Grupos finitos de reflexiones complejas

Araujo, José Orlando

1986

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Tema de Tesis

GRUPOS FINITOS DE REFLEXIONES COMPLEJAS

Autor

José Orlando Araujo

Director de Tesis

Dr. Enzo R. Gentile

Lugar de trabajo

Departamento de Matemática

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

-1986-

INTRODUCCION.-

Los grupos finitos de reflexiones complejas fueron establecidos por Shephard y Tood en (9), basándose éstos en la determinación de los grupos proyectivos generados por homologías, la que se sigue de G. Bagnera en (1), H.F. Blichfeldt en (2) y N.H. Mitchell en (6).

Los grupos finitos de reflexiones, en el caso real, fueron determinados por H.S.M. Coxeter en (4). En este caso la clasificación se reduce al análisis de grafos asignados a dichos grupos, construídos a partir de un sistema simple de raices.

A.M. Cohen en (3), presenta un estudio más sistematizado del caso complejo, analizando también grafos de raices. Aquí, la efectividad de los grafos no queda suficientemente clara, probablemente por no haberse establecido un análogo de sistema simple en el caso real.

Entendemos que en (3), Cohen deja ideas claves para conseguir la clasificación en forma más compacta. Estas ideas son usadas en este trabajo para arribar a la determinación de los grupos, en nuestro caso, los grupos que van surgiendo se describen detalladamente en forma independiente de los trabajos citados y tal descripción permite determinar nuevos grupos de un modo más directo que el análisis de grafos.

En (3) Cohen se limita a la determinación de los posibles grafos apoyándose en (9), en tanto que aquí presentamos una versión autocontenida de la determinación y construcción de los grupos.

La afirmación en vi) de 5.3 en (3) no es correcta, pues es posible dar contraejemplos observando las raices de $W(J_3(5))$ (ver pág. 60), esto resta validez a la demostración de 5.5 dada en (3).

A continuación damos el contenido de cada capítulo mensionando los resultados principales de este trabajo.

El primer capítulo es introductorio, en él se obtiene un criterio de finitud

(1.11) para grupos presentados por un grafo.

En el capítulo 2 se estudia el caso imprimitivo, que no presenta mayores dificultades. Allí se establecen los resultados en 2.11 y 2.13 los que indican una omisión en 2.7 y 2.13 de (3), seguramente inducida por el análisis de órbitas para $n=2$ en 2.5 vi) de (3). La proposición 2.4 puede considerarse un criterio de imprimitivismo para grupos de reflexiones.

En el capítulo 3, los grupos primitivos en C^2 son establecidos a partir de su acción en la recta proyectiva, lo que permite determinar las órbitas de las direcciones reflexivas que luego se combinan para contruir los grupos en 3.12.

El capítulo 4 reproduce resultados obtenidos en (3) para grupos primitivos, con ligeras modificaciones. En 4.5 se da una versión débil del teorema de Blichfeldt en (11) pág. 169.

En el capítulo 5 se obtiene 5.8 para gupos primitivos que contengan reflexiones de orden 3. En 5.6 diferimos con 5.14 de (3).

Finalmente, en el capítulo 6 se completa la clasificación de los grupos primitivos a partir de 6.3, 6.6 y 6.10.

Deseo expresar mi más sentido agradecimiento al Dr. Enzo R. Gentile, quien me indicara el rumbo en el estudio de la matemática y de quien recibo un permanente estímulo y entusiasmo para seguir avanzando en él.

§ 1. NOTACION, TERMINOLOGIA Y PROPIEDADES BASICAS.-

1.1- A lo largo de este trabajo notaremos con C, R y Z los números complejos, reales y enteros respectivamente. Para un complejo z, $\bar{z}$ notará el conjugado, $|z|$ el módulo.

Con μ_m nos referiremos a las raices m-ésimas de la unidad, reservando las letras w, i y ε para las raices de argumentos $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{2\pi}{5}$ respectivamente.

Notaremos con V el espacio vectorial C^n, con $e_1,\dots,e_n$ la base canónica y usaremos $\langle\ ,\ \rangle$ para el producto escalar canónico en V, $|v|$ para el módulo de un vector en V y U(V) para los automorfismos unitarios.

Para un conjunto A, $|A|$ notará el cardinal de A.

1.2- Definición:

Sea $\beta \neq 1$ un complejo unitario y $\tau \neq 0$ en V. Se llama reflexión asociada a τ con valor propio β al automorfismo de V dado por:

$$s_{\tau,\beta}(v) = v + (\beta-1).\frac{\langle v,\tau\rangle}{\langle \tau,\tau\rangle}.\tau \qquad (v \text{ en } V) \tag{1}$$

1.3- Observación:

Las siguientes propiedades son inmediatas a partir de (1):

i) $s_{\tau,\beta} \in U(V)$.

ii) $s_{\tau,\beta}(v) = v \Leftrightarrow \langle \tau,v\rangle = 0$.

iii) $s_{\mu\tau,\beta} = s_{\tau,\beta}$ $(\mu \neq 0$ en C$)$

iv) $s_{u(\tau),\beta} = u.s_{\tau,\beta}.u^{-1}$ (u en U(V)).

v) Existe una base ortonormal en V tal que la matriz de $s_{\tau,\beta}$ es $diag(\beta,1,..,1)$ en dicha base.

vi) Si $\beta^m \neq 1$, $(s_{\tau,\beta})^m$ es la reflexión asociada a τ con valor propio μ^m.

vii) T es un subespacio $s_{\tau,\beta}$-invariante si y solo si $\langle\tau,T\rangle = 0$ o $\tau \in T$.

1.4- Definición:

La recta $C.\tau$ será llamada dirección reflexiva de $s_{\tau,\beta}$ y un vector unitario en dicha recta se dirá una raiz de $s_{\tau,\beta}$.

1.5- Definición:

Un grupo G de automorfismos de V se dirá un grupo de reflexiones si puede ser generado por las reflexiones que contenga. Llamaremos direcciones reflexivas (resp. raices) de G, a las direcciones (respec. raices) de las reflexiones contenidas en G. Una raiz o dirección reflexiva en G, se dirá de orden k si k es el máximo orden de una reflexión en G asociada con dicha raiz, o dirección reflexiva.

1.6- Observación:

Si G es un grupo de reflexiones en V, y sus raices pueden ser agrupadas en dos conjuntos A y B no vacíos y ortogonales entre si, los subespacios V(A) y V(B) generados por A y B respectivamente, resultan invariantes por la acción de G, siendo este además, el producto directo de sus restricciones a dichos subespacios. En consecuencia interesa el caso en que las raices de G no puedan descomponerse en el sentido mensionado.

Puede probarse que el concepto de grupo irreducible, en el caso de grupos de reflexiones, equivale a la siguiente definición:

1.7- Definición:

Sea G un grupo de reflexiones en V, G se dice irreducible si sus raices generan V y no pueden ser agrupadas en dos conjuntos no vacios ortogonales entre si. En general, diremos que G es k-dimensional si sus raices generan un subespacio V(G) de dimension k sobre el G opera irreduciblemente.

1.8- Gráfico de Reflexiones

Por un grafico R entenderemos un conjunto finito R_V, conjunto de vértices de R, una función σ de R_V en los naturales, llamada orden y una función φ de $R_V \times R_V$ en C llamada arista tal que $\varphi(v,v) = 1 \ \forall\ v$ en R_V y la matriz de coeficientes $\alpha_{ij} = \varphi(v_i,v_j)$ es hermitiana y definida positiva.

Un gráfico puede ser representado identificando cada vértice con un punto, anotando sobre cada punto el orden del vértice correspondiente y uniendo con una flecha cada par de puntos sobre el cual colocamos el valor de la arista correspondiente. Naturalmente pueden tomarse las aristas en un solo sentido por la condición $\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ji}$, además pueden omitirse: la orientación en las aristas reales, las aristas asociadas a los pares (v,v) y las aristas nulas.

Si G es un grupo generado por $s_1,..,s_m$ reflexiones con raices $\tau_1,..,\tau_m$ linealmente independientes y con raices de la unidad $\beta_1,..,\beta_m$ como valores propios, podemos asignarle a G un <u>gráfico de reflexiones R(G)</u> como sigue:

$$R(G)_v = \tau_1,\ldots,\tau_m \quad , \ \sigma(\tau_i) = \text{orden de } \beta_i \quad , \ \varphi(\tau_i,\tau_j) = \langle \tau_i,\tau_j \rangle$$

Si bien R(G) depende de las raices elegidas, en el sentido contrario, dado un gráfico R, podemos asignarle un único grupo de reflexiones, salvo conjugados en U(V), resolviendo el problema $\langle \tau_i,\tau_j \rangle = \alpha_{ij}$ y eligiendo $\mu_i = \exp(\frac{2\pi}{\sigma(v_i)})$. Un tal grupo será notado con W(R).

Como en nuestro caso asociaremos graficos a los grupos, debemos identificar los resultantes de permutar las τ_i o de cambiar τ_i por $\mu.\tau_i$ si μ es un complejo unitario.

En general, diremos que <u>G admite un gráfico de reflexiones</u> si puede ser generado por reflexiones con raices linealmente independientes.

1.9- <u>Definición</u>:

Un gráfico de reflexiones se dice conexo si dos vértices cualesquiera pueden ser unidos por una sucesión de aristas no nulas.

1.10- <u>Proposición</u>:

Supongamos que G admita un gráfico R(G). Entonces, G es es irreducible si y solo si R(G) es conexo y G n-dimensional.

<u>Prueba</u>:

El subespacio generado por los vértices $\tau_1,\ldots,\tau_m$ de R(G) es invariate por la acción de G, lo mismo ocurre con el subespacio generado por una componente conexa de vértices en R(G), luego si G es irreducible debe ser $m = n$ y R(G) conexo.

Para la implicación en el sentido contrario, notemos que por 1.3 vii) un subespacio T es G-invariante si T es ortogonal a todos los τ_i o si existe un τ_j en T. En el primer caso T = 0, en el segundo de :

$$s_i(\tau_j) = \tau_j + (\beta_i - 1).\alpha_{ji}.\tau_i \quad \in \quad T$$

se sigue que la componenete conexa de τ_j en R(G) queda incluída en T, luego T = V.

1.11- <u>Teorema</u>:

Sea R un gráfico de reflexiones tal que el subanillo B generado sobre Z por los elementos $(\beta_i - 1).\alpha_{ji}$ es un conjunto discreto de C, entonces W(R) es finito.

<u>Prueba</u>:

Si v en V es $\delta_1.\tau_1 + .. + \delta_n.\tau_n$, la forma cuadrática dada por:

$$Q(v) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}.\delta_i.\delta_j$$

resulta invariante por la acción de G y definida positiva, luego los v en el retículo $B.\tau_1 + .. + B.\tau_n$ que cumplen Q(v) = 1 son permutados por G, de donde G es finito.

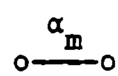
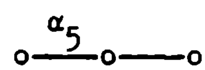
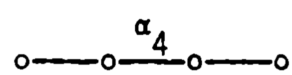
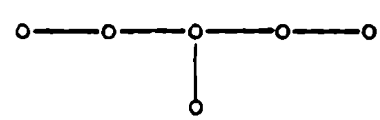
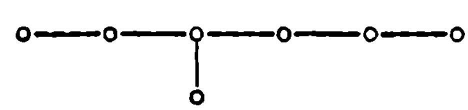
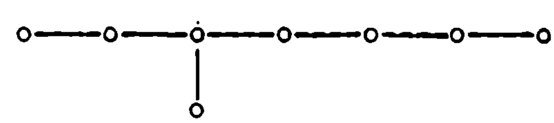
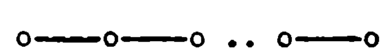
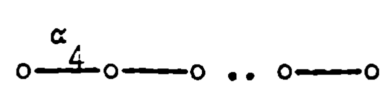
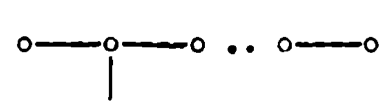
1.12- <u>Definición</u>:

Sea G un grupo de reflexiones, G se dice real si G deja invariante un suvespacio real V_o tal que $V = V_o \otimes C$. G se dice complejo en otro caso.

Notar que si G es real, las reflexiones de G son de orden 2, estos son llamados grupos de Coxeter a quien se debe el siguiente resultado (ver (4) y (5)).

1.13- <u>Teorema</u>:

Sea G un grupo de reflexiones finito irreducible en R^n, entonces G es conjugado a W(R) siendo R uno de los siguientes gráficos:

$n = 2$	$I_2(m)$		
$n = 3$	H_3		
$n = 4$	F_4		
	H_4		
$n = 6$	E_6		
$n = 7$	E_7		
$n = 8$	E_8		
$n \geq 3$	A_n		(n vértices)
	B_n		(n vértices)
$n \geq 4$	C_n		(n vértices)

siendo $\alpha_m = -\cos(\frac{\pi}{m})$ y al ser todas las reflexiones de orden 2, se omite el orden sobre los vértices, en las aristas no valuadas corresponde el valor α_3 el cual también es omitido por la frecuencia con que aparece.

De aqui en más, en los gráficos que se presenten, los valores α_3 serán omitidos en las aristas que lo posean, asi también los órdenes cuando todas las reflexiones sean de orden 2.

1.14- Definición:

Un grupo G de automorfismos de V se dice imprimitivo, si G opera irreduciblemente en V y V se descompone como suma directa de V_1, $V_2,\dots,V_k$ subespacios propios los cuales son permutados por G. En tal sitaución,el conjunto de los subespacios V_i se llama un sistema de imprimitivismo de G. Si G no es imprimitivo G se dirá primitivo.

1.15- Proposición:

Conservando las notaciones en 1.16, si G es imprimitivo, los V_i poseen la misma dimensión, más aun, estos son permutados transitivamente por G.

Prueba:

La suma de los subespacios en la G-órbita de V_1 es un subespació no nulo y G-invariante, de la irreducibilidad de G se sigue la proposición.

1.16- Proposición:

Sea G en U(V) imprimitivo admitiendo un sistema de imprimitivismo $L_1,\dots,L_n$ con $\dim(L_i) = 1$, entonces $\langle L_i, L_j\rangle = 0$ si $i \neq j$.

Prueba:

Pongamos $L_i = C.v_i$ con $|v_i| = 1$. Sea h el automorfismo dado por:

$$h(v_j) = \sum_i \langle v_j, v_i\rangle . v_i$$

para g en G se tiene:

$$(hg)(v_j) = \sum_i \langle g(v_j), v_i\rangle . v_i = \sum_i \langle v_j, g^{-1}(v_i)\rangle \,.g(g^{-1}(v_i)) =$$

$$= \sum_i \langle v_j, v_i\rangle . g(v_i) = (gh)(v_j)$$

pues existe una permutación π y escalares α_i tales que $g^{-1}(v_i) = \alpha_i . v_{\pi(i)}$. De la irreducibilidad de G se sigue que h es una homotecia, o sea que $\langle v_j, v_i\rangle = 0$ si $i \neq j$.

§ 2. CASO IMPRIMITIVO.-

2.1- Sea G un grupo de reflexiones finito imprimitivo con un sistema de imprimitivismo $L_1,\dots,L_k$ y $m = \dim(L_i)$.

Para una reflexión s en G notemos con $\pi(s)$ el número de subespacios L_i que son fijados por s. Si β es el valor propio de s, la traza de s puede ser calculada teniendo en cuenta solo la suma directa de los L_i tales que $s(L_i) = L_i$ de donde:

$$km - 1 + \beta = tr(s) = \begin{cases} \pi(s).m \\ \pi(s).m - 1 + \beta \end{cases} \qquad (2)$$

resultando $\beta = -1$, $\pi(s) = k-2$ y $m = 1$ en el primer caso y $\pi(s) = k$ en el segundo. De la irreducibilidad de G, se sigue que $\pi(s) \neq k$ para alguna reflexión s en G, luego de (2) se concluye:

i) $m = 1$, $k = n$.

ii) $\pi(s) = n$ si s tiene orden mayor que 2.

iii) La acción de G sobre el sistema de imprimitivismo equivale a la del grupo de permutaciones de n letras, siendo las transposiciones realizadas por reflexiones de orden 2 en G.

iv) Por i) y 1.18 se tiene $\langle L_i, L_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.

En virtud de iii) podemos considerar $s_1,\dots,s_{n-1}$ reflexiones en G tales que $s_i(L_i) = L_{i+1}$ y construir una base de V tomando: v_1 un vector unitario en L_1, $v_2 = s_1(v_1)$, $v_3 = s_2(v_2)$, .., $v_n = s_{n-1}(v_{n-1})$ en la cual el subgrupo de G generado por las s_i se representa como el grupo de las matrices permutacionales que notaremos con π_n.

Sea D el grupo de matrices diagonales obtenido de representar en la base v_i los elementos g en G tales que $g(L_i) = L_i$. Es claro que la representación en dicha base coincide con el producto semidirecto entre D y π_n. De este modo la determinación de G queda reducida, en virtud de iv), a la del grupo D.

Para una reflexión s en G, según (2), se verifica una de las situaciones siguientes:

iv) Existe i tal que $s(v_i) = \beta . v_i$, $s(v_j) = v_j$ si $j \neq i$.

v) Existe un par i,j tal que $s(v_i) = \mu . v_j$, $s(v_j) = \bar{\mu} . v_i$, $|\mu| = 1$
$s(v_k) = v_k$ si $k \neq i,j$.

Notemos con D_1 y D_2 los subgrupos cíclicos de D cuyos elementos son de la forma $diag(\beta,1,..,1)$ y $diag(\mu,\bar{\mu},1,..,1)$ respectivamente, y sean m y q los correspondientes órdenes. Se tiene que q es un divisor de m , ponemos $m = p.q$, y que D_1, D_2 y π_n generan la representación de G, pues pueden representarse todas las reflexiones de G con dichos grupos.

Es claro que el grupo D queda generado por D , D y los conjugados de estos bajo la acción de π_n, pudiendo de este modo escribirse como el conjunto de matrices $diag(\alpha_1,..., \alpha_n)$ con α_i en μ_m y $\alpha_1 ... \alpha_n$ en μ_q.

2.2- Notación:

Sean m y p naturales, p divisor de m y $q = \frac{m}{p}$, con $D(m,p,n)$ notaremos el conjunto de matrices diagonales dado por los elementos de la forma $\mathrm{diag}(\alpha_1,..,\alpha_n)$ con α_i en μ_m y $\alpha_1...\alpha_n$ en μ_q . Notaremos además con π_n el grupo de las matrices permutacionales de nxn y con $G(m,p,n)$ el producto semidirecto entre $D(m,p,n)$ y π_n.

2.3- Teorema:

Si G es un grupo de reflexiones finito imprimitivo, G es conjugado en U(V) a un grupo de tipo $G(m,p,n)$.

Prueba:

Se sigue de la discusión en 2.1.

2.4- Proposición:

Sea G un grupo de reflexiones irreducible. Supongamos que existe en V una base ortonormal $v_1,..,v_n$ tal que para cada raiz τ de G se verifica:

$$|\langle\tau,v_i\rangle| = 0,1 \quad \text{si } \tau \text{ es de orden mayor que } 2$$

$$|\langle\tau,v\rangle| = 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \quad \text{si } \tau \text{ es de orden } 2.$$

Entonces $L_i = C.v_i$ es un sistema de imprimitivismo de G.

Prueba:

Si G posee una raiz τ de orden mayor que 2, existirá un índice j tal que $C.\tau = C.v_j$. De la irreducibilidad de G se tiene que $G.\tau$ genera V quedando esta órbita contenida en la unión de las rectas $C.v_i$, así, 2.4 resulta de la igualdad $C.G.\tau = \bigcup_i C.v_i$.

En otro caso G estará generado por reflexiones de orden 2. Si τ es raiz de una reflexión s de G, se tiene que a lo sumo dos de los valores τ, v_i son no nulos y en cualquier caso, s permuta las rectas $C.v_i$.

2.5- Observación:

i) $G(m,p,n)$ es irreducible si $m \neq 1$ y $(m,p,n) \neq (2,2,2)$.

ii) $G(m,m,2)$ es el grupo de Coxeter $I_2(m)$ $(m > 2)$. $G(1,1,n)$ operando en el ortogonal de $e_1+e_2+ \cdots +e_n$ es el grupo de Coxeter $W(A_{n-1})$. $G(2,1,n)$ y $G(2,2,n)$ son los grupos $W(B_n)$ y $W(C_n)$ respectivamente.

iii) Si $p.q = m$, $G(m,m,n)$ y $G(q,1,n)$ son subgrupos de reflexiones de $G(m,p,n)$.

2.6- Proposición:

i) $|G(m,p,n)| = q.m^{n-1}.n!$, $|\mu(G(m,p,n))| = q.\text{mcd}(p,n)$ $(p.q = m)$.

ii) $G(4,4,2)$ y $G(2,1,2)$ es el único par de irreducibles conjugados.

Prueba:

i) Para el orden de $G(m,p,n)$ basta observar que $|D(m,p,n)| = q.m^{n-1}$ y para el orden del centro, notar que este esta formado por las matrices escalares $\mu.I$ con μ en μ_m y $\mu^{nq} = 1$, luego su orden sera $\text{mcd}(m,nq) = q.\text{mcd}(p,q)$.

ii) Supongamos que $G(m,p,n)$ y $G(m',p',n)$ son conjugados. Pongamos $m = pq$ $m' = p'q'$. Notar que si $q > 2$, de 2.1 se sigue que q queda determinado como el máximo orden de una reflexión en $G(m,p,n)$.

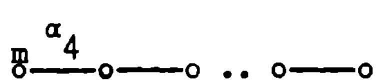
como el máximo orden de una reflexión en $G(m,p,n)$.

Si $q = q'$, de i) se sigue $m = m'$ y $p = p'$. Luego si $q \neq q'$ podemos suponer $q = 1$, $q' = 2$, en este caso de i) se sigue $m = 4$, $m' = 2$.

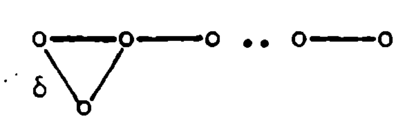
Para ver que $G(2,1,2)$ y $G(4,4,2)$ son conjugados, basta observar que ambos son el grupo de Coxeter $I(4)$ presentado en una versión real en el primer caso, como grupo de permutaciones de sus direcciones reflaxivas, y en el segundo, permutando los espacios propios de sus rotaciones de orden 4, en una versión compleja.

2.7- <u>Proposición</u>:

$G(m,1,n)$ y $G(m,m,n)$ admiten, respectivamente, los siguientes gráficos de reflexiones:



(n vértices) $\alpha_4 = -\cos(\frac{\pi}{4})$



(n vértices) $\delta = \cos(\frac{\pi}{m}).\exp(\frac{\pi i}{m})$

En general $G(m,p,n)$ puede generarse con n+1 reflexiones.

<u>Prueba</u>:

Las reflexiones cuyas direcciones reflexivas están dadas por:

$$e_1-e_2,\ e_2-e_3,\ldots,\ e_{n-1}-e_n$$

generan π_n. Dichas reflexiones juntamente con una reflexión de orden m según la dirección dada por e_1 o con una reflexión de orden 2 según la dada por $\mu e_1 - e_2$ $(\mu = \exp(\frac{2\pi i}{m}))$, generan $G(m,1,n)$ y $G(m,m,n)$ respectivamente.

El caso general se sigue de 2.4 iii).

2.8- Definición:

Una reflexión en $G(m,p,n)$ se dirá diagonal si es un elemento de $D(m,p,n)$, en otro caso se dirá transversal en otro caso. Lo mismo para raices y direcciones reflexivas.

2.9- Proposición:

Sea $G(m,p,n)$ irreducible. Si $n > 2$ las direcciones reflexivas en $G(m,p,n)$ pueden ser agrupadas en una órbita de $\frac{1}{2}$ m.n.(n-1) elementos, más una órbita de n elementos, si $q \neq 1$.

Si $n = 2$, las direcciones reflexivas se agrupas en mcd(2,p) órbitas de m/mcd(2,p) elementos, más una órbita de 2 elementos si $q \neq 1$.

Prueba:

Según 2.1 iv) y v), las reflexiones en $G(m,p,n)$ se obtienen reuniendo las de $D(q,1,n)$ con las de $G(m,m,n)$. Si $q \neq 1$, las reflexiones diagonales dan lugar a n direcciones reflexivas agrupadas en una órbita y coincidiendo ésta con el sistema de imprimitivismo.

Las direcciones reflexivas de $G(m,m,n)$ corresponden a reflexiones transversales de $G(m,p,n)$ y pueden ser tomadas según las $\frac{1}{2}$ m.n.(n-1) direcciones:

$$e_i-\mu_m.e_j \quad , \; i,j = n \; , \; i \neq j.$$

Si i,j,k son índices distintos y s la reflexión definida por:

$$s(e_j) = \bar{\mu}.e_k \; , \; s(e_k) = \mu.e_j \; , \; s(e_h) = e_h \quad \text{si } h \neq i,j$$

se tiene $s(e_i-\mu e_j) = e_i - e_k$ de donde, si $n > 2$, toda reflexión transversal es conjugada a una transposición en π_n, y así, las correspondientes direcciones reflexivas forman una única órbita.

Para $n = 2$, teniendo en cuenta que $G(m,m,2)$ es un grupo diedral, sus direcciones reflexivas formarán a lo sumo dos órbitas, dando lugar a una sola órbita en el caso que puedan conectarse en $G(m,p,2)$ las direcciones:

$$e_1-e_2 \quad y \quad e_1-\mu e_2 \qquad \mu = \exp(\tfrac{2\pi i}{m})$$

los transformados por $G(m,p,2)$ de e_1-e_2 son de la forma:

$$\pm\; (\mu^i e_1-\mu^j e_2) \quad \text{con p divisor de } i+j \tag{3}$$

luego dichas direcciones podrán conectarse si para algún par i,j se verifica que m es un divisor, y luego p, de $i+1-j = 2i+1-(i+j)$ de donde, p es un divisor de $2i+1$.

Reciprocamente, si p es impar, tomando $i = \frac{p-1}{2}$, $j = \frac{p+1}{2}$ se sigue de (3) que las direcciones mensionadas pueden ser conectadas en $G(m,p,2)$.

2.10- Los sistemas de imprimitivismo de G(m,p,n).-

Muchos de los grupo primitivos resultan extensiones de grupos de tipo

$G(m,p,n)$ que admiten mas de un sistema de imprimitivismo, razón por la cual estos casos son determinados a continuación.

Si $q > 2$, del análisis en 2.1, se tiene que las direcciones reflexivas asociadas a reflexiones de orden mayor que 2 en $G(m,p,n)$ determinan el sistema de imprimitivismo de este, en consecuencia dicho sistema es el único posible para $G(m,p,n)$.

Se tiene entonces que $G(m,p,n)$ admite mas de un sistema de imprimitivismo si $m = 2p$ o $m = p$.

Si $G(2p,p,n)$ admite dos sistemas de imprimitivismo, estos coinciden en cada caso, con la órbita de las n direcciones reflexivas asociadas a las reflexiones diagonales, salvo $G(2,1,2)$ que puede presentarse como $G(4,4,2)$. Tendremos entonces $p = 1$, $n = 2$ o $G(2p,p,n)$ posee dos órbitas de direcciones reflexivas con n elementos, en este caso por 2.9 la única posibilidad es $p = 2$, $n = 2$.

Para $G(4,2,2)$ sus tres órbitas de direcciones reflexivas:

$$e_1,\ e_2 \qquad e_1-e_2,\ e_1+e_2 \qquad e_1-ie_2,\ e_1+ie_2 \tag{4}$$

dan lugar a tres sistemas de imprimitivismo, naturalmente estos también lo son de $G(2,1,2) = G(4,4,2)$ por ser subgrupo de $G(4,2,2)$.

Consideremos ahora $G(m,m,n)$, si $n = 2$ y $m > 2$, sea g una rotación de orden m, un sistema de imprimitivismo estará dado por los espacios de valores propios de g, o por vectores no nulos v tales que v y $g(v)$ son ortogonales entre sí, pero esto último sólo es posible en el caso $m = 4$, siendo los posibles sistemas, los dados en (4).

Supongamos $n \geqslant 3$, un sistema de imprimitivismo esta dado por la base canónica, y supongamos que la órbita de un vector unitario $v = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ da lugar a un nuevo sistema de imprimitivismo. Teniendo en cuenta la acción de π_n, consideremos w el vector obtenido a partir de v permutando dos de sus coordenadas α y α. Los vectores v y w resultaran alineados u ortogonales entre sí, lo que equivale respectivamente a:

$$\begin{aligned} &\text{i) } \alpha_i = \pm\alpha_j \ \text{ y } \ \alpha_k = 0 \quad \forall\ k \neq i,j \quad \text{o} \\ &\quad \alpha_i = \alpha_j \ \text{si existe} \ \alpha_k \neq 0 \ \text{ con } k \neq i,j. \\ &\text{ii) } |\alpha_i - \alpha_j| = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Si v tiene una coordenada nula, eligiendo esta como α_j y como α_i cualquier coordenada no nula, se sigue de (5) que $|\alpha_i| = 1$ es decir v se encuentra en la recta $C.e$ lo que contradice que la órbita de v de lugar a un nuevo sistema deimprimitivismo.

Se tiene $\alpha_i \neq 0$ para todo i y (5) puede reescribirse como:

$$\alpha_i = \alpha_j \quad \text{o} \quad |\alpha_i - \alpha_j| = 1 \quad \text{si} \quad i \neq j \tag{6}$$

Es claro, apartir de (6), que las coordenadas de v pueden tomar a lo sumo tres valores distintos, dados en el caso extremo, por los vértices de un triángulo equilátero en el plano complejo, cuyas aristas tienen longitud igual a 1.

Supongamos por comodidad que α_1, α_2, α_3 son distintos dos a dos y sea $\beta = \dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}$, dado que v es unitario se tiene:

$$3|\beta|^2 + 1 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 \leq 1$$

de donde $\beta = 0$, $n = 3$ y v puede elegirse en la dirección dada por $(1,w,\bar{w})$. Sea μ una raiz primitiva en μ_m , de la condición en (6) para los vectores en la órbita de v, aplicada a la dirección dada por $(\mu w,\bar{\mu},\bar{w})$, se tiene $\mu \in \mu_3$, es decir $m = 3$.

Supongamos que las coordenadas de v tomen exactamente dos valores α y β. Sea μ como antes, v tendrá en su órbita un elemento de la forma:

$$(\mu\alpha,\bar{\mu}\alpha,\beta,..)$$

si $\mu\alpha,\bar{\mu}\alpha,\beta$ son distintos entre sí, del razonamiento precedente se sigue que $(1,w,\bar{w})$ posee en su $G(3,3,3)$-órbita un elemento con exactamente dos coordenadas distintas, lo que es imposible. Se tiene entonces $\beta = \mu\alpha,\bar{\mu}\alpha$ o $m = 2$. En el primer caso, si $m \neq 2$, se tiene α y β complejos del mismo módulo que distan en 1, pudiendo tomarse v en este caso en una de las direcciones dadas por $(1,1,w)$ o $(1,1,\bar{w})$, es decir $m = 3$. Sea $m = 2$, el vector en la órbita de v dado por:

$$(\alpha,-\beta,-\alpha,..)$$

no puede tener tres coordenadas distintas, pues $m = 2$, se tiene entonces $\beta = \pm\alpha$. Es claro que en este caso $n = 4$ y que v puede tomarse en una de las direcciones dadas por $(1,1,1,-1)$ o $(1,1,-1,-1)$.

Finalmente si v tiene todas sus coordenadas iguales, podemos cambiarlo por un elemento en su órbita , pues $m \neq 1$, y caer en los casos anteriores.

En conclusión, si $n > 2$, sólo para los grupos $G(3,3,3)$ y $G(2,2,4)$ se tienen los nuevos sistemas de imprimitivismos dados por:

$$(1,1,1),(1,w,w),(w,1,w)$$

$$(1,1,w),(1,w,1),(w,1,1)$$

$$(1,1,w),(1,w,1),(w,1,1) \qquad (7)$$

$$(1,1,1,-1),(1,1,-1,1),(1,-1,1,1),(-1,1,1,1)$$

$$(1,1,1,1),(1,1,-1,-1),(1,-1,1,-1),(1,-1,-1,1)$$

Del análisis precedente resulta:

2.11- <u>Proposición</u>:

Sean $G(m,p,n)$ **irreducible**, si $(m,p,n) \neq (2,1,2),(4,4,2),(4,2,2),(3,3,3),(2,2,4)$, entonces $G(m,p,n)$ admite un único sistema de imprimitivismo.

2.12- <u>El normalizador de $G(m,p,n)$</u>.-

A continuación analizaremos el grupo normalizador $N(m,p,n)$ en $U(V)$ de $G(m,p,n)$. Observemos que $G(m,p,n) \triangleleft G(m,1,n)$, además cualquier elemento en el normalizador, debe permutar los sistemas de imprimitivismo de $G(m,p,n)$.

Fijemos los ejes cartesianos como el sistema de imprimitivismo canónico para $G(m,p,n)$. Si una transformación t deja invariante el sistema canónico, módulo π_n, podemos suponer $t(e_i) = \alpha_i e_i$, si ademas t esta en $N(m,p,n)$ debe permutar las direcciones reflexivas transversales,de donde $\alpha_j \in \alpha_i \mu_m$, es decir t es un escalar módulo $G(m,1,n)$.

Se concluye que $N(m,p,n) = U.G(m,1,n)$ (con U los complejos unitarios) si $G(m,p,n)$ posee un único sistema de imprimitivismo.

Para $G(2,1,2)$, debemos notar que los sistemas de imprimitivismo establecidos en 2,10 (4), corresponden a direcciones reflexivas los primeros, mientras que el tercero esta dado por los vectores propios de sus rotaciones, en consecuencia este último debe permanecer invariante por los elementos de $N(2,1,2)$.Puede concluirse en este caso que:

$$N(2,1,2) = U.G(4,1,2) = U.G(8,8,2) \qquad \text{(U complejos unitarios)}$$

$G(4,1,2)$ presentado sobre el sistema de imprimitivismo $C.(e_1+ie_2)$, $C.(e_1-ie_2)$, $G(8,8,2)$ en el sistema $C.e_1,C.e_2$.

En los casos restantes, puede observarse, que $G(m,1,n)$ presentado en cualquiera de los sistemas de imprimitivismo establecidos en (4) y (7) de 2.10, no sólo normaliza a $G(m,p,n)$, sino que permuta transitivamente los sistemas restantes. En consecuencia si notamos con $E(m,p,n)$ el grupo generado por las distintas presentaciones de $G(m,1,n)$ tendremos que éste normaliza a $G(m,p,n)$, además para culaquier elemento t en $N(m,p,n)$ podremos suponer $t(e_i) = \alpha_i e_i$ módulo $E(m,p,n)$ y como antes concluir que t es escalar módulo $E(m,p,n)$, y así, el cálculo del normalizador queda reducido a la determinacion de $E(m,p,n)$. Notemos que este último puede ser generado con una presentación de $G(m,1,n)$, por ejemplo en el sistema de imprimitivismo canónico, y una reflexión s de orden m con dirección reflexiva en cualquiera de los sistemas restantes. Se sigue por 2.7 que $E(m,p,n)$ puede generarse con n+1 reflexiones, pero como veremos a continuación, puede suprimirse un generador en cada caso.

Consideremos $E(4,2,2)$ quien puede generarse con dos reflexiones de orden 4 en las direcciones dadas por e_1 y e_1-e_2 , y con una reflexión de orden 2 en la direccion e_1-e_2, es claro que esta última es innecesaria, en consecuencia según 1.8 $E(4,2,2)$ admite un gráfico de reflexiones de tipo:

$$\overset{4}{\circ}\xrightarrow{\ \mu\ }\overset{4}{\circ} \qquad \mu = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$$

quedando definido en $Z(\mu_8)$, el orden de su centro no puede exeder a 8, y desde que permuta los sistemas de imprimitivismo de $G(4,2,2)$, se sigue que $E(4,2,2)$ resulta finito, necesariamente primitivo a partir de 2.1. Este grupo se verá en 3.9 b) y 3.12 como $W(4o_1)$.

$N(3,3,3)$ puede ser generado por reflexiones de orden 3 en las direcciones $e_1, e_1+e_2+e_3$ y reflexiones de orden 2 en las direcciones e_1-e_2, e_2-e_3. Notemos estas reflexiones con s_1,s_2,s_3,s_4 respectivamente, asignándole el valor propio w a las reflexiones de orden 3. Se tiene:

$$s_3s_1^{-1}s_3s_2^{-1}s_3s_1s_3(e_1-e_2) = e_2-e_3$$

y usando 1.3 iv) se sigue que s puede descartarse del conjunto de generadores considerado. De este modo $E(3,3,3)$ admite un gráfico de reflexiones de tipo:

$$M_3 \qquad \overset{3}{\circ}\xrightarrow{\ \alpha\ }\overset{3}{\circ}\overset{\beta}{\text{———}}\overset{2}{\circ} \qquad \alpha = \frac{\sqrt{3}i}{3}\ ,\ \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Los detalles sobre $W(M_3)$ serán estudiados en 5.3.

Finalmente E(2,2,4) puede generarse por reflexiones s_1,s_2,s_3,s_4,s_5 de orden 2 segun las direcciones:

$$e_1+e_2+e_3+e_4,\ e_1,\ e_1-e_2,\ e_2-e_3,\ e_3-e_4$$

respectivamente. Como antes , puede verse que s_5 es innecesaria y así este grupo admite un gráfico de reflexiones de tipo:

$$F_4 \qquad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\!\!\overset{\alpha}{\underset{}{\overset{4}{-\!\!\!-\!\!\!-}}}\!\!\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$$

es decir, E(2,2,4) es el grupo de Coxeter $W(F_4)$ listado en 1.13.
El análisis realizado nos permite enunciar:

2.13- <u>Proposición</u>:

Si N(m,p,n) es el grupo normalizador de G(m,p,n) en U(V) y U los complejos unitarios, entonces:

i) N(m,p,n) = U.G(m,1,n) , si G(m,p,n) posee un único sistema de imprimitivismo, o (m,p,n) = (4,4,2).

ii) N(4,2,2) = U.W($4o_1$) , N(3,3,3) = U.W(M_3) y N(2,2,4) = U.W(F_4).

Nota: omitimos G(2,1,2) presntándolo como G(4,4,2).

§ 3. GRUPOS PRIMITIVOS EN C^2.-

La determinación de los grupos del plano sera realizada mediante los sistemas de rectas invariantes que asignamos a cada grupo en 3.6.
La acción de un grupo sobre su sistema de rectas lleva a considerar el correspondiente grupo de homografías en la recta proyectiva, y naturalmente, el grupo de rotaciones asociado en el espacio tridimensional real.

3.1- Notaremos con $SU_2(C)$ el grupo de transformaciones unitarias en C^2 de determinante igual a 1. Un elemento de $SU_2(C)$ queda determinado por un par de complejos α,β tales que $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$, pues $SU_2(C)$ puede pensarse como el conjunto de matrices de la forma:

$$h = \begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

Notaremos con $P = C \cup \infty$ a la recta proyectiva compleja y con $PSU_2(C)$ el grupo de homografías en P inducidas por los elementos de $SU_2(C)$, es decir las homografías de la forma:

$$\bar{h}(z) = \frac{\alpha z - \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}$$

Se tiene $SU_2(C)/\pm 1 = PSU_2(C)$.

Un elemento no escalar h en $SU_2(c)$ posee exactamente dos rectas invariantes, asociadas a sus vectores propios, estas se corresponden con los puntos fijos en P de $\bar{h}$.

La siguiente identificación de $PSU_2(C)$ con $SO_3(R)$ será utilizada en la determinación y construcción de los sistemas de rectas invariantes de un grupo finito de $U_2(C)$.

Pensemos el espacio tridimensional real como $E = C\times R$ donde el producto escalar y la norma están dados por:

$$(z,\alpha),(u,\beta) = \mathrm{Re}(z\bar{u}) + \alpha\beta$$

$$|(z,\alpha)|^2 = |z|^2 + \alpha^2$$

$SO(E) = SO_3(R)$ es el grupo de transformaciones ortogonales de determinante igual a 1.

Sea S la esfera en E formada por los vectores de norma 1. Se tiene la proyección π de S en P dada por:

$$\pi(z,\alpha) = \frac{z}{1-\alpha} \quad , \quad \pi(0,1) = \infty$$

Desde que π es biyección, podemos metrizar P a travez de π con la distancia esférica:

$$d^2(u,z) = \frac{|z-u|^2}{(1+|z|^2).(1+|u|^2)} \quad , \quad d^2(\infty,z) = \frac{1}{1+|z|^2} \qquad (8)$$

Para t en $SO_3(R)$ ponemos $t_\pi = \pi t \pi^{-1}$. Con las notaciones precedentes es conocido el siguiente hecho:

3.2- <u>Proposición</u>:

i) $PSU_2(C)$ deja invairante ladistancia d dada en (8).

ii) Para t en $SO_3(R)$, $t_\pi \in PSU_2(C)$.

iii) La aplicación $t \to t_\pi$ es un isomorfismo de $SO_3(R)$ en $PSU_2(C)$.

Como consecuencia de la proposición precedente, los grupos finitos de $PSU_2(C)$ se corresponden con los de $SO_3(R)$, los que pasamos a describir a continuación.

3.3- Grupos finitos de rotaciones.

Los grupos de rotaciones en el espacio real, están dados esencialmente por las transformaciones que dejan invariante un poliedro regular. Los resultados descriptos a continuación pueden encontrarse en [5].

3.4- Teorema:

Si G es un subgrupo finito de $SO_3(R)$, G es conjugado a uno de los siguientes grupos:

i) C_n, grupo cíclico que deja invariante una pirámide recta cuya base es un polígono regular de n lados.

ii) D_n ,grupo diedral que deja invariante una bipirámide recta cuya base es un polígono regular de n lados (se excluye el octaedro).

iii) T , grupo tetraedral, formado por las rotaciones que dejan invariante un tetraedro.

iv) O , grupo octaedral, formado por las rotaciones que dejan invariante un octaedro.

v) I , grupo icosaedral, formado por las rotaciones que dejan invariante un icosaedro.

3.5- Para un tal G, si A es el conjunto de puntos en S que son fijados por alguna rotación en G distinta de 1, se tiene que G permuta los puntos en A y de este modo induce en A una partición en órbitas que detallamos en la siguiente tabla.

G	$\|G\|$	$\|A\|$	$\|O_1\|$	$\|O_2\|$	$\|O_3\|$
C_n	n	2	1	1	-
D_n	2n	2n+2	2	n	n
T	12	14	4	4	6
0	24	26	6	8	12
I	60	62	12	20	30

(9)

Los subgrupos finitos de $SU_2(C)$, son conocidos como grupos poliédricos binarios y pueden construirse según el grupo de rotaciones asociado. Para el siguiente resultado puede consultarse [10].

3.6- Teorema:

Si G es un subgrupo finito de $SU_2(C)$, G es conjugado a uno de los siguientes:

i) $\mathbb{C}_n$, grupo cíclico generado por:

$$\begin{bmatrix} \alpha_n & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_n \end{bmatrix} \qquad \alpha_n = \exp(\frac{2\pi i}{n})$$

ii) $\mathbb{D}_n$, grupo diedral binario generado por D y $\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$.

iii) $\mathbb{T}$, grupo tetraedral binario generado por D_2 y

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\begin{bmatrix}\beta & \beta^3\\ \beta & \beta^7\end{bmatrix} \quad , \quad \beta = \exp(\tfrac{\pi}{4}).$$

iv) $\mathbb{O}$, grupo octaedral binario generado por $\mathbb{T}$ y

$$\begin{bmatrix}\beta^3 & 0\\ 0 & \beta^5\end{bmatrix} \quad , \quad \beta = \exp(\tfrac{\pi}{4}).$$

v) $\mathbb{I}$, grupo icosaedral binario generado por:

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon^4-\varepsilon & \varepsilon^2-\varepsilon^3\\ \varepsilon^2-\varepsilon^3 & \varepsilon-\varepsilon^4\end{bmatrix} \quad y \quad \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon^2-\varepsilon^4 & \varepsilon^4-1\\ 1-\varepsilon & \varepsilon^3-\varepsilon\end{bmatrix}$$

3.7- Sistema de rectas invariantes.

Sea G un grupo finito de $U_2(C)$, llamaremos sistema de rectas invariantes de G al conjunto $\sigma(G)$ de rectas en C^2 invariantes por algun elemento no escalar de G.

Si $\det(G) = \mu_m$ en C, notaremos con G' el grupo $\mu_{2m}.G\cap SU_2(C)$. Con estas notaciones se tiene:

3.8- Proposición:

i) $\sigma(G) = \sigma(G')$.

ii) G y G' coinciden como grupos de permutaciones de los elementos de $\sigma(G)$.

iii) Si G es primitivo, $G'/\mu(G')$ es isomorfo a uno de los grupos $\mathbb{T}$, $\mathbb{O}$ o $\mathbb{I}$ y G no posee reflexiones de orden superior a 5.

o $\mathbb{I}$ y G no posee reflexiones de orden superior a 5.

<u>Prueba</u>:

i) y ii) se siguen de la siguiente observación: si g esta en G y μ es una raiz cuadrada en C de det(g), $\mu.g$ es un elemento de G'.

iii) G y G' operan en $\sigma(G)$ del mismo modo que $G'/\mu(G')$ lo hace en el conjunto de puntos fijos de sus homografías. Cuando G es primitivo, $\sigma(G)$ no puede poseer órbitas con 2 elementos y la primer parte de iii) se sigue de la tabla en (9) de 3.5.
Finalmente si g en G no es escalar y L en $\sigma(G)$ una recta no invariante por g, una de las rectas $g(L), g^2(L), g^3(L), g^4(L), g^5(L)$ debe ser L ,pues como permutación g no puede tener orden superior a 5. Se tiene que una de las potencias g^2, g^3, g^4, g^5 es un escalar, en particular si g es reflexión, una de las potencias mencionadas sera la identidad.

3.9- Notemos con $\bar{G}$ el cociente $G'/\mu(G')$. A continuación describiremos $\sigma(G)$, salvo cambios unitarios de coordenadas, según G sea isomorfo a $\mathbb{T}$, $\mathbb{O}$ o $\mathbb{I}$. Sea E = CxR, la inscripción del tetraedro en el cubo nos permite construir simultaneamente los puntos fijos de las rotaciones correspondientes a los grupos respectivos. Estos pueden ponerse como:

$$(\pm 1, 0) \;,\; (\pm i, 0) \;,\; (0, \pm 1)$$

puntos fijos de rotaciones de orden 4 en O y de rotaciones de orden 2 en T.

$$\underline{\sqrt{3}}\,.(\pm 1 \pm i, \pm 1)$$

correspondiente a puntos fijos de rotaciones de orden 3 de T y O.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\pm 1 \pm i, 0),\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\pm 1, \pm 1),\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\pm i, \pm 1)$$

puntos fijos de rotaciones de orden dos solo en O.

En el caso de T las órbitas son:

T_1 : $\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(\pm 1 \pm i, \pm 1)_1$ (con un número par de signos negativos)

T_2 : $\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(\pm 1 \pm i, \pm 1)_{-1}$ (con un número impar de signos negativos)

T_3 : $(\pm 1, 0)$, $(\pm i, 0)$, $(0, \pm 1)$

En el caso del grupo O, las órbitas son:

O_1 : puntos fijos de las rotaciones de orden 4.

O_2 : puntos fijos de las rotaciones de orden 3.

O_3 : puntos fijos de las rotaciones de orden 2.

Para el grupo I, sea $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Se tiene las siguientes órbitas:

I_1 : puntos fijos de las rotaciones de orden 5:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma+2}}\cdot(\pm\gamma \pm i, 0),\ \frac{1}{\sqrt{\gamma+2}}\cdot(\pm\gamma , \pm 1)\ ,\ \frac{1}{\sqrt{\gamma+2}}\cdot(\pm 1, \pm\gamma)$$

I_2 : puntos fijos de rotaciones de orden 3:

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(\pm\gamma^{-1} \pm \gamma i, 0),\ \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(\pm\gamma^{-1} i, \pm\gamma)\ ,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(\pm\gamma, \pm\gamma^{-1}),\ \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(\pm 1 \pm i, \pm 1)$$

I_3 : puntos fijos de las rotaciones de orden 2:

$(\pm 1,0),(0,\pm i),(0,\pm 1),\ \frac{1}{2}.(\pm 1\pm\gamma i,\pm\gamma^{-1}),\ \frac{1}{2}.(\pm\gamma^{-1}\pm i,\pm\gamma),\ \frac{1}{2}.(\pm\gamma\pm\gamma^{-1}i,\pm 1)$

Ahora podemos realizar $\sigma(G)$ según los casos como:

a) $\bar{G} = T$, las rectas en $\sigma(G)$ pueden agruparse en las siguientes órbitas:

t_1 : $(\pm 1\pm i).x + (\sqrt{3}\pm 1).y = 0$ (con un número par de signos negativos)

t_2 : $(\pm 1\pm i).x + (\sqrt{3}\pm 1).y = 0$ (con un número impar de signos negativos)

t_3 : $x = \pm\, y$, $x = \pm iy$, $x = 0$, $y = 0$.

b) $\bar{G} = O$, las órbitas en $\sigma(G)$ son:

$o_1 = t_3$

$o_2 = t_1 \cup t_2$

o_3 : $(\pm 1\pm i).x = \sqrt{2}.y$, $x = \pm(\sqrt{2}+1).y$, $x = \pm i(\sqrt{2}+1).y$

c) $\bar{G} = I$, las órbitas son:

i_1 : $\sqrt{\gamma+2}\ .x = (\pm\gamma\pm i).y$, $(\sqrt{\gamma+2}\pm 1).x = \pm\gamma iy$, $(\sqrt{\gamma+2}\pm\gamma).x = \pm y$

i_2 : $\sqrt{3}.x = (\pm\gamma^{-1}\pm\gamma i).y$, $(\sqrt{3}\pm\gamma)x = \pm\gamma^{-1}iy$

$(\sqrt{3}\pm\gamma^{-1}).x = \pm\gamma.y$, $(\sqrt{3}\pm 1).x = (\pm 1\pm i).y$

i_3 : $x = \pm\, y$, $x = \pm iy$, $x = 0$, $y = 0$, $x = (\pm\gamma\pm\gamma^{-1}).y$

$3.x = (\pm\gamma\pm\gamma^{-1}).y$, $(2\pm\gamma).x = (\pm\gamma^{-1}\pm i).y$, $(2\pm\gamma^{-1}).x = (\pm 1\pm\gamma i).y$.

3.10- Sea G un subgrupo finito de $U_2(C)$, σ una órbita en $\sigma(G)$, llamaremos orden de σ al orden del grupo de isotropía en $\bar{G}$ de un elemento de σ.

Notemos que si k es el orden de σ y g en G tiene una recta invariante en σ, entonces g^k es un escalar.

Con las notaciones introducidas podemos enunciar el siguiente resultado:

3.11-Proposición:

Sea s una reflexión en G con dirección reflexiva en una órbita σ de $\sigma(G)$, entonces el orden de s divide al orden de σ.

Prueba:

Se sigue de 3.10.

3.12- Enumeración de los grupos de reflexiones primitivos.

En lo que sigue, notaremos con G un grupo primitivo en $U_2(C)$ generado por reflexiones, $\sigma(G)$,G' y $\bar{G}$ como en 3.7 y 3.9.

Por 3.8 iii) se tiene $\bar{G} = \mathfrak{T}$, $\mathfrak{O}$,$\mathfrak{I}$. Las direcciones reflexivas quedan contenidas en $\sigma(G)$ y si una reflexion s tiene dirección reflexiva en una órbita σ de $\sigma(G)$, el orden de s y σ coinciden salvo $\sigma = o_1$ caso en que s puede tener orden 2 o 4.

Si $\sigma \neq o_1$, notaremos con $W(\sigma)$ el grupo generado por las reflexiones con raíces en σ, con $W(2o_1)$ y $W(4o_1)$ el grupo generadc por las reflexiones de orden 2 y 4 respectivamente, con direcciones reflexivas en o_1.

A continuación determinamos G según $\bar{G}$:

a) Si $\bar{G} = \mathfrak{T}$, se tiene los siguientes casos:

i) $G = W(t_1)$

En este caso G posee 8 reflexiones de orden 3 con direcciones reflexivas en t_1, y puede ser generado por dos reflexiones de orden 3 cuyas raices τ y φ pueden tomarse de modo que $\langle \tau, \varphi \rangle = \frac{\sqrt{3}}{3}\, i$, admitiendo G un gráfico de reflexiones que permite definir G en $Z(w)$.

Por otra parte $\mu(G)$ no puede contener elementos de orden 3, pues G no posee reflexiones con direcciones reflexivas en t_2, además $G \cap SU_2(C)$ es necesariamente $\mathbb{D}_2$ de índice 3 en G. Se concluye que $|G| = 24$ y $\mu(G) = \mu_2 . I$.

ii) $G = W(t_1).W(t_2) = W(t_1 U t_2)$

Se tiene $\mu(G) = \mu_6 . I$, y claramente $G \cap SU_2(C) = \mathbb{T}$ de índice 3 en G. Resulta $|G| = 72$, ádemas G posee 16 reflexiones de orden 3 con direcciones reflexivas en $t_1 U t_2$.

iii) $G = W(t_1).W(t_3) = W(t_1 U t_3)$

Notemos que $W(t_3)$ es el grupo imprimitivo $G(4,2,2)$ de donde 4 divide a $|\mu(G)|$ y como en i) $\mu(G)$ no posee elementos de orden 3. Teniendo en cuenta los generadores, si $\mu . I \in \mu(G)$, se cumple $\mu^{12} = 1$, luego $\mu(G) = \mu_4 . I$. $G \cap SU_2(C) = \mathbb{D}_2$ de índice 6 en G, luego $|G| = 48$.

iv) $G = W(t_1).W(t_2).W(t_3) = W(t_1 U t_2 U t_3)$

De los casos anteriores se tiene $\mu(G) = \mu_{12} . I$, además $G \cap SU_2(C) = \mathbb{T}$ de índice 6 en G, es decir $|G| = 144$.

Observemos que $W(t_2)$ y $W(t_2 U t_3)$ son conjugados a $W(t_1)$ y $W(t_1 U t_3)$ respectivamente y $W(t_3)$ es conjugado a $G(4,2,2)$.

b) $\bar{G} = 0$, los casos son:

i) $G = W(4o_1)$

Si un elemento no escalar en $G \cap SU_2(C)$ tiene una recta invariante en o_3 con valor propio μ, debe ser $\mu^4 = 1$, es decir $\mu = \pm i$. Como $i.I$ está en G, se tendría una reflexión con raiz en o_3. Se concluye que $G \cap SU_2(C) = \mathbb{T}$, pues es un subgrupo normal de $G' = \mathbb{D}$. Se tiene además $|G| = 96$.

Los elementos en $\mu(G)$ satisfacen $\mu^8 = 1$, pero G no posee escalares de orden 8, pues en caso contrario $\mathbb{D} = G' = G \cap SU_2(C) = \mathbb{T}$, se sigue que $\mu(G) = \mu_4.I$.

ii) $G = W(o_3)$

Dado que G no posee reflexiones de orden 4, razonando como en el caso anterior se tiene $G \cap SU\ (C) = \mathbb{T}$ de índice 2 en G, luego $|G| = 48$.

Los elementos de $\mu(G)$ satisfecen $\mu^4 = 1$, pero el escalar $i.I$ en G implica $G = \mathbb{T}$. Se tiene $\mu(G) = \mu_2.I$.

iii) $G = W(4o_1).W(o_2) = W(4o_1 U o_2)$

Se tiene $G \cap SU_2(C) = \mathbb{T}$ de índice 12 en G, luego $|G| = 288$. Como en los casos anteriores, $\mu(G) = \mu_{12}.I$.

iv) $G = W(4o_1).W(o_3) = W(4o_1 U o_3)$

En este caso $G = G \cap SU_2(C) = \mathbb{D}$ de índice 4 en G, así, $|G| = 192$. Como $\mathbb{D}$ posee elementos de orden 8 con rectas invariantes en o_1 es $\mu(G) = \mu_8 I$.

v) $G = W(2o_1).W(o_3) = W(2o_1 \cup o_3)$

Nuevamente $G \cap SU_2(C) = \mathbb{D}$ de índice 2 en G, resulta $|G| = 96$, y desde que $\mathbb{D}$ posee elementos de orden 4 con rectas invariantes en o_1, se tiene $\mu(G) = \mu_4.I$.

vi) $G = W(o_2).W(o_3) = W(o_2 \cup o_3)$

Se tiene $G\ SU_2(C) = \mathbb{T}$ de índice 6 en G, luego $|G| = 144$. Como $G' = \mathbb{D}$, G no posee escalares de orden 12, resulta $\mu(G) = \mu_6.I$.

vii) $G = W(4o_1).W(o_2).W(o_3) = W(4o_1 \cup o_2 \cup o_3)$

Resulta $G \cap SU_2(C) = \mathbb{D}$ de índice 12 en G, luego $|G| = 576$ y de los casos precedentes $\mu(G) = \mu_{24}.I$.

viii) $G = W(2o_1).W(o_2).W(o_3) = W(2o_1 \cup o_2 \cup o_3)$

Es $G \cap SU_2(C) = \mathbb{D}$ de índice 6 en G, asi $|G| = 288$, y de los casos precedentes $\mu(G) = \mu_{12}.I$.

Notemos que $W(2o_1) = W(t_3)$, $W(o_2) = W(t_1 \cup t_2)$ fueron considerados en a).

c) $\bar{G} \cong I$, se tiene $G \cap SU_2(C) = \mathbb{I}$ pues I es simple y $G\ SU_2(C)$ es un subgrupo normal de $G' = \mathbb{I}$. En los siguientes casos el orden de G depende de las órbitas consideradas, razonamos como en los casos anteriores para $\mu(G)$.

i) $G = W(i_1)$

$|G| = 600$, $\mu(G) = \mu_{10}.I$.

ii) $G = W(i_2)$

$|G| = 360$, $\mu(G) = \mu_6 . I$.

iii) $G = W(i_3)$

$|G| = 240$, $\mu(G) = \mu_4 . I$ (I posee elementos con valores propios i,-i en i_3).

iv) $G = W(i_1).W(i_2') = W(i_1 U i_2)$

$|G| = 1.800$, $\mu(G) = \mu_{30} . I$.

v) $G = W(i_1).W(i_3) = W(i_1 U i_3)$

$|G| = 1.200$, $\mu(G) = \mu_{20} . I$ (de i) y iii)).

vi) $G = W(i_2).W(i_3) = W(i_2 U i_3)$

$|G| = 720$, $\mu(G) = \mu_{12} . I$ (de ii) y iii)).

vii) $G = W(i_1).W(i_2).W(i_3) = W(i_1 U i_2 U i_3)$

$|G| = 3.600$, $\mu(G) = \mu_{60} . I$ (de iii) y iv)).

3.13- La siguiente tabla resume la información obtenida en este capítulo sobre los grupos de reflexiones primitivos en C^2. En ella notaremos la reunión de orbitas en forma abreviada, por ejemplo $i_1 U i_2 = i_{12}$.

G	$\|G\|$	$\|\mu(G)\|$	número de reflexiones de orden 2	3	4	5
$W(t_1)$	24	2	-	8	-	-
$W(t_{12})$	72	6	-	16	-	-
$W(t_{13})$	48	4	6	8	-	-
$W(t_{123})$	144	12	6	16	-	-

G	$\mid G \mid$	$\mid \mu(G) \mid$	número de reflexiones de orden			
			2	3	4	5
$W(4o_1)$	96	4	6	-	12	-
$W(o_1)$	48	2	12	-	-	-
$W(4o_{12})$	288	12	6	16	12	-
$W(4o_{13})$	192	8	18	-	12	-
$W(2o_{13})$	96	4	18	-	-	-
$W(o_{23})$	144	6	12	16	-	-
$W(4o_{123})$	576	24	18	16	12	-
$W(2o_{123})$	288	12	18	16	-	-
$W(i_1)$	600	10	-	-	-	48
$W(i_2)$	360	6	-	40	-	-
$W(i_3)$	240	4	30	-	-	-
$W(i_{12})$	1.800	30	-	40	-	48
$W(i_{13})$	1.200	20	30	-	-	48
$W(i_{23})$	720	12	30	40	-	-
$W(i_{123})$	3.600	60	30	40	-	48

§ 4. GRUPOS PRIMITIVOS.-

En este capítulo reproducimos los resultados generales sobre grupos primitivos establecidos en [3]. Aunque estos aparecen ligeramente modificados en 4.3 y 4.5, las demostraciones de estos hechos no varían esencialmente de las dadas en [3]. El teorema 4.6 puede considerarse una versión débil, pero simple, del teorema de Blichfeldt y suficiente para establecer 4.8, resultado de suma importancia en los capítulos siguientes.

En todos los casos los grupos considerados serán de orden finito.

4.1- Definición:

Diremos que $G \subset U(V)$ opera irreduciblemente en un subespacio T de V, si T es invariante e irreducible para la acción de G y G opera trivialmente en el ortogonal a T.

4.2- Proposición:

Sea $G \subset U(V)$ operando irreduciblemente en un subespacio T de V. Supongamos que exista un subespacio $S \neq 0$ en V, con ortogonal S_o, tal que $S \neq G.S \subseteq S \cup S_o$, entonces se verifican:

i) Si $S \cap T \neq 0$, G es imprimitivo en T admitiendo un sistema de imprimitivismo $T_1,..,T_k$ con $\dim(T_i) = \dim(S \cap T)$.

ii) Si $S \cap T = 0$ y G de reflexiones , entonces G es de tipo $W(A_m)$ con $m = \dim(T)$.

Prueba:

i) Sea $S_1,..,S_k$ la G-órbita de S. Si g en G es tal que $g(S) \neq S$, se tiene $\langle S,g(S)\rangle = 0$, de donde $\langle S_i,S_j\rangle = 0$ para $i \neq j$. Sea $T_i = T S_i$ de la irreducibilidad de G resulta $T = \oplus T_i$.

ii) Notar que G se presenta como un grupo imprimitivo en $\oplus S_i$, razonando como en 2.1 y teniendo en cuenta que G posee a lo sumo una reflexión en el plano determinado por cada par S_i,S_j, resulta G de tipo $W(A_m)$ y desde que sus raices generan T, debe ser $\dim(T) = m$.

4.3- Proposición:

Sea G un grupo irreducible en U(V) conteniendo un subgrupo H de reflexiones,primitivo, m-dimensional.Si H no es de tipo $W(A_m)$, entonces G es primitivo o todo sistema de imprimitivismo $V_1,..,V_k$ de G satisface $\dim(V_i) \geq m$.

Prueba:

Supongamos G imprimitivo con sistema de imprimitivismo $V_1,..,V_k$. Pongamos $T = V(H)$, si $T \quad V_i \neq 0,T$ para algún indice i, esto daría lugar a un sistema de iprimitivismo de H en T. Si $T \cap V_i = 0 \quad \forall\, i$, ninguna raiz de H podra pertenecer a V_i.De este modo, si τ es una raiz de una reflexión s en H, existirá un índice j tal que $\langle \tau,V_j\rangle \neq 0$ y por 1.3 vii) $s(V_j) \neq V_j$. Se sigue de 2.1 i),1.16 y 4.2 que H es de tipo $W(A_m)$. En consecuencia debe existir un índice i tal que $T \cap V_i = T$, luego $m = \dim(T) \leq \dim(V_i)$.

Como consecuencia inmediata de 2.1 i) y 4.3 se tiene:

4.4- Corolario:

En las hipótesis de 4.3 si además G es de reflexiones y $m > 1$, entonces G es primitivo.

4.5- Proposición:

Sea G en U(V) primitivo conteniendo un subgrupo de reflexiones H m-dimensional, $1 < m < n$. Si H es imprimitivo con un único sistema de imprimitivismo, entonces existe una reflexión s en G tal que H y s generan un grupo primitivo m+1-dimensional.

Prueba:

Supongamos $H \subseteq H_o$, con H_o de reflexiones imprimitivo. Sea $L_1, \dots, L_k$ un sistema de imprimitivismo de H_o en $V(H_o)$. De las hipótesis en m, se sigue que existe un índice j tal que $H.L_j \neq L_j$, luego por 4.2 $H.L_j$ es el único sistema de imprimitivismo de H en V(H). Resulta que dos sistemas de imprimitivismo de H_o tendrán rectas comunes en V(H), por 2.10 H_o debe tener un único sistema de imprimitivismo.

Notemos con G_o el grupo generado por las reflexiones en G, siendo G primitivo, de 1.3 iv) y 1.6 G_o resulta irreducible. Si G_o es imprimitivo, tendrá un único sistema de imprimitivismo, pues $H \subseteq G_o$, pero G_o es normal en G y 2.13 i) contradice la primitividad de G.

Supongamos $m = n-1$, $L_1, \dots, L_m$ un sistema de imprimitivismo de H en V(H), y L_n la recta ortogonal a V(H). Pongamos $L_i = C.v_i$ con $|v_i| = 1$.

Como G_o es primitivo, por 2.4 y 1.6 existen reflexiones s y t con raices τ y ρ respectivamente tales que:

$$\tau \notin \cup L_i \cup L_n$$

$$|\langle\varphi,v_j\rangle| \neq 0,1 \quad \text{si } t \text{ tiene orden mayor que } 2$$
$$|\langle\varphi,v_j\rangle| \neq 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2},1 \quad \text{si } t \text{ tiene orden } 2 \qquad (10)$$

para algún índice j. Si H y s generan un grupo imprimitivo,éste tendrá a $L_1,\ldots,L_n$ por sistma de imprimitivismo, necesariamente, de modo que cambiando a φ por un conjugado, si es necesario, podemos suponer $j = n$ en (10), luego por 2.4 H y t generan un grupo primitivo n-dimensional.
Para el caso general hacemos inducción en n-m. H puede sumergirse en un grupo $\bar{H}$ de reflexiones n-1-dimensional. Si $\bar{H}$ es primitivo, 4.5 se sigue de la hipótesis inductiva. Si $\bar{H}$ es imprimitivo, tendrá un único sistema de imprimitivismo $L_1,\ldots,L_m,\ldots,L_{n-1}$ siendo $L_1,\ldots,L_m$ el sistema de imprimitivismo de H. Si φ es como antes, podemos permuta sus n-1 coordenadas iniciales y suponer $|\langle\varphi,v_m\rangle| \neq 0$, luego H y t generan un grupo primitivo m+1-dimensional, pues $|\langle\varphi,v_n\rangle| \neq 0$.

4.6- <u>Teorema</u>:

Sea G en U(V) primitivo, H un subgrupo de G actuando irreduciblemente en un hiperplano T de V. Si $h \neq 1$ esta en H, entonces h tiene un valor propio μ tal que $|1-\mu| > 1$.

<u>Prueba</u>:

Sea e un vector unitario ortogonal a T, v en G.e tal que:

$$|e-v| = \min \{ |e-w| \text{ , } w \text{ en } G.e, \ |\langle e,w\rangle| \neq 0,1 \}$$

Notar que por ser G primitivo, no es posible $|\langle e,w\rangle| = 0,1$ para todo w en G.e. Escribamos $v = \alpha e + t$, $\alpha \neq 0$ en C , $t \neq 0$ en T.

Para h en H se verifica $h(v) = \beta v$ si y solo si $h(v) = v$. (11)

Si h en H no es 1, sea S el subespacio ortogonal al conjunto de puntos fijos de h en T. $S \neq 0$ y H.S genera T, luego debe existir u en H tal que $u(S),v \neq 0$, de donde uhu^{-1} mueve a v. En consecuencia puede pensarse $h(v) \neq v$.

Pongamos $v = g(e)$, se tiene:

$$|e-g(e)| = |e-g^{-1}hg(e)| = |g(e)-hg(e)| = |v-h(v)| \quad o \quad |\langle v,h(v)\rangle|=0,1$$

en el primer caso resulta:

$$|\alpha-1|^2+ |t|^2 = |h(t)-t|^2 = |1-\mu|^2.|t|^2$$

siendo μ el valor propio de h más distante de 1, se sigue que $|1-\mu| > 1$.

En el segundo caso, como h mueve a v, por (11) no puede ser $|\langle h(v),v\rangle| = 1$, luego:

$$0 = \langle v,h(v)\rangle = |\alpha|^2 + \langle t,h(t)\rangle = 1 - \langle t,t\rangle + \langle t,h(t)\rangle$$

es dedir:

$$\langle t,1-h(t)\rangle = 1$$

de donde $1 \leq |t|^2.|1-\mu| < |1-\mu|$ siendo μ el valor propio de h más distante de 1.

4.7- <u>Corolario</u>:

En las hipótesis del teorema se tiene $|\mu(K)| < 6$ para todo subgrupo irreducible K de H.

<u>Prueba</u>:

Si h genera $\mu(K)$, h posee a lo sumo dos valores propios 1 y μ

como elemento de G. Si $\mu \neq 1$ del teorema se sigue que el orden de μ no puede exeder a 5.

4.8- <u>Corolario</u>:

Sea $n \geq 3$, G en U(V) primitivo, entonces se verifican:

i) G no posee reflexiones de orden ≥ 4.

ii) Si H es un subgrupo de reflexiones m-dimensional de G, $1 < m < n$, entonces H es de tipo G(4,2,2) o $|\mu(H)| < 4$.

iii) Si G posee un subgrupo de tipo G(m,p,k), entonces $m \leq 5$ y $m \leq 3p$.

iv) Los únicos subgrupos de reflexiones bidimensionales posibles de G son los de tipo G(3,3,2),G(4,4,2),G(5,5,2),G(3,1,2),$W(t_1)$ y G(4,2,2) si $n > 3$.

<u>Prueba</u>:

i) Sea s una reflexion de orden ≥ 4 en G. G permuta las raices de los conjúgados de s, y como G es primitivo, estas no pueden ser ortogonales entre sí. Si t es un conjúgado de s tal que s y t no conmutan, s y t generan un grupo bidimensional, necesariamente primitivo por 2.1 ii). Notemos con H este grupo, como H puede sumergirse en un grupo n-l-dimensional, se tiene $|\mu(H)|$ 6 por 4.7. Teniendo en cuenta la tabla en 3.13, la única posibilidad es H = $W(4o_1)$, pero según 3.6 iii) y 3.12 b) i), este grupo posee un elemento con valores propios $-w,-\bar{w}$, lo que contradice 4.6.

ii) Si H no es de tipo $W(A_m)$, G(4,4,2),G(4,2,2),G(3,3,3),G(2,2,4) de

4.4 y 4.5 H se sumerge en un grupo primitivo $m+1$-dimensional, con lo que podemos suponer $n = m+1$. Si un escalar μ esta en $\mu(H)$, el grupo generado por $\mu.I$ y G es primitivo y posee reflexiones con valor propio μ, de i) se sigue que el orden de μ no puede exeder a 3, luego $|\mu(H)| < 4$.
Por otra parte la desigualdad precedente se satisface siempre que $H \neq G(4,2,2)$.

iii) $G(m,p,k)$ tiene elementos con valores propios $\mu,\bar{\mu},1,..,1$ con μ en μ_m y reflexiones de orden $\frac{m}{p}$, se sigue de 5.5 y de i) que $m \leq 5$ y $m \leq 3p$.

iv) De iii) los subgrupos bidimensionales posibles seran $G(3,3,2)$, $G(4,4,2)$, $G(5,5,2)$, $G(3,1,2)$ y $G(4,2,2)$, razonando como en ii) se tiene $n > 3$ en el último caso.

En cuanto a los subgrupos primitivos, por ii) los posibles son $W(t_1)$ y $W(o_3)$ en la lista 3.13. De 3.6 iii) y 3.12 b) ii) el segundo posee un elemento con valores propios $-w,-\bar{w}$ y queda excluído por 4.6.

§ 5. GRUPOS PRIMITIVOS CONTENIENDO REFLEXIONES DE ORDEN 3.-

En este capítulo G notará un grupo de reflexiones finito primitivo y supondremos que G posee reflexiones de orden 3, será además $\dim(V) = n$ mayor o igual que 3.

5.1- Proposición:

Para $k < n$, G posee un subgrupo k-dimensional primitivo generado por reflexiones de orden 3.

Prueba:

Sea $C.\tau$ una dirección reflexiva de orden 3 de G. Los elementos en la G-órbita de $C.\tau$ generan V y no puden ser agrupados en dos conjuntos ortogonales entre sí, pues G es primitivo. Se sigue que existen raices $\tau_1,..,\tau_k$ de orden 3 que dan lugar a un gráfico conexo y si $s_1,...,s_k$ son las respectivas reflexiones, de 1.10 se tiene que el grupo H generado por las s_i es irreducible k-dimensional. Teniendo en cuenta 2.1 y que H posee reflexiones de orden 3 con raices no ortogonales, resulta H primitivo.

5.2- Proposición:

Sean τ,φ,η raices linealmente independientes de G.Se verifican:

i)

$$|\langle\tau,\varphi\rangle| = \begin{cases} 0,\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \text{si } \tau \text{ y } \varphi \text{ son de orden } 3 \\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } \tau,\varphi \text{ de orden } 2,3. \\ 0,\ \frac{1}{2} & \text{si } \tau,\varphi \text{ son de orden } 2. \end{cases}$$

ii) $C.\tau$ y $C.\varphi$ son conjugadas por G si y solo si tienen el mismo orden.

iii) Si $n = 3$, $\langle\tau,\varphi\rangle \neq 0$ y τ,φ,η de orden 3, los valores $\langle\tau,\eta\rangle$, $\langle\varphi,\eta\rangle$ no se anulan simultaneamente.

<u>Prueba</u>:

i) Si $\langle\tau,\varphi\rangle \neq 0$ y no son ambas de orden 2, las correspondientes reflexiones generan, según 4.8 iv), un subgrupo de tipo $W(t_1)$ o $G(3,1,2)$, luego i) queda parcialmente probado a partir de 3.12 a) i) y 2.1.
Si $\langle\tau,\varphi\rangle \neq 0$ y ambas de orden 2, podemos tomar una raiz η de orden 3 tal que $\langle\tau,\eta\rangle \neq 0 \neq \langle\varphi,\eta\rangle$ y las raices de orden 3,3 y 2 respectivamente dadas por:

$$\sigma_1 = \eta - 2\langle\eta,\tau\rangle .\tau$$

$$\sigma_2 = \eta - 2\langle\eta,\varphi\rangle .\varphi$$

$$\sigma_3 = \tau - 2\langle\tau,\varphi\rangle .\varphi$$

se tiene:

$$0, \frac{\sqrt{3}}{3} = |\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle| = |4\langle\tau,\varphi\rangle\langle\varphi,\eta\rangle\langle\eta,\tau\rangle - 1|$$

$$0, \frac{\sqrt{2}}{2} = |\langle\eta,\sigma_3\rangle| = |\langle\eta,\tau\rangle|.|1 - 4\langle\tau,\eta\rangle\langle\eta,\varphi\rangle\langle\varphi,\tau\rangle|$$

de donde:

$$4\langle\tau,\eta\rangle\langle\eta,\varphi\rangle\langle\varphi,\tau\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad |\langle\tau,\varphi\rangle| = \frac{1}{2}$$

ii) Desde que G no posee reflexiones de orden 6, según 4.8 i), es claro que si $C.\tau$ y $C.\varphi$ son conjugadas, deben tener el mismo orden.
Reciprocamente, si $C.\tau$ y $C.\varphi$ tienen el mismo orden, razonando como en 5.1 , existirán raices $\sigma_1,..,\sigma_k$ de un mismo orden tales que $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_k = \varphi$ y $\langle\sigma_i,\sigma_{i+1}\rangle \neq 0$, luego ii) se sigue de i).

iii) Sea P el plano generado por τ y φ, Se sigue de 4.8 iv) que las reflexiones asociadas a τ y φ generan un grupo H de tipo $W(t_1)$ actuando en P. Supongamos que g en G realiza el elmento de orden 2 en $\mu(H)$, se tiene $\mu_2.G$ primitivo y -g una reflexión de orden 2 con raiz en la recta ortogonal a P. Si $\langle\tau,\eta\rangle = 0 = \langle\varphi,\eta\rangle$ y s la reflexión asociada a η, se tendrá -gs una reflexión de orden 6 en $\mu_2.G$ en contradicción con 4.8 i).

5.3- Supongamos n = 3 y G_o el subgrupo de G generado por las reflexiones de orden 3 en G.

Por 5.1 G_o posee un subgrupo H de tipo $W(t_1)$ generado por reflexiones s y t cuyas raices τ y φ pueden elegirse de modo que $\langle\tau,\varphi\rangle = \frac{\sqrt{3}.i}{3}$.

Sea P el plano generado por τ y φ , $\eta \notin$ P una raiz de G_o. Las raices de G_o en P pueden tomarse como:

$$\tau,\ \varphi\ ,\ \tau - w\varphi\ ,\ \varphi + w\tau$$

pongamos:

$$\alpha_1 = \langle\tau,\eta\rangle\ ,\ \alpha_2 = \langle\varphi,\eta\rangle\ ,\ \alpha_3 = \alpha_1 - w\alpha_2\ ,\ \alpha_4 = \alpha_2 + w\alpha_1$$

Por 5.2 se tiene $|\alpha_i| = 0, \frac{\sqrt{3}}{3}$ tomando el valor 0 a lo sumo uno de los α_i. Si $\alpha_1 \neq 0$ los complejos:

$$\bar{\alpha}_1\alpha_2\quad,\ -\bar{w}\bar{\alpha}_1\alpha_3 = \bar{\alpha}_1\alpha_2 - \frac{\bar{w}}{3}\ ,\ \bar{\alpha}_1\alpha_4 = \bar{\alpha}_1\alpha_2 + \frac{w}{3}$$

forman los vértices de un triángulo equilátero cuya arista mide $\frac{1}{3}$, luego por 5.2, uno de éstos debe ser cero. Se concluye que η es ortogonal a una única raiz en P.

Sea h en H el elemento que induce la multiplicación por -1 en P, e un vector unitario ortogonal a P. Supongamos $\langle \tau,\eta\rangle = 0$, $\langle \varphi,\eta\rangle = \frac{\sqrt{3}}{3}i$ y pongamos:

$$\eta = \beta e + p \qquad \beta \neq 0 \text{ en } C \text{ , } p \neq 0 \text{ en } P$$

se tiene η y $h(\eta)$ raices en G_o ortogonales a τ, además:

$$p = \frac{\tau - \sqrt{3}i\varphi}{2} \quad , \quad |p| = \frac{\sqrt{2}}{2} = |\beta|$$

se sigue que $\langle \eta, h(\eta)\rangle = |\beta|^2 - |p|^2 = 0$ de donde por cada raiz en P hay exactamente dos raices en G_o ortogonales a esta, más aún, asociada con cada dirección reflexiva en P hay una única terna ortogonal de direcciones reflexivas en G_o. Se concluye que G_o cuenta con 24 reflexiones de orden 3 sobre 12 direcciones reflexivas que pueden ser agrupadas en 4 ternas ortogonales en forma única.

Notemos que las 8 direcciones fuera de P se proyectan en P sobre las rectas de t_2 dada en 3.9 a) y en consecuencia son permutadas transitivamente por H. De este modo, G_o puede generarse con las reflexiones s, t y una reflexión u con raiz η admitiendo un gráfico de reflexiones de tipo:

$$L_3 \qquad \overset{3}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \overset{3}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \overset{3}{\circ} \qquad\qquad \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

es decir G_o es de tipo $W(L_3)$ quedando definido en $Z(W)$, resulta finito según 1.11.

Si $G \neq G_o$, entonces G posee una reflexión r de orden 2 con raiz σ. De 5.2 se sigue que σ es ortogonal a una única dirección en cada terna ortogonal de G_o y podemos suponer $\langle\tau,\sigma\rangle = 0$. Las reflexiones r y u generan un grupo K de tipo $G(3,1,2)$ según 4.8 iv), cuyo sistema de imprimitivismo esta dado por las direcciones $C.\eta$, $C.h(\eta)$.

Pongamos $r(\eta) = \delta h(\eta)$, de 2.9 se sigue que las reflexiones de orden 2 en K forman una única órbita bajo la acción de G_o al igual que sus direcciones reflexivas las que vienen dadas por:

$$\eta - \mu_3 \delta h(\eta)$$

y por 5.2:

$$0, \frac{\sqrt{3}}{3} = |\langle\varphi, \eta-\mu_3\delta h(\eta)\rangle| = \frac{\sqrt{3}}{3}\, |1+\mu_3\delta|$$

como $|1+\mu_3\delta|$ no puede tomar siempre el valor 1, se tiene δ en $-\mu_3$ y podemos elegir σ en la dirección dada por $\eta + h(\eta) = 2\beta e$.

Resulta entonces, que las reflexiones de orden 2 en G forman una única órbita con respecto a G_o y G puede generarse con G_o y una reflexión r de orden 2 con raiz $\sigma = e$. Notemos que en tal caso, $r = -h$,así, $G = \mu_2.G_o$.

Como G_o también puede ser generado por las reflexiones de orden 3 con raices $\varphi,\eta,h(\eta)$, se sigue que G puede generarse con las reflexiones t,u y r , admitiendo un gráfico de reflexiones de tipo:

$$M_3 \quad \overset{3}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \overset{3}{\circ} \xrightarrow{\beta} \overset{2}{\circ} \qquad \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\, i \ , \ \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Los grupos G y G_o quedan definidos en $Z(w)$ además, $\mu(G_o) = \mu_3.I, \mu(G) = \mu_6.I$.

Sobre cada terna ortogonal de direcciones reflexivas, G posee subgrupos de tipo $G(3,1,3)$, razonando como en 2.12 y teniendo en cuenta $\mu(G)$, el subgrupo de G que deja invariante una terna ortogonal será de la forma

$\mu_2 G(3,1,3)$, desde que G permuta transitivamente las cuatro ternas , será $|G| = 2x4x162 = 1.296$ y $|G_o| = 648$.

Finalmente, el número de reflexiones de orden 2 en G coincide con el número de subgrupos de tipo $W(t_1)$ de G, si notamos que las raices de un tal subgrupo se encuentran en ternas ortogonales distintas y que cada raiz de G_o pertenece a exactamente 3 subgrupos de dicho tipo, se un total de 9 subgrupos de tipo $W(t_1)$ en G, o también 9 reflexiones de orden 2 en G.

Las raices de G pueden tomarse según las direcciones dadas por:

De orden 3:

$$\begin{array}{llll} e_i \,, & (1,1,1) \,, & (1,w,\bar{w}) \,, & (w,1,\bar{w}) \\ & (1,1,w) \,, & (1,w,1) \,, & (w,1,1) \\ & (1,1,\bar{w}) \,, & (1,\bar{w},1) \,, & (\bar{w},1,1) \end{array} \qquad (12)$$

De orden 2:

$$e_i - \mu_3 e_j \quad , \; i \neq j \; , \; i,j \leq 3$$

El grupo $W(M_3)$ aparece en 2.12 al estudiar el normalizador de $G(3,3,3)$, obtenido a partir de agregar reflexiones de orden 3 con direcciones en los distintos sistemas de imprimitivismo de $G(3,3,3)$ dados en 2.10 , esto justifica la elección de las direcciones en (12).

Conservano las notaciones, del análisis precedente se tiene:

5.4- Proposición:

Si $n = 3$, entonces G es de tipo $W(L_3)$ o $W(M_3) = \mu_2 \cdot W(L_3)$.

5.5- <u>Corolario</u>:

Si $n \geq 4$, G no posee reflexiones de orden 2.

<u>Prueba</u>:

Si τ y φ son raices de G de orden 3 y 2 respectivamente, no pudiendo ser $\langle\tau,\varphi\rangle = 0$ al variar φ de 4.8 iv) se sigue que G tendrá un subgrupo de tipo G(3,1,2) y este una extensión tridimensional primitiva en G, según 4.5, necesariamente de tipo $W(M_3)$ por 5.4 , lo que contradice 4.7 pues $\mu(W(M_3)) = \mu_6.I$.

5.6- <u>Proposición</u>:

El grupo normalizador de $W(L_3)$ y $W(M_3)$ en U(V) esta dado por $U.W(L_3)$ con U el conjunto de complejos unitarios.

<u>Prueba</u>:

Desde que $W(M_3) = \mu_2.W(L_3)$, ambos poseen el mismo normalizador. Si un elemento t en U(V) normaliza a $W(M_3)$, este debe permutar las ternas ortogonales de direcciones reflexivas, módulo $W(M_3)$, podemos suponer que t deja invairante una terna ortogonal, de moso que t normaliza al subgrupo de $W(M_3)$ de tipo G(3,1,3) presentado sobre dicha terna, por 2.13 i) se sigue que $t \in U.W(M_3) = U.W(L_3)$

5.7- Sea $n = 4$, por 5.1, G posee un subgrupo H de tipo $W(L_3)$ actuando sobre un hiperplano P. Sea e un vector unitario en la dirección ortogonal a P y $\sigma \notin P$ una raiz de G tal que $|\langle\sigma,e\rangle| \neq 1$.

Para cada terna ortogonal de raices en H , de 5.2 i), σ resulta ortogonal por lo menos a un elemento de dicha terna, razón por la cual σ no puede proyectarse en P sobre una dirección reflexiva de H, en consecuencia σ es ortogonal a una única dirección en cada terna.

Sean $\tau,\varphi,\eta,h(\eta)$ en H como en 5.3 y supongamos $<\tau,\sigma> = 0$, σ se proyecta en P sobre un elemento de la forma:

$$\beta\eta + \delta h(\eta) \qquad \text{con } |\beta| = \frac{\sqrt{3}}{3} = |\delta|$$

y por 5.2 i)

$$0, \frac{\sqrt{3}}{3} = |<\sigma,\varphi>| = |\beta-\delta|. \frac{\sqrt{3}}{3}$$

de donde $\delta \in \mu_3\beta$ y según 5.3 , σ se proyecta en P sobre las direcciones reflexivas ocupadas por reflexiones de orden 2 en $W(M_3)$, las que son permutadas transitivamente por H.

Por otra parte, si dos raices de G en las condiciones de σ se proyectan en P sobre una misma dirección dada por $\eta + \mu h(\eta)$ y $\beta(\eta + \mu h(\eta))$, de la condición en 5.2 i) resulta β en μ_3, es decir, hay a lo sumo tres raices que se proyectan sobre una misma dirección en P.

Ahora bien, si g representa el elemento de orden 3 en $\mu(H)$, las raices $\sigma,g(\sigma),g^2(\sigma)$ se proyectan sobre una misma dirección en P concluyéndose que exactamente direcciones reflexivas de G se proyectan sobre cada una de las direcciones $C.(\eta + \mu_3 h(\eta))$. Se sigue que G posee $3x9 = 27$ direcciones reflexivas fuera de PUC.e.

Notemos que las reflexiones asociadas a $\eta,h(\eta),\sigma$ dan lugar a un subgrupo de tipo $W(L_3)$ en el hiperplano ortogonal a τ, con lo que G posee además una raiz γ en la dirección C.e y un total de $12 + 27 + 1 = 40$

direcciones reflexivas, pudiendo ser generado con H y una reflexión asociada a la raiz σ . Si σ se elige de modo que su proyección en P caiga sobre $-\frac{\sqrt{3}}{3}\, i.(\eta + h(\eta))$, las reflexiones asociadas a τ,φ,η,σ generan G admitiendo este un gráfico de reflexiones de tipo:

$$L_4 \qquad \overset{3}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \overset{3}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \overset{3}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \overset{3}{\circ} \qquad\qquad \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\, i$$

es decir $G = W(L_4)$ queda definido en $Z(w)$ y la finitud la garantiza 1.11. Notar que en los planos ortogonales determinado por los pares τ,φ y σ,γ G posee subgrupos de tipo $W(t_1)$ de donde $-I \in \mu(G)$, como ademas G posee una base ortongonal de raices, se tiene $\mu(G) = \mu_6.I$.

El grupo de isotropía de γ debe normalizar a H, siendo por 5.6 un subgrupo de $\mu_2.H$ en P, pero si la multiplicación por -1 en P es realizada por un elemento g de G, se tendrá una reflexión -g en G de orden 2 con raiz γ, en contradicción con 5.5, luego el grupo de isotropía de γ coincide con H.

Los multiplos de γ que aparecen en su G-órbita son exactamente $\mu_6.\gamma$ lo que da un total de 6 x 40 = 240 elementos en dicha órbita , de donde $|G| = 240 \times |H| = 240 \times 648 = 155.520$.

Finalmente las raices de $G = W(L_4)$ pueden tomarse según las direcciones dadas por:

$$e_i \ , \ (1,\mu_3,\mu_3,0) \ , \ (1,-\mu_3,0,-\mu_3) \ , \ (1,0,-\mu_3,\mu_3),(0,1,-\mu_3,\mu_3)$$

Conservando las notaciones introducidas en § 5, el siguiente teorema y los datos en la tabla son consecuencias del análisis realizado en este capítulo.

5.8- <u>Teorema</u>:

Sea G un grupo de reflexiones primitivo conteniendo reflexiones de orden 3, $n=3$. Entonces $n = 3$ y G de tipo $W(L_3)$ o $W(M_3)$ o $n = 4$ y G de tipo $W(L_4)$.

Se tiene además la siguiente tabla:

G	n	$\|G\|$	$\|\mu(G)\|$	número de reflexiones de orden	
				2	3
$W(L_3)$	3	648	3	-	24
$W(M_3)$	3	1.269	6	9	24
$W(L_4)$	4	155.520	6	-	80

§ 6. GRUPOS PRIMITIVOS GENERADOS POR REFLEXIONES DE ORDEN 2.-

En este capitúlo estudiaremos los grupos primitivos generados por reflexiones de orden 2, recordando 1.12 y 1.13 , solo consideraremos el caso complejo.

En lo que sigue G denotará un grupo complejo primitivo generado por reflexiones de orden 2 y $n = \dim(V)$ será mayor o igual que 3.

Usaremos $\delta(G)$ para referirnos al máximo entero k tal que G contiene un subgrupo de tipo $G(k,k,2)$, γ para el número $2\cos(\frac{\pi}{5})$ y Q_3, Q_4, Q_5 para los conjuntos dados por:

$$Q_3 = \{0 , \tfrac{1}{2}\}$$
$$Q_4 = \{0 , \tfrac{1}{2} , \tfrac{\sqrt{2}}{2}\}$$
$$Q_5 = \{0 , \tfrac{\gamma^{-1}}{2} , \tfrac{1}{2} , \tfrac{\sqrt{2}}{2} , \tfrac{\gamma}{2}\}$$

6.1- Observación:

Si $\delta(G) = k$, por 4.8 iv) se tiene $k = 3,4,5$ y si τ y φ son raices linealmente independientes de G, sera $|\langle\tau,\varphi\rangle| \in Q_k$.

El siguiente resultado fue establecido en 4.6 de (3), aunque la demostración que se expone de este hecho es algo más breve, en ella se supone familiaridad con los grupos de Coxeter listados en 1.13.

6.2 - Teorema:

Sea H irreducible generado por reflexiones de orden 2 y $\delta(H) = k$. Si toda extensión tridimensional en H de sus subgrupos de tipo $G(k,k,2)$ es real, entonces H es real.

<u>Prueba</u>:

Si D en H es un subgrupo de tipo $G(k,k,2)$, s una reflexión en H con raiz τ tal que D y s generen un grupo tridimensional, la condición de que esta extensión sea real equivale a que exista una raiz φ en D con $\langle\tau,\varphi\rangle = 0$.

Si H es complejo, existirá un entero m mínimo con la propiedad siguiente: Existe un subgrupo real K de reflexiones m-dimensional con $\delta(K) = k$ y una reflexión s con raiz τ en H tal que K y s generan un grupo complejo.

Notar que en tal caso $m \geq 3$ y un tal subgrupo existe pues podemos tomar una extensión real maximal irreducible de un subgrupo de tipo $G(k,k,2)$.

Si K es de tipo $W(B_m)$, presentando las raices de este según las direcciones dadas por e_i, $e_i-\mu_2 e_j$, los valores $|\langle\tau,e_i\rangle|$ $i = 1,\ldots,m$, no pueden tomar siempre el valor 0 o una vez el valor 1, de donde para un par de índices i,j sera $|\langle\tau,e_i\rangle| \neq 0,1 \neq |\langle\tau,e_j\rangle|$, y conteniendo K un subgrupo de tipo $G(4,4,2)$ en el plano determinado por e_i y e_j debe ser τ ortogonal a un elemento de la forma $e_i+\mu_2 e_j$.

Si K no es de tipo $W(B_m)$, las raices en K forman una única K-órbita.

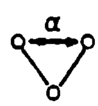
Se tiene, en cualquier caso, cambiando s por hsh^{-1} (h en K) si es necesario, que τ puede tomarse ortogonal a una raiz φ de K representada por un punto terminal al cual llega una arista con valor $-\frac{1}{2}$ en el correspondiente gráfico según 1.13.

Sea t la reflexión asociada a φ y $\bar{K}$ el subgrupo de K asociado al gráfico resultande de suprimir dicho vértice terminal en el gráfico de K.

Por 1.10 y 1.13 , $\bar{K}$ es m-1-dimensional y $\delta(\bar{K}) = k$, luego $\bar{K}$ y s generan un grupo real, y desde que $\langle\tau,\varphi\rangle = 0$, $\bar{K}$, s y t generan un grupo real, pero esto es K y s generan un grupo real, en contradicción con las hipótesis asumidas sobre K y s.

6.3- <u>Proposición</u>:

Sea $\delta(G) = 5$, m el máximo entero tal que G contiene un subgrupo H de tipo $G(5,5,m)$ y s una reflexión en G con raiz τ tal que H y s generen un grupo irreducible, complejo si $m = 2$. Entonces $m = 2$ y G es una extensión de $W(J_3(5))$, siendo:

$J_3(5)$  $\alpha = \frac{-\gamma w}{2}$

<u>Prueba</u>:

Presentemos H según sus direcciones reflexivas dadas por $e_i - \mu_5 e_j$ $i \neq j$, $i,j \leq m$. Pongamos $\tau = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\mu)$ dado por sus coordenadas en la base canónica de C^{n+1}. Por 6.1 se tiene:

$$|\alpha_i - \mu_5\alpha_j| \in \sqrt{2}.Q_5 \quad (i \neq j) \tag{13}$$

Si existe un índice i tal que $\alpha_i = 0$, consideremos un j con $\alpha_j \neq 0$ y los conjugados de τ dados por $\varphi = (\alpha_j,0,\ldots,\mu)$, $\sigma = (\bar{\varepsilon}\alpha_j,0,\ldots,\mu)$, se tiene $\langle\varphi,\sigma\rangle = |\alpha_j|^2\varepsilon + (1-|\alpha_j|^2)$ un elemento en el segmento que une 1 con ε con módulo en Q_5. Siendo la única posibilidad $|\alpha_j|^2 = \frac{1}{2}$, se sigue que el grupo generado por H y s es de tipo $G(5,5,m+1)$ o contiene un subgrupo de tipo $G(k,k,2)$ con $k > 5$, lo que contradice las hipótesis en $\delta(G)$ y m. Debe ser $\alpha_i \neq 0 \ \forall$ i.

Por la condición en (13) , se tiene que $|\alpha_i-\mu_5\alpha_j|$ toma exactamente 3 valores distintos, por tratarse de las distancias de α_i al pentágono $\mu_5\alpha_j$. Podemos decir entonces que los pentágonos $\mu_5\alpha_i$ tienen todos un vértice sobre una misma recta real por el origen, y desde que $G(5,1,m)$ normaliza a $G(5,5,m)$, podemos suponer los α_i reales.

Notemos que $|\alpha_i-\alpha_j|$ es el mínimo o máximo entre las distancias $|\alpha_i-\mu_5\alpha_j|$ según $\alpha_i\alpha_j$ sea mayor o menor que cero. Por otra parte si $\alpha_i \neq \alpha_j$, por (13) se tiene:

$$\begin{aligned} |\alpha_i-\alpha_j| &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ si y solo si } \alpha_i\alpha_j > 0 \\ |\alpha_i-\alpha_j| &\geq 1 \text{ si y solo si } \alpha_i\alpha_j < 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Si τ posee tres coordenadas distintas $\alpha_i < \alpha_j < \alpha_k$ de (13) y la igualdad $\alpha_k-\alpha_i = (\alpha_k-\alpha_j) + (\alpha_j-\alpha_i)$ se tiene $\alpha_k-\alpha_i = \frac{\sqrt{2}\gamma}{2} > 1$ mientras que $\alpha_k-\alpha_j$, $\alpha_j-\alpha_i \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, lo que contradice (14). En consecuencia los α_i toman a lo sumo 2 valores distintos.

Pongamos $\delta_1 = |\alpha_i-\alpha_j|$, $\delta_2 = |\alpha_i-\varepsilon\alpha_j|$, $\delta_3 = |\alpha_i-\varepsilon^2\alpha_j|$, se verifica la siguiente relación:

$$\delta_1^2 - \gamma\delta_2^2 + \gamma^{-1}\delta_3^2 = 0$$

que sólo cumplen las siguientes ternas $(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ en $\sqrt{2}.Q_5$:

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2}(\gamma^{-1},1,\sqrt{2}) \ , \ t = \frac{\sqrt{2}}{2}(\gamma,\sqrt{2},1) \ , \ t = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,\gamma)$$

siendo en cada caso:

$$\alpha_i^2 + \alpha_j^2 = \frac{8-\gamma}{10} \quad , \ (\alpha_i\alpha_j)^2 = \frac{1}{20} \quad \text{para } t_1 \tag{15}$$

$$\alpha_i^2 + \alpha_j^2 = \frac{7+\gamma}{10} \quad , \quad (\alpha_i \alpha_j)^2 = \frac{1}{20} \quad \text{para } t_2$$

$$\alpha_i = \alpha_j \quad , \quad \alpha_i^2 = \frac{2+\gamma}{10} \qquad\qquad \text{para } t_3$$

Si $m = 3$, podemos suponer $\alpha_1 = \alpha_2$ y considerar a partir de (15) la desigualdad:

$$1 = \frac{2+\gamma}{5} + \frac{3-\gamma}{5} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

de donde $\alpha_3^2 = \frac{3-\gamma}{5}$ y $(\alpha_1\alpha_3)^2 = \frac{1}{10}$ contradice (15).

Se tiene $m = 2$ y $\tau = (\alpha,\beta,\mu)$. Si $\alpha = \beta$, τ es ortogonal a la dirección reflexiva dada por $e_1 - e_2$ generando H y s un grupo de tipo $W(H_3)$, caso que se descarta por la elección de s.

Si α y β tienen el mismo signo, las reflexiones asociadas a las direcciones dadas por:

$$(1,-\varepsilon,0) \ , \ (\varepsilon\beta-\alpha).(\alpha,\beta,\mu) \ , \ (\varepsilon\alpha-\beta).(\beta,\alpha,\mu)$$

generan la extensión asociándole un gráfico de tipo $J_3(5)$ a partir de (15).

Si α y β tienen signos opuestos, se vuelve al caso anterior si se consideran las direcciones dadas por:

$$(\alpha,\beta,\mu) \ , \ (\varepsilon^3\beta-\alpha).(1,-\varepsilon^2,0) \ , \ (\varepsilon^2\beta-\alpha).(1,-\varepsilon^3,0)$$

6.4- El grupo $W(J_3(5))$.-

Sean τ,φ,η las raices asociadas a $J_3(5)$, suponemos: $\langle\tau,\varphi\rangle = -\frac{\gamma w}{2}$, $\langle\tau,\eta\rangle = \frac{-1}{2} = \langle\varphi,\eta\rangle$. Notemos con G el grupo $W(J_3(5))$ generado por las reflexiones s,t,u asociadas a las raices τ,φ,η respectivamente.

Sea r la reflexión en G con raiz σ = sts(η) , se tiene:

$$\begin{aligned} |\langle\tau,\sigma\rangle| &= |-\frac{\bar{w}\gamma}{2}| = \frac{\gamma}{2} \\ |\langle\varphi,\sigma\rangle| &= |\frac{w-\gamma^{-1}}{2}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \langle\eta,\sigma\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

de donde s,u,r y t,u,r generan subgrupos de tipo $I_3 = W(H_3)$ y $W(B_3)$ respectivamente, es decir, poedmos realizar G como extensión de uno de estos grupos según (16).

Las raices de I_3 se distribuyen en 5 sistemas ortogonales de direcciones reflexivas dadas por:

$$\begin{array}{lll} (1,0,0) & (0,1,0) & (0,0,1) \\ (1,\gamma,\gamma^{-1}) & (-\gamma,\gamma^{-1},1) & (\gamma^{-1},-1,\gamma) \\ (1,-\gamma,\gamma^{-1}) & (\gamma,\gamma^{-1},-1) & (\gamma^{-1},1,\gamma) \\ (-1,\gamma,\gamma^{-1}) & (\gamma,\gamma^{-1},1) & (\gamma^{-1},1,-\gamma) \\ (1,\gamma,-\gamma^{-1}) & (\gamma,-\gamma^{-1},1) & (-\gamma^{-1},1,\gamma) \end{array} \tag{17}$$

las cuales son permutadas transitivamente por la acción de I_3, además el producto de las reflexiones asociadas a $(1,-\gamma,\gamma^{-1})$ y $(\gamma^{-1},1,-\gamma)$ es una rotación de orden 3 cuyo eje se encuentra en la dirección de (1,1,1), de donde un elemento de I_3 permuta ciclicamente las coordenadas.

Teniendo en cuenta (16), podemos elegir:

$$\tau = \frac{1}{2}(1,\gamma,\gamma\quad) , \ \eta = (-1,0,0) , \ \sigma = (0,-w,0)$$

y luego $\varphi = \frac{1}{2}(1,1+w\gamma,-w)$. Considerando:

$$s(\varphi) = \frac{1+\bar{w}\gamma}{2}(1,-w,0)$$

podemos reiniciar nuestro análisis pensando que G está generado por I_3 y una reflexión s con raiz τ en la dirección de $(1,-w,0)$. Es claro entonces que G contendrá un subgrupo de tipo $W(B_3)$ presentado por la base canónica y las direcciones dadas por:

$$(1,\pm w,0)\ ,\ (0,1,\pm w)\ ,\ (\pm w,0,1)$$

y por la acción de I_3 sobre los sistmas ortogonales en (17), podemos establecer 45 direcciones reflexivas en G dadas por:

$$v_1, v_2, v_3,\ v_1 \pm w v_2\ ,\ v_2 \pm w v_3\ ,\ v_3 \pm w v_1 \tag{18}$$

siendo v_1, v_2, v_3 una de las ternas ortogonales en (17). Notar que son efectivamente 45 direcciones que pueden ser agrupadas en 5 subgrupos de tipo $W(B_3)$ según fueron presentadas en (18).

Si un vector (α,β,δ) en (18) tiene sus coordenadas no nulas, las afines correspondientes a $(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\beta}{\delta})$ toman los valores:

$$(\pm\gamma,\pm\gamma^2)\ ,\ (\pm\gamma,\pm\gamma^{-1})\ ,\ (\pm\gamma^{-2},\pm\gamma^{-1})$$

$$(\pm w\gamma^2,\pm\bar{w}\gamma)\ ,\ (\pm w\gamma^{-1},\pm\bar{w}\gamma)\ ,(\pm w\gamma^{-1},\pm\bar{w}\gamma^{-2})$$

$$(\pm\bar{w}\gamma^2,\pm w\gamma)\ ,\ (\pm\bar{w}\gamma^{-1},\pm w\gamma)\ ,\ (\pm\bar{w}\gamma^{-1},\pm w\gamma^{-2})$$

de donde las direcciones en (18) son permutadas por s, luego por G, siendo estas el total de direcciones reflexivas de G.

Sea t la reflexión en G dada por $t(\alpha,\beta,\delta) = (\alpha,\bar{w}\delta,w\beta)$ se tiene:

$$st(\alpha,\beta,\delta) = w.(\delta,\alpha,\beta)$$

y desde que $-I$ y las permutaciones cíclicas de coordenadas son realizadas por elementos de I_3, se tiene $\mu(G) = \mu_6.I$, pues $G = W(J_3(5))$ queda definido en $Z(\gamma,w)$. Por la misma razón, los únicos multiplos de una raiz φ en su órbita son exactamente $\mu_6.\tau$, es decir la G-órbita de una raiz posee $6x45 = 270$ elementos.

Sea H el grupo de isotropía de e_3. Si h en H aplica e_1 en la dirección de $e_1 \pm we_2$, aplicará $e_1-\bar{w}e_3$ en la dirección de $e_1 \pm we_2-\bar{w}e_3$ sobre la cual G no posee raices, luego h aplica e_1 en la dirección de e_1 o e_2. Como H posee un subgrupo de tipo $G(4,4,2)$ en el plano generado por e_1 y e_2, podemos suponer $h(e_1) = \mu.e_1$ y asi, $h(e_1-\bar{w}e_3) = \mu e_1-\bar{w}e_3$ debe ser una dirección reflexiva de G, luego $\mu = 1$ y H de tipo $G(4,4,2)$. Finalmente se tiene $|G| = |H| x 270 = 8x270 = 2.160$.

6.5- __Proposición__:

Si $\delta(G) = 5$, entonces $G = W(J_3(5))$.

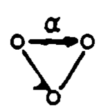
__Prueba__:

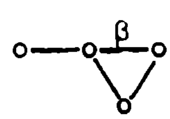
Por 6.3 , bastara ver que $H = W(J_3(5))$ no posee extensiones irreducibles. Teniendo en cuenta $\mu(H) = \mu_6.I$, por 4.7 , H solo puede tener extensiones tridimensionales. Presentemos H por sus direcciones como en (18) y supongamos que $\tau = (\alpha,\beta,\delta)$ es raiz de una reflexión s que da lugar a una extensión de G. Por 4.8 iv) podemos suponer $\alpha,\beta,\delta \neq 0$, pues G posee subgrupos de tipo $G(4,4,2)$ en los planos $x_i = 0$. Además, G posee las raices e_i y las permutaciones de los ejes cartecianos, luego por 6.1, podemos pensar $\tau = \frac{1}{2}(1,\alpha\gamma,\beta\gamma^{-1})$ con α,β complejos unitarios con

$Re(\alpha) \geq 0$, $Re(\beta) \geq 0$. De la condición $|\langle\tau,\varphi\rangle| \in Q_5$ para las raices φ de G en las direcciones de $(1,\pm w,0)$, $(\pm w,0,1)$, $(1,\gamma,\gamma^{-1})$ resultan $\alpha = 1 = \beta$, de donde H no tiene extensiones propias.

6.6- <u>Proposición</u>:

Sea $\delta(G) = 4$, m el máximo entero tal que G posee un subgrupo H de tipo $G(4,4,m)$, s una reflexión en G con raiz τ tal que H y s generen una extensión irreducible propia de H, m+1-dimensional si $m < n$, compleja si $m = 2$. Entonces $m = 2$ y $\langle H,s\rangle = W(J_3(4))$, o $m = n = 4$ y $G = W(N_4)$ o $G = EW(N_4)$ es a la vez una extensión de $W(N_4)$ y $G(4,2,4)$, siendo:

$J_3(4)$  $\alpha = \frac{1+\sqrt{7}i}{4}$

N_4  $\beta = \frac{1-i}{2}$

<u>Prueba</u>:

Presentemos H por sus raices según las direcciones de $e_i-\mu_4 e_j$, $i,j = m$. Pongamos $\tau = (\alpha_1,\dots,\alpha_m,\mu)$ dado por sus coordenadas en la base canónica de C^{m+1}. Por 6.1 se tiene:

$$|\alpha_i-\mu_4\alpha_j| \in Q_4 \tag{19}$$

Si algún α_i es cero, de (19) se sigue que H y s generan un grupo dentro de los siguientes tipos: $G(4,4,m+1)$, $G(h,h,m)$ con $h > 4$, ambos casos contradictorios, o bien, $G(4,2,m)$. En este último caso es $m = n$ y por poseer G un subgrupo de tipo $G(4,2,2)$, por 4.6 iv) se tiene $n = 4$.

Si $n>4$, por 4.5 y 2.11, G contendrá una extensión K 5-dimensional primitiva de $G(4,2,4)$, siendo $\mu(G(4,2,4)) = \mu_4.I$, $\mu_4.K$ contendrá reflexiones de orden 4, en contradicción con 4.8 ii). Luego $n = 4$ y G una extensión de $G(4,2,4)$.

Sea $\alpha_i \neq 0 \ \forall$ i. Razonando como en 6.3, puede establecerse que para cada par i,j se verifica uno de los siguientes casos:

$$\text{i) } \arg(\alpha_i\alpha_j) = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4} \quad \text{y} \quad |\alpha_i|^2+|\alpha_j|^2 = \frac{3}{4}, \ |\alpha_i\alpha_j| = \frac{\sqrt{2}}{8} \qquad (20)$$

$$\text{ii) } \alpha_i \in \mu_4\alpha_j \quad \text{y} \quad |\alpha| = \frac{1}{2}$$

Supongamos que exista un par α_i,α_j en la situación de (20) i). Sea $k \neq i,j$, de (20) se sigue que $\mu_4\alpha_k$ debe coincidir con uno de los dados por $\mu_4\alpha_i$, $\mu_4\alpha_j$, , lo que contradice las condiciones en (20) para los módulos de $\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k$. Se tiene en este caso, $m = 2$ y desde que $G(4,1,2)$ normaliza a $G(4,4,2)$, podemos tomar $\tau = (\alpha,\beta,\mu)$ con α real positivo, $\arg(\beta) = \frac{\pi}{4}$ y $\alpha < |\beta|$. Si consideramos las raices:

$$\varphi = (\beta-\alpha).(1,-1,0) \quad , \quad \eta = (\alpha+i\beta).(-1,i,0)$$

las reflexiones asociadas a τ,φ,η generan la extensión de H asignadole un gráfico de reflexiones de tipo $J_3(4)$.

Supongamos que solo ocurre ii) en (20). Como $G(4,1,m)$ normaliza a $G(4,4,m)$, podemos suponer $\alpha_i = \frac{1}{2}$ para $i = 1,..,m$. Como en 6.3, si $m = 2$, la extensión resulta real, caso que se descarta .

La dirección reflexiva dada por e_1+e_2 se aplica por s en la de:

$$(0,0,-1,..,-1,-2\mu)$$

esta última debe ser una dirección reflexiva de H si G no es una extensión de $G(4,2,4)$, en consecuencia es $m = n = 4$.

Finalmente, las reflexiones según las direcciones de:

$$(1,1,1,1),(i,-1,0,0),(1,-1,0,0),(0,1,-1,0)$$

generan la extensión de H asociándole un gráfico de tipo N_4.

Notemos que si una raiz τ da lugar a una extensión de $G(4,4,4)$, cambiando τ por un conjugado bajo la acción de $G(4,4,4)$, podemos suponer que su dirección reflexiva esta dada por un elemento de la forma $(1,1,1,\mu)$ con μ en μ_4. Las extensiones obtenidas con cualquiera de estos elementos, resultan conjugadas por la acción de $G(4,1,4)$ y resultan grupos de tipo $W(N_4)$. Por otra parte las extensiones de $W(N_4)$ se obtendrán a partir de $G(4,4,4)$ agregando dos o más de las direcciones reflexivas mencionadas, por la condición en 6.1, solo es posible extender con uno de los siguientes pares:

$$(1,1,1,\pm 1) \ , \ (1,1,1,\pm i)$$

obeteniendose extensiones conjugadas por la acción de $G(4,1,4)$ que notaremos con $EW(N_4)$, notese que esto equivale a extender $G(4,2,4)$ con la dirección reflexiva dada por $(1,1,1,1)$.

6.7- <u>El grupo $W(J_3(4))$</u>.-

Notemos con G el grupo $W(J_3(4))$ y con μ el complejo $\frac{1+\sqrt{7}i}{2}$. Desde que G queda definido en $Z(\mu)$, G resulta finito en virtud de 1.11. Procediendo como en 6.4, podemos poner a G como una extensión del grupo de Coxeter

$W(B_3)$ presentado por sus raices en las direcciones de e_i , $e_i \pm e_j$ al que adjuntamos la dirección reflexiva dada por $(1,-1,\mu)$.

Por la acción de $W(B_3)$ obtenemos un total de 21 direcciones reflexivas en G dadas por :

$$e_i,\ e_i \pm e_j\ ,\ (1,\pm 1,\pm\mu)\ ,\ (\mu,\pm 1,\pm 1)\ ,\ (1,\pm\mu,\pm 1) \qquad (21)$$

Supongamos que una reflexion s con raiz $\varphi = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$ da lugar a una extensión irreducible H de G con $\delta(H) = 4$. Si H es 4-dimensional, supongamos tomada φ en H de modo que $|\beta|$ sea máximo.

A partir de las raices en $W(B_3)$ y 6.1 se tiene:

$$|\alpha_i| \in Q_4\ ,\ |\alpha_i \pm \alpha_j| \in \frac{\sqrt{2}}{2}.Q_4 \qquad (22)$$

Teniendo en cuenta las raices en H según las direcciones $s(e_i)$, $s(e_i \pm e_j)$ y la condición en β, se tiene:

$$|\alpha_i| = \frac{1}{2}\ ,\ |\alpha_i \pm \alpha_j| = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (23)$$

de (22) y (23) resulta $\alpha_i \in \mu_4.\frac{1}{2}$ y por la acción de $W(B_3)$ podemos suponer $\varphi = \frac{1}{2}.(1,1,2\alpha_3,2\beta)$, para la raiz en G $\eta = \frac{1}{2}(1,-1,\mu,0)$ se tiene $|\langle\varphi,\eta\rangle| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ en contradicción con 6.1. Luego H es tridimensional , es decir $\beta = 0$ en φ.

Ahora, por 4.8 iv) debe ser $\alpha_i \neq 0$, luego (22) y la acción de $W(B_3)$ en φ nos permite suponer : $\alpha_1 = \frac{1}{2} = |\alpha_2|$, $|\alpha_3| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{Re}(\alpha_2) \geq 0$, $\mathrm{Re}(\alpha_3) \geq 0$, en tal caso, nuevamente de (22) se tiene: $\alpha_1 = \frac{1}{2} = \alpha_2$ $2\alpha_3 = \mu,\bar{\mu}$.

Si $\varphi = \frac{1}{2}(1,1,\bar{\mu})$, para la raiz en G $\eta = \frac{1}{2}(\mu,-1,1)$ se tiene que $|\langle\varphi,\eta\rangle| = \frac{\sqrt{7}}{4}$ en contradicción con 6.1.

Resulta entonces que G no sólo notiene extensiones irreducibles en la situación de H, sino que además todas las direcciones reflexivas de G son las dadas en (21).

Por otra parte, al quedar G definido en $Z(\mu)$, como en 6.4 podemos establecer: $\mu(G) \doteq \mu_2 . I$, la G-órbita de una raiz en G posee 2x21 = 42 elementos y el grupo de isotropía de una raiz es de tipo G(4,4,2), con lo que $|G| = 8 \times 42 = 336$.

Tenemos también el siguiente resultado.

6.8- Proposición:

En las hipótesis de 6.6, si m = 2, entonces $G = W(J_3(4))$.

6.9- Los grupos $W(N_4)$ y $EW(N_4)$.-

Para describir las extensiones de G(4,4,4), recordemos que según 2.10, G(2,2,4) posee tres sistemas de imprimitivismo que pueden ser tomados como:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{C.(1,0,0,0),\ C.(0,1,0,0),\ C.(0,0,1,0),\ C.(0,0,0,1)\} \\ S_2 &= \{C.(1,1,1,-1), C.(1,1,-1,1), C.(1,-1,1,1), C.(-1,1,1,1)\} \\ S_3 &= \{C.(1,1,1,1), C.(1,1,-1,-1), C.(1,-1,1,-1), C.(1,-1,-1,1)\} \end{aligned} \tag{24}$$

es fácil ver que si tomamos una reflexión con raiz en uno de estos sistemas, esta deja invariantes las direcciones en dicho sistema mientras que permuta la de los dos restantes intercambiándolos entre sí. Por otra parte, según 2.12 una tal reflexión normaliza a G(2,2,4).

Notemos también que G(2,2,4) puede extenderse a G(4,4,4) en tres modos diferentes presentando este último sobre los distintos sistemas dados en (24). Sea H la presentación de $G(4,4,4)$ sobre S_1 , s la reflexión cuya raiz está en la dirección de $(1,1,1,1)$, se tiene que H y s generan un grupo de tipo $W(N_4)$ y $s(H)$ es la presentacion de $G(4,4,4)$ sobre S_2, al mismo tiempo, si τ es la raiz de s, la H-órbita de $C.\tau$ coincide con $S_3 \cup C(v \pm iw)$ con v y w un par de vectores que determinan S_2 en (24). En consecuencia $W(N_4)$ posee 40 direcciones reflexivas dadas por:

$$e_i+\mu_4 e_j \ , \ \alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3+\alpha_4 e_4 \quad (\alpha_i \in \mu_4 \ , \ \pi\, \alpha_i = 1)$$

Si extendemos $W(N_4)$ a $EW(N_4)$ según la dirección reflexiva dada por $(1,1,1,-1)$, es claro que tendremos las tres presentaciones de $G(4,4,4)$ como subgrupos de $EW(N_4)$ y 60 direcciones reflexivas que pueden tomarse según:

$$e_i \ , \ e_i+\mu_4 e_j, \ \alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3+\alpha_4 e_4 \ (\alpha_i \in \mu_4, \ \pi\, \alpha_i = \pm 1)$$

Desde que ambos grupos quedan definidos en $Z(i)$, como en 6.4 podemos establecer: $\mu(W(N_4)) = \mu(EW(N_4)) = \mu_4.I$, la órbita de una raiz contara con 160 o 240 elementos según el caso considerado, el grupo de isotropía de una raiz es de tipo $W(B_3)$ para $W(N_4)$ y de tipo $G(4,2,3)$ para $EW(N_4)$, concluyéndose de este modo que:

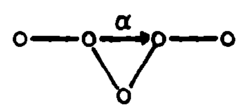
$$|W(N_4)| = 7.680 \quad , \quad |EW(N_4)| = 46.080$$

6.10- <u>Proposición</u>:

Sea $\delta(G) = 3$, m el mayor entero tal que G posee un subgrupo H de tipo $G(3,3,m)$, s una reflexión con raiz τ tal que H y s generan

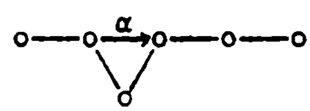
una extensión propia de H, m+1-dimensional si $m < n$, compleja si $m = 2$.
Entonces $m = 4$ y $n = 5$ y $G = W(K_5)$, o $m = n = 6$ y $G = W(K_6)$ siendo:

K_5



$$\alpha = -\frac{w}{2}$$

K_6



Prueba:

Presntemos H por sus raices en las direcciones de $e_i - \mu_3 e_j$ y pongamos $\tau = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta)$, la condición en 6.1 dará:

$$|\alpha_i - \mu_3 \alpha_j| \in \sqrt{2}.Q_3 \tag{25}$$

Si algún α_i es cero, de (25) se sigue que H y s generan un grupo de tipo $G(h,h,m)$ con h múltiplo de 3 o $G(3,3,m+1)$, siendo ambos casos contradictorios, se tiene $\alpha_i \neq 0 \ \forall i$.
Ahora, de (25) resulta $\mu_3 \alpha_i = \mu_3 \alpha_j$ para cada par i,j y $|\alpha_i| = \frac{\sqrt{6}}{6}$.
Desde que $G(3,1,m)$ mormaliza a $G(3,3,m)$, podemos suponer $\alpha_i = \frac{\sqrt{6}}{6}$.
Si $m = 2$, τ es ortogonal a la dirección dada por $e_1 - e_2$ y la extensión resulta real. Si $m = 3$, el gráfico asociado a las raices:

$$\frac{1-\bar{w}}{\sqrt{3}}.\tau \ , \ \frac{we_1 - e_2}{\sqrt{2}} \ , \ w.\frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}} \ , \ \frac{e_2 - e_3}{\sqrt{2}}$$

según 2.7, indican que la extensión es de tipo $G(3,3,4)$, en contradicción con la maximalidad de m, será entonces $m \geq 4$ y por las coordenadas de τ $n \geq 5$.

Supongamos $m = 4$ y que una raiz φ da lugar a una extensión del grupo generado por H y s, cambiando φ por un conjugado bajo la acción de este grupo, si es necesario, podemos suponer que φ no es ortogonal con τ y con alguna raiz de H. Por comodidad representamos esta extensión en C^6 escribiendo:

$$\tau = \frac{\sqrt{6}}{6}.(1,1,1,1,1,1)$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}.(1,1,1,\alpha,\beta,\delta) \qquad \alpha \in \mu_3 \ , \ |\beta|^2+|\delta|^2 = 2$$

con $\beta = \delta$ si la extensión es 5-dimensional. El aspecto de φ se debe a esta puede jugar el papel de τ en el análisis realizado al comienzo de la demostración. Entre los conjugados de φ por la acción de H tenemos la raiz $\eta = \frac{\sqrt{6}}{6}.(1,w,\bar{w},\alpha,\beta,\delta)$, si la extensión es 6-dimensional, es decir $\beta \neq \delta$, se tiene:

$$|\langle\eta,\tau\rangle| \leq \frac{1+|\beta|+|\delta|}{6} < \frac{1+2}{6} = \frac{1}{2}$$

de donde por 6.1, debe ser $\alpha+\beta+\delta = 0$, luego $\langle\tau,\varphi\rangle = \frac{1}{2}$ y observando las coordenadas de $s(\varphi) = \varphi - \tau$, resulta $\alpha = 1$. Si consideramos el gráfico asociado a las raices $\tau,\varphi,\eta,\ \frac{1-w}{\sqrt{6}}.(e_1-e_2),\ \frac{w-\bar{w}}{\sqrt{6}}.(e_2-e_3)$, nuevamente por 2.7 se tiene una contradicción en la maximalidad de m. Supongamos entonces $\beta = \delta$, se tiene $|\beta| = 1$ y de la condición en 6.1 para $|\langle\tau,\eta\rangle| = \frac{|\alpha+2\beta|}{6}$ resulta $\varphi = \tau$.

En consecuencia si $m = 4$, debe ser $n = 5$ y G puede generarse con las reflexiones cuyas raices estan dadas por:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.(e_1-e_2) \ , \ \frac{\sqrt{2}}{2}.(e_2-e_3) \ , \ \frac{\sqrt{2}}{2}.(e_3-e_4) \ , \ \frac{\sqrt{2}}{2}.(\bar{w}e_1-we_2) \ , \ \frac{\bar{w}-w}{\sqrt{3}}.\tau$$

es decir $G = W(K_5)$.

Finalmente si $m \geq 5$, sera $n \geq 6$ y tenemos un conjugado φ de τ bajo la accioh de H en la dirección de $(w,w,w,w,\bar{w},1)$ de donde $s(\varphi)$ en la dirección de $e_5-\bar{w}e_6$ nos permite asumir $m = 6$. Desde que $\mu(G(3,3,6))$ es $\mu_6.I$, de 4.7 se sigue que $m = n = 6$.

Por otra parte, toda raiz de G que no este en H , podrá ser llebada por la acción de H a un elemento en la dirección de $(1,1,1,1,1,\mu)$ con μ en μ_3, teniendo en cuenta τ y la condición en 6.1 , la única posibilidad es $\mu = 1$.

Desde que G puede obtenerse a partir de $W(K_5)$ y la reflexión en la dirección de e_4-e_5 , se tiene $G = W(K_6)$.

6.11- Los grupos $W(K_5)$ y $W(K_6)$.-

Como ambos grupos quedan definidos en $Z(w)$, la finitud de estos se sigue de 1.11. De 6.10 y con las mismas notaciones, las raices pueden ser tomadas según las direcciones de:

$$e_i-\mu_3 e_j \text{ , } G(3,3,4).\tau \quad (i,j \leq 4) \quad \text{para } W(K_5)$$

$$e_i-\mu_3 e_j \text{ , } G(3,3,5).\tau \quad (i,j \leq 6) \quad \text{para } W(K_6)$$

haciendo un total de 45 dirrecciones para $W(K_5)$ y 126 para $W(K_6)$.

Es claro que ambos grupos son primitivos. Por 4.7 tenemos $\mu(W(K_5))$ a lo sumo de orden 3, pues queda contenido en $\mu_3.I$, pero -I está en $W(K_5)$ por poseer reflexiones en las direcciones ortogonales dadas por:

$(1,-1,0,0,0,0),(1,1,1,1,1,1),(0,0,1,-1,0,0),(w,w,\bar{w},\bar{w},1,1),(\bar{w},\bar{w},w,w,1,1)$ de donde $\mu(W(K_5)) = \mu_2.I$. También para este grupo, y luego para ambos, cada raiz en su órbita aparece multiplicada por los elementos de μ_6, ya que sólo en $G(3,3,4)$ pararecen multiplicadas por μ_3.

Para $W(K_5)$, sea H el grupo de isotropía de τ actuando en el espacio P ortogonal a τ. Las reflexiones en P según las direcciones:

$$e_i - e_j \quad (i,j \leq 4) \ , \ \pi_4 \cdot (w,w,\bar{w},\bar{w},1,1)$$

generan un grupo de tipo $G(2,2,4)$ que notamos con D. Desde que H normaliza a D, por 2.13 resulta $H \subset \mu_m . W(F_4)$ para algún entero m. Observando que todo elemento de $W(F_4)$ es de la forma D.u o D.r donde u posee valores propios $w,\bar{w},w,\bar{w}$ y r es una reflexión, un elemento h en H será de la forma μu o μr modulo D, y desde que $tr(h) \in Z(w)$, $\det(h) = \pm 1$, se sigue que $\mu = \pm 1$, es decir h solo puede ser u o 1 módulo D. Si u está en H y s es la reflexión asociada a τ, resulta u.s en $W(K_5)$ con $w,\bar{w},w,\bar{w},-1$ como valores propios, lo que contradice 4.6 pensando $W(K_5)$ como subgrupo de $W(K_6)$. En consecuencia $H = D$ y $|W(K_5)| = 45 \times 6 \times 192 =$ $= 51.840$.

Es claro que $\mu(W(K_6)) = \mu(G(3,3,6)) = \mu_6 . I$. Ahora, si $\bar{H}$ es el grupo de isotropía en $W(K_6)$ de la raiz en la dirección de $e_5 - e_6$, este permuta las raices de $W(K_5)$ a quien tiene como subgrupo. Si h está en H, módulo $W(K_5)$, podemos suponer $h(\tau) = \tau$, y como antes resulta h en D, luego h en $W(K_5)$, de donde $|W(K_6)| = 126 \times 6 \times 51.840 = 39.181.040$.

El siguiente teorema y la correspondiente tabla resúmen los resultados obtenidos en este capítulo, completándose de este modo, la determinación de los grupos finitos de reflexiones en el caso complejo.

6.12- Teorema:

Sea G un grupo primitivo complejo generado por reflexiones de orden 2, entonces G es conjugado a uno de los siguientes grupos: $W(J_3(4))$, $W(J_3(5))$, $W(N_4)$, $EW(N_4)$, $W(K_5)$, $W(K_6)$.

Se tiene ademas la siguiente tabla:

G	n	$\lvert G\rvert$	$\lvert\mu(G)\rvert$	N° de reflexiones
$W(J_3(4))$	3	336	2	21
$W(J_3(5))$	3	2.160	6	45
$W(N_4)$	4	7.680	4	40
$EW(N_4)$	4	46.080	4	60
$W(K_5)$	5	51.840	2	45
$W(K_6)$	6	39.181.040	6	126

Los resultados en 6.3,6.6 y 6.10 probablemente puedan ser presentados en un solo teorema pues los razonamientos empleados en sus demostraciones, esencialmente, no varian.

La finitud de los grupos en general se obtiene a partir de 1.11, en tal sentido, surge el interrogante de si es posible ampliar este criterio de modo que contemple el caso $J_3(5)$.

REFERENCIAS.

(1) G. Bagnera : I gruppi finiti di transformazioni lineari dello spazio che contengono omologie - Rend. Circ. Mat. Palermo , 19, 1905, 1-56.

(2) H.F. Blichfeldt: The finite discontinuous primitive groups of collineations in four variables- Math. Ann. , 60, 1905, 204-231.

(3) A.M. Cohen: Finite complex reflection groups - Ann. Scient. Ec, Norm. Sup. , 4 serie, t.9 , 1976, 379-436.

(4) H.S.M. Coxeter: Discrete groups generated by reflections - Duke Math.J. 18, 1934, 588-621.

(5) --------------: Regular polytopes - London, 1948 , New York, 1949.

(6) H.H. Mitchell : Determination of all collineation groups in more than four variables which contain homologies- Amer. J. of Math. 36, 1914, 1-12.

(7) G.C. Shephard: Regular complex polytopes- Proc. London Math. Soc.,(3), 2, 1952, 82-97.

(8) ------------- : Unitary groups generated by reflections- Can. J. Math., 5, 1953, 364-383.

(9) G.C. Shephard and J.A. Tood: Finite unitary reflections groups-Can. J. Math., 6,1954, 274-304.

(10) T.A. Springer : Invariant Theory - Lecture Notes in Math. 585 , Springer-Verlag , 1977.

(11) Dornohoff L.: Groups Representation Theory, A-B - Marcel de Keerinc,New York