

Tesis de Posgrado

La marea diaria en la tropósfera y estratósfera

Garraffo, Zulema Delia

1986

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias de la Atmósfera de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Garraffo, Zulema Delia. (1986). La marea diaria en la tropósfera y estratósfera. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2008_Garraffo.pdf

Cita tipo Chicago:

Garraffo, Zulema Delia. "La marea diaria en la tropósfera y estratósfera". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1986.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2008_Garraffo.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE METEOROLOGIA

LA MAREA DIARIA EN LA TROPOSFERA Y ESTRATOSFERA

Elaborada por la Lic. Zulema D. Garraffo para acceder
al título de Doctor en Ciencias Meteorológicas

Director de tesis: Dr. Isidoro Orlanski

Lugar de trabajo:

Geophysical Fluid Dynamics Program,
Princeton University (U.S.A.)

y

Departamento de Meteorología

1986

Tesis N^o 2008
Ej. 1

A mis amigos, a mis padres, a Dora, Estela,
Héctor, Elena, Camilo, Carolina, Enrique,
Cuca, Silvina y Gonzalo.

RESUMEN

En esta tesis se investiga la influencia de la capa límite planetaria en la marea atmosférica diaria.

Se ha encontrado que hay evidencia observacional consistente de vientos troposféricos diarios de magnitud de cerca de 1 m/s, mientras que los cálculos de mareas dan valores de 10 a 20 cm/s. Esta discrepancia entre la teoría y las observaciones indica que, además de vapor de agua y ozono, hay otras fuentes troposféricas de movimientos diarios de escala continental.

En esta tesis se analiza la posibilidad de excitación lineal y no lineal de ondas internas de gravedad por la capa límite planetaria.

Un primer mecanismo estudiado es la excitación resonante de ondas internas de gravedad de escala planetaria por la fuerte variación diaria de la estabilidad estática en la capa límite atmosférica. Otra posible zona de generación resonante de ondas es la mesosfera, donde la marea es débilmente no lineal. Se desarrolla un modelo analítico con una tapa rígida sobre la capa límite, como una generalización de un mecanismo de inestabilidad paramétrica ("inestabilidad trapecio") propuesto por Orlandi. La generalización se hace para ondas de escala global, en un plano f y en el plano β ecuatorial. Las ondas más inestables resultan ser ondas globales con períodos cerca de dos días y un día. Considerando la esfericidad planetaria, los períodos de duplicación de las ondas inestables son más largos que para el caso sin rotación. Estos tiempos de duplicación son de algunos días, comparables a los tiempos de disipación. Se concluyó que,

con una condición de tapa rígida, las inestabilidades son débiles pero probablemente observables.

El efecto de la propagación vertical de estas resonancias se analizó usando un modelo numérico. Se construyó un modelo numérico para mareas dependiente del tiempo, a partir del modelo global espectral del Geophysical Fluid Dynamics Laboratory. Para simular la condición de radiación se introdujo una capa absorbente esponjosa en los niveles superiores del modelo, arriba de 60 km de altura. Se realizaron dos experimentos numéricos en un estado básico sin vientos medios zonales y gradientes latitudinales de temperatura. En un primer caso, se forzó el modelo con el calentamiento diario simplificado de Lindzen para vapor de agua y ozono; primero linealmente por 15 días de modelo, y después nolinealmente. En un segundo caso se incluyó en forma simplificada el calentamiento diario por la capa límite atmosférica. Comparando los dos casos lineales, se encontró que el calentamiento de la capa límite produce modificaciones a los campos tropicales de mareas del orden del 20% a todas las alturas. Esto indica que esta fuente produce una excitación significativa de modos de marea que se propagan verticalmente. En los experimentos nolineales se encontró que en la capa límite planetaria y en la mesosfera se producen algunas ondas internas de gravedad secundarias. Los períodos y números de onda coinciden con los resultados analíticos obtenidos para resonancias. Sin embargo, la amplitud de estas ondas secundarias es extremadamente pequeña.

Se concluyó que la excitación resonante de ondas de marea no es un proceso cuantitativamente importante.

El segundo mecanismo estudiado en esta tesis es la generación directa de mareas por calentamiento en la

capa límite atmosférica. Se realizó una estimación cuantitativa del calentamiento diario en la capa límite en base a datos realistas de rango diario de temperatura. Se expandió la amplitud diaria de temperatura en la superficie terrestre para verano e invierno en números de onda zonales. En un cálculo de marea en que se incluyó la componente del calentamiento en la capa límite que se propaga con el sol, además de los modelos simplificados de Lindzen para ozono y vapor de agua, se encontró que se obtienen vientos troposféricos diarios de magnitud 30 cm/s, en mejor acuerdo con las observaciones.

Se encontró además que la contribución del calentamiento de la capa límite a las mareas tropicales en la estratósfera y mesosfera es del orden del 20% de la marea, indicando que esta fuente debe incluirse en modelos detallados de la marea diaria.

AGRADECIMIENTOS

Es un placer agradecer a Isidoro Orlanski como director de este trabajo de tesis, por su creatividad, profundidad científica y entusiasmo.

Agradezco a George Philander por una constante y generosa participación en discusiones, y por animarme a lo largo de este trabajo. A Isidoro y a George también debo mucho humanamente.

También agradezco a Stephen Fels por ideas y discusiones y por una lectura crítica de partes del manuscrito, y a Jerry Mahlman por aportes pacientes a mi formación.

Este trabajo fue desarrollado siendo la autora estudiante graduada en el Geophysical Fluid Dynamics Program, Princeton University, y fue completado en el Departamento de Meteorología de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Agradezco al Geophysical Fluid Dynamics Program, subsidio National Science Foundation ATM-GA/40048, y al GFDL/NOAA por el uso del sistema de computación. Agradezco al Departamento de Meteorología por facilidades brindadas para completar este trabajo.

También agradezco a la Comisión Nacional de Energía Atómica por apoyo.

Mirta Colombo realizó el mecanografiado de este trabajo.

INDICE

Resumen	iii
Agradecimientos	vi
Indice	vii
Lista de tablas	ix
Lista de figuras	x
<u>Introducción</u>	1
<u>Capítulo I. Discrepancias entre la teoría de la marea diaria y observaciones.</u>	
I.1 Introducción	3
I.2 Discrepancias entre observaciones diarias troposféricas y la teoría clásica de mareas	6
I.3 Otras fuentes troposféricas de mareas además de vapor de agua	8
<u>Capítulo II. Modelos de excitación paramétrica de ondas internas de gravedad.</u>	
II.1 Introducción	11
II.2 Modelo con una tapa rígida sobre la capa activa	13
II.2.a Aproximación en el plano f	14
II.2.b Modelo en la esfera o en el plano beta ecuatorial	35
II.3 Características de las regiones de posible interacción no lineal en la atmósfera	60
<u>Capítulo III. Modelo numérico para la marea diaria.</u>	
III.1 Introducción	65
III.2 Modelo numérico espectral	70
III.3 Validación del modelo numérico	74
III.3.a Modelo numérico lineal	74

III.3.b Validación del modelo numérico nolineal	83
III.4. Experimentos numéricos	85
III.4.a Resultados numéricos lineales	86
III.4.b Resultados numéricos no lineales	97
<u>Capítulo IV.</u> Calentamiento de capa límite atmosférica como fuente de marea diaria.	
IV.1 Introducción	116
IV.2 Fuentes troposféricas de mareas	117
IV.3 Calentamiento de la capa límite atmosférica	119
IV.4 Comparación del calentamiento de capa límite con otras fuentes troposféricas	122
IV.5 Modelo para el calentamiento de capa límite atmosférica	128
IV.6 Temperatura diaria en la superficie terrestre	129
IV.7 Análisis estacional de rango diario de temperatura	142
IV.8 Campos principales de marea excitados por el calentamiento de la capa límite	147
<u>Conclusiones</u>	159
Apéndice	161
Referencias	164

LISTA DE TABLAS

		Pag.
Tabla I	Modos inercio-gravitacionales con período 2 días y número de onda zonal cero, en la esfera. λ : longitud de onda vertical del modo.	37
Tabla II	Características de las inestabilidades paramétricas con condición de tapa rígida, para inestabilidades de primero y segundo orden en un plano f y en el plano beta ecuatorial.	58
Tabla III	Tiempos de crecimiento de las inestabilidades: tiempos de multiplicación por e para los casos de la tabla II.	59
Tabla IV	Escalas temporales de interacción no lineal, de residencia en la zona activa, y de disipación, para ondas en una atmósfera con propagación vertical.	63
Tabla V	Niveles del modelo numérico: coordenada σ y altura para el perfil standard a latitudes medias de temperatura.	72
Tabla VI	Amplitud de la componente que se propaga verticalmente para los dos primeros modos diarios principales propagantes simétricos, para distintas escalas verticales de calentamiento normalizado.	125
Tabla VII	Distribución en bandas latitudinales de las estaciones de rango diario de temperatura en la superficie terrestre.	130

LISTA DE FIGURAS

		Pag.
Fig. 1	Tazas de crecimiento y tiempos de multiplicación por e para la primera rama de inestabilidad en un plano f sin rotación. Cuando la frecuencia de rotación f' es $\neq 0$, es $\zeta = \zeta_0 / (1 - 4f'^4)$, $\nu_{im} = (1 - 4f'^2) \nu_{cim}$ (ζ_0, ν_0 son para $f'=0$).	26
Fig. 2	Máxima tasa de crecimiento no lineal en la primera rama de inestabilidad como función de ϵ , con un determinante de Hill truncado a orden 30.	27
Fig. 3	Esquema para las interacciones de segundo orden.	32
Fig. 4	De Longuet Higgins (1968). Autofunciones de los modos libres de oscilación para $s=0$ (s : número de onda longitudinal, σ : frecuencia, Ω : frecuencia de rotación terrestre, h : profundidad equivalente. Unidades de longitud: $1/(\text{radio terrestre})$).	36
Fig. 5	Parámetro de interacción no lineal $\epsilon = N_{\text{diario}}^2 / N^2$ como función de la altura en la atmósfera.	61
Fig. 6	Niveles del modelo y temperatura básica.	71
Fig. 7	Tiempos de amortiguamiento en la capa esponjosa del modelo.	75
Fig. 8	Comparación entre la solución numérica para la amplitud de la velocidad del oeste	

	de la marea diaria y la solución analítica. El calentamiento es el simplificado de Lindzen para ozono y vapor de agua.	79
Fig. 9	Mismo para la fase de la velocidad del oeste.	80
Fig. 10	Comparación entre las mismas soluciones numérica y analítica de la fig. 8 a diferentes latitudes, para la amplitud y fase de la velocidad del oeste.	82
Fig. 11	Aceleraciones del flujo medio numéricas, a 2.2° y 6.6° latitud.	84
Fig. 12	Amplitud de la velocidad zonal numérica con número de onda zonal uno (m/s) para caso a (marea) y b (marea y capa límite)	88
Fig. 13	Mismo para amplitud de velocidad meridional (m/s).	89
Fig. 14	Mismo para temperatura.	90
Fig. 15	Amplitud de la diferencia de los campos de número de onda zonal uno entre caso b y caso a: velocidad zonal y meridional (m/s).	91
Fig. 16	Mismo para temperatura ($^\circ\text{K}$)	92
Fig. 17	Comparación entre la solución numérica para la marea de capa límite obtenida como la diferencia entre caso b y caso a, y dos soluciones analíticas para capa límite: una conteniendo $\theta_1, \dots, \theta_{11}, \theta_{-1}, \dots, \theta_{-11}$, y otra con $\theta_1, \theta_3, \theta_{-1}, \dots, \theta_{-11}$.	

	Latitudes 77.8° y 46.7° .	95
Fig. 18	Mismo a 28.9° y 15.6° .	96
Fig. 19	Variables del modelo con número de onda zonal cero, como función función del tiempo durante un cálculo no lineal en un punto en los trópicos, mostrando variaciones estacionarias en U y T, y una oscilación de dos días en V.	99
Fig. 20	Amplitud de la velocidad meridional zonalmente simétrica (cm/s) al día 30, para el caso a.	102
Fig. 21	Mismo para el caso b.	103
Fig. 22	Series temporales de la velocidad meridional zonalmente simétrica a 15.5° latitud en niveles desde la superficie hasta la parte superior del modelo. Las velocidades están adimensionalizadas con la velocidad máxima a cada nivel. Caso a.	104
Fig. 23	Mismo para caso b.	105
Fig. 24	Mismo para la velocidad meridional con número de onda zonal uno, caso b.	107
Fig. 25	Comparación entre los campos lineales al día 15 y los no lineales al día 30. Caso a (marea). Amplitud de las velocidades zonal y meridional con número de onda uno.	109

Fig. 26	Mismo para temperatura.	110
Fig. 27	Mismo que Fig. 25 para caso b.	111
Fig. 28	Mismo que fig. 26 para caso b.	112
Fig. 29	Algunas observaciones que muestran una oscilación de dos días en la mesosfera tropical.	115
Fig. 30	Amplitud de la temperatura diaria en algunas estaciones sobre tierra. De Harris (1959) y Harris et al (1966).	120
Fig. 31	Descomposición en números de onda zonales de la distribución de tierra sobre el globo.	133
Fig. 32	Promedio zonal de la fracción de tierra sobre el globo y su descomposición en partes latitudinalmente simétrica y antisimétrica.	134
Fig. 33	Perfiles de rango diario máximo en el centro de los continentes, de Paffen (1966).	135
Fig. 34	Perfiles promedio aproximados de rango diario de temperatura sobre continentes obtenidos interpolando subjetivamente las isolíneas de Paffen (1966).	136
Fig. 35	Estimaciones aproximadas del promedio zonal de rango diario de temperatura en base a los datos de las fig. 33 y 34 y la fracción de tierra sobre continentes.	137

Fig. 36	Análisis en números de onda zonales del promedio anual del rango diario de temperatura, obtenido interpolando las isolíneas de Paffen (1966) en cuadrados de 10 grados de latitud por 10 grados de longitud.	138
Fig. 37	Número de onda zonal cero del análisis de la fig. 36, y descomposición en partes simétrica y antisimétrica.	139
Fig. 38	Comparación de los resultados de la fig. 37 con los de la fig. 35 y los de Haurwitz (1965).	140
Fig. 39	Análisis de rango diario de temperatura para enero.	143
Fig. 40	Mismo para julio.	144
Fig. 41	Análisis en números de onda zonales del rango diario de temperatura para enero de la fig. 39.	145
Fig. 42	Mismo para julio de la fig. 40.	146
Fig. 43	Comparación de la componente latitudinalmente simétrica del número de onda zonal cero del rango diario de temperatura del presente análisis para enero y julio, con el análisis de Haurwitz (1965).	148
Fig. 44	Marea principal migrante diaria excitada por calentamiento de capa límite en enero. Amplitud de la velocidad	

	del oeste (m/s).	153
Fig. 45	Mismo para julio.	154
Fig. 46	Marea principal migrante diaria con el calentamiento de Chapman y Lindzen(1970). Amplitud de la velocidad del oeste (m/s).	155
Fig. 47	Amplitud de la velocidad del oeste obtenida con el calentamiento de marea y capa límite en enero. Se muestra la marea (Lindzen, 1968) para comparación.	156
Fig. 48	Mismo para capa límite en julio.	157

INTRODUCCION

Los movimientos de mareas son una componente pequeña pero regular de los movimientos troposféricos.

La teoría de Lindzen de la marea diaria explica muchas de las características observacionales de estos movimientos atmosféricos diarios hasta alturas mesosféricas. El forzado de las mareas atmosféricas por absorción de radiación principalmente por ozono, y en menor grado por vapor de agua, junto con la existencia de modos diarios propagantes y atrapados, explica la predominancia observada de la marea semidiurna en la presión de superficie, mientras que la marea diurna es tanto o más importante que la semidiurna en los campos estratosféricos y mesosféricos.

Por encima de la troposfera, las mareas dejan de ser movimientos menores, contribuyendo significativamente a la circulación en la alta atmósfera.

Algunos de los refinamientos recientes a modelos de mareas se han referido a las fuentes clásicas de calentamiento, considerando nuevos datos y parametrizaciones radiativas para ozono y vapor de agua.

Simultáneamente se han mejorado los modelos para las mareas en la alta atmósfera. La radiación por dióxido de carbono y oxígeno molecular son fuentes mesosféricas que se tienen en cuenta. Además, para obtener los campos de marea correctamente, deben incluirse otros procesos, como los efectos no lineales producidos por el promedio zonal de los vientos y los gradientes meridionales de temperatura.

Todos estos refinamientos resultaron en un mejor acuerdo entre la teoría y los datos para las mareas atmos-

féricas.

Existen, sin embargo, algunas discrepancias sistemáticas entre modelos y observaciones de mareas. Una de ellas es que las variaciones diarias de viento y de temperatura observadas en la troposfera muestran valores mayores que las predicciones de cálculos de mareas.

Este hecho puede deberse a la presencia de otras fuentes troposféricas de mareas no incluidas en esos modelos, como pueden ser el transporte de calor sensible de la superficie terrestre, y la liberación de calor latente de condensación.

En esta tesis se examina la posibilidad de que esa discrepancia entre la teoría y las observaciones se deba a procesos en la capa límite atmosférica.

Primeramente se analiza si puede haber generación de movimientos diarios de marea por excitación no lineal resonante de ondas internas de gravedad en la capa límite atmosférica.

En segundo lugar, se estudia si es importante la excitación directa de modos diarios de marea por el calentamiento de la superficie terrestre.

Para estos estudios se emplean métodos analíticos, numéricos y empíricos. Una de las herramientas usadas es un modelo de circulación general modificado para el estudio de las mareas, lo que permite el análisis de efectos lineales y no lineales simultáneamente.

Para una estimación cuantitativa del efecto lineal de la capa límite atmosférica en la marea diaria, se realiza un nuevo análisis de transporte de calor sensible de la superficie de la tierra a la atmósfera, en base a datos de rango diario de temperatura.

CAPITULO I

DISCREPANCIAS ENTRE LA TEORIA DE LA MAREA DIARIA Y OBSERVACIONES

I.1 Introducción

Desde hace por lo menos dos siglos se sabe ciertamente que hay variaciones pequeñas pero regulares diurnas y semidiurnas de la presión de superficie.

Estas variaciones son directamente observables en los trópicos. A latitudes medias, si bien están presentes, son oscurecidas por los fenómenos sinópticos de gran amplitud.

Históricamente, se consideró que la principal fuente de mareas era térmica: el calentamiento diario y semidiario de la superficie terrestre por radiación solar. Para tratar de explicar la predominancia observada de la oscilación semidiaria de la presión en la superficie se invocaron argumentos de resonancias.

A medida que se fue explorando la estructura atmosférica más allá de los primeros kilómetros sobre la superficie de la tierra, hubieron altibajos respecto a la validez de una teoría de resonancia para la marea semidiurna.

Por los años 1950 se emplearon datos de radiosondeo para medir temperaturas y vientos horizontales diarios y semidiarios, desde la superficie de la tierra hasta 30 km de altura (Johnson, 1955; Harris, 1959; Harris et al., 1962, 1966). No se encontró preponderancia pronunciada de vientos diarios o semidiarios.

En los años 1960 se obtuvo información de vientos hasta 60 km de altura mediante datos de cohetes. El análisis de estos datos mostró que los movimientos dia-

rios son una componente muy importante de la circulación en la estratósfera alta y en la mesosfera (Miers , 1965 ; Beyers et al. , 1966).

Simultáneamente se identificó que las fuentes principales de las mareas térmicas son la absorción de radiación por vapor de agua (Siebert, 1961), y por ozono (Butlér y Small, 1963).

Recién se llegó a un desarrollo completo de la teoría clásica de mareas actual al encontrarse una solución completa a la ecuación de mareas de Laplace, incluyendo modos de Hough con profundidades equivalentes positivas y negativas (Lindzen, 1966; Kato, 1966).

A este nivel de desarrollo, la teoría clásica de mareas con vapor de agua y ozono como las fuentes principales de mareas explicaba las características más importantes de estos movimientos atmosféricos diarios y semi-diarios hasta alturas mesosféricas.

Desde los años 1970 hubo un mayor interés en los estudios teóricos y observacionales de mareas atmosféricas en la mesosfera y en la termosfera.

Forbes y Garrett (1979) presentaron una revisión de los desarrollos de la teoría de mareas en esa década. Los principales avances fueron la investigación de los efectos de vientos medios y gradientes meridionales de temperatura, viscosidad molecular y conductividad térmica en las mareas en la alta atmósfera.

El forzado de vientos medios zonales por las mareas (Fels y Lindzen, 1974; Miyahara, 1978 a y b) y el calentamiento medio de la termosfera (Lindzen y Blake, 1970) resultaron mecanismos importantes que influyen en la cir-

culación de la alta atmósfera. El acuerdo aparente entre el flujo medio forzado por la marea diaria en la troposfera baja y la circulación observada sugiere que la marea puede ser el factor principal en determinar la circulación general en esta región (Hamilton, 1981b).

Forbes y Garrett (1978) y Hamilton (1981b) construyeron "funciones de calentamiento" de marea basadas en nuevos datos y parametrizaciones radiativas para ozono y vapor de agua. Hamilton incluyó el calentamiento por oxígeno molecular y dióxido de carbono. Ambas estimaciones de "funciones de calentamiento" diarias muestran una dependencia vertical con un pico en la troposfera media debido a vapor de agua, en vez de decaer suavemente como las funciones de calentamiento de Lindzen. También en ambas estimaciones el pico de ozono cerca de la estratopausa es mucho más pronunciado que en los resultados de Lindzen.

Simultáneamente con estos avances en el modelado de mareas se reconoció que debían reexaminarse las fuentes de mareas en la atmósfera baja.

Se sugirió que la liberación de calor latente de condensación en nubes es una fuente troposférica de mareas que podría explicar la fase de la presión semidiaria en la troposfera. (Lindzen, 1978).

A pesar de estos progresos quedan aspectos de la marea diaria troposférica que deben ser explicados.

Como aclaración se señala que en este trabajo se consideran mareas a los movimientos diarios y semidiarios que tienen números de onda horizontales del orden de 0 a 6; de modo que no son considerados mareas movimientos con escalas más pequeña, como la brisa marina en al-

gunas regiones.

I.2. Discrepancias entre observaciones diarias troposféricas y la teoría clásica de mareas.

La teoría clásica de mareas predice vientos troposféricos diarios de decenas de cm/s.

En cambio, hay evidencia observacional consistente de vientos diarios troposféricos de magnitud de metros por segundo.

Hering y Borden (1962) encontraron vientos diarios sobre los Estados Unidos con máximas amplitudes en verano del orden de 2 o 3 m/s en los primeros 5 km de la atmósfera, y una estructura vertical con una longitud de onda troposférica de 10 km. Las grandes amplitudes encontradas por Hering y Borden sobre la zona de las Grandes Planicies de los Estados Unidos se extienden a una zona mayor: la Península de Yucatán, el Sureste de los Estados Unidos y el Caribe (Rasmusson, 1967). Se encontró otra zona de gran amplitud diaria relacionada con la topografía sobre las laderas oeste de los Andes (Lettau, 1967).

Wallace y Hartranft(1969) examinaron la distribución global de vientos troposféricos diarios en el hemisferio norte y encontraron vientos de magnitud m/s sobre Norte América, con una distribución geográfica relacionada con la topografía, contraste mar-tierra y pendiente del terreno. Los vientos diarios a latitudes medias muestran una marcada dependencia estacional, siendo mayores en verano. La mayoría de las estaciones a latitudes medias y bajas muestran la predominancia de modos que se propagan verticalmente, con propagación de energía hacia arriba, indicando una fuente en la tropósfera

baja.

Wallace y Tadd (1974) mostraron influencias topográficas hasta al menos 28 km de altura.

Nitta y Esbensen (1974) examinaron variaciones diarias de divergencia horizontal , velocidad vertical y vientos horizontales sobre la región de los "trade winds" en el Atlántico. Encontraron velocidades diarias de cerca de 1.5 m/s, con valores para todas las variables un orden de magnitud más grande que las predichas por Lindzen. La estructura vertical muestra una longitud de onda de 5 km. Ellos concluyeron que esas variaciones diarias están afectadas grandemente por contraste mar-tierra y que el campo de la divergencia puede afectar la actividad de convección "cumulus".

También hay diferencias entre datos de presión diaria de superficie y resultado de cálculos. Haurwitz (1965) y Haurwitz y Cowley (1973) dieron ajustes analíticos a un gran número de mediciones de presión diaria. En los trópicos, los valores del ajuste de las observaciones son mayores que resultados de modelos. También hay diferencias a latitudes altas, donde el ajuste experimental da valores menores que los cálculos. Sin embargo, Hamilton (1981b) señaló que éstas pueden deberse al pequeño número de datos que hay a latitudes altas, habiendo en cambio mejor acuerdo entre los modelos y observaciones individuales a esas latitudes. La discrepancia a latitudes bajas es real y es una indicación de la presencia de otras fuentes troposféricas de mareas.

Las observaciones de velocidad y presión mencionadas anteriormente muestran que sobre áreas continentales los movimientos diarios son considerablemente más grandes de lo que se predice en modelos de marea con ca-

lentamiento por ozono y vapor de agua.

Esto no sucede solamente en ubicaciones particulares de la superficie terrestre; también para las mareas medias que se propagan con el sol, cálculos actualizados como los de Hamilton (1981b) dan valores troposféricos menores que las observaciones.

Esta discrepancia sistemática entre las observaciones de mareas troposféricas y los cálculos indican que hay otras fuentes que contribuyen a estos movimientos.

I.3. Otras fuentes troposféricas de mareas además de vapor de agua

Han habido sugerencias acerca de que, además de vapor de agua, hay otras fuentes troposféricas de mareas que deberían tenerse en cuenta.

Lindzen (1978) presentó indicaciones de que la liberación de calor latente en nubes cúmulo es una fuente troposférica significativa de mareas. Él mostró que esta fuente puede corregir la discrepancia existente en la fase de la presión de superficie semidiaria entre las observaciones y los cálculos con calentamiento por ozono y vapor de agua. También obtuvo que esta fuente elimina el rápido cambio de fase en los vientos semidiarios horizontales que era predicho en cálculos previos a 28 km de altura y que no aparece en las observaciones.

Hamilton (1981a) examinó esta misma hipótesis con un número mayor de datos de precipitación a latitudes tropicales y extratropicales, concluyendo que la liberación de calor latente de condensación en nubes corrige la fa-

se troposférica de la marea semidiaria, y mejora el acuerdo con las observaciones para la marea diaria.

Otra posible fuente troposférica de mareas es el calentamiento diario de la superficie terrestre y la capa límite atmosférica.

Si bien la contribución mayor del calentamiento diario en la capa límite atmosférica se espera para las mareas estacionarias con una escala horizontal del orden de la escala de los continentes, también se espera que exista una contribución de esta fuente a las mareas principales que se propagan con el sol.

Han habido varios estudios concernientes al calentamiento de la capa límite atmosférica como fuente de mareas. El modelo de Siebert (1961) predijo una contribución de esta fuente a los campos de mareas que es muy pequeña comparada con las observaciones. Mc Kenzie (1968) reanalizó el calentamiento de la superficie terrestre como fuente de mareas, introduciendo un modelo empírico de calentamiento por la capa límite atmosférica. Aunque cualitativamente el modelo no es correcto, sus resultados sugirieron que esta fuente puede contribuir a la marea diaria.

Han habido algunas sugerencias de que podrían excitarse mareas por otros mecanismos en la capa límite atmosférica. Esta región podría ser una fuente no lineal de ondas internas de gravedad. Orlandi (1973) sugirió que la fuerte variación diaria de la estabilidad estática en la capa límite atmosférica podría excitar paramétricamente ondas internas de gravedad ("inestabilidad trapecio"). Algunas de estas ondas tendrían períodos de alrededor de un día. Podría haber, entonces, una contribución a las mareas de ondas internas de gravedad excita-

das paramétricamente.

En esta tesis se reexamina la posibilidad de que la capa límite atmosférica sea una posible fuente para la marea diaria.

Uno de los aspectos estudiados es la posibilidad de excitación no lineal de ondas internas de gravedad en la capa límite atmosférica, y también en la mesosfera donde la marea es débilmente no lineal.

Una segunda parte de este trabajo consiste en reanalizar la contribución lineal a las mareas por el calentamiento diario en la capa límite.

CAPITULO II

MODELOS DE EXCITACION PARAMETRICA DE ONDAS INTERNAS DE GRAVEDAD

II.1. Introducción

En este capítulo se consideran algunos efectos no lineales que pueden contribuir a las mareas atmosféricas.

En la capa límite atmosférica, el parámetro de estabilidad estática muestra una pronunciada variación diaria, siendo inestable o neutralmente estable durante el día, y muy estable durante la noche. Esta fuerte variación periódica podría ser una fuente de ondas a través de procesos de interacción no lineal. Orlanski (1973) sugirió que en una capa límite atmosférica cuya frecuencia de Brunt-Väisälä tiene una variación diaria, ondas internas de gravedad de mesoescala podrían ser amplificadas. Él examinó la estabilidad de este flujo, con una condición de tapa rígida sobre la capa límite, y encontró que ondas internas de gravedad con períodos de 2 días, 1 día, 1/2 día, resultan inestables.

Fels (1974) estudió la estabilidad del mismo flujo en la capa límite, pero con una capa infinita no fluctuante de fluido sobre el fluido inferior. Con un argumento de plausibilidad, concluyó que el flujo es inestable sólo para ondas con longitudes de onda verticales menores que la profundidad de la capa activa.

Estos resultados indican que existe una posibilidad de que en la capa límite atmosférica diaria se produzca amplificación resonante de ondas internas de gravedad de escala global con longitudes de onda verticales cortas y períodos cerca de uno o dos días. En ese caso, las resonancias con períodos cerca de un día podrían corresponder a parte de las ondas internas de gravedad

diarias de gran amplitud y de escala vertical de alrededor de 5 km observadas en la troposfera.

En este capítulo se presenta un estudio de la modificación del mecanismo de "inestabilidad trapecio" de Orlandi apropiado para escala planetaria. Se tomó un flujo básico de una capa límite en que la estabilidad estática varía siguiendo al sol. Se impuso una condición de tapa rígida en la parte superior de la capa fluctuante.

En una aproximación de plano f , resultó que las ondas globales más inestables tienen períodos cerca de dos días y un día. Se calcularon las tasas de crecimiento y estructura espacial de las inestabilidades por medio de una expansión perturbativa en términos de un parámetro pequeño, ϵ , igual al cociente entre la parte fluctuante y el promedio de la frecuencia de Brunt Väisälä. Considerando la rotación terrestre, las tasas de crecimiento son más pequeñas que para el caso sin rotación.

En una aproximación de plano beta ecuatorial, la tasa de crecimiento de la inestabilidad de dos días es la mitad de la del caso sin rotación. Para la inestabilidad de un día, la tasa de crecimiento en el plano beta es aproximadamente un tercio de la del caso norotante.

Para valores realistas de ϵ , los tiempos de duplicación de las inestabilidades son de algunos días. Las escalas temporales de disipación son mayores que estos valores para longitudes de onda largas, pero del mismo orden de magnitud para longitudes de onda cortas. Consecuentemente, las inestabilidades son débiles, pero si persistieran al permitir propagación vertical relajando la condición de tapa rígida, podrían ser probablemente

observadas.

Se discuten las escalas temporales involucradas en determinar el crecimiento de las ondas con propagación vertical, para la capa límite atmosférica y la mesosfera (estas escalas temporales son: un tiempo de propagación a través de la capa activa, el tiempo de interacción no-lineal y la escala temporal de disipación).

En el capítulo III de esta tesis se muestra una solución numérica que indica que las resonancias tienen una amplitud muy pequeña en un caso realista con propagación vertical en toda la atmósfera.

II.2. Modelo con una tapa rígida sobre la capa activa.

En la capa límite atmosférica sobre los continentes hay una gran variación diaria de la temperatura potencial y de su gradiente vertical. A alturas mayores que 1000 metros sobre la superficie, el parámetro de estabilidad estática N^2 toma valores típicos de 10^{-4}s^{-2} . La capa límite atmosférica es muy estable durante la noche e inestable o neutralmente estable cerca del mediodía. Valores típicos de N^2 en los primeros 1000 m de la atmósfera sobre continentes son $5 \cdot 10^{-4} \text{s}^{-2}$ durante la noche y cero o menor que cero durante el día.

El mecanismo de "inestabilidad trapecio" de Orlandi (1973) describe la excitación paramétrica de ondas internas de gravedad en un estado básico en que el parámetro de estabilidad estática varía periódicamente con el tiempo. Orlandi examinó una solución analítica con una condición de tapa rígida sobre la capa límite fluctuante, y obtuvo soluciones numéricas en un modelo con una tapa rígida sobre la troposfera. Para la capa límite atmosférica con variación diaria, él obtuvo inestabilidades con períodos de dos días, un día, etc.

En esta sección se presenta una extensión del mecanismo de "inestabilidad trapecio" a ondas de escala global, en la aproximación de plano f y en el plano beta ecuatorial.

El modelo consiste en una capa de fluido (la capa límite atmosférica) donde la estratificación varía siguiendo al sol. Se impone una condición de tapa rígida sobre el fluido.

En la troposfera, las perturbaciones en la temperatura potencial son una pequeña fracción de una temperatura potencial de referencia, θ_0 . Para perturbaciones con períodos \mathcal{C} del orden de un día, es $\mathcal{C} \gg N^{-1}$, donde N^2 es el parámetro de estabilidad estática. Con estas condiciones es válido el sistema anelástico de ecuaciones (Ogura y Phillips, 1962).

II.2.a. Aproximación en el plano f.

Consideremos un estado básico sin movimiento, y estratificación que varía siguiendo al sol como $N^2 = N^2(y, k_0 x - \omega t)$. El sistema de ecuaciones es el sistema anelástico linealizado para aire seco en las aproximaciones de Boussinesq e hidrostática. Definiendo $\pi = (p/p_0)^{R/c_p}$, donde p_0 es una presión de referencia, R es la constante de los gases para aire y c_p el calor específico a presión constante por unidad de masa, la forma dimensional de las ecuaciones es

$$\begin{array}{ll}
 \text{a} & \partial_t u - fv = -c_p \theta_0 \partial_x \pi \\
 \text{b} & \partial_t v + fu = -c_p \theta_0 \partial_y \pi \\
 \text{II.1 c} & \partial_z \pi = \frac{g}{c_p \theta_0} \theta \\
 \text{d} & \partial_x (\rho_0 u) + \partial_y (\rho_0 v) + \partial_z (\rho_0 w) = 0 \\
 \text{e} & \theta_0 \partial_t \theta + w \bar{\theta}_z = 0
 \end{array}$$

donde f es un valor constante del parámetro de Coriolis, ρ_0 es la densidad de referencia, $\bar{\theta}$ la temperatura potencial del estado básico, y $\theta = \frac{T}{\theta_0 \tau}$ la perturbación nodimensional a la temperatura potencial.

De las ecuaciones de divergencia horizontal y de vorticidad vertical obtenidas de las ec. II.1 a y b, y usando II.1.c, resulta

$$\partial_{ztt}(\rho_0 w) + f^2 \partial_z(\rho_0 w) = C_p \theta_0 \rho_0 \nabla_H^2 \partial_t \pi$$

Eliminando π de las ec. II.1 c y e:

$$\left(\partial_z - \frac{\rho_{0z}}{\rho_0} \right) (\partial_{ztt} w' + f^2 \partial_z w') = -g \nabla_H^2 \frac{\bar{\theta}_z}{\bar{\theta}_0} w'$$

donde $w' = \rho_0 w$. Aquí se asumió que ρ_0 no depende de las coordenadas x e y .

Para números de onda vertical mucho mayores que $\rho_{0z}/\rho_0 \sim (30 \text{ km})^{-1}$, es:

$$\text{II.2} \quad \partial_{zzt} w' + f^2 \partial_{zz} w' + \nabla_H^2 (N^2 w') = 0$$

donde

$$N^2 = g \frac{\bar{\theta}_z}{\bar{\theta}_0}$$

Como en Orlanski (1973), asumimos que el parámetro de estabilidad estática es modificado periódicamente por un proceso externo (como convección de pequeña escala en la capa límite atmosférica).

En el presente modelo, se considera que la oscilación en la estabilidad estática determinada externamente es de escala planetaria. Esta puede ser descompuesta en términos diarios con diferentes números de onda longitudinales, cada uno de los cuales es de la forma

$$N^2 = N_0^2 + N_1^2 \cos(k_0 x - \omega_0 t)$$

donde t es el tiempo universal, ω_0 la frecuencia de la variación externa y k_0 un número de onda longitudinal general. Descomponiendo w' en modos verticales que satisfagan la condición de velocidad vertical nula en el fondo y en la tapa rígida,

$$w' = \tilde{w} \operatorname{sen} \gamma z$$

con $\gamma = n\pi/H$, la ecuación para \tilde{w} es

$$\text{II.3} \quad \partial_{tt} \tilde{w} + f^2 \tilde{w} - c^2 \nabla_H^2 \left(1 + \frac{N_1^2}{N_0^2} \cos(k_0 x - \omega_0 t) \right) \tilde{w} = 0$$

donde H es la profundidad de la capa activa, $c = \frac{N}{\eta}$ es la velocidad de fase de las ondas internas de gravedad en la aproximación hidrostática, y $\nabla_H^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$. Las soluciones deben tener periodicidad en x alrededor del planeta. Para $k_0 = 0$ esta ecuación se reduce al modelo de Orlandi de inestabilidad trapecio.

Para resolver la ec. II.3, es conveniente cambiar variables a un sistema de coordenadas que se mueva con el estado básico:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ \omega_0 t' &= k_0 x - \omega_0 t \end{aligned}$$

de modo que la ec. II.3 pasa a ser

$$(\partial_{t'}^2 + f^2) \tilde{w} - c^2 \left[(\partial_{x'} + \frac{\partial_{t'}}{c_0})^2 + \partial_{y'}^2 \right] \left(1 + \frac{N_1^2}{N_0^2} \cos \omega_0 t' \right) \tilde{w} = 0$$

Introduciendo

$$\tilde{w} = e^{i(k'x' + l'y')} \hat{w}(t')$$

la ecuación que resulta para \hat{w} es

$$\text{II.4} \quad (\partial_{t'}^2 + f^2) \hat{w} - c^2 \left[(ik' + \frac{\partial_{t'}}{c_0})^2 - l'^2 \right] \left(1 + \frac{N_1^2}{N_0^2} \cos \omega_0 t' \right) \hat{w} = 0$$

que es una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes periódicos. Por el teorema de Floquet (Morse y Feshbach, 1953), la solución a la ec. II.4 tiene la forma

$$II.5 \quad \hat{w} = e^{i\nu\omega_0 t'} F(t')$$

donde $F(t')$ es periódica con período $2\pi/\omega_0$, y ν es complejo. En general, las soluciones a ecuaciones con coeficientes periódicos tienen regiones de estabilidad e inestabilidad en el espacio de los parámetros. Como se describe en el trabajo de Orlanski para la ecuación de Mathieu, en este espacio hay ramas separadas de inestabilidad.

La condición de periodicidad en x implica

$$k \equiv k' + \nu k_0 = K k_0$$

con K entero. Volviendo a las variables x, t , la solución es

$$\tilde{w} = e^{ikx} e^{ily} e^{-i\nu\omega_0 t} F\left(\frac{x}{c_0} - t\right)$$

con $c_0 = \omega_0/k_0$; y expandiendo $F\left(\frac{x}{c_0} - t\right)$ en serie de Fourier como

$$F\left(\frac{x}{c_0} - t\right) = \sum_n a_n e^{in(k_0 x - \omega_0 t)}$$

la expansión para \tilde{w} es

$$II.6 \quad \tilde{w} = e^{ily} \sum_n a_n e^{i[(K+n)k_0 x - (\nu+n)\omega_0 t]}$$

Introduciendo esta expresión en la ec. II.3, resulta la siguiente relación de recurrencia a tres términos para los coeficientes

$$II.7 \quad \left\{ (\nu+n)^2 - f'^2 - h[(K+n)^2 + L^2] \right\} a_n - \frac{\epsilon}{2} h[(K+n)^2 + L^2] (a_{n+1} + a_{n-1}) = 0$$

donde $f' = f/\omega_0$, $h = c^2/c_0^2 = g h_{eq} / (\omega_0^2 a^2) = \frac{N^2}{\gamma^2 c_0^2}$ es el cociente entre las velocidades de fase de la onda y la perturbación, h_{eq} es la profundidad equivalente, a es el radio de la tierra,

$$L = \frac{\ell'}{R_0} \quad , \quad \text{y} \quad \epsilon = \frac{N_1^2}{N_0^2} \text{ (diurno)} .$$

En la capa límite, los valores típicos para ϵ son del orden de uno o menores. En ese caso, las soluciones inestables a la ec. II.4 pueden obtenerse mediante una expansión perturbativa para ϵ pequeño. En analogía con la ecuación de Mathieu, el estado básico apropiado para la perturbación es uno en los picos de las ramas de inestabilidad, de modo que este estado se vuelve inestable para $\epsilon > 0$.

Para $\epsilon = 0$, la ecuación II.4 tiene dos soluciones estables (modos normales). Para que la solución se haga inestable para $\epsilon > 0$, los dos modos libres y el coeficiente periódico deben satisfacer una condición de resonancia, de modo que multiplicando uno de los modos libres por el coeficiente periódico será posible obtener un forzado en fase con el otro modo, y esto haría que los dos modos crezcan con el tiempo.

Una condición necesaria para inestabilidad en primer orden de la amplitud de la variación externa es que los dos modos libres y la componente externa satisfagan la condición de resonancia para números de onda y frecuencias

$$\text{II.8} \quad \sum_{i=1}^3 k_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^3 \omega_i = 0$$

Para inestabilidades de orden n , los dos modos libres y n veces la variación externa deben satisfacer la condición de resonancia.

Aquí puede señalarse que el criterio de Hasselmann (1967) para inestabilidad de ondas establece que tríadas resonantes no lineales de ondas con una componente de amplitud finita son inestables cuando se satisface la condii

ción de resonancia y la componente de amplitud finita tiene el máximo valor absoluto de la frecuencia. Aunque este criterio es estrictamente aplicable solo a interacciones conservativas de ondas, también puede ser válido para sistemas como el presente acoplados a una fuente externa de energía.

Para obtener la solución perturbativa, se expanden las variables de las ec. II.6 y II.7 en potencias de ϵ :

$$\text{II.9} \quad \begin{aligned} v &= v^{(0)} + v^{(1)} + v^{(2)} + \dots \\ h &= h^{(0)} + h^{(1)} + h^{(2)} + \dots \\ a_n &= a_n^{(0)} + a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

con $v^{(i)}$, $h^{(i)}$, $a_n^{(i)}$ del orden de ϵ^i . Los números de onda K y L son fijados consistentemente con las condiciones de periodicidad. Tomamos como estado básico de orden cero a una combinación lineal de las dos ondas de gravedad que sean solución de la ec. II.4 con $\epsilon=0$, y que satisfagan la condición de resonancia con n veces la variación externa. Si en las ec. II.6 y II.7 las frecuencias y números de onda adimensionales de las ondas de gravedad son $\omega_i = v^{(0)} + n_i$ y $K + n_i$, es:

$$\text{II.10} \quad \begin{aligned} \omega_1^2 &= f'^2 + b_{n_1}^{(0)} \\ \omega_2^2 &= f'^2 + b_{n_2}^{(0)} \\ n &= n_2 - n_1 \end{aligned}$$

y

$$a_{n_i} \neq 0$$

solamente para $i=1,2$; donde $b_{n_i} = h [(K+n_i)^2 + L^2]$.

La expansión en primer orden de la ec. II.7 es

$$\begin{aligned}
 & \left[2(\nu^{(0)} + n) \nu^{(1)} - b_n^{(1)} \right] a_n^{(0)} + \left[(\nu^{(0)} + n)^2 - f'^2 - b_n^{(0)} \right] a_n^{(1)} \\
 \text{II.11} \quad & = \frac{\epsilon}{2} b_n^{(0)} (a_{n+1}^{(0)} + a_{n-1}^{(0)})
 \end{aligned}$$

El miembro derecho de esta ecuación representa la interacción de la oscilación n con la $n \pm 1$ a través del coeficiente $\frac{\epsilon}{2} b_n^{(0)} \delta_{mn \pm 1}$.

Para obtener las resonancias de primer orden, o en el lenguaje de Orlandi la primera rama de inestabilidad, se toma un estado básico que satisfaga la condición de resonancia con la variación externa, de modo que $n_2 = n_1 + 1$. Para $n = n_1, n_2$ el segundo término de la ec. II.11 se anula, y entonces debe satisfacerse

$$\text{II.12} \quad \text{Det} \left\{ \left[2(\nu^{(0)} + n) \nu^{(1)} - b_n^{(1)} \right] \delta_{nn'} - \frac{\epsilon}{2} \delta_{nn' \pm 1} b_n^{(0)} \right\} = 0$$

para n y n' iguales a n_1 y n_2 , donde

$$b_n^{(1)} = h^{(1)} \left[(K+n)^2 + L^2 \right] - \frac{h^{(1)}}{h^{(0)}} b_n^{(0)}$$

Esta condición es

$$\nu^{(1)2} - \frac{1}{2} \frac{h^{(1)}}{h^{(0)}} \left(\frac{b_n^{(0)}}{\omega_1} + \frac{b_{n+1}^{(0)}}{\omega_2} \right) \nu^{(1)} + \frac{1}{4} \frac{h^{(1)2}}{h^{(0)2}} \frac{b_n^{(0)}}{\omega_1} \frac{b_{n+1}^{(0)}}{\omega_2} - \frac{\epsilon^2}{16} \frac{b_n^{(0)} b_{n+1}^{(0)}}{\omega_1 \omega_2} = 0$$

y por la ec. II.10

$$\text{II.13} \quad \nu^{(1)} = \frac{1}{4} \left[\frac{h^{(1)}}{h^{(0)}} \left(\frac{\omega_1^2 - f'^2}{\omega_1} + \frac{\omega_2^2 - f'^2}{\omega_2} \right) \pm \sqrt{\epsilon^2 \frac{\omega_1^2 - f'^2}{\omega_1} \frac{\omega_2^2 - f'^2}{\omega_2} + \frac{h^{(1)2}}{h^{(0)2}} \left(\frac{\omega_1^2 - f'^2}{\omega_1} - \frac{\omega_2^2 - f'^2}{\omega_2} \right)^2} \right]$$

Dependiendo de los valores de ω_1 y ω_2 , pueden haber soluciones complejas para $\nu^{(1)}$.

Aquí no se pierde generalidad si se toma $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, ya que la ec. II.7 es invariante si se cambia $\nu \rightarrow \nu + m$, $K \rightarrow K + m$.

Usando II.10, la condición de resonancia en el estado básico implica

$$II.14 \quad \nu^{(0)} = -\frac{1}{2} + h^{(0)} \left(K + \frac{1}{2} \right)$$

y

$$II.15 \quad \frac{\left(K + \frac{1}{2} \right)^2}{\frac{\frac{1}{4}(1-h^{(0)}) - f'^2}{h^{(0)}(1-h^{(0)})}} + \frac{L^2}{\frac{\frac{1}{4}(1-h^{(0)}) - f'^2}{h^{(0)}}} = 1$$

y entonces

$$II.16 \quad \begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{1}{2} + h^{(0)} \left(K + \frac{1}{2} \right) \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} + h^{(0)} \left(K + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

que dependen de $f' = \frac{f}{\omega_0}$ y de $h^{(0)} = \frac{N^2 k_0^2}{\gamma^2 \omega_0^2}$.

En la atmósfera No toma valores típicos de $N_0 = .015^{-1}$. En la capa límite atmosférica, la profundidad de la capa activa es de 2 km; para número de onda vertical $T = \pi/D$ (radio terrestre = 6300 km), resulta $h = .0002$. Una extensión del presente mecanismo de inestabilidad paramétrica podría ser también operante en la mesosfera, donde la marea débilmente no lineal podría representarse aproximadamente por una oscilación externa de la forma de la discutida para la capa límite. En ese caso, $D = 15$ km y $h = .01$.

La corrección de primer orden a la frecuencia adimensional de la ec. II.13 es imaginaria para $h^{(0)} = 0$; la región de inestabilidad se extiende a

$$\frac{|h^{(1)}|}{h^{(0)}} < \in \frac{\sqrt{\frac{\omega_1^2 - f'^2}{|\omega_1|} \frac{\omega_2^2 - f'^2}{|\omega_2|}}}{\left| \frac{\omega_1^2 - f'^2}{\omega_1} - \frac{\omega_2^2 - f'^2}{\omega_2} \right|}$$

De las ec. II.14 y II.16, resulta $\nu_0 \approx -\frac{1}{2}$, $\omega_1 \approx -\frac{1}{2}$, $\omega_2 \approx \frac{1}{2}$, o sea que la solución inestable y las dos ondas que crecen en primer orden de \in tienen períodos cercanos a dos días. Para $h = .01$, los períodos de las ondas resonantes son 2.02 y 1.98 días.

Para $h \ll 1$, las ec. II.15 y II.10 pueden resolverse solamente si $f' \approx \omega_i \approx \frac{1}{2}$. Especificando $k=0$ en la ec. II.16, resulta $\omega_1 = -\frac{1}{2}(1-h^{(0)})$, $\omega_2 = \frac{1}{2}(1+h^{(0)})$. La corrección de primer orden a la frecuencia en la ec. II.13 se puede reescribir en la forma

$$\text{II.17} \quad \nu^{(1)} = \frac{1}{4} h^{(1)} \left(1 + \frac{4f'^2}{1-h^{(0)2}} \right) \pm \frac{1}{4} \sqrt{-\frac{\epsilon^2}{4} \frac{((1-h^{(0)})^2 - 4f'^2)((1+h^{(0)})^2 - 4f'^2)}{1-h^{(0)2}} + \frac{h^{(1)2}}{h^{(0)2} (1-h^{(0)2})^2}}$$

Para $h \ll 1$, es

$$\text{II.18} \quad \nu^{(1)} \approx \frac{1}{4} h^{(1)} (1+4f'^2) \pm \frac{1}{4} (1-4f'^2) \sqrt{-\frac{\epsilon^2}{4} + \frac{h^{(1)2}}{h^{(0)2}}}$$

en el primer orden de $h^{(0)}$, lo que implica que hay una corrección a la parte real de la frecuencia igual a $\frac{1}{4} h^{(1)} (1+4f'^2) \epsilon$. La región de inestabilidad es $|h^{(1)}| < \frac{\epsilon}{2} h^{(0)}$. Para ϵ fijo, la máxima tasa de crecimiento en el primer orden del desarrollo perturbativo se obtiene para $h^{(1)} = 0$:

$$\text{II.19} \quad \nu_{\text{im max}}^{(1)} = \frac{\epsilon}{8} (1-4f'^2)$$

La estructura de la inestabilidad a orden cero resulta de resolver la ec. II.11 (con el segundo término nulo), para $a_{n1}^{(0)}$, $a_{n2}^{(0)}$:

$$\tilde{w} = e^{i(\frac{1}{2} - \frac{h^{(0)}}{2})\omega_0 t} e^{\frac{\epsilon}{8}(1-4f'^2)\omega_0 t} e^{i\ell y} \left[1 - i \frac{(1-h^{(0)})(1-4f'^2)}{(1-h^{(0)})^2 - 4f'^2} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \right]$$

Como caso particular de los resultados anteriores se pueden obtener los del modelo de Orlandi de inestabilidad trapecio para la generación de ondas de mesoescala: si se hace N^2 independiente de x imponiendo $k_0 = 0$, la ec. II.3 es la ecuación de Mathieu. Conservando finitos los números de onda dimensionales k y l , el límite de inestabilidad trapecio es $h \rightarrow 0$, $L^2 \rightarrow \infty$ y $K \rightarrow \infty$ (o K finito para $k=0$), con $h(k^2 + L^2)$ finito. La relación de recurrencia para las amplitudes de Fourier es entonces

$$\left[(\nu+n)^2 - \omega^2 \right] a_n - \frac{\epsilon}{2} (\omega^2 - f'^2) (a_{n+1} + a_{n-1}) = 0$$

donde $\omega^2 = f'^2 + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ K, L \rightarrow \infty}} h (K^2 + L^2) = f'^2 + \frac{N^2}{g^2 \omega_0^2} (k^2 + l^2)$.

Tomando $\omega^2 \simeq \omega^{2(0)} + \omega^{2(1)}$ en correspondencia con $h \simeq h^{(0)} + h^{(1)}$, resulta

$$\frac{h^{(1)}}{h^{(0)}} \rightarrow \frac{\omega^{2(1)}}{\omega^{2(0)} - f'^2}$$

con $\omega^{2(0)} = \frac{1}{4}$. De la ecuación II.17 resulta que en el caso de inestabilidad trapecio la corrección de primer orden a la frecuencia en la primera rama de inestabilidad es

$$\nu^{(1)} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{-\frac{\epsilon^2}{4} (1 - 4f'^2)^2 + 4 \left[\omega^{2(1)} \right]^2 (1 - 4f'^2)}$$

Comparando estos resultados para inestabilidad trapecio con los del presente modelo, que contiene una propagación longitudinal de la fluctuación del estado básico apropiada a ondas de escala global, se concluye:

- Las tazas de crecimiento para la primera rama de inestabilidad no son afectadas, en primer orden del parámetro h , por la propagación longitudinal del estado básico.

- Cuando se incluye la propagación longitudinal del estado básico, las frecuencias de las dos ondas internas de gravedad resonantes tienen partes reales $\omega_1 = -\frac{1}{2}(1 - h^{(0)})$ y $\omega_2 = \frac{1}{2}(1 + h^{(0)})$ (y períodos de cerca de dos días); la diferencia entre los valores absolutos de las frecuencias es del orden de $h^{(0)}$. Correspondientemente, la parte real del parámetro ν varía proporcionalmente a $h^{(0)}$ sobre la primera rama de inestabilidad. La inestabilidad contiene dos ondas con distin-

tos números de onda longitudinales, como $K=0$ y $K=1$.

Los números de onda de las dos ondas resonantes, K, L y $K+1, L$, están situados sobre elipses en el plano de los números de onda (según ec. II.15). Estos números de onda deben ser enteros, y esta condición selecciona valores particulares de $h^{(0)}$ (o de profundidad de la capa activa). Para otros valores de $h^{(0)}$ hay un umbral de inestabilidad.

Las ec. II.13, II.17 y II.19 muestran que un efecto de la rotación es disminuir la tasa de crecimiento de la inestabilidad: el máximo valor de este parámetro es $\frac{\epsilon}{8} (1-4f'^2)$, que es máximo para $f'=0$ con un valor $\frac{\epsilon}{8}$.

El motivo físico para este hecho es que la inestabilidad es producida por el término $\omega \bar{\sigma}_2$ en la ec. II.1 e: la variación en la estabilidad estática produce movimientos verticales. Este mecanismo es más efectivo para mayores cocientes entre energía cinética vertical (o energía potencial) y energía cinética horizontal. La rotación induce movimientos horizontales no-divergentes, con menor cociente entre energía cinética vertical y horizontal, y este hecho hace que la tasa de crecimiento de la inestabilidad sea menor al aumentar la rotación.

Las ondas internas de gravedad con períodos de dos días están confinadas hacia el ecuador de 15° de latitud. El valor efectivo de la rotación para estas ondas debe ser el de una latitud intermedia en el canal con límites en 15° S y N. Las máximas tasas de crecimiento varían entre $\frac{\epsilon}{8}$ (para un plano f ecuatorial) y cero (para un plano f a 15° de latitud). En la próxima sección se discuten mejores valores de las tasas de crecimiento, obtenidas en un modelo en el plano β ecuatorial.

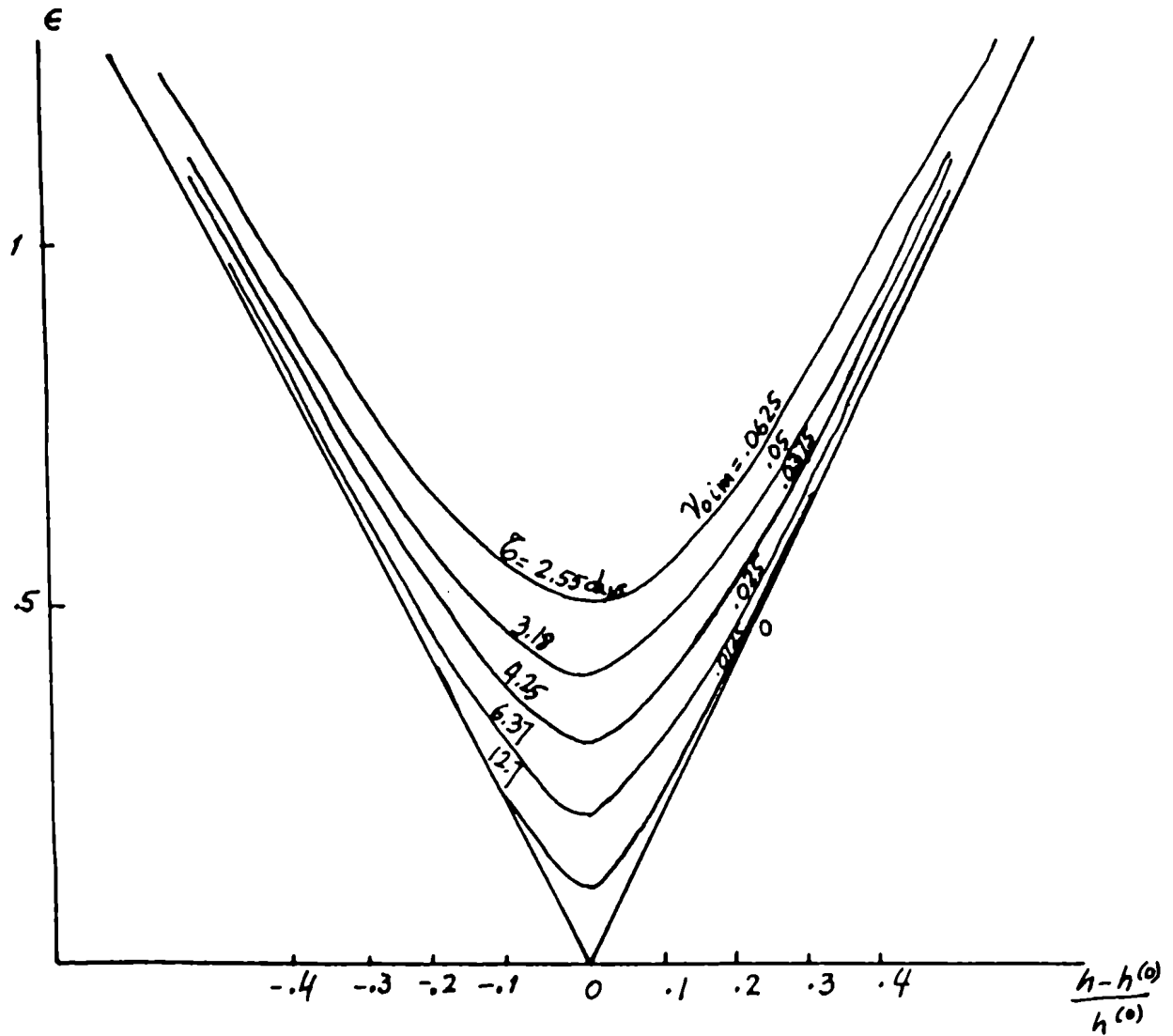
En la Fig. 1 se muestran curvas de tasa de crecimiento constantes en primer orden de ϵ , de la ec. II.18, para $f = 0$. También se muestran los tiempos de multiplicación por e, $\bar{\tau} = 1 \text{ día} / (\epsilon \nu_i)$. Para el caso sin rotación, estos tiempos son $\bar{\tau} = 12.7$ días para $\epsilon = .1$, $\bar{\tau} = 2.55$ días para $\epsilon = .5$ y $\bar{\tau} = 1.27$ días para $\epsilon = 1$.

Los resultados del cálculo perturbativo a primer orden fueron generalizados a orden mayor calculándolos del determinantes de Hill de los coeficientes en la ec. II.7. Se truncó el determinante a orden 30 y se lo resolvió numéricamente. En la Fig. 2 se muestran las tasas de crecimiento no lineales como función de ϵ para algunos casos particulares en la primera rama de inestabilidad. Las tasas de crecimiento crecen más lentamente que una función lineal de ϵ , y la diferencia con la dependencia lineal aumenta con ϵ . Los términos agregados en el determinante corresponden a oscilaciones forzadas producidas por una o varias transiciones sucesivas a partir de las ondas resonantes originales. La interacción a través del potencial de interacción entre estos modos forzados, y entre las ondas resonantes y estos modos, produce un forzado fuera de fase con las ondas resonantes. Esto hace que las tasas de crecimiento no lineales sean menores que las de un caso puramente resonante.

A continuación se discute una solución perturbativa para las inestabilidades de segundo orden de la ec. II.4.

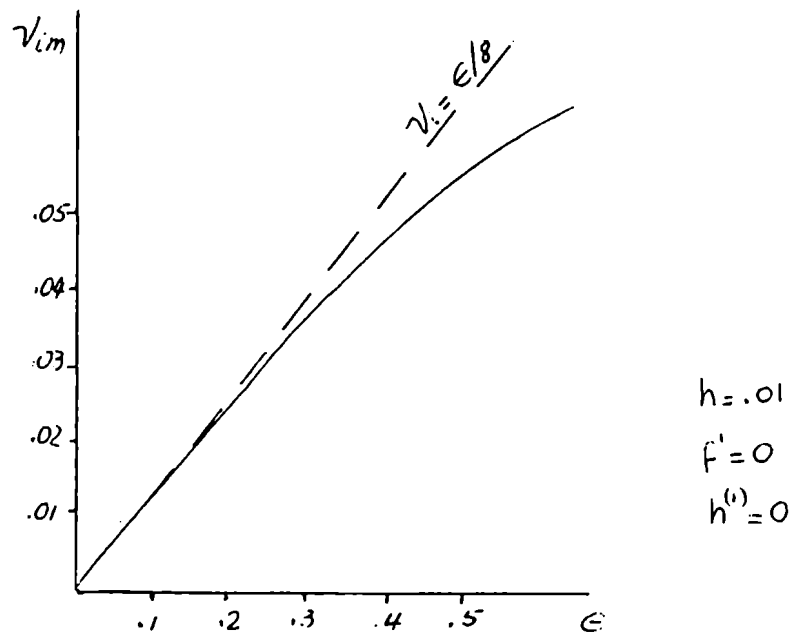
Para obtener estas inestabilidades, un estado básico apropiado en una solución perturbativa es uno que satisface la ec. II.10 con $n_2 = -n_1 = 2$, de modo que dos soluciones de la ec. II.4 con $\epsilon = 0$ satisfagan la condición de resonancia con dos veces la frecuencia y número de onda de la variación externa.

Fig. 1



Taza de crecimiento lineal para la primera rama de inestabilidad, para $f=0$.

Fig.2



Taza de crecimiento no lineal para puntos en la primera rama de inestabilidad ; $f=0$, $h=.01$.

La expansión a primer orden de la ec. II.11 con este estado básico da la solución trivial $2(\nu^{(0)}+n)\nu^{(1)} - b_n^{(1)} = 0$ para $n = n_1, n_2$, de modo que el estado es estable en primer orden de ϵ .

La corrección de primer orden a los coeficientes a_n para $n \neq n_1, n_2$ obtenido de la ec. II.11 es

$$II.20 \quad a_n^{(1)} = \frac{\epsilon}{2} b_n^{(0)} \frac{\sum_{m=n\pm 1} a_m^{(0)}}{(\nu^{(0)}+n)^2 - f'^2 - b_n^{(0)}}$$

Tomando $\nu^{(1)} = h^{(1)} = a_{n_1}^{(1)} = 0$, de la expansión de segundo orden de la ec. II.7 se obtiene:

$$II.21 \quad \begin{aligned} & \left[2(\nu^{(0)}+n)\nu^{(2)} - b_n^{(2)} \right] a_n^{(0)} + \left[(\nu^{(0)}+n)^2 - f'^2 - b_n^{(0)} \right] a_n^{(2)} \\ & = \frac{\epsilon}{2} b_n^{(0)} \sum_{m=n\pm 1} a_m^{(1)} + \frac{\epsilon}{2} b_n^{(1)} \sum_{m=n\pm 1} a_m^{(0)} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array}$$

Para $n = n_1, n_2$, los términos (a) y (b) se anulan: en el término (a) se anula el primer factor, y en el término (b) los coeficientes $a_{n\pm 1}$ son iguales a cero.

La ec. II.21 se resuelve anulando el determinante de 2×2 de los coeficientes $a_n^{(0)}$; usando II.20 esta condición es

$$II.22 \quad \begin{aligned} & Det (a_{nn'}) = 0 = \\ & = Det \left\{ \left[2(\nu^{(0)}+n)\nu^{(2)} - b_n^{(2)} \right] \delta_{nn'} - \frac{\epsilon^2}{4} \sum_{m,n'} \frac{b_n^{(1)} b_m^{(0)} \delta_{nm\pm 1} \delta_{mn'\pm 1}}{(\nu^{(0)}+m)^2 - f'^2 - b_m^{(0)}} \right\} \end{aligned}$$

donde $n' = n+2, n$. Los elementos a_{ij} de este determinante son

$$II.23 \quad \begin{aligned} a_{n_1 n_1} &= \nu^{(2)} - \frac{\omega_{n_1}^2 - f'^2}{2\omega_{n_1}} \frac{h^{(2)}}{h^{(0)}} - \frac{\epsilon^2}{4} \left[\frac{\omega_{n_1}^2 - f'^2}{2\omega_{n_1}} \right. \\ & \quad \left. \cdot \left[\frac{\omega_{n_1-1}^2 - f'^2}{(\nu+n_1-1)^2 - f'^2 - b_{n_1-1}^{(0)}} + \frac{\omega_{n_1+1}^2 - f'^2}{(\nu+n_1+1)^2 - f'^2 - b_{n_1+1}^{(0)}} \right] \right] \\ a_{n_1 n_2} &= - \frac{\epsilon^2}{8\omega_{n_1}} \frac{(\omega_{n_1}^2 - f'^2)(\omega_{n_1+1}^2 - f'^2)}{(\nu+n_1+1)^2 - f'^2 - b_{n_1+1}^{(0)}} \end{aligned}$$

$$a_{n_2 n_1} = - \frac{\epsilon^2}{8\omega_{n_2}} \frac{(\omega_{n_2}^2 - f'^2)(\omega_{n_1+1}^2 - f'^2)}{(\nu + n_1 + 1)^2 - f'^2 - b_{n_1+1}^{(0)}}$$

$$a_{n_2 n_2} = \nu^{(2)} - \frac{\omega_{n_2}^2 - f'^2}{2\omega_{n_2}} \frac{h^{(2)}}{h^{(0)}} - \frac{\epsilon^2}{4} \frac{\omega_{n_2}^2 - f'^2}{2\omega_{n_2}}$$

$$\cdot \left[\frac{\omega_{n_2-1}^2 - f'^2}{(\nu + n_2 - 1)^2 - f'^2 - b_{n_2-1}^{(0)}} + \frac{\omega_{n_2+1}^2 - f'^2}{(\nu + n_2 + 1)^2 - f'^2 - b_{n_2+1}^{(0)}} \right]$$

donde $\omega_n^2 = f'^2 + h[(K+n)^2 + L^2]$.

Como se discute después de la ec. II.13, sin pérdida de generalidad se puede tomar $n_1 = -1$, $n_2 = 1$. Tomando $K=0$, la resonancia de segundo orden contiene números de onda longitudinales predominantes -1 y $+1$.

De la ec. II.10 se obtiene, que, para resonancia, es

$$\nu^{(0)} = h^{(0)} K$$

y

$$\frac{K^2}{\frac{1-h^{(0)}-f'^2}{h^{(0)}(1-h^{(0)})}} + \frac{L^2}{\frac{1-h^{(0)}-f'^2}{h^{(0)}}} = 1$$

Para $K=0$ resulta $\nu^{(0)}=0$, y $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 1$: las frecuencias de las ondas resonantes en segundo orden son exactamente igual a la frecuencia de la variación externa. En ese caso es también $L^2 = (1-h^{(0)}-f'^2)/h^{(0)}$.

Para $h \ll 1$ hay soluciones solamente si $f' \approx 1$.

La condición II.22 es:

$$\text{II.24} \quad \begin{vmatrix} v^{(2)} + A h^{(2)} + \frac{\epsilon^2}{8} B & \frac{\epsilon^2}{8} C \\ -\frac{\epsilon^2}{8} C & v^{(2)} - A h^{(2)} - \frac{\epsilon^2}{8} B \end{vmatrix} = 0$$

donde

$$A = \frac{1-f^{12}}{2h^{(0)}}$$

$$B = (1-f^{12}) \left[\frac{h^{(0)}(4+L^2)}{4-f^{12}h^{(0)}(4+L^2)} - \frac{h^{(0)}L^2}{f^{12}+h^{(0)}L^2} \right]$$

$$C = - \frac{(1-f^{12})h^{(0)}L^2}{f^{12}+h^{(0)}L^2}$$

de donde resulta

$$\text{II.25} \quad v^{(2)} = \sqrt{\left(A h^{(2)} + \frac{\epsilon^2}{8} B\right)^2 - \frac{\epsilon^4}{64} C^2}$$

Expresando L^2 en términos de h ($f^{12} + hL^2 = 1-h$, $4-f^{12}h(4+L^2) = 3(1-h)$), resulta

$$\text{II.26} \quad v^{(2)} = \sqrt{\left(\frac{1-f^{12}}{2h^{(0)}} h^{(2)} + \frac{\epsilon^2}{12} \frac{(1-f^{12})}{1-h^{(0)}} (3h^{(0)} - 1 + f^{12})\right)^2 - \frac{\epsilon^4}{64} (1-f^{12})^2 \left(\frac{1-f^{12}-h^{(0)}}{1-h^{(0)}}\right)^2}$$

La máxima tasa de crecimiento se obtiene para

$$h^{(2)} = \frac{1}{6} \frac{h^{(0)}}{1-h^{(0)}} (1-3h^{(0)}-f'^2) \cdot \epsilon^2$$

Esta es:

$$\text{II.27} \quad \text{Im } \nu_{\max}^{(2)} = \frac{\epsilon^2}{8} (1-f'^2) \frac{1-f'^2-h^{(0)}}{1-h^{(0)}}$$

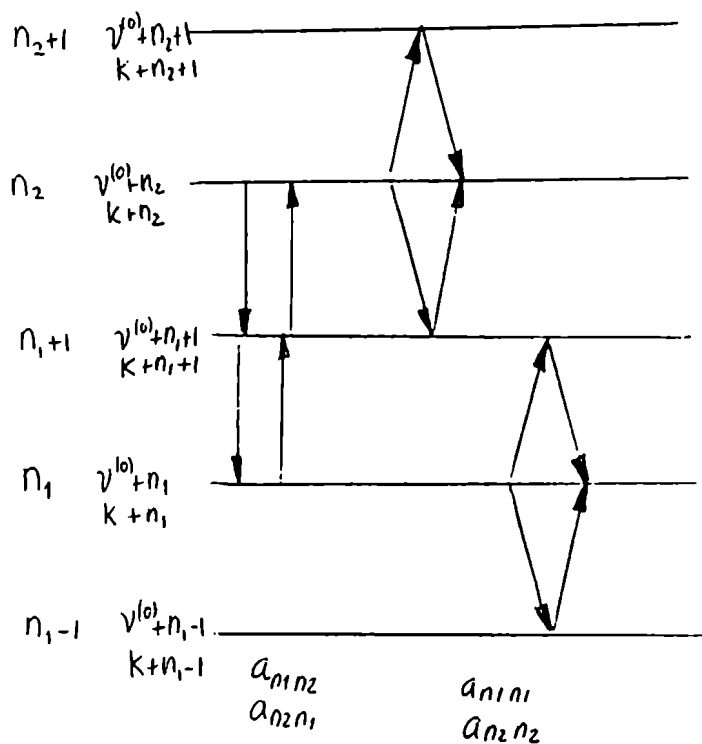
No hay corrección a la parte real de la frecuencia, o sea, para $K=0$, el modo más inestable tiene período de un día, a segundo orden.

En las ec. II.24 y II.25, los términos que producen la inestabilidad son los elementos del determinante $a_{n_1 n_2}$ y $a_{n_2 n_1}$, mientras que términos proporcionales a $h^{(2)}$ y ϵ^2 en $a_{n_1 n_1}$ y $a_{n_2 n_2}$ contribuyen a disminuir la tasa de crecimiento. El último término en la ec. II.22 puede ser interpretado como conteniendo una transición de segundo orden compuesta de dos sucesivas de primer orden, cada una de ellas con un coeficiente de interacción $\frac{\epsilon}{2} b_n^{(0)} \delta_{n, m \pm 1}$.

Esta situación está representada esquemáticamente en la Fig. 3. Los términos $a_{n_1 n_2}$ y $a_{n_2 n_1}$ contienen dos interacciones sucesivas: desde una de las ondas libres resonantes a un estado con frecuencia y número de onda intermedios entre los de los modos libres, y de ese estado intermedio a la otra onda resonante. Para un valor particular de la fase relativa entre estos modos, esta transición produce la inestabilidad: esto ocurre cuando el forzado producido por esta transición doble está en fase con la onda que es forzada. Los términos $a_{n_1 n_1}$ y $a_{n_2 n_2}$, siendo transiciones de una onda a un estado intermedio, y de allí a la onda original, producen un forzado generalmente fuera de fase con la onda original. Estos términos contribuyen a disminuir la tasa de crecimiento.

Los resultados del presente modelo en que la fluc

Fig. 3



Esquema para interacciones de segundo orden

tuación del estado básico se propaga alrededor del planeta ($h \neq 0$) pueden ser comparados con los del modelo de inestabilidad trapecio de Orlanski, en que la fluctuación es estacionaria, y $h=0$. En la ec. II.27, con $h^{(0)} = 0$, se obtiene la tasa de crecimiento máxima para la segunda rama de inestabilidad en el caso de inestabilidad trapecio: $\nu^{(2)} = \frac{i\epsilon^2}{\beta} (1-f'^2)^2$. Si $f' \neq 0$, la tasa de crecimiento disminuye al aumentar h : las inestabilidades de segundo orden son más débiles para un caso en que la fluctuación del estado básico se propaga alrededor del planeta que para un caso en que esta fluctuación es estacionaria.

La estructura de la inestabilidad obtenida de la ec. II.21 para el caso particular con $k=0$ es:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} = & e^{\frac{\epsilon^2}{\beta} (1-f'^2) \left(\frac{1-f'^2-h^{(0)}}{1-h^{(0)}} \right) \omega t} e^{i\ell y} \\ & \cdot \left\{ \left[e^{-i(k_0 x - \omega t)} + i e^{i(k_0 x - \omega t)} \right] + \right. \\ & + \epsilon \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1+3h-f'^2}{3-3h} \right) \left(e^{-2i(k_0 x - \omega t)} + i e^{2i(k_0 x - \omega t)} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{1-h-f'^2}{-1+h} (1+i) \right] \right\} \end{aligned}$$

Esta expresión muestra que las componentes principales de la solución perturbativa son ondas inestables con período igual a un día y números de onda longitudinales -1 y +1; los números de onda 0, +2 y -2 aparecen con amplitudes del orden de ϵ

Los tiempos de multiplicación por e son $\zeta = 1.27$ días para $\epsilon = 1$, $\zeta = 5$ días para $\epsilon = .5$ y $\zeta = 127$ días para $\epsilon = .1$. Como fue discutido por Orlanski, para $\epsilon < 1$, las tasas de crecimiento para la segunda rama de inestabilidad son más pequeñas que las de la primera rama inestable.

Resumiendo esta sección, se realizó un análisis de estabilidad en un plano f para un flujo consistente en una capa límite en la que la frecuencia de Brunt-Väisälä tiene una variación diaria que se propaga alrededor del planeta. Se impuso una condición de tapa rígida sobre esta capa.

Se encontró que para $\epsilon < 1$ (ϵ siendo igual al cociente entre la parte fluctuante y el promedio de la frecuencia de Brunt-Väisälä) las ondas más inestables tienen períodos de cerca de dos días, y tasas de crecimiento aproximadamente proporcionales a ϵ , con tiempos de multiplicación por e entre 3 y 1 días para ϵ entre .5 y 1, si para estos parámetros no se tiene en cuenta la rotación del planeta.

Las inestabilidades más fuertes de las restantes tienen períodos de cerca de un día y tasas de crecimiento del orden de ϵ^2 . Para ϵ pequeño, algunas de las soluciones de segundo orden más inestables tienen números de onda longitudinales ± 1 , y períodos exactamente iguales a 1 día. Los tiempos de multiplicación por e para el caso sin rotación resultan entre 5 y 1 días para ϵ entre .5 y 1.

Incluyendo la rotación planetaria, las tasas de crecimiento disminuyen, en un factor que debe depender del valor efectivo de la rotación visto por la inestabilidad. Esta rotación efectiva debe depender de la "latitud de retorno" de los modos de mayor amplitud y entonces de los períodos predominantes.

Se pueden obtener mejores estimaciones de las tasas de crecimiento en geometría esférica o en un plano beta ecuatorial.

II. 2b Modelo en la esfera o en el plano beta ecuatorial

Se estudió en el plano beta ecuatorial el modelo anterior, consistente en una capa límite donde la estabilidad estática tiene una variación diaria siguiendo al sol, con una tapa rígida sobre esta capa límite.

De acuerdo al análisis de la sección anterior, podrían haber soluciones inestables.

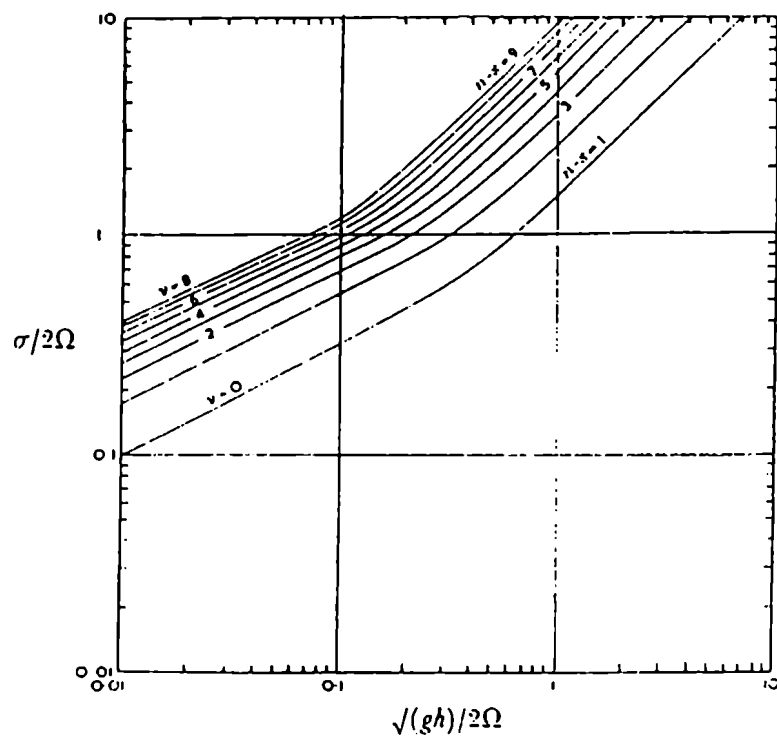
Para inestabilidades de primer orden, el estado básico debería consistir de dos ondas que satisfagan la condición de resonancia con la variación externa; esto implicaría períodos cerca de dos días, números de onda zonales S y $S + 1$, y longitudes de onda verticales tales que se pueda satisfacer la condición de tapa rígida.

En la Fig. 4 se muestra la relación de dispersión obtenida numéricamente por Longuet Higgins para ondas de gravedad en la esfera. En la tabla 1 se muestran longitudes de onda verticales para los modos más graves con simetría zonal y con períodos de dos días, para una atmósfera con temperatura constante y para un gradiente adiabático húmedo de temperatura.

Con esos modos zonalmente simétricos pueden estar en resonancia de primer orden ondas con números de onda zonales con $S = 1$, cuyas frecuencias tienen solo pequeñas diferencias relativas con las de los modos con $S = 0$.

Entonces, estos dos modos pueden estar en resonancia para períodos muy próximos a dos días. En una atmósfera con gradiente vertical de temperatura adiabático húmedo, se podrían excitar los segundos modos simétricos con una capa límite con una tapa rígida aproximadamente a

Fig. 4



De Longuet Higgins(1968). Autofrecuencias de modos de oscilación libres con número de onda zonal cero.

TABLA I

Ondas inercio-gravitatorias con período 2 días y número de onda longitudinal $s=0$ en la esfera.

n-s	1	2	3	4
simetría latitudinal	-	+	-	+
$\frac{1}{\epsilon'}$.06	.02	.0115	.0085
h(km)	.3	.034	.01	.008
(1) λ (km)	18	6	3	2.8
(2) λ (km)	30	9.8	5.3	4.8

(1): atmósfera isotérmica con temperatura 260° K.

(2): atmósfera con gradiente adiabático húmedo: $T=280^{\circ}\text{K}-6^{\circ}\text{km}^{-1}.z$

$$\sqrt{\epsilon'} = \frac{2\omega_0 a}{\sqrt{gh}} \quad ; \quad \lambda = 2\pi h \left(\frac{\kappa H}{h} + \frac{H}{h} \frac{dH}{dz} - \frac{1}{4} \right)^{-1/2}$$

$H = \frac{RT_0}{g}$, ω_0 frecuencia de rotación terrestre, a radio terrestre=6300 km., h profundidad equivalente, R constante de los gases= $2.87 \cdot 10^6 \frac{\text{erg}}{\text{g}^{\circ}\text{K}}$, $\kappa = \frac{2}{7}$, z altura, λ longitud de onda vertical. La simetría es en la variable presión.

2.4 km de altura.

Las resonancias de segundo orden presentarían períodos muy cercanos a un día.

El sistema de ecuaciones anelástico linealizado en las aproximaciones de Boussinesq e hidrostática, y en geometría esférica, es

$$\begin{array}{ll}
 \text{II.28} & \begin{array}{l}
 \text{a} \quad \partial_t u - 2\omega_0 v \sin \varphi = - \frac{c_p \theta_0}{a \cos \varphi} \partial_\lambda \pi \\
 \text{b} \quad \partial_t v + 2\omega_0 u \sin \varphi = - \frac{c_p \theta_0}{a} \partial_\varphi \pi \\
 \text{c} \quad \partial_z \pi = \frac{g}{c_p \theta_0} \theta \\
 \text{d} \quad \frac{1}{a \cos \varphi} [\rho_0 \partial_\lambda u + \rho_0 \partial_\varphi (r \cos \varphi)] + \partial_z (\rho_0 w) = 0 \\
 \text{e} \quad \theta_0 \partial_t \theta + w \bar{\theta}_z = 0
 \end{array}
 \end{array}$$

donde φ es latitud, λ longitud, $\omega_0 = 2\pi / 1 \text{ día}$ la frecuencia de rotación terrestre, a el radio de la tierra, y N^2 la frecuencia de Brunt-Väisälä que se supone separable en la coordenada vertical:

$$N^2 = N_0^2(z) (1 + \epsilon N_1(\varphi, \lambda - \omega_0 t))$$

Con el cambio de variables

$$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\pi}, \tilde{\theta} = \rho_0(z) (u, v, w, \delta \pi, \theta)$$

donde $\delta = \frac{c_p \theta_0}{a}$, el sistema II.28 puede ser expresado como

$$\begin{array}{ll}
 \text{II.29} & \begin{array}{l}
 \text{a} \quad \partial_t \tilde{u} - 2\omega_0 \sin \varphi \tilde{v} = - \frac{\partial_z \tilde{\pi}}{\cos \varphi} \\
 \text{b} \quad \partial_t \tilde{v} + 2\omega_0 \sin \varphi \tilde{u} = - \partial_\varphi \tilde{\pi} \\
 \text{c} \quad \rho_0 \partial_z \left(\frac{\tilde{\pi}}{\rho_0} \right) = \frac{g}{c_p \theta_0} \delta \tilde{\theta} \\
 \text{d} \quad \partial_t \tilde{\theta} + \frac{\tilde{w}}{a} \frac{\bar{\theta}_z}{\theta_0} = 0 \\
 \text{e} \quad \frac{1}{\cos \varphi} [\partial_\lambda \tilde{u} + \partial_\varphi (\tilde{v} \cos \varphi)] + \partial_z \tilde{w} = 0
 \end{array}
 \end{array}$$

donde $\bar{\theta}_z = \bar{\theta}_{0z} (1 + \epsilon N_1(\lambda - \omega_0 t), \varphi)$, y N_1 está

normalizado a 1 en el ecuador, siendo $N_1=0$ en los polos.

Introduciendo las variables $\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{P}, \tilde{R}$, tal que

$$\begin{aligned} \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\pi} &= (\partial_z Z(z)) (\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{P}) \\ \text{II.30} \quad \tilde{\omega} &= Z(z) \tilde{R} \\ \tilde{\Theta} &= -\frac{\lambda'}{\alpha} Z(z) \frac{\bar{\Theta}_{0z}(z)}{\Theta_0} \tilde{P} \end{aligned}$$

se puede separar la dependencia vertical.

De la ec.II.29 c se obtiene una ecuación de estructura vertical:

$$\text{II.31} \quad \rho_0 \partial_z \left(\frac{1}{\rho_0} \partial_z Z \right) = -g \frac{\bar{\Theta}_{0z}}{\Theta_0} \frac{\lambda'}{\alpha^2} Z = -\frac{N^2 \lambda'}{\alpha^2} Z$$

Las condiciones de contorno de fondo y superficie rígidos son :

$$Z(z) = 0 \quad \text{en} \quad z=0, \quad z=H$$

Con el cambio de variables II.30, la ec.II.29 e es

$$\tilde{R} = -\frac{1}{\cos \varphi} \left[\partial_z \tilde{U} + \partial_\varphi (\tilde{V} \cos \varphi) \right]$$

y entonces el sistema II.29 puede ser expresado como

$$\begin{aligned} \text{II.32} \quad \partial_t \tilde{U} - 2\omega_0 \sin \varphi \tilde{V} &= -\partial_z \tilde{P} / \cos \varphi \\ \partial_t \tilde{V} + 2\omega_0 \sin \varphi \tilde{U} &= -\partial_\varphi \tilde{P} \\ \lambda' \partial_t \tilde{P} + \frac{1}{\cos \varphi} (\partial_z \tilde{U} + \partial_\varphi (\tilde{V} \cos \varphi)) \cdot (1 + \epsilon N_1(\varphi, \lambda - \omega_0 t)) &= 0 \end{aligned}$$

La constante de separación $\frac{1}{\lambda'}$, es el cuadrado de la velocidad de fase de las ondas de gravedad tomando distancias en unidades de radio terrestre: $\frac{1}{\lambda'} = \frac{c^2}{\alpha^2}$.

Para números de onda verticales mucho mayores que

$\frac{\rho_{0z}}{\rho_0} \approx (30 \text{ km})^{-1}$ de la ec.II.31 resulta $c^2 = N^2 / \gamma^2$ como para ondas de gravedad en un fluido incompresible.

Introduciendo el cambio de variables

$$\text{II.33} \quad \begin{aligned} t' &= \omega_0 t \\ \eta &= \lambda - \omega_0 t \end{aligned}$$

con lo cual

$$\text{II.34} \quad \begin{aligned} \partial_t &= \omega_0 (\partial_{t'} - \partial_\eta) \\ \partial_\lambda &= \partial_\eta \end{aligned}$$

las ecuaciones II.32 pueden ser expresadas como un sistema con coeficientes constantes en t' .

Para una componente de Fourier de la forma

$$(\tilde{U}, \tilde{V}, \frac{\tilde{P}}{\omega_0}) = e^{-i\sigma t'} (U(\eta, \varphi), V(\eta, \varphi), P(\eta, \varphi))$$

se obtiene un problema lineal de autovalores para σ :

$$\text{II.35} \quad \begin{aligned} (-i\sigma - \partial_\eta) U - 2 \operatorname{sen} \varphi V &= -\frac{1}{\omega_0 \operatorname{sen} \varphi} \partial_\eta P \\ (-i\sigma - \partial_\eta) V + 2 \operatorname{sen} \varphi U &= -\partial_\varphi P \\ \tilde{\lambda} (-i\sigma - \partial_\eta) P + \frac{1}{\omega_0 \operatorname{sen} \varphi} (\partial_\eta U + \partial_\varphi (V \cos \varphi)) &= 0 \end{aligned}$$

con $\tilde{\lambda} = \omega_0^2 \lambda' = \frac{\omega_0^2 a^2}{c^2} = \omega_0^2 a^2 / (gh')$, donde h' es por definición la profundidad equivalente.

Se encontró conveniente trabajar con las ecuaciones de movimiento en la forma de un sistema del tipo de la ec. II.35 en vez de reducirlas a una única ecuación diferencial en derivadas parciales; de esa manera se evita un álgebra complicada y se puede encontrar rápidamente una solución perturbativa.

Tomando $N_i(\varphi, \eta) = f(\varphi) \cos \eta$, y multiplicando el sistema anterior por $i = \sqrt{-1}$, se obtiene un sistema de la forma

$$\text{II.36} \quad L X = -i \epsilon B X$$

donde

$$\text{II.37} \quad L = \begin{pmatrix} \sigma - i\partial\eta & -2i\text{sen}\varphi & \frac{i}{\cos\varphi} \partial\eta \\ 2i\text{sen}\varphi & \sigma - i\partial\eta & i\partial\varphi \\ \frac{i}{\cos\varphi} \partial\eta & \frac{i}{\cos\varphi} \partial\varphi(\cos\varphi) & \tilde{\lambda}(\sigma - i\partial\eta) \end{pmatrix}$$

$$\text{II.38} \quad B = f(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos\eta \partial\eta & \frac{\cos\eta}{\cos\varphi} \partial\varphi \cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\text{II.39} \quad X = \begin{pmatrix} U \\ V \\ P \end{pmatrix}$$

Aquí L es el operador de evolución temporal para la ecuación de mareas de Laplace, B es el operador de la perturbación que corresponde a la parte de \mathcal{N}^2 dependiente del tiempo, y X es el vector de estado.

Con $\tilde{\lambda}$ fijo, la ec. II.36 es un problema de autovalores para σ :

$$\text{II.40} \quad (L + i\epsilon B)X = (\sigma D - i\partial\eta D + L' + i\epsilon B)X = 0$$

con la matriz de métrica

$$\text{II.41} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda} \end{pmatrix}$$

En la ec.II.40 L' es la parte no diagonal de L .

Las soluciones deben ser periódicas en la longitud, y entonces en η .

Se puede resolver la ec.II.36 expandiendo la solución en el conjunto completo de funciones compuesto por las autofunciones de un operador hermítico. Un operador hermítico se define por la condición

$$\text{II.42} \quad \int g(\eta, \varphi) d\eta d\varphi \tilde{X}_n \circ X_m = \int g(\eta, \varphi) d\eta d\varphi (\tilde{X}_m \circ X_n)^*$$

donde \tilde{X} es el traspuesto de X y g es la métrica. Es conveniente tomar como base las autofunciones del operador sin perturbar, L .

Se puede verificar fácilmente que L es hermítico, ya que el miembro izquierdo de la ec.II.42 es

$$\int g(\eta, \varphi) d\eta d\varphi \left\{ U_n^* \left[(\sigma - i\partial\eta) U_m - 2i \operatorname{sen}\varphi V_m + \frac{i}{\cos\varphi} \partial\eta P_m \right] + V_n^* \left[2i \operatorname{sen}\varphi U_m + (\sigma - i\partial\eta) V_m + i\partial\varphi P_m \right] + P_n^* \left[\frac{i}{\cos\varphi} \partial\eta U_m + \frac{i}{\cos\varphi} \partial\varphi (\cos\varphi V_m) + \tilde{\sigma} (\sigma - i\partial\eta) P_m \right] \right\}$$

Los términos en $i\partial\eta$ y $i(U_n^* U_m + V_n^* V_m)$ son hermíticos, y $(V_n^* i\partial\varphi P_m + P_n^* \frac{i}{\cos\varphi} \partial\varphi \cos\varphi V_m)$ es hermítico para $g = \cos\varphi$ como puede verificarse integrando por partes.

Es conveniente tomar como base al conjunto de las autofunciones de la ecuación de mareas de Laplace, X_j , que corresponden al operador sin perturbar L de la ec.II.36. Si X_j es proporcional a $e^{i\eta^s}$, es

$$L X_j = (\tilde{\sigma} D + L') X_j = 0$$

donde $\tilde{\sigma} = \sigma + s$, que de acuerdo al cambio de variables de la ec. II.34 es la frecuencia del modo en unidades de ω_0

$$X = \sum_j a_j X_j$$

la expansión perturbativa es

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \tilde{\lambda}^{(0)} + \tilde{\lambda}^{(1)} + \dots \\ \text{II.45} \quad \sigma &= \sigma^{(0)} + \sigma^{(1)} + \dots \\ a_j &= a_j^{(0)} + a_j^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

con $\tilde{\lambda}^{(i)}$, $\sigma^{(i)}$, $a_j^{(i)}$ del orden de ϵ^i

El estado básico adecuado para obtener las soluciones inestables de la ec.II.36 es el que consiste de dos modos libres de la ecuación no perturbada, que satisfacen la condición de resonancia en frecuencia y número de onda con n veces la variación externa.

Entonces, el estado básico contiene dos soluciones degeneradas de la ec.II.40 para $\epsilon = 0$, con autovalor $\sigma^{(0)}$. Los dos modos tienen frecuencias $\tilde{\sigma}_1 = \sigma^{(0)} + S_1$, $\tilde{\sigma}_2 = \sigma^{(0)} + S_2$, en unidades de ω_0 y números de onda longitudinales S_1 y S_2 ; la condición de resonancia se satisface con una oscilación con frecuencia y número de onda igual a $(S_2 - S_1)$. De modo que es:

$$X^{(0)} = \sum_{i=1}^2 a_i^{(0)} X_i$$

Para inestabilidad de primer orden, $S_2 - S_1 = 1$. La expansión de primer orden de la ec.II.40 es

$$\begin{aligned} \text{II.46} \quad & [\sigma^{(1)} D + (\sigma^{(0)} - i\partial\eta) \tilde{\lambda}^{(1)} D_1] X^{(1)} + \\ & + [(\sigma^{(0)} - i\partial\eta) D + L'] X^{(1)} = -i\epsilon B X^{(0)} \end{aligned}$$

donde

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando el producto escalar de la ec. II.46 con $X_{i'}$, $i' = 1, 2$, el segundo término se anula, ya que siendo $L = (\sigma - i\partial\eta)D + L'$ hermitico, es $(X_{i'}, L X^{(0)}) = (X^{(0)}, L X_{i'})^* = 0$. Entonces

$$\text{II.47} \quad \sum a_i^{(0)} \left\{ [\sigma^{(0)} + (\sigma^{(0)} + s_i) \tilde{\lambda}^{(0)}(X_{i'}, D, X_i)] \delta_{i'i} + i(X_{i'}, \epsilon B X_i) \right\} = 0$$

Si $P_i = (X_i, D, X_i)$, el determinante de los coeficientes de $a_1^{(0)}$ y $a_2^{(0)}$ es

$$\text{II.48} \quad \begin{vmatrix} \sigma^{(0)} + (\sigma^{(0)} + s_1) \tilde{\lambda}^{(0)} P_1 & (X_1, i \in B X_2) \\ (X_2, i \in B X_1) & \sigma^{(0)} + (\sigma^{(0)} + s_2) \tilde{\lambda}^{(0)} P_2 \end{vmatrix} = 0$$

y la solución es

$$\text{II.49} \quad \sigma^{(0)} = -\frac{1}{2} [\tilde{\sigma}_{s_1} P_{s_1} + \tilde{\sigma}_{s_2} P_{s_2}] \tilde{\lambda}^{(0)} \pm \sqrt{(\tilde{\sigma}_{s_1} P_{s_1} - \tilde{\sigma}_{s_2} P_{s_2})^2 \frac{\tilde{\lambda}^{(0)2}}{4} + (X_1, \epsilon B X_2)(X_1, \epsilon B^+ X_2)^*}$$

donde B^+ es el conjugado hermitiano de B .

El último termino de la raíz cuadrada

$$(X_1, \epsilon B X_2)(X_1, \epsilon B^+ X_2)^* = (X_1, i \in B X_2)(X_1, (i \in B)^+ X_2)^*$$

puede ser negativo si la perturbación externa $i \in B$ es no hermitica, y en ese caso pueden haber soluciones inestables. Además para que haya inestabilidades, B tiene que tener elementos de matriz no nulos entre los dos estados básicos degenerados, y esto es una condición de resonancia en frecuencia y número de onda longitudinal entre los dos estados básicos y la variación externa.

El parámetro $\lambda^{(0)}$ indica la diferencia de la velocidad de fase, o de la longitud de onda vertical, con estos parámetros en resonancia. Al producirse una diferencia del parámetro λ respecto del de resonancia, disminuye la tasa de crecimiento y cambia la parte real de la frecuencia.

Yendo al caso específico en que la perturbación externa es la parte dependiente del tiempo de la frecuen-

cia de Brunt Väisälä, los elementos de matriz de la perturbación que aparecen en II.49 son:

$$(X_{i'}, i \in B X_i) = \frac{\epsilon}{2} \int \cos \varphi d\varphi d\eta (U V \rho)_i (e^{i\eta} + e^{-i\eta}) f(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{i}{\cos \varphi} \partial_\eta & \frac{i}{\cos \varphi} \partial_\varphi (\cos \varphi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ \rho_i \end{pmatrix}$$

y siendo $\begin{pmatrix} U \\ V \\ \rho_i \end{pmatrix}$ una solución de la ecuación de mareas de Laplace con frecuencia adimensional $\tilde{\sigma}_i = \sigma + s_i$, resulta

$$\begin{aligned} (X_{i'}, i \in B X_i) &= -\frac{\epsilon}{2} \int \cos \varphi d\varphi d\eta (X_{i'}, (e^{i\eta} + e^{-i\eta}) D_i X_i) \tilde{\lambda} (\sigma + s_i) f(\varphi) \\ &= -\frac{\epsilon}{2} (\delta_{s_i', s_i+1} + \delta_{s_i', s_i-1}) \tilde{\sigma}_{s_i} I_{s_i', n_i', s_i, n_i} \end{aligned}$$

donde se define un coeficiente de interacción como

$$\begin{aligned} I_{s_i', n_i', s_i, n_i} &= 2\pi \tilde{\lambda} \int \cos \varphi d\varphi \hat{P}_{s_i', n_i'}^*(\varphi) \hat{P}_{s_i, n_i}(\varphi) f(\varphi) \\ &= \frac{\tilde{\lambda} \int \cos \varphi d\varphi \hat{P}_{s_i', n_i'}^*(\varphi) \hat{P}_{s_i, n_i}(\varphi) f(\varphi)}{\left\{ \int \cos \varphi d\varphi (|\hat{U}_{s_i', n_i'}|^2 + |\hat{V}_{s_i', n_i'}|^2 + \tilde{\lambda} |\hat{P}_{s_i', n_i'}|^2) \right\} \left\{ \int \cos \varphi d\varphi (|\hat{U}_{s_i, n_i}|^2 + |\hat{V}_{s_i, n_i}|^2 + \tilde{\lambda} |\hat{P}_{s_i, n_i}|^2) \right\}} \\ \text{II.50} \quad &= \frac{\lambda \int \cos \varphi d\varphi \mathcal{P}_{s_i', n_i'}^*(\varphi) \mathcal{P}_{s_i, n_i}(\varphi) f(\varphi)}{\left\{ \int \cos \varphi d\varphi (|\hat{U}_{s_i', n_i'}|^2 + |\hat{V}_{s_i', n_i'}|^2 + \lambda |\hat{P}_{s_i', n_i'}|^2) \right\} \left\{ \int \cos \varphi d\varphi (|\hat{U}_{s_i, n_i}|^2 + |\hat{V}_{s_i, n_i}|^2 + \lambda |\hat{P}_{s_i, n_i}|^2) \right\}} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{P} = a\omega_0 \hat{P} = g\eta'$, siendo η' la amplitud de Fourier del desplazamiento de la superficie libre en el modo barotrópico equivalente, y $\lambda = \tilde{\lambda} / (\omega_0^2 a^2) = \frac{1}{c_2} = \frac{1}{g h'}$.

El determinante de la ec.II.48 es

$$\text{II.51} \quad \begin{vmatrix} \sigma^{(1)} + \tilde{\sigma}_{s_i} P_{s_i} \tilde{\lambda}^{(1)} & -\frac{\epsilon}{2} \tilde{\sigma}_{s_i} I_{s_i+1, n', s_i, n} \\ -\frac{\epsilon}{2} \tilde{\sigma}_{s_i+1} I_{s_i, n, s_i+1, n'} & \sigma^{(1)} + \tilde{\sigma}_{s_i+1} P_{s_i+1} \tilde{\lambda}^{(1)} \end{vmatrix} = 0$$

donde

$$\text{II.52} \quad P_{s_i} = 2\pi \int \cos \varphi d\varphi \hat{P}_i^* \hat{P}_i = \frac{\int \cos \varphi d\varphi \hat{P}_i^* \hat{P}_i}{\int \cos \varphi d\varphi [|\hat{U}_i|^2 + |\hat{V}_i|^2 + \tilde{\lambda} |\hat{P}_i|^2]}$$

La solución de la ec.II.51 es

$$II.53 \quad \sigma^{(1)} = -\frac{\tilde{\lambda}^{(1)}}{2} \left[\tilde{\sigma}_{S_1} p_{S_1} + \tilde{\sigma}_{S_1+1} p_{S_1+1} \right] \pm \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}^{(1)2}}{4} \left[\tilde{\sigma}_{S_1} p_{S_1} - \tilde{\sigma}_{S_1+1} p_{S_1+1} \right]^2 + \frac{\epsilon^2}{4} \tilde{\sigma}_{S_1} \tilde{\sigma}_{S_1+1} \left| I_{S_1+1} n' s_1 n \right|^2}$$

Hay soluciones inestables si $\tilde{\sigma}_{S_1} \tilde{\sigma}_{S_1+1} < 0$ (las frecuencias de los modos están relacionadas por $\tilde{\sigma}_{S_1} = \sigma + S_1$, $\tilde{\sigma}_{S_1+1} = \sigma + S_1 + 1$, y entonces $\tilde{\sigma}_{S_1+1} - \tilde{\sigma}_{S_1} = 1$). La máxima tasa de crecimiento es

$$II.54 \quad I_m \sigma_{max}^{(1)} = \frac{\epsilon}{2} \sqrt{\tilde{\sigma}_{S_1+1} (1 - \tilde{\sigma}_{S_1+1}) \left| I_{S_1+1} n' s_1 n \right|}$$

La tasa de crecimiento es proporcional a la amplitud de la variación externa ϵ , a la raíz cuadrada de las frecuencias, y a un coeficiente de interacción para la perturbación.

Este resultado para la estabilidad de una onda es válido en condiciones muy generales, como fue mostrado por Hasselmann(1967). El mostró que en primer orden de amplitud, dos ondas 1 y 2 que satisfacen la condición de resonancia $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$, $k_1 + k_2 = k_0$ con la componente de amplitud finita cero, tienen amplitudes que dependen del tiempo en la forma $A_i(t) = A_i(0) e^{\lambda t}$ ($i=1,2$), con $\lambda = \pm 3 \sqrt{\omega_1 \omega_2} |D| |A_0|$. A_i es la amplitud para la coordenada de modo normal $q_k^v = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{-k}^v + i \omega_k^v q_k^v)$, (k es número de onda horizontal, v es el índice del modo, ω_k^v la frecuencia positiva del sistema lineal, q_u^v la coordenada generalizada que puede ser tomada como la amplitud del desplazamiento vertical lagrangiano y p_u^v su impulso conjugado). D es el coeficiente de acoplamiento para la tríada en el Hamiltoniano.

En el caso presente (ec. II.50), el coeficiente de interacción es la integral normalizada del desplazamiento vertical de las dos ondas resonantes multiplicada por la dependencia latitudinal de la estabilidad estática del estado básico. (3D equivale a I).

Esta forma del coeficiente de interacción se debe a que la fluctuación en la estabilidad estática del estado básico actúa como una fuente de energía potencial de ondas de gravedad.

Se pueden obtener los resultados de la sección anterior para el plano f como un caso particular de las ec. II.53 y II.54. Las ecuaciones de movimiento con la dependencia vertical separada son

$$\begin{aligned}
 \partial_{t'} U - f' V &= -\partial_x P \\
 \partial_{t'} V + f' U &= -\partial_y P \\
 \tilde{\lambda} \partial_{t'} P + (\partial_x U + \partial_y V)(1 + \epsilon N(x-t')) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{II.55}$$

donde $t' = \omega_0 t$, x es la longitud, y la coordenada meridional dividida por a , $f' = f/\omega_0$. Para $\epsilon = 0$, la solución para una componente de Fourier $e^{i(sx + ly - \tilde{\sigma}t')}$ es

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ P \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{L}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\lambda} \tilde{\sigma}^2 (\tilde{\sigma}^2 - f'^2)}} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma} s + i f' l \\ \tilde{\sigma} l - i f' s \\ \tilde{\sigma}^2 - f'^2 \end{pmatrix} e^{i(sx + ly - \tilde{\sigma}t')}
 \tag{II.56}$$

donde $\tilde{\sigma}^2 = f'^2 + \frac{1}{\tilde{\lambda}} (s^2 + l^2)$, y se tomó la normalización

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\frac{L}{a}} dy (U^* U + V^* V + \tilde{\lambda} P^* P) = 1$$

El coeficiente de interacción es

$$\begin{aligned}
 I_{12} &= \frac{\tilde{\lambda} \int_0^{L/a} \hat{P}_1 \hat{P}_2 dy}{\left[\int dy (|U_1|^2 + |V_1|^2 + \tilde{\lambda} |P_1|^2) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int dy (|U_2|^2 + |V_2|^2 + \tilde{\lambda} |P_2|^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\tilde{\sigma}_1^2 - f'^2)(\tilde{\sigma}_2^2 - f'^2)}{\tilde{\sigma}_1^2 \tilde{\sigma}_2^2}}
 \end{aligned}
 \tag{II.57}$$

y $P_{5r} = \frac{\tilde{\sigma}_i^2 - f'^2}{2\tilde{\sigma}_i^2}$. Introduciendo estas expresiones en la ec. II.53, se obtiene la ec. II.13 para la corrección de primer orden a la frecuencia (aquí $\tilde{\sigma}_i$ es igual a ω_i de la sección anterior). De la ec. II.54 se obtiene la tasa de crecimiento máxima en el plano f

$$Im \sigma_{max} = \frac{\epsilon}{4} \sqrt{\frac{(\tilde{\sigma}_1^2 - f'^2)(\tilde{\sigma}_2^2 - f'^2)}{|\tilde{\sigma}_1| |\tilde{\sigma}_2|}}$$

Volviendo a geometría esférica, las ondas resonantes a primer orden, con períodos cercanos a dos días, están confinadas hacia el ecuador de 15° de latitud. En ese caso, se puede usar la aproximación de plano beta ecuatorial. Como fue discutido por Longuet Higgins (1968), la solución de plano beta ecuatorial es una solución asintótica a las ecuaciones de movimiento en la esfera, para $\epsilon = \frac{4\omega_b^2 a^2}{g h'}$ grande, y $\frac{\omega}{2\omega_b}$ pequeño (ω_b es la frecuencia de rotación terrestre y ω la frecuencia de la onda). En este rango de parámetros las soluciones están confinadas cerca del ecuador. Las ecuaciones en el plano beta ecuatorial para el modelo barotrópico equivalente (análogas a las ec. II,32) son:

$$\begin{aligned} \partial_t U - \beta y V &= - \partial_x P \\ \partial_t V + \beta y U &= - \partial_y P \\ \lambda \partial_t P + (\partial_x U + \partial_y V)(1 + \epsilon N_1(x,t)) &= 0 \end{aligned}$$

donde t es el tiempo, $\lambda = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{g h'}$, y $\beta = \frac{2\omega_b}{a}$. Para $\epsilon = 0$, las amplitudes de Fourier $\hat{U}, \hat{V}, \hat{P}$ tal que $(U, V, P) = e^{i(kx - \omega t)} (\hat{U}, \hat{V}, \hat{P})$ están relacionadas en la forma:

$$\begin{aligned} \hat{U} &= -i \frac{(-\beta \omega a y + k a y)}{\lambda \omega^2 - k^2} \hat{V} \\ \text{II.59} \quad \hat{P} &= -i \frac{(-\beta k y + \omega a y)}{\lambda \omega^2 - k^2} \hat{V} \end{aligned}$$

Se puede obtener la siguiente ecuación en \hat{V} :

$$\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k}{\omega} \beta - \frac{\beta^2}{c^2} y \right) \hat{V} = 0$$

que tiene soluciones de la forma:

$$\text{II.60} \quad \hat{V} \sim e^{-\frac{1}{2} \frac{\beta}{c} y^2} H_n \left(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y \right)$$

con

$$\text{II.61} \quad \frac{\omega^2}{c\beta} - k^2 \frac{a}{\beta} - \frac{k}{\omega} \frac{c}{\omega} = 2n+1$$

La escala $\sqrt{\frac{c}{\beta}} = \sqrt{\frac{v g h}{2 \omega c}} a$ es el radio de deformación ecuatorial, y la velocidad meridional es exponencialmente pequeña más allá de la distancia de retorno $y = \sqrt{2n+1} \sqrt{\frac{c}{\beta}}$

Para polinomios de Hermite normalizados de modo que $\int e^{-y^2} H_n(y) H_m(y) dy = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$, vale la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{aligned} y H_n(y) &= \frac{1}{2} H_{n+1} + n H_{n-1} \\ \frac{dH}{dy} &= 2n H_{n-1} \end{aligned}$$

Usando las ec. II.59 se puede expresar la solución como:

$$\begin{aligned} \hat{V} &= A i \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \psi_n \left(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y \right) \\ \text{II.62} \quad \hat{U} &= A \sqrt{\frac{\beta}{c}} \left[\left(-\frac{\omega}{c} - k \right) \frac{1}{2} \psi_{n+1} \left(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y \right) + n \left(-\frac{\omega}{c} + k \right) \psi_{n-1} \left(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y \right) \right] \\ \hat{P} &= A \sqrt{\beta c} \left[\left(-\frac{\omega}{c} - k \right) \frac{1}{2} \psi_{n+1} \left(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y \right) - n \left(-\frac{\omega}{c} + k \right) \psi_{n-1} \left(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y \right) \right] \end{aligned}$$

donde $\psi_n(x) = e^{-\frac{1}{2} x^2} H_n(x)$. La normalización es

$$\begin{aligned} \int (|\hat{U}|^2 + |\hat{V}|^2 + \frac{1}{c} |\hat{P}|^2) dy &= A^2 \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)^2 \int dy \psi_n^2 \left(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y \right) \right. \\ &+ \frac{2\beta}{c} \int dy \left[\left(-\frac{\omega}{c} - k \right)^2 \frac{1}{4} \psi_{n+1}^2 \left(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y \right) + n^2 \left(-\frac{\omega}{c} + k \right)^2 \psi_{n-1}^2 \left(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y \right) \right] \\ &= A^2 n! 2^n \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{c}{\beta}} \left\{ \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)^2 + \frac{\beta}{c} \left[\left(\frac{\omega}{c} + k \right)^2 (n+1) + \left(\frac{\omega}{c} - k \right)^2 n \right] \right\} \end{aligned}$$

En este tipo de movimiento la energía cinética meridional es proporcional a $(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2)^2$, la energía cinética longitudinal a $[\frac{1}{2} \frac{\beta}{c} (\frac{\omega}{c} + k)^2 (n+1) + (\frac{\omega}{c} - k)^2 n]$, y la energía potencial es igual a la energía cinética longitudinal.

El coeficiente de interacción expresado en función de las cantidades dimensionales es

$$I_{k_2 n_2 k_1 n_1} = \frac{\frac{1}{c^2} \int dy \hat{P}_{n_2 k_2}^*(y) \hat{P}_{n_1 k_1}(y) f(y)}{[\int dy (|\hat{V}_1|^2 + |\hat{V}_2|^2 + \frac{1}{c^2} |\hat{P}_1|^2) \int dy (|\hat{V}_1|^2 + |\hat{V}_2|^2 + \frac{1}{c^2} |\hat{P}_2|^2)]^{1/2}}$$

Tomando $f(y) = 1$ en la integral (o en una banda al ecuador de una latitud del orden de la latitud de retorno), en la expresión anterior el numerador es

$$\begin{aligned} \lambda \int dy \hat{P}_1 \hat{P}_2 &= A_1 A_2 \frac{\beta}{c} \int dy \left[-(\frac{\omega_1}{c} + k_1) \frac{1}{2} \psi_{n_1+1}(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y) - n_1 (\frac{\omega_1}{c} + k_1) \psi_{n_1}(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y) \right] \cdot \\ &\cdot \left[-(\frac{\omega_2}{c} + k_2) \frac{1}{2} \psi_{n_2+1}(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y) - n_2 (-\frac{\omega_2}{c} + k_2) \psi_{n_2}(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y) \right] = \\ &= A_1 A_2 \sqrt{\frac{\beta}{c}} \sqrt{\pi} \left\{ \left[(\frac{\omega_1}{c} + k_1) (\frac{\omega_2}{c} + k_2) \frac{1}{4} 2^{n_1+1} (n_1+1)! + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + n_1^2 (-\frac{\omega_1}{c} + k_1) (-\frac{\omega_2}{c} + k_2) (n_1-1)! 2^{n_1-1} \right] \delta_{n_1 n_2} + (\frac{\omega_1}{c} + k_1) (-\frac{\omega_2}{c} + k_2) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{n_2}{2} 2^{n_1+1} (n_1+1)! \delta_{n_1, n_2-2} + (-\frac{\omega_1}{c} + k_1) (\frac{\omega_2}{c} + k_2) \frac{n_1}{2} 2^{n_1-1} (n_1-1)! \delta_{n_1, n_2+2} \right\} \\ &= A_1 A_2 \sqrt{\frac{\beta}{c}} \sqrt{\pi} 2^{n_1-1} n_1! \left\{ \left[(\frac{\omega_1}{c} + k_1) (\frac{\omega_2}{c} + k_2) (n_1+1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-\frac{\omega_1}{c} + k_1) (-\frac{\omega_2}{c} + k_2) n_1 \right] \delta_{n_1 n_2} + (\frac{\omega_1}{c} + k_1) (-\frac{\omega_2}{c} + k_2) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot 2 (n_1+1) (n_1+2) \delta_{n_1, n_2-2} + (-\frac{\omega_1}{c} + k_1) (\frac{\omega_2}{c} + k_2) \frac{1}{2} \delta_{n_1, n_2+2} \right\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que las frecuencias de las ondas resonantes satisfacen $\omega_2 - \omega_1 = \pm \omega_0$, y que los números de onda longitudinales son 0 y 1, el coeficiente de interacción para $n_1 = n_2$ es

$$\text{II.63} \quad I_{1,2} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\beta}{c} \frac{\omega_1}{c} \left[\frac{\omega_2}{c} (2n_1+1) + k_2 \right]}{\left[\left(\frac{\omega_1}{c} \right)^4 + \frac{\beta}{c} \left(\frac{\omega_1}{c} \right)^2 (2n_1+1) \right]^{1/2} \left[\left(\frac{\omega_1^2}{c^2} - k_1^2 \right)^2 + \frac{\beta}{c} \left[\left(\frac{\omega_2}{c} + k_2 \right)^2 (n_1+1) + \left(\frac{\omega_2 - k_2}{c} \right)^2 n_1 \right] \right]^{1/2}}$$

Para $n_1 = n_2 - 2$:

$$II.64 \quad I_{12} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\beta}{c} \frac{\omega_1}{c} \left(-\frac{\omega_2}{c} + k_2 \right) \sqrt{(n_1+1)(n_1+2)}}{\left[\left(\frac{\omega_1}{c} \right)^4 + \frac{\beta}{c} \left(\frac{\omega_1}{c} \right)^2 (2n_1+1) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\omega_2^2}{c^2} - k_2^2 \right)^2 + \frac{\beta}{c} \left(\frac{\omega_2}{c} + k_2 \right)^2 (n_1+3) + \frac{\beta}{c} \left(\frac{\omega_2}{c} - k_2 \right)^2 (n_1+2) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

(y el mismo valor para $n_1 = n_2 + 2$). Aquí $k_2 = \frac{1}{a} = 1.6 \cdot 10^{-7} m^{-1}$,

$$\beta = \frac{2\omega_0}{a} = .22 \cdot 10^{-10} m^{-1} s^{-1}$$

Considerando $N_0 = .015 s^{-1}$ y una profundidad de la capa activa $H = 2.5 km$ la velocidad de fase es $c = \frac{NH}{T} = 8 m/s$. Los períodos de onda T obtenidos de la ec. II.61 son: para $k=0$, para el modo simétrico más grave $n=1$, $T = 3.2$ días y para $n=3$, $T = 2.1$ días. Para números de onda longitudinales $k=1$, los términos $\frac{k^2 c}{\beta}$ y $\frac{k c}{\omega}$ son $\ll .04 \ll 2NH$, y entonces las frecuencias para $k=1$ son cercanas a las para $k=0$: $\frac{\omega^2}{c\beta} \approx 2n+1$

Las ondas de gravedad con $n=3$, $k=0$ y $k=1$, podrían producir una inestabilidad para valores realistas de alturas de capa límite: con $\omega = \frac{1}{2} \omega_0$, es $c = 8.6 m/s$, y $H = \frac{cT}{N} = 2.7 km$ para $N = .015 s^{-1}$ y $H = 2.3 km$ para $N = \frac{1}{86} s^{-1}$.

Entonces para k pequeño y $n_1 = n_2$, de la ec. II.63 resulta

$$II.65 \quad I_{12} \approx \frac{1}{4}$$

Este valor se obtiene porque despreciando k , las funciones presión de las dos ondas son iguales, y el coeficiente de interacción es igual al cociente entre la energía potencial y la energía total. La proporción entre energía cinética meridional, energía cinética lon-

gitudinal y energía potencial es 2:1:1, y de esto resulta que el coeficiente de interacción es $\frac{1}{4}$.

Esto es la mitad del valor obtenido en el plano f sin rotación. El efecto de la rotación en la estabilidad para ondas internas de gravedad de escala global es disminuir el valor del coeficiente de interacción a la mitad del caso sin rotación.

Con la aproximación $\omega \approx \sqrt{c\beta(2n+1)}$ para $k \neq 0$, la condición de resonancia implica $\omega \approx \sqrt{c\beta(2n+1)} = \frac{1}{2}\omega_0$. La máxima tasa de crecimiento adimensional para la inestabilidad de dos ondas con índices meridionales $n_1 = n_2$, según la ec. II.54, es:

$$\text{II 66} \quad \text{Im } \sigma_{\text{max}}^{(1)} = \text{Im } \frac{\omega^{(1)}_{\text{max}}}{\omega_0} = \frac{\epsilon}{16} = .0625 \epsilon$$

Los tiempos de multiplicación por e son 25 días para $\epsilon = .1$, 5 días para $\epsilon = .5$, y 2.5 días para $\epsilon = 1$.

En el caso de resonancias de primer orden entre dos ondas con índices meridionales $n_1 = n_2 - 2$, la ec. II.64 da

$$I_{12} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(n_1+1)(n_1+2)}{(2n_1+1)(2n_1+5)}}$$

que para $n_1 = 1$, $n_2 = 3$ es

$$I_{12} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{7}} = .13$$

La condición de resonancia entre estos dos modos es $\omega_2 - \omega_1 = \sqrt{c\beta} (\sqrt{7} \pm \sqrt{3}) = \omega_0$. Teniendo en cuenta que $c^2 = \frac{N^2}{\rho^2}$, se obtiene que las longitudes de onda verticales para $N = .01 s^{-1}$ son 7.9 km y 181 km para los signos + y - respectivamente. Estas longitudes de onda son demasiado grandes para ser excitadas por una capa límite con una tapa rígida. Las frecuencias para el signo + son $\frac{\omega_+}{\omega_0} = .6$, $\frac{\omega_-}{\omega_0} = -.4$. La máxima tasa de crecimiento para la longitud de onda

vertical de 7.9 km es

$$I_m \sigma_{max}^{(1)} = I_m \frac{\omega_{max}^{(1)}}{\omega_0} = .03 \epsilon$$

que es la mitad que para $n_1=n_2=3$, correspondiendo a una inestabilidad más débil. Por estas razones, no se espera que este par de ondas sea excitado en el caso de una capa límite.

Las resonancias de segundo orden se obtienen para un estado básico

$$II.67 \quad \chi = \sum_{i=1}^2 a_i \chi_i$$

donde χ_i son modos de ondas libres con frecuencias adimensionales $\tilde{\sigma}_1 = \sigma + s_1$, $\tilde{\sigma}_2 = \sigma + s_2$, con $s_2 - s_1 = 2$.

Para estos estados, la corrección de primer orden a la frecuencia se anula.

Se puede obtener la corrección de primer orden al estado básico $\chi^{(1)} = \sum_j a_j^{(1)} \chi_j$ haciendo el producto escalar de la ec. II.46 con un estado $\chi_{j'}$ para $j' \neq 1, 2$; se puede tomar $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}$ igual a cero, ya que de otra manera implicaría una renormalización del estado básico.

Tomando en cuenta que $((\sigma^{(0)} - i\gamma\eta) D + L') \chi_j = (\sigma^{(0)} + s_j - \tilde{\sigma}_{s_j}) \chi_j$, resulta

$$II.68 \quad a_j^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^2 (\chi_{j'} - i\epsilon \beta \chi_i) a_i^{(0)}}{\sigma^{(0)} + s_j - \tilde{\sigma}_{s_j}}$$

La expansión de segundo orden de la ec. II.40 es

$$II.69 \quad \left[\sigma^{(2)} D + (\sigma^{(0)} - i\gamma\eta) \tilde{\lambda}^{(2)} D_1 \right] \chi^{(2)} + \left[(\sigma^{(0)} - i\gamma\eta) D + L' \right] \chi^{(2)} = -i\epsilon \beta \chi^{(1)}$$

Tomando el producto escalar de esta expresión con $\chi_{i'}$, $i' = 1, 2$, se obtiene

$$II.70 \quad \sum_i a_i \left\{ \left[\sigma^{(2)} + (\sigma^{(0)} + s_i) \tilde{\chi}^{(2)}(X_i', D_1 X_i) \right] \delta_{i,i} \right. \\ \left. - \sum_j \frac{(X_i', -i\epsilon \beta X_j)(X_j, -i\epsilon \beta X_i)}{\sigma^{(0)} + s_j - \tilde{\sigma}_{s_j}} \right\} = 0$$

Los elementos del determinante de los coeficientes a_i de esta ecuación son:

$$a_{11} = a_{s_1 s_1} = \sigma^{(2)} + \tilde{\sigma}_{s_1} \tilde{\chi}^{(2)} \rho_{s_1} - \frac{\epsilon^2}{4} \tilde{\sigma}_{s_1} \sum_{n'} \left(\frac{\tilde{\sigma}_{s_1+1} n'}{\sigma^{(0)} + s_1 + 1 - \tilde{\sigma}_{s_1+1} n'} \frac{I_{s_1 n_1 s_1+1 n_1}}{I_{s_1+1 n_1 s_1 n_1}} \right. \\ \left. + \frac{\tilde{\sigma}_{s_1-1} n'}{\sigma^{(0)} + s_1 - 1 - \tilde{\sigma}_{s_1-1} n'} \frac{I_{s_1 n_1 s_1-1 n_1}}{I_{s_1-1 n_1 s_1 n_1}} \right) \\ II.71 \quad a_{21} = a_{s_2 s_1} = -\frac{\epsilon^2}{4} \tilde{\sigma}_{s_1} \sum_{n'} \frac{\tilde{\sigma}_{s_1+1} n'}{\sigma^{(0)} + s_1 + 1 - \tilde{\sigma}_{s_1+1} n'} \frac{I_{s_2 n_2 s_1+1 n_1}}{I_{s_1+1 n_1 s_2 n_2}} \\ a_{12} = a_{s_1 s_2} = -\frac{\epsilon^2}{4} \tilde{\sigma}_{s_2} \sum_{n'} \frac{\tilde{\sigma}_{s_1+1} n'}{\sigma^{(0)} + s_1 + 1 - \tilde{\sigma}_{s_1+1} n'} \frac{I_{s_1 n_1 s_2+1 n_2}}{I_{s_2+1 n_2 s_1 n_1}} \\ a_{22} = a_{s_2 s_2} = \sigma^{(2)} + \tilde{\sigma}_{s_2} \tilde{\chi}^{(2)} \rho_{s_2} - \frac{\epsilon^2}{4} \tilde{\sigma}_{s_2} \sum_{n'} \left(\frac{\tilde{\sigma}_{s_2+1} n'}{\sigma^{(0)} + s_2 + 1 - \tilde{\sigma}_{s_2+1} n'} \frac{I_{s_2 n_2 s_2+1 n_2}}{I_{s_2+1 n_2 s_2 n_2}} \right. \\ \left. + \frac{\tilde{\sigma}_{s_2-1} n'}{\sigma^{(0)} + s_2 - 1 - \tilde{\sigma}_{s_2-1} n'} \frac{I_{s_2 n_2 s_2-1 n_2}}{I_{s_2-1 n_2 s_2 n_2}} \right)$$

Puede verificarse que de esta expresión se pueden recuperar los resultados del plano f. La ec. II.57 da el coeficiente de interacción en el plano f. Para un plano f, en la suma sobre estados intermedios de la ec. II.71, se deben considerar las frecuencias $|\tilde{\sigma}_{s' n'}|$ y $-|\tilde{\sigma}_{s' n'}|$ y entonces aparece el factor

$$\frac{1}{\sigma^{(0)} + s - \tilde{\sigma}_s} - \frac{1}{\sigma^{(0)} + s + \tilde{\sigma}_s} = \frac{2\tilde{\sigma}_s}{(\sigma^{(0)} + s)^2 - \tilde{\sigma}_s^2}$$

Tomando en cuenta que $\frac{\tilde{\chi}^{(2)}}{\tilde{\chi}^{(0)}} = -\frac{n^{(2)}}{n^{(0)}}$, $\rho_{s_i} = \frac{\tilde{\sigma}_i^2 - \epsilon^2}{2\tilde{\sigma}_i}$ y la ec. II.57, se recupera la expresión II.23 para los elementos del determinante.

En la aproximación de plano beta para los números de onda longitudinales más graves, si se desprecia la dependencia de la frecuencia con k , la suma sobre estados intermedios contiene dos frecuencias $|\tilde{\sigma}_{s' n'}|$ y $-|\tilde{\sigma}_{s' n'}|$, y números de onda $n_i = n_1, n_2$ y $n_i = n_1, n_2 \pm 2$. Con $I_{ij} = \frac{1}{4}$ para $n_i = n_j$, y $I_{ij} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(n_i+1)(n_i+2)}{(2n_i+1)(2n_i+5)}}$ para $n_j = n_i \pm 2$,

la máxima tasa de crecimiento está dada por el elemento a_{21} en el determinante. Para $n_2 = n_1$, y entonces $-\tilde{\sigma}_1 \approx \tilde{\sigma}_2 \approx 1$, este elemento es

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= -\frac{\epsilon^2}{4} \tilde{\sigma}_{s_1} \sum_{n'} \frac{2\tilde{\sigma}_{s_1}^2 n'}{(\sigma(\omega + s_1 + 1))^2 - \tilde{\sigma}_{s_1}^2 n'} \frac{I_{s_2 n_2} s_1 n'}{I_{s_1 + 1} n' s_1 n_1} \\
 &= \frac{\epsilon^2}{4} \left(2 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{16} \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+5)} + 2 \cdot \frac{1}{16} \frac{(n-1)n}{(2n-3)(2n+1)} \right) \\
 &\quad \text{para } n \text{ grande} \\
 &\approx \frac{\epsilon^2}{32} \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

ya que el índice meridional n correspondiente a una altura de capa límite de 2.5 km y período igual a un día es $n \sim 17$.

La rotación reduce la tasa de crecimiento para inestabilidades de segundo orden en un factor $\frac{8}{3} = 2.7$ aproximadamente. Hay dos causas para esto: el coeficiente de interacción es un factor 2 más pequeño respecto al caso de plano f sin rotación, y esto reduciría la tasa de crecimiento en un factor cuatro; pero hay transiciones a estados con índices meridionales diferentes que contribuyen, y esto introduce un factor $\frac{3}{2}$.

Resumiendo los resultados de esta sección, se estudió la estabilidad de una extensión del modelo de Orlandi de "inestabilidad trapecio" para ondas de escala planetaria. Sobre la capa límite se impuso una condición de tapa rígida. Bajo estas condiciones el flujo es inestable.

En presencia de rotación planetaria, las tasas de crecimiento son menores que para el caso de "inestabilidad trapecio" sin rotación, en un factor de 2 para las inestabilidades de primer orden, y en un factor 2.7 para las inestabilidades de segundo orden.

Para inestabilidades de primer orden, los tiem-

pos de multiplicación por e son 5.1 días para $\epsilon = .5$ y 2.5 días para $\epsilon = 1$. Para inestabilidades de segundo orden, estos tiempos son 13.6 días para $\epsilon = .5$ y 3.4 días para $\epsilon = 1$.

De acuerdo a esta escalas temporales, si estas inestabilidades persisten en un modelo sin tapa rígida en que se permite la propagación vertical, ellas podrían ser probablemente observadas, aunque los tiempos de disipación son del orden de magnitud que los tiempos de crecimiento.

En la tabla II se resumen los resultados para las tazas de crecimiento y estructura de los modos inestables, en el plano f y en la esfera.

En la tabla III se dan los valores numéricos de los tiempos de multiplicación por e de las inestabilidades.

TABLA II

Características de las inestabilidades con condición de tapa rígida.

Plano f

	Primer orden	Segundo orden
Taza de crecimiento máxima	$v_{im}^{(1)} = \omega_0 \frac{\epsilon}{8} (1-4f^{1/2})$	$v_{im}^{(2)} = \omega_0 \frac{\epsilon^2}{8} (1-f^{1/2}) \frac{1-f^{1/2}-h^{(0)}}{1-h^{(0)}}$
Onda inestable	$e^{v_{im}^{(1)} t} e^{i l y} \left[1 - \frac{i(1-h)(1-4f^{1/2})}{(1-h)^2 - 4f^{1/2}} \right] \cdot e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} e^{i(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \omega_0 t}$	$e^{v_{im}^{(2)} t} e^{i l y} \left\{ \left[e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + e^{-i(k_0 x - \omega_0 t)} \right] + \epsilon (a_2 e^{2i(k_0 x - \omega_0 t)} + a_0) \right\}$
Números de onda longitudinal	0, 1	1, -1 (0, -2 y 2 $\sim \epsilon$)
Período	≈ 2 días	1 día

Plano beta ecuatorial

	Primer orden	Segundo orden
Taza de crecimiento máxima	$v_{im}^{(1)} = \frac{\omega_0 \epsilon}{16}$	$v_{im}^{(2)} = \omega_0 \frac{\epsilon^2}{64}$
Onda inestable	$V = e^{v_{im}^{(1)} t} [a_1 + a_2 e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}] \cdot V_n(y) e^{i v r t}$	$V = e^{v_{im}^{(2)} t} [a_1 e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + a_2 e^{-i(k_0 x - \omega_0 t)} + \epsilon(\dots)] V_n(y) e^{i v r t}$
Números de onda longitudinal	0, 1	1, -1 (0, -2 y 2 $\sim \epsilon$)
Período	≈ 2 días	1 día

La longitud de onda vertical es $2D/n$ con D la altura de la capa activa y n un entero.

TABLA III

Tazas de crecimiento de las inestabilidades

Plano f ecuatorial

Tiempos de multiplicación por e (días)

ϵ	Inest. de primer orden	Inest. de segundo orden
.1	13	130
.2	7	35
.5	2.6	5
1	1.3	1.3

Plano beta ecuatorial

Tiempos de multiplicación por e (días)

ϵ	Inest. de primer orden	Inest. de segundo orden
.1	26	300
.2	14	90
.5	5.1	13
1	2.5	3.4

II.3 Características de las regiones de posible interacción no lineal en la atmósfera.

Sin tratar de encontrar una solución para "inestabilidad trapecio" de escala global en un dominio abierto, en esta sección se discuten las escalas temporales características involucradas en causar crecimiento y decaimiento de ondas por ese mecanismo.

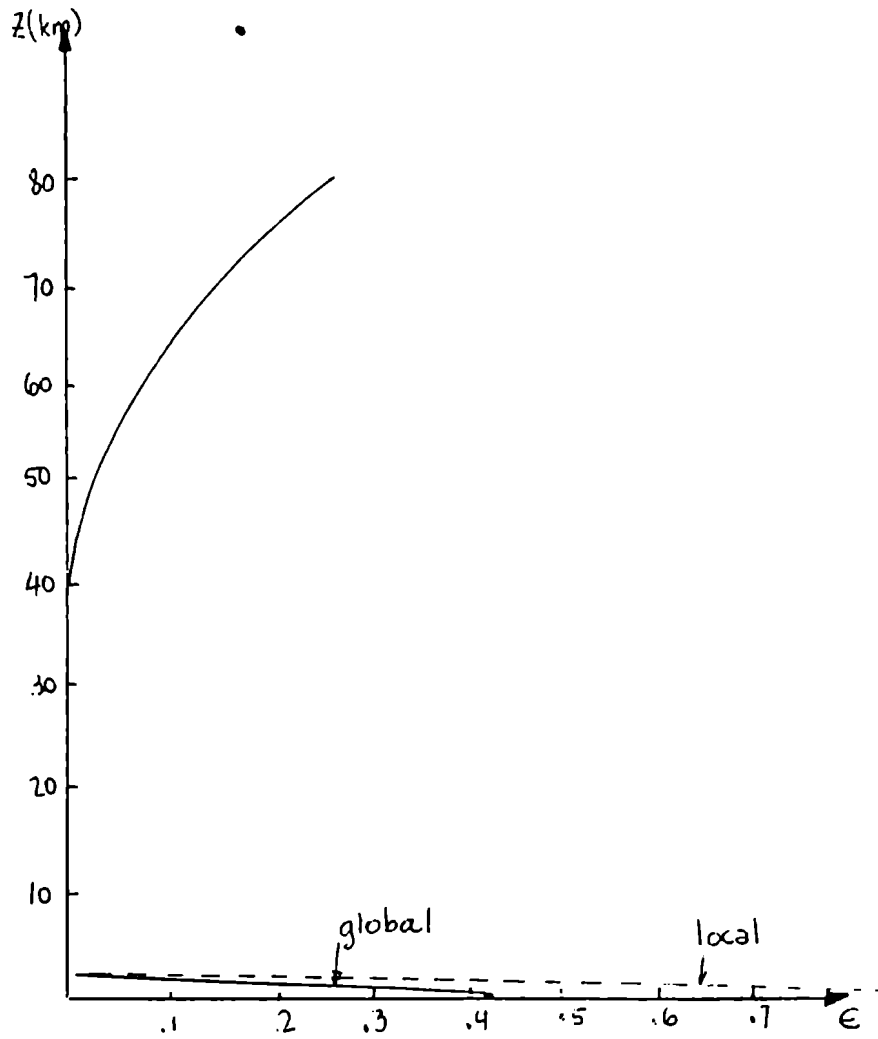
Hay dos posibles regiones activas para inestabilidad paramétrica: la capa límite atmosférica, donde el parámetro de estabilidad estática tiene una fuerte variación diaria, y la mesosfera, donde la marea debilmente no lineal podría antes de romper excitar paramétricamente ondas internas de gravedad.

Fels analizó la "inestabilidad trapecio" en un dominio abierto. Él calculó ^{la} evolución temporal de un paquete de ondas como un problema de valor inicial, en un desarrollo en serie para $\epsilon = \frac{N^2 \text{diario}}{N^2}$ pequeño. En resonancia, hay términos seculares y se debe sumar toda la serie. Términos individuales en la serie dejan de crecer después de tiempos proporcionales al tiempo de residencia del paquete de onda en la zona activa. Por un argumento de plausibilidad sobre los términos de orden superior, Fels concluyó que sólo hay inestabilidades cuando la longitud de onda vertical es pequeña comparada con la profundidad de la capa activa multiplicada por ϵ .

Se espera que la amplificación del paquete de ondas en la zona activa dependa del tiempo de interacción no lineal, el tiempo de residencia en la región activa y la escala temporal de disipación.

En la Fig. 5 se muestra el parámetro de interacción no lineal ϵ como función de la altura en la atmós-

Fig. 5



Parámetro de interacción no lineal $\epsilon = \frac{N_{\text{diario}}^2}{N^2}$ en la atmósfera.

fera.

En la capa límite atmosférica, el promedio zonal de la componente diaria de la temperatura de la superficie está comprendida entre 1.5° y 3° , y sobre continentes las amplitudes diarias son 3° a 8° . Con una capa límite atmosférica de 2 km de altura, los valores de ϵ en la superficie están entre .2 y 1.

Para estos valores de ϵ , los tiempos de interacción no lineal en el plano beta ecuatorial, según la tabla III, están comprendidos entre 14 días y 2 días para la inestabilidad de dos días, y entre 90 días y 3 días para la inestabilidad de un día.

El tiempo de residencia del paquete de ondas en la zona activa de profundidad D es: $T_{res} = \frac{D}{c_{grupo}} = \frac{DT}{\lambda_v}$ donde T es el período medio y λ_v la longitud de onda vertical media del paquete.

La escala temporal de disipación para una fuerza de viscosidad de eddy por unidad de masa - $\nu_{ed} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ es $T_{dis} = \left(\frac{2\nu_{ed}}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\nu_{ed}}$. Tomando un valor más bien bajo del coeficiente de viscosidad turbulenta $\nu_{ed} = \frac{2m^2}{s}$, T_{dis} es .6 y 2.3 días para λ_v 2 y 4 km.

Estos resultados se resumen en la tabla IV. Para una capa límite atmosférica no viscosa, si el paquete deja de crecer después de dejar la región activa, las ondas que pueden ser amplificadas serían aquellas para las cuales el tiempo de residencia es mayor que el tiempo de interacción no lineal. De la tabla IV, el caso con mayor amplificación corresponde a una onda de gravedad de dos días con $\lambda_v = 2km$, para $\epsilon = 1$. Esta onda permanece en la región activa un tiempo en el límite de lo suficiente para experimentar algo de amplificación. Pero sin embargo, las escalas temporales de disipación más largas son también 2 días, y esto inhibiría el crecimiento de las ondas.

Entonces, a menos que persistan algunas ines-

TABLA IV

Escalas temporales características.

Capa límite (D=2 km)

	ϵ	$\tau_{\text{no lineal}}$ (días)		λ_v (km)	$\tau_{\text{residencia}} = \frac{DT}{\lambda_v}$ (días)		$\tau_{\text{disipación}}$ (días)	
		T=2d	T=1d		T=2d	T=1d	$\nu = \frac{2m}{s^2}$	$\nu = \frac{1m}{s^2}$
global	.2	14	90	2	2	1	.6	1.2
	.4	6	20					
continentes	.4	6	20		4	1	.5	2.3
	1	2.5	3					

Mesosfera (D=15 km)

altura (km)	ϵ	$\tau_{\text{no lineal}}$ (días)		λ_v (km)	$\tau_{\text{residencia}}$ (días)	$\tau_{\text{disipación}}$ (días)
		T=2d	T=1d			
60	.1	25	60	4	7.5	2.3
80	.3	15		10	3	15

T es el período del modo de gravedad y D la profundidad de la capa activa.

tabilidades en un dominio abierto sin condición de tapa rígida, no se espera que haya amplificación en la capa límite atmosférica de ondas que se propagan verticalmente.

Las escalas temporales características para la mesosfera también están dadas en la tabla IV. La amplitud de marea para la temperatura ecuatorial tiene valores globales de 30 grados a 80 km de altura, con valores de ϵ entre .1 y .3 y tiempos de interacción no lineal para la onda de gravedad de dos días entre 25 y 15 días. Tomando una altura para la región activa de 15 km (media longitud de onda del modo principal de la marea diaria), el tiempo de residencia para una onda con $\lambda_v = 4$ km es de 7.5 días. Entonces, sin disipación, podría haber alguna amplificación en la región entre 60 y 80 km de altura.

Pero las escalas temporales de disipación en la mesosfera son de pocos días. Fels (1982) obtuvo un tiempo de disipación radiativo de 2.5 días para una onda de 12 km de longitud de onda, y escalas temporales menores para ondas más cortas. Además, la disipación mecánica debida al rompimiento de mareas y ondas de gravedad en la mesosfera tiene escalas temporales de la misma magnitud. Esto también sugiere que no habría amplificación significativa a menos que algunas de las inestabilidades persistan cuando se permite propagación vertical.

En el próximo capítulo, se examina la posibilidad de amplificación paramétrica de ondas de gravedad con propagación vertical como un subproducto de un modelo numérico no lineal para mareas.

CAPITULO III

MODELO NUMERICO PARA LA MAREA DIARIA

III.1 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados de un modelo numérico lineal y no lineal dependiente del tiempo para mareas.

Para cálculos cuantitativamente correctos de mareas se requiere un conocimiento preciso de tazas de calentamiento radiativas. Forbes y Garrett (1978) presentan cálculos de marea obtenidos con modelos y datos radiativos actualizados para vapor de agua y ozono. Hamilton (1981,b) hizo cálculos de marea con datos más completos para ozono y vapor de agua, e incluyó también radiación por dióxido de carbono y oxígeno molecular.

Con el presente estado de precisión de los modelos radiativos, se deberían incluir en los cálculos de mareas efectos no clásicos como el efecto de vientos medios zonales y gradientes latitudinales de temperatura, y se debe estudiar otros posibles efectos no clásicos como no linealidades en los campos de mareas.

Como efectos no clásicos, Lindzen y Hong (1974) discutieron el acoplamiento entre modos producido por vientos medios y gradientes latitudinales de temperatura en la marea solar semidiurna. Waltersheid, De Vore y Venkateswaran (1980) discutieron la sensibilidad de los resultados de Lindzen y Hong a actualizaciones en las funciones de calentamiento radiativo.

Waltersheid (1981) sugirió que la variabilidad de la marea semidiaria está relacionada con aceleraciones del flujo medio inducidas por ondas internas de gra-

vedad.

Otros posibles efectos no lineales son no linealidades en los campos de mareas, e interacciones con otros movimientos ondulatorios. En el capítulo II se comenzó el estudio de uno de esos posibles efectos, esto es la posibilidad de amplificación resonante de ondas de gravedad por la fluctuación diaria en la capa límite atmosférica y en la mesosfera.

Para el estudio simultáneo de todos los efectos no lineales en mareas, una herramienta adecuada es un modelo numérico de mareas dependiente del tiempo. Un modelo de ese tipo sería una excelente herramienta para estudiar el problema acoplado de mareas y flujo medio en la atmósfera de Venus. Para la atmósfera terrestre, un modelo de ese tipo permitiría la inclusión de efectos no lineales y sería útil para comparación con modelos de circulación general más completos que incluyan variaciones diarias.

En este trabajo, con un modelo numérico se puede completar el estudio de la posible excitación resonante de ondas de gravedad, encontrando si este proceso es importante o no en una atmósfera con condición de radiación.

Se construyó un modelo numérico para mareas dependiente del tiempo a partir de una versión del modelo espectral del Geophysical Fluid Dynamics Laboratory. La dependencia horizontal es resuelta en una base de esféricos armónicos, y la dependencia vertical en una grilla. El modelo tiene dos o tres ondas en longitud, 8 funciones asociadas de Legendre simétricas en latitud y 32 niveles que llegan hasta 80 km de altura. El calentamiento de marea es incluido como una función de calen

miento en la ecuación de temperatura. Se simula la condición de radiación por medio de una capa absorbente esponjosa.

Se presentan los resultados de una validación del modelo para un caso llamado lineal, en que se corrió el modelo con campos de número de onda zonal uno solamente. Para la validación se comparó la solución numérica obtenida con número de onda zonal uno y funciones de calentamiento de Lindzen para ozono y vapor de agua con una solución analítica hallada por expansión en una base separable en términos de funciones de Hough. Se encontró que la condición de radiación se reproduce bien en el modelo numérico. Las soluciones numérica y analítica concuerdan bien a latitudes altas; el acuerdo es más pobre a latitudes bajas, donde los modos que se propagan producen campos con variaciones verticales más pronunciadas.

Se realizaron dos experimentos numéricos con el modelo de mareas. En el primer caso, se forzó el modelo con las funciones de calentamiento de Lindzen para ozono y vapor de agua. En un segundo caso, se agregó un término de calentamiento de capa límite. Ambos casos fueron corridos en forma lineal (con número de onda zonal uno), y no lineal, con números de onda cero a dos.

Comparando los dos casos lineales, se obtuvo que el calentamiento simplificado de capa límite introducido en el modelo produce campos de marea mesosféricos apreciables. En base a estos resultados se realizó una estimación cuantitativa del calentamiento por capa límite con nuevos datos, que se presenta en el próximo capítulo.

Los dos experimentos fueron calculados no lineal

mente entre el día 15 y el día 35 del modelo. Uno de los objetivos de este cálculo es encontrar si hay generación resonante significativa de ondas internas de gravedad debido a la variación diaria en la capa límite atmosférica y en la mesosfera en una atmósfera con condición de radiación. Los resultados del modelo muestran que si bien aparecen ondas de gravedad secundarias con períodos y números de onda zonales que concuerdan con los predichos para las resonancias excitadas con número de onda zonal uno, la amplitud de estas ondas es extremadamente pequeña. Se concluye entonces que variaciones diarias globales realistas en la capa límite planetaria y en la mesosfera no son una fuente importante de ondas de gravedad secundarias.

En los campos con número de onda zonal uno se encuentran diferencias pequeñas entre el día 15 del experimento lineal y el día 30 del experimento no lineal. Las diferencias ocurren principalmente cerca de 30 grados de latitud para la velocidad (la latitud inercial) y cerca de 40 grados para la temperatura.

Las aceleraciones del flujo medio numéricas muestran discrepancias con las analíticas. Esto se debe a que la resolución vertical del modelo es insuficiente para obtener correctamente los flujos de cantidad de movimiento y calor.

El modelo numérico de marea con la resolución presentada aquí es apropiado para obtener los campos de marea a latitudes extratropicales, y valores aproximados de la marea en los trópicos. En cambio se requeriría mayor resolución para obtener las aceleraciones y el calentamiento del flujo medio.

Se concluye que el calentamiento de la capa límite es una fuente significativa de marea diaria. En

el próximo capítulo se presenta una estimación cuantitativa más detallada de este efecto.

De los experimentos numéricos se encuentra que el mecanismo de resonancias no lineales a partir de la marea y la capa límite atmosférica no es una fuente significativa de ondas internas de gravedad globales por lo menos hasta 60 Km de altura.

III.2. Modelo numérico espectral

Se construyó un modelo numérico dependiente del tiempo en ecuaciones primitivas.

El modelo numérico es una versión del modelo espectral multinivel en ecuaciones primitivas del Geophysical Fluid Dynamics Laboratory. Está basado en el modelo espectral en esféricos armónicos barotrópico de Bourke (1972). Bourke (1974), Hokins y Simmons (1974) y Gordon (1977) discuten extensiones a varios niveles. Gordon y Stern (1982) dan una descripción del modelo espectral del GFDL.

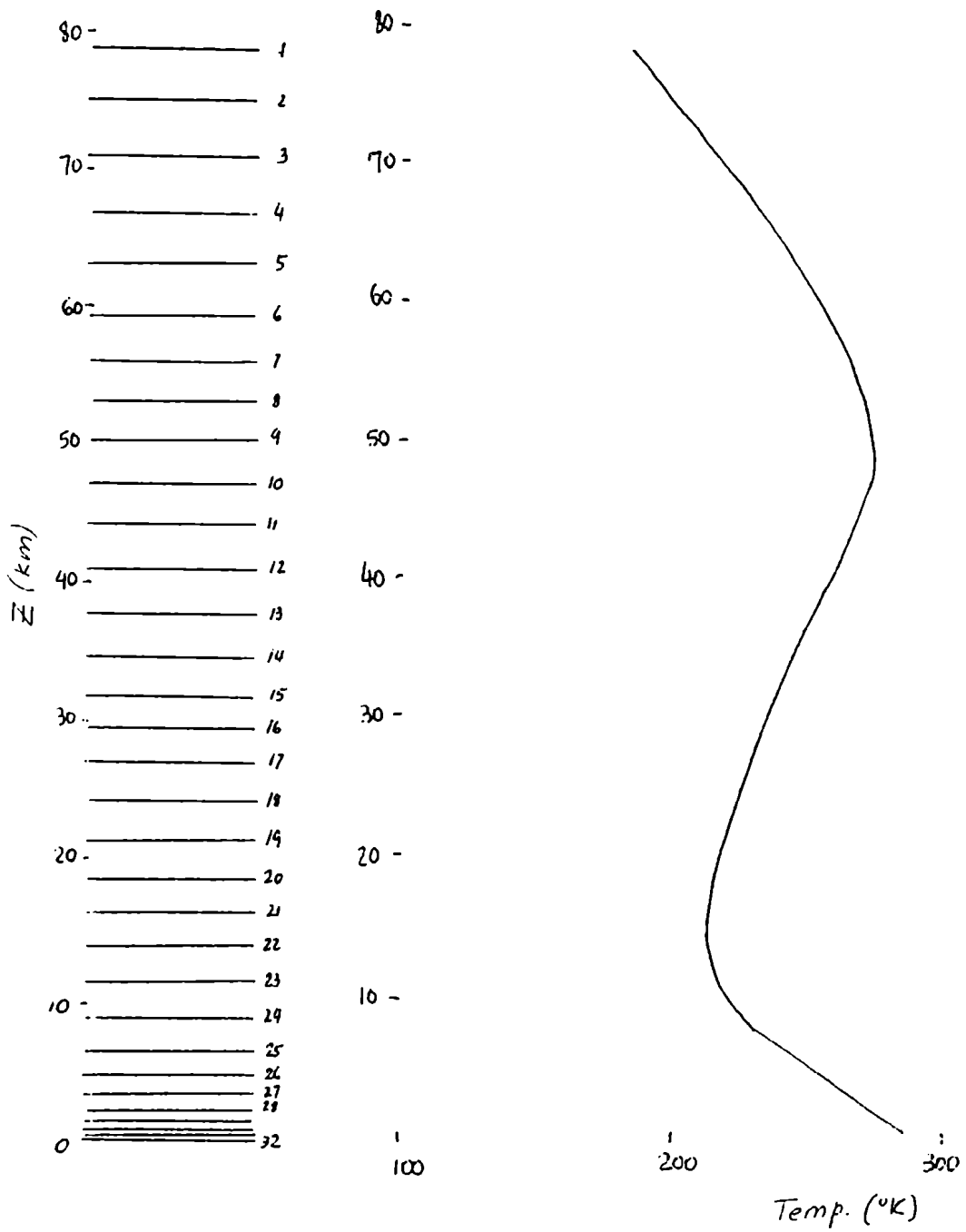
Las ecuaciones hidrostáticas del modelo están dadas en la coordenada $\sigma = p/p_*$. Las ecuaciones están escritas en una base espectral truncada de esféricos armónicos en las coordenadas horizontales y en diferencias finitas en la coordenada vertical. Los términos no lineales son evaluados transformando a una grilla horizontal. Se conserva la masa.

En el Apéndice se da una breve descripción del modelo y sus ecuaciones.

La versión del modelo empleada aquí es la del Grupo de Climatología Dinámica del GFDL. Los procesos de radiación, humedad, capa límite y difusión vertical fueron eliminados (Mechoso, 1980).

En la fig. 6 se muestran los 32 niveles del modelo para el perfil de temperatura standard de latitudes medias. En la tabla V se dan los valores de σ y de las alturas. En la parte superior, el modelo tiene 10 puntos por longitud de onda del modo principal propagante diario.

Fig. 6



Niveles del modelo y temperatura básica.

TABLA V

Niveles del modelo Nivel	σ	Altura para perfil standard de latitudes medias de temperatura
1	.000012	78.8
2	.000024	74.9
3	.000052	70.7
4	.000090	66.5
5	.00015	63.1
6	.000254	59.2
7	.00038	56.1
8	.00056	53.1
9	.00082	50.1
10	.0012	47.1
11	.0018	43.9
12	.0027	40.8
13	.0040	37.7
14	.006	34.9
15	.0088	32.2
16	.013	29.5
17	.019	26.9
18	.029	24.0
19	.043	21.5
20	.063	19.1
21	.094	16.5
22	.14	14.0
23	.20	11.4
24	.31	8.7
25	.45	6.2
26	.55	4.8
27	.67	3.2
28	.77	2.1
29	.83	1.5
30	.89	.97
31	.94	.52
32	.97	.25

El modelo es hemisférico y simétrico, sin topografía. Tiene 15 ondas en latitud, de las cuales se consideran solamente las simétricas. El máximo número de onda longitudinal fue tomado 1 o 2. La truncación es romboidal.

Se toma un término de difusión horizontal lineal de la forma $-k \nabla^4$ en las ecuaciones A.1, A.2 y A.4 del apéndice. La constante es $K = 10^{24} \text{ cm}^4/\text{s}$ equivalente a un tiempo de amortiguamiento de 30 días para número de onda meridional 15.

La función de calentamiento de marea es expandida en armónicos esféricos e introducida como un término de calentamiento diabático en cada paso de tiempo en la ecuación termodinámica A.4.

La condición de contorno superior adecuada para la marea diaria es la "condición de radiación", esto es, propagación de energía hacia arriba en el infinito.

En el modelo numérico esta condición es simulada por una capa esponjosa disipativa. Yanowicz (1967) obtuvo que el coeficiente de reflexión de una onda que se propaga en un medio con viscosidad cinemática que aumenta exponencialmente es $e^{-2\pi^2 H/\lambda_z}$, siendo H la escala de altura de la atmósfera y λ_z la longitud de onda vertical. Para la marea diaria es $e^{-2\pi^2 H/\lambda_z} \leq e^{-5}$, por lo tanto este medio debería simular la condición de radiación correctamente.

La capa esponjosa consiste de los seis niveles superiores del modelo, ubicados entre los 60 y 80 km de altura, de modo que la profundidad de la capa absorbente es del orden de una longitud de onda del modo principal de la marea diaria. Para obtener esta capa esponjosa se introdujeron términos de fricción de Rayleigh y enfriamien

to newtoniano en las ecuaciones A.1, A.2 y A.4 del apéndice en la forma

$$F \begin{matrix} \xi \\ 0 \\ r \end{matrix} = -K \cdot \begin{matrix} \xi \\ 0 \\ (T-T_0) \end{matrix}$$

En la fig.7 se muestran los tiempos de amortiguamiento K^{-1} . Estos tiempos varían entre dos días para el nivel 6 y $\xi = .04$ días = $4\Delta t$ para el nivel 1 (ξ debe ser $\geq 2\Delta t$ para la estabilidad del esquema de diferenciación temporal hacia atrás de Euler que ha sido aplicado a este término).

III.3 Validación del modelo numérico

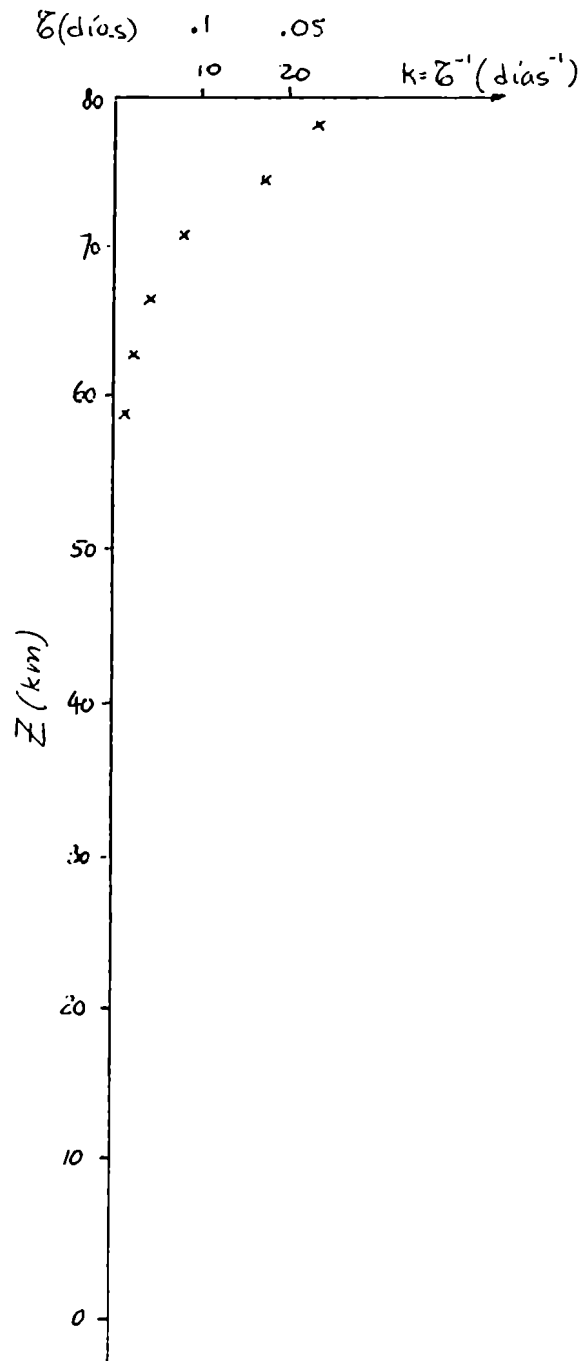
III.3.a Modelo numérico lineal

Se realizó una comparación entre el modelo numérico lineal y una solución analítica con condición de radiación obtenida por expansión en una base separable en términos de funciones de Hough.

La función de calentamiento es la misma que en los modelos simplificados de calentamiento zonalmente simétrico por vapor de agua y ozono introducidos por Lindzen (S. Chapman y R. Lindzen, 1970). Se expandió la función de calentamiento en las dos funciones de Hough más graves con profundidades equivalentes positivas y las dos más graves con profundidades equivalentes negativas, que fueron truncadas en $P'_{11}(\cos \theta)$.

Se corrió el modelo numérico por quince días, comenzando de un estado de no movimiento, y con campos de número de onda zonal uno solamente. Para esto se corrió el modelo con números de onda zonales cero y uno, y al final de cada paso de tiempo se igualaron los coe

Fig. 7



Tiempos de amortiguamiento, K^{-1} (días).

ficientes de las variables de número de onda zonal cero a los valores al comienzo del cálculo. De esta manera se incluyen todos los términos lineales en el forzado.

Con este esquema, también quedan introducidos en el modelo algunos términos no lineales: los términos de producto triple en la ecuación de temperatura A.4 del apéndice. Usando A.5 y A.8 la ecuación de temperatura es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot T'V - T'D - F_T - \frac{Q}{c_p} - \left[\int_0^\sigma d\sigma (\nabla_H \cdot V - \nabla_H \cdot \tilde{V}) \right] \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{RT}{\sigma c_p} \right) \\ + \frac{RT}{c_p} \nabla_H \cdot \tilde{V} = - \left(\int_0^\sigma d\sigma (V - \tilde{V}) \cdot \nabla \ln p_* \right) \left(- \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \frac{RT}{\sigma c_p} \right) \\ + \frac{RT}{c_p} (V - \tilde{V}) \cdot \nabla \ln p_* \end{aligned}$$

donde $N^2 = - \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \frac{RT}{\sigma c_p}$. Los términos en el miembro de la derecha de esta ecuación son términos de producto triple, que provienen de los términos $\frac{RT}{c_p} \frac{\omega}{p}$ de la ecuación A.4.

Hay una contribución no lineal a la tendencia de temperatura de número de onda uno proveniente del triple producto de variables con este número de onda, de modo que con este esquema se incluyen algunas no linealidades triples. Como no se incluyen no linealidades cuadráticas, y el término de correlación triple es generalmente pequeño, nos referimos a este caso como lineal.

Para la comparación se tomó como estado básico a una atmósfera sin movimiento con una temperatura constante $T=260^\circ\text{K}$.

Se compararon los campos numéricos al día quince con una solución analítica obtenida por separación de variables. La solución analítica fue obtenida por el método descrito en Chapman y Lindzen (1970), que consis-

te en la superposición de términos separables en la dependencia horizontal y vertical. La dependencia horizontal es resuelta por funciones de Hough, y la ecuación de estructura vertical es resuelta en diferencias finitas por un método de Richtmyer (1957). Este método consiste en la aplicación de la condición de contorno inferior, eliminación yendo hacia arriba para una combinación lineal de la solución de dos puntos de grilla consecutivos, aplicación de la condición de contorno superior y eliminación hacia abajo para la solución. Los 200 km más bajos de la atmósfera fueron divididos en 2000 intervalos. Se tomó una temperatura del estado básico constante entre 100 y 200 km, donde se aplicó la condición de contorno superior. La función de calentamiento es la misma que en el modelo numérico; para esto se expandieron las funciones de Hough más graves con profundidades equivalentes positivas y las 10 más graves con profundidades equivalentes negativas.

Se corrió el modelo por quince días, porque en este tiempo las ondas más cortas resueltas en el modelo tienen tiempo suficiente para viajar en el dominio vertical del modelo. La velocidad de grupo vertical para una onda de gravedad, despreciando esfericidad y rotación es $C_g = \frac{d\omega}{d\gamma} = \frac{d}{d\gamma} \frac{N|k|}{\gamma} = -\frac{N|k|}{\gamma^2} = -\frac{\lambda_v}{T}$, con γ el número de onda vertical, k el número de onda horizontal, λ_v la longitud de onda vertical y T igual a un día, el período de la onda. Los modos más graves que se propagan tienen longitudes de onda de 28 km, 17 km y 7 km, y entonces velocidades de grupos verticales de 28 km/día, 17 km/día y 7 km/día. Este último modo es el más corto resuelto con el espaciamiento vertical de 3 km del modelo, y puede viajar a lo largo de toda la altura del modelo en 15 días.

La diferencia entre la solución numérica y la

analítica puede provenir de el esquema de diferenciación vertical, la diferenciación temporal, la condición de contorno superior y el término de correlación triple.

No hay error en la dependencia horizontal, ya que ésta es resuelta exactamente en la base espectral truncada.

El ciclo temporal de un día contiene 96 pasos de tiempo. Entonces el error de la diferenciación temporal es muy pequeño.

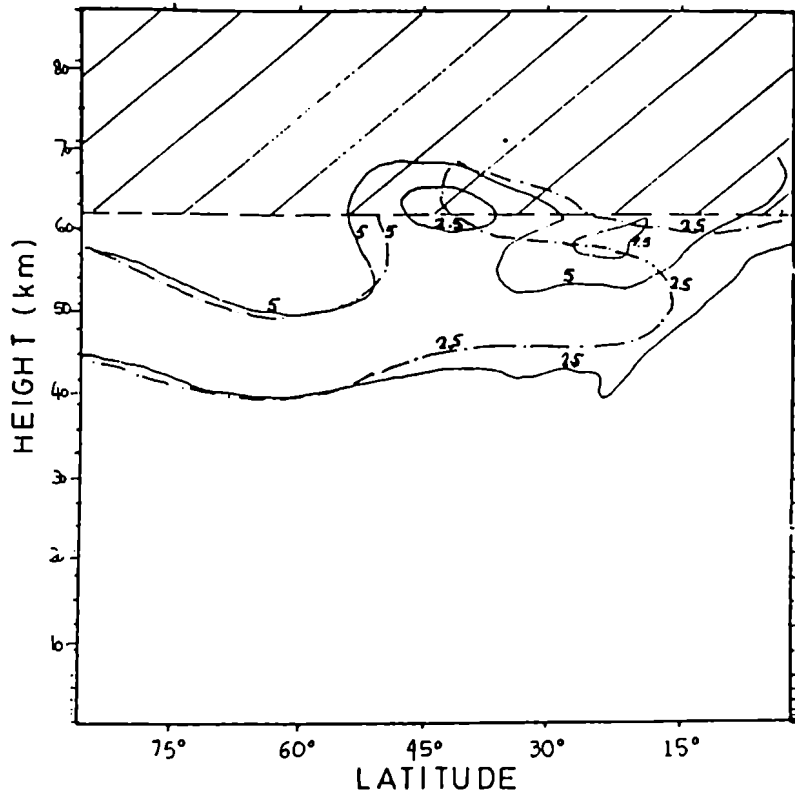
La diferenciación vertical introduce un error apreciable. A menos que el término de correlación triple que en general es muy pequeño se hiciera importante, todo el error proviene de la diferenciación vertical en la región modelada y en la capa esponjosa. Como se mencionó anteriormente, la condición de radiación para la marea diurna puede ser simulada por una capa absorbente esponjosa, pero la discretización en la coordenada vertical puede causar error adicional.

Para probar si la condición de radiación está bien reproducida en el modelo se forzó el modelo con el modo principal propante diario. Por debajo de la capa esponjosa, la amplitud y fase numérica reproduce muy bien los valores analíticos con condición de radiación. Sin embargo no se probaron por separado los modos propagantes más cortos. La resolución vertical pobre del modelo para estos modos dentro de la capa esponjosa podría causar reflexiones y entonces errores adicionales en la región por debajo de la capa límite.

Las fig. 8 y 9 muestran la comparación entre las soluciones analítica y numérica para la velocidad del oeste.

Fig. 8

WESTERLY VELOCITY
AMPLITUDE

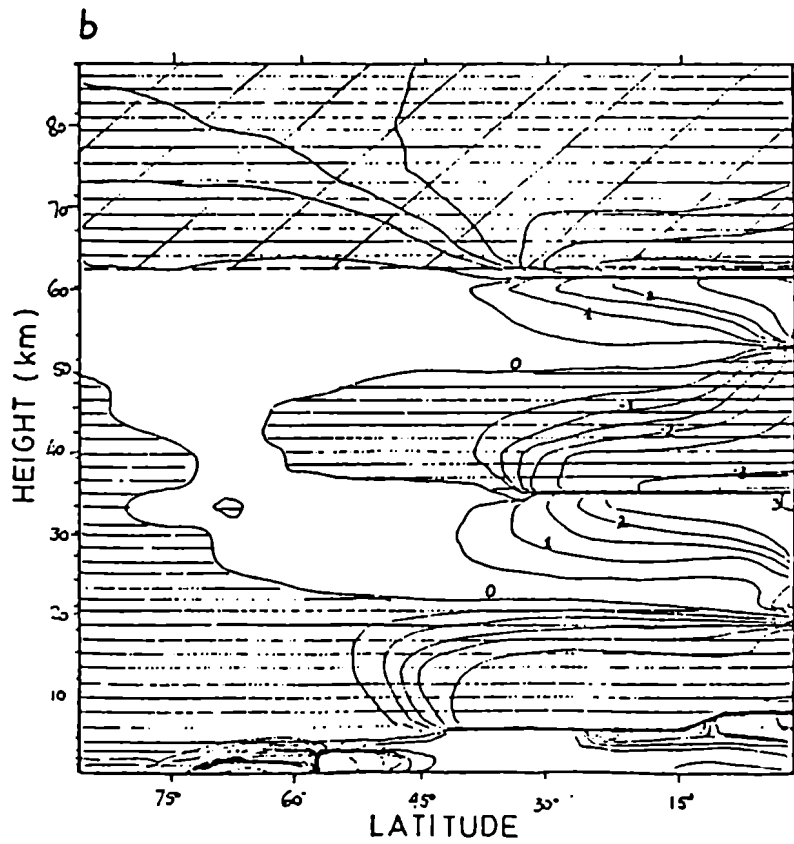
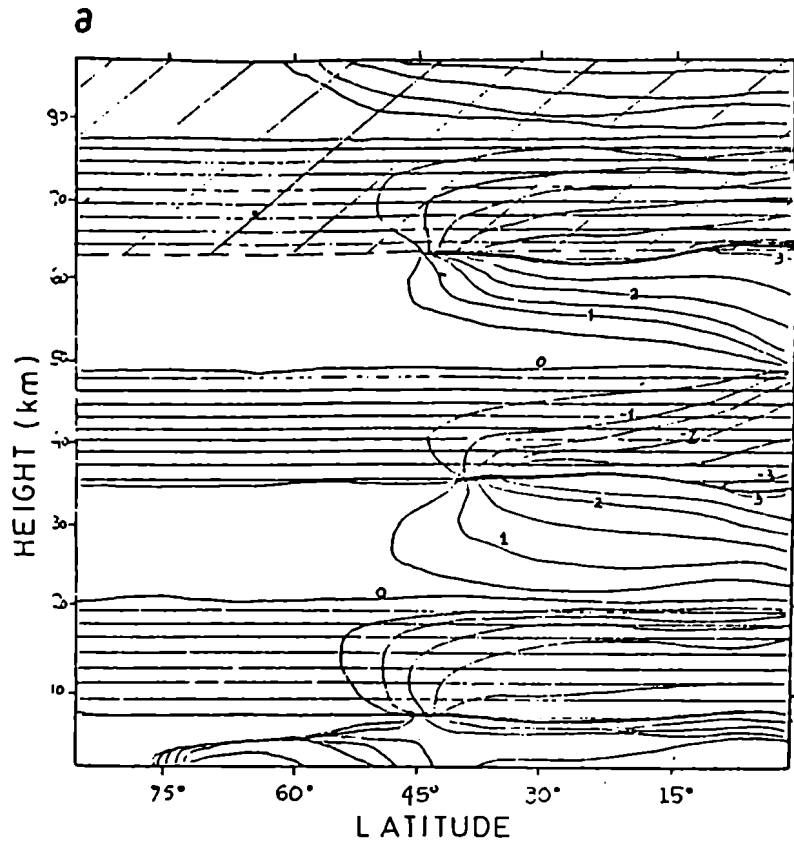


Amplitud de la velocidad del oeste

———— analítico

- - - - - numérico

WESTERLY VELOCITY
PHASE



Fase de la velocidad del oeste

a: analítica

b: numérica

Las diferencias dependen de la zona de latitud, ya que los campos diarios de marea son superposición de soluciones forzadas y modos libres, de los que hay dos clases con características diferentes. Los modos que se propagan verticalmente tienen las mayores amplitudes hacia el ecuador de 30 grados y fases que progresan con la altura. Los modos atrapados verticalmente tienen máxima amplitud hacia el polo de la latitud inercial y fase constante con la altura.

Hacia el polo de 55 grados, donde predominan los modos atrapados, hay buen acuerdo entre las soluciones numérica y analítica. La interferencia entre modos no es reproducida exactamente, como ocurre en la fase cerca de la superficie a 60 grados de latitud.

Entre los 35 y los 55 grados están presentes ambos tipos de modos. Hay mayores errores en las amplitudes, y en la solución numérica la región donde hay propagación de fase con la altura está desplazada hacia el ecuador.

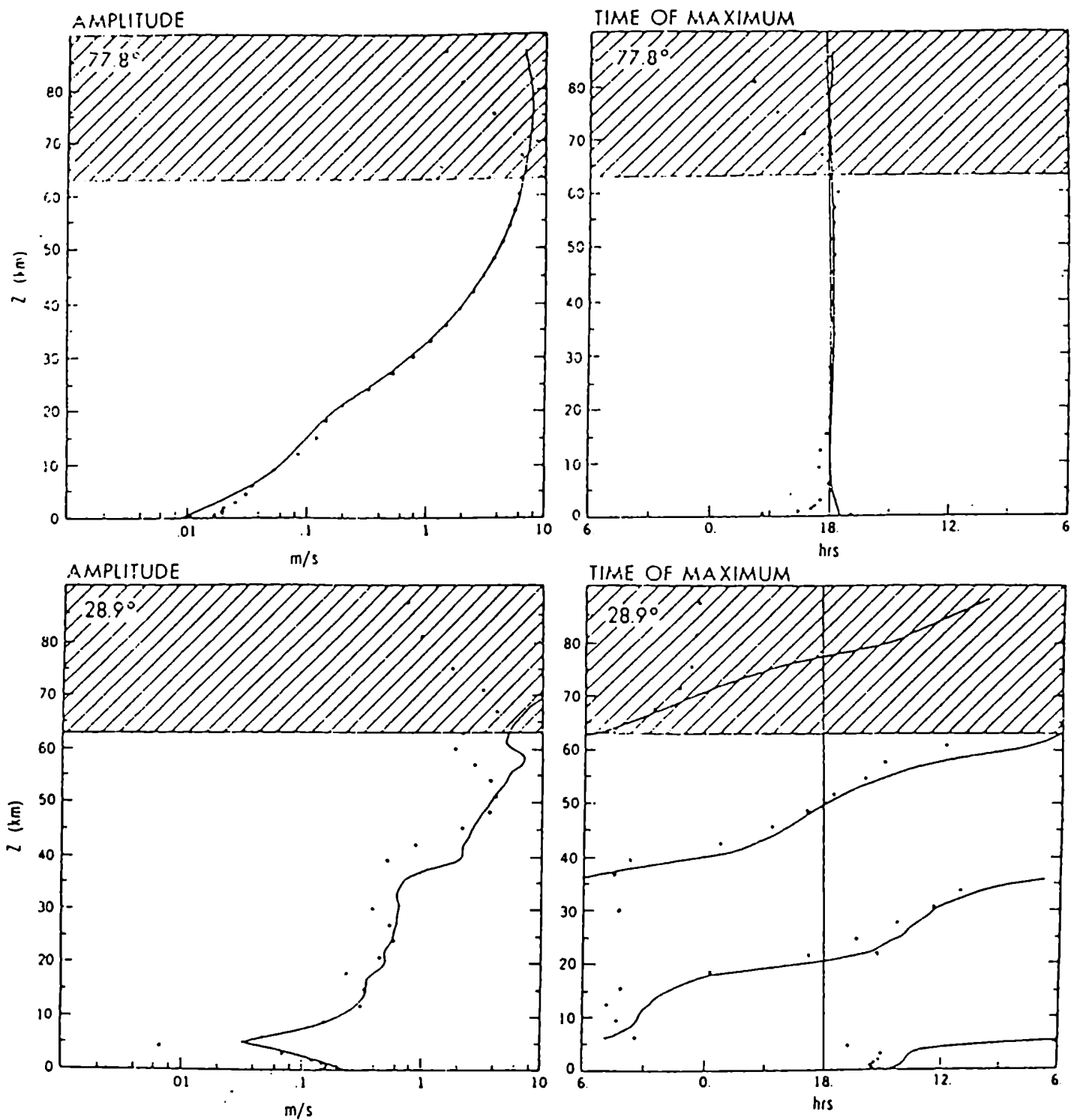
Las mayores diferencias en amplitudes aparecen hacia el ecuador de 30 grados, donde los campos son el resultado de la interferencia entre los modos propagantes. Se reproducen algunas características de la figura de interferencia como la ubicación aproximada de los máximos y los mínimos.

La fig. 10 muestra un perfil vertical de la comparación para una latitud alta donde el acuerdo es bueno, y para la latitud inercial donde es más pobre. En los trópicos hay errores en amplitudes y fases, y la figura de interferencia está distorsionada.

En la zona de menor resolución, el modelo tien

Fig 10

WESTERLY VELOCITY



Comparación de soluciones analítica y numérica de marea. Línea llena: analítica; puntos: numérica.

ne 10 puntos por longitud de onda vertical del modo principal propagante diario. Para tener buena resolución para los dos primeros modos propagantes, y el tercer modo pobremente resuelto, un espaciamiento vertical adecuado para la grilla es de 1 kilómetro.

III.3.b. Validación del modelo numérico no lineal

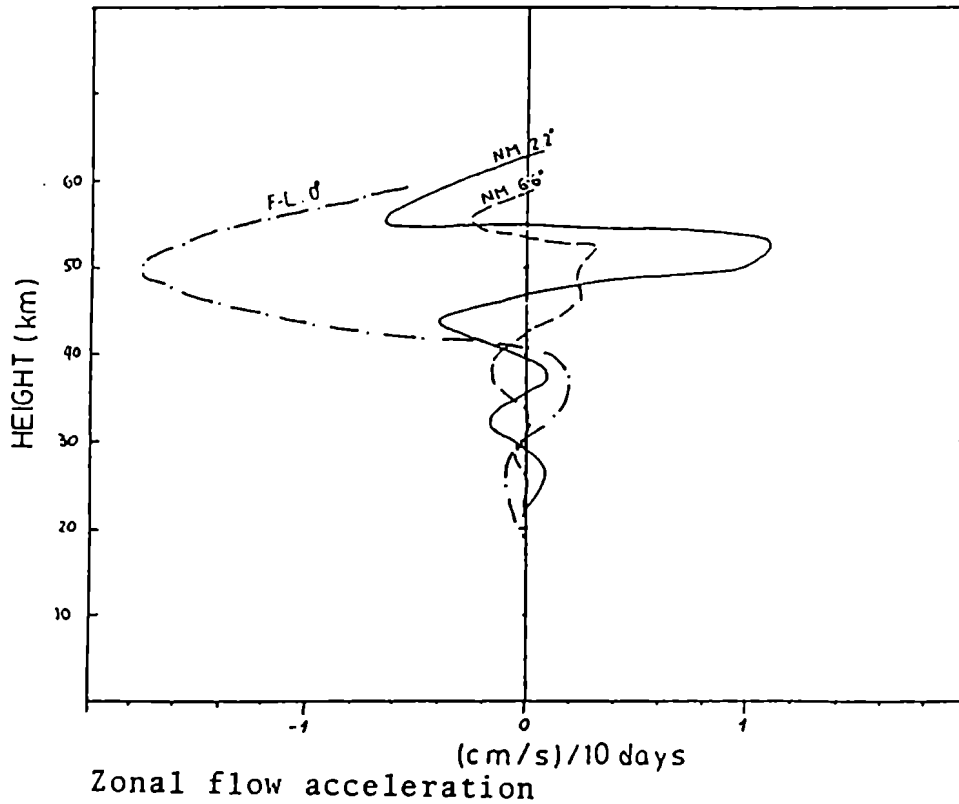
Se obtuvieron soluciones no lineales a partir de las soluciones del caso lineal. Para eso, el modelo, inicializado con la solución lineal al día quince, fue corrido con ondas zonales cero a dos entre el día 15 y el día 35. Estos números de onda contienen todos los términos cuadráticos debidos a la marea.

En el modelo numérico se obtienen aceleraciones en el flujo medio. Desde el comienzo del cálculo no lineal, la velocidad zonal y la temperatura de número de onda cero varían uniformemente con el tiempo, debido a la convergencia de los flujos de marea de cantidad de movimiento y calor en la zona de forzado.

En la fig. 11 se muestran las aceleraciones numéricas del flujo medio para dos latitudes distintas obtenidas con las funciones de calentamiento de Lindzen para ozono y vapor de agua. También se muestran como comparación los resultados analíticos de Fels y Lindzen (1974).

No hay buen acuerdo entre los resultados analíticos y numéricos. Esto se debe a que la resolución vertical del modelo es pobre para obtener los flujos de cantidad de movimiento y calor correctamente.

Fig 11



Aceleración del flujo medio

- . - . - Fels y Lindzen analítico a 0°
- — — modelo numérico 2.2°
- - - - - modelo numérico 6.6°

III.4 Experimentos numéricos.

Con el modelo se calcularon dos experimentos numéricos. En un primer caso se forzó el modelo con la función de calentamiento de Lindzen para ozono y vapor de agua. En un segundo caso, se introdujo la misma función de calentamiento para ozono y vapor de agua y un calentamiento diario de la capa límite. Nos referimos a estos casos como caso a (marea) y caso b (marea y capa límite).

El estado básico para estos experimentos es una atmósfera sin movimiento con el perfil de temperatura de latitudes medias (fig. 6). En ambos experimentos, se corrió el modelo por quince días, solamente con campos de número de onda uno, como se discute en la sección III .3.a. Aunque en este esquema están presentes los términos no-lineales de productos triples, que generalmente son muy pequeños, llamamos a estos casos lineales. Después del día quince, se obtuvieron soluciones no-lineales, para lo cual se deja evolucionar libremente los campos con números de onda zonales 0 a 2, desde el día 15 hasta el día 35.

En el caso b, además del calentamiento diario por ozono y vapor de agua, se simuló una capa límite atmosférica diaria. Para el calentamiento de capa límite se tomó una forma latitudinal sencilla y una amplitud representativa de los valores observados para el promedio zonal de esta fuente de calor.

En el modelo se simuló el calentamiento diario de la capa límite introduciendo calentamiento y disipación en la componente de la temperatura con número de onda zonal uno. La temperatura con número de onda zonal uno es forzada a seguir una temperatura diaria de capa límite,

introduciendo en la ecuación de temperatura A.4 el siguiente término:

$$\frac{DT}{Dt} \epsilon^{-1}(1,2) = \text{términos normales de tendencia} - A(\bar{T}(1,2) \epsilon^{-1} - T(1,2) \epsilon^{-1})$$

donde $T(n,m)$ son los coeficientes del armónico esférico

$$Y_{m-1}^{n-1} = P_{m-1}^{n+m-2}(\cos \theta) e^{i(m-1)\varphi}$$

de modo que $\bar{T}(1,2)$ es proporcional a $P_1'(\cos \theta)$. Se tomó \bar{T} con un máximo a 14 hrs. de tiempo local en la forma

$$\bar{T}(1,2) = \begin{cases} T_0(z) + (1.8 \text{ km} - z) \frac{100}{\text{km}} e^{-i\omega_0(\Delta t \bar{\sigma} - 14 \text{ hrs})} & \text{para } z < 1.8 \text{ km} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para la estabilidad del esquema de diferenciación temporal euleriano hacia atrás, debe ser $A \leq 1/(e \Delta t)$; se tomó $A = 1/(4 \Delta t) = \frac{1}{60 \text{ min}}$.

Este modelo para capa límite tiene un fuerte amortiguamiento para el número de onda uno dentro de la capa límite, ya que tiene un coeficiente de enfriamiento newtoniano A para este número de onda.

Entonces esta forma de capa límite subestimaría posibles resonancias en esa capa en que intervenga el número de onda zonal uno.

III.4.a Resultados numéricos lineales.

En esta sección se comparan los resultados numéricos lineales para los campos principales de marea diaria producidos por ozono y vapor de agua (caso a) con

los del caso b, producidos por el mismo calentamiento de marea y el calentamiento por la capa límite.

Las fig. 12 a 14 muestran la amplitud de la velocidad zonal, velocidad meridional y temperatura para ambos casos al día 15 del experimento lineal.

Hay diferencias entre ambos casos, no solo cerca de la capa límite sino también a mayores alturas. Las fig. 15 y 16 muestran la amplitud de la diferencia entre los campos de los dos casos debajo de la capa esponjosa, que serían exactamente los campos producidos por la capa límite si el término de correlación triple pudiera despreciarse.

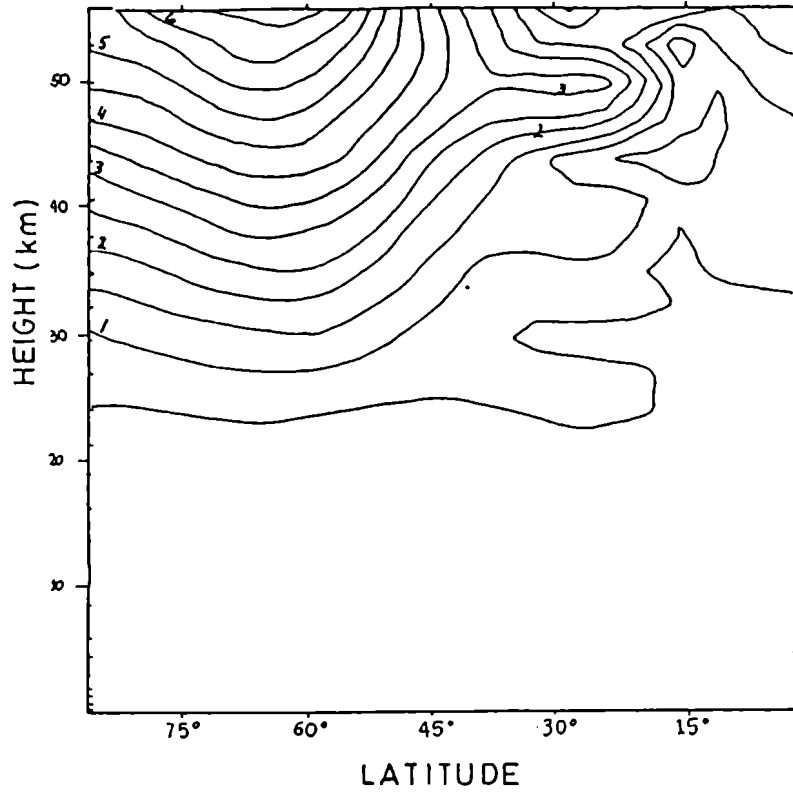
La marea producida por la capa límite es significativa en los niveles altos del modelo, debido a que se excitan modos que se propagan. Las mayores velocidades aparecen hacia el ecuador de la latitud inercial, y la temperatura es mayor cerca del ecuador. Los máximos valores son .8 m/s para la velocidad zonal y 1.6 m/s para la velocidad meridional en los trópicos, y .7 y .4 grados para la temperatura a 0 y 15 grados de latitud. Para la marea, las velocidades zonal y meridional a 60 km de altura y en los trópicos son 2.5 y 5 m/s. Los campos excitados por la capa límite son 15 a 30 % de los campos tropicales de marea.

La fig. 16 muestra que además de las diferencias entre los casos a y b ya descritas, hay pequeñas diferencias de temperatura, .1 a .2 grados, que se extienden hasta el polo, para las que no hay una interpretación clara en términos de modos lineales.

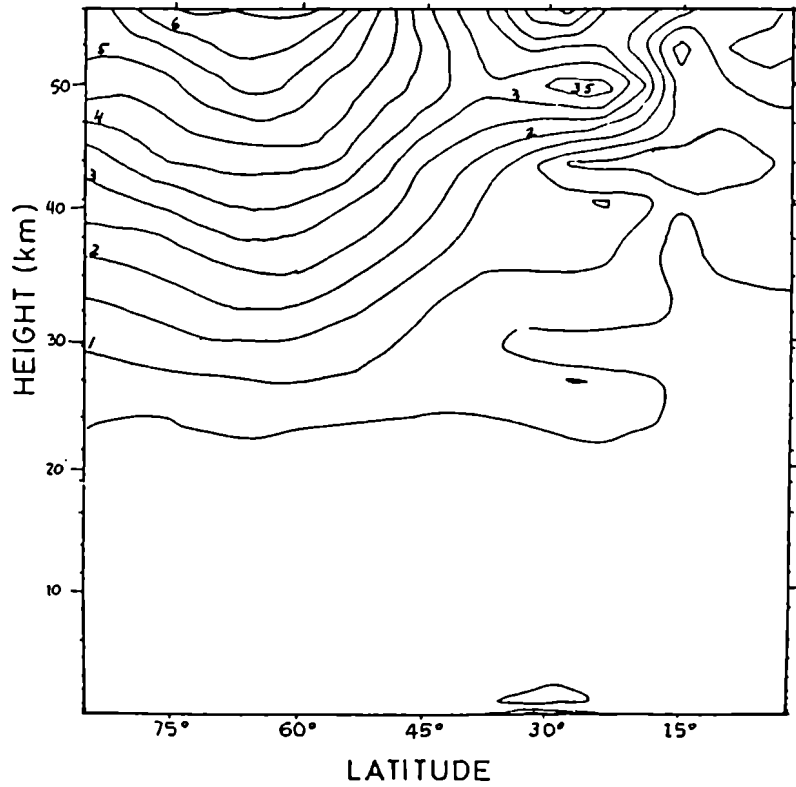
Fig. 12

ZONAL VELOCITY

caso a



caso b

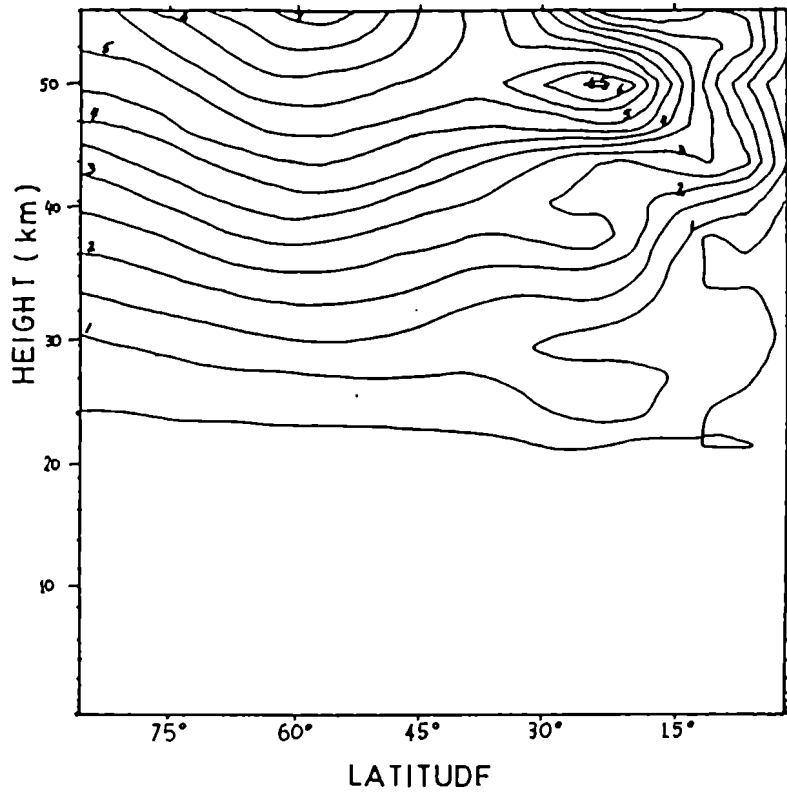


Amplitud de velocidad zonal numérica

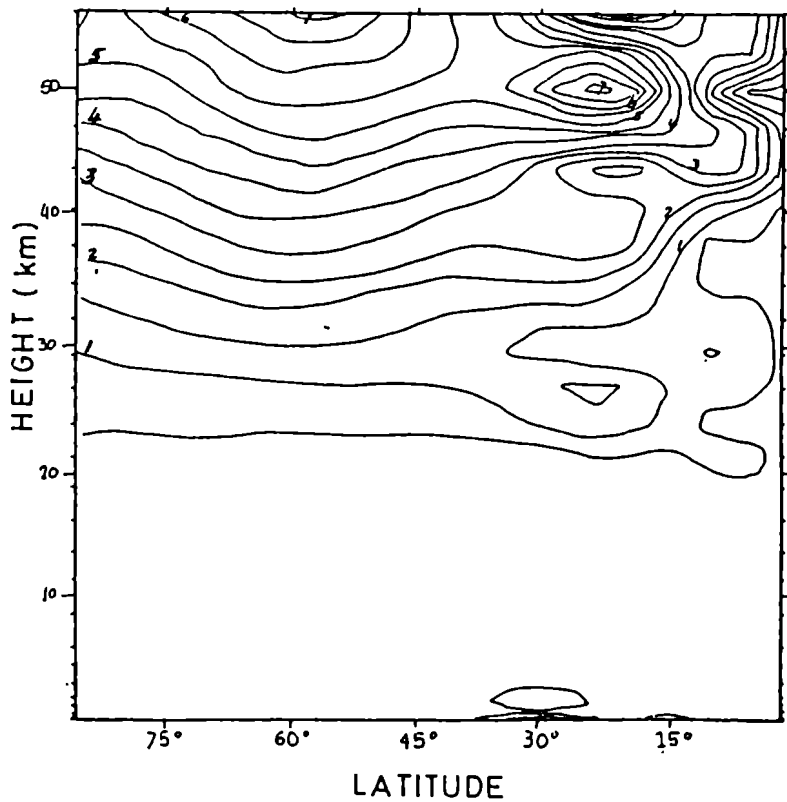
Fig. 13

MERIDIONAL VELOCITY

caso a



caso b

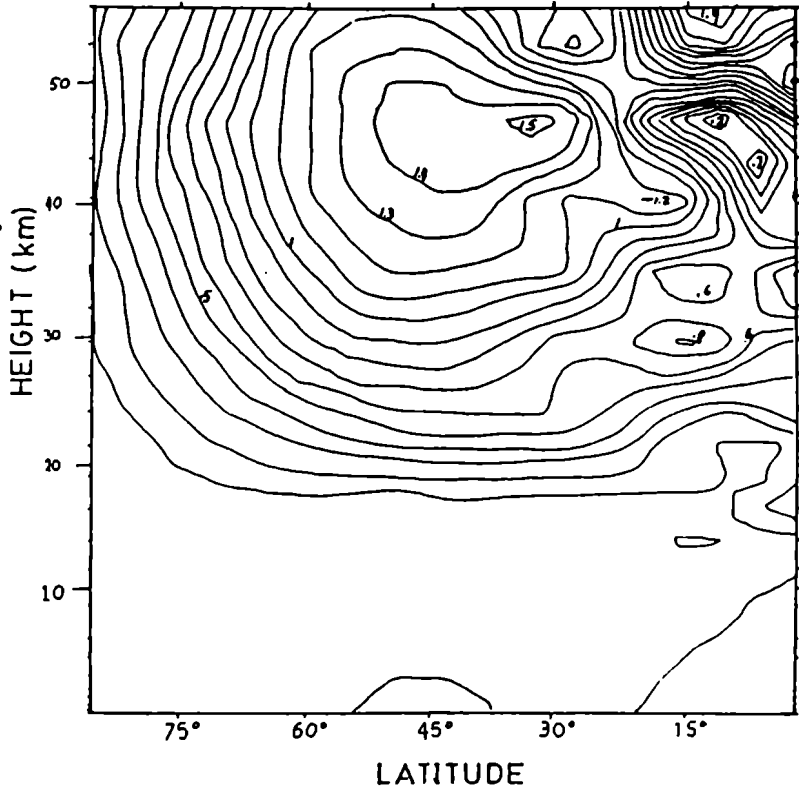


Amplitud de velocidad meridional numérica

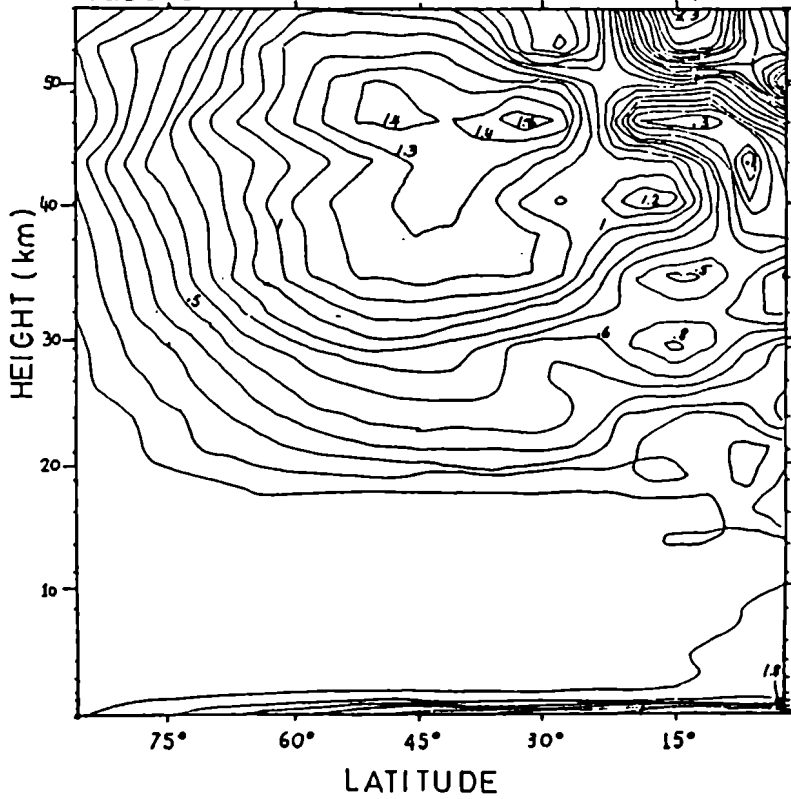
Fig. 14

TEMPERATURE

caso a



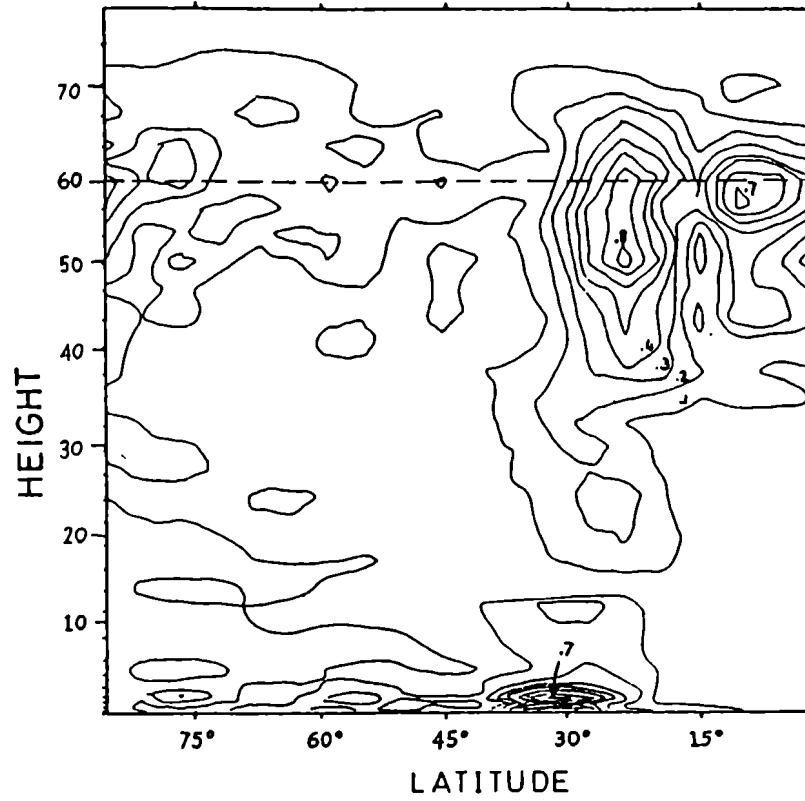
caso b



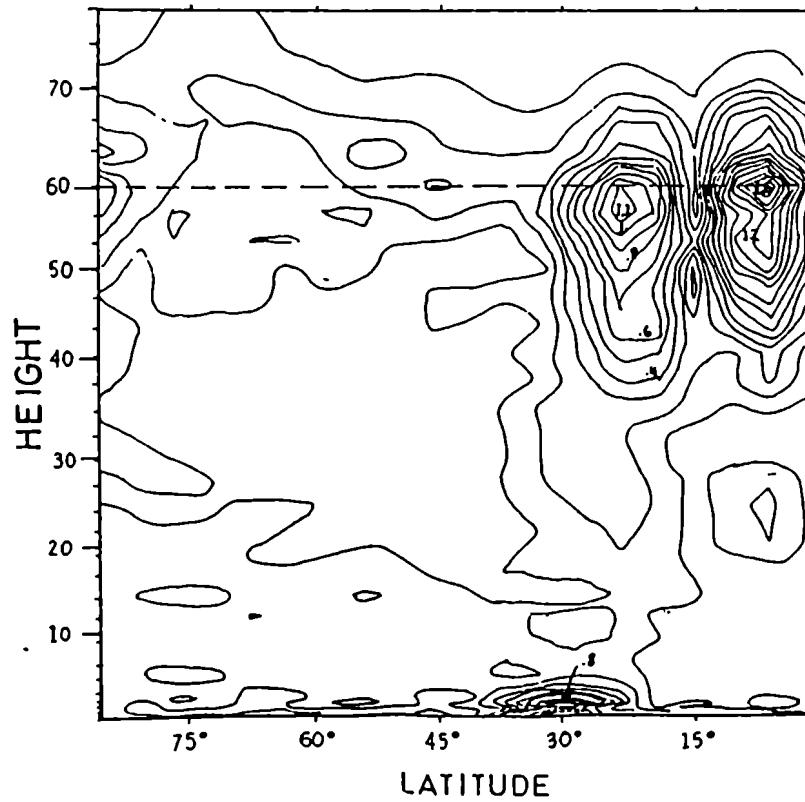
Amplitud de temperatura numérica

Fig. 15

ZONAL VELOCITY

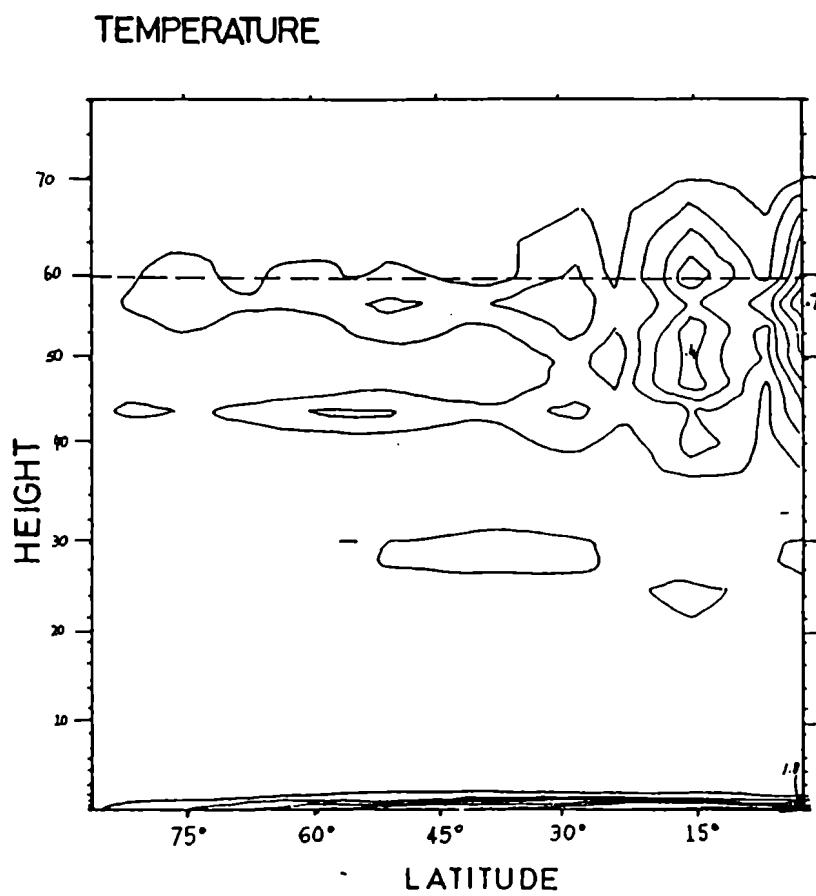


MERIDIONAL VELOCITY



Campos para caso b - caso a. Amplitudes.

Fig. 16



Amplitud de temperatura caso b - caso a

La dependencia de la fase con la altura muestra una longitud de onda vertical predominante de 15 km. La contribución del calentamiento de la capa límite a la presión de superficie es .3 mb; la presión de superficie debida a marea y capa límite resulta .7 mb en el ecuador, mientras que las observaciones muestran un valor de .6 mb. Incluyendo esta estimación del calentamiento por capa límite se obtiene mejor acuerdo con las observaciones, y se invierte el sentido de la diferencia, ya que en general se obtienen menores valores en los cálculos que lo que muestran las observaciones.

En el presente cálculo numérico, la excitación por el calentamiento de la capa límite de los dos modos más graves que se propagan es significativa, y este hecho depende de la proyección de la función de calentamiento en estos modos, y entonces en la forma latitudinal del calentamiento.

En base a estos resultados, en el próximo capítulo se presenta una estimación cuantitativa del calentamiento por capa límite como fuente de mareas, basada en datos más nuevos y más completos para el calentamiento de la superficie terrestre.

Otra característica de la solución numérica es la presencia de oscilaciones inerciales cerca de la superficie terrestre, con amplitudes de velocidad .7 y .8 m/s sobre la capa límite.

Para ver si estas oscilaciones inerciales grandes aparecen solamente en el modelo numérico, se compararon los valores numéricos con los de una solución analítica por separación de variables descrita en la sección II.3.a, en la que se introdujo el calentamiento de capa límite por medio de una función de calentamiento

de la forma:

$$\frac{Q}{i\omega c_p} = \begin{cases} (1.8 \text{ km} - z) 1^\circ/\text{km} \tilde{P}'_1(\cos\theta) & \text{para } z < 1.8 \text{ km} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\tilde{P}'_1(\cos\theta)$ es una expansión truncada en funciones de Hough del polinomio de Legendre asociado $P'_1(\cos\theta)$.

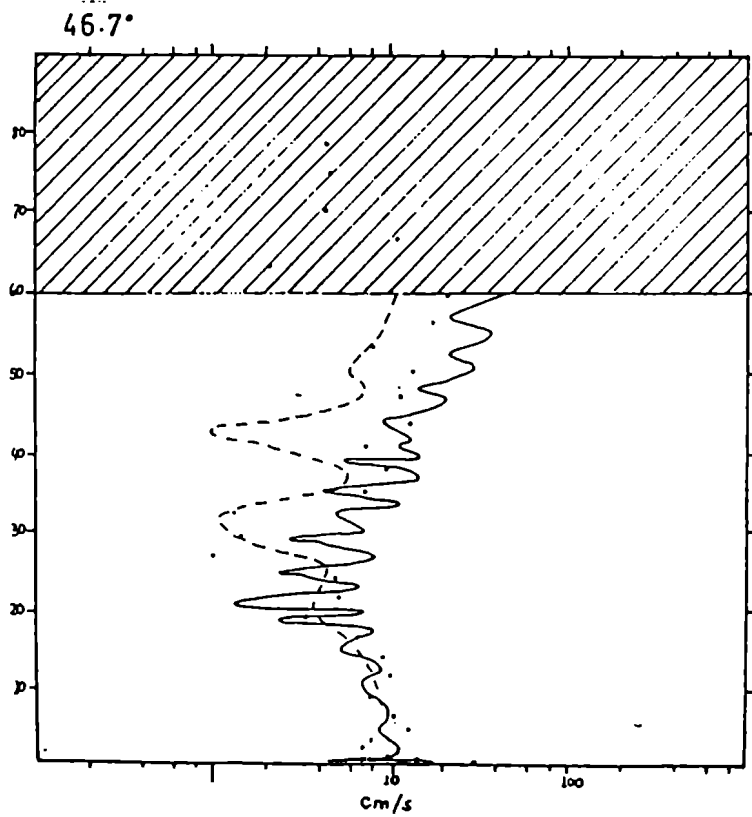
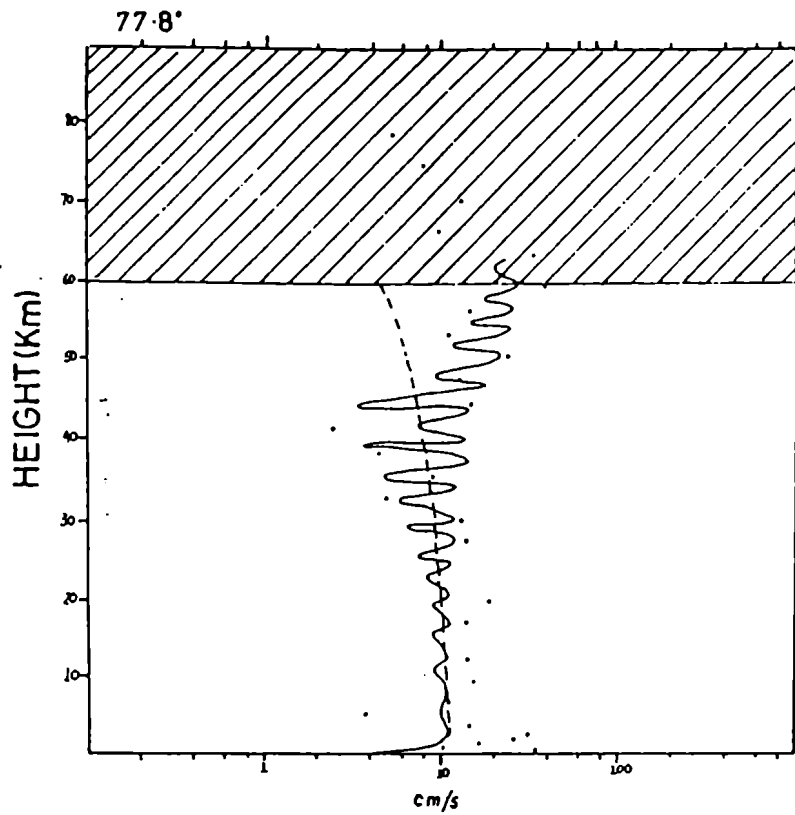
Siendo la resolución vertical del modelo numérico más fina en la baja atmósfera, se hizo la comparación con dos soluciones analíticas que resuelven distintas longitudes de onda verticales: una primera solución que contiene las funciones de Hough $\theta_1, \theta_3, \dots, \theta_{11}$ y $\theta_{-1}, \theta_{-3}, \dots, \theta_{-11}$; una segunda solución que contiene θ_1, θ_3 y $\theta_{-1}, \dots, \theta_{-11}$. Aquí θ_{11} son las funciones de Hough diarias; θ_1 es la función de Hough diaria más grave con profundidad equivalente positiva, y θ_{-1} es la más grave con profundidad equivalente negativa. La normalización y convención de signos es la de Chapman y Lindzen (1970). En las fig. 17 y 18 se muestra la comparación, a las latitudes 77.8, 46.7, 28.9 y 15.6 grados.

Fuera de la capa límite, la solución numérica se compara generalmente bien con la solución analítica truncada a orden más bajo en la estratosfera y mesosfera. En la troposfera la comparación es mejor con la solución que contiene más modos de Hough.

El modo propagante dominante es el segundo simétrico (θ_3), que tiene una longitud de onda vertical de 15 km. Las oscilaciones inerciales en la troposfera son mayores en el modelo numérico (como muestra la comparación a 28.9 grados debajo de 10 km y especialmente a 2 km). No está clara la causa de esta discrepancia. El modelo tiene una resolución vertical más fina en los 5 km más bajos de la atmósfera. Además el experimento numérico ha sido hecho incluyendo el término no lineal de triple correlación. Uno o ambos de estos factores pueden contribuir a la diferencia.

Fig. 17

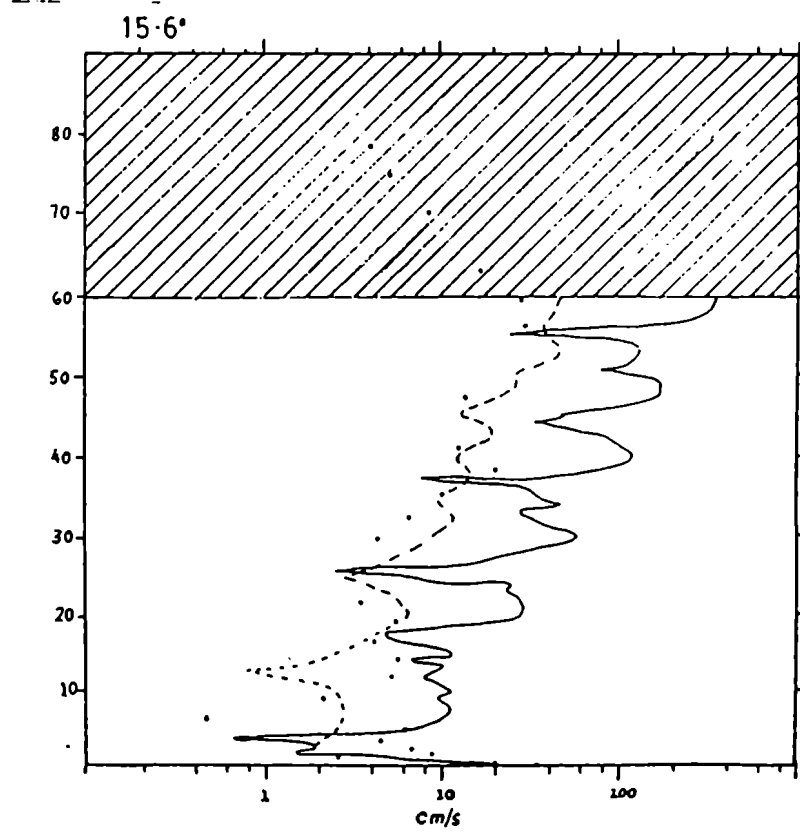
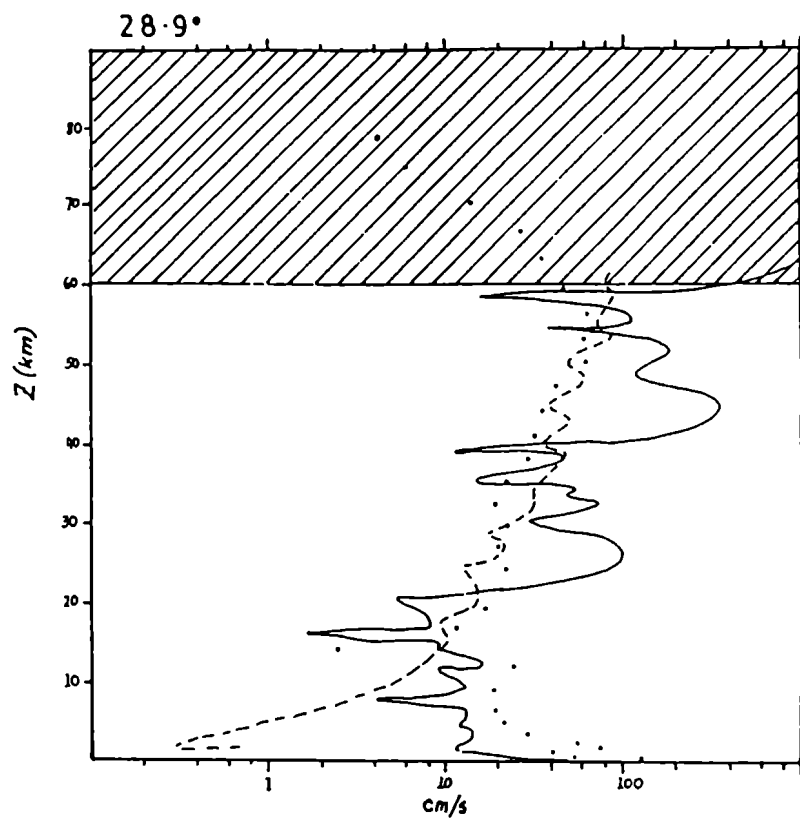
WESTERLY VELOCITY AMPLITUDE



Comparación de solución numérica y analíticas
para calentamiento de capa límite.

Fig. 18

WESTERLY VELOCITY AMPLITUDE



Mismo que fig. 17.

Es interesante notar que un modelo de resonancias en la capa límite con una tapa rígida daría oscilaciones inerciales pronunciadas de un día pero contendrían no solo los números de onda 1 y -1 sino también por lo menos el número de onda cero.

III.4.b. Resultados numéricos no lineales

Se obtuvieron soluciones numéricas no lineales de mareas con el modelo no lineal. Para esto los casos lineales al día 15 fueron extendidos no linealmente hasta el día 35, con números de onda 0 a 2, y con la misma función de calentamiento que en los primeros quince días del caso lineal.

A la evolución del modelo durante los 20 días del cálculo no lineal pueden contribuir efectos lineales y no lineales.

Un efecto no lineal es la aceleración y calentamiento del flujo medio en la zona del forzado. Este efecto no será considerado aquí más en detalle ya que el modelo no tiene suficiente resolución vertical para resolverlo correctamente.

Otro efecto no lineal posible es la excitación resonante de ondas de gravedad que se empezó a discutir en el Capítulo II. Lindzen y Forbes (1983) también se refieren a la posible generación no lineal de turbulencia antes del rompimiento de la marea o de ondas internas de gravedad.

En el capítulo II se encontró que en un modelo con reflexión total sobre la capa límite, las resonancias de primer orden en la amplitud diaria consisten de la onda forzada de marea y dos ondas de gravedad con

números de onda zonal 0 y 1 o 1 y 2, y períodos cerca de dos días. Las resonancias de segundo orden están formadas por dos ondas de número de onda zonal uno, una que viaja hacia el este y la otra hacia el oeste, y números de onda zonales cero y 2 con amplitudes de menor orden.

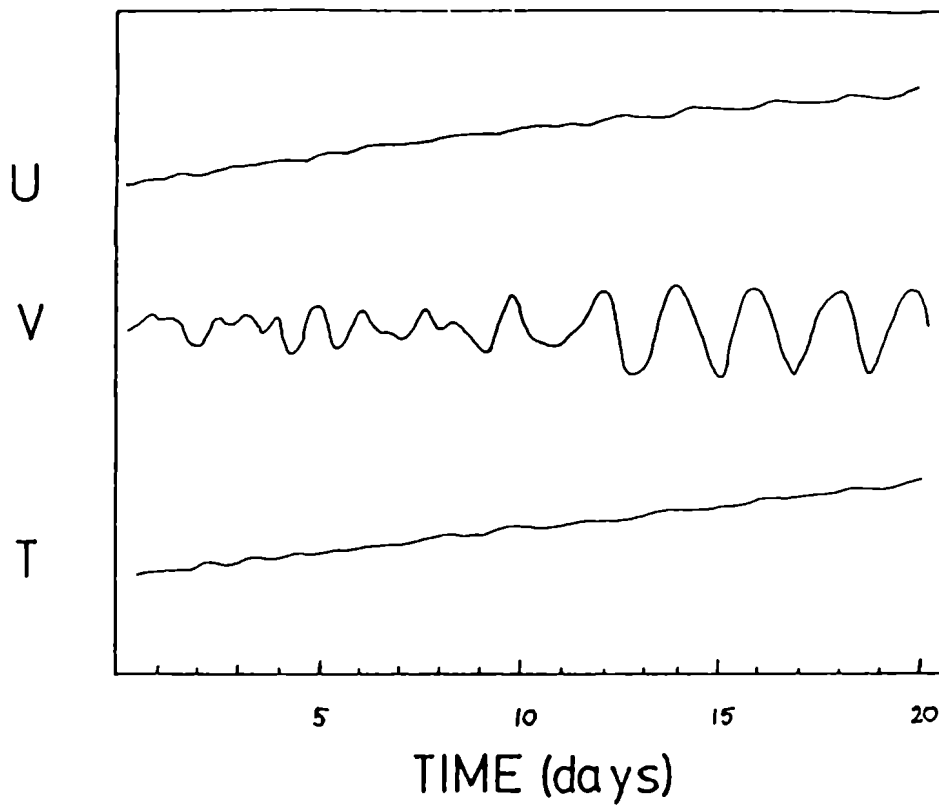
Debido a las escalas temporales involucradas (el tiempo de interacción no lineal, el tiempo de residencia del paquete de ondas en la zona activa y la escala temporal de disipación) solamente habría amplificación apreciable en un modelo con la condición de radiación si las inestabilidades encontradas con la condición de reflexión total en la tapa rígida persisten en un modelo con propagación vertical.

El modelo numérico presente permite obtener una estimación independiente de la importancia de ondas de gravedad secundarias generadas en la capa límite atmosférica y en la mesosfera.

En el modelo numérico hay dos posibles regiones de generación resonante no lineal: la capa límite atmosférica y la mesosfera. Sin embargo, las resonancias en la capa límite atmosférica pueden ser inhibidas por el amortiguamiento efectivo en el esquema numérico.

La fig. 19 muestra la serie temporal para las variables medias zonales en un punto en los trópicos. Hay una oscilación con período dos días, superpuesta a la variación uniforme en temperatura y velocidad zonal forzada por la marea. Una variable adecuada para ver ondas zonalmente simétricas como las que aparecen en las resonancias de primer orden es la velocidad meridional zonalmente simétrica, ya que esta variable está libre de no linealidades forzadas.

Fig 19



Variables del modelo como función del tiempo durante un cálculo no lineal.

Las series temporales para los números de onda zonales 0 a 2 (no mostradas aquí) muestran que hay ondas de pequeña amplitud que se pueden distinguir visualmente además de los predominantes movimientos diarios con número de onda uno. Las siguientes ondas aparecen en las series temporales:

Número de onda zonal	período aproximado	latitud
0	2 días	0°-20°
0	1 día	20°-40°
1	1 día	todas latitudes
1	2 días	trópicos
1	5 días	latitudes altas
2	.5 días	todas latitudes

Un análisis de Fourier de las series temporales en puntos en los trópicos muestra un pico diario significativo al 80%, un pico de dos días justo por debajo del nivel de significancia, y un pico más pequeño de .5 días. También se obtuvieron espectros de máxima entropía para la velocidad meridional con número de onda zonal 0 a 2, en algunas latitudes tropicales. Esos espectros muestran un pico diario, y indicios de algunos picos mucho menores. Para el número de onda zonal cero hay un pico con período entre 2 y 2.5 días; en el número de onda zonal 1, hay un pico en 2.5 días de onda que viaja hacia el este y uno 2 ó 2.5 días hacia el oeste (el pico hacia el este es mayor). En el número de onda zonal 2, hay una indicación de una onda hacia el oeste de dos días y una hacia el este de .5 días. Los picos más grandes están en el número de onda zonal uno. Estos espectros pueden ser interpretados como conteniendo la resonancia de dos días de los números de onda 0 y 1 (y tal vez 1 y 2), y también la onda semidiaria forzada por términos cuadráticos en la marea.

La serie temporal a latitudes altas (no mostrada) muestra que la oscilación de 5 días con número de onda zonal uno es barotrópica, ya que la fase es constante con la altura. Esta onda es identificada como el modo de Rossby de 5 días con número de onda zonal uno, y el mecanismo para su excitación puede ser las condiciones iniciales del modelo.

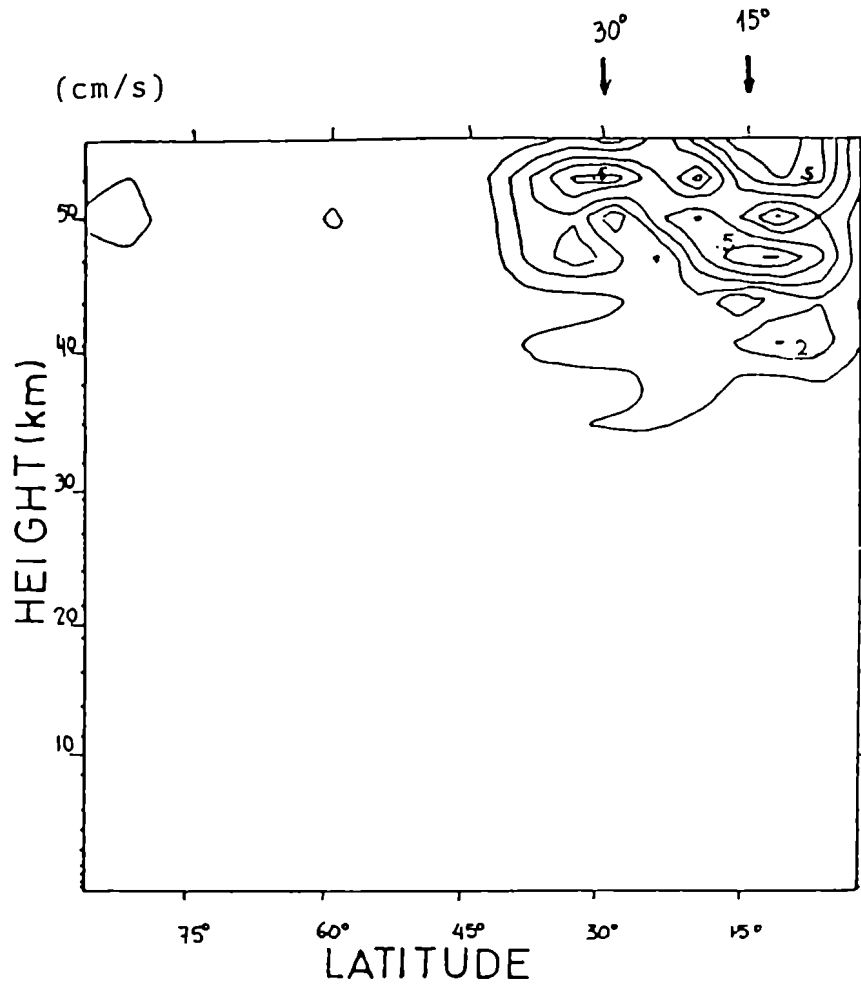
Las fig. 20 y 21 muestran la amplitud instantánea de la velocidad meridional zonalmente simétrica al día 30 para el caso a (marea) y b (mareas y capa límite). Los períodos de las ondas son dos días hacia el ecuador de 20 grados, y un día entre 20 y 40 grados. Esto indica que las perturbaciones son ondas de gravedad, con latitudes de retorno 15 y 30 grados respectivamente. Los períodos concuerdan con los de resonancias.

Las amplitudes de estas ondas de gravedad secundarias son muy pequeñas, en ambos casos, pero mayores para el caso marea y capa límite con un valor máximo de 10 cm/s. Se concluye entonces de este modelo numérico que al menos en el caso presente la excitación de ondas de gravedad secundarias por interacciones débiles no es significativa.

Las fig. 22 y 23 muestran las series temporales de la velocidad meridional zonalmente simétrica para los casos a y b, a alturas desde la superficie hasta la parte superior del modelo, a 15.5 ° de latitud.

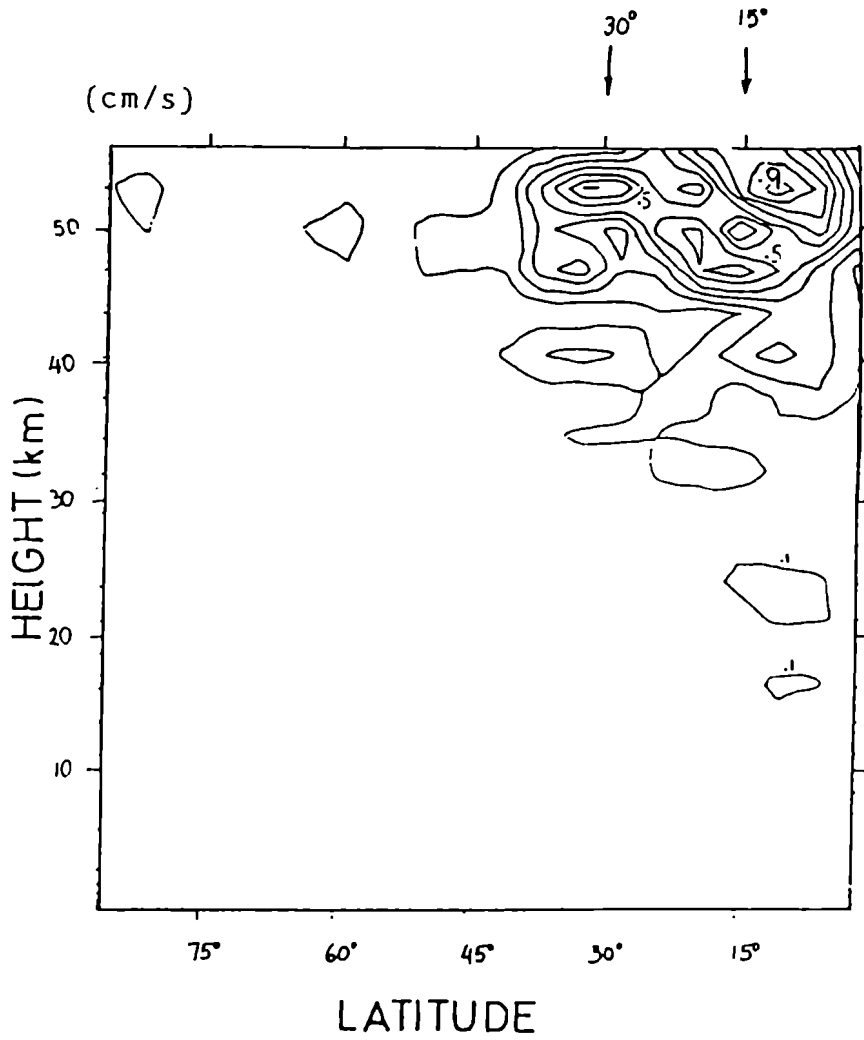
En el caso a (marea), las ondas se originan en la región débilmente no lineal de los niveles superiores del modelo, donde los campos están desbalanceados al principio del cálculo no lineal; desde allí las ondas se propagan hacia abajo. La máxima amplitud es 5 cm/s a 60 km de altura. La onda tiene un período entre 2 y

Fig. 20



Velocidad meridional zonalmente simétrica al día 30. Caso a. Intervalo de contornos .1cm/s.

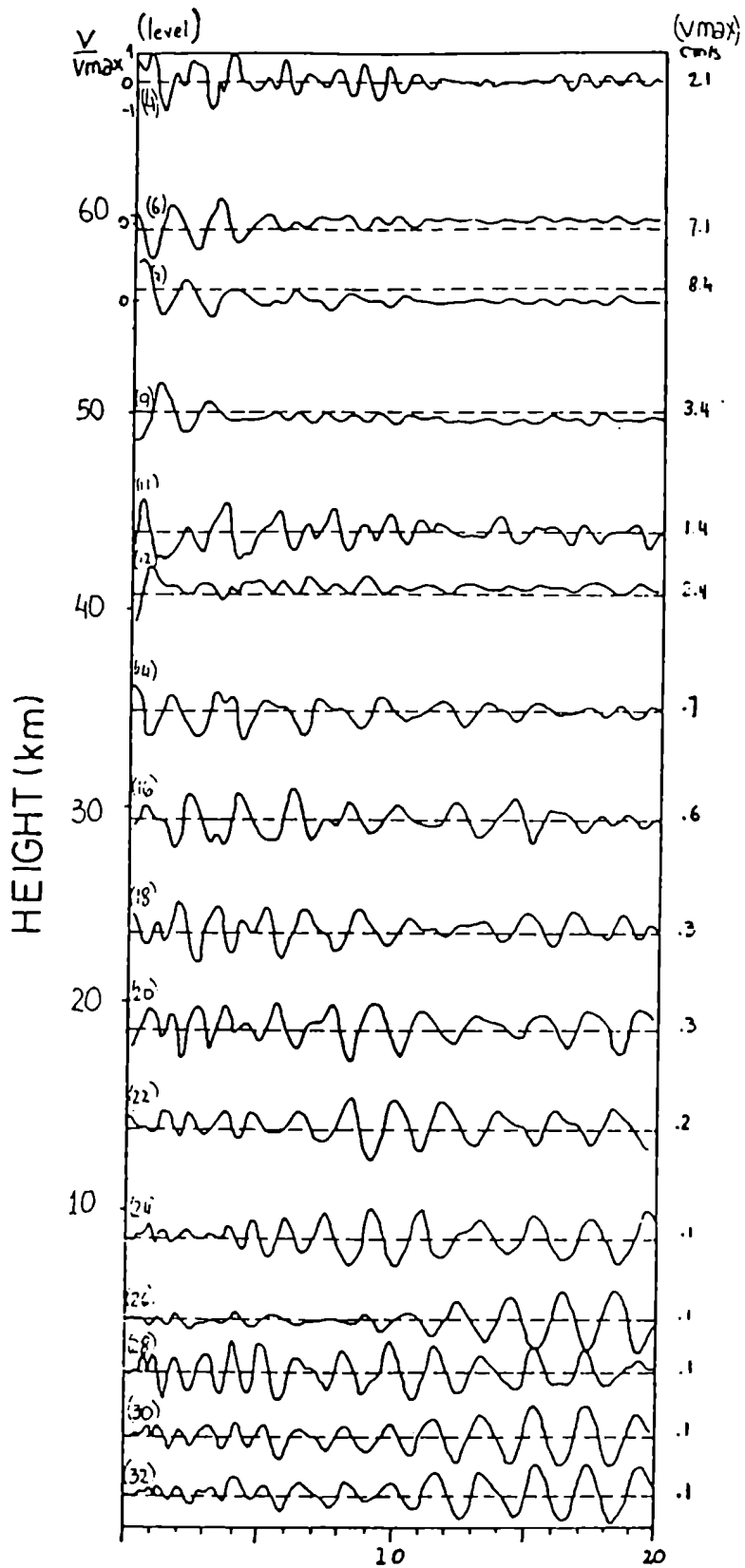
Fig. 21



Velocidad meridional zonalmente simétrica al día 30.
Caso b. Intervalo de contornos: .1cm/s.

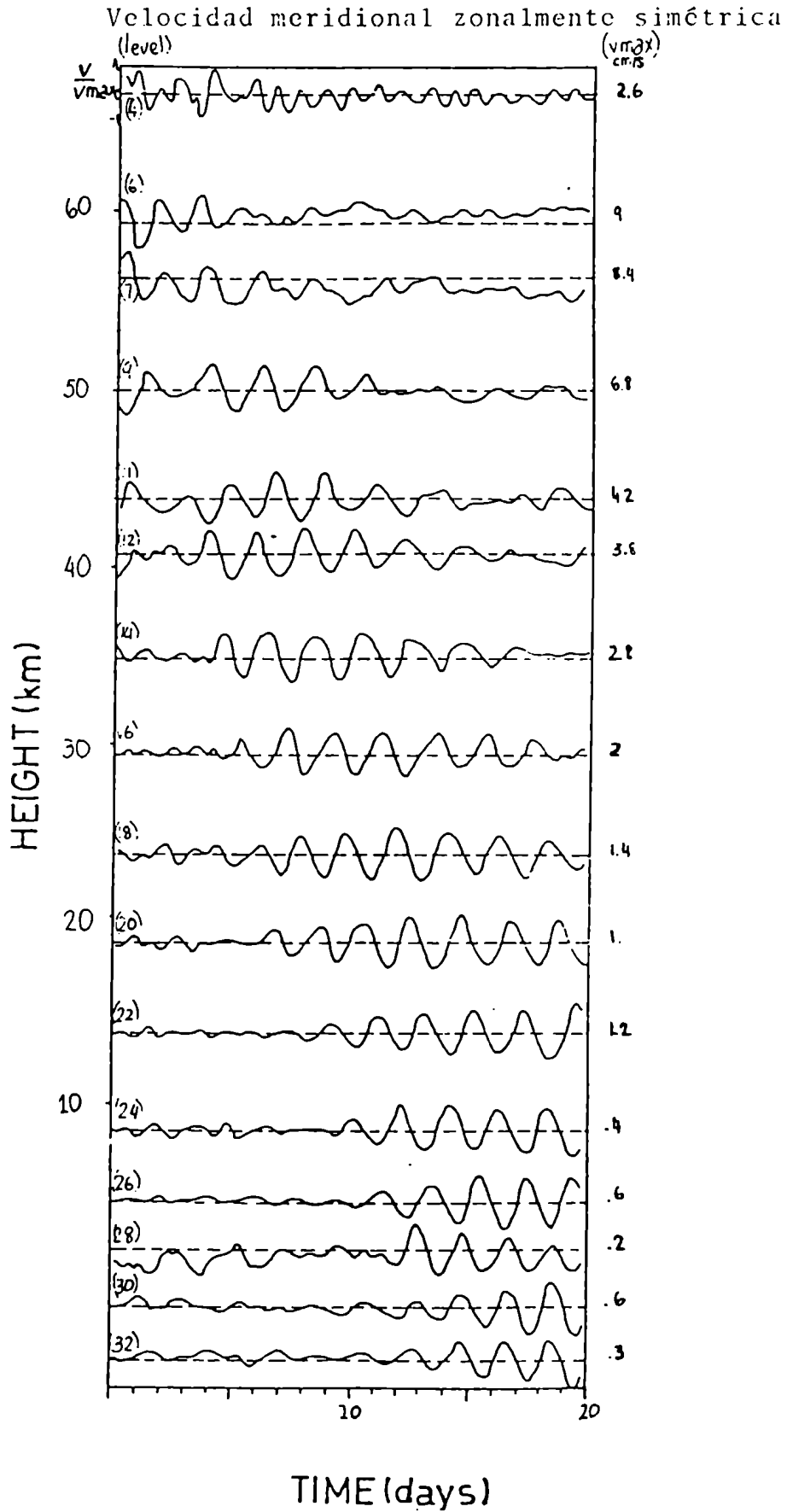
ZONALLY SYMMETRIC MERIDIONAL VELOCITY

Velocidad meridional zonalmente simétrica



Series temporales a algunos niveles del modelo.
Caso a. Vmax es la velocidad máxima del nivel.

ZONALLY SYMMETRIC MERIDIONAL VELOCITY



Mismo que fig 22 para caso b.

2.2 días, y la longitud de onda vertical es de 10 km. La velocidad meridional no presenta nodos en latitud. La onda puede ser identificada con la onda de gravedad más grave simétrica con período cerca de dos días (ver tabla I).

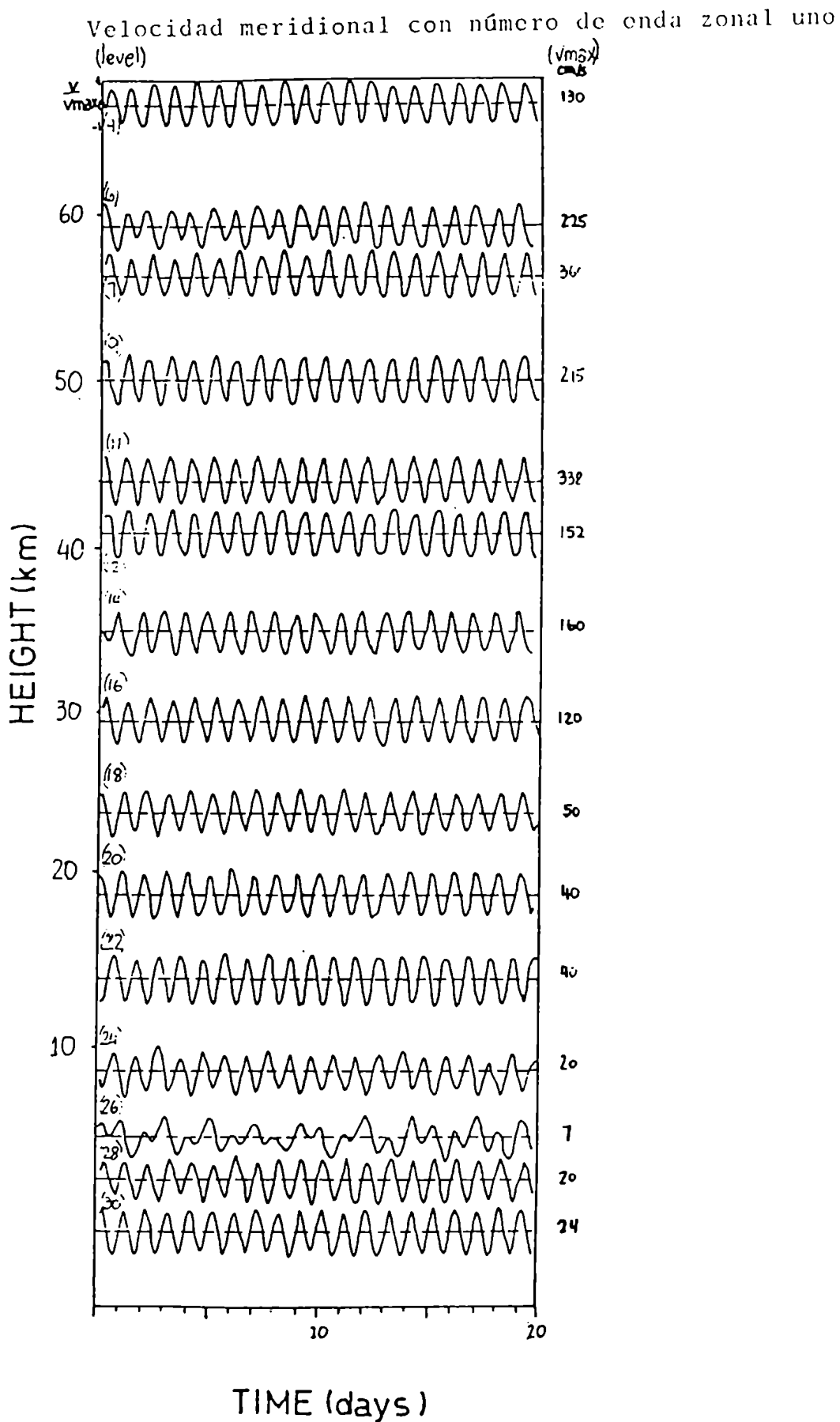
Las ondas no crecen en la solución numérica. Volviendo al análisis de escalas temporales del Capítulo II, las variaciones de temperatura son 2 grados en los niveles más altos del modelo, y el tiempo de interacción no lineal es 30 días. El tiempo de residencia en media longitud de onda del modo principal de la marea es $T_{res} = D\tau/\lambda_v = 3$ días, con $D = 15$ km y $\lambda_v = 10$ km. Siendo el tiempo de residencia mucho menor que el tiempo de interacción no lineal, solamente habría un crecimiento lento de las ondas si existieran soluciones inestables cuando se permite la propagación vertical.

En el caso b se generan ondas de gravedad en la parte superior del modelo y también sobre la capa límite atmosférica, como muestra la fig. 23 para los niveles por debajo de 4 km. La amplitud de estas ondas también es muy pequeña (el máximo es 10 cm/s a 60 km de altura) pero es mayor y persiste más que en el caso a. Esto es así porque para el caso b hay ondas generadas cerca de la capa límite, y porque la marea es algo mayor. No hay indicación clara de crecimiento de las ondas.

Si estas ondas son resonancias, deberían también aparecer en el número de onda uno. La fig. 24 muestra la serie temporal de la velocidad meridional para el caso b a 11 grados de latitud y a diferentes alturas. En la mayoría de los niveles se puede notar una onda con período cerca de dos días como una modulación débil de la marea diaria. Esto se ve más claramente a 3 km de altura, arriba de la capa límite, donde la amplitud diaria

Fig. 24

ZONAL WAVENUMBER ONE MERIDIONAL VELOCITY



Mismo que fig. 22 para caso b , vel. meridional de número de onda zonal uno.

es mínima. Entonces, las resonancias están presentes como un pequeño efecto en los campos de número de onda zonal uno.

En la capa límite modelada, el tiempo de interacción no lineal es 13 días (Esto corresponde a un parámetro de interacción no lineal $\epsilon = .2$). El tiempo de residencia es mucho más corto (ver tabla IV, para longitudes de onda verticales de 2 a 10 km). Entonces solamente aparecerían ondas de gravedad resonantes con amplitud significativa si las inestabilidades persisten en un medio con propagación vertical.

Los resultados numéricos indican que no hay crecimiento de las resonancias. Sin embargo, hay una disipación adicional introducida en el número de onda uno por el esquema de simulación de la capa límite, que puede inhibir el crecimiento de las ondas.

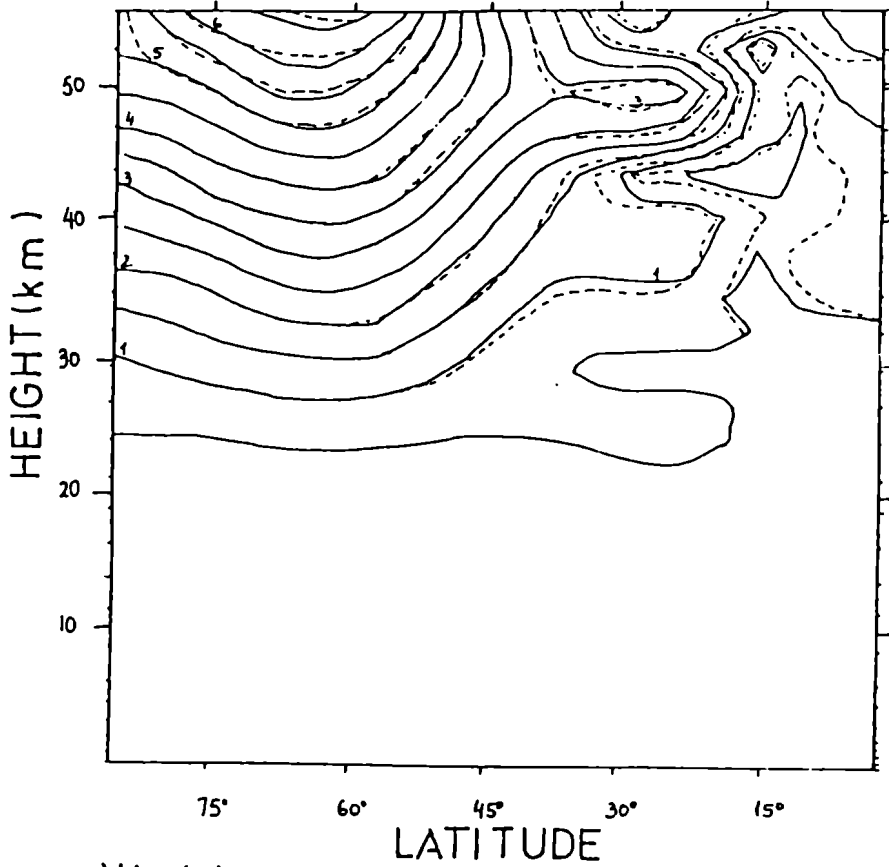
Los campos de número de onda 2 muestran una oscilación semidiaria que se identifica como la oscilación forzada por términos cuadráticos en la marea (con frecuencia y número de onda doble). Su máxima amplitud a 60 km es .1 m/s, que es mucho menor que los 1 a 10 m/s de amplitud de la marea semidiaria.

La importancia de efectos no lineales en la marea principal es estimada de la comparación entre los números de onda zonal uno al principio y al final del cálculo no lineal. Las fig. 25 a 28 muestran esa comparación para los casos a y b. Solamente aparecen pequeñas diferencias durante el cálculo no lineal.

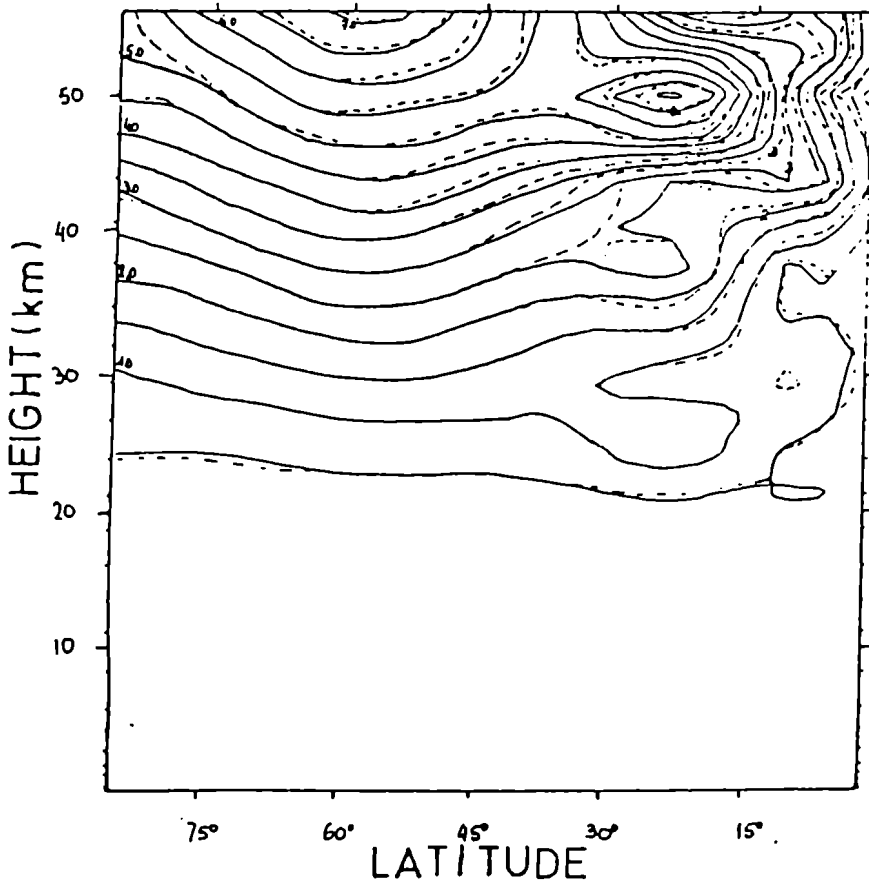
En ambos casos las velocidades zonal y meridional se hacen más estructuradas cerca de la latitud inercial: se desarrollan mayores gradientes verticales de amplitud,

ZONAL WAVE NUMBER ONE

Variables con número de onda zonal uno
 U (m/s)



V (m/s)



Caso a. Intervalo de contorno .5 m/s.

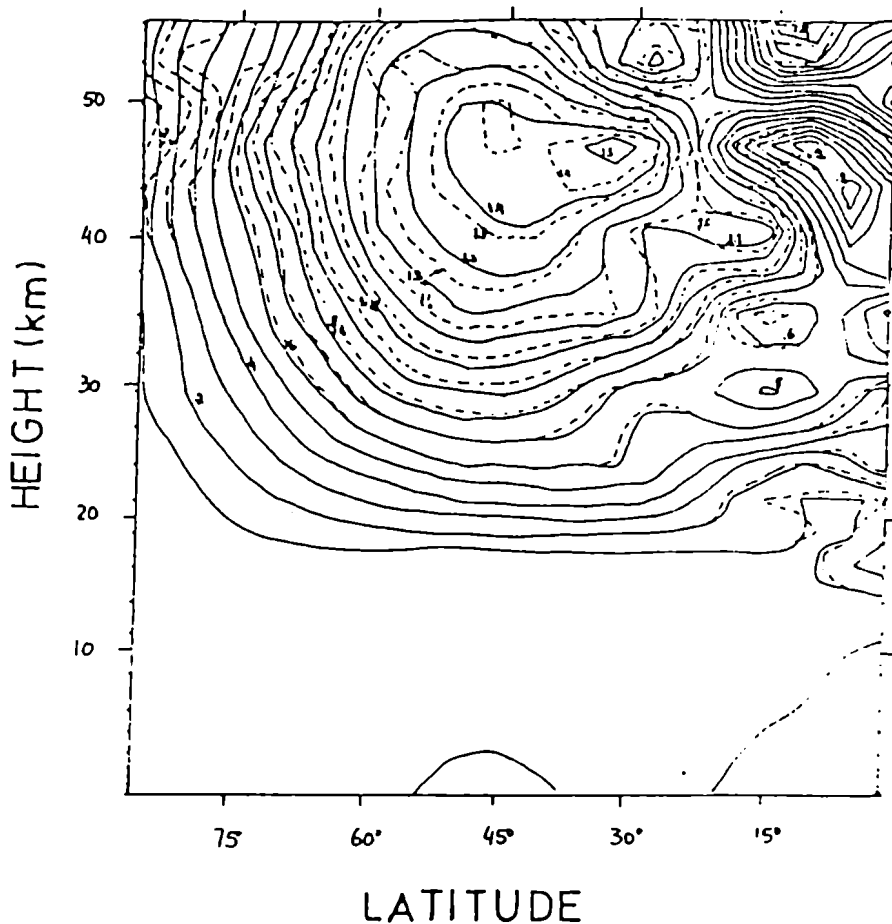
— día 15 - - - - día 30

Fig. 26

ZONAL WAVENUMBER ONE

Número de onda zonal uno

T (°C)



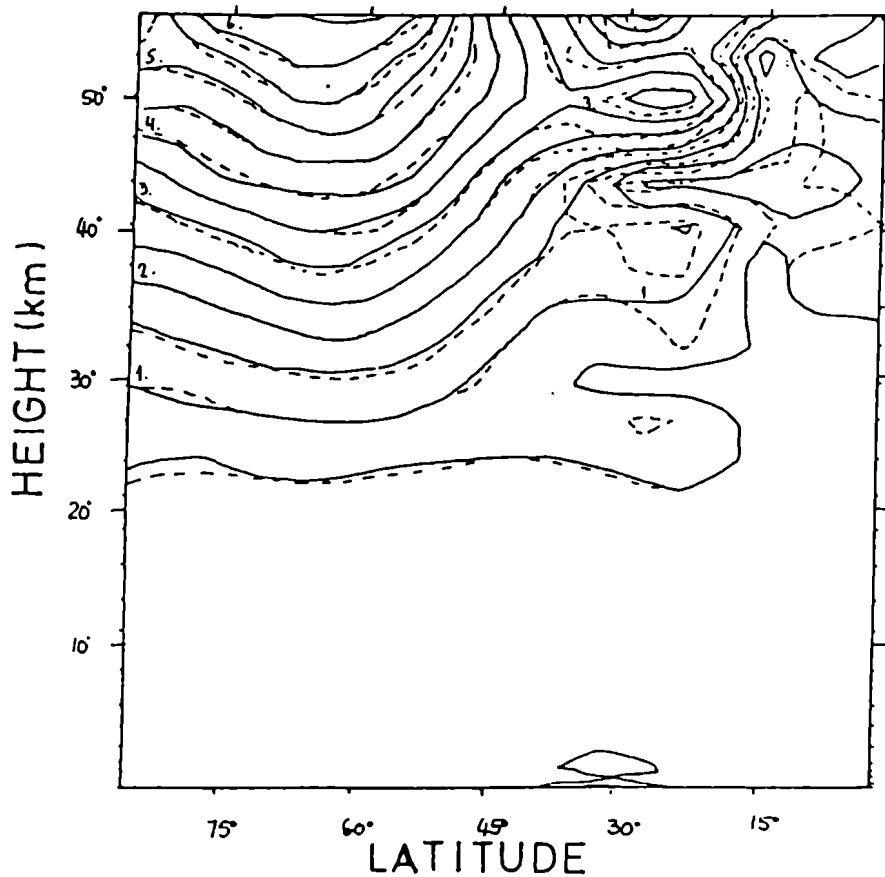
Caso a. Intervalo de contorno .1°C.

- día 15
- - - día 30

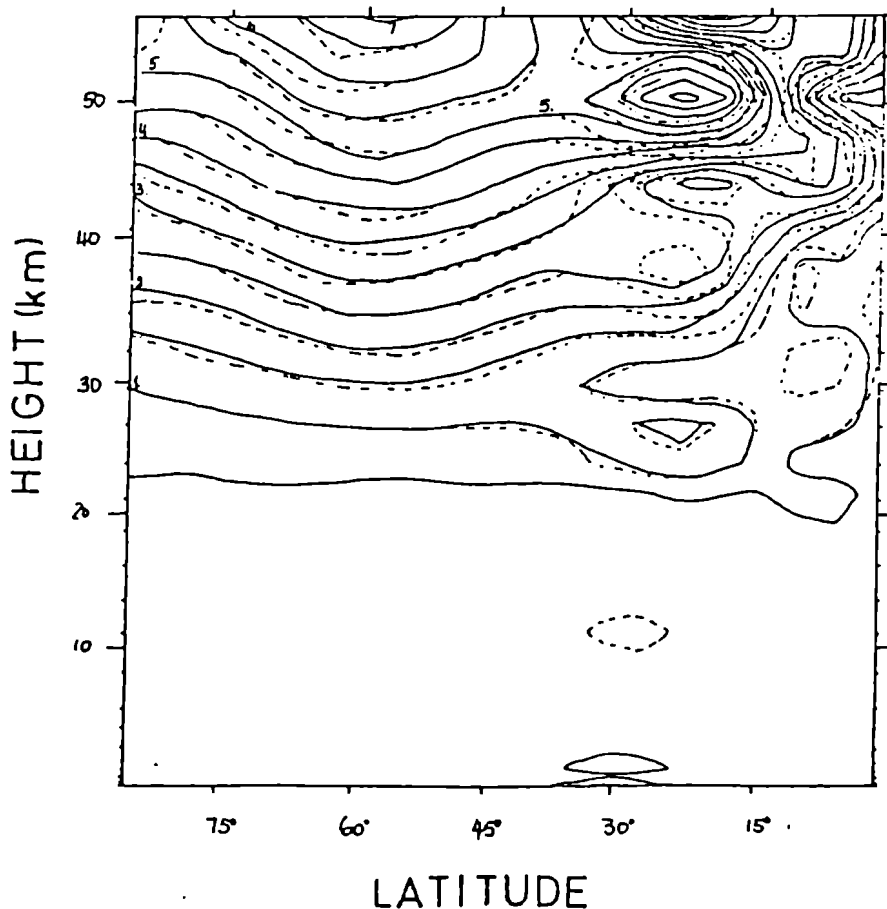
Fig. 27

ZONAL WAVENUMBER ONE

U (m/s)



V (m/s)



Caso b. Intervalo de contorno .5 m/s.

————— día 15

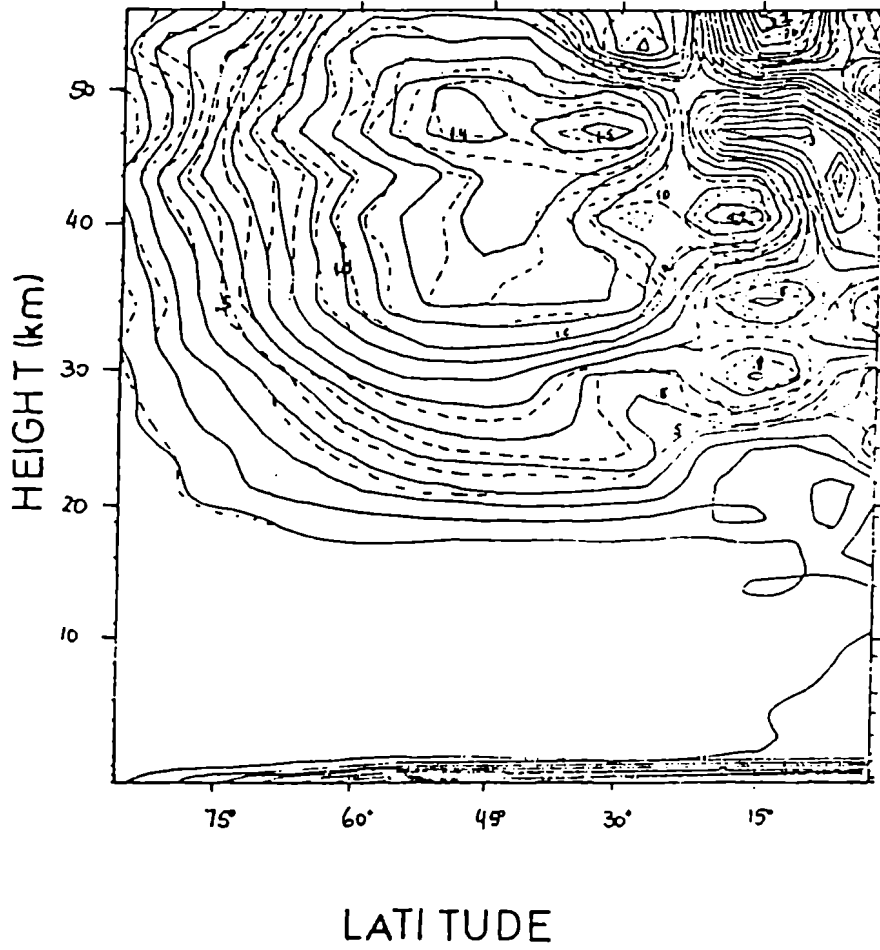
- - - - - día 30

Fig. 28

ZONAL WAVENUMBER ONE

Número de onda zonal uno

T(°C)



Caso b. Intervalo de contorno .1°C

- día 15
- - - día 30

y la figura de interferencia en la región entre 30 y 40 grados se hace más pronunciada (variaciones máximas son .5 m/s). Cerca de 20° de latitud aparecen variaciones de temperatura con amplitudes menores que .2 grados. Estas variaciones son mayores para el caso b.

En el caso a, la temperatura decrece .1 grados (8%) en el máximo a 40 grados de latitud y 45 km de altura. En el caso b hay un decrecimiento similar por debajo de ese máximo. También hay un pequeño aumento de la velocidad zonal a 60 grados y 60 km de altura en el caso a.

Hay algunas pequeñas variaciones en los polos: en los gráficos de temperatura aparecen perturbaciones de escala pequeña, en ambos casos a y b. No hay una clara interpretación para este hecho en términos de modos o debido a un problema de singularidad: el polo no es un punto singular en un modelo espectral. Sin embargo las escalas pequeñas aparecen en los dos casos calculados.

No es posible discriminar claramente si las pequeñas diferencias descritas entre los días 15 y 30 son lineales o no lineales. Los cálculos lineales no fueron extendidos hasta el día 30 para comparar. Un posible efecto lineal para la diferencia en los trópicos es que los campos no alcanzaron un estado estacionario en los primeros quince días; entonces los campos evolucionarían después del día 15, debido principalmente a los modos con escalas verticales más cortas que se propagan más lentamente.

A pesar que en el modelo no se encontró apreciable generación resonante de ondas de gravedad, algunos indicios observacionales son consistentes con la presen-

cia de una onda de gravedad de dos días en la estratosfera y mesosfera tropical. Está bien establecido observacionalmente la presencia de un modo de Rossby barotrópico con período de 2.1 días en la alta atmósfera. Esta oscilación corresponde a un modo libre de la atmósfera con número de onda zonal 3 (Salby, 1981). Pero en los trópicos hay algunas indicaciones de movimientos con período de 2 días con propagación vertical: Coy (1979) muestra datos de vientos de cohetes a 50 km sobre Marshall Islands (9°N, 168°E) que parecen indicar propagación de fase hacia abajo (y de energía hacia arriba). Fukao et al. (1980) muestran datos mesosféricos de radar sobre Jicamarca (12S, 76.9°O) que indican una onda de dos días con longitud de onda vertical de 10 km. Estas mediciones se muestran en la fig. 29. Entonces observacionalmente parte de la onda de dos días en los trópicos podría ser una onda de gravedad. Los cálculos presentes hasta 60 km no predicen que la marea produzca una amplitud global apreciable para una onda de gravedad de dos días.

Para resumir los resultados de este capítulo, se presentó un modelo numérico de mareas apropiado para estudiar efectos lineales y no lineales.

Los resultados del modelo numérico sugieren que la interacción no lineal de las componentes principales propagantes de la marea y la capa límite atmosférica con ondas internas de gravedad no es significativa al menos hasta 60 km de altura.

Se encontró que un calentamiento simplificado de capa límite atmosférica produce campos de marea significativos en la alta atmósfera excitando principalmente el segundo modo simétrico propagante diario, y contribuye en un 10 a un 30 por ciento a los campos mesosféricos de marea.

CAPITULO IV

CALENTAMIENTO DE CAPA LIMITE ATMOSFERICA COMO FUENTE DE MAREA DIARIA

IV.1 Introducción

Como se discutió en el capítulo I, hay una discrepancia sistemática entre las predicciones de la teoría de mareas y las observaciones en la troposfera. Los datos muestran vientos diarios de hasta metros por segundo mientras que los cálculos dan valores de algunos cm/s. La presión semidiaria en los trópicos es .1 ó .2 mb más grande que en cálculos de modelos.

Estas discrepancias indican que además de vapor de agua y ozono, hay otras fuentes troposféricas de marea que deberían tenerse en cuenta. De acuerdo a los resultados del capítulo III, una fuente troposférica significativa de mareas puede ser el calentamiento diario de la capa límite atmosférica. También han habido sugerencias que la liberación de calor latente de condensación en nubes cúmulo es otra fuente troposférica significativa (Lindzen, 1978; Hamilton, 1981 a), como se discutió en el capítulo I.

En este capítulo se reanaliza el calentamiento diario de la capa límite atmosférica como fuente de marea. Se realiza una nueva estimación cuantitativa de esta fuente de calor en base a datos de rango diario de temperatura. La fuente de datos es una compilación de rango diario de temperatura sobre el globo terrestre hecho por la British Meteorological Office (1958). Estos datos muestran mayores valores que las estimaciones de Haurwitz (1962, 1965) para rango diario, especialmente en los trópicos.

Los campos de marea producidos por este calen-

tamiento diario de la capa límite atmosférica aumentan los vientos diarios tropicales troposféricos en un 20 por ciento, y producen contribuciones similares a los campos tropicales por encima de la troposfera.

Se concluye que el calentamiento diario de la capa límite atmosférica es una fuente significativa de mareas que debería incluirse en cálculos detallados de mareas.

IV.2. Fuentes troposféricas de mareas.

Historicamente se consideró al transporte de calor sensible desde la superficie terrestre como la fuente principal de mareas atmosféricas. Sólo recientemente, por los años 1960, se identificó a ozono y vapor de agua como las fuentes principales de mareas. Desde entonces, ha habido varios estudios referentes a la contribución del calentamiento de la capa límite atmosférica como una fuente adicional de mareas.

Siebert (1961) presentó un modelo para la conducción turbulenta de calor desde la superficie de la tierra que involucra un coeficiente de difusión turbulenta constante. El valor usado para este coeficiente resulta en una fuente de calor que penetra una pequeña distancia dentro de la atmósfera.

McKenzie (1968) presentó una estimación diferente del calentamiento de la capa límite atmosférica como fuente de mareas. El introdujo un modelo empírico para el calentamiento de la superficie terrestre que describe mejor la penetración del calentamiento de la capa límite en los 2 km más bajos de la atmósfera. Su función de calentamiento es:

$$J = \frac{i\omega R}{\kappa} T$$

con

$$T = T_0 e^{-\frac{z}{d}} L(\phi) H(\theta)$$

con $T_0 = 8^\circ \text{C}$ (amplitud de superficie), R la constante de gas para aire, $d = 1.25 \text{ km}$ (escala vertical de decaimiento) y $L(\phi)$ la distribución longitudinal de continentes a 45°N . La distribución latitudinal de temperatura $H(\theta)$ es el perfil latitudinal de Haurwitz (1962) para el promedio zonal de la temperatura diaria de superficie. El valor tomado por McKenzie de 8°C para la amplitud de temperatura de superficie es demasiado grande cuando se lo compara con las observaciones. Concordantemente, los campos de marea obtenidos con esta fuente son demasiado grandes: amplitud de la presión de superficie de 3 mb , y vientos troposféricos de 1 m/s en los trópicos.

Giwa y Hussain (1978) estimaron la marea semidiaria estacionaria con un modelo simple de calentamiento de la superficie. Consideraron una amplitud de temperatura constante sobre continentes, estimada de la absorción de energía solar y transferencia de calor turbulenta en la atmósfera y dentro de la tierra. Aunque la predicción del cociente entre las amplitudes de presión de superficie en los dos polos no es correcta, el modelo es un buen punto de partida para un cálculo de las mareas estacionarias.

Actualmente existe un conjunto de datos para rango diario de temperatura que es más completo que el usado por Haurwitz. En este capítulo se presenta una nueva estimación del calentamiento de la superficie terrestre como fuente de mareas en base a esos datos.

IV.3. Calentamiento de la capa límite atmosférica.

En la capa límite atmosférica hay un pronunciado ciclo diario. Sobre zonas continentales, la temperatura varía típicamente cerca de 10 grados entre el día y la noche; las mayores variaciones ocurren en los trópicos.

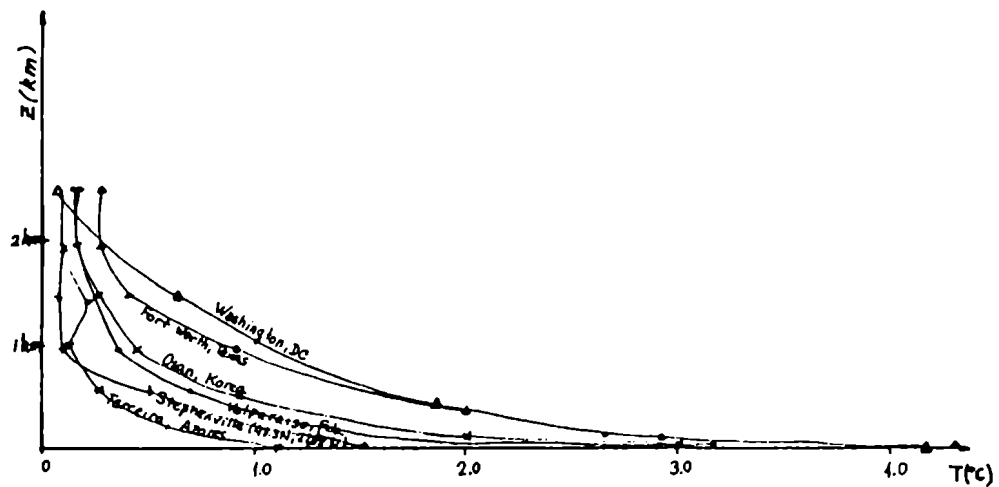
Harris (1959), Harris, Finger y Teweles (1962, 1966), Carlson y Hastenrath (1970), Wallace y Patton (1970), presentaron datos de la dependencia vertical de la temperatura diaria troposférica sobre los Estados Unidos. En la fig. 30 se muestran algunos de esos datos.

En las últimas dos décadas, varios experimentos de capa límite atmosférica proveyeron información sobre las variables meteorológicas y cantidades turbulentas para capas límites tropicales y a latitudes medias.

El experimento Wangara (Clarke et al., 1971) dio información experimental acerca de la capa límite dependiente del tiempo para una ubicación sobre tierra a latitudes medias. La capa de mezcla se extiende hasta 1 ó 1.5 km de altura, y sobre ella hay una capa estable con inversión de temperatura.

Experimentos sobre los océanos tropicales como Anegada (1953), BOMEX (1969), ATEX (1969), GATE (1974) y AMTEX (1974), proveyeron información acerca de cantidades de gran escala como flujos de calor y humedad, y de flujos turbulentos. Todas estas cantidades son necesarias para entender la estructura de la capa límite y su interacción con el resto de la troposfera.

Fig. 30



Amplitud de temperatura diaria observada. De Harris(1959),
Harris et al. (1966).

Un aspecto de la capa límite atmosférica es la oscilación diaria de temperatura en esa capa producida por el calentamiento de la superficie terrestre. El calor sensible diario y semidiario debido al calentamiento de la superficie terrestre es una posible fuente de mareas. La excitación de modos de marea resultante está determinada por la amplitud y distribución espacial del calentamiento.

El calentamiento de superficie tiene una escala horizontal comparable a la de los continentes, o más pequeña, debido a las irregularidades en los terrenos.

La escala vertical de la oscilación de temperatura es de 1 ó 2 km, este último valor en los trópicos donde la capa límite es más profunda. De modo que el calentamiento de capa límite es una fuente con poca penetración en la atmósfera comparada con la longitud de onda vertical de los modos diarios más graves.

Por estas razones, se espera que la capa límite atmosférica sea más eficiente en excitar modos no propagantes con escala horizontal del orden de la escala continental y longitudes de onda verticales cortas.

Sin embargo, el calentamiento de capa límite también contribuye a los modos diarios principales que se propagan siguiendo al sol. Como fuente de excitación de estos modos diarios de marea, se debe comparar el calentamiento de la capa límite atmosférica con la otra fuente troposférica: calentamiento por vapor de agua.

IV.4. Comparación del calentamiento de capa límite con otras fuentes troposféricas.

Un cálculo simple puede mostrar la eficiencia como fuente de marea diaria del calentamiento de la capa límite comparada con la de vapor de agua.

El calentamiento de la capa límite tiene menos penetración en la atmósfera que el vapor de agua, pero mayor amplitud para la taza de calentamiento J.

Consideremos una atmósfera isotérmica y los calentamientos por capa límite y vapor de agua como fuentes que decaen exponencialmente con la altura. La ecuación de estructura vertical es

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda_n^2 y = \frac{\kappa J_n(x)}{\sigma g h_n} e^{-\frac{x}{H}}$$

donde J_n es la proyección del calentamiento en la n-sima función de Hough diaria θ_n , $\lambda_n^2 = \frac{1}{H} \left(-1 + 4 \frac{h_n}{H} \right)$, h_n es la profundidad equivalente para θ_n , $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, $k = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$, $H = \frac{R_0 T_0}{M g}$, $x = \frac{z}{H}$, M es el peso molecular y R_0 la constante universal de los gases.

El campo de temperatura es

$$T_n = \frac{M}{R_0} \left[-\frac{\sigma g h_n}{i\omega} e^{\frac{x}{H}} \frac{\kappa H}{h_n} y + \frac{\kappa J}{i\omega} \right] e^{i(\omega t + \sigma \varphi)}$$

donde ω es la frecuencia de la marea.

Las condiciones de contorno son:

- $w=0$ en $z=0$, que implica $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{H}{h_n} - 1 \right) = 0$ en $x=0$, y
- propagación de energía hacia arriba (de fase hacia abajo) en el infinito.

Para fuentes como vapor de agua y capa límite, confinadas cerca de la superficie, consideremos $\bar{J} = \bar{J}_0 e^{-\alpha x}$ con $\alpha > 0$. La solución general que satisface la condición de contorno superior es

$$y = \frac{\alpha \bar{J}_0}{\gamma g h_n} \frac{1}{(\alpha + \frac{1}{2})^2 + \lambda^2} e^{-(\alpha + \frac{1}{2})x} + A e^{i\lambda n x}$$

Imponiendo la condición de contorno inferior

$$IV.1 \quad y = \frac{\alpha \bar{J}_0}{\gamma g h_n} \frac{1}{(\alpha + \frac{1}{2})^2 + \lambda^2} \left[e^{-(\alpha + \frac{1}{2})x} - \frac{\frac{H}{h_n} - 1 - \alpha}{\frac{H}{h_n} - \frac{1}{2} + i\lambda} e^{i\lambda n x} \right]$$

Se puede comparar la excitación producida por fuentes con el mismo calor total pero con distintas penetraciones en la atmósfera. Para una función de calentamiento normalizada tal que $\int_0^{\infty} \bar{J}(x) dx = 1$, es

$$IV.2 \quad \bar{J}_0 = \alpha$$

Los campos de mareas $u, v, w, \delta T, \delta p$ excitados fuera de la zona del forzado por la fuente de calentamiento normalizada son proporcionales al coeficiente de $e^{i\lambda n x}$ en IV.1:

$$IV.3 \quad \bar{z} = \frac{\alpha}{\gamma g h_n [(\alpha + \frac{1}{2})^2 + \lambda^2]} \left(\frac{\frac{H}{h_n} - 1 - \alpha}{\frac{H}{h_n} - \frac{1}{2} + i\lambda} \right)$$

Para el calentamiento por vapor de agua, el modelo de Siebert (1961) da $\alpha = \frac{1}{3}$, y la escala de decaimiento del calentamiento para una atmósfera con temperatura $T_0 = 260^\circ$ es $L = \frac{H}{\alpha} = 23$ km (con $H = 7.6$ km).

Para el calentamiento de capa límite en los trópicos, el máximo valor típico de la escala de decaimiento es $\frac{H}{\alpha} = 2$ km; esto corresponde a $\alpha = 3.8$.

En la tabla VI se muestra el valor absoluto del coeficiente de $e^{i\lambda x}$ en IV.1 (esto es $|z|$ de IV.3), para diferentes escalas de decaimiento, y para los dos modos simétricos propagantes diarios más graves, como también el cociente de amplitudes obtenidas para fuentes normalizadas con la dependencia espacial de vapor de agua y capa límite, ésta última para escalas de 1 y 2 km. La fuente normalizada "capa límite" con 2 km de escala vertical es tan efectiva como la normalizada "vapor de agua" para excitar el primer modo propagante simétrico, y más efectiva para el segundo modo propagante simétrico que tiene una menor escala vertical.

La excitación total para esas dos fuentes troposféricas también depende de la amplitud de temperatura ecuatorial en la superficie y de su distribución latitudinal. El modelo de Siebert (1961) para vapor de agua es

$$J_{\text{vapor agua}} = \left[\frac{i\omega R}{\kappa} e^{-\frac{x}{3}} e^{i(\omega t + \varphi)} \frac{1}{3} \right] \cdot 3 \left(.062 \theta_1 - .016 \theta_3 + .008 \theta_5 + .157 \theta_1 - .055 \theta_3 \right) \\ = \left[C e^{-\frac{x}{3}} e^{i(\omega t + \varphi)} \right] \cdot \left(.186 \theta_1 - .048 \theta_3 + .024 \theta_5 + .471 \theta_1 - .165 \theta_3 \right)$$

y la solución vertical fuera de la zona del forzado es:

$$y = D \left(.0225 e^{i\varphi_1} \theta_1 - .006996 e^{i\varphi_3} \theta_3 + \dots \right) \\ \varphi_1 = \lambda_1 x, \quad \varphi_3 = \lambda_3 x, \quad D = 4.793 \cdot 10^3 \text{ erg s/(g m km)} \text{ arbitrariamente.}$$

Haurwitz (1962, 1965) realizó un análisis para el promedio zonal de temperatura diaria sobre la superficie terrestre. El análisis está basado en valores horarios de temperatura sobre tierra de una compilación de Shaw (1935). Haurwitz obtuvo para el promedio anual de la onda diaria propagante de la temperatura de superficie

TABLA VI

Amplitud de la componente propagante para calentamiento normalizado $\int_0^{\infty} J dz = 1$, $J = J_0 e^{-\alpha x} = J_0 e^{-z/L}$

	escala de decaimiento L (km)	$\alpha = \frac{H}{L}$	Amplitud, $ z $ de ec. IV.3 $\left(\frac{s^2}{m km}\right)$	
			modo θ_1 h=.6909	modo θ_3 h=.1203
capa	1	7.6	$7.6 \cdot 10^{-6}$	$1.37 \cdot 10^{-4}$
límite	2	3.8	$3.13 \cdot 10^{-5}$	$1.68 \cdot 10^{-4}$
	5	1.5	$5.23 \cdot 10^{-5}$	$1.16 \cdot 10^{-4}$
	10	.76	$4.44 \cdot 10^{-5}$	$6.62 \cdot 10^{-5}$
	20	.38	$2.82 \cdot 10^{-5}$	$3.48 \cdot 10^{-5}$
Vapor de agua	23	.33	$2.52 \cdot 10^{-5}$	$3.04 \cdot 10^{-5}$

Cociente de amplitudes de la componente propagante para diferentes escalas del calentamiento normalizado.

Modo θ_1		Modo θ_3	
$\frac{ z _{v.a.}}{ z _{c.l. 2km.}}$	= 0.806	$\frac{ z _{v.a.}}{ z _{c.l. 2 km}}$	= .180
$\frac{ z _{v.a.}}{ z _{c.l. 1km}}$	= 3.314	$\frac{ z _{v.a.}}{ z _{c.l. 1km}}$	= .221

$|z|_{v.a.} : |z|$ para vapor de agua

$|z|_{c.l. 2km} : |z|$ para capa límite, L=2 km

$|z|_{c.l. 1 km} : |z|$ para capa límite, L=1 km

$$S'_1(\tau) = 1.007 P'_1(\cos\theta) + .647 P'_2(\cos\theta) + \\ + .502 P'_3(\cos\theta) + .047 P'_4(\cos\theta)$$

La parte simétrica de esta expresión tiene la siguiente expansión en funciones de Hough

$$\delta T = -.0357 \theta_1(\cos\theta) + .0048 \theta_3(\cos\theta) - .0021 \theta_5(\cos\theta) \\ + 1.12 \theta_{-1}(\cos\theta) - .036 \theta_{-3}(\cos\theta)$$

que se proyecta principalmente en los modos atrapados. La función de calentamiento correspondiente es:

$$J = \int \frac{i\omega R}{\kappa} e^{i(\omega t + \varphi)} e^{-\alpha x} \frac{1}{\alpha} \delta T = C e^{-\alpha x} \frac{\delta T}{\alpha}$$

Para escalas de decaimiento de 1 ó 2 km, las funciones de calentamiento y soluciones verticales son

$$\bar{J}_{1km} = C_1 e^{-7.6x} \left(-.0047 \theta_1 + .00063 \theta_3 + \dots + \right. \\ \left. + .15 \theta_{-1} - .0047 \theta_{-3} \right) \\ y_{1km} = D \cdot \left(-.000172 e^{i\varphi} \theta_1 + .000414 e^{i\varphi} \theta_3 + \dots \right) \\ \bar{J}_{2km} = C_2 e^{-3.8x} \left(-.0094 \theta_1 + .0013 \theta_3 + \dots + \right. \\ \left. + .29 \theta_{-1} - .0095 \theta_{-3} \right) \\ y_{2km} = D \cdot \left(-.00141 e^{i\varphi} \theta_1 + .00105 e^{i\varphi} \theta_3 + \dots \right)$$

que contribuyen menos que vapor de agua a los modos propagantes.

Pero este resultado es sensible a la distribución latitudinal de la amplitud de temperatura zonalmen-

te simétrica.

Considerando una fuente con amplitud similar que la del perfil de Haurwitz, pero con una dependencia latitudinal proporcional a $P'_1(\omega\theta)$:

$$\begin{aligned} J_{2km} &= C_2 e^{-3.8x} \frac{1}{\alpha} 1.2 P'_1(\omega\theta) = \\ &= C_2 e^{-3.8x} \frac{1}{\alpha} 1.2 (.283 \theta_1 - .073 \theta_3 + \dots) \\ &= C_2 e^{-3.8x} (.0894 \theta_1 - .0230 \theta_3 + \dots) \end{aligned}$$

la dependencia vertical de la solución es

$$y = D (.01342 \theta_1 e^{i\psi_1} - .01859 \theta_3 e^{i\psi_3} + \dots)$$

que da una contribución al modo principal propagante θ_1 igual a la mitad de la contribución del calentamiento por vapor de agua.

Estos argumentos muestran que al menos para algunas distribuciones latitudinales, el calentamiento de capa límite puede contribuir significativamente a los modos principales propagantes diarios. Pero esta contribución depende sensiblemente de la forma latitudinal del calentamiento, ya que formas diferentes se proyectan distinto en modos atrapados y propagantes.

Aunque esta discusión se refiere a los modos principales de marea que se propagan siguiendo al sol, se espera que la mayor contribución al calentamiento de la capa límite sea a los modos estacionarios de escala continental.

Una nueva estimación realista del calentamiento de la capa límite sobre el globo puede ser hecha a

partir de un conjunto más completo de datos para rango diario de temperatura, que está disponible en una compilación de la British Meteorological Office (1958). Esa estimación se presenta en las secciones siguientes.

IV.5. Modelo para el calentamiento de capa límite atmosférica

Como en McKenzie (1958) se construye un modelo de calentamiento empírico para el calentamiento de capa límite. Se supone que la función de calentamiento puede ser factorizada, en la forma

$$J = J_0 f(z) \sum_{m,n} L_m(\phi) \Theta_{m,n}(\theta)$$

El modelo depende de:

- i) la dependencia vertical del promedio global del calentamiento de capa límite.
- ii) la distribución de amplitud de temperatura diaria sobre la superficie del globo. Se asume que no hay variaciones diarias sobre los océanos.

Eligiendo una dependencia vertical de la temperatura diaria que es lineal con la altura, y una escala vertical de 1.8 km, se adopta la siguiente parametrización:

$$T_z = \begin{cases} \frac{1.8 \text{ km} - z}{1.8 \text{ km}} T(\theta, \phi, z=0) & \text{para } z \leq 1.8 \text{ km} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que es equivalente a

$$J_z = \begin{cases} J_0(\theta, \phi, z=0) \cdot \frac{1.8 \text{ km} - z}{1.8 \text{ km}} & \text{, para } z \leq 1.8 \text{ km} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

IV.6 Temperatura diaria en la superficie terrestre.

Se realizó una estimación de la temperatura diaria en la superficie, basada en un nuevo conjunto de datos que es mucho más completo que el usado en el análisis de Haurwitz (1965).

Los datos básicos consisten en valores de rango diario en estaciones sobre el globo compilados en las Tablas de la British Meteorological Office (BMO), 1958.

Paffen (1966) publicó isolíneas anuales medias de rango diario de los datos de BMO, completados con estaciones en Norte, Centro y Sud América.

En el presente trabajo se realiza un análisis de rango diario sobre el globo para invierno y verano, basados en datos de la BMO.

Para eso se completaron los datos de rango de BMO para enero y julio con estaciones sobre Brasil y China (estos últimos datos fueron tomados del Atlas publicado por Central Meteorological Bureau of China, 1960). El número de estaciones y la distribución latitudinal de los datos se da en la tabla VII.

Los análisis previos del calentamiento diario de la superficie terrestre estaban basados en un conjunto de datos más reducidos. Haurwitz (1965) presentó un análisis de amplitud diaria de la temperatura de superficie que está basado en una compilación de Shaw (1936). En particular las regiones tropicales están mucho más resueltas con el conjunto de datos de la BMO.

TABLA VII

Estaciones de rango en bandas latitudinales

Compilación de British Meteorological Office

Latitud	Número de estaciones
90-60°N	138
60-30	659
30- 0	417
0-30°S	333
30-60	94
60-90	<u>7</u>
Total	1648

Estaciones en China

60-30°N	107
30-0	<u>31</u>
	138

Estaciones en Brasil

0 -30°S	22
---------	----

Aún hay regiones con datos espaciados en la nueva compilación, por ejemplo en las altas latitudes de Asia. Pero como estas regiones están mayormente cubiertas de nieve, el rango es pequeño y varía suavemente, con lo que la baja resolución no afectaría los resultados.

Comparando los valores de rango de la BMO con los de Shaw, resulta que para los nuevos datos el rango es mayor en las regiones desiertas y semidesiertas, como las Montañas Rocosas en Norteamérica, el Sahara y la región de Atacama. Los nuevos valores de rango son menores en las altas latitudes de Asia.

Se puede comparar los datos de rango con estimaciones simples de modelos para el calentamiento de la superficie.

El modelo más simple, pero no realista, para el calentamiento de superficie, es asumir una amplitud de temperatura de superficie constante sobre tierra. (Kertz (1957) y Giwa y Hussain (1978) hicieron cálculos con esta suposición). En este caso la distribución de rango sobre el planeta es proporcional a la siguiente función que describe la distribución de tierra sobre el globo:

$$f(\theta, \varphi) \begin{cases} 1 & \text{sobre tierra} \\ 0 & \text{sobre océanos} \end{cases}$$

Esta función fue analizada Fourier en números de onda zonales para comparar con valores realistas de rango. La distribución de tierra sobre el planeta fue obtenida de los datos de topografía procesados en Scripps Institution of Oceanography y actualmente en uso en el Grupo de Climatología Dinámica del GFDL. Estos datos

consisten de la topografía sobre tierra y océano promediada en cuadrados de 2° de latitud por 2° de longitud. La fig. 31 muestra el gráfico de latitud- número de onda para esta función. Los máximos valores ocurren en los siguientes números de ondas y latitudes

número de onda zonal	latitud
0	60° - 70°N
2	40° - 60°N
4	0° - 30°S

En la fig 32 se muestra el promedio zonal de la distribución de tierra, junto con sus partes simétrica y antisimétrica.

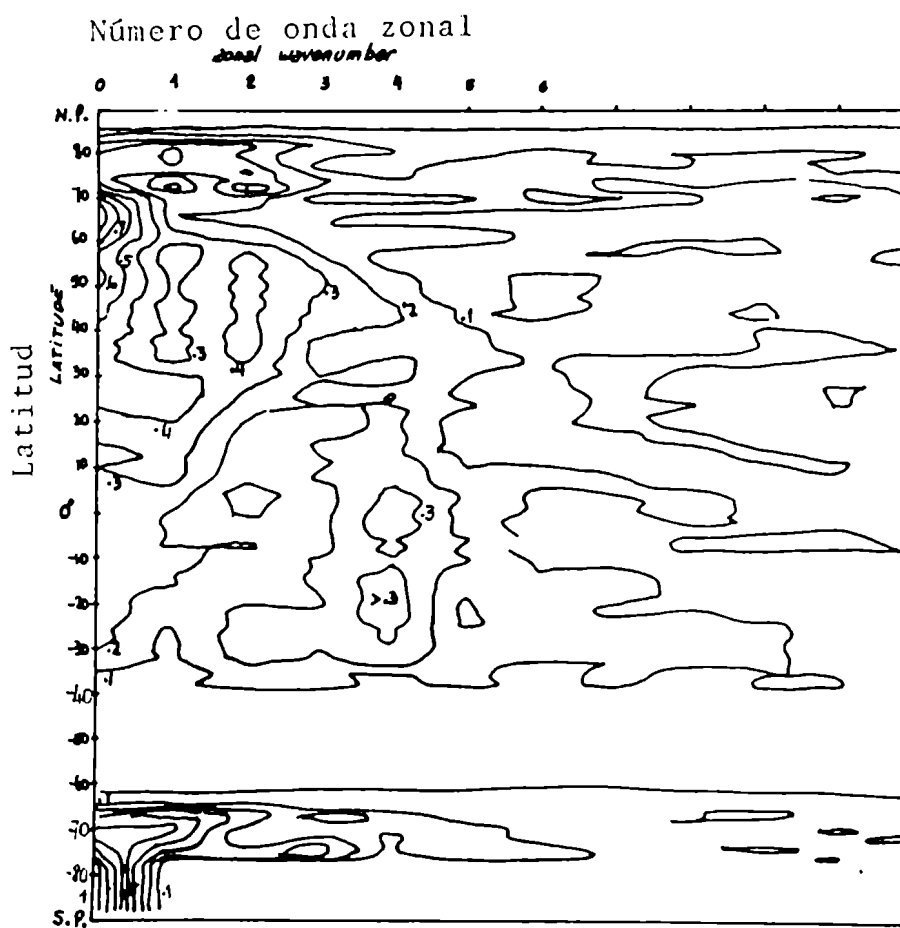
Se pueden hacer estimaciones más realistas del promedio anual de la componente zonalmente simétrica de rango diario a partir de los datos de la BMO con los perfiles e isolíneas de rango publicados por Paffen (1966).

En la fig. 33 se muestran los perfiles de Paffen de rango máximo en el medio de los continentes, que fueron construídos sobre trayectorias que atraviesan los continentes pasando sobre los valores máximos de rango y yendo aproximadamente de norte a sur.

También se obtuvieron perfiles de rango promedio sobre cada continente promediando subjetivamente las isolíneas de Paffen. Estos perfiles se muestran en la fig. 34.

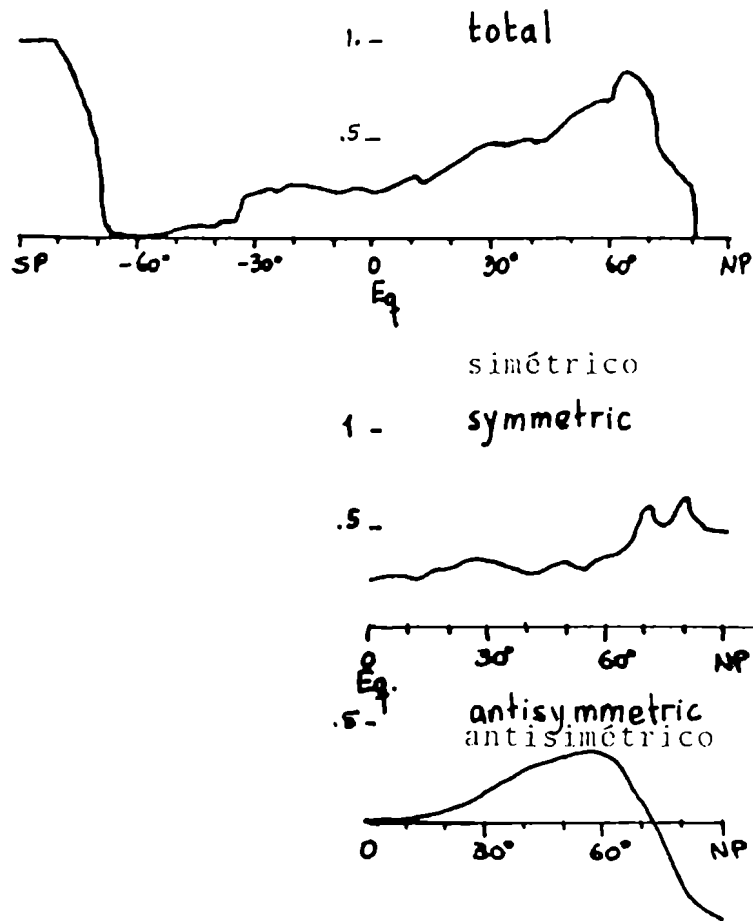
En la fig. 35 se muestran estimaciones crudas

Fig. 31



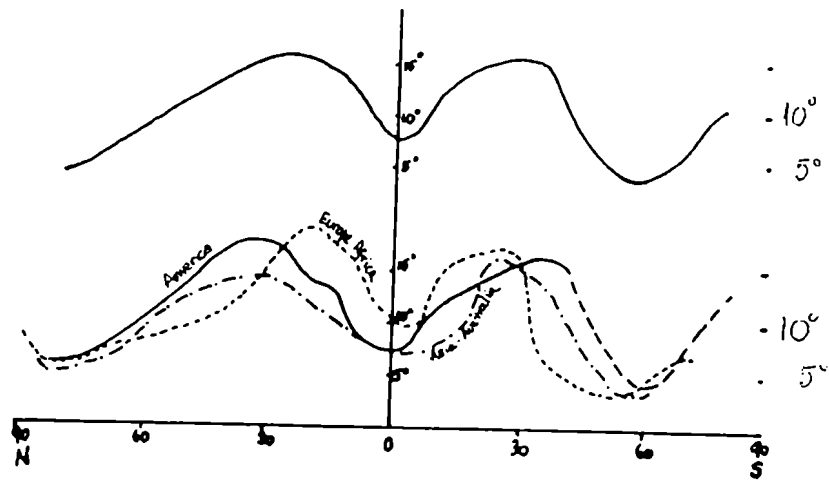
Descomposición de la fracción de tierra en números de onda zonales

Fig. 32



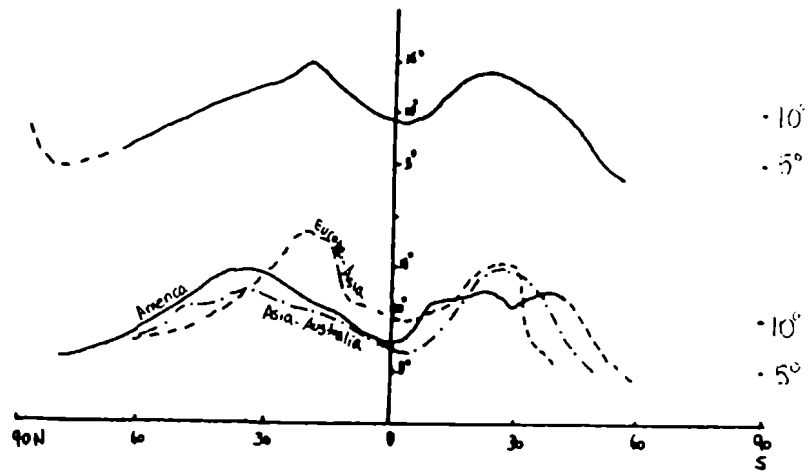
Promedio zonal de la fracción de tierra sobre el globo terrestre y descomposición en partes simétrica y antisimétrica.

Fig. 33



Perfiles de rango máximo en el centro de los continentes, de Paffen (1966). La curva en la parte superior del gráfico es un promedio de las tres curvas sobre continentes.

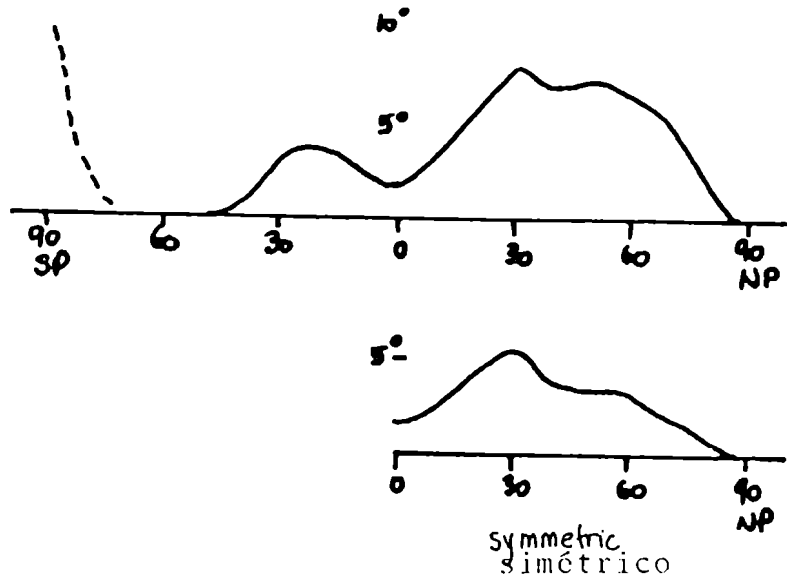
Fig. 34



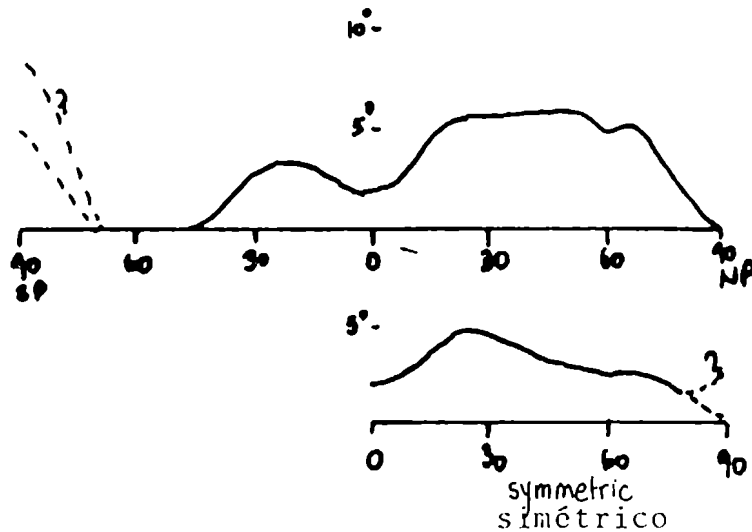
Perfiles promedio de rango diario de temperatura sobre continentes obtenidos de las isolíneas de Paffen (1966). La curva superior es el promedio de las otras tres.

Fig. 35

a



b



Estimaciones aproximadas del promedio zonal del rango diario de temperatura. a: cota superior, igual a los perfiles de rango máximo de Paffen de la fig. 33 por la fracción de tierra en cada banda de latitud. b: perfiles de rango interpolados subjetivamente de la fig. 34 por fracción de tierra.

del promedio zonal de rango diario obtenidas a partir de los perfiles mencionados anteriormente: un límite superior al promedio zonal del rango diario obtenida a partir de los perfiles de rango máximo de la fig. 33, y una estimación mejor obtenida a partir de los perfiles promedio de la fig. 34.

Se obtuvo una mejor estimación del rango medio anual a partir de las isolíneas de Paffen. Las isolíneas fueron interpoladas en cuadrados de 10° de latitud por 10° de longitud. En la fig. 36 se muestra la descomposición de estos valores en números de onda longitudinales como función de la latitud, y en la fig. 37 la componente zonalmente simétrica del rango.

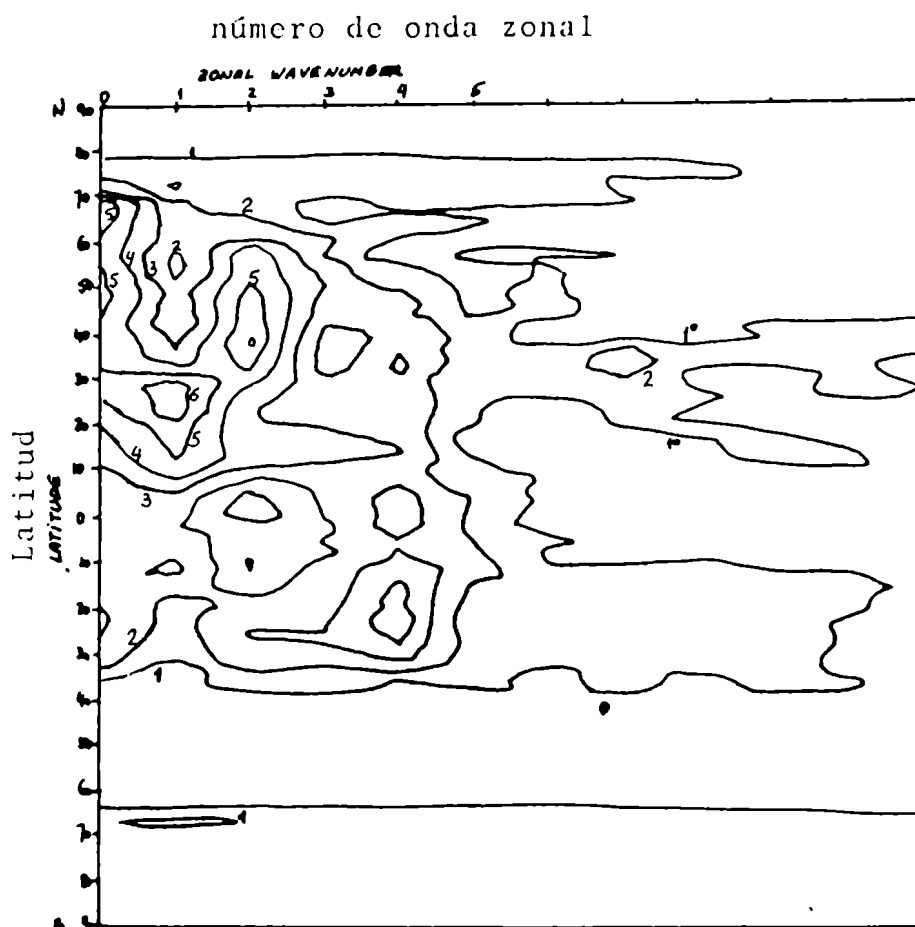
En la fig. 38 se muestra la comparación del perfil medio anual zonalmente simétrico y con simetría latitudinal obtenido con el anterior análisis de Haurwitz (si la amplitud diaria es la mitad del rango). También se muestra la comparación con las estimaciones más crudas de los datos de la BMO.

Los nuevos valores de rango de temperatura son significativamente mayores que los de Haurwitz, en los trópicos y a latitudes altas.

También la distribución latitudinal del perfil es diferente que la de Haurwitz, ya que los nuevos datos muestran un perfil más concentrado hacia los trópicos.

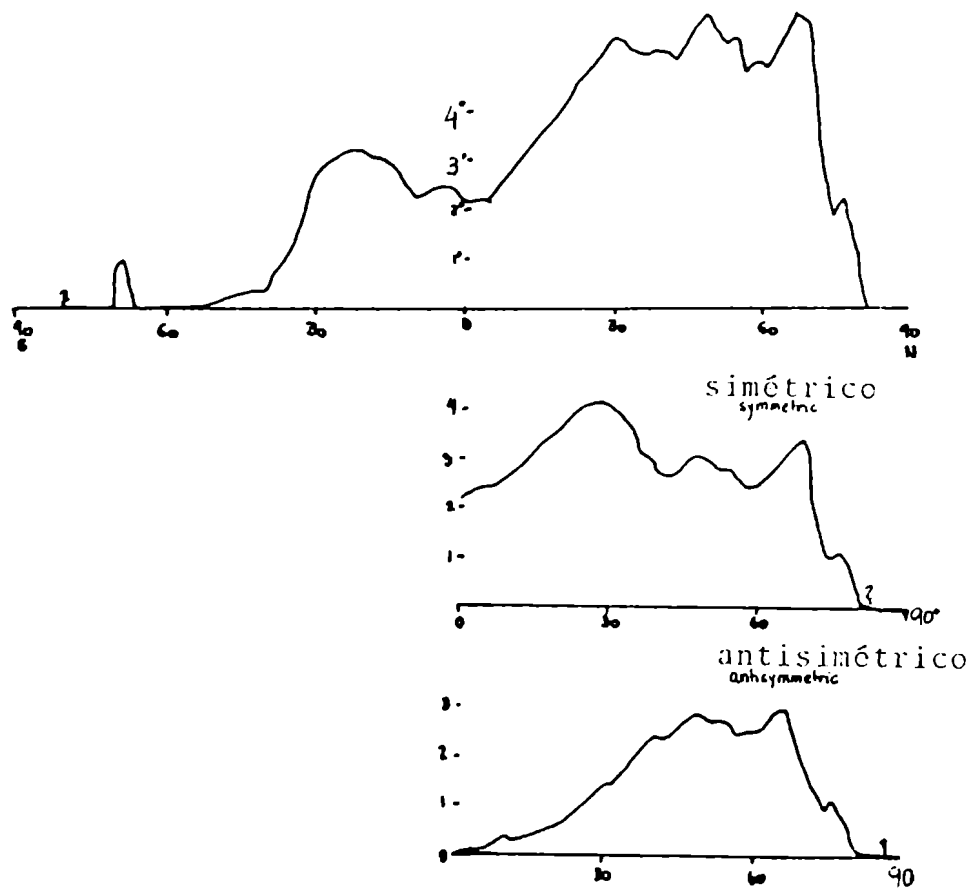
Estas diferencias tienden a aumentar el efecto del calentamiento de capa límite como fuente de mareas cerca de la superficie y a mayores alturas, indicando que esta fuente de mareas es más importante que lo que indica el análisis de Haurwitz.

Fig. 36



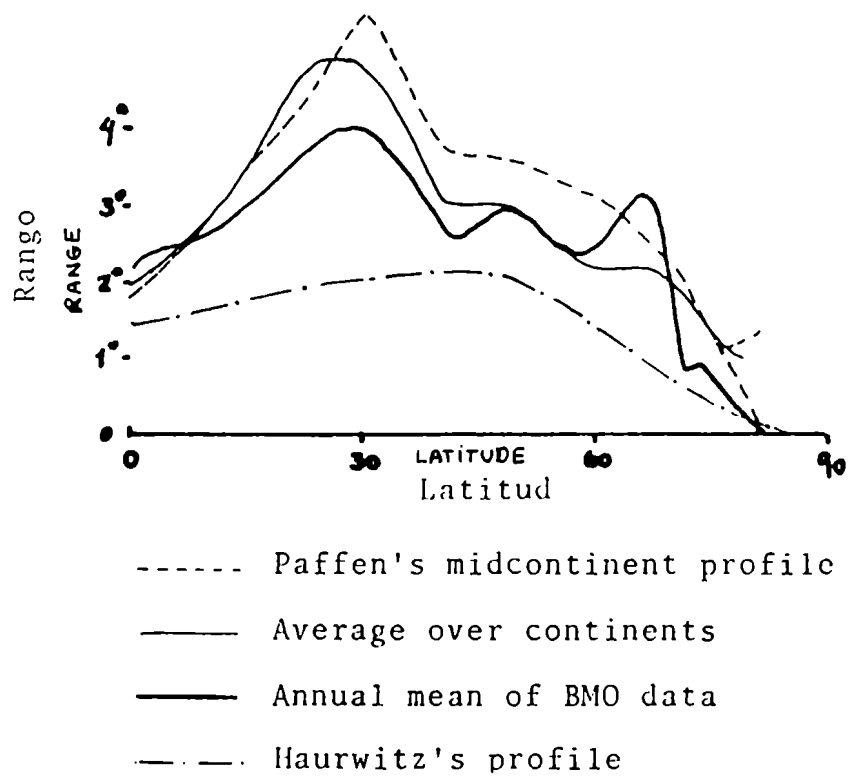
Análisis en números de onda zonales del promedio anual de rango diario de temperatura, obtenido interpolando las isolíneas de Paffen (1966) en cuadrados de 10° lat. por 10° longitud. (Grados centígrados)

Fig. 37



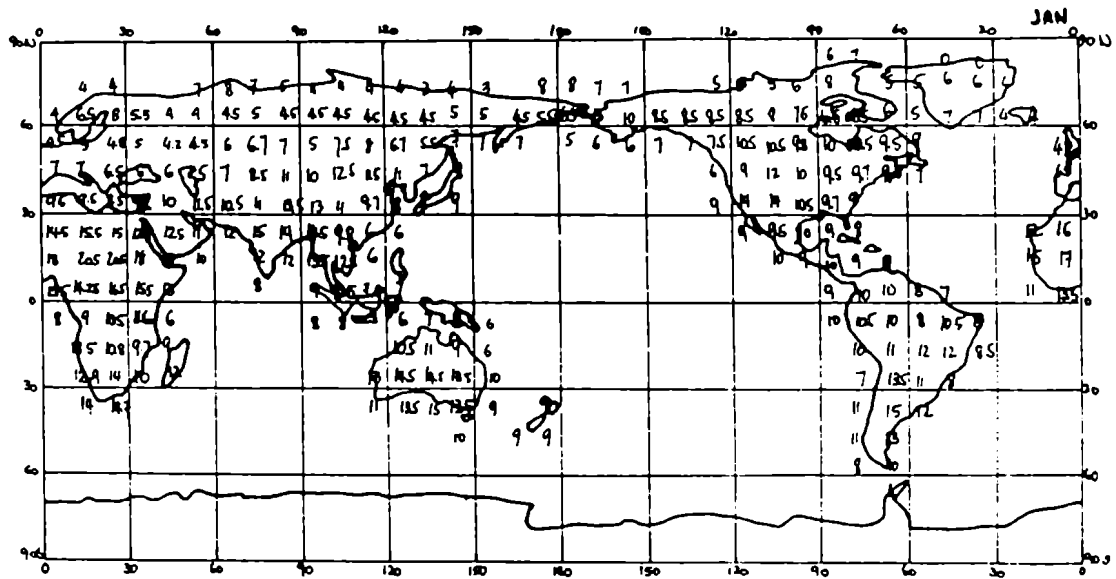
Número de onda zonal cero del promedio anual de rango diario de temperatura de la fig. 36.

Fig. 38



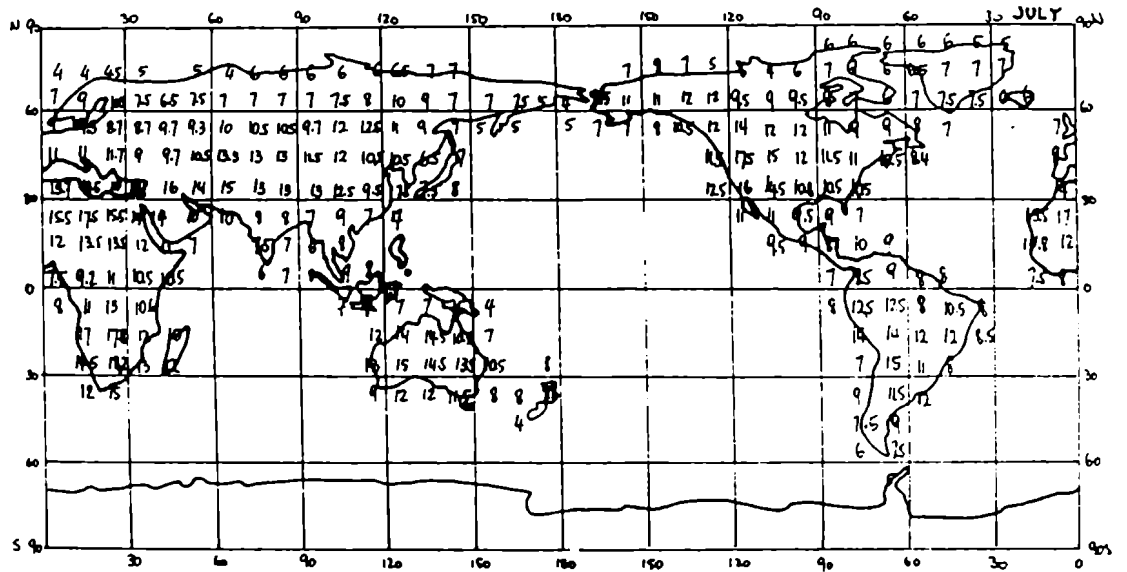
Comparación de los presentes resultados con otras estimaciones. Componente con número de onda zonal cero latitudinalmente simétrica del promedio anual del rango diario de temperatura.

Fig. 39



Análisis de rango diario de temperatura para enero.
(Grados centígrados)

Fig. 40



Análisis de rango diario de temperatura para julio.
(Grados centígrados)

IV.7 Análisis estacional de rango diario de temperatura.

Se realizó un análisis de rango diario de temperatura para invierno y verano a partir de los datos de la compilación de la BMO. Los datos fueron completados con estaciones en Brasil y en China (estos últimos tomados del Atlas de Climatología del Central Meteorological Bureau of China, 1960).

Se tomó como base para el análisis mapas con los valores de rango diario de temperatura de la BMO para enero y julio, en uso en el Grupo de Climatología Dinámica. Estos mapas fueron completados con las nuevas estaciones.

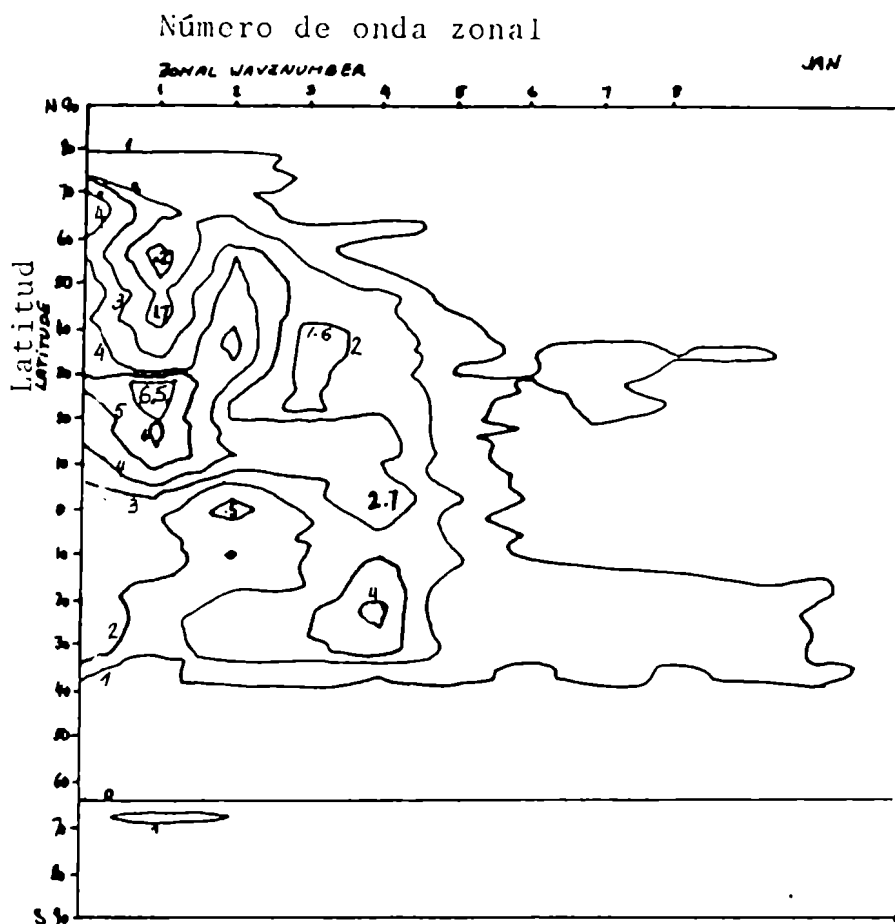
Los datos de rango fueron interpolados subjetivamente en cuadrados de 10°de latitud por 10°de longitud. Los resultados de estas interpolaciones se muestran en los mapas de las fig. 39 y 40.

Se realizó una descomposición de los datos en números de ondas zonales. Para esto los valores de rango en los cuadrados de 10°de latitud por 10°de longitud fueron multiplicados por la fracción de tierra en cada cuadrado, obtenida de la topografía de Scripps.

En las fig. 41 y 42 se muestra la descomposición en números de onda zonales. Los principales máximos de rango aparecen en las siguientes latitudes y números de onda:

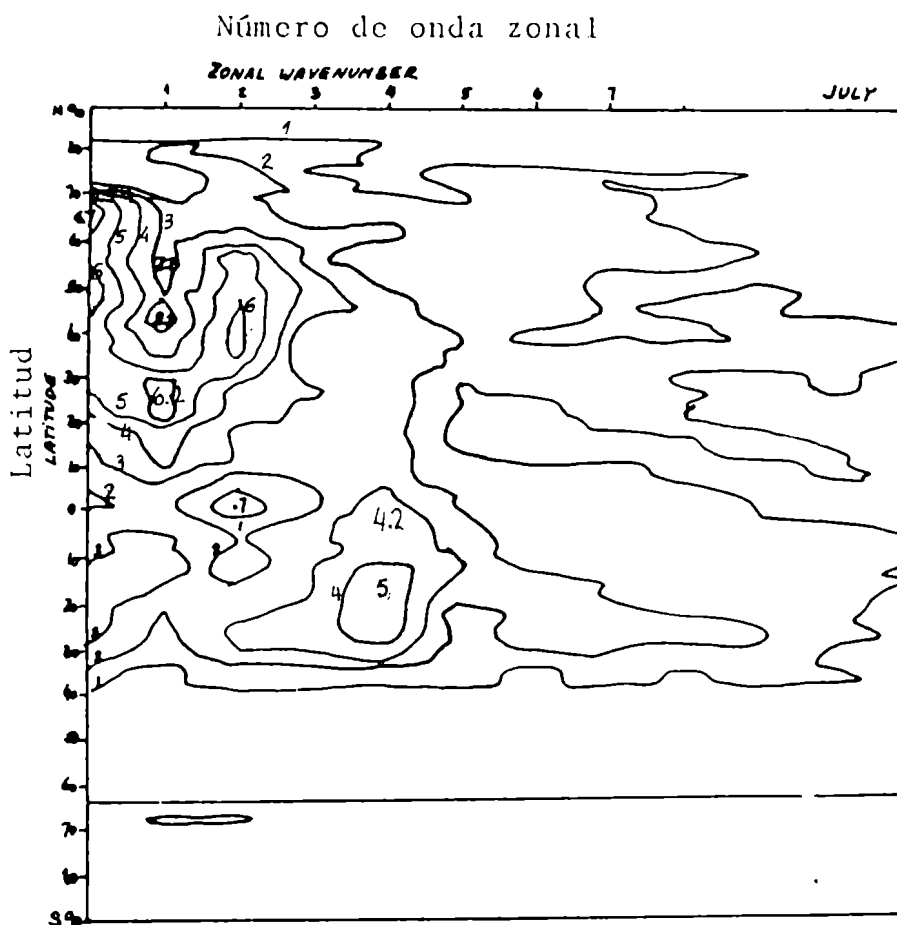
número de onda	latitud	estación
0 y 2	30°- 70°N	ambas, mayor en julio
1	10°- 30°N	ambas
2	10°N- 20°S	ambas
4	10°n- 30°S	ambas

Fig. 41



Descomposición en números de onda zonales del rango diario de temperatura para enero. (grados centígrados)

Fig. 42



Descomposición en números de onda zonales del rango diario de temperatura para julio. (Grados centígrados).

De éstos, los mayores valores aparecen en el verano del hemisferio Norte, a 30° - 70° N de latitud y con números de onda 0 y 2. Estos gráficos estacionales en latitud- número de onda presentan la misma ubicación de máximos y mínimos que los datos para el promedio anual de rango.

En la fig. 43 se muestra la componente latitudinalmente simétrica del número de onda zonal cero del rango diario de temperatura para enero y julio. También se muestra como comparación el doble del armónico diario dado por Haurwitz (1965).

Similarmente a lo que se obtuvo para el promedio anual, los nuevos datos estacionales para calentamiento de la superficie terrestre dan mayores valores de rango zonalmente simétrico en los trópicos y a latitudes altas.

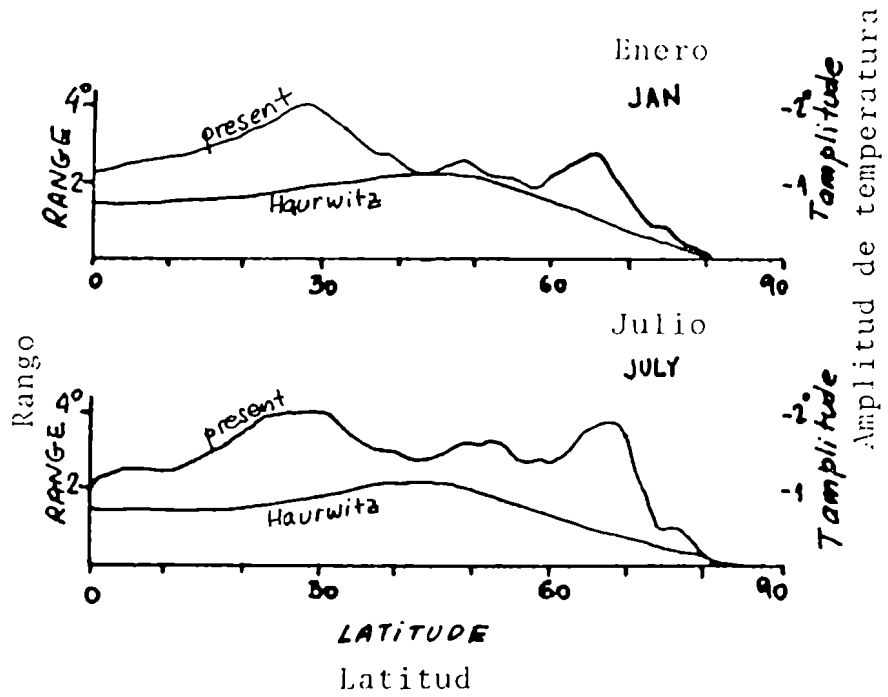
Las mayores diferencias entre los promedios zonales para las dos estaciones aparecen hacia el polo de 40° de latitud, debido a los mayores valores de rango en el verano del hemisferio norte.

Se estima la componente armónica diaria del calentamiento de la superficie como la mitad del rango diario. Hay un error en esta aproximación de hasta el 20 por ciento en los trópicos, de acuerdo a las series temporales para latitudes polares, templadas y tropicales que fueron analizadas.

IV.8 Campos principales de marea excitados por el calentamiento de la capa límite.

Como se mostró anteriormente, los modos de marea que son más eficientemente excitados por el calenta-

Fig. 43



Comparación de la componente latitudinalmente simétrica del número de onda zonal cero de rango diario de temperatura con el análisis de Haurwitz (1965).

miento de la capa límite son modos de longitudes de onda verticales cortas, de algunos kilómetros, comparables a la escala vertical del calentamiento.

El presente análisis de rango muestra que el calentamiento de la capa límite contribuye con mayores amplitudes a los números de onda zonales desde cero hasta del orden de 4. Si bien la mayor amplitud de esta fuente es para números de onda mayores que uno, hay también una contribución producida por el promedio zonal de esta fuente a la marea principal migrante diaria, que parece significativa cuando se usan los nuevos datos de rango.

Se realizaron cálculos lineales de marea para los modos principales migrantes diarios excitados por el calentamiento diario de la capa límite atmosférica, tomando la siguiente función de calentamiento

$$J = \begin{cases} \frac{1.6R}{\pi} \frac{1.8 \text{ km} - z}{1.8 \text{ km}} T_0(\theta, \varphi) e^{-i \frac{2\pi t}{24 \text{ hrs}}} & \text{para } z \leq 1.8 \text{ km} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con un máximo de calentamiento de capa límite a las 14 hora local. T_0 es el promedio zonal de la amplitud diaria de la temperatura de superficie, que es aproximada como la mitad del rango diario.

Expandiendo en funciones de Hough diarias la componente latitudinalmente simétrica del promedio zonal del rango hallado en la sección anterior, se obtiene para el promedio anual del rango a partir de las isolíneas de Paffen:

$$T_{\text{rango}}^{\text{anual}} = .26014 \theta_1 - .27759 \theta_3 + .19492 \theta_5 \\ + 4.06893 \theta_{-1} - .82135 \theta_{-3}$$

y para los rangos estacionales del presente análisis de los datos de B.M.O.:

$$T_{\text{rango}}^{\text{enero}} = .44766 \theta_1 - .32239 \theta_3 + .18376 \theta_5 \\ + 3.74289 \theta_{-1} - .93307 \theta_{-3}$$

$$T_{\text{rango}}^{\text{julio}} = .21712 \theta_1 - .19784 \theta_3 + .15509 \theta_5 \\ + 4.1737 \theta_{-1} - .67818 \theta_{-3}$$

Los coeficientes para el promedio anual tienen valores comprendidos entre los de enero y los de julio.

Las amplitudes de temperatura, aproximadas como la mitad del rango diario, son

$$T^{\text{enero}} = .2238 \theta_1 - .1612 \theta_3 + .0919 \theta_5 \\ + 1.8714 \theta_{-1} - .4665 \theta_{-3}$$

$$T^{\text{julio}} = .1086 \theta_1 - .0989 \theta_3 + .0775 \theta_5 \\ + 2.0868 \theta_{-1} - .3391 \theta_{-3}$$

$$T^{\text{anual}} = .1301 \theta_1 - .1383 \theta_3 + .0975 \theta_5 \\ + 2.0345 \theta_{-1} - .4107 \theta_{-3}$$

Para comparación, el ajuste de Haurwitz (1962) a la componente principal migrante de la temperatura de superficie es

$$T^{\text{Haurwitz}} = 1.007 P_1'(\omega s \theta) + .64 P_2'(\omega s \theta) + .502 P_3'(\omega s \theta)$$

cuya parte simétrica tiene la siguiente expansión en funciones de Hough diarias:

$$T_{\text{Haurwitz}}^{\text{Sim}} = -.035 \theta_1 + .00481 \theta_3 - .00213 \theta_5 \\ + 1.124 \theta_{-1} - .0363 \theta_{-3}$$

lo que muestra que el perfil latitudinal de Haurwitz para la componente principal migrante de la temperatura de superficie se proyecta casi enteramente en los modos atrapados.

Las amplitudes de los modos principales propagantes diarios son mayores en el presente análisis que en el de Haurwitz. El cociente de amplitudes para los modos θ_1 y θ_3 es

$$\theta_1 \quad \frac{C_{\theta_1}^{\text{presentes datos}}}{C_{\theta_1}^{\text{Haurwitz}}} = \frac{.1301}{.035} = 3.71$$

$$\theta_3 \quad \frac{C_{\theta_3}^{\text{presentes datos}}}{C_{\theta_3}^{\text{Haurwitz}}} = \frac{.1388}{.00481} = 28.8$$

donde C son los coeficientes del modo en la expansión del promedio anual de la temperatura de superficie.

La proyección en los modos diarios principales propagantes es mayor en enero que en julio.

Como comparación, la distribución latitudinal simplificada de temperatura diaria proporcional a $P_1^1(\omega\theta)$ que se asumió en los experimentos numéricos del capítulo III tiene una expansión proporcional a

$$T = P_1^1(\omega\theta) = -.283 \theta_1 + .013 \theta_3 - .037 \theta_5 \\ + .90 \theta_{-1} + .27 \theta_{-3}$$

Esta distribución tiene una aún mayor proporción de energía en los modos que se propagan verticalmente que el presente análisis de rango. En el sentido de esta proporción de energía, el presente análisis es intermedio entre el de Haurwitz y la distribución de temperatura proporcional a $P_1^1(\omega\theta)$.

Se realizaron cálculos lineales de marea con

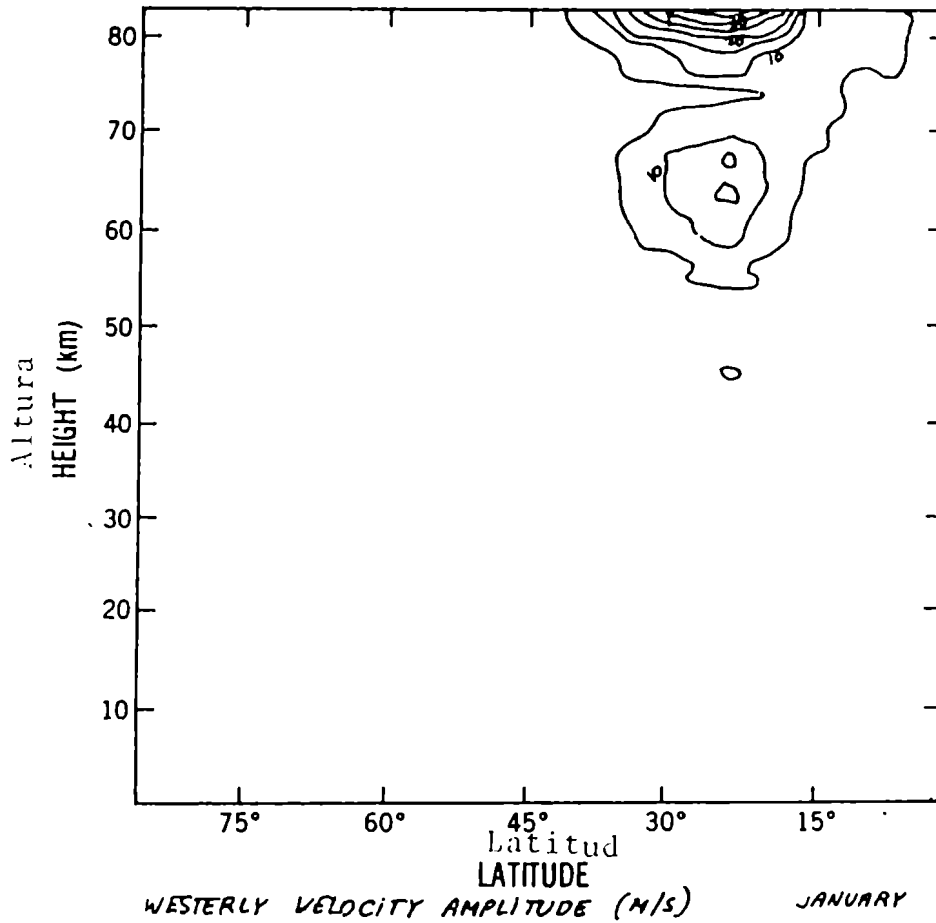
las funciones de calentamiento simplificadas de Lindzen para ozono y vapor de agua, más el calentamiento de capa límite del presente análisis para enero y julio. La hora de máximo para capa límite se tomó 2 horas más tarde que para ozono y vapor de agua.

En las fig. 44 y 45 se muestran los campos de velocidad zonal de marea diaria para enero y julio producidos por la componente principal propagante latitudinalmente simétrica de la capa límite, en un cálculo con las 10 funciones de Hough atrapadas más graves y las 10 propagantes más graves. Para comparación en la fig. 46 se muestra la velocidad zonal de marea producida por el calentamiento simplificado de Lindzen para ozono y vapor de agua. Hay una contribución apreciable del calentamiento de la capa límite a la marea tropical en la mesosfera, con excitación significativa de modos que se propagan verticalmente.

Ya que las longitudes de onda más cortas son disipadas, interesa un cálculo con los modos más graves. En las fig. 47 y 48 se muestran las velocidades zonales de marea diaria principal latitudinalmente simétrica excitadas por el calentamiento de Lindzen para ozono y vapor de agua más el presente calentamiento de capa límite, con las dos funciones de Hough más graves propagantes y las dos más graves atrapadas, a 25.5° de latitud para enero y julio. También se muestra la marea de Lindzen como comparación.

A estas latitudes, se obtienen contribuciones del calentamiento de capa límite a la marea diaria de entre el 20 y 30% de la marea en enero, y entre el 15 y 20% de la marea en julio. Cerca de la capa límite, las contribuciones son mayores. De modo que esta fuente contribuye significativamente a la marea tropical, tanto cerca de la superficie como a mayores alturas.

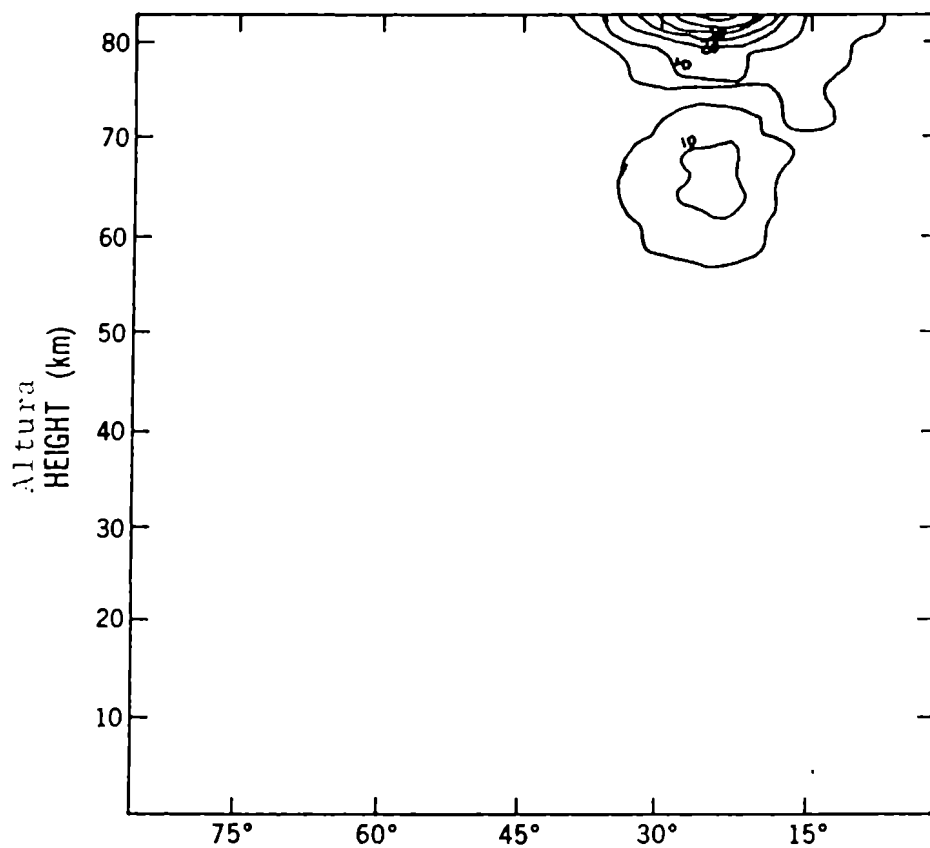
Fig. 44



Amplitud de la velocidad del oeste (M/s). ENERO

Marea principal migrante diaria excitada por calentamiento de capa límite en enero.

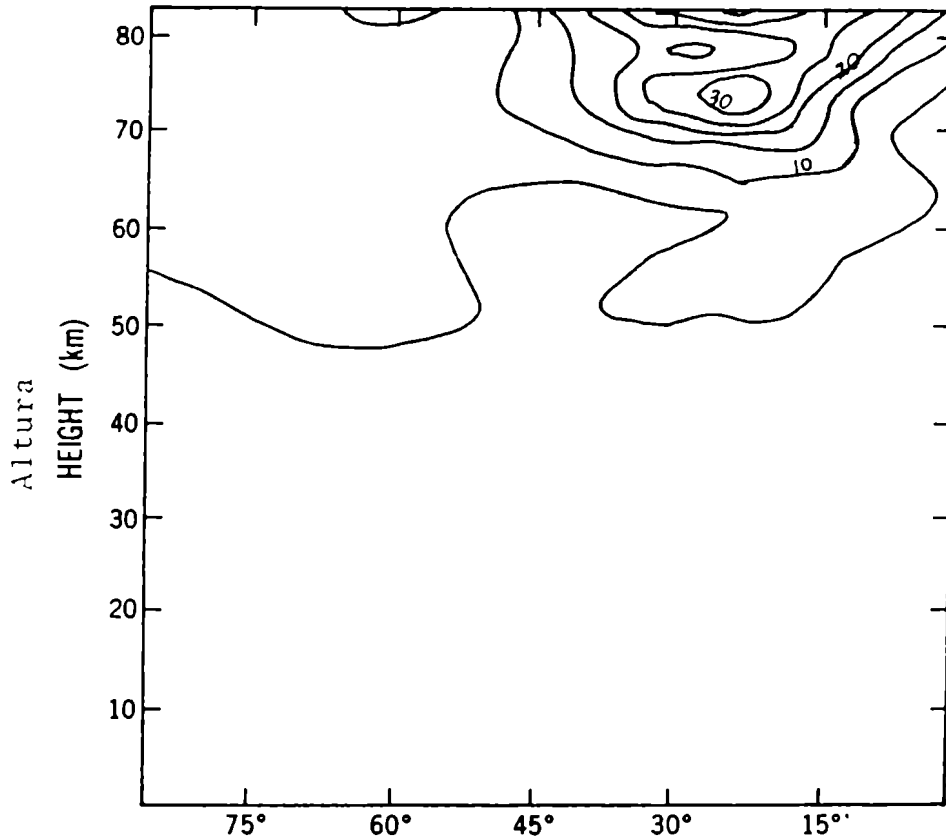
Fig. 45



WESTERLY VELOCITY AMPLITUDE (M/S) JULY
Amplitud de la velocidad del oeste (m/s). JULIO

Mismo que fig. 44 en julio.

Fig. 46



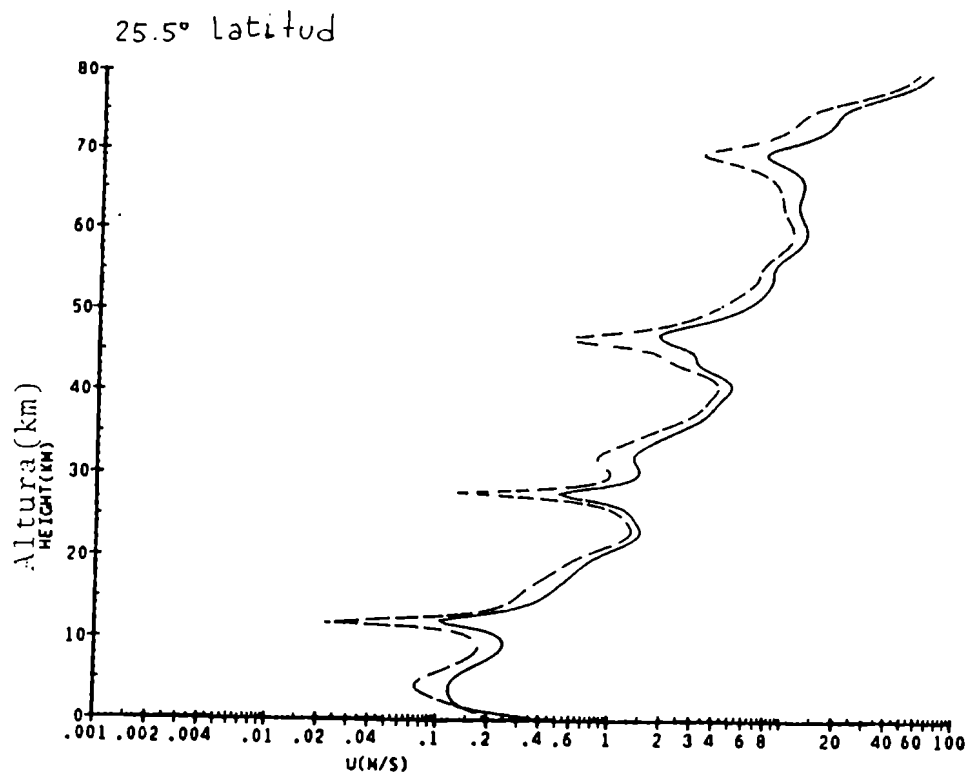
WESTERLY VELOCITY. AMPLITUDE (M/S) . LINDZEN'S TIDE

Amplitud de la velocidad del oeste(m/s).

Marea de Lindzen.

Marea principal migrante diaria excitada con calentamiento de Chapman y Lindzen (1970).

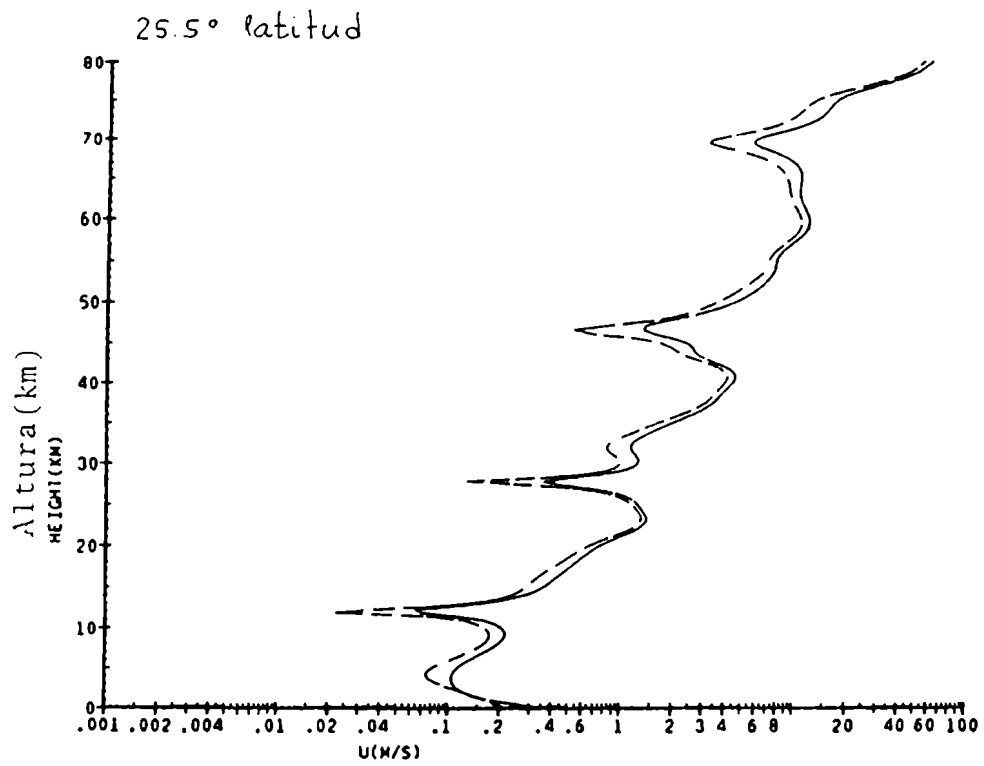
Fig. 47



- marea y capa límite
- - marea

Comparación de la velocidad del oeste obtenida con calentamiento de marea y capa límite en enero, y la marea de Lindzen(1968).

Fig. 48



— marea y capa límite
- - - marea

Mismo que fig. 47 para julio.

Entonces, esta fuente de calentamiento debe ser
tenida en cuenta para modelos detallados de marcas.

CONCLUSIONES

Al analizar el efecto de procesos en la capa límite atmosférica sobre la marea atmosférica diaria, se estudiaron mecanismos lineales y no lineales como fuentes para estos movimientos atmosféricos.

Primeramente se analizó la respuesta resonante de la marea diaria al forzado por calentamiento de la capa límite. Esto se hizo mediante un método analítico para un modelo con una condición de borde superior reflejante, y numéricamente para una atmósfera en que se permite la propagación vertical. Si bien existen resonancias en el modelo con tapa rígida, los resultados numéricos indican que la excitación resonante de ondas internas de gravedad no es significativa para una atmósfera semi-infinita. Se concluye entonces que la excitación de ondas de gravedad secundarias por mecanismos resonantes no es importante hasta alturas mesosféricas.

Parte del estudio no lineal se realizó por medio de la integración numérica de un modelo de circulación general adaptado para mareas. Un modelo de este tipo puede ser utilizado para otros estudios lineales, como ser el obtener la respuesta lineal a funciones de forzado realistas no supuestas separables en las coordenadas horizontales y vertical. Con este modelo se puede también realizar un cálculo de mareas con vientos medios y gradientes latitudinales de temperatura.

Para realizar una estimación cuantitativamente correcta del efecto lineal de la capa límite atmosférica en la marea diaria, se realizó una nueva estimación del calentamiento diario de la capa límite sobre el globo, en base a datos de rango diario de temperatura, para invierno y verano. Con esta estimación se muestra que el incluir esta fuente de mareas mejora el acuerdo con las observaciones troposféricas, y tiene un efecto apreciable, del orden del 20 por ciento,

en los campos de marea tropicales hasta alturas mesosféricas.

APENDICE

Las ecuaciones del modelo son el sistema primitivo en la aproximación hidrostática.

La coordenada vertical es $\sigma = p/p_*$, donde p_* es la presión de superficie. Las ecuaciones horizontales para vorticidad vertical y divergencia horizontal son:

$$A.1 \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = - \nabla \cdot (\xi + f) \mathbf{v} - \underline{k} \cdot \nabla \times (RT' \nabla \ln p_* + \dot{\sigma} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \sigma} + \mathbf{F}_H)$$

$$A.2 \quad \frac{\partial D}{\partial t} = \underline{k} \cdot \nabla \times (\xi + f) \mathbf{v} - \nabla \cdot (RT' \nabla \ln p_* + \dot{\sigma} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \sigma} + \mathbf{F}_H) - \nabla^2 (\phi' + RT_0 \ln p_* + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$$

La relación hidrostática y la ecuación termodinámica son

$$A.3 \quad \frac{\partial \phi}{\partial \ln \sigma} = - RT$$

$$A.4 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = - \nabla \cdot T' \mathbf{v} + T' D - \dot{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} + F_T + \frac{Q}{C_p} + \frac{RT}{C_p} \frac{\omega}{P}$$

donde

$$A.5 \quad \frac{\omega}{P} = \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \ln p_* - \nabla_H \cdot \tilde{\mathbf{v}}$$

y la estabilidad estática es

$$A.6 \quad \frac{RT}{\sigma C_p} - \frac{\partial T}{\partial \sigma}$$

Integrando verticalmente la ecuación de continuidad con condiciones de contorno $\dot{\sigma} = 0$ en $\sigma = 1$ y $\sigma = 0$ resulta:

$$A.7 \quad \frac{\partial \ln p_*}{\partial t} = - \tilde{V} \cdot \nabla \ln p_* - \nabla_H \cdot \tilde{V}$$

$$A.8 \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -(V \cdot \tilde{V}) \nabla \ln p_* - (\nabla_H \cdot V - \nabla_H \cdot \tilde{V})$$

En las anteriores ecuaciones el índice cero indica valores medios horizontales independientes del tiempo y las primas indican desviaciones del promedio. V es la velocidad horizontal, D es la divergencia horizontal, ξ la componente z de la vorticidad, ϕ el geopotencial y T la temperatura. Las variables con \sim denotan valores verticalmente promediados

$$A.9 \quad (\sim) = \int_0^1 (\quad) d\sigma$$

Las condiciones de contorno son $\dot{\sigma}=0$ en $\sigma=1$ y $\sigma=0$. F_H y F_T son términos de difusión. Se tomó una difusión horizontal lineal de la forma

$$F_{\frac{\partial}{\partial \sigma}} = -K \nabla^4 \left\{ \begin{array}{l} \xi \\ D \\ T \end{array} \right\} - K' \left\{ \begin{array}{l} \xi \\ D \\ T - T_0 \end{array} \right\}$$

K' es diferente de cero sólo en la capa absorbente esponjosa de los seis niveles superiores del modelo.

Las ecuaciones horizontales baroclínicas multinivel del modelo son expandidas en una base truncada de esféricos armónicos. La truncación es romboidal.

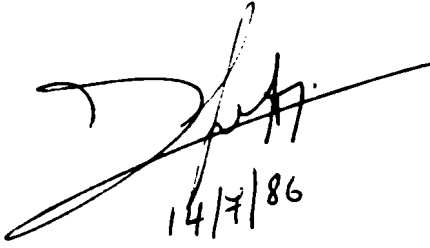
Las variables D , ξ , T y ϕ son especificadas a cada nivel de una grilla vertical, y σ es especificada a niveles mitad. El nivel $\frac{1}{2}$ corresponde a $\sigma=0$ y el nivel $N+\frac{1}{2}$ a $\sigma=1$.

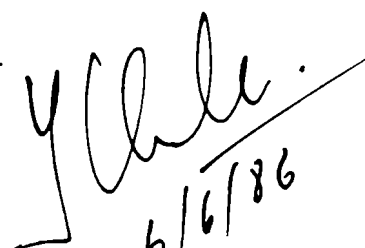
Los términos no lineales son calculados en una grilla horizontal libre de "aliasing" para términos cuadráticos en D , ξ , T , ϕ y p_* . Sin embargo los términos cúbicos no están libres de "aliasing". Los términos cuadráticos en σ son productos triples porque σ es cuadrático.

El esquema conserva la masa.

La diferenciación temporal es semi-implícita. La temperatura se escribe como $T = T_0(\sigma) + T'$, y los términos lineales en D o en $\phi + RT_0 \ln p_*$ son tratados implícitamente.

El paso de tiempo implícito es 15 minutos. El esquema de diferenciación temporal es leap-frog. Un filtro débil de Robert es aplicado en cada paso de tiempo.


14/7/86


6/6/86

REFERENCIAS

- Beyers, N.J.; B.T.Miers and R.J.Reed (1966). Diurnal tidal motions near the stratopause during 48 hours at White Sands Missile Range. J. Atmos. Sci., 23, 325-333.
- Bourke, W. (1972). An efficient, one-level primitive equation spectral model. Mon. Wea. Rev., 100, 683-689.
- Bourke, W. (1974). A multilevel spectral model. I. Formulation and hemispheric integrations. Mon. Wea. Rev., 102, 687-701.
- British Meteorological Office, Air Ministry (1958). Tables of temperature, relative humidity and precipitation for the world. Vol I-VI, London.
- Butler, S.T. and K.A.Small (1963). The excitation of atmospheric oscillations. Proc. Roy. Soc., A 274, 91-121.
- Carlson, G.C. and S. Hastenrath (1970). Diurnal variation of wind, pressure and temperature in the troposphere and stratosphere over Eniwetok. Mon. Wea. Rev., 98, 408-416.
- Central Meteorological Bureau of China (1960). An Atlas of chinese climatology. Map Publishing Society, Peiping, i-viii, 5-293.
- Chapman, S. and R.S. Lindzen (1970). Atmospheric tides. Thermal and gravitational. D. Reidel publishing Co. Dordrecht, Holland.

- Clarke, R.H., A.J. Dyer, R.R. Brook, D.G. Reid and A.J. Troup (1971). The Wangara experiment: boundary layer data. Tech Paper 19, Div. Meteor. Phys. CSIRO, Australia.
- Courant, R. and D. Hilbert (1953). Methods of mathematical physics. Interscience publishers.
- Coy, L. (1979). A possible 2-day oscillation near the tropical stratopause. J. Atmos. Sci., 36, 1615-1618.
- Fels, S.B. (1974). The trapeze instability in an open domain. J. Atmos. Sci., 31, 434-443.
- Fels, S.B. (1982). A parameterization of scale-dependent radiative damping rates in the middle atmosphere. J. Atmos. Sci., 39, 1141-1152.
- Fels, S.B. and R.S. Lindzen (1974). The interaction of thermally excited gravity waves with mean flows. Geophys. Fluid Dyn., 6, 149-191.
- Forbes, J.M. and H.B. Garrett (1978). Thermal excitation of atmospheric tides due to insolation absorption by O_3 and H_2O . Geophys. Res. Lett., 5, 1013-1016.
- Forbes, J.M., and H.B. Garret (1979). Theoretical studies of atmospheric tides. Rev. Geophys. Space Phys., 17, 1951-1981.
- Fukao, S.; T. Sato, I. Hirota and S. Kato (1980). A preliminary radar observation of long period waves in the tropical mesosphere over Jicamarca. J. Geoph. Res., 85, 1955-1957.

- Giwa, F.B. and L.A. Hussain (1978). A theory of atmospheric tides generated by the differential heating between land and sea. *Pure Appl. Geophys.*, 116, 56-65.
- Gordon, C. (1977). Verification of the GFDL spectral model. *Weather forecasting and weather forecasts: models, systems, and users*, Vol. 2. Notes by T. Engel and K. Weichmann, from a colloquium summer 1976, NCAR, 745-761.
- Gordon, C.T. and W.F. Stern (1982). A description of the GFDL global spectral model. *Mon. Wea. Rev.*, 110, 625-644.
- Hamilton, K. (1981,a). Latent heat release as a possible forcing mechanism for atmospheric tides. *Mon. Wea. Rev.*, 109, 3-17.
- Hamilton, K.P. (1981,b). Numerical studies of wave-mean flow interaction in the stratosphere, mesosphere and lower thermosphere. Ph. D. Thesis, G.F.D.P., Princeton University.
- Harris, M.F. (1959). Diurnal and semidiurnal variations of wind, pressure and temperature in the troposphere at Washington, D.C. *J. Geophys. Res.*, 8, 983-995.
- Harris, M.F.; F.G. Finger and S. Teweles (1962). Diurnal variation of wind, pressure, and temperature in the troposphere and stratosphere over the Azores. *J. Atmos. Sci.*, 19, 136-149.
- Harris, M.F; F.G. Finger and S. Teweles (1966). Frictional

and thermal influences in the solar semidiurnal tide. Mon. Wea. Rev., 94, 427-447.

Hasselmann, K. (1967). A criterium for nonlinear wave stability. J. Fluid Mech., 30, 737-739.

Haurwitz, B. (1962). Die tagliche Periode der lufttemperatur in Bodennähe und ihre geographische Verteilung. Arch. Met. Geoph. Biokl. A 12, 426-434.

Haurwitz, B. (1965). The diurnal surface pressure oscillation. Archiv. Meteor. Geophys. Biokl., 14, 361-379.

Haurwitz, B. and A. D. Cowley (1973). The diurnal and semidiurnal barometric oscillations, global distribution and annual variation. Pure Appl. Geophys., 102, 193-222.

Haurwitz, B. and F. Moller (1955). The semidiurnal air-temperature variation and the solar air tide. Archiv. Meteorol. Geophys. Biokl., 8, 332-350.

Hering, W.S. and T.R. Borden (1962). Diurnal variations in the summer wind field over the central United States. J. Atmos. Sci., 19, 81-86.

Hoskins, B.J. and A.J. Simmons (1975). A multilayer spectral model and the semi-implicit method. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 101, 637-655.

Johnson, D.H. (1955). Tidal oscillations of the lower stratosphere. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 81, 1-8.

Kato, S. (1966). Diurnal atmospheric oscillation, I, eigenvalues and Hough functions. J. Geophys. Res., 71, 3201-3209.

- Kertz, W. (1957). "Atmosphärische Gezeiten", in Handbuch der Physik (ed. by S. Flügge), 48, 928-981, Springer, Berlin.
- Lettau, H.H. (1967). Small to large scale features of boundary layer structure over mountain slopes. Proceedings of the symposium on mountain meteorology, Dept. Atmos. Sci., Colorado State Univ., Fort Collins.
- Lindzen, R.S. (1966). On the theory of the diurnal tide. Mon. Wea. Rev., 94, 295-301.
- Lindzen, R.S. (1968). The application of classical atmospheric tidal theory. Proc. Roy. Soc., A 303, 299-316.
- Lindzen, R.S. (1978). Effect of daily variations in cumulonimbus activity on the atmospheric semidiurnal tide. Mon. Wea. Rev., 106, 526-533.
- Lindzen, R.S. and D. Blake (1970). Mean heating of the thermosphere by tides. J. Geophys. Res., 75, 6868-6871.
- Lindzen, R.S. and J. Forbes (1983). Turbulence originating from convectively stable internal waves. J. Geophys. Res., 88, 6549-6553.
- Lindzen, R.S. and S. Hong (1974). Effects of mean winds and horizontal temperature gradients on solar and lunar semidiurnal tides in the atmosphere. J. Atmos. Sci., 31, 1421-1446.

- Longuet Higgins, M.S. (1968). The eigenfunctions of Laplace's tidal equation over a sphere. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 262, 511-607.
- McKenzie, D.J. (1968). The diurnal atmospheric tide with newtonian cooling and longitudinal dependent drives. Ph. D. Thesis, University of Washington.
- Mechoso, C. (1980). The atmospheric circulation around Antarctica: Linear stability and finite-amplitude interactions with migrating cyclones. J. Atmos. Sci., 37, 2209-2233.
- Miers, B.T. (1965). Wind oscillations between 30 and 60 km over White Sand Missile Range, New Mexico. J. Atmos. Sci., 22, 382-387.
- Miyahara, S. (1978,a). Zonal mean winds induced by vertically propagating atmospheric tidal waves in the lower thermosphere. J. Meteor. Soc. Japan, 54, 86-97.
- Miyahara, S. (1978,b). Zonal mean winds induced by vertically propagating atmospheric tidal waves in the lower thermosphere. Part II. J. Meteor. Soc. Japan, 56, 548-558.
- Morse, P. and H. Feshbach (1953). Methods of theoretical physics. Mc. Graw Hill.
- Nitta, T., and S. Esbensen (1974). Diurnal variations in the western atlantic trades during BOMEX . J. Meteor. Soc. Japan, 52, 254-257.
- Ogura, Y. and N.A. Phillips (1962). Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere. J. Atmos. Sci., 19, 173-179.
- Orlanski, I. (1973). The trapeze instability as a

- source of internal gravity waves. Part I. J. Atmos. Sci., 30, 1007-1016
- Paffen, K. (1966). Die täglichen Temperaturschwankungen als geographisches Klimacharakteristikum. Erdkunde, XX, 252-265.
- Rasmusson, E. A. (1967). Atmospheric water vapor transport and the water balance over North America. Part I. Characteristics of the water vapor flux field. Mon. Wea. Rev., 95, 403-426.
- Richtmyer, R. (1957). Difference methods for initial value problems. Interscience. New York.
- Salby, M. (1981). The 2-day wave in the middle atmosphere: observations and theory. J. Geophys. Res., 86, 9654-9660.
- Shaw, N. (1936). Manual of meteorology, vol II, 2nd ed., Cambridge University Press.
- Siebert, M. (1961). Atmospheric tides. Advances in Geophysics, vol 7, Academic Press, New York, 105-182.
- Wallace, J.M., and F.R. Hartranft (1969). Diurnal wind variations: surface to 30 km. Mon. Wea. Rev., 97, 446-455.
- Wallace, J.M., and F.R. Patton (1970). Diurnal temperature variations: surface to 25 km. Mon. Wea. Rev., 98, 548-552.
- Wallace, J.M., and R.F. Tadd (1974). Some further results concerning the vertical structure of atmospheric tidal motions within the lowest 30 kilometers. Mon. Wea. Rev., 102, 795-803.

- Waltersheid, R.L. (1981). Inertio-gravity wave induced accelerations of mean flow having an imposed periodic component: implications for tidal observations in the meteor region. *J. Geophys. Res.*, 86, 9698-9706.
- Waltersheid, R.L.; J.G. De Vore and S.V. Venkateswaran (1980). Influence of mean zonal motion and meridional temperature gradients on the solar semidiurnal atmospheric tide: a revised spectral study with improved heating rates. *J. Atmos. Sci.*, 37, 455-470.
- Yanowitch, M. (1967). Effect of viscosity on gravity waves and the upper boundary condition. *J. Fluid Mech.*, 29, 209-231.