoyaron en todo lo que he emprendido.

Viviana Márquez.