

Tesis de Posgrado

Equilibrio, estabilidad y transporte clásico en configuraciones con inversión de campo magnético

Clemente, Roberto Antonio

1987

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Clemente, Roberto Antonio. (1987). Equilibrio, estabilidad y transporte clásico en configuraciones con inversión de campo magnético. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2017_Clemente.pdf

Cita tipo Chicago:

Clemente, Roberto Antonio. "Equilibrio, estabilidad y transporte clásico en configuraciones con inversión de campo magnético". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1987. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2017_Clemente.pdf

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TEMA DE TESIS

EQUILIBRIO, ESTABILIDAD Y TRANSPORTE
CLASICO EN CONFIGURACIONES CON
INVERSION DE CAMPO MAGNETICO

AUTOR

Lic. Roberto A. CLEMENTE

DIRECTOR

Prof. Dr. Fausto T.L. GRATTON

Lugar de trabajo:

Comisión Nacional de Energía Atómica

Tesis presentada para optar por el título de Doctor en Física.

1986

- 2017 -
y.2

Res 10-2017

A Velia

y Jonathan

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a la Comisión Nacional de Energía Atómica, por haberme brindado la posibilidad y los medios para realizar los estudios que han llevado a la redacción de esta tesis. Asimismo quiero agradecer al Lic. José L. Milovich, al Lic. Claudio Grillo y al Dr. Ricardo Farengo por las útiles discusiones y sugerencias, y también por haber participado en algunos de los temas tratados en la tesis.

Un agradecimiento especial para el Dr. Fausto T. L. Gratton, en su doble función de Director de Tesis y Consejero de Estudios, por el estímulo recibido.

RESUMEN

Se estudia el problema del confinamiento magnético de plasmas en configuraciones de campo invertido, empleando modelos de tipo magnetohidrodinámico. Se analizan las propiedades de equilibrio, estabilidad y transporte preservando las características geométricas típicas de estas configuraciones. Se muestran dos clases de equilibrios posibles y se estudia un problema de bifurcación en el espacio de parámetros para el vórtice de Hill en un campo magnético externo dado. Se trata también la estabilidad respecto de los modos de intercambio y de vuelco interno del plasma en estas configuraciones. Finalmente se calculan los tiempos típicos de difusión de partículas de estos equilibrios, utilizando el modelo del estado estacionario. Los tiempos así hallado están en razonable acuerdo con las mediciones experimentales.

INDICE

	Pag.
I INTRODUCCION.....	1
II EQUILIBRIO MHD.....	7
II.1 Solución de Maschke-Perrin.....	12
II.2 Solución con j_ϕ que se anula en la separatriz.....	17
II.3 Beta del plasma.....	24
II.4 Bifurcación de equilibrios esferoidales.....	25
III ESTABILIDAD MHD.....	38
III.1 Inestabilidades de intercambio.....	41
III.2 Inestabilidad de vuelco interno.....	49
IV TRANSPORTE CLASICO.....	60
IV.1 Tiempo de difusión de partículas en el vórtice de Hill...	66
IV.2 Tiempo de difusión de partículas en el modelo de Maschke- Hernegger.....	69
V CONCLUSIONES.....	72
REFERENCIAS.....	75

I - INTRODUCCION

Gran parte de las investigaciones sobre fusión nuclear controlada están basadas en el confinamiento magnético de plasmas. Existen distintos métodos (o conceptos) que permiten confinar un plasma empleando campos magnéticos. Generalmente, se califica la eficiencia de un método a través de un parámetro denominado β , que corresponde al cociente entre la energía térmica total del plasma y la energía magnética utilizada para confinarlo. Para que un reactor de fusión basado en el confinamiento magnético sea energéticamente rentable se estima que β debería ser mayor o igual que 0.1.

La situación actual de las investigaciones en este tema muestra que se ha llegado a un punto en el cual el alcance de las condiciones necesarias para un reactor de fusión (temperatura, densidad y tiempo de confinamiento del plasma) está por transformarse en un hecho.¹ Sin embargo, esta demostración de factibilidad está por lograrse empleando la última generación de las máquinas toroidales de tipo tokamak, cuya característica principal es el bajo valor de β , del orden de 0.04. Esta característica, junto con el gran tamaño (las cámaras que contienen el plasma tienen volúmenes de decenas de metros cúbicos), y el enorme nivel de complejidad tecnológica (imanes superconductores, inyección de haces de neutros, calentamiento por radiofrecuencia, etc...) ponen serias dudas en las posibilidades reales de llegar a producir un reactor comercial de fusión basado en este concepto.

En la década del 70 las investigaciones sobre fusión nuclear se concentraron, casi exclusivamente, en los tokamaks debido esencialmente a la urgencia de demostrar la factibilidad de la fusión en

laboratorio. En consecuencia, los distintos conceptos alternativos para confinamiento magnético de plasmas fueron dejados un poco de lado. Ahora que la demostración está muy próxima a lograrse, se está también reconociendo la urgencia de disponer de métodos más eficientes y menos complicados tecnológicamente para el confinamiento del plasma. Por estas razones, la comunidad científica de física del plasma, recientemente, está volcando esfuerzos en investigar conceptos alternativos que permitan producir plasmas de interés termonuclear en máquinas de menor tamaño, menor complejidad tecnológica y valores mayores de β .

Entre los distintos conceptos alternativos, en los últimos años, han ido asumiendo importancia los toros compactos. Un toro compacto es una configuración de equilibrio en la cual no hay conductores externos concatenados con el plasma, lo cual representa una gran simplificación desde el punto de vista constructivo con respecto al tokamak. Este concepto se caracteriza, además, por tener valores de β del orden de la unidad.

En general estas configuraciones son de tipo axisimétrico y se describen en función de coordenadas cilíndricas r , ϕ , z con el eje z a lo largo del eje de simetría. Entre los toros compactos se pueden distinguir dos especies:

- i) el esferomak, en el cual el plasma es confinado por campos magnéticos poloidales y existe una componente de campo magnético acimutal que cumple una función estabilizadora y que desaparece fuera del plasma. En este caso el plasma ocupa una zona de líneas magnéticas cerradas o ergódicas de forma aproximadamente esferoidal (de allí el nombre). La superficie que separa las líneas magnéticas cerradas de las

abiertas se llama separatriz y se identifica con el contorno del plasma (superficie en la cual se anula la presión cinética del plasma).

ii) las configuraciones con inversión de campo magnético, que abreviaremos con FRC (field-reversed configurations), en las cuales el campo magnético acimutal está ausente. Aquí también existe una separatriz, que en los experimentos es generalmente de forma muy elongada. Experimentalmente se han obtenido con éxito FRC únicamente en los theta-pinches con campo de base invertido,²⁻⁷ aprovechando el fenómeno de reconexión de líneas magnéticas antiparalelas, mientras, en máquinas tipo el espejo de campo invertido,⁸ o el Astron,⁹ donde la inversión de campo magnético debería obtenerse a través de la inyección de partículas neutras o cargadas de alta energía, no se obtuvieron resultados satisfactorios.

En la presente tesis se tratará esencialmente el problema del confinamiento magnético en las FRC, en cuanto el tema resulta ser de interés para las actividades de la División Fusión Nuclear de la Comisión Nacional de Energía Atómica, lugar en el cual el autor desempeña sus funciones y donde se dispone actualmente de un theta-pinch lineal que puede operar con campo de base invertido con respecto al principal, posibilitando así, el estudio experimental de este tipo de configuraciones.

El estudio teórico de las características y los problemas relacionados con las FRC es de importancia a fin de mejorar la comprensión de los fenómenos experimentales y optimizar algunos de los distintos parámetros de las máquinas.

El problema del confinamiento magnético se puede dividir en tres partes principales:

- a) Teoría del equilibrio: traza las condiciones mediante las cuales el plasma puede ser confinado por campos magnéticos.
- b) Teoría de la estabilidad: determina si los estados de equilibrio son estables, o no, a pequeñas perturbaciones, permitiendo encontrar cuáles tendrían que ser los movimientos inestables del plasma.
- c) Teoría del transporte: se ocupa de los fenómenos de difusión y disipación en el plasma con el objeto de estimar cual debería ser el tiempo en que la configuración de equilibrio decaería en ausencia de inestabilidades.

Para tratar estos problemas se utilizará un modelo magnetohidrodinámico (MHD) de tipo ideal para el equilibrio y la estabilidad. En estos casos los tiempos de interés, durante los cuales se quiere describir el plasma, son mucho menores que los tiempos típicos de difusión o disipación macroscópicas. Para el problema del transporte se utilizará un modelo MHD resistivo con conductividad del plasma de tipo escalar. Si bien la teoría MHD puede no ser la más adecuada en muchas situaciones, hasta el momento parece ser la única que permite tomar en cuenta las características geométricas de las FRC utilizando métodos de cálculo de tipo analítico.

En casi todos los experimentos con FRC se ha observado que, en el equilibrio, el plasma rota alrededor del eje de simetría.^{2-4,7} Este movimiento de rotación lleva a una inestabilidad de tipo $m=2$ (donde $m=2$ significa una dependencia de la perturbación con el ángulo de tipo $e^{2i\phi}$) que destruye el confinamiento llevando el plasma hasta las paredes de la máquina. Todavía no se ha explicado con certeza el origen de la rotación y existen distintas teorías al respecto. Una exposición excelente

de dichas teorías puede encontrarse en la ref. 9. La aparición de la inestabilidad de tipo $m=2$ ha sido confirmada teóricamente con modelos de tipo MHD y de tipo cinético, solamente para cilindros infinitos de plasma.¹¹⁻¹³ Para configuraciones con geometría de tipo bidimensional todavía no han aparecido en la literatura tratamientos teóricos del problema. Por lo tanto, en la presente tesis no se han tratado los temas de la origen de la rotación y de la inestabilidad $m=2$ en las FRC, dada su extrema dificultad.

En el capítulo II se obtendrán las ecuaciones que describen el equilibrio de un plasma rotante, se mostrarán dos clases de soluciones y se extrapolarán los resultados al caso de rotación nula. Para una clase de equilibrios no rotantes se mostrará que el equilibrio no está determinado unívocamente por las condiciones de contorno, sino que existen dos equilibrios posibles con distintas separatrices.

En el capítulo III se considerará el problema de las inestabilidades de intercambio en las FRC no rotantes, utilizando el criterio de Bernstein et al..¹⁵ Este tipo de inestabilidades no se observa experimentalmente y la teoría parece ofrecer una explicación aceptable. Además se mostrará que las FRC con separatriz muy elongada son inestables, produciendo una especie de vuelco interno del plasma que en la literatura se conoce como "tilting" interno. Esta inestabilidad tampoco se observa experimentalmente, y la explicación en términos de efectos debidos a la rotación del plasma parece no ser la correcta, ya que los valores de velocidad angular necesarios para estabilizar el vuelco interno, son varias veces mayores que los medidos en las experiencias.

En el capítulo IV se tratará el problema del transporte de

partículas a través de las líneas de campo magnético, obteniendo estimaciones del tiempo de confinamiento de partículas que concuerdan mejor con los valores experimentales que estimaciones anteriores existentes en la literatura.

En toda la tesis se utilizará el sistema de unidades c.g.s. gaussiano, aunque en algunos casos, por una cuestión de tradición, se expresará la temperatura en eV.

Dado que gran parte de la originalidad de la tesis es de carácter algebraico se ha decidido no incluir ningún apéndice e insertar en el texto los cálculos esenciales para la comprensión de los resultados. Asimismo, no se han incluido los programas numéricos que se han utilizado para el cálculo de algunas funciones matemáticas y de integrales en una dimensión, dada la relativa sencillez de los mismos. En algunos casos, y con el fin de agilizar el texto, se han tomado resultados directamente de la literatura existente sin desarrollar los cálculos necesarios para obtenerlos.

El autor se excusa con los lectores por las molestias que tal conducta pueda ocasionar.

II - EQUILIBRIO MHD

Para describir equilibrios del tipo toro compacto se asumirá simetría acimutal y además simetría de reflexión con respecto al plano ecuatorial ($z=0$) en un sistema de coordenadas cilíndricas r, ϕ, z .

Dada la evidencia experimental de la rotación del plasma en las FRC^{2-4,7} se considerará directamente el caso en el cual el plasma posee una velocidad acimutal distinta de cero del tipo $\underline{v}_\phi = \Omega(r,z) r \hat{e}_\phi$, con Ω velocidad angular. En el límite $\Omega \rightarrow 0$ los resultados serán válidos para describir equilibrios de tipo estático ($\underline{v}=0$).

Utilizando un modelo MHD ideal para describir el plasma, despreciando el campo gravitatorio, los equilibrios estacionarios quedan descritos por las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad , \quad (1)$$

$$\rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \underline{j} \times \underline{B} / c \quad , \quad (2)$$

$$\nabla \times \underline{B} = 4\pi \underline{j} / c \quad , \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad , \quad (4)$$

$$\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B} / c = 0 \quad , \quad (5)$$

donde ρ es la densidad de masa del plasma, \underline{v} su velocidad, p su presión cinética, \underline{B} el campo magnético, \underline{j} la densidad de corriente, \underline{E} el campo eléctrico y c la velocidad de la luz en el vacío. Para simplificar el conjunto de ecuaciones (1-5) se seguirá el método trazado por Maschke y Perrin.¹⁶ Estos autores obtuvieron resultados para los casos en que la entropía o la temperatura del plasma se consideren constantes a lo largo

de \underline{B} . Aquí se limitará el análisis al caso en que la temperatura sea constante a lo largo de las líneas de campo magnético, dado que en general, en un plasma de interés termonuclear la conducción del calor es mucho mayor a lo largo de \underline{B} que ortogonalmente a él. Indicando con $T = T_e + T_i$ la suma de las temperaturas electrónica e iónica del plasma, la relación antedicha se expresa:

$$\underline{B} \cdot \nabla T = 0 . \quad (6)$$

Si se introduce la función flujo magnético poloidal:

$$\Psi(r, z) = 2\pi \int_0^r dr' r' B_z(r', z) \quad (7)$$

y la corriente poloidal:

$$I(r, z) = 2\pi \int_0^r dr' r' j_z(r', z) \quad (8)$$

se puede expresar el campo magnético de la siguiente forma:

$$\underline{B} = \hat{e}_\phi 2I/cr + \nabla\Psi \times \hat{e}_\phi / 2\pi r \quad (9)$$

Con esta notación las FRC corresponderán obviamente al caso en que $I=0$ (ausencia de campo magnético acimutal).

Asumiendo $\underline{v} = \Omega r \hat{e}_\phi$, utilizando la (9) y tomando el rotor de la (5), de la condición de estacionariedad $\nabla \times \underline{E} = -c^{-1} \partial \underline{B} / \partial t = 0$ resulta:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Omega}{\partial r} = 0 . \quad (10)$$

La (10) indica que el jacobiano de la transformación $r, z \rightarrow \Psi, \Omega$ es nulo y por lo tanto Ω es función de Ψ solamente. En otras palabras las superficies $\Psi = \text{const.}$ rotan rígidamente alrededor del eje z , esto constituye la conocida ley de isorotación formulada por Ferraro en 1937.¹⁷

Utilizando la (9), \underline{j} se puede escribir:

$$\underline{j} = -\frac{c}{4\pi r} \frac{2}{c} \frac{\partial I}{\partial z} \hat{e}_r + \frac{\nabla^* \Psi}{2\pi} \hat{e}_\phi - \frac{2}{c} \frac{\partial I}{\partial r} \hat{e}_z \quad (11)$$

donde $\nabla^* \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ se conoce en la literatura como operador de Grad-Shafranov.¹⁷ Usando la (9) y la (11) la (2) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (\partial p / \partial r - \rho \Omega^2 r) \hat{e}_r + (\partial p / \partial z) \hat{e}_z = & -\nabla^* \Psi \nabla \Psi / 16\pi^3 r^2 - I \nabla I / \pi^2 c^2 r^2 \\ & - \hat{e}_\phi \left(\frac{\partial I}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

La componente acimutal de la (12) tiene que ser nula. En analogía con la (10) resulta que también I es función de Ψ solamente. Dado que las líneas de \underline{B} yacen arriba de las superficies $\Psi = \text{const.}$, también la temperatura T es una función de Ψ . Entonces la (12) se reduce a:

$$\left(\nabla^* \Psi + \frac{8\pi^2}{c^2} \frac{dI^2}{d\Psi} \right) \nabla \Psi = -16\pi^3 r^2 (\nabla p - \rho \Omega^2 r \nabla r) \quad (13)$$

Suponiendo unitaria la carga de los iones del plasma e indicando con n la densidad iónica o electrónica, podemos expresar $p = nKT$, con K constante de Boltzmann, y es posible transformar el miembro derecho de la (13) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 16\pi^3 r^2 (\nabla p - \rho \Omega^2 r \nabla r) = & 16\pi^3 r^2 \left\{ n \nabla [KT \ln(\rho / \rho_0) - (m_e + m_i) \Omega^2 r^2 / 2] \right. \\ & \left. + n [K dT / d\Psi - K \ln(\rho / \rho_0) dT / d\Psi + (m_e + m_i) r^2 \Omega d\Omega / d\Psi] \nabla \Psi \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

donde $m_{e,i}$ son las masas electrónicas e iónicas respectivamente y ρ_0 es una constante. De la (14) comparando con la (13) se puede deducir

que la componente ortogonal a $\nabla\psi$ de $\nabla[KT\ln(\rho/\rho_0) - (m_e+m_i)\Omega^2 r^2/2]$ tiene que ser nula, y por lo tanto $\Theta=KT\ln(\rho/\rho_0)-(m_e+m_i)\Omega^2 r^2/2$ es constante arriba de $\psi=\text{const.}$, o sea es una función de ψ únicamente. De la definición de Θ se obtiene:

$$\rho = \rho_0 \exp\left[\frac{\Theta}{KT} + \frac{(m_e+m_i)\Omega^2 r^2}{2KT}\right] \quad (15)$$

Introduciendo la función $g(\psi)=nKT\exp[-(m_e+m_i)\Omega^2 r^2/2KT]$ la (13) resulta:

$$\begin{aligned} \nabla*\psi &= -16\pi^3 r^3 \exp\left[\frac{(m_e+m_i)\Omega^2 r^2}{2KT}\right] \left[\frac{dg}{d\psi} + g(m_e+m_i)r^2 \frac{d(\Omega^2/2KT)}{d\psi} \right] \\ &- \frac{8\pi^2 dI^2}{c^2 d\psi} = -8\pi^2 r j_\phi / c \end{aligned} \quad (16)$$

La (16), conocida en la literatura como ecuación de Maschke-Perrin,¹⁵ es la ecuación a la cual tiene que obedecer ψ para describir el equilibrio axisimétrico de un plasma en rotación confinado por campos magnéticos. Tomando el límite $\Omega \rightarrow 0$, la (16) tiende a la más conocida ecuación de Grad-Shafranov para equilibrios toroidales estáticos:¹⁷

$$\nabla*\psi = -16\pi^3 r^2 \frac{dp}{d\psi} - \frac{8\pi^2 dI^2}{c d\psi} \quad (17)$$

donde p resulta ser función de ψ .

La solución de la (16) depende de cuatro funciones arbitrarias de ψ , para resolverla es necesario hacer hipótesis sobre la dependencia funcional con ψ de I , g , Ω y T .

Para solucionar el problema del equilibrio, si el plasma no se considera en contacto con una pared rígida y perfectamente conductora, es necesario también resolver la (16) fuera del plasma, en ese caso la ecuación para ψ se reduce a:

$$\nabla^* \Psi = 0 \quad (18)$$

y la Ψ solución de la (18) tiene que empalmar con la Ψ solución de la (16) en la separatriz, además de ser constante en la superficie de los conductores externos necesarios para mantener el equilibrio.

En general, el problema del equilibrio se simplifica suponiendo que la separatriz coincide con una pared perfectamente rígida y conductora sin necesidad de resolver la (18).

Cabe mencionar aquí que la comparación entre los resultados teóricos y experimentales, correspondientes a las variables de equilibrio, es de importancia relativa en la evaluación de las soluciones teóricas, en cuanto los datos experimentales presentan errores considerables que dificultan la comparación. La importancia de las soluciones teóricas del equilibrio reside en el hecho de que las mismas pueden ser usadas para el estudio de la estabilidad y procesos de transporte.

Uno de los parámetros más importantes, que se toman en cuenta en la descripción de las configuraciones de equilibrio tipo toro compacto, es la elongación de la separatriz, definida como cociente entre su longitud máxima y su diámetro máximo, independientemente de su forma (elipsoide de revolución, caja cilíndrica, caja cilíndrica con las tapas redondeadas, etc...).

En lo que sigue se darán soluciones exactas de la (16) para dos conjuntos distintos de hipótesis sobre I , g , Ω y T .

II.1 - Solución de Maschke-Perrin.¹⁶

Asumiendo las siguientes hipótesis:

$$I = 0 , \quad (19)$$

$$(m_e + m_i) \Omega^2 / 2KT = \gamma h^2 / 2a^2 , \quad (20)$$

$$g = 3B_0 (1/b^2 + 4/a^2) \Psi / 16\pi^2 , \quad (21)$$

donde $\gamma = c_p / c_v$ es el cociente entre los calores específicos del plasma (típicamente $\gamma = 5/3$), h^2 es una constante, a y b son longitudes características y B_0 es una constante relacionada con la intensidad de B . Dado que $I=0$, este caso corresponde a equilibrios tipo FRC.

Definiendo la separatriz como la superficie $\Psi=0$, se puede comprobar que una solución de la (16) correspondientes a estas hipótesis está dada por:

$$\Psi = 3\pi B_0 r^2 [1 - z^2/b^2 - H(r)] / 2 , \quad (22)$$

con H definido por:

$$H = -r^2/4b^2 - 2a^2(4 + a^2/b^2) [1/r^2 + \gamma h^2/2a^2 - \exp(\gamma h^2 r^2/2a^2)] / \gamma^2 h^4 \quad (23)$$

y la presión del plasma es:

$$p = 3B_0 (1/b^2 + 4/a^2) \exp(\gamma h^2 r^2/2a^2) \Psi / 16\pi^2 \quad (24)$$

Para poder interpretar mejor la solución (22) es conveniente considerar primero el límite para $h^2 \rightarrow 0$, en este caso Ψ tiende a:

$$\Psi = 3\pi B_0 r^2 (1 - r^2/a^2 - z^2/b^2) / 2 \quad (25)$$

La (25) se conoce en la literatura como "vórtice de Hill",¹⁹ para el cual la separatriz es un elipsoide de revolución de semiejes a y b .

Para $a=b$ la separatriz es esférica y se puede comprobar que una solución

de la (18), que empalma exactamente con la (25), está dada por:²⁰

$$\Psi = -\pi B_0 r^2 \left[1 - a^3 / (r^2 + z^2)^{3/2} \right] \quad (26)$$

De la (26) se deduce que para $r^2 + z^2 \gg a^2$ $\underline{B} \approx -B_0 \hat{e}_z$, y el campo magnético externo necesario para mantener el equilibrio de un vórtice de Hill esférico es un campo uniforme.

Para $h^2 > 0$ la separatriz definida por la (22) es una especie de elipsoide achatado de longitud $2b$ y cuyo radio máximo sale de la solución de la ecuación $1 - H = 0$ (resulta ser siempre ser menor que a).

Lamentablemente todavía no se conocen soluciones de la (18) que puedan empalmar en forma exacta con la (22) en la separatriz para $h^2 \neq 0$. Para $h^2 = 0$ existen soluciones de la (18) que empalman con la (25) también para $b/a \neq 1$, y como se verá en II.4, su estudio permitirá conocer la disposición de los conductores externos necesarios para mantener el equilibrio, y mostrar que, para dadas condiciones de contorno, hay dos equilibrios posibles con distintas elongaciones de la separatriz.

Si se supone T constante en el plasma, también Ω lo será y la (22) representará FRC rotantes rígidamente. La velocidad del sonido en el plasma está definida por $c_s = [\gamma KT / (m_e + m_i)]^{1/2}$ y el número de Mach en el plasma queda expresado por:

$$M = \Omega r / c_s = hr/a, \quad (27)$$

lo cual da una idea del significado del parámetro h .

Para $h^2 = 0$ el máximo de p coincide con el máximo de Ψ , para $h^2 > 0$ el máximo de p se desplaza con respecto al máximo de Ψ . En la fig. 1 se puede apreciar la variación del perfil normalizado de presiones

en el plano ecuatorial para una elongación de la separatriz $b/r_{\max} = 5$ (donde r_{\max} indica el radio máximo de la separatriz), y como función de r/r_{\max} para $M(r_{\max}) = 0$ y $M(r_{\max}) = 1$. Como se ve la rotación implica un desplazamiento hacia afuera del máximo de p .

En la fig.2 se puede apreciar la variación del perfil de B_z (normalizado a -1 en $r=0$) en el plano ecuatorial, para los mismos valores de elongación de la separatriz y $M(r_{\max})$. Puede apreciarse que la rotación del plasma produce un aumento de la presión magnética en la parte externa del plasma.

Missiato y Sudano,²¹ han extendido la solución de Maschke-Perrin al caso en que $I^2 \propto \psi^2$, obteniendo soluciones en forma de serie numérica infinita, cuya aplicación a los esferomaks ($I \neq 0$) presenta dificultades debido a la forma de la solución misma.

Cabe mencionar aquí que la solución de Maschke-Perrin así como la de Missiato-Sudano presentan el inconveniente de que la componente toroidal de la densidad de corriente no se anula en la separatriz. Esto no quita validez al modelo en cuanto a la descripción aproximada de las situaciones experimentales, pero, por razones de intuición física y continuidad de j_ϕ al cruzar la separatriz (fuera del plasma no hay densidad de corriente), es conveniente obtener modelos de equilibrio en los cuales j_ϕ se anula en el borde externo del plasma, como se muestra en el párrafo siguiente.

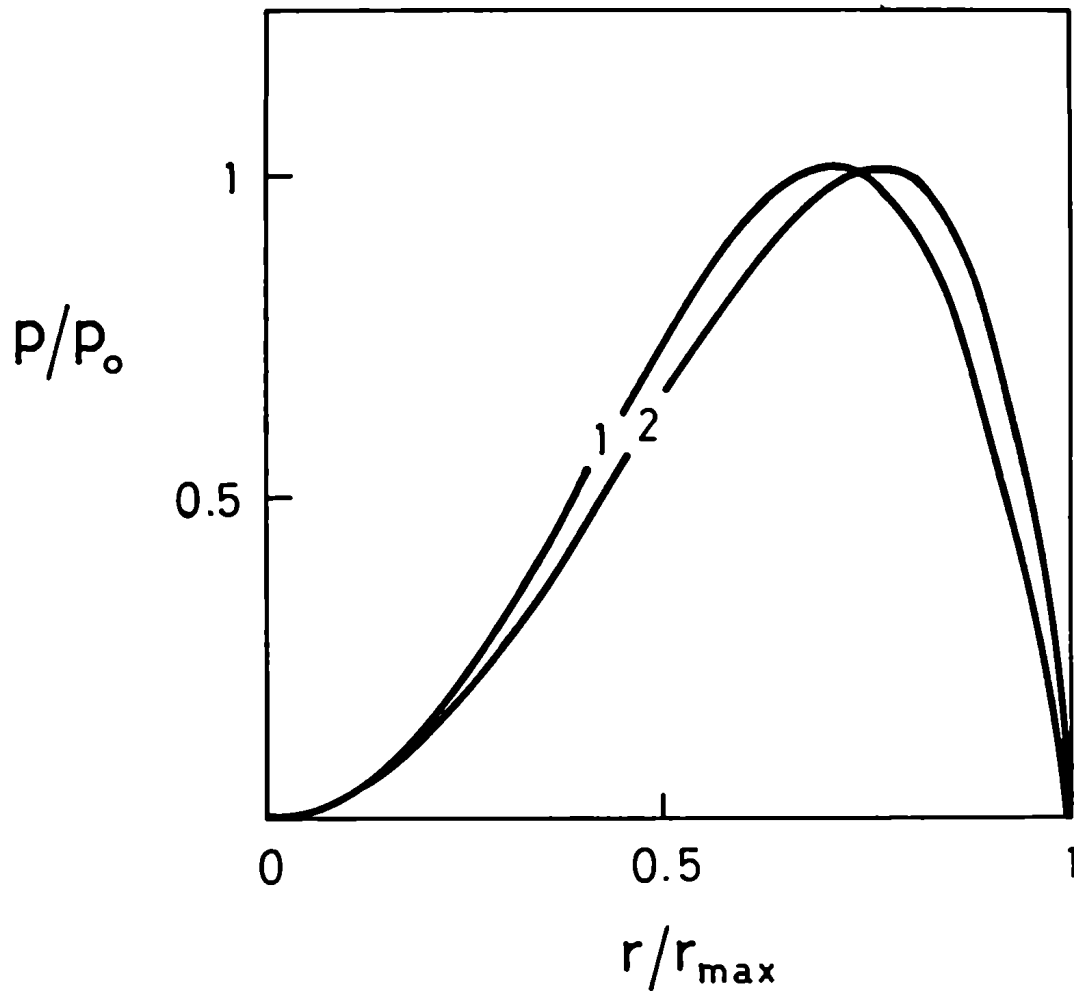


Fig. 1 - Perfiles normalizados de presión en el plano ecuatorial para el modelo de Maschke-Perrin con $b/r_{\max} = 5$. La curva 1 corresponde a $M(r_{\max}) = 0$ y la 2 a $M(r_{\max}) = 1$.

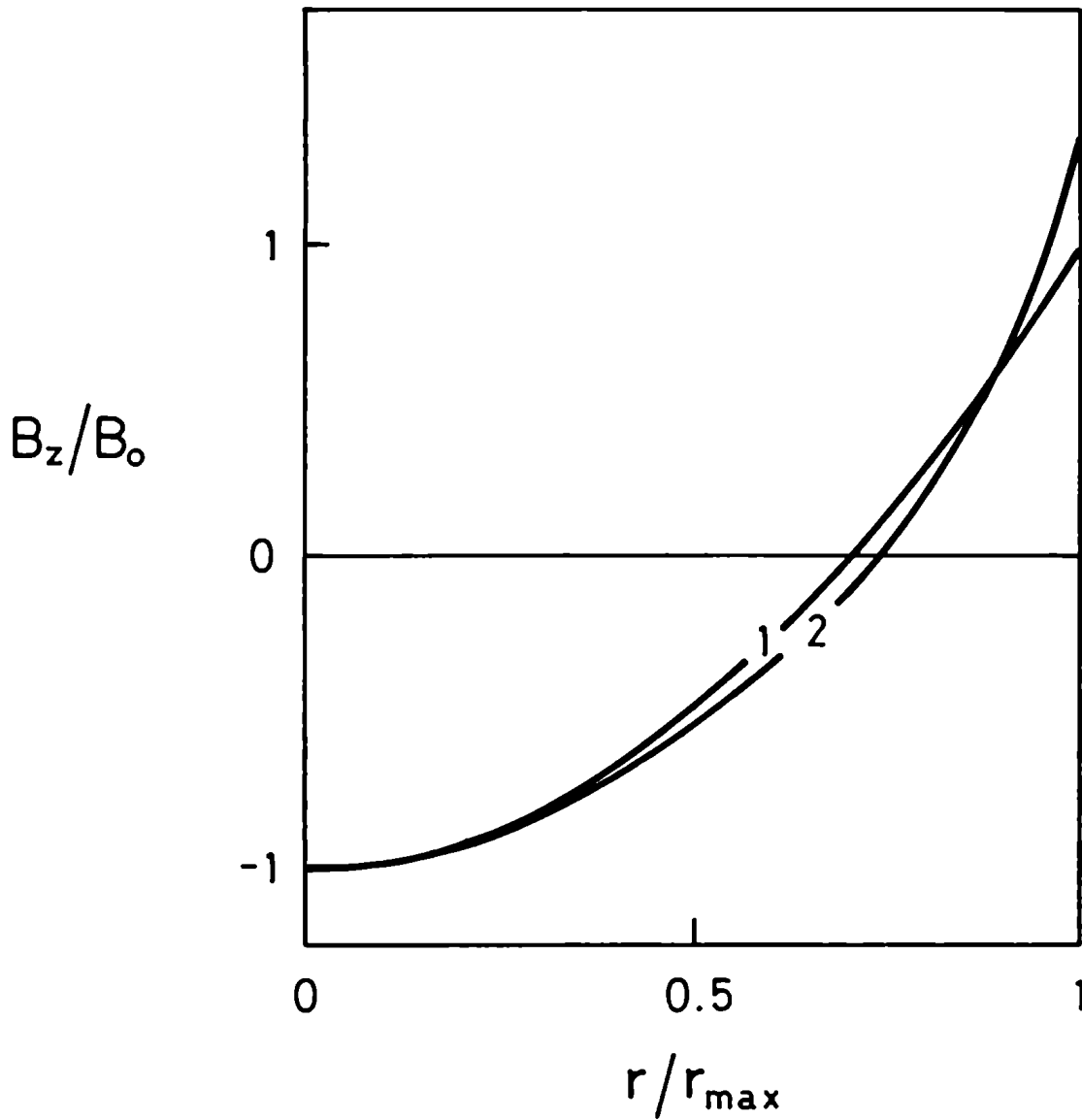


Fig. 2 - Perfiles normalizados de B_z en el plano ecuatorial para el modelo de Maschke-Perrin con $b/r_{\max} = 5$. La curva 1 corresponde a $M(r_{\max}) = 0$ y la 2 a $M(r_{\max}) = 1$.

II.2 - Solución con j_ϕ que se anula en la separatriz.²²

En este caso se considerará que el plasma esté contenido en una caja cilíndrica perfectamente rígida y conductora de radio a y longitud $2b$, coincidente con la separatriz. El presente modelo puede ser considerado como una representación de un toro compacto en un conservador de flujo magnético de tipo cilíndrico y con tapas en las puntas. Para que j_ϕ se anule en la separatriz se adoptarán las siguientes hipótesis:

$$I = I_0 \Psi \quad , \quad (28)$$

$$g = g_0 \Psi^2 \quad , \quad (29)$$

$$(m_e + m_i) \Omega^2 / 2KT = 3\epsilon / 2a^2 \quad , \quad (30)$$

con I_0 , g_0 y ϵ constantes. $\epsilon = (m_e + m_i) \Omega^2 a^2 / 3KT$ es el cociente entre la energía cinética de rotación y la energía térmica del plasma en $r=a$.

Para resolver la (16) es conveniente introducir las variables adimensionales $x=r/a$ y $t=z/2b$, y escribir la (16) de la siguiente forma:

$$x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{4\lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = - [\alpha^2 x^2 \exp(3\epsilon x^2 / 2 + \sigma^2)] \Psi \quad (31)$$

donde $\lambda=b/a$ es la elongación de la separatriz, $\alpha^2=32\pi^3 a^4 g_0$, y $\sigma^2=16\pi^2 I_0^2 a^2 / c^2$. De la (31) se ve que j_ϕ se anula cuando Ψ se anula. Dado que $\Psi(x,t=\pm 1/2)=0$, la (31) admite soluciones del tipo:

$$\Psi(x,t) = F(x) \cos(\pi t) \quad (32)$$

Recordando la expresión (9) para \underline{B} , I_0^2 puede escribirse como:

$$I_0^2 = c^2 \delta / 64b^2 \quad (33)$$

donde $\delta = B_{\phi\max}^2 / B_{r\max}^2$, siendo $B_{\phi\max}$ y $B_{r\max}$ los valores máximos de $|B_{\phi}|$ y $|B_r|$ en el plasma; δ caracteriza el tipo de equilibrio, $\delta=0$ corresponde a las FRC y $\delta>0$ a los esferomaks.

Introduciendo la variable $w=x^2/2$ es posible obtener la siguiente ecuación para F:

$$\partial^2 F / \partial w^2 + [\alpha \exp(3\epsilon w) + \pi^2(\delta-1)/8\lambda^2 w] F = 0 \quad , \quad (34)$$

con la condición de contorno $F=0$ en $w=0$ y $w=\alpha/2$.

Para $\epsilon=0$, ausencia de rotación, la (34) admite la solución:

$$F = A F_0 [\pi^2(1-\delta)/16\lambda^2 \alpha, \alpha w] \quad (35)$$

donde F_0 es la función regular de onda de Coulomb de orden cero, argumento αw y parámetro $\pi^2(1-\delta)/16\lambda^2 \alpha$, y A es una constante relacionada con el valor máximo de Ψ en el plasma. La (35) se conoce en la literatura como solución de Maschke-Hernegger.^{23,24}

Cuando $\epsilon>0$ y $\delta=1$ la (34) admite la siguiente solución analítica válida para todo λ :^{22,25}

$$F = A [J_0(\xi)/J_0(\xi_0) - Y_0(\xi)/Y_0(\xi_0)] \quad (36)$$

siendo J_0 e Y_0 las funciones de Bessel de 1ª y 2ª especie, orden cero y argumento $\xi=2\alpha \exp(3\epsilon w/2)/3\epsilon$, $\xi_0=2\alpha/3\epsilon$ y A es una constante. $F(w=1/2)=0$ fija el valor de α^2 para un dado ϵ .

Si $\epsilon>0$ y $\delta \neq 1$ no existen soluciones analíticas de la (34) y por lo tanto la ecuación para F ha sido resuelta numéricamente.²² Fijando ϵ , λ , y δ se estima un valor para α^2 (utilizando por ejemplo la (36)) y empleando el método de disparo, con un esquema de diferencias finitas, se integra la (34) de $w=0$ hasta $w=1/2$. El procedimiento se repite ajustando el valor de α^2 , hasta que $F(w=1/2)=0$. En las figuras 3 y 4 se

ha graficado α^2 como función de ϵ para distintos valores de δ , $\lambda=5$ y $\lambda=1$. $\epsilon=0$ corresponde a la solución (35) y en la fig. 4 $\delta=1$ corresponde a la solución (36). En todos los casos α^2 es una función decreciente de ϵ . En las figuras 5 y 6 se muestran los perfiles adimensionales de presión y campo magnético longitudinal en el plano ecuatorial para $\delta=0$ (correspondiente a una FRC), $\lambda=5$ y distintos valores de ϵ . Es evidente que el efecto de la rotación consiste en desplazar hacia afuera el máximo de la presión cinética e incrementar la presión magnética en la zona externa del plasma con respecto a la zona interna. Los mismos efectos se producen para otros valores de δ y λ .

Las soluciones de este caso tienen la particularidad de presentar dos círculos en $r=a$, $z=\pm b$, en los cuales \underline{B} se anula. La existencia de zonas en las cuales \underline{B} se anula en la superficie del plasma constituye un divertor para el sistema, es decir, un sumidero para el escape del plasma en base a procesos de difusión. Esta especie de sumideros se está empleando en los tokamaks para reducir la concentración de impurezas en el plasma, y se estima que se usarán también para extraer del plasma los productos de fusión (por ejemplo partículas alfa) en los futuros reactores. Por lo tanto, la solución aquí obtenida podría ser de interés para modelar un reactor de fusión basado en un espejo de campo invertido calentado por haces de neutros (que deberían dar momento angular al plasma) y con un sistema de divertores en las puntas para reducir la concentración de impurezas. En este caso el modelo debería ser completado resolviendo la (18) en la zona externa al plasma y poder definir así la distribución de las corrientes en los conductores externos, necesarios para conformar los divertores.

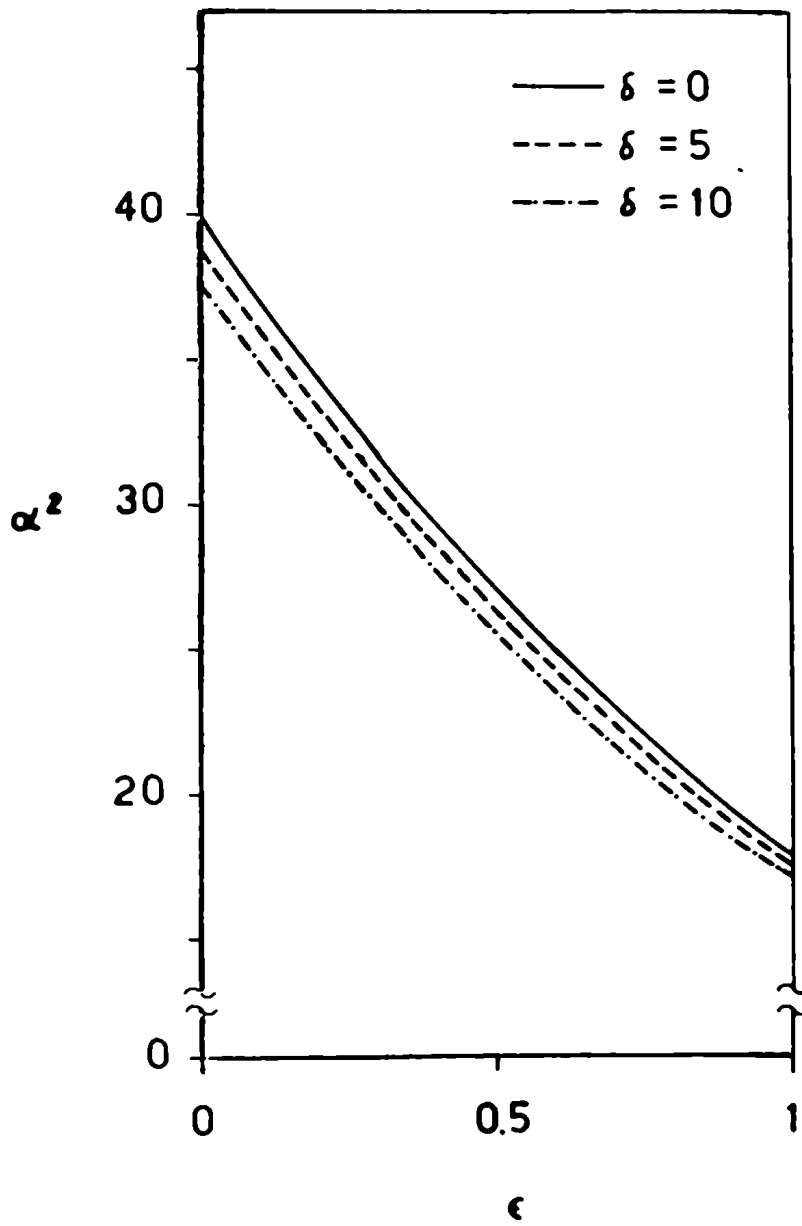


Fig. 3 - α^2 en función de ϵ para distintos valores de δ y $\lambda = 5$.

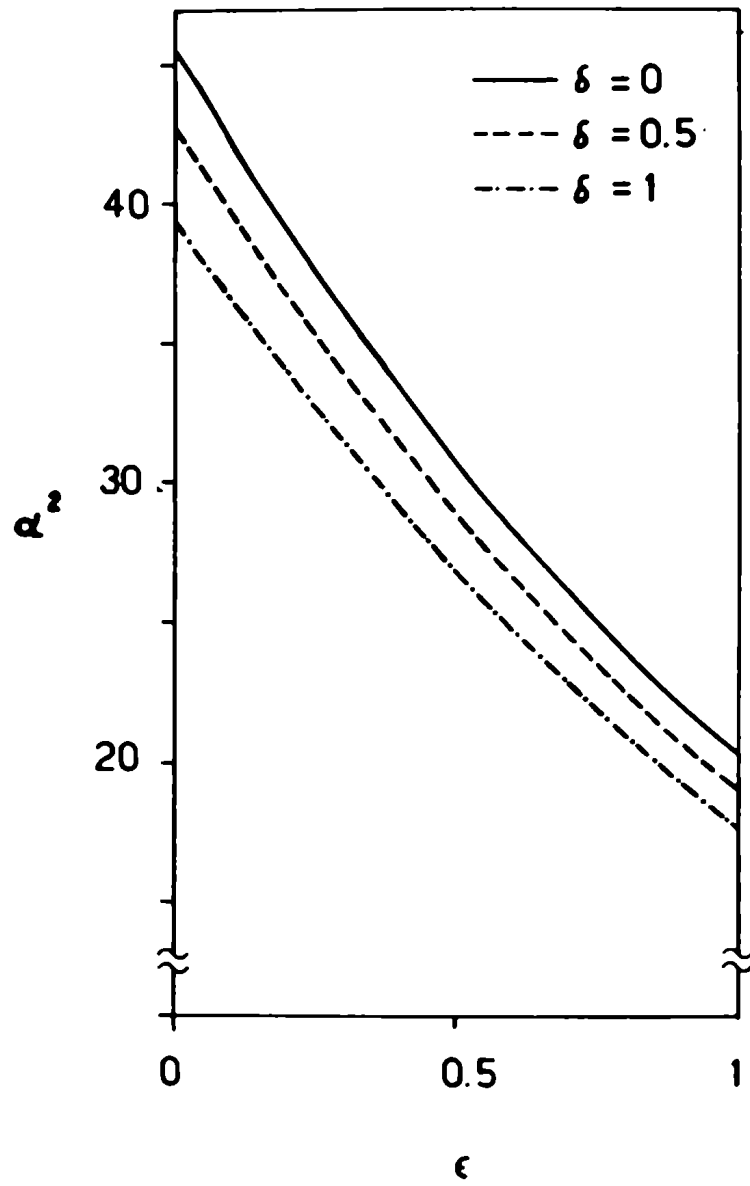


Fig. 4 - α^2 en función de ϵ para distintos valores de δ y $\lambda = 1$.

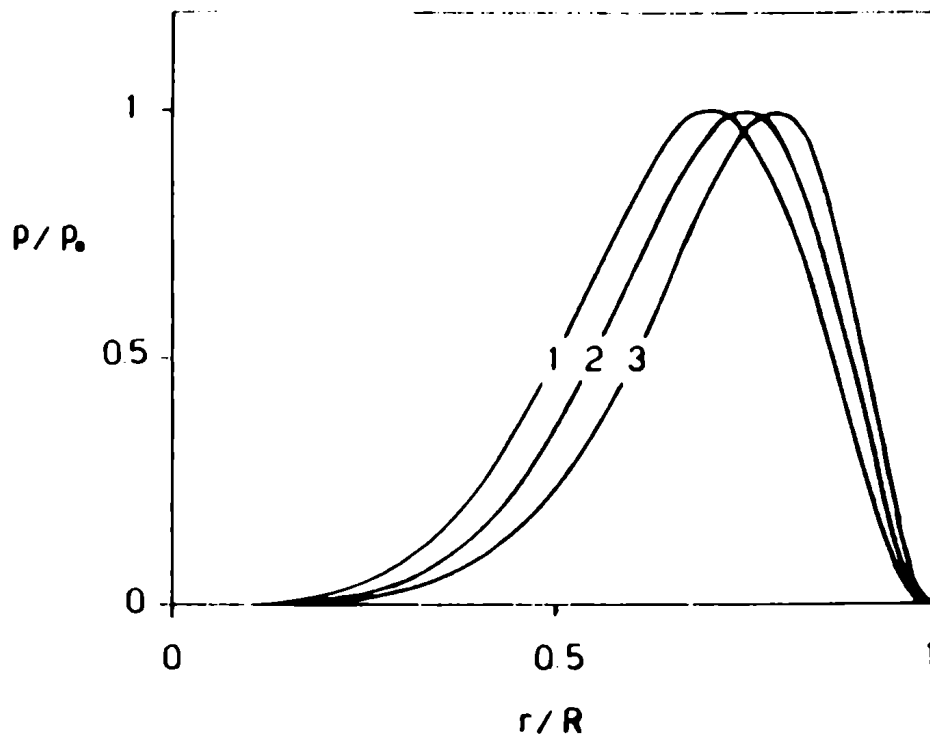


Fig. 5 - Perfiles normalizados de presión en el plano ecuatorial para el modelo con j_ϕ que se anula en la separatriz y $b/a = 5$. La curva 1 corresponde a $\epsilon = 0$, la 2 a $\epsilon = 0.5$ y la 3 a $\epsilon = 1$.

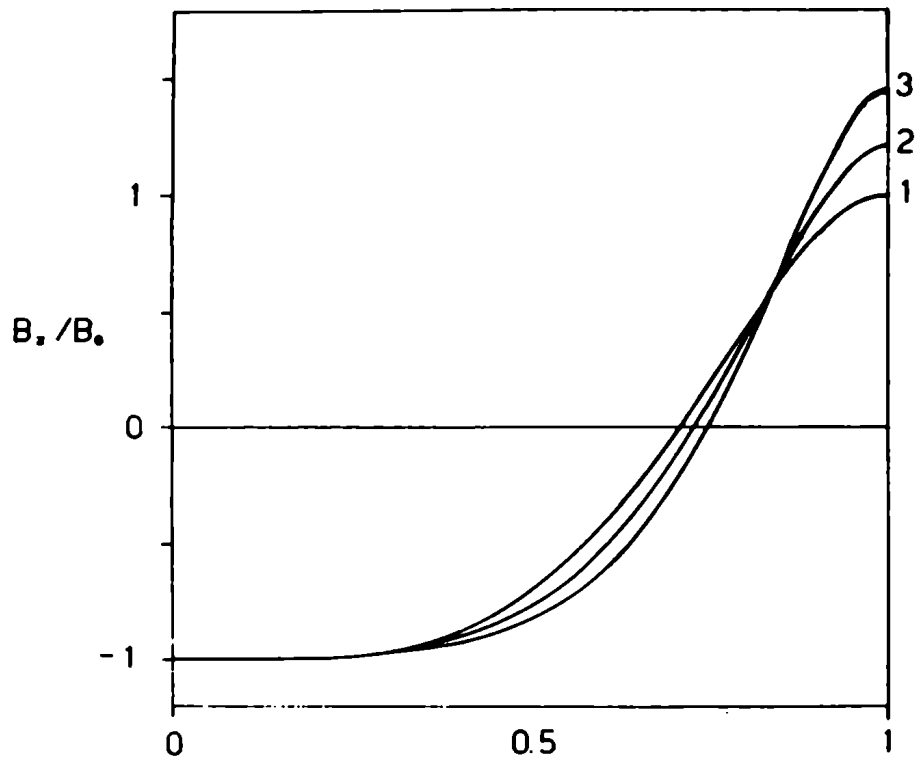


Fig. 6 - Perfiles normalizados de B_z en el plano ecuatorial para el modelo con j_ϕ que se anula en la separatriz y $b/a = 5$. La curva 1 corresponde a $\epsilon = 0$, la 2 a $\epsilon = 0.5$ y la 3 a $\epsilon = 1$.

II.3 - Beta del plasma.

Desde el punto de vista de la eficiencia de la utilización del campo magnético, es interesante considerar el β del plasma definido como:

$$\beta = 8\pi \int d\underline{r} p / \int d\underline{r} |\underline{B}|^2 \quad (37)$$

donde las integrales se extienden al volumen encerrado por la separatriz. Empleando el método indicado por Storer,²⁶ se puede mostrar que, para el caso de las FRC, si en la (16) se asume $g \propto \Psi^q$ ($q > 0$), a través de oportunas integraciones por partes resulta que $\beta = 2/q$ y no depende de $\Omega^2/2KT$. Esto implica que la eficiencia magnética de confinamiento es la misma, tanto en el caso estático como en el caso rotante, para una dada clase de equilibrios. El resultado se explica considerando que la presión centrífuga es responsable por el incremento en la presión magnética externa, y además ayuda a balancear la presión cinética en la parte interna del plasma. Se puede también decir que los equilibrios de Maschke-Perrin, para los cuales $\beta = 2$, son mucho más eficiente que los desarrollados en el párrafo anterior con $I_0 = 0$ para los cuales $\beta = 1$.

Dado que en los esferomaks $B_\phi \neq 0$ la (37) indica que para la misma clase de equilibrios el β del esferomak será siempre menor que el β de las FRC, ya que B_ϕ no ayuda a confinar (se anula en la separatriz).

II.4 - Bifurcación de equilibrios esferoidales.²⁷

El vórtice de Hill (25) tiene la particularidad de poder ser empalmado exactamente con la solución de la (18) para el campo magnético externo, permitiendo obtener, con métodos analíticos, indicaciones sobre la distribución de los conductores externo necesarios para mantener el equilibrio y mostrar que, para dadas condiciones de contorno, el equilibrio no está unívocamente determinado, sino que existen en general dos configuraciones posibles con distintas elongaciones de la separatriz.

Para agilizar la notación se introducirán los subíndices p_1 y v para indicar las cantidades de equilibrio dentro y fuera del plasma respectivamente, además para distinguir los equilibrios con separatriz alargada ($b/a > 1$, "prolate") de los que tienen separatriz achatada ($b/a < 1$, "oblate") se utilizará un supraíndice p u o .

Para resolver la (18) es conveniente usar coordenadas esferoidales alargadas o achatadas según el caso. La relación entre las coordenadas cilíndricas r, ϕ, z y las esferoidales alargadas μ, θ, ϕ' está dada por las siguientes expresiones:

$$r = \alpha \sinh \mu \sin \theta$$

$$z = \alpha \cosh \mu \cos \theta$$

$$\phi = \phi'$$

μ varía entre 0 e infinito, θ entre 0 y π , $2\alpha = 2(b^2 - a^2)^{1/2}$ es la distancia entre los focos de las elipses $\phi = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$ elegida de manera que $\mu = \text{const.} = \mu_0$ defina la separatriz. Análogamente, la relación entre r, ϕ, z y las coordenadas esferoidales achatadas v, θ, ϕ' está dada por:

$$\begin{aligned}r &= \eta \cosh v \sin \theta \\z &= \eta \sinh v \cos \theta \\ \phi &= \phi'\end{aligned}$$

v varía entre 0 e infinito, θ entre 0 y π , $2\eta=2(a^2-b^2)^{1/2}$ es la distancia entre los focos de las elipses $\phi=\text{const.}$, $v=\text{const.}$ elegida de manera que $v=\text{const.}=v_0$ defina la separatriz en este caso. La solución de Hill (25) para $b/a > 1$ puede expresarse en coordenadas esferoidales achatadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\psi_{p1}^P &= 3\pi B_0 \alpha^2 \sinh^2 \mu \sin^2 \theta \left[1 - 4 \sinh^2 \mu / 5 \sinh^2 \mu_0 - \cosh^2 \mu / 5 \cosh^2 \mu_0 \right. \\ &\quad \left. + 2P_3'(\cos \theta) (\sinh^2 \mu / \sinh^2 \mu_0 - \cosh^2 \mu / \cosh^2 \mu_0) / 15 \right] / 2'\end{aligned}\tag{38}$$

donde μ_0 define la separatriz, $P_3(x)$ es la función de Legendre de 1ª especie y orden 3, y la tilde indica diferenciación con respecto al argumento x [$P_3'(x) = 3(5x^2 - 1)/2$]. Análogamente para $b/a < 1$:

$$\begin{aligned}\psi_{p1}^O &= 3\pi B_0 \eta^2 \cosh^2 v \sin^2 \theta \left[1 - 4 \cosh^2 v / 5 \cosh^2 v_0 - \sinh^2 v / \sinh^2 v_0 \right. \\ &\quad \left. + 2P_3'(\cos \theta) (\cosh^2 v / \cosh^2 v_0 - \sinh^2 v / \sinh^2 v_0) / 15 \right] / 2\end{aligned}\tag{39}$$

y v_0 define la separatriz en este caso.

Para resolver la (18) recordamos que $\Psi = 2\pi r A_\phi$, con A_ϕ componente acimutal del potencial vector \underline{A} ($\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$). En el vacío y con axisimetría, A_ϕ tendrá que obedecer a la ecuación:

$$\nabla^2 A_\phi - A_\phi / r^2 = 0\tag{40}$$

La solución de la (40) en coordenadas esferoidales puede hallarse en

en la referencia 28, y la solución para $\psi_v^{P,0}$ que se anula en la separatriz y satisface allí la condición de empalme $\nabla\psi_{p1}^{P,0} = \nabla\psi_v^{P,0}$, está dada por:^{27,29,30}

$$\begin{aligned} \psi_v^P = & 3\pi B_o \alpha^2 \sinh^2 \mu \sin^2 \theta \left\{ (4b/a + a/b) [1 - Q_1'(\cosh \mu) / Q_{11}] Q_{11} / Q_{12} \right. \\ & \left. + 2(b/a - a/b) [P_3'(\cosh \mu) / P_{31} - Q_3'(\cosh \mu) / Q_{31}] P_3'(\cos \theta) / 3(P_{32} / P_{31} - Q_{32} / Q_{31}) \right\} / 5, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \psi_v^O = & 3\pi B_o \eta^2 \cosh^2 v \sin^2 \theta \left\{ (4b/a + a/b) [1 - Q_1'(i \sinh v) / T_{11}] T_{11} / T_{12} \right. \\ & \left. + 2(b/a - a/b) [P_3'(i \sinh v) / S_{31} - Q_3'(i \sinh v) / T_{31}] P_3'(\cos \theta) / 3(S_{32} / S_{31} - T_{32} / T_{31}) \right\} / 5. \end{aligned} \quad (42)$$

Siendo $Q_i(x)$ las funciones de Legendre de 2ª especie y orden i , y la tilde indica diferenciación con respecto al argumento x . Además para abreviar se han introducido las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} P_{31} &= P_3'(\cosh \mu_o) & P_{32} &= \frac{d}{d\mu} P_3'(\cosh \mu) \Big|_{\mu=\mu_o} \\ Q_{i1} &= Q_i'(\cosh \mu_o) & Q_{i2} &= \frac{d}{d\mu} Q_i'(\cosh \mu) \Big|_{\mu=\mu_o} \\ S_{31} &= P_3'(i \sinh v_o) & S_{32} &= \frac{d}{dv} P_3'(i \sinh v) \Big|_{v=v_o} \\ T_{i1} &= Q_i'(i \sinh v_o) & T_{i2} &= \frac{d}{dv} Q_i'(i \sinh v) \Big|_{v=v_o} \end{aligned}$$

Se puede comprobar (ver ref. 25, pag.331) que para $|x|$ tendiente a infinito las $Q_i'(x)$ tienden a cero, esto implica que a gran distancia de la separatriz, donde las coordenadas esferoidales tienden a las esféricas comunes, $\psi_v^{P,0}$ tiende a:

$$H^{P,0} r^2 [1 + K^{P,0} (4z^2 - r^2)] \quad (43)$$

$$H^P = 3\pi B_o (4b/a + a/b) Q_{11} / 5Q_{12} \quad (44)$$

$$H^0 = 3\pi B_0 (4b/a + a/b) T_{11} / 5T_{12} \quad (45)$$

$$K^P = 15Q_{12} / 2abP_{31} Q_{11} [(4b/a + a/b) (P_{32}/P_{31} - Q_{32}/Q_{31})] \quad (46)$$

$$K^O = -15T_{12} / 2abS_{31} T_{11} [(4b/a + a/b) (S_{32}/S_{31} - T_{32}/T_{31})] \quad (47)$$

$K^{P,O} = 0$ corresponde al flujo creado por un campo magnético longitudinal constante. $K^{P,O} < 0$ implica que en la cercanía del origen el campo magnético longitudinal es de tipo antiespejo (es decir, decrece al alejarse del origen), $K^{P,O} > 0$ implica que el campo es de tipo espejo magnético en la misma cercanía (es decir, crece al alejarse del origen).³¹

Como la contribución de las corrientes en el plasma a $\psi_v^{P,O}$ puede asimilarse a la de una suma de dipolos magnéticos, ésta decae rápidamente con la distancia de la separatriz y la (43) tiene que corresponder al flujo magnético creado por los conductores externo al plasma. La necesidad de la existencia de estos conductores está asegurada por el teorema del virial.¹⁸ En la hipótesis que los conductores se encuentren suficientemente lejos del plasma como para que exista una región intermedia entre el plasma y ellos en la cual sea válida la (43), se pueden obtener algunas conclusiones interesantes.

Considerando el flujo máximo atrapado por el plasma, $\psi_{\max} = 3\pi B_0 a^2 / 8$, de las (44-47) se pueden deducir las siguientes expresiones adimensionales:

$$\frac{K^P \psi_{\max}}{H^P} = \frac{75Q_{12}^2 a/b}{16Q_{11}^2 P_{31} (4b/a + a/b) (P_{32}/P_{31} - Q_{32}/Q_{31})} \quad (48)$$

$$\frac{K^O \psi_{\max}}{H^O} = \frac{-75T_{12}^2 a/b}{16T_{11}^2 S_{31} (4b/a + a/b) (S_{32}/S_{31} - T_{32}/T_{31})} \quad (49)$$

Las (48) y (49) han sido graficada en las figuras 7 y 8 (curvas A), en función de b/a . De los gráficos se deduce que, para un dado flujo magnético externo del tipo (43), pueden existir equilibrios solamente si $|\psi_{\max}|$ es menor que un cierto valor $\psi_0^{P,0}$. Para $|\psi_{\max}| = \psi_0^{P,0}$ hay un solo equilibrio posible con elongación $b/a = 1.61$ en el caso de separatriz alargada y $b/a = 0.23$ en el caso achatado. Si $|\psi_{\max}| < \psi_0^{P,0}$ hay dos equilibrios posibles con diferentes elongaciones de la separatriz. Para $|\psi_{\max}| \ll \psi_0^{P,0}$, en el caso alargado uno de los equilibrios es casi esférico mientras el otro es muy elongado, en el caso achatado uno es casi esférico y el otro muy achatado.

$b/a = 1.61$ y $b/a = 0.23$ representan puntos de bifurcación en el espacio de parámetros de los equilibrios aquí considerados, es decir, puntos a partir de los cuales, variando los parámetros, el estado de equilibrio no está unívocamente determinado.

En las figuras 7 y 8 se han graficado también $abK^{P,0}$ (ver ecs. (47 y (48)) en función de la elongación (curvas B). En el caso alargado $abK^P < 0$, lo cual significa que el campo magnético creado por los conductores externo es de tipo antiespejo en la cercanía del plasma. Análogamente en el caso achatado $abK^O > 0$ significa que el campo magnético externo es de tipo espejo en la cercanía del plasma. Dado que la (43) tiene que ser válida lejos del plasma ($r^2+z^2 \gg a^2+b^2$), de los valores numéricos de $abK^{P,0}$ resulta que, en general, hay que admitir $1+K^{P,0}(4z^2-r^2) \sim 0$. Esto implica que fuera del plasma existen otras dos superficies $\psi_v^{P,0} = 0$, aproximadamente a lo largo de los hiperboloides $r^2 = 1/K^{P,0} + 4z^2$, como se puede comprobar en las referencias 29 y 30.

Resulta de interés considerar la posibilidad de producir en la práctica el campo necesario para mantener el equilibrio. A tal fin, se

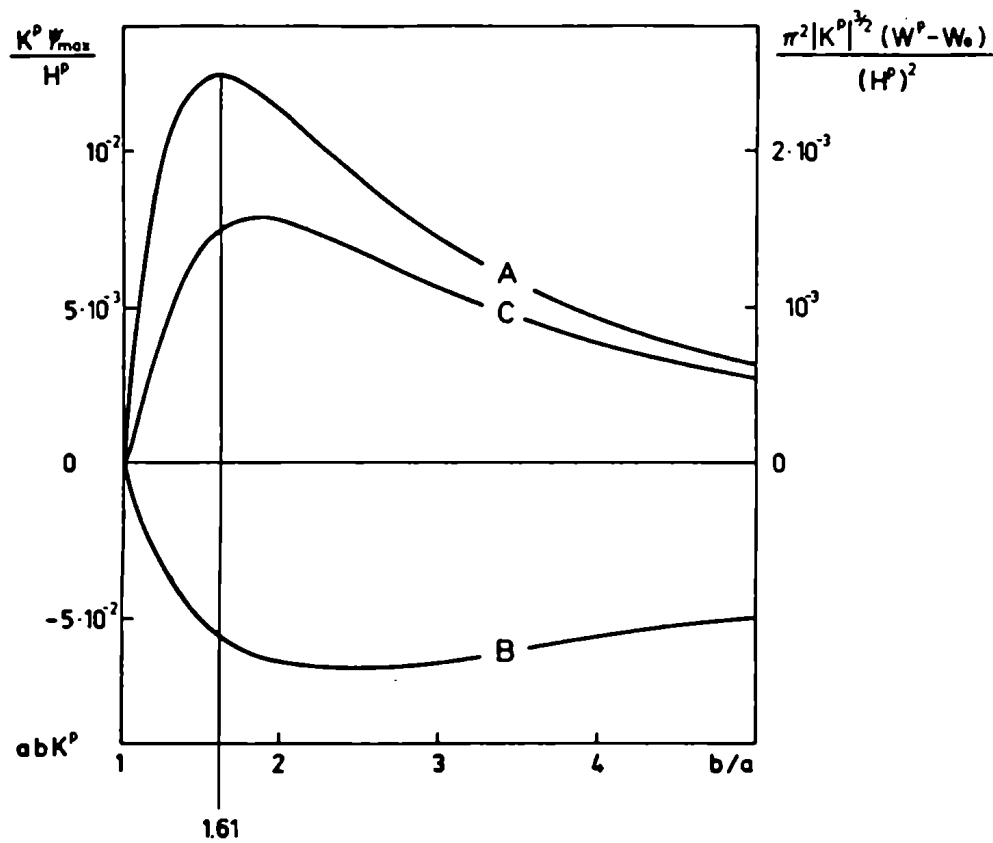


Fig. 7 - La curva A corresponde a $K^P \psi_{\max} / H^P$, la B a abK^P y la C a $\pi^2 |K^P|^{3/2} (W^P - W_0) / (H^P)^2$, todas en función de la elongación de la separatriz ($\gamma=5/3$).

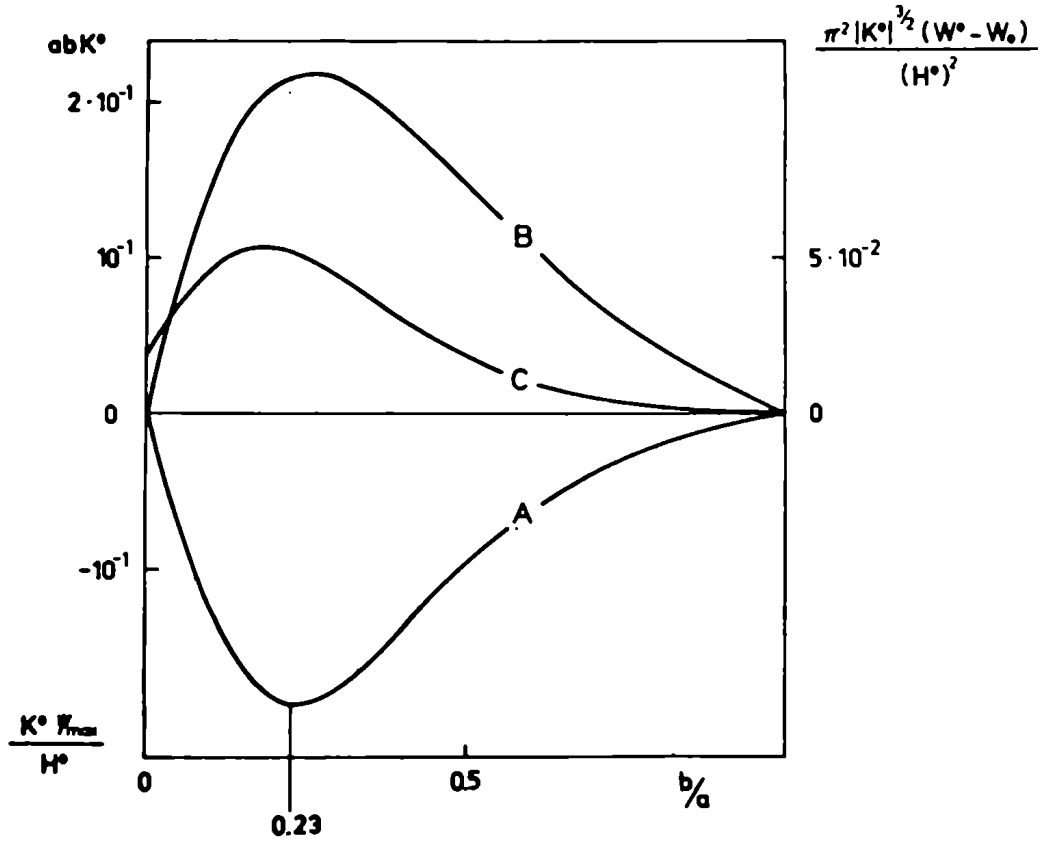


Fig. 8 - La curva A corresponde a $K^0 \psi_{\max} / H^0$, la B a abk^0 y la C a $\pi^2 |K^0|^{3/2} (W^0 - W_0) / (H^0)^2$, todas en función de la elongación de la separatriz ($\gamma=5/3$).

considerará el flujo magnético poloidal Ψ_w , creado por n pares de espiras de radio s_i , dispuestas simétricamente a distancia l_i del origen del sistema de coordenadas y por las que circulan las corrientes I_i . Ψ_w puede ser desarrollado en potencias de $r/(s_i^2+l_i^2)^{1/2}$ y $z/(s_i^2+l_i^2)^{1/2}$ de la siguiente forma:

$$\Psi_w = \sum_{i=1}^n h_i r^2 [1 + k_i (4z^2 - r^2) + \dots] \quad (50)$$

$$h_i = 4\pi^2 I_i s_i^2 / c (s_i^2 + l_i^2)^{3/2} \quad ; \quad k_i = 3(4l_i^2 - s_i^2) / 8(s_i^2 + l_i^2)^2 \quad ,$$

y donde los puntos indican términos de orden superior. La (50) es válida para $|k_i (4z^2 - r^2)| \ll 1$, es decir, lejos de las espiras, además puede ser escrita de la misma forma que la (43) si definimos:

$$H^{p,0} = \sum_{i=1}^n h_i$$

$$K^{p,0} = \sum_{i=1}^n h_i k_i / H^{p,0}$$

Si, por simplicidad, se elige $s_i^2 + l_i^2 = d^2$, para que Ψ_w represente con buena aproximación $\Psi_v^{p,0}$ lejos del plasma, hay que satisfacer la condición $|K^{p,0} d^2| \gg 1$. Esta condición no puede ser satisfecha si $n=1$, pero sí cuando $n>1$, por medio de una elección adecuada de los signos y magnitudes de h_i y k_i es posible hacer arbitrariamente grande $|K^{p,0} d^2|$. Entonces, para mantener en equilibrio una FRC tipo vórtice de Hill, son necesarios por lo menos dos pares de espiras. Una vez asignados $H^{p,0}$ y $K^{p,0}$ (con los conductores dispuestos de forma que $|K^{p,0} d^2| \gg 1$), las dimensiones del plasma están relacionadas con Ψ_{\max} , ya que eso determina b/a y en consecuencia $abK^{p,0}$.

En las figuras 9 y 10 se puede apreciar, cualitativamente, la

disposición de los conductores externos y la forma de las superficies $\Psi = \text{const.}$ para el caso alargado y achatado respectivamente.

En una hipótetica experiencia para obtener equilibrios esferoidales, el plasma presentará una elongación bien determinada. Físicamente esto se puede interpretar como que el sistema tendría que evolucionar hacia el estado de menor energía. La energía del sistema se puede expresar de la siguiente forma:

$$W = \int d\underline{r} \left[\underline{j} \cdot \underline{A} / 2c + p / (\gamma - 1) \right] \quad (51)$$

donde \underline{A} es el potencial vector, $\gamma = c_p / c_v$ y las integrales se extienden a todo el volumen ocupado por el plasma y los conductores externos.

Escribiendo $\underline{A} = \underline{A}_{p1} + \underline{A}_w$ y $\underline{j} = \underline{j}_{p1} + \underline{j}_w$ como suma de las contribuciones debidas al plasma y a los conductores externos, resulta:³¹

$$\int d\underline{r} \underline{A}_{p1} \cdot \underline{j}_w = \int d\underline{r} \underline{A}_w \cdot \underline{j}_{p1}$$

Recordando que $p = 3B_o (4/a^2 + 1/b^2) \Psi_{p1}^{P,O} / 16\pi^2$, $\underline{A}_{p1}^{P,O} = \hat{e}_\phi \Psi_{p1}^{P,O} / 2\pi$, $\underline{A}_w = H^{P,O} r^2 [1 + K^{P,O} (4z^2 - r^2)] \hat{e}_\phi / 2\pi r$ y $\underline{j}_{p1}^{P,O} = -\hat{e}_\phi c \nabla \Psi_{p1}^{P,O} / 8\pi^2 r$, la energía total del sistema se puede calcular facilmente:

$$W^P = W_o + (H^P)^2 |abK^P a/b|^{3/2} Q_{12}^2 \left[5(\gamma-1)Q_{12} / 7(\gamma-1)Q_{11} (4b/a + a/b) + 1 + 4abK^P (b/a - a/b) / 7 \right] / 12\pi^2 |K^P|^{3/2} Q_{11} \quad (52)$$

$$W^O = W_o + (H^O)^2 |abK^O a/b|^{3/2} T_{12}^2 \left[5(\gamma-1)T_{12} / 7(\gamma-1)T_{11} (4b/a + a/b) + 1 + 4abK^O (b/a - a/b) / 7 \right] / 12\pi^2 |K^O|^{3/2} T_{11} \quad (53)$$

donde

$$W_o = \int d\underline{r} \underline{j}_w \cdot \underline{A}_w / 2c$$

En las figuras 7 y 8 se han graficado las cantidades $(W^{P,O} - W_o) \pi^2 |K^{P,O}|^{3/2} /$

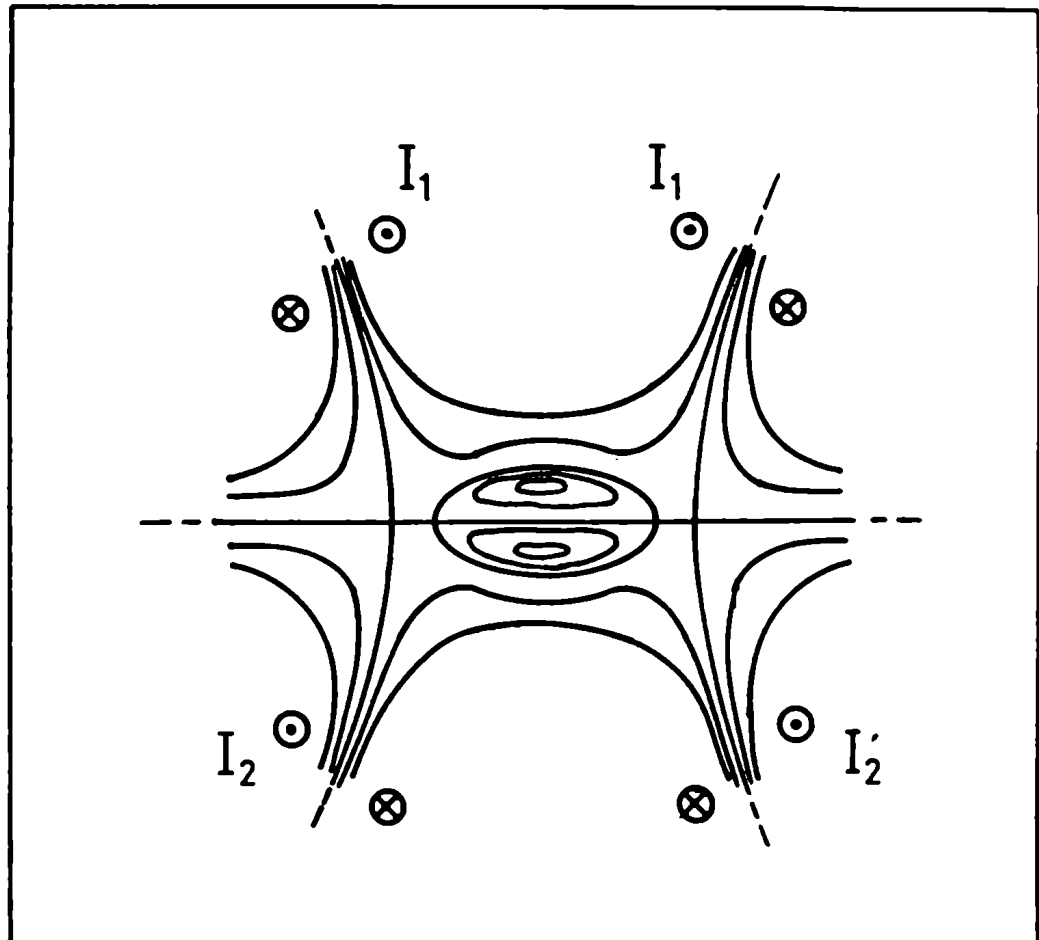


Fig. 9 - Superficies $\Psi = \text{const.}$ y disposición cualitativa de los conductores externos para el vórtice de Hill alargado.

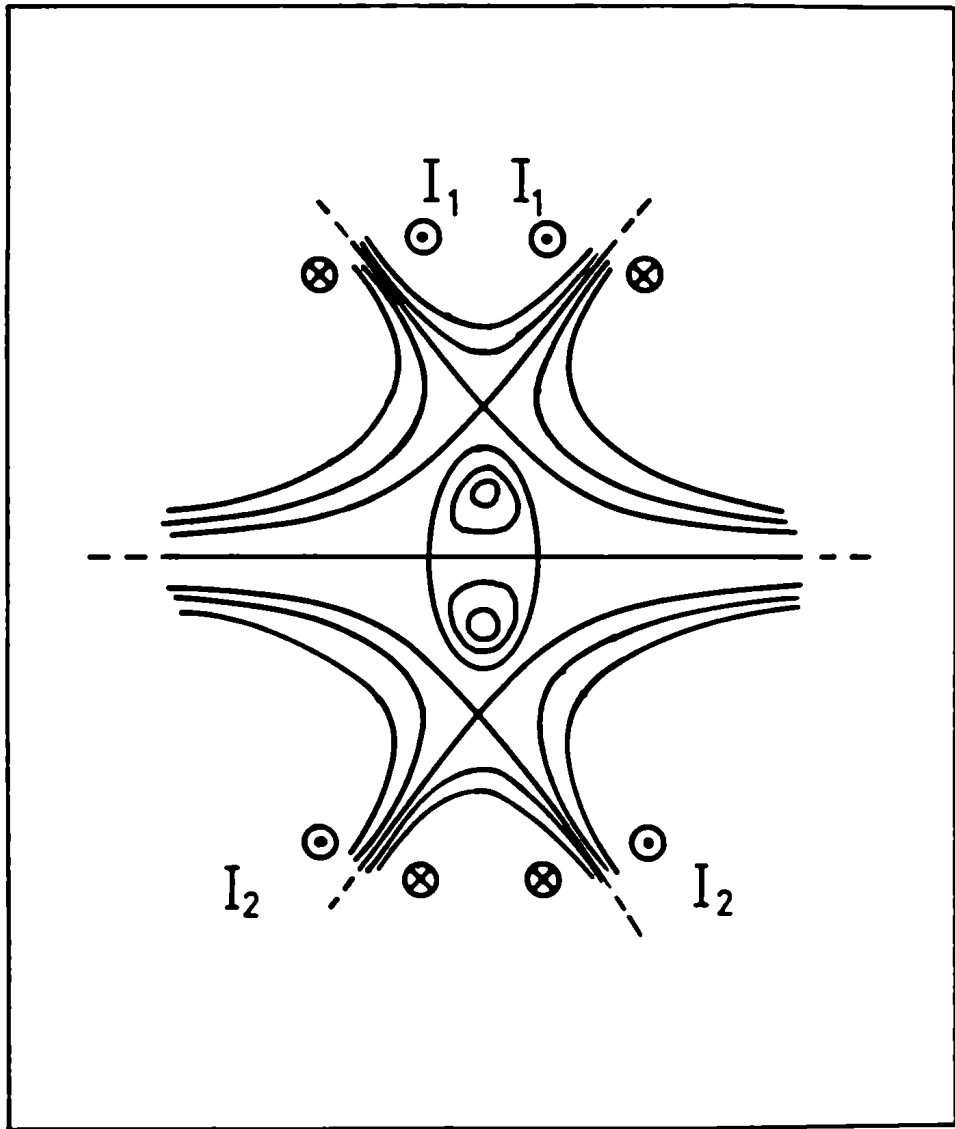


Fig. 10 - Superficies $\Psi = \text{const.}$ y disposición cualitativa de los conductores externos para el vórtice de Hill achatado.

$(H^{P,0})^2$ (curvas C), para $\gamma=5/3$ como función de b/a . Se puede observar que para $|\psi_{\max}| < \psi_0^{P,0}$ los equilibrios más esféricos tienen menor energía, ya sea en el caso alargado como en el achatado. Esto indicaría que en un hipotético experimento sólo se podrían obtener equilibrios estables con elongación comprendida entre 0.23 y 1.61. Equilibrios con $b/a > 1.61$ o $b/a < 0.23$ deberían ser inestables a modos axisimétricos en los cuales el flujo magnético se conserva, colapsando hacia equilibrios más esféricos, y los puntos de bifurcación deberían ser umbrales para algún tipo de inestabilidad.

Para $b/a=0$ la presión del plasma se anula con $|\psi_{\max}|$, pero $(W^0 - W_0) \pi^2 |K^0|^{3/2} / (H^0)^2 = 0.195$, dado que en este caso la separatriz es un disco de radio $a \neq 0$ e introduce una curvatura adicional en el campo magnético creado por los conductores externos, incrementando así la energía del sistema.

Para $K^{P,0} = 0$ (campo creado por un solenoide infinito) el problema de la bifurcación ha sido considerado en la referencia 30, en general, para un dado ψ_{\max} hay dos equilibrios posibles, uno esférico y el otro cilíndrico (infinitamente largo) con diferentes radios. En este caso también la energía del equilibrio esférico ($W - W_0$ finita) es menor que la del caso cilíndrico ($W - W_0$ infinita).

Se ha demostrado analíticamente la existencia de puntos de bifurcación en el espacio de parámetros para una clase de FRC con separatriz esferoidal. En consecuencia, equilibrios muy alargados o muy achatados tendrían que ser inestables a algún tipo de modo MHD ideal axisimétrico. Asimismo, se ha resuelto un problema de frontera libre, ya que para un dado campo magnético externo se han hallado las posibles configuraciones de equilibrio del plasma, determinando, también, la

forma de la separatriz. Los resultados obtenidos indican además que para maximizar el flujo magnético atrapado por el plasma, un parámetro importante a fin de mejorar la eficiencia magnética de todo el sistema, habría que lograr equilibrios con elongación de 1.61 o 0.23. El presente análisis ha sido limitado a las FRC , pero conclusiones similares deberían ser válidas también para los esferomaks, dado que en ellos B_ϕ desaparece fuera del plasma.

Experimentalmente se han producido FRC de tipo muy elongado ($b/a \sim 5$),²⁻⁷ que se mantuvieron en equilibrio por tiempos largos con respecto al tiempo típico de tránsito de las ondas de Alfvén (tiempo también típico de las inestabilidades MHD), en contradicción con la teoría aquí expuesta que predice un colapso hacia configuraciones más esféricas. La discrepancia presenta una interesante paradoja entre teoría y práctica que no ha sido todavía interpretada. Se podría dar una explicación posible en términos del hecho que, en los experimentos, los conductores no están lo suficientemente lejos del plasma como para que las aproximaciones usadas aquí sean válidas, de manera que podría existir algún efecto estabilizante debido a las paredes conductoras de las máquinas (corrientes imágenes). Podría también ser que el vórtice de Hill no sea un buen modelo de la situación experimental y que la teoría debiera ser aplicada a soluciones de equilibrio más sofisticadas (calculadas numéricamente, por ejemplo).

III - ESTABILIDAD MHD

Para lograr largos tiempos de confinamiento del plasma es necesario que las configuraciones de equilibrio obtenidas experimentalmente sean lo más estables posible, es decir, que el tiempo de crecimiento de las eventuales inestabilidades presentes en el plasma, sea suficientemente largo como para que el equilibrio se destruya debido, esencialmente, a procesos de difusión de partículas y campo magnético.

En los experimentos con FRC la inestabilidad más peligrosa resulta ser la inestabilidad rotacional de tipo $m=2$,²⁻⁴ donde $m=2$ indica una dependencia acimutal de la inestabilidad de tipo $e^{2i\phi}$, que lleva al plasma a romperse en dos columnas que alcanzan a tocar las paredes de la máquina con consecuente destrucción del confinamiento y enfriamiento del plasma. Esta inestabilidad debida a la rotación del plasma ha sido estabilizada utilizando campos magnéticos de cuadrupolo que compensan el desbalance en la presión centrífuga, debido a la perturbación, en la zona externa del plasma,³³ y también, disminuyendo el contacto del plasma con la pared, en la fase de formación de la FRC, empleando un campo de octupolo.⁵ El estudio teórico de esta inestabilidad ha sido limitado a modelos de equilibrio de tipo cilíndrico,¹⁰⁻¹³ y todavía no han aparecido en la literatura estudios que partan de configuraciones de tipo bidimensional como son en realidad las FRC.

Despreciando la rotación del plasma y suponiendo que los tiempos característicos de crecimiento de las inestabilidades sean mucho menores

que los tiempo típicos de difusión, la teoría MHD ideal prevé distintos tipos de modos inestables que no encuentran verificación en las experiencias. Esta extraña discrepancia es, en la actualidad, objeto de estudios teóricos y, aparentemente, surge de las restricciones del modelo MHD que no toma en cuenta el efecto estabilizante debido al radio de Larmor finito de los iones. Pero la inclusión de este efecto en la teoría no resulta para nada fácil y no hay modelos satisfactorios al respecto.

El instrumento teórico más usado para estudiar la estabilidad MHD de los distintos modelos de equilibrio para las FRC, es el principio de la energía de Bernstein et al.¹⁵, que se basa en una linealización de las ecuaciones MHD alrededor de un estado de equilibrio de tipo estático. Si la variación de energía potencial, debida a una perturbación del plasma en el estado de equilibrio es negativa, el sistema será inestable a tal perturbación. Esto implica que la amplitud de la perturbación crecerá con el tiempo y, posiblemente, podrá llegar a destruir el confinamiento.

Las perturbaciones se definen como desplazamientos infinitesimales de los elementos de fluido, de los cuales se supone constituido el plasma y, en general, se dividen en dos grandes clases:

- i) perturbaciones que no deforman el contorno del plasma;
- ii) perturbaciones que deforman el contorno del plasma.

La primera clase ha sido objeto de numerosos estudios teóricos,³⁴⁻⁴⁰ mientras la segunda prácticamente no ha sido todavía considerada debido a las dificultades que implica el cálculo del potencial vector perturbado en la zona externa del plasma.

En lo que sigue limitaremos el análisis a la primera clase de perturbaciones, más precisamente, se considerarán las inestabilidades de intercambio y los modos de vuelco interno ("tilting-mode") del plasma.

III.1 - Inestabilidades de intercambio.

Las inestabilidades de intercambio pueden considerarse como intercambios de pequeños tubos de flujo magnético solidarios al plasma, que pueden dar origen a movimiento de tipo turbulento. En general, se desarrollan en zonas en las cuales las líneas de \underline{B} se cierran sobre si mismas, condición que en las FRC es ampliamente satisfecha dada la ausencia de B_ϕ ($\Psi = \text{const.}$, $\phi = \text{const.}$ define una línea magnética).

Este tipo de inestabilidades en configuraciones de equilibrio axisimétricas con densidad de corriente únicamente acimutal, ha sido considerado por Bernstein et al.¹⁵, quienes asumieron que las perturbaciones no deformaban el borde del plasma y que admitían un desarrollo en serie de Fourier en el ángulo ϕ del tipo $e^{im\phi}$. Utilizando el método de extremación de funcionales de Euler-Lagrange, llegaron a formular un criterio suficiente para la inestabilidad en el límite de m tendiendo a infinito. Para el caso de las FRC estáticas y axisimétrica, en las que la curvatura de las líneas de campo magnético apunta siempre hacia la zona de mayor presión del plasma, del criterio de Bernstein et al. resulta la siguiente condición suficiente para la inestabilidad del equilibrio:^{15,34}

$$\frac{d(\rho V' \gamma)}{d\Psi} > 0, \quad (54)$$

donde Ψ es el flujo magnético poloidal que representa la FRC, definido positivo en el plasma, $V' = \oint dl / |\underline{B}|$ se conoce en la literatura como volumen específico, $\gamma = c_p / c_v$ y p es la presión del plasma.

La (54) ha sido evaluada numéricamente para dos clases de

equilibrios de tipo numérico, encontrando el resultado que para que la (54) no se satisfaga en ningún punto del plasma tiene que existir un fondo de presión distinto de cero en la separatriz, y que tal fondo es tanto menor cuanto más agudo es el perfil de j_ϕ en el plano ecuatorial.³³ Este resultado se puede obtener también en forma analítica utilizando el vórtice de Hill y la solución de Maschke-Hernegger (en el límite de gran elongación) como modelos de equilibrio. A tal fin se considerará $p=p_0 + p(\Psi)$ y de la ecuación de las líneas de \underline{B} :

$$dr/B_r = dz/B_z$$

sigue que $dl/|\underline{B}| = dr/|B_r|$, lo cual permite calcular el volumen específico:

$$V'(\Psi) = 2 \int_{r_1(\Psi)}^{r_2(\Psi)} dr/|B_r| \quad (55)$$

donde se ha tomado en cuenta la simetría ecuatorial, $\Psi(r_1,0)=\Psi(r_2,0)$ y $B_r(r_1,0)=B_r(r_2,0)$. Recordando que $B_r=(\partial\Psi/\partial z)/2\pi r$ resulta:

$$V'(\Psi) = 4\pi \int_{r_1(\Psi)}^{r_2(\Psi)} dr r/|\partial\Psi/\partial z| \quad (56)$$

Empleando para Ψ el vórtice de Hill e introduciendo la variable adimensional $x=r/a$ y el valor máximo de Ψ , $\Psi_0=3\pi B_0 a^2/8$, se obtiene:

$$V'(\Psi_{VH}) = \frac{\pi a^2 b}{2\Psi_0} \int_{(1/2-s/2)^{1/2}}^{(1/2+s/2)^{1/2}} dx (x^2 - x^4 - \Psi_{VH}/4\Psi_0)^{-1/2} \quad (57)$$

donde $s=s(\Psi)=(1-\Psi/\Psi_0)^{1/2}$ y VH indica que se está usando el vórtice de Hill. Introduciendo ahora la variable $w=x^2-1/2$ y $w_1=s/2$, se obtiene para V' :

$$v'(\psi_{VH}) = \frac{\pi a^2 b}{4\psi_0} \int_{-w_1}^{w_2} dw [(s^2/4 - w^2)(w + 1/2)]^{-1/2} . \quad (58)$$

Utilizando una nueva variable, ϕ , definida de forma que $\cos 2\phi = 2w/s$ es posible obtener:

$$\begin{aligned} v'(\psi_{VH}) &= \frac{\pi a^2 b}{(2+2s)^{1/2} \psi_0} \int_0^{\pi/2} d\phi [1-2s \sin^2 \phi / (1+s)]^{-1/2} \\ &= \pi a^2 b K[2s/(1+s)] / \psi_0 (2+2s)^{1/2} \end{aligned} \quad (59)$$

con K integral elíptica completa de 1ª especie, igual a $\pi/2$ para $s=0$ y divergente para $s=1$ (en la separatriz) en forma logarítmica con ψ_{VH} . Suponiendo que la presión del plasma esté dada por $p = p_0 + 3B_0(1/b^2 + 4/a^2)\psi_{VH}/16\pi^2 = p_{\max}(\psi_{VH}/\psi_0 + \delta)/(1+\delta)$ con p_{\max} valor máximo de p y δ constante, resulta que $p(V')^\gamma$ es definido positivo y proporcional a:

$$p(V')^\gamma \propto (\psi_{VH}/\psi_0 + \delta) \{(1+s)^{-1/2} K[2s/(1+s)]\}^\gamma \quad (60)$$

Para satisfacer al criterio (54) la (60) no tiene que ser una función decreciente de ψ_{VH}/ψ_0 . Se puede observar que la estabilidad a los modos de intercambio en el vórtice de Hill no depende de la elongación de la separatriz. Si definimos la presión relativa del plasma como $p_r = p_{\max}/p_0 = \delta/(1+\delta)$ se puede evaluar la (60) en función de p_r . En la figura 11 se ha graficado la (60) en función de ψ_{VH}/ψ_0 para $\gamma=5/3$, $p_r=0$ y $p_r=0.68$. Para $p_r=0$ el criterio queda satisfecho en todo el plasma, mientras que para $p_r=0.68$ no se satisface. $p_r=0.68$ puede interpretarse como un umbral para la estabilidad. También para $p_r > 0.68$ no puede satisfacerse el criterio.

El valor $p_r=0.68$ está en perfecto acuerdo con el valor dado en

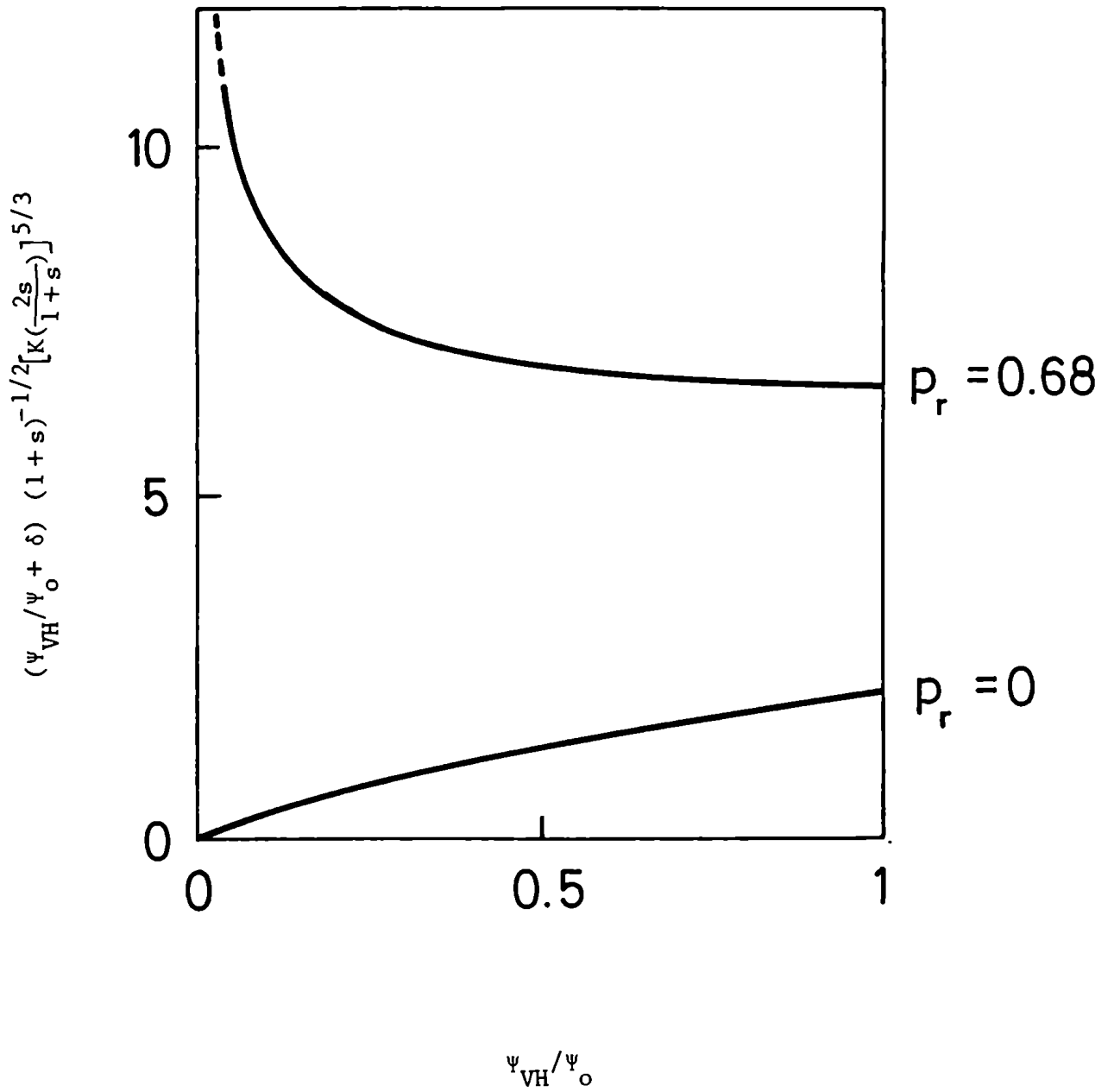


Fig. 11 - Criterio de Bernstein en función de ψ_{VH}/ψ_o para el vórtice de Hill ($\gamma=5/3$).

la referencia 33 donde el criterio fue calculado con integraciones numéricas.

Se ha demostrado en forma analítica que el modelo vórtice de Hill para FRC, es inestable a los modos de intercambio si la presión relativa del plasma en la separatriz es menor que 0.68. El resultado se puede interpretar, también, como que la existencia de un fondo de presión ayuda a estabilizar el plasma. Dado que este fondo existe en las experiencias, debido a la difusión del plasma, ésta podría ser la interpretación teórica de la estabilidad observada en los experimentos.²⁻⁷

Si se utiliza para Ψ la solución de Maschke-Hernegger correspondiente a las FRC en el límite de gran elongación de la separatriz, podemos aproximar la función de Coulomb con $\sin(\pi r^2/a^2)$. Para tener una idea más precisa de la aproximación aquí usada; para $b/a=3$, $\pi^2/16\lambda^2\alpha \approx 1/100$ y $F_0(1/100,0)=0$, $F_0(1/100,1.58)=1.002$, $F_0(1/100,3.17)=0$, por lo cual aproximar F_0 con $\sin(\pi r^2/a^2)$ puede ser considerada una buena aproximación para $b/a > 3$, siendo en este caso el parámetro de F_0 menor que $1/100$. Con esta limitación resulta:

$$\partial \Psi_{MH} / \partial z = \pi \Psi_0 \sin(\pi x^2) \sin(\pi z/2b) / 2b$$

donde con MH se indica la solución de Maschke-Hernegger, Ψ_0 es el valor máximo de Ψ_{MH} y $x=r/a$. Para $\Psi_{MH} = \text{const.}$ resulta:

$$|\sin(\pi z/2b)| = [1 - \Psi_{MH}^2 / \Psi_0^2 \sin^2(\pi x^2)]^{1/2}$$

y $V'(\Psi_{MH})$ puede expresarse:

$$V'(\Psi_{MH}) = \frac{8a^2b}{\Psi_0} \int_{x_1(\Psi_{MH})}^{x_2(\Psi_{MH})} dx \times [\sin^2(\pi x^2) - \Psi_{MH}^2 / \Psi_0^2]^{-1/2}. \quad (61)$$

Introduciendo la variable θ , definida de manera que $\sin\theta = \cos(\pi x^2) / (1 - \psi_{MH}/\psi_0)^{1/2}$ se puede obtener:

$$\begin{aligned} V'(\psi_{MH}) &= \frac{4a^2b}{\pi\psi_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left| 1 - (1 - \psi_{MH}^2/\psi_0^2) \sin^2\theta \right|^{-1/2} \\ &= \frac{8a^2b}{\pi\psi_0} K(1 - \psi_{MH}^2/\psi_0^2) \end{aligned} \quad (62)$$

con K integral elíptica completa de 1ª especie y parámetro $1 - \psi_{MH}^2/\psi_0^2$. Dado que en este caso p puede escribirse como $p = p_{\max} (\psi_{MH}^2/\psi_0^2 + \delta)/(1 + \delta)$, con p_{\max} valor máximo de p y δ constante relacionada con el fondo de presión, resulta:

$$p(V')^\gamma \propto (\psi_{MH}^2/\psi_0^2 + \delta) [K(1 - \psi_{MH}^2/\psi_0^2)]^\gamma \quad (63)$$

La (63) se ha graficado en la figura 12 en función de ψ_{MH}/ψ_0 para $\gamma = 5/3$ y $p_r = \delta/(1 + \delta)$ igual a 0 y 0.58. Para $p_r = 0$ el criterio (54) se satisface en todo el plasma, para $p_r = 0.58$ el gráfico indica estabilidad. $p_r = 0.58$ representa el umbral para las inestabilidades de intercambio en FRC muy elongadas basadas en el modelo de Maschke-Hernegger.

Se ha mostrado que el vórtice de Hill y la solución de Maschke-Hernegger, son inestables si la presión relativa en la separatriz es menor que 0.68 y 0.58 respectivamente. Como el modelo de Maschke-Hernegger corresponde a un perfil de corriente acimutal del tipo $j_\phi \propto r\psi$ más agudo que en el vórtice de Hill, en el cual $j_\phi \propto r$, puede presumirse que perfiles más agudos deberían ser más estables, en el sentido de necesitar una menor presión relativa en la separatriz para no satisfacer el criterio (54). Este hecho ha sido demostrado cuantitativamente en la referencia 33, donde se han generado numéricamente equilibrios

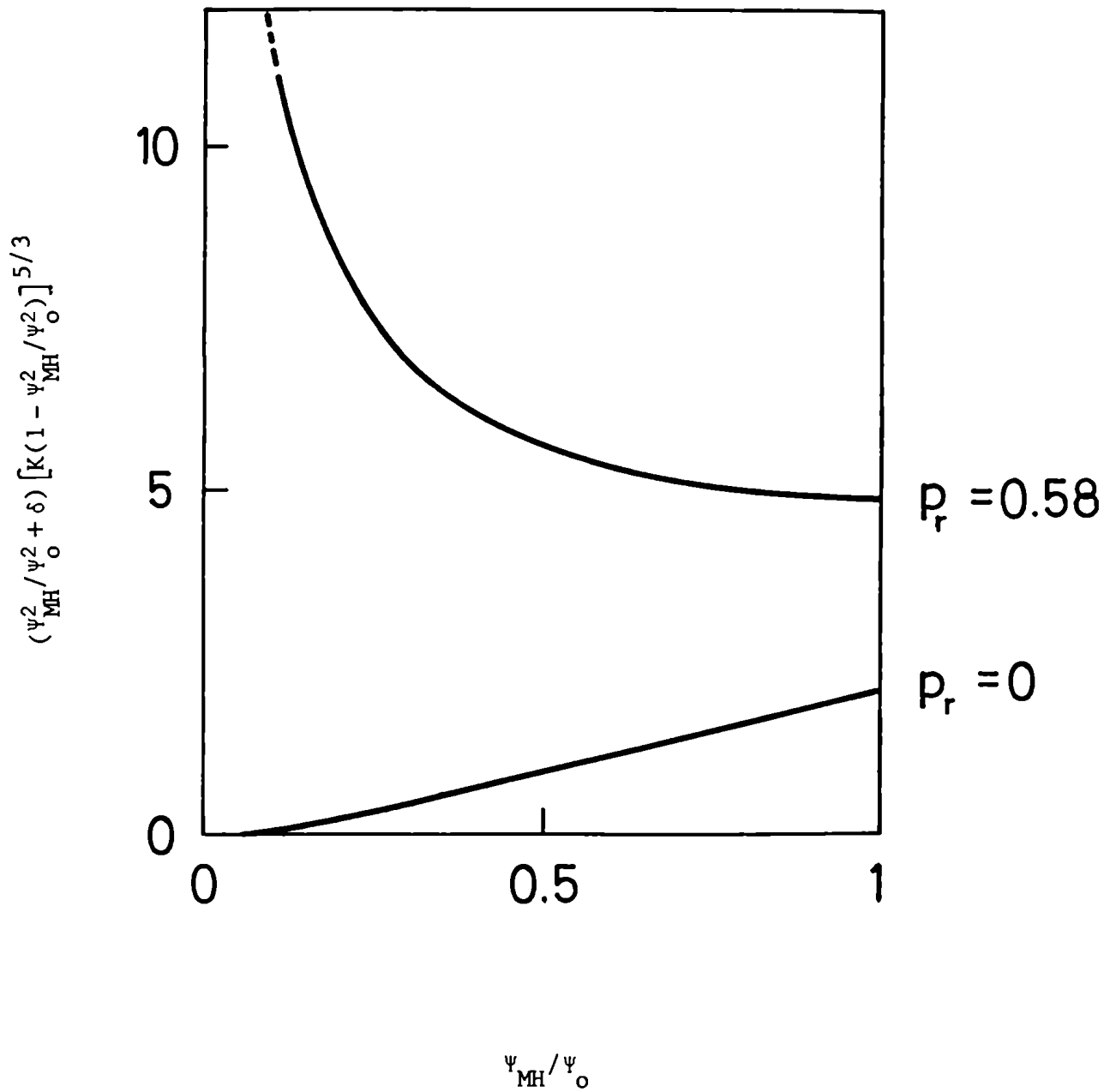


Fig. 12 - Criterio de Bernstein en función de ψ_{MH} / ψ_0 para la solución de Maschke-Herzegger en el límite de gran elongación de la separatriz ($\gamma = 5/3$).

con j_ϕ muy aguda, para los cuales el umbral estaba dado por $p_r \sim 0.025$.

Concluyendo, puede decirse que la estabilidad de las FRC, con respecto a los modos de intercambio, observada experimentalmente podría deberse a un fondo de presión en el borde del plasma. Una comparación más cuantitativa entre teoría y experimentos no resulta posible debido a la escasa precisión de las mediciones experimentales.

III.2 - Inestabilidad de vuelco interno.

Estudiando el modelo libre de fuerzas ("force-free") para el esferomak en coordenadas esféricas, Rosenbluth y Bussac⁴¹ hallaron que si la forma de la separatriz es de tipo alargado, el plasma es inestable con respecto a una especie de vuelco interno alrededor de un eje ortogonal al eje de simetría en el plano ecuatorial (que en la literatura se conoce como "tilting mode"), como se ve cualitativamente en la figura 13. Asimismo, ellos propusieron que también las FRC muy elongadas deberían ser inestables respecto de este tipo de desplazamientos. Dado que el análisis de Rosenbluth y Bussac se basa en la invarianza de la helicidad magnética del plasma $K = \int dr \underline{A} \cdot \underline{B}$, y que en una FRC axisimétrica $K=0$, la conclusión de que las FRC tendrían que ser inestables al vuelco interno no era para nada inmediata y necesitaba mayores comprobaciones. La previsión ha sido confirmada primeramente con métodos numéricos de integración de las ecuaciones MHD en el tiempo,^{37,38} y también con un método analítico sencillo basado en el principio de la energía.^{39,40} A pesar de las altas tasas de crecimiento previstas para este tipo de inestabilidad, en la mayoría de los experimentos con theta pinches de campo invertido no se han observado modos inestables parecidos al vuelco interno. Las únicas evidencias de una inestabilidad parecida se deben a Clark y Wuerker en el año 1962,⁴² y más recientemente se observó en la máquina de la Mathematical Science Northwest Inc.,⁶ algo parecido al vuelco interno en uno de los disparos (sin repetitividad).⁴³ Esta discrepancia entre la teoría y los experimentos presenta una interesante paradoja y todavía no ha sido explicada satisfactoriamente.

El método analítico para demostrar la inestabilidad respecto

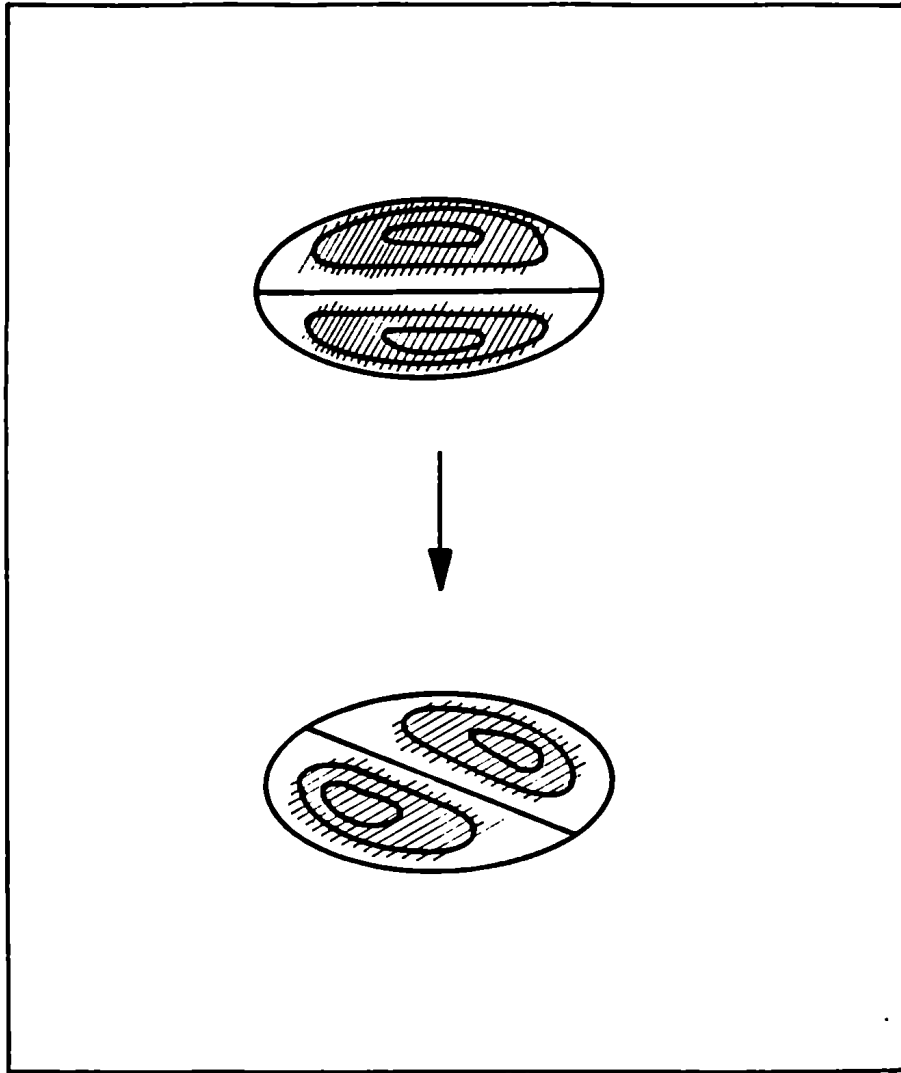


Fig. 13 - Representación cualitativa del modo de vuelco en las FRC.

del vuelco interno de las FRC con separatriz elongada, se basa en la aplicación del principio de la energía a un desplazamiento de prueba que simula la inestabilidad.

Para un autodesplazamiento $\underline{\xi}$ del plasma (donde por autodesplazamiento se entiende un desplazamiento de los elementos de fluido que resulte de resolver exactamente las ecuaciones MHD linealizadas alrededor de un estado de equilibrio) de tipo infinitesimal, con divergencia nula y que no deforma el contorno del plasma, el principio de la energía proporciona la siguiente expresión para el cuadrado de la frecuencia temporal asociada al autodesplazamiento:¹⁵

$$\omega^2 = \frac{\int d\underline{r} [|\nabla \times (\underline{\xi} \times \underline{B})|^2 - \nabla \times \underline{B} \cdot \nabla \times (\underline{\xi} \times \underline{B}) \times \underline{\xi}^*]}{4\pi \int d\underline{r} \rho \underline{\xi} \cdot \underline{\xi}^*} \quad (64)$$

donde las integrales se extienden al volumen ocupado por el plasma, * significa complejo conjugado, ρ y \underline{B} son la densidad de masa y el campo magnético al equilibrio. Si $\omega^2 \geq 0$ el equilibrio es estable con respecto al autodesplazamiento, si $\omega^2 < 0$ es inestable.

Aplicando la (64) a un $\underline{\xi}$ de prueba no coincidente con un autodesplazamiento, las conclusiones sobre ω^2 dejan de ser válidas. Pero si $\omega^2 < 0$ queda demostrada la inestabilidad del equilibrio ya que, en este caso, por lo menos uno de los autodesplazamientos en los cuales se puede descomponer el $\underline{\xi}$ de prueba es inestable (dada la ortogonalidad de los autodesplazamientos).

Un desplazamiento que se ha demostrado efectivo en probar la inestabilidad respecto del vuelco interno de las FRC axisimétricas puede representarse de la siguiente forma:^{39,40}

$$\underline{\xi} \propto (\hat{e}_r \cos\phi - \hat{e}_\phi \sin\phi) \times \nabla(\Psi/r^2) \quad (65)$$

donde Ψ es el flujo magnético poloidal que representa el equilibrio a examinar. La (65) reproduce una especie de rotación del plasma alrededor del eje $z=0$; $\phi=0, \pi$ que no deforma la separatriz. En lo que sigue se reemplazará la (65) en la (64) utilizando para Ψ el vórtice de Hill y la solución de Maschke-Hernegger. Se supondrá que la temperatura del plasma es uniforme y que los iones tienen carga unitaria, de manera que $\rho = p(m_e + m_i)/K(T_e + T_i)$.

i) Vórtice de Hill.³⁹

En este caso Ψ está dada por la (25) y todas las integrales de la (64) se pueden calcular en forma analítica, obteniendo la siguiente expresión para ω^2 :

$$\omega^2 = 63K(T_e + T_i)(a^2/b^2 - 1) / 2b^2(m_e + m_i)(6a^2/b^2 + a^4/b^4 + 8) \quad (66)$$

Como se puede apreciar $\omega^2 < 0$ si $a^2/b^2 < 1$, con lo cual queda demostrada la inestabilidad al vuelco interno de los equilibrios alargados. Para $b/a \gg 1 \rightarrow \omega^2 \approx -3.9K(T_e + T_i) / (m_e + m_i)b^2$, lo cual indicaría que, para una temperatura dada, la tasa de crecimiento, $\text{Im}\{\omega\}$, de los equilibrios muy elongados debería ser inversamente proporcional al largo de la separatriz. Cabe mencionar aquí que el $\text{Im}\{\omega\}$ dado por la (66), en general no coincide con la tasa de crecimiento del autodesplazamiento más inestable, pero puede dar una idea al respecto. Para valores experimentales típicos del experimento FRX-B del laboratorio de Los Alamos:⁴⁴
 $a=5.4\text{cm}$, $b=25\text{cm}$, $T_e + T_i = 310\text{eV}$ y deuterio como gas de llenado la (66) da $\text{Im}\{\omega\} \approx 10^6$ en buen acuerdo con las previsiones numéricas.^{36,37}

ii) Solución de Maschke-Hernegger.⁴⁰

En este caso $\Psi \approx F_0(q,y) \cos(\pi z/2b)$ con $q = \pi^2 a^2 / 16b^2 \alpha$, $y = \alpha r^2 / 2$ y α relacionado con la presión del plasma, $p = \alpha^2 \psi^2 / 32\pi^3$, se obtiene así la siguiente expresión para ω^2 :

$$\omega^2 = \pi^2 K (T_e + T_i) Q / 4b^2 (m_e + m_i) \quad (67)$$

con Q dado por:

$$Q = \left[-0.75\pi^2 q (e^{2\pi q} - 1)^{-2} + \int_0^{y_0} dy F_0^4(q,y) (7.5q/y^4 - 1.25/y^3 - 32q^2/3y^3 + 16q/3y^2) \right] / \left[\int_0^{y_0} dy F_0^4(q,y) (1/4y^3 + q/y^2 + 1/2y) \right] \quad (68)$$

donde y_0 es el segundo cero de F_0 (el primero es $y=0$). El signo de ω^2 depende del signo de Q. Q ha sido evaluado numéricamente y los resultados para $Q < 0$ se encuentran en la figura 14 en función de $b/a = \pi(32y_0 q)^{-0.5}$. Como se ve los equilibrios de Maschke-Hernegger son inestables si $b/a > 0.97$. Para $b/a \gg 1$ Q satura aproximadamente en -1.72 , lo cual indica nuevamente que, para una temperatura dada y gran elongación, la tasa de crecimiento del vuelco interno debería ser inversamente proporcional al largo de la separatriz. Utilizando los valores del experimento FRX-B del laboratorio de Los Alamos se obtiene $\text{Im}\{\omega\} \approx 10^6$, prácticamente equivalente al vórtice de Hill.

Dado que en el experimento de Los Alamos el plasma se mantiene en equilibrio por varias decenas de microsegundos, los resultados obtenidos indicarían que el vuelco interno debería ser observado. En casi todas las experiencias con FRC la separatriz es de tipo muy elongado y no hay evidencia de este tipo de inestabilidad. Esta extraña contradicción entre teoría y experiencia podría ser debida a estabili-

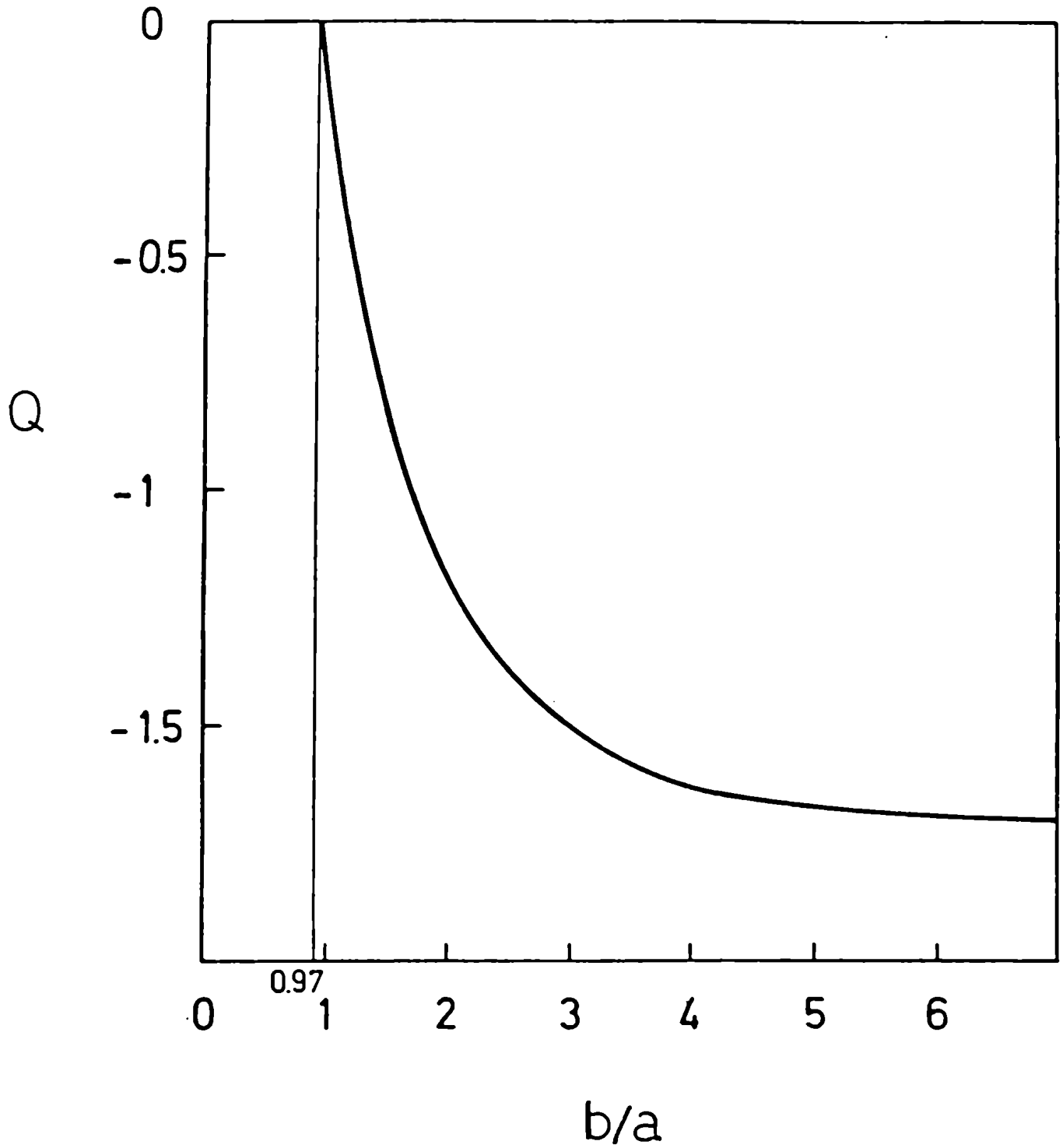


Fig. 14 - Q (ver ec. 68) en función de la elongación de la separatriz.

zación por efecto de radio de Larmor finito de los iones, lo cual implicaría la invalidez del modelo MHD para este tipo de problemas y el desarrollo de técnicas que están más allá del propósito de la presente tesis.

Hasta aquí se ha aproximado el equilibrio del plasma como de tipo estático, pero hay evidencia experimental de que el plasma rota alrededor del eje de simetría. La rotación del plasma debería tener efectos giroscópicos estabilizantes. Para tomar en cuenta estos efectos hay que considerar equilibrios de tipo estacionario. La presencia de un campo de velocidades en el estado de equilibrio puede llevar al fenómeno de la sobrestabilidad, y en general, la frecuencia asociada a una perturbación del sistema estará compuesta de una parte real y una imaginaria. Para un autodesplazamiento de los elementos del plasma, definido en forma lagrangiana, del tipo $\underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{r})e^{i\omega t}$, Frieman y Rotenberg encontraron que la siguiente condición es suficiente para garantizar la estabilidad de un sistema estacionario:⁴⁵

$$W = \frac{|i \int d\underline{r} \rho \underline{\xi}^* \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\xi}|^2 - \left(\int d\underline{r} \rho \underline{\xi}^* \cdot \underline{\xi} \right) \left[\int d\underline{r} \underline{\xi}^* \cdot \underline{F}(\underline{\xi}) \right]}{\left(\int d\underline{r} \rho \underline{\xi} \cdot \underline{\xi}^* \right)^2} > 0, \quad (69)$$

con

$$\begin{aligned} \underline{F}(\underline{\xi}) = & \nabla \left[\gamma p \nabla \cdot \underline{\xi} + \underline{\xi} \cdot \nabla p - \underline{B} \cdot \nabla \times (\underline{\xi} \times \underline{B}) \right] + \underline{B} \cdot \nabla \nabla \times (\underline{\xi} \times \underline{B}) + \nabla \times (\underline{\xi} \times \underline{B}) \cdot \nabla \underline{B} \\ & + \nabla \cdot (\rho \underline{\xi} \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} - \rho \underline{v} \underline{v} \cdot \nabla \underline{\xi}) \end{aligned} \quad (70)$$

donde ρ , \underline{v} y \underline{B} son la densidad de masa, velocidad del plasma y campo magnético en el estado de equilibrio. Las integrales se extienden al volumen del plasma. Cuando $W > 0$, W es una parte de ω^2 y el sistema es estable. Si $W < 0$, W coincide con el cuadrado de la parte imaginaria de ω

y el sistema es inestable. Frieman y Rotenberg discutieron el hecho de que la (69) no provee, en general, un principio variacional para ω (como es el caso para el principio de la energía), lo cual es relevante para determinar valores extremos de la frecuencia de la perturbación. En caso de inestabilidad esto implica que la tasa de crecimiento que surge de la (69) puede no ser la tasa real asociada a la inestabilidad. De todas formas como condición suficiente la (69) puede dar una idea sobre el comportamiento del sistema. Aquí se aplicará la (69) a un desplazamiento de prueba, si $W < 0$ quedará demostrada la inestabilidad, pero si $W > 0$ la estabilidad no estará del todo asegurada y habrá que interpretar la condición como necesaria para la estabilidad.

Como experimentalmente se observa que el plasma rota prácticamente en forma rígida alrededor del eje de simetría, para simplificar el análisis se supondrá que al equilibrio la frecuencia de rotación Ω es constante en el plasma.

Para representar una FRC rotante utilizaremos la solución de Maschke-Perrin para el flujo magnético poloidal:

$$\Psi = 3\pi B_0 r^2 [1 - z^2/b^2 - H(r)]/2 \quad (70)$$

con H definido por la (23). En este caso dado que Ω es constante, también $T_e + T_i$ es constante, lo cual permite definir ρ como proporcional a p . Definiendo como r_{\max} la solución de $1 - H = 0$, la elongación de la separatriz está dada por b/r_{\max} .

No es claro como tendría que modificarse el desplazamiento para reproducir el vuelco interno en un equilibrio rotante, de todas formas, dado que ya se conoce una función de prueba inestable para equilibrios estáticos, es lógico considerar la extensión natural de tal modo a

sistemas rotantes. Para eso será suficiente considerar en la (65) ϕ como el ángulo en un sistema de referencia rotante con la velocidad angular Ω del plasma. Por lo tanto, se utilizará la siguiente expresión para la parte espacial del desplazamiento que reproduce el vuelco interno en una FRC representada a través de la (70);

$$\underline{\xi} \propto \text{Re}\{(-\hat{e}_r iz/b^2 + \hat{e}_\phi z/b^2 + \hat{e}_z \frac{i}{2} \frac{\partial H}{\partial r}) e^{i\phi}\} \quad (71)$$

con ϕ definido en un sistema de referencia rotante con velocidad angular Ω . Utilizando las (70) y (71), tomando en cuenta que $\nabla \cdot \underline{\xi} = 0$ y que $\underline{\xi}$ es tangente a la separatriz, es posible obtener la siguiente expresión para W :⁴⁶

$$\begin{aligned} W = \Omega^2 & \left\{ [(1/4 + b^2/a^2)\gamma h^2 \int_0^{r_{\max}/a} dt t^3 (1-H)^{3/2} (\partial H/\partial t)^2 \exp(\gamma h^2 t^2/2)]^2 \right. \\ & - (1 + 4b^2/a^2)\gamma h^2 \int_0^{r_{\max}/a} dt t^3 (1-H)^{3/2} [(\partial H/\partial t)^2/4 + 2a^2(1-H)/5b^2] \exp(\gamma h^2 t^2/2) \\ & \times \int_0^{r_{\max}/a} dt t(1-H)^{1/2} [t(\partial H/\partial t)(1-H)(\partial^2 H/\partial t^2 + 4a^2/b^2)/2 + 14a^2(1-H)^2/5b^2 \\ & + (\partial H/\partial t)^2(5-5H-3t^2a^2/b^2)/4 + (1+4a^2/b^2)\gamma h^2 t^2(1-H)(\partial H/\partial t)(\partial H/\partial t - 2ta^2/b^2) \\ & \left. \times \exp(\gamma h^2 t^2/2)/4 \right\} \times \left\{ (1+4b^2/a^2)\gamma h^2 \int_0^{r_{\max}/a} dt t^3 (1-H)^{3/2} |(\partial H/\partial t)^2/4 \right. \\ & \left. + 2a^2(1-H)/5b^2 \right\} \exp(\gamma h^2 t^2/2) \quad (72) \end{aligned}$$

Donde se han efectuado las integraciones parciales en ϕ , z entre $-b(1-H)^{1/2}$

y $b(1-H)^{1/2}$ y se ha introducido la nueva variable $t=r/a$. W/Ω^2 ha sido calculado numéricamente para $\gamma=5/3$ y para distintos valores de h^2 y b/a . Los resultados se presentan en la figura 15 en función de la elongación y de $M=hr_{\max}/a$ el número de Mach máximo en la separatriz.

Para interpretar la figura 15 recordamos que para $h^2=0$ (caso estático) el vórtice de Hill era inestable para $b/r_{\max}=b/a>1$. Para $h^2>0$ se ve que para $M<1.58$ siempre hay un valor límite de b/r_{\max} más allá del cual hay inestabilidad. La curva $W/\Omega^2=0$ representa el umbral para la inestabilidad, empieza en $b/r_{\max}=1$ para $M=0$ y se vuelve asintótica para $M=1.58$. Los resultados muestran que la rotación del plasma debería tener un efecto estabilizador sobre el modo de vuelco interno, y que configuraciones muy elongadas podrían ser estables si $M>1.58$. Esto implicaría una energía cinética de rotación del plasma del mismo orden que la energía térmica.

Los experimentos indican números de Mach en la separatriz del orden de 0.3,^{3,4,7} aproximadamente cinco veces inferiores a lo requerido para obtener estabilidad según la teoría aquí expuesta. Estos resultados hacen desechar el mecanismo de estabilización del vuelco interno por efecto giroscópico aquí examinado, por cuanto la energía cinética de rotación observada experimentalmente es mucho menor que la energía térmica del plasma. Por lo tanto la discrepancia entre la teoría MHD y los experimentos, en cuanto concierne el vuelco interno, persiste y hasta el momento no se ha demostrado cual podría ser el verdadero efecto estabilizador.

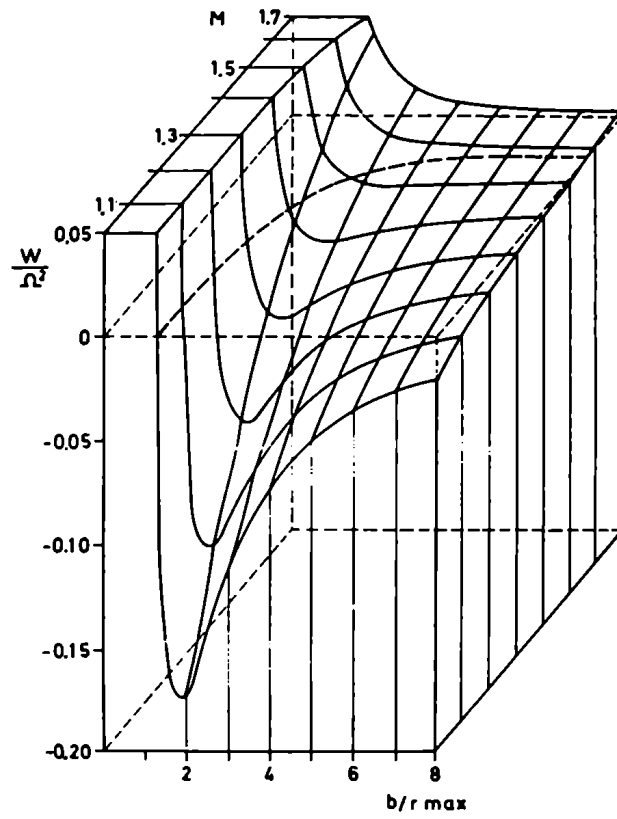


Fig. 15 - Representación 3-dimensional parcial de W/Ω^2 en función del número de Mach máximo y de la elongación de la separatriz, para el vuelco interno en el modelo de Maschke-Perrin.

IV - TRANSPORTE CLASICO

Uno de los factores que limitan el tiempo de confinamiento en las experiencias con plasmas es la difusión de partículas a través del campo magnético y la disipación de este último. Un modelo MHD ideal no puede describir estos fenómenos porque no toma en cuenta la resistividad del plasma. Una descripción muy simple del transporte se puede obtener a partir de las ecuaciones MHD resistivas, en las cuales se supone que la conductividad (σ) del plasma es una magnitud escalar. Existen también modelos más sofisticados al respecto pero, en general, están muy limitados en las aplicaciones a configuraciones que dependen de más de una variable espacial.

El objetivo principal de la teoría del transporte es obtener tiempos típicos de los procesos de difusión en función de los distintos parámetros experimentales, que reproduzcan en lo posible las mediciones. Además, los resultados pueden servir para formular leyes de escala, o sea expresiones en base a las cuales se pueden prever los tiempos de confinamiento al variar las dimensiones de las máquinas.

Existen mediciones experimentales del tiempo de confinamiento de partículas (definido como el tiempo durante el cual la densidad de partículas decae $e=2.718$ veces) en las FRC, aquí consideraremos como típicas las mediciones correspondientes a los experimentos FRX-B y FRX-C del laboratorio de Los Alamos.^{44,47} Estos experimentos dieron los siguientes resultados:

FRX-B: radio separatriz $a=5.4\text{cm}$; largo separatriz $b=25\text{cm}$; densidad electrónica máxima $n_e=3.5 \cdot 10^{15}\text{cm}^{-3}$; $T_e=110\text{eV}$; $T_i=200\text{eV}$; deuterio como gas y tiempo típico de confinamiento de partículas $\tau_{\text{FRX-B}}=39 \pm 15\mu\text{seg}$.

FRX-C: $a=10\text{cm}$; $b=50\text{cm}$; $n_e=5 \cdot 10^{15}\text{cm}^{-3}$, $T_e=100\text{eV}$; $T_i=250\text{eV}$; deuterio como gas y $\tau_{\text{FRX-C}} = 187 \pm 25 \mu\text{seg}$.

Heurísticamente se pueden obtener estimaciones del tiempo típico de difusión de partículas en una FRC comparándolo con el tiempo típico de difusión resistiva. Para estimar este tiempo se parte de la ley de Ohm resistiva:

$$\underline{j} = \sigma(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}/c) \quad (73)$$

De la (73) y las ecuaciones de Maxwell resulta:

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \nabla \times (\underline{v} \times \underline{B}/c) - c^2 \nabla \times (\nabla \times \underline{B}/\sigma)/4\pi \quad (74)$$

Suponiendo que \underline{B} difunda sin dar origen a movimiento del plasma ($\underline{v}=0$) con una ley de tipo exponencial $\underline{B}=\underline{B}(r)\exp(-t/\tau_R)$, y que L sea una distancia característica sobre la cual varían todas las cantidades en la (74), se puede estimar τ_R de la siguiente forma:

$$\tau_R = 4\pi\sigma L^2/c^2 \quad (75)$$

Generalmente se utiliza para σ la conductividad clásica de Spitzer que se puede expresar en la forma dada por Braginskii:⁴⁷

$$\sigma = 0.9 \cdot 10^{14} T_e^{3/2} (\text{eV}) / (Z \ln \Lambda) \text{ seg}^{-1} \quad (76)$$

con Z número atómico efectivo de los iones en el plasma y $\ln \Lambda$ es el logaritmo coulombiano, que para $T_e > 50\text{eV}$ está definido por $\ln \Lambda = 25.3 + \ln |T_e (\text{eV}) / (n_e)^{1/2}|$.

Utilizando los datos del experimento FRX-B se puede estimar $L=2.7\text{cm}$ y la (75) da $\tau_R \approx 840/Z \mu\text{seg}$. Análogamente para FRX-C, $L=5\text{cm}$ y $\tau_R \approx 2500/Z \mu\text{seg}$. Como se ve si $Z=1$ (los experimentos usan deuterio) los τ_R así obtenidos son mucho mayores que los valores experimentales,

aproximadamente 20 veces. Esto sugeriría que la conductividad de Spitzer no debería ser adecuada para describir el fenómeno, y que para eso habría que considerar algún tipo de resistividad anómala debida a la presencia de microinestabilidades en el plasma. A continuación se mostrará que la discrepancia se debe en parte al método utilizado para calcular τ_R . Con un método un poco más riguroso se pueden tomar en cuenta efectos debidos a la geometría cerrada de las líneas de campo magnético. Los tiempos de difusión resultantes seran pocas veces superiores a los medidos experimentalmente, lo cual indicaría que el papel de la resistividad anómala es mucho menor de lo que podría suponerse en base a la fórmula heurística (75).

Si se supone que en el plasma existe una fuente de partículas a lo largo del círculo correspondiente (al valor máximo de $|\psi|$, que es posible alcanzar un estado estacionario en el cual hay un flujo constante de masa a través de las superficies magnéticas y que la masa total del sistema también se mantiene constante, podemos identificar el tiempo de confinamiento de partículas, τ_p , con:

$$\tau_p = M/\Gamma_p \quad (77)$$

donde M representa la masa total de la FRC y Γ_p el flujo de partículas a través de las superficies magnéticas. Este modelo supone que una vez que las partículas llegan a la separatriz se consideran perdidas para el equilibrio, esto equivale a suponer que al cruzar la separatriz las partículas pueden moverse muy rápidamente a lo largo de las líneas magnéticas abiertas o también que en la separatriz existe una pared perfectamente absorbente. El problema se reduce entonces a calcular M y Γ_p suponiendo que Γ_p es constante en el tiempo y en todas las super-

ficies magnéticas. Para eso se utilizará el método propuesto por Auerbach y Condit,⁴⁹ basado en la teoría del estado estacionario de un plasma con difusión lenta de Kruskal y Kulsrud.⁵⁰

Si se supone que la velocidad de difusión del plasma es suficientemente pequeña como para despreciar los efectos de inercia en la ecuación de balance de momentos (2), es posible desacoplar las ecuaciones que describen el equilibrio de las que describen la difusión. Esto implica que para un plasma en equilibrio estacionario, en el cual la difusión es suficientemente lenta, el estado de equilibrio queda descrito por la ecuación $\nabla p = \underline{j} \times \underline{B} / c$. Por lo tanto en el caso de las FRC axisimétricas se puede seguir representando el equilibrio a través de las soluciones de la ecuación de Grad-Shafranov. Dado que la condición de estacionariedad implica $\nabla \times \underline{E} = -c^{-1} \partial \underline{B} / \partial t = 0$ podemos escribir $\underline{E} = \nabla V$ (V potencial escalar) y, multiplicando escalarmente la (73) por \underline{j} , resulta:

$$\underline{j} \cdot (\nabla V + \underline{v} \times \underline{B} / c) = \underline{j} \cdot \nabla V - \underline{v} \cdot \underline{j} \times \underline{B} / c = |\underline{j}|^2 / \sigma \quad (78)$$

de la cual podemos obtener la componente de \underline{v} ortogonal a las superficies magnéticas ($p = \text{const.}$):

$$\underline{v}_\perp = -\underline{v} \cdot \underline{j} \times \underline{B} / c |\nabla p| = (\underline{j} \cdot \nabla V + |\underline{j}|^2 / \sigma) / |\nabla p| \quad (79)$$

y el flujo de masa a través de una superficie $p = p_0$ está dado por:

$$\Gamma_p = \int_{p_0} \underline{ds} \cdot \underline{v} \rho = \int_{p_0} ds \rho (|\underline{j}|^2 / \sigma + \underline{j} \cdot \nabla V) / |\nabla p| \quad (80)$$

con $ds = |\underline{ds}|$ elemento de area de la superficie $p = p_0$. Si suponemos que ρ es función de p se puede demostrar que :

$$\int_{p_0} ds \underline{j} \cdot \nabla V / |\nabla p| = 0$$

Para eso es suficiente escribir $|\nabla p| = |dp/dl|$ y transformar la integral de superficie en una de volumen entre las superficies p_0 y $p_0 + dp$. Recordando que $\underline{j} \cdot \nabla V = \nabla \cdot (\underline{j} V)$, se puede transformar la integral en una sobre la superficie que encierra el volumen, que se anula por ser V unievaluado y \underline{j} tangente a las superficies magnéticas.

Finalmente resulta:

$$\Gamma_p = \frac{\rho}{\sigma} \int_{p_0} ds |\underline{j}|^2 / |\nabla p| \quad (81)$$

donde se supone que también σ , que depende esencialmente de T_e , es una cantidad de superficie. Para que Γ_p sea constante en el plasma será necesario que ρ y σ tengan una apropiada dependencia funcional con $p(\Psi)$, que dependerá del tipo de equilibrio que se considera. Una vez hallada tal dependencia funcional se utilizará ρ para calcular la masa total del sistema.

En el caso de las FRC axisimétricas, \underline{j} tiene solamente componente acimutal, y de la ecuación de Grad-Shafranov (17) puede obtenerse:

$$|\underline{j}|^2 = c^2 (\nabla^* \Psi)^2 / 64 \pi^4 r^2 \quad (82)$$

$$|\nabla p| = |\nabla^* \Psi| |\nabla \Psi| / 16 \pi^3 r^2 \quad (83)$$

De donde resulta:

$$\Gamma_p = \frac{c^2 \rho}{4 \pi \sigma} \int_{p_0} ds |\nabla^* \Psi| / |\nabla \Psi| \quad (84)$$

Dado que las curvas $\Psi = \text{const.}$, $\phi = \text{const.}$ coinciden con las líneas de \underline{B} , ds puede expresarse como $ds = r d\phi dl$ con dl elemento de línea magnética. Pero de la ecuación de las líneas magnéticas, $dr/B_r = dz/B_z$ resulta $2\pi r dl / |\nabla \Psi| = [(dr^2 + dz^2) / (B_r^2 + B_z^2)]^{1/2} = dr/B_r = 2\pi r / |\partial \Psi / \partial z|$ y por lo tanto:

$$\Gamma_p = \frac{c^2 \rho}{\sigma} \int_{r_1(\Psi)}^{r_2(\Psi)} dr r \frac{|\nabla^* \Psi|}{|\partial \Psi / \partial z|} \quad (85)$$

donde se ha integrado parcialmente en ϕ , se ha tomado en cuenta la simetría respecto del plano ecuatorial de las FRC y $\Psi(r_1, 0) = \Psi(r_2, 0)$.

A continuación se aplicará la (85) al caso del vórtice de Hill y a la solución de Maschke-Hernegger (en el límite de gran elongación de la separatriz).

IV.1 - Tiempo de difusión de partículas en el vórtice de Hill.⁴⁹

En este caso Ψ está dada por la (25) y resulta:

$$\Gamma_p = \frac{c^2 \rho}{\sigma} (1 + 4b^2/a^2) \int_{r_1(\Psi)}^{r_2(\Psi)} dr \, r/z \quad (86)$$

En las superficies $\Psi = \text{const.}$ $z = b(1 - r^2/a^2 - a^2\Psi/4r^2\Psi_0)^{1/2}$, con $\Psi_0 = 3\pi B_0 a^2/2$ valor extremo de Ψ en el plasma. Introduciendo la variable $w = r^2/a^2 - 1/2$, resulta:

$$\Gamma_p = \frac{bc^2\rho}{2\sigma} (1 + 4b^2/a^2) \int_{-s(\Psi)/2}^{s(\Psi)/2} dw \left[\frac{w + 1/2}{s(\Psi)/4 - w^2} \right]^{1/2} \quad (87)$$

con $s(\Psi) = (1 - \Psi/\Psi_0)^{1/2}$. Utilizando ahora una nueva variable, ϕ , definida de manera que $4w^2 = s(\Psi) \cos^2(2\phi)$ resulta:

$$\begin{aligned} \Gamma_p &= \frac{bc^2\rho}{\sigma} (4 + a^2/b^2) [1/2 + s(\Psi)/2]^{1/2} \int_0^{\pi/2} d\phi \left[i - \frac{2s(\Psi)}{1+s(\Psi)} \sin^2\phi \right]^{1/2} \\ &= \frac{bc^2\rho}{\sigma} (4 + a^2/b^2) [1/2 + s(\Psi)/2]^{1/2} E \left[\frac{2s(\Psi)}{1+s(\Psi)} \right] \end{aligned} \quad (88)$$

con $E(k)$ integral elíptica completa de segunda especie y parámetro $k = 2s(\Psi)/[1+s(\Psi)]$. Utilizando las tablas de la referencia 25, pag. 587, se puede comprobar que $[1+s(\Psi)]^{1/2} E \left[\frac{2s(\Psi)}{1+s(\Psi)} \right]$ varía entre $\pi/2$ en $\Psi = \Psi_0$, y 1.41 en la separatriz ($\Psi = 0$). Por lo tanto con una aproximación del 5% podemos expresar Γ_p como:

$$\Gamma_p = \frac{bc^2\rho}{\sigma} (4 + a^2/b^2) 1.06 \quad (89)$$

Para que Γ_p sea constante en el plasma ρ/σ tiene que ser constante. Dado que σ depende esencialmente de $T_e^{3/2}$, y que para el vórtice de

Hill $p \propto \Psi$, asumiendo T_e como función de Ψ se puede satisfacer esta condición asumiendo $\sigma = \sigma_0 (\Psi/\Psi_0)^{3/5}$ y $\rho = \rho_0 (\Psi/\Psi_0)^{3/5}$ con σ_0 y ρ_0 valores máximos de σ y ρ en el plasma. Esto permite calcular la masa total para este modelo como:

$$M = \rho_0 \int d\underline{r} (\Psi/\Psi_0)^{3/5} \quad (90)$$

donde la integral se extiende al volumen encerrado por la separatriz. Introduciendo ahora las coordenadas polares v, θ tales que $r/a = v \cos \theta$ y $z/b = v \sin \theta$ la (90) se transforma en:

$$M = \rho_0 \pi a^2 b^4 \int_0^{\pi/2} d\theta (\cos \theta)^{11/5} \int_0^1 dv v^{11/5} (1-v^2)^{3/5} \quad (91)$$

donde se ha efectuado la integración en ϕ . La segunda integral en la (91) puede también escribirse en la forma:

$$0.5 \int_0^1 dx x^{3/5} (1-x)^{3/5} = 0.5 \beta(8/5, 8/5) = \frac{[\Gamma(8/5)]^2}{2\Gamma(16/5)}$$

con β y Γ funciones beta y gamma de Euler respectivamente (ver ref. 25, pag. 253). Además:

$$\int_0^{\pi/2} d\theta (\cos \theta)^{11/5} = 0.5 \beta(1/2, 8/5) = 0.5 \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(16/5)}{2 \Gamma(37/10)}$$

y M resulta:

$$M = \rho_0 a^2 b^4 \frac{[\Gamma(8/5)]^2 \Gamma(1/2)}{\Gamma(37/10)} = 2.44 \rho_0 a^2 b \quad (92)$$

Finalmente de las (88) y (92) es posible obtener el tiempo de confinamiento de partículas para el vórtice de Hill:

$$\tau_{VH} = \frac{2.3 \sigma_0 a^2}{c^2 (4 + a^2/b^2)} \quad (93)$$

Utilizando para σ_0 la (76) es posible obtener para los datos del experimento FRX-B $\tau_{VH} \approx 160/Z$ μseg y para el experimento FRX-C $\tau_{VH} \approx 480/Z$ μseg . Como se ve los tiempos son notablemente inferiores a las estimaciones heurísticas y aproximadamente tres veces superiores a los valores experimentales. La (93) da el tiempo típico de difusión de partículas en una FRC basada en el modelo de Hill en función de la elongación de la separatriz, el radio del plasma y su temperatura electrónica. Para configuraciones muy elongadas τ_{VH} va como el radio del plasma al cuadrado, lo cual constituye una típica ley de escala.

IV.2 - Tiempo de difusión de partículas en el modelo de Maschke-Hernegger.³⁹

Dado que experimentalmente se obtienen esencialmente FRC muy elongados, en este caso limitaremos el análisis a $b/a \gg 1$, lo cual permite aproximar la función flujo magnético poloidal con $\Psi = \Psi_0 \sin(\pi r^2/a^2) \cdot \cos(\pi z/2b)$ (ver III.1). Resulta entonces:

$$\Gamma_p = \frac{8\pi bc^2 \rho}{a^4 \sigma} \int_{r_1(\Psi)}^{r_2(\Psi)} dr r^3 [\Psi_0^2 \sin^2(\pi r^2/a^2) / \Psi^2 - 1]^{-1/2} \quad (94)$$

Introduciendo la variable $w = \pi r^2/a^2 - \pi/2$, Γ_p se transforma en:

$$\Gamma_p = \frac{4bc^2 \rho \Psi}{\pi \sigma \Psi_0} \int_{-w_1}^{w_1} dw (1 - \Psi^2/\Psi_0^2 - \sin^2 w)^{-1/2} \quad (95)$$

con w_1 definido de manera que $\sin^2 w_1 = 1 - \Psi^2/\Psi_0^2$. Haciendo un nuevo cambio de variables definido a través de $\sin^2 \theta = \sin^2 w / (1 - \Psi^2/\Psi_0^2)$, la (95)

resulta:

$$\begin{aligned} \Gamma_p &= \frac{4bc^2 \rho \Psi}{\sigma \Psi_0} \int_0^{\pi/2} d\theta [1 - (1 - \Psi^2/\Psi_0^2) \sin^2 \theta]^{-1/2} \\ &= \frac{4bc^2 \rho \Psi}{\sigma \Psi_0} K(1 - \Psi^2/\Psi_0^2) \end{aligned} \quad (96)$$

con $K(k)$ integral elíptica completa de 1ª especie y parámetro $k = 1 - \Psi^2/\Psi_0^2$. Para $\Psi = \Psi_0$ $K(0) = \pi/2$ y para $\Psi = 0$, $K(1) = \infty$. La divergencia de K en la separatriz es una consecuencia de la existencia de dos círculos, en $r = a$ y $z = \pm b$, en los cuales \underline{B} se anula y formalmente se concentra todo el flujo de partículas. Estos círculos actúan prácticamente como divertores, por lo cual el modelo podría ser de interés para representar un espejo

magnético de campo invertido con inyección de haces de neutros y divertores en las puntas para reducir la concentración de impurezas en el plasma.

Para que Γ_p sea constante $\rho \Psi K(1-\Psi^2/\Psi_0^2)/\sigma \Psi_0$ deberá ser constante. En analogía con el caso anterior, y tomando en cuenta que en este caso $p \propto \Psi^2$, esta condición podrá ser satisfecha si se asume $\rho = \rho_0 (\Psi/\Psi_0)^{4/5}$. $[2K(1-\Psi^2/\Psi_0^2)/\pi]^{-2/5}$ y $\sigma = \sigma_0 [2K(1-\Psi^2/\Psi_0^2)\Psi^3/\pi\Psi_0^3]^{3/5}$, con ρ_0 y σ_0 valores máximos de ρ y σ respectivamente.

Para calcular la masa total del plasma es conveniente observar que, dado el comportamiento de las integrales elípticas, resulta:

$$\rho_0 (\Psi/\Psi_0)^{6/5} < \rho < \rho_0 (\Psi/\Psi_0)^{4/5}$$

y por lo tanto:

$$2\rho_0 a^2 b \left[2 \int_0^{\pi/2} dx (\sin x)^{6/5} \right]^2 < \pi M < 2\rho_0 a^2 b \left[2 \int_0^{\pi/2} dx (\sin x)^{4/5} \right]^2 \quad (97)$$

Pero $2 \int_0^{\pi/2} dx (\sin x)^{1+\epsilon} = \pi^{1/2} \Gamma(1+\epsilon/2)/\Gamma(1.5+\epsilon/2)$ con Γ función gamma de Euler. De los valores numéricos correspondientes resulta entonces:

$$0.72 \pi \rho_0 a^2 b < M < 0.92 \pi \rho_0 a^2 b \quad (98)$$

En consecuencia el tiempo típico de difusión de partículas para este modelo será:

$$0.36 \sigma_0 a^2/c^2 < \tau_{MH} < 0.46 \sigma_0 a^2/c^2 \quad (99)$$

Como aproximación se puede tomar $\tau_{MH} = 0.41 \sigma_0 a^2/c^2$, válido para $a^2/b^2 \ll 1$.

Comparando con el modelo de Hill para $a^2/b^2 \ll 1$ vemos que $\tau_{MH} \approx 0.71 \tau_{VH}$, lo cual implica que para el experimento FRX-B $\tau_{MH} \approx 114/Z$ μseg y para FRX-C $\tau_{MH} \approx 340/Z$ μseg , valores aproximadamente dos veces superiores a los medidos. Estos valores constituyen hasta el momento las mejores

aproximaciones, basadas en la conductividad clásica de Spitzer, a los datos experimentales. Son menores también que las estimaciones propuestas por Nguyen y Kammash,⁵¹ que utilizaron una ley de Ohm generalizada, con coeficientes clásicos, para el modelo de Hill. Cabe mencionar aquí que el resultado de Nguyen y Kammash es prácticamente equivalente al de Auerbach y Condit,⁴⁹ dado que en sus cálculos subestimaron M utilizando $\rho \propto \Psi$ y no $\rho \propto \Psi^{3/5}$.

El resultado obtenido con el modelo de Maschke-Hernegger es una consecuencia del perfil de j_ϕ , más agudo que en el modelo de Hill, lo cual es una mejor aproximación de la situación experimental.

Como se ve el papel de la resistividad anómala resulta aun más reducido y posiblemente, con el método aquí empleado, se podrían obtener reducciones ulteriores usando equilibrios más cercanos a los reales e introduciendo efectos debidos a la rotación del plasma.

V - CONCLUSIONES

Se ha considerado el problema del confinamiento magnético de plasmas en configuraciones de campo invertido, dentro de los límites de un modelo MHD, utilizando esencialmente métodos analíticos. En cada una de las partes en las que se puede dividir el problema del confinamiento magnético, se han hecho contribuciones originales al tema.

En el capítulo II se ha extendido la solución de Maschke-Hernegger^{23,24} de la ecuación de Grad-Shafranov, al caso de un plasma en rotación.²¹ También se ha considerado el problema del equilibrio del modelo de Hill para un campo magnético dado, resolviendo exactamente el problema de frontera libre en el límite en que los conductores externos se encuentren a gran distancia del plasma. Se hallaron puntos de bifurcación en el espacio de parámetros del equilibrio. La existencia de los puntos de bifurcación implica que, en general, existen dos equilibrios posibles para condiciones de contorno asignadas, con distintas energías, de lo cual se dedujo que equilibrios muy alargados o muy achatados deberían ser inestables y colapsar hacia equilibrios más esféricos.

En el capítulo III se han confirmado analíticamente los resultados numéricos obtenidos por Sparks et al.,³⁴ con respecto a las inestabilidades de intercambio en las FRC. Se infiere que la estabilidad observada experimentalmente se debe al fondo de presión existente en la separatriz. Además, dentro del modelo MHD, se ha demostrado la inestabilidad respecto del vuelco interno de las FRC elongadas,^{39,40,46} utilizando ya sea modelos de equilibrio de tipo estático (vórtice de Hill y modelo de Maschke-Hernegger) o de tipo rotante rígidamente (modelo

de Maschke-Perrin). Para el caso rotante se ha obtenido el resultado de que para que haya estabilidad respecto del vuelco interno, el número de Mach máximo del plasma debería ser mayor que 1.58. Como experimentalmente este número parece ser cinco veces inferior, la discrepancia entre la teoría y los experimentos, donde el modo de vuelco interno no se observa, queda como un problema todavía abierto.

En el capítulo IV se ha extendido el tratamiento, debido a Auerbach y Condit,⁴⁹ para hallar el tiempo típico de confinamiento de partículas en el vórtice de Hill, al caso de FRC muy elongadas basadas en la solución de Maschke-Hernegger.⁴⁰ Los resultados así obtenidos representan hasta el momento las mejores aproximaciones a los tiempos de confinamiento medidos experimentalmente, hechas en base a un modelo de conductividad clásica de Spitzer para el plasma.

En toda la tesis se ha puesto énfasis en mantener las características geométricas de las FRC en el análisis de los distintos problemas. Asimismo se ha restringido al mínimo indispensable el uso del cálculo numérico.

No se ha considerado la posibilidad de inestabilidades debidas a la resistividad finita del plasma, como los modos de desgarramiento, o la posibilidad de coalescencia de islas magnéticas presentes en el equilibrio, ya que la teoría existente no permite tratar estos problemas en forma consistente (preservando las características geométricas). Por las mismas razones no se ha analizado la inestabilidad rotacional de tipo $m=2$, que en los experimentos destruye el confinamiento. Tampoco se han tratado temas muy importantes como la fase de formación y compresión de las FRC, para la cual se necesitan complicados códigos numéricos, y la inclusión en las ecuaciones de los efectos

de radio de Larmor finito de los iones que presenta grandes dificultades debido a los fuertes gradientes típicos de las configuraciones de alto β .

Quedan algunas palabras sobre posibles desarrollos de los temas estudiados. En cuanto al equilibrio, queda siempre abierta la posibilidad de hallar nuevas clases de equilibrios de tipo analítico o numérico. En estabilidad quedan para estudiar las inestabilidades que deforman el contorno del plasma. Respecto del transporte clásico quizás lo más interesante sería encontrar un método para incluir en el tratamiento los efectos debidos a la rotación del plasma.

Roberto Clemente

Francisco J. García

REFERENCIAS

- ¹ M. Yoshikawa; Nucl. Fusion 25, 205 (1985).
- ² H. A. B. Bodin, T. S. Green, G. B. F. Niblett, N. J. Peacock, J. M. Quinn, J. R. Reynolds y J. B. Taylor; Nucl. Fusion Suppl. Part 2, pag. 521 (1962).
- ³ A. Eberhagen y W. Grossmann; Zh. Physik 248, 130 (1971).
- ⁴ R. K. Linford, W. T. Armstrong, D. A. Platts y E. G. Sherwood; Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Viena, 1979) Vol. 2, pag. 447.
- ⁵ A. G. Es'kov, R. Kh. Kurtmullaev, A. P. Kreshchuk, Ya N. Laukhin, A. I. Maljutin, A. I. Markin, Yu. S. Martyushov, B. N. Mirnov, M. M. Orlov, A. P. Proshletov, V. N. Semenov y Yu. B. Sosunov; Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Viena, 1979) Vol. 2, pag. 187.
- ⁶ W. T. Armstrong, D. G. Harding, E. A. Crawford y A. L. Hoffman; Phys. Fluids 25, 2121 (1982).
- ⁷ Y. Aso, Ch. Wu, S. Himeno y K. Hirano; Nucl. Fusion 22, 843 (1982).
- ⁸ Status of Mirror Fusion Research (Cohen B. I., Editor) Lawrence Livermore National Laboratory, Rep. UCAR-10049-80, pag. 4-22 (1980).
- ⁹ N. C. Christofilos; Peaceful Uses of Atomic Energy (Ginebra, 1958) Vol. 52, pag. 279.
- ¹⁰ M. G. Haines; Advances in Phys. 14, 167 (1965).
- ¹¹ J. B. Taylor; Plasma Phys. 4, 401 (1962).
- ¹² M. N. Rosenbluth, N. A. Krall y N. Rostoker; Nucl. Fusion Suppl. Part 1,

- pag. 143 (1963).
- 13 G. Berge; Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Viena, 1966) Vol. 1, pag 767.
 - 14 J. P. Friedberg y L. D. Pearlstein; Phys. Fluids 21, 1207 (1978).
 - 15 I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal y R. M. Kulsrud; Proc. Royal Soc. A244, 17 (1958).
 - 16 E. K. Maschke y H. Perrin; Plasma Phys. 22, 579 (1980).
 - 17 V. C. Ferraro; Monthly Notices of the Royal Astr. Soc. 97, 458 (1937).
 - 18 V. D. Shafranov; Reviews of Plasma Physics (Consultants Bureau, New York, 1966) Vol. 2, pag. 103.
 - 19 W. B. Thompson; An Introduction to Plasma Physics (Pergamon Press, Oxford, 1962) pag. 55.
 - 20 R. F. Post; The Physics of Field-Reversed Mirror, UCRL-81586 Preprint, 1978.
 - 21 O. Missiato y J. P. Sudano; Revista Brasileira de Física, Vol. Especial 1, pag. 264 (1982).
 - 22 R. A. Clemente y R. Farengo; Phys. Fluids 27, 776 (1984).
 - 23 E. K. Maschke; Plasma Phys. 15, 535 (1973).
 - 24 F. Hernegger; Proc. of the 5th European Conf. On Controlled Fusion and Plasma Physics (Euratom CEA, Grenoble, 1972) Vol.1, pag. 26.
 - 25 M. Abramowitz e I. A. Stegun; Handbook of Mathematical Functions (Dover Publications, Inc., New York, 1970) pag. 362.
 - 26 R. G. Storer; Plasma Phys. 24, 543 (1982).

- 27 R. A. Clemente; *Phys. Fluids* 26, 1877 (1983).
- 28 P. M. Morse y H. Feshback; *Methods of Theoretical Physics* (Mc Graw-Hill, Inc., New York, 1953) Vol. 2, pag. 1284.
- 29 S. Kaneko, K Chiyoda e I. Hirota; *J. Phys. Soc. Japan* 50, 359 (1981).
- 30 R. L. Spencer y D. H. Hewett; *Phys. Fluids* 25, 1365 (1982).
- 31 A. I. Morozov y L. S. Solov'ev; *Reviews of Plasma Physics* (Consultants Bureau, New York, 1966) Vol. 2, pag. 36.
- 32 L. Landau y E. Lifchitz; *Electrodinamique des Milieux Continus* (Edición MIR, Moscú 1966) pag. 176.
- 33 T. Minato, M. Tanjyo, S. Okada, Y. Ito, M. Koko, S. Ohi, S. Goto, T. Ishimura, H. Ito, Y. Nogi, S. Shimamura, Y. Osanai, K. Saito, K. Yokoyama, S. Shiina, S. Hamada, H. Yoshimura, Y. Aso, C. H. Wu, S. Himeno, M. Okamoto y K. Hirano; *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research* (IAEA, Viena, 1983) Vol. 2, pag. 303.
- 34 L. Sparks, J. M. Finn y R. N. Sudan; *Phys. Fluids* 23, 611 (1980).
- 35 W. A. Newcomb; *Phys. Fluids* 23, 2296 (1980).
- 36 J. M. Finn; *Phys. Fluids* 24, 274 (1981).
- 37 A. J. Shestakov, D. D. Schnack y J. Killeen; *Proceedings of the US-Japan Joint Symposium on Compact Toruses and Energetic Particle Injection* (Princeton Univ., Princeton, 1979) pag. 126.
- 38 D. C. Barnes, A. Y. Aydemir, D. V. Anderson, A. I. Shestakov y D. D. Schnack; *Proceedings of the Third Symposium on the Physics and Technology Of Compact Toroids in the Magnetic Fusion Energy Prigram* (LANL, Los Alamos, N.M., 1980) pag. 134.

- 39 R. A. Clemente y J. L. Milovich; Phys. Letters 85A, 148 (1981).
- 40 R. A. Clemente y C. E. Grillo; Phys. Fluids 27, 658 (1984).
- 41 M. N. Rosenbluth y M. N. Bussac; Nucl. Fusion 19, 489 (1979).
- 42 G. L. Clark y R. F. Wuerker; Phys. Fluids 5, 1503 (1962).
- 43 W. T. Armstrong; comunicación privada.
- 44 W. T. Armstrong, R. K. Linford, J. Lipson, D. A. Platts y E. G. Sherwood; Phys. Fluids 24, 2068 (1981).
- 45 E. Frieman y M. Rotenberg; Rev. Mod. Physics 32, 898 (1960).
- 46 R. A. Clemente y J. L. Milovich; Phys. Fluids 26, 1874 (1983).
- 47 K. F. Mc Kenna, W. T. Armstrong, R. R. Bartsch, R. E. Chrien, J. C. Cochrane Jr., R. W. Kewish Jr., P. Klingner, R. K. Linford, D. J. Rej, E. G. Sherwood, R. E. Siemon y M. Tuszewski; Phys. Rev. Letters 50, 1787 (1983).
- 48 S. I. Braginskii, Reviews of Plasma Physics (Consultants Bureau, New York, 1965) Vol. 1, pag. 205.
- 49 S. P. Auerbach y W. C. Condit; Nucl. Fusion 21, 927 (1981).
- 50 M. D. Kruskal y R. M. Kulsrud; Phys. Fluids 1, 265 (1958).
- 51 K. Nguyen y T. Kammash, Plasma Phys. 24, 177 (1982).