Métricas inducidas por la convergencia en medida

Espinoza Haro, Pedro C.

1986

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Tema de Tesis

METRICAS INDUCIDAS POR LA CONVERGENCIA EN MEDIDA

Autor

Pedro C. Espinoza Haro

Director de Tesis

Dr. Horacio A. Porta

Lugar de trabajo:

Departamento de Ciencias Matemáticas

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas.

1986

A mi esposa Aurora por su inagotable estímulo en el desarrollo del presente trabajo.

Agradecimiento

Quiero expresar mi reconocimiento a todos los docentes y amigos de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales que directa o indirectamente intervinieron en el desarrollo y concresión del presente trabajo. En forma particular a los Drs. Orlando E. Villamayor, Manuel Balanzat y Luis Santaló, quienes luego de concluidos mis estudios de licenciatura en esta universidad, motivaron mi iniciación en el ciclo doctoral; a través de ellos, también mi reconocimiento, a esta alta casa de estudios por el apoyo económico que recibí de ella para este fin.

A mis profesores: J. D. Alvarez Alonso, N. Fava, A. R. Larotonda, O. N. Capri, E. Lami Dozo, J. E. Bouillet, S. E. Trione, E. D'Attellis, F. Toranzos (h), R. Durand, N. Wolanski y E. Carrizo.

Al Dr. A. P. Calderón por la atención que dispensó a mis inquietudes matemáticas.

Mi agradecimiento al Dr. Carlos Segovia F. por su apoyo invalorable como mi consejero de estudios.

Finalmente mi infinita gratitud al Dr. Horacio A. Porta, director de mi tesis doctoral, por sugerirme el tema y por haberme obsequiado muchísimo de sus conocimientos y de su valioso tiempo para hacer realidad el presente proyecto.

INDICE

Fe de erratas

Pag.	Linea	Dice	Debe decir
Indice	7	Minkwoski	Minkowski
1	6	Propias	propia
2	14	...valuadas y finitas.	... valuadas, linealmente ind pendientes y finitas.
3	8	$\gamma(\theta)(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ ... donde $\gamma(\theta)$	$r(\theta)(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ ... donde $r(\theta)$.
5	2	un subespacio	un espacio
6	8	P.F(t)	$\|$P.F(t)$\|$
11	9	x+y	$\|x+y\|$
8	2	$\operatorname{Sup}\mu(N_\theta) = \sup\limits_{0<\theta<\pi}\mu(N_\theta)$	$\operatorname{Sup}\limits_{\theta}\mu(N_\theta) = \sup\limits_{0\leq\theta\leq\pi}\mu(N_\theta)$
8	8	$N_\theta \cap N_r = \phi$	$N_\theta \cap N_\sigma \neq \emptyset$
20	17	$G^{\pm}(\theta, r)$	$G^{\pm}_{\theta}(\theta, r)$
22	-1	$G_h(t)$	$g_h(t)$
24	2	$\ldots \leq \|f(t)\|^2$	$\ldots \leq \|\varphi''\|_\infty \|f(t)\|^2$
24	17	$\|sig(P.F(t))\|^{\|\alpha\|}$	[igual]$^{\|\alpha\|}$
26	16	$\|\alpha v.F(t) + \beta w.F(t)\|$	[igual]
35	1	$\alpha - \frac{\pi}{2} <$	$b - \frac{\pi}{2} < \ldots$ (igual en el gráfico debe ser ser b en lugar de α)
46	6	$2n\pi$	$(n+1)\pi$
46	7	$(2n-1)\pi$	$2n\pi$
50	16	... y finitas	finitas y no simultáneamente nulas
52	15	dependientes	dependientes y no simultáneamente nulas en A ...

INTRODUCCION

Si $N(x,y)$ es una norma en R^2, existen funciones f,g en $L^1[0,1]$ tal que $N(x,y) = \|xf + yg\|_1$. Este resultado, expresado en un lenguaje diferente, se debe a Thomas Ferguson (ver [7]) y otro similar debido a C. S. Herz ([8], Teorema 2) establece que una norma en R^2 es una L^1-norma, es decir una función negativa-definida propias y positiva homogenea.

En los trabajos anteriormente mencionados, la demostración de que una norma en R^2 es una L^1-norma, parte de consideraciones geométricas sobre la esfera unitaria asociada a la norma y que no es otra cosa que una curva C convexa y simétrica al origen (dada la homogeneidad de la norma todas las otras esferas son proyecciones desde el origen sobre la esfera unitaria). El método consiste en reducir el problema a los polígonos convexos inscriptos en C los que corresponden a particiones en el intervalo $[0,\pi]$ y asociarles a estos sus funcionales de Minkowski. Una representación integral de estas funcionales se obtiene inmediatamente y por paso al límite, cuando la norma de la partición tiende a cero se alcanza la representación integral para las referidas normas.

Mc. Gowan y H. Porta (ver [11]) extienden estos resultados eliminando la convexidad para C e imponiendo en su lugar condiciones más débiles: satisfacer una condición del cono interior y tener variación angular finita. De este modo logran una representación integral para la funcional de Minkowski L_C de la curva C en referencia:

(1) $$L_C(P) = \int_0^{\pi} |P.\alpha(t)|\, dM(t), \quad P \in R^2$$

donde $\alpha(t) = (x(t),y(t)),\ 0 \leq t \leq \pi$ es la parametrización de C y dM una medida finita de Borel en $[0,\pi]$; cuando $dM \geq 0$ L_C es una norma. De esta representación integral derivan una representación diferencial, en el sentido generalizado, para dM.

Es notable en todos estos trabajos la importancia que tiene la geometría de las esferas asociadas a las normas o las mismas funcionales de Minkowski y cuya representación integral se busca.

En el presente trabajo lo que se hace es estudiar la geometría de las "esferas" o curvas

(2) $$G(x,y) = \int_A \varphi(|xf(t) + yg(t)|)du(t) = \rho$$

donde:

(3) (A,μ) es una espacio de medida, con μ finita, no negativa y completa, f,g funciones u-medibles real valuadas y finitas en casi todo punto; y $\varphi(s)$ es una función cuya derivada es positiva y acotada en $s > 0$ y cumple $\varphi(0) = 0$; por ejemplo $\varphi(s) = \frac{s^p}{1+s^p}$, $s > 0$, $1 < p < \infty$ es una de estas funciones y es conocido que para esta φ la función

(4) $$d(P,Q) = [G(P-Q)]^{1/p}, \quad P,Q \in R^2$$

es una métrica en R^2 invariante por traslaciones, entonces $G(P) = \rho$

es realmente una esfera.

Independientemente de φ se demuestra que

$$\sup_{\theta} \mu(N_\theta) < \mu(A-B)$$

donde $N_\theta = \{t \in (A-B)/e(\theta).F(t) = 0\}$; con $F(t) = (f(t),g(t))$ $e(\theta) = (\cos\theta , \text{sen } \theta)$ y $B = \{ t\in A/F(t) = 0\}$
Si además de lo establecido en (3), $f,g\in L^1(A,u)$ la curva (2) con $0 < \rho < \rho^* = [u(A-B) - \text{Sup } \mu(N_\theta)] \|\varphi\|_\infty$ admite una parametrización $\gamma(\theta) = \gamma(\theta)(\cos\theta, \text{sen } \theta)$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$, donde $\gamma(\theta)$ es una función periódica de periodo π , Lipschitziana acotada inferiormente por una constante positiva.

La regularidad de las esferas (2) y en particular de la misma función $G(P)$ no dependen exclusivamente de la regularidad de $\varphi(s)$ sino de la concentración de la traza de $F(t)$ en conos de R^2 , con vértice en el origen. Así se introduce el concepto de cono de suavidad de $G(P)$, como aquellos puntos $P = r(\cos\theta, \text{sen}\theta)$ con $r > 0$, $\alpha < \theta < \beta$, $\beta - \alpha < \pi$ donde $\mu(N_\theta) = 0$ y para casi todo $t \in A$ fijado, el signo de $P.F(t)$ permanece constante $\forall\ r > 0$ y $\forall\ \theta \in (\alpha,\beta)$.

Se demuestra en el § 3 que si aparte de (3) $f,g \in L^2(A,\mu)$, $\varphi(s)$ es de clase C^2 y $\varphi''(s) < 0$ en $s > 0$, entonces para $0<\rho<\rho^*$ la parametrización $\gamma(\theta)$ de la curva (2) tiene curvatura negativa (en coordenadas polares) en cada cono de suabidad de la función $G(P)$. Particularmente cuando $F(t)$ es un par de funciones simples de coeficientes $P_i = (a_i,b_i)$, los conos de suavidad de $G(P)$ están determinados por las rectas contiguas que pasan por el origen en las direcciones ortogonales a los $P_i \neq 0$; en cada uno de estos conos $\gamma(\theta)$ es de lcase C^{∞} y de curvatura negativa; es decir son polígonos de lados cóncavos; y en el §5 se demuestra que estas mismas curvas satisfacen las condiciones requeridas por Mc Gowan-Porta. En consecuencia a cada una de estas esferas le está asociada una funcional de Minkowski con las propiedades antes mencionadas.

En el §6, en base a los resultados obtenidos para las funciones simples, mediante un paso al límite se demuestra que la funcional de Minkowski de la curva (2) cuando $f,g \in L^2(A,\mu)$ y $\varphi(s) = \frac{s}{1+s}$ admite una representación integral de la forma (1) no obstante desconocerse la finitud de su variación angular.

Pedro C. Espinoza Haro

Buenos Aires, octubre de 1986.

§1. GEOMETRIA DE LAS ESFERAS

Siempre que no se diga lo contrario, $(A\ ,\mu)$ será un subespacio de medida, donde μ es una medida finita, no negativa y completa.

$L^0(A\ ,\mu)$ es el espacio vectorial real de las funciones $f : A \to \mathbb{R}$ μ-medibles (o brevemente medibles).

Para cada par de funciones $f\ ,g \in L^0(A\ ,\mu)$ linealmente independientes y para cada $1 \leq p < +\infty$ la función definida para $P = (x\ ,y) \in \mathbb{R}^2$

(1-a) $$D(P) = \int_A \phi_p(|P.F(t)|)d\mu(t)$$

con $\phi_p(s) = \dfrac{s^p}{1+s^p}$, $s \geq 0$, $P.F(t) = x.f(t) + y.g(t)$ da lugar a una métrica en $\mathbb{R}^2$, invariante por traslaciones:

(1-b) $$d(P\ ,Q) = [D(P-Q)]^{1/p}$$

Como $d(P\ ,O) = \rho^{1/p} \leftrightarrow D(P) = \rho$, las esferas de la métrica (1-b) son esencialmente las curvas de nivel de la función (1-a) En consecuencia nos ocuparemos de hacer un estudio de las curvas de nivel de las funciones de la forma

(1-c) $$G(P) = \int_A \phi(|P.F(t)|)d\mu(t)$$

Si $(\theta\ ,r)$ son las coordenadas polares de P, $G(P)$ lo escribiremos (por abuso de notación) como

$$G(\theta,r) = \int_A \phi(r|e(\theta).F(t)|)d\mu(t) \quad , \; e(\theta) = (\cos\theta \, , \operatorname{sen}\theta)$$

Veamos un ejemplo. Sea A el intervalo $[0 , 1]$. μ la medida de Lebesgue.

$$f(t) = 1 \quad \text{en} \quad [0 , 1] \qquad g(t) = \chi_{[1/2 , 1]} \qquad \text{así}$$

$$F(t) = (1 , 0)\chi_{[0 , 1/2]} + (1 , 1)\, \chi_{[1/2 , 1]}$$

Las esferas $S_\rho(0)$ de centro 0 y radio ρ de la métrica (1-b) para esta $F(t)$, y $p = 1$ será el conjunto de puntos $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$d(P,0) = \int_0^1 \frac{P.F(t)}{1 + |P.F(t)|}\, dt = \rho$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x+y}{1+|x+y|} + \frac{|x|}{|1+x|} \right] = \rho \quad , \text{ es decir}$$

$$S_\rho(0) = \{(x,y)/2\rho + (2\rho-1)|x|+(2\rho-1)|x+y|+2(\rho-1)|x^2+xy| = 0\}$$

Obviamente $S_\rho(0) = \phi$ cuando $\rho > 1$. Si $\rho = 1/2$ es el par de hipérbolas $|x^2 + xy| = 1$ o más explícitamente $x^2 + xy - 1 = 0$ ó $x^2 + xy + 1 = 0$, cuyas asíntotas son las rectas $x = 0$ y $x + y = 0$. Así $S_{1/2}(0)$ es una curva simple, simétrica al origen no acotada y no cerrada. (Fig. (a)). Igual ocurre para $\frac{1}{2} < \rho < 1$. En cambio si $0 < \rho < 1/2$ la esfera resultante es una curva continua, cerrada, simple y como tal acotada (Fig. (b)), $\rho^* = 1/2$ es así una cota superior para los radios de las esferas continuas.

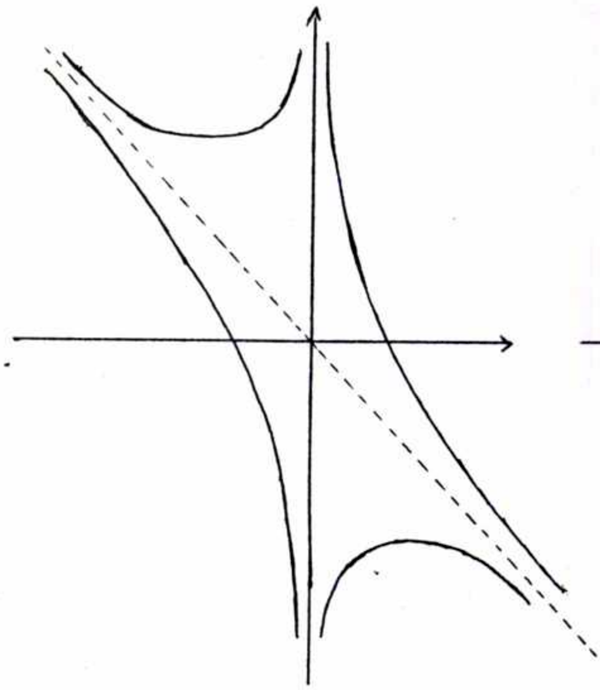


fig. (a)

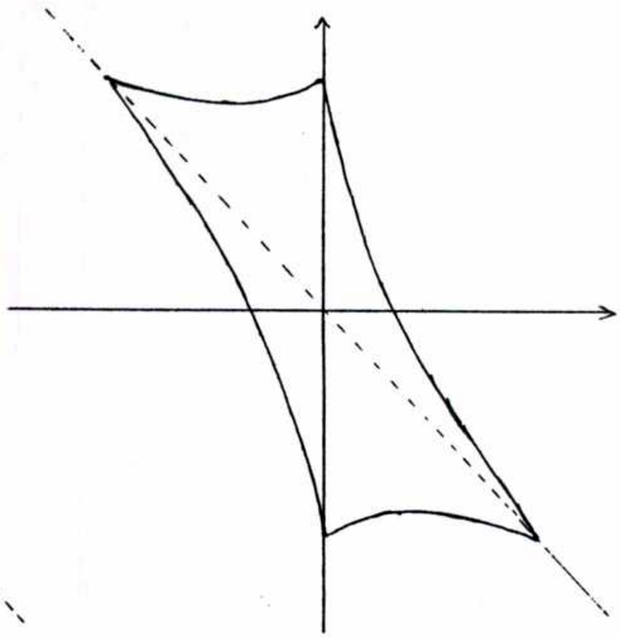


fig. (b)

Tenemos de aquí la siguiente interrogante: ¿existirá una cota ρ^* para f,g en condiciones más generales y que permita hablar de esferas continuas?. La respuesta es afirmativa y su valor se determina a partir del siguiente:

1.1 <u>Lema</u>

Sean $f,g \in L^0(A,\mu)$ linealmente independientes y finitas en casi todo punto (es suficiente que μ sea una medida finita y no negativa)

$$N_\theta = \{t \in (A-B)/e(\theta).F(t) = 0 \ , \ |F(t)| < +\infty\}$$

donde $F(t) = (f(t), g(t))$, $e(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y $B = \{t \in A/F(t)=0\}$

Entonces:

$$\sup_\theta \ \mu(N_\theta) < \mu(A-B)$$

<u>Demostración</u>

Como $e(\theta+\pi) = -e(\theta)$ se tiene $N_{(\theta+\pi)} = N_\theta$, luego $\mu(N_\theta)$ es una función periódica de período π y

$$\sup \mu(N_\theta) = \sup_{0 < \theta < \pi} \mu(N_\theta)$$

En consecuencia basta considerar el intervalo $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Afirmamos que $\mu(N_\theta) < \mu(A-B), \forall\ \theta \in [(0,\pi]$, de lo contrario si $\mu(N_{\theta_0}) = \mu(A-B)$ para algún $\theta_0 \in [0, \pi)$, se tendría $e(\theta_0).F(t) = 0$ para casi todo $t \in A$, lo cual contradice la independencia lineal de f,g desde que $e(\theta_0) \neq (0, 0)$.

Se observa que para θ, σ en $[0, \pi)$: $N_\theta \cap N_\sigma = \phi \to \theta = \sigma$. De este modo $\{N_\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$ es una familia disjunta de subconjuntos medibles de A-B, de donde resulta que $\sum_{\theta \in K} \mu(N_\theta) \leqslant \mu(A-B)$ para cualquier conjunto finito $K \subset [0, \pi)$; pero entonces se tiene $\mu(N_\theta) = 0$ salvo numerables valores $\theta_1, \theta_2 \ldots$ y de éstos habrá a lo sumo un θ_i tal que $\mu(N_{\theta_i}) > \frac{1}{2}\mu(A-B)$ y así sigue el lema.■

1.2 <u>Definición</u>

El número $\rho^*(f,g)$ asociado a las funciones f,g (brevemente ρ^*) se define como:

$$\rho^* = \left[\mu(A-B) - \sup_\theta \mu(N_\theta)\right] \|\phi\|_\infty$$

que será estrictamente positivo cuando f, g satisfacen las condiciones del Lema 1.1 y $\|\phi\|_\infty > 0$.

Ahora podemos mostrar la existencia de una parametrización continua para las curvas de nivel $G(P) = \rho$, particularmente de la métrica (1-b) cuando $0 < \rho < \rho^*$.

Nota

Si $B = \{t \in A \,/\, |F(t)| = 0\}$ tiene medida positiva, en la integral que define a la función $G(P)$, puede cambiarse A por $A - B$ sin alterar en lo mínimo el valor de $G(P)$. En consecuencia, siempre que $F(t) = (f(t), g(t))$ esté referido a $G(P)$, se puede asumir sin pérdida de generalidad que $F(t) \neq 0$ en todo $t \in A$.

1.3 Teorema

Sea $F(t) = (f(t), g(t)) \neq 0 \;\; \forall\, t \in A$ con $f, g \in L^1(A, \mu)$ linealmente independientes. $\phi(s)$ una función de $[0, \infty)$ en $\mathbb{R}$ derivable en $s > 0$, con $\phi(s), \phi'(s)$ estrictamente positivas en $s > 0$ y acotadas en $s \geqslant 0$; y $\phi(0) = 0$.

Entonces si $0 < \rho < \rho^*$ las curvas de nivel $G(\theta, r) = \rho$ de la función:

$$G(\theta, r) = \int_A \phi(r\, |e(\theta).F(t)|)\, d\mu(t)$$

tienen las siguientes propiedades.

a) Existe una función $r = r(\theta)$ definida para todo $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $G(\theta, r(\theta)) = \rho$; es decir $\gamma(\theta) = r(\theta)\, e(\theta) = r(\theta)(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ es la parametrización de la curva en referencia.

b) $r = r(\theta)$ es periódica de período π ; lo que indica la simetría de la curva de nivel, respecto del origen de coordenadas.

c) Existen dos constantes positivas $m < M$ que dependen solamente de ρ y ϕ, tal que $0 < m \leqslant r(\theta) \leqslant M < +\infty$. $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$.

d) $r = r(\theta)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Demostración

a) Para un θ fijo, $G(\theta, r)$ es estrictamente creciente en la variable $r \in [0, \infty)$. En efecto:

$$\frac{\partial G}{\partial r}(\theta,r) = \lim_{h\to 0} \int_A \frac{1}{h}\left[\phi((r+h)|e(\theta).F(t)|)-\phi(r|e(\theta).F(t)|)\right]d\mu(t)$$

como $\phi'(s)$ es acotada en $s \geqslant 0$, $\phi(s)$ es de Lipschitz, luego el integrando está uniformemente acotada respecto h por $\|\phi'\|_\infty |F(t)| \in L^1(A, \mu)$ y tiende a $\phi'(r|e(\theta).F(t)|)|e(\theta).F(t)|$ en casi todo $t \in A - N_\theta$ y a 0 cuando $t \in N_\theta$; luego por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue:

$$\frac{\partial G}{\partial r}(\theta,r) = \int_{A-N_\theta} \phi'(r|e(\theta).F(t)|)|e(\theta).F(t)|d\mu(t)$$

que es estrictamente positivo para $r > 0$ por que $\phi'(s) > 0$ en $s > 0$ y $|e(\theta).F(t)| > 0$. Así $G(r, \theta)$ es estrictamente creciente en $r \in [0, \infty)$ para cada θ fijado.

Luego

$$S_\theta = \sup_{r\geqslant 0} G(r, \theta) = \lim_{r\to+\infty} G(r, \theta)$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \int_{A-N_\theta} \phi(r|e(\theta).F(t)|)d\mu(t)$$

Haciendo uso, nuevamente, del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue podemos intercambiar el límite con la integral por que $\phi(s)$ es una función acotada y

$$\lim_{r\to\infty} \phi(r|e(\theta).F(t)|) = \|\phi\|_\infty \quad \text{en casi todo } t \in (A-N_\theta)\ ;$$

luego

$$S_\theta = \int_{A-N_\theta} \|\phi\|_\infty \, d\mu(t) = \|\phi\|_\infty \, \mu(A-N_\theta)$$

$$S_\theta = \|\phi\|_\infty \, (\mu(A) - \mu(N_\theta)) \geqslant \rho^* > \rho$$

En resumen tenemos para cada θ , $G(\theta , r)$ es continua, estricta - mente creciente en r y $G(\theta , 0^+) = 0 < \rho < \rho^* \leqslant \lim_{r \to +\infty} G(\theta , r)$, luego existe un único $r = r(\theta) > 0$ tal que $G(\theta , r(\theta)) = \rho$.

b) Como $e(\theta + \pi) = -e(\theta)$, $G(\theta + \pi , r) = G(\theta , r)$ para cada r fijo; por (a) $G(\theta + \pi , r(\theta + \pi)) = \rho$ pero $G(\theta + \pi , r(\theta + \pi)) =$ $= G(\theta , r(\theta + \pi)) = \rho$ por la unicidad de $r = r(\theta)$, debe ser $r(\theta) = r(\theta + \pi)$.

c) Dada la periodicidad de $r = r(\theta)$ basta considerar $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

1°. Supongamos que $\sup_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} r(\theta) = M = +\infty$. Entonces para cada $n = 1, 2, \ldots$ existe $\theta_n \in [0 , \pi]$ tal que $r(\theta_n) > n$ y $G(\theta_n , r(\theta_n)) = \rho$. Como $|\theta_n| \leqslant \pi$, existe una subsucesión (que lo denotamos igual) cuyo límite es un $\theta_0 \in [0 , \pi]$.

Como $f , g \in L^1(A , \mu)$, $F(t) = (f(t) , g(t))$ es finito en casi todo punto $t \in A$ y por la continuidad de $e(\theta) = (\cos\theta , \operatorname{sen}\theta)$:

$$|e(\theta_n).F(t)| \to |e(\theta_0).F(t)| \quad \text{en casi todo} \quad t \in A$$

En $\quad G(\theta_n , r_n) = \int_A \phi(r_n |e(\theta_n).F(t)|) d\mu(t)$

el integrando $g_n(t) = \phi(r_n |e(\theta_n).F(t)|)$ con $r_n = r(\theta_n)$ está uniformemente acotado respecto n por $\|\phi\|_\infty \in L^1(A,\mu)$, y $g_n(t) \to \|\phi\|_\infty$ cuando $n \to +\infty$, en casi todo $t \in (A - N_{\theta_0})$ pero en los $t \in N_{\theta_0} = \{t \in A / e(\theta_0) . F(t) = 0$ y $|F(t)| < \infty\}$ no se conoce el límite; sin embargo no habría problema en usar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue si $\mu(N_{\theta_0}) = 0$ y así llegaríamos a una contradicción; pero esto tampoco se sabe. En consecuencia hacemos lo siguiente: como $g_n(t) \geq 0$, en casi todo $t \in A$.

$$
\begin{aligned}
G(\theta_n , r_n) &= \int_A g_n(t)d\mu(t) = \\
&= \int_{N_{\theta_0}} g_n(t)d\mu(t) + \int_{A-N_{\theta_0}} g_n(t)d\mu(t) \\
&\geq \int_{A-N_{\theta_0}} g_n(t)d\mu(t)
\end{aligned}
$$

tomando $\underline{\lim}$ a los extremos y usando el teorema de Fatou:

$$
\begin{aligned}
\underline{\lim}\, G(\theta_n , r_n) &\geq \underline{\lim} \int_{A-N_{\theta_0}} g_n(t)d\mu(t) \\
&\geq \underline{\lim} \int_{A-N_{\theta_0}} g_n(t)d\mu(t)
\end{aligned}
$$

$= \|\phi\|_\infty \, \mu(A - N_{\theta_0}) \geq \rho^* > \rho$. Pero $G(\theta_n , r_n) = \rho \quad \forall n = 1,2,\ldots$ o sea $\rho > \rho$, lo cual es absurdo

2°. Probaremos ahora que $\inf\limits_{0 \leq \theta \leq \pi} r(\theta) = m > 0$.

Supuesto que $m = 0$, entonces para cada $n = 1, 2, \ldots$ exis te un $\theta_n \varepsilon [0, \pi] / 0 < r_n = r(\theta_n) < \frac{1}{n}$ y $G(\theta_n, r(\theta_n)) = \rho$.

Luego:

$$0 < \rho = G(\theta, r_n) = \int_A \phi(r_n |e(\theta_n).F(t)|) d\mu(t)$$

dado que el integrando tiende a cero cuando $n \to +\infty$ en casi todo $t \varepsilon A$ y está uniformemente acotado por $\|\phi\|_\infty$, por el teorema de la convergencia dominada, el límite de $G(\theta_n, r_n)$ sería cero, lo cual es absurdo.

d) Como $r = r(\theta)$, definida por $G(\theta, r) = \rho$ es periódica de período π, será suficiente analizar su continuidad en $[0, \pi]$.

Sea $\{\theta_n\}$ una sucesión de puntos de este intervalo tal que $\theta_n \to \theta_0 \varepsilon [0, \pi]$. Como $r(\theta_0)$ está definida queda por mostrar que $\lim r(\theta_n) = r(\theta_0)$.

De $0 < m \leqslant r(\theta) \leqslant M < +\infty \quad \forall\, \theta \varepsilon [0, \pi] \qquad m \leqslant \ell = \underline{\lim}\, r(\theta_n) \leqslant$ $\leqslant \overline{\lim}\, r(\theta_n) = L \leqslant M$. Luego existe una subsucesión (que lo denotamos igual) $/ \; r(\theta_n) \to \ell$. Como $\theta_n \to \theta_0$, por la continuidad de $G(\theta, r)$ en la banda $R \times [m, M]$: $G(\theta_n, r(\theta_n)) \to G(\theta_0, \ell)$, pero $G(\theta_n, r(\theta_n)) = \rho \;\; \forall\, n$ luego $G(\theta_0, \ell) = \rho = G(\theta_0, r(\theta_0))$, por la unicidad de $r(\theta_0)$ debe ser:

$$r(\theta_0) = \ell = \underline{\lim}\, r(\theta_n).$$

Similarmente se tiene $\overline{\lim}\, r(\theta_n) = L = r(\theta_0)$. ∎

La regularidad de las esferas, $G(\theta, r) = \rho$ esto es de sus parametrizaciones $\gamma(\theta) = r(\theta)e(\theta)$, mejora agregando la continuidad de ϕ' a las condiciones impuestas en el Teorema 1.3. y así tenemos la:

1.4 Proposición

Con las mismas hipótesis de 1.3 y si además $\phi'(s)$ es continua en $s > 0$. Entonces la función

$$G(\theta,r) = \int_A \phi(r|e(\theta) \cdot F(t)|)d\mu(t)$$

tiene las siguientes propiedades:

a) $G(\theta,r)$ es de Lipschitz en cada banda $\mathbb{R} \times [a,b]$ con $a \geqslant 0$.

$G_r(\theta, r) = \frac{\partial G}{\partial r}(\theta, r)$ es continua en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, nula a lo sumo en $r = 0$, y

$$\lim_{r \to 0^+} G_r(\theta,r) = \phi'(0^+) \int_A |e(\theta) \cdot F(t)| d\mu(t)$$

b) Para cada banda $R \times [a,b]$ con $a > 0$ existen constantes $\Lambda \geqslant \sigma > 0$ que sólo dependen de a y b y que son respectivamente el máximo y mínimo de $G_r(\theta, r)$ en la citada banda.

c) La función $r = r(\theta)$, $\theta \in R$, definida implícitamente por $G(\theta, r(\theta)) = \rho$ con $0 < \rho < \rho^*$, es de Lipschitz con constante $\dfrac{(1+M)\|\phi'\|_\infty \|F\|_1}{\eta}$. donde $\eta = \min \{G_r(\theta,r)/(\theta,r) \in [m, M]\}$ y m, M son el mínimo y el máximo respectivamente, de $r(\theta)$ en $[0, \pi]$.

<u>Demostración</u>

a) De la Lipschitzianidad de ϕ:

$$|\phi(r_1|e(\theta_1).F(t)|) - \phi(r_2|e(\theta_2).F(t)|)|$$

$$< \|\phi'\|_\infty \; |(r_1 e(\theta_1) - r_2\, e(\theta_2)).F(t)|$$

$$< \|\phi'\|_\infty \; |r_1(e(\theta_1) - e(\theta_2)) + e(\theta_2)(r_1 - r_2)|\,|F(t)|$$

como $\quad a \leqslant r_i \leqslant b$

$$< \|\phi'\|_\infty \; |F(t)|\,\text{máx}\{1\;, b\}\left[|\theta_1 - \theta_2| + |r_1 - r_2|\right]$$

en casi todo $t \in A$.

Luego $|G(\theta_1\;, r_1) - G(\theta_2\;, r_2)| < C\left[|\theta_1 - \theta_2| + |r_1 - r_2|\right]$ cuando $(\theta_i\;, r_i)$ recorre $\mathbb{R} \times [a\;, b]$ y $C = (1+b)\|\phi'\|_\infty \|F\|_1$.

La continuidad de

$$G_r(\theta,r) = \int_A \phi'(r|e(\theta).F(t)|)\,|e(\theta).F(t)|\,d\mu(t)$$

resulta de la continuidad de su integrando en (θ,r), quien está acotado por $\|\phi'\|_\infty$ y del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.
Por esta misma razón

$$G_r(\theta\;, 0^+) = \lim_{r\to 0^+} G_r(\theta,r) = \phi'(0^+)\int_A |e(\theta).F(t)|\,d\mu(t)$$

Si $G_r(\theta,r) = 0$ entonces también

$$\int_{A-N_\theta} \phi'(r|e(\theta).F(t)|)\,|e(\theta).F(t)|\,d\mu(t) = 0$$

pero esto no puede ser a menos que $r = 0$; pues $\phi'(s) > 0$ si $s > 0$.

b) De (a) $G_r(\theta,r)$ es continua en el rectángulo $[0,\pi] \times [a,b]$, luego toma su máximo Λ y mínimo σ en este rectángulo. Además como $a > 0$ y dada la periodicidad de $G_r(\theta,r)$ en la variable θ :

$$0 < \sigma \leqslant G_r(\theta,r) \leqslant \Lambda < +\infty \qquad \forall \quad (\theta,r) \in \mathbb{R} \times [a,b]$$

c) Sea $r = r(\theta)$ definida implícitamente por $G(\theta,r(\theta)) = \rho$
Para θ, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$G(\theta,r(\theta)) = G(\alpha,r(\alpha))$$

$$G(\theta,r(\theta)) - G(\theta,r(\alpha)) = G(\alpha,r(\alpha)) - G(\theta,r(\alpha))$$

$$|r(\theta) - r(\alpha)|G_r(\theta,\ell_{\theta,\alpha}) = G(\alpha,r(\alpha)) - G(\theta,r(\alpha))$$

donde $\ell_{\theta,\alpha}$ es un punto entre $r(\theta)$ y $r(\alpha)$. Pero por 1.3. $0 < m \leqslant r(\theta), r(\alpha) \leqslant M < +\infty$, entonces también $m \leqslant \ell_{\theta,\alpha} \leqslant M$; de aquí por la parte (a) $G(\theta,r)$ es de Lipschitz en la banda $\mathbb{R} \times [m,M]$ con constante $C = (1+M)\|\phi'\|_\infty \|F\|_1$. En consecuencia de la última ecuación se tiene:

$$|r(\theta) - r(\alpha)||G_r(\theta,\ell_{\theta,\alpha})| \leqslant C|\theta - \alpha|$$

Como $m > 0$, aplicando la parte (b) a la banda $\mathbb{R} \times [m,M]$ $|G_r(\theta,r)|$ está acotada inferiormente por su mínimo $\eta > 0$ en la citada banda. Luego

$$|r(\theta) - r(\alpha)| \leqslant \frac{C}{\eta} |\theta - \alpha| \qquad \theta, \alpha \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

1.5 Corolario

Sean (A, μ), f,g como en 1.3. Entonces las esferas S_ρ de la métrica en $\mathbb{R}^2$:

$$d(P,Q) = \left[\int_A \frac{|(P-Q).F(t)|^p}{1+|(P-Q).F(t)|^p}\, d\mu(t)\right]^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < +\infty$$

son las trazas de curvas simples, cerradas periódicas de período π, Lipschitzianas, simétricas al origen, para $0 < \rho^{1/p} < \rho^*$, donde $\rho^* = \left[\mu(A) - \sup_\theta \mu(N_\theta)\right]$.

Demostración

Basta considerar $\phi(s) = \phi_p(s) = \dfrac{s^p}{1+s^p}$, $s \geqslant 0$ y $1 \leqslant p < +\infty$. Obviamente $\phi_p(s)$ satisface todas las condiciones de ϕ requeridas en la proposición 1.4.■

1.6 Observaciones

Se han estudiado las curvas de nivel de $G(\theta,r) = \rho$, cuando $0 < \rho < \rho^*$. El caso $\rho^* \leqslant \rho < \mu(A)\,\|\phi\|_\infty$, origina curvas discontinuas, no acotadas; pero siguen siendo periódicas de periódo π y simples cuando $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Los argumentos son los mismos que para el caso $0 < \rho < \rho^*$, con la única diferencia de que no siempre habrá solución $r = r(\theta)$ para todo θ satisfaciendo la ecuación $G(\theta,r(\theta)) = \rho$ a menos que para este θ se tome ρ de modo que:

$$0 < \rho < \|\phi\|_\infty\,(\mu(A) - \mu(N_\theta)) = \sup_{r \geqslant 0} G(r, \theta)$$

§2. REGULARIDAD DE LA METRICA.-

Analizar la regularidad de la métrica (1-b), equivale a estudiar la regularidad de la función D(P) introducida en §1. En consecuencia seguiremos tratando con la función

$$G(\theta,r) = \int_A \phi(r|e(\theta).F(t)|)d\mu(t) ,$$

donde como es costumbre

$$e(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \qquad F(t) = (f(t), g(t))$$

Para determinar la existencia de las curvas de nivel de $G(\theta, r)$ se requirió que $\phi(s)$, $\phi'(s)$ sean estrictamente positivas en $s > 0$ y acotadas en $s \geqslant 0$. En esta parte no importan los signos de estas funciones, todo lo que se necesita es que sean acotadas y suficientemente regulares como para hacer uso del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

2.1 <u>Observación</u>

Sea $\phi(s)$ acotada y de Lipschitz en $s \geqslant 0$, y $F(t) = (f(t), g(t))$ con $f,g \in L^1(A, \mu)$. Entonces

$$G(P) = \int_A \phi(|P.F(t)|)d\mu(t)$$

es de Lipschitz en $\mathbb{R}^2$ con constante $M_\phi \|F\|_1$, donde M_ϕ es la constante de Lipschitz de ϕ . Igualmente $G(\theta,r)$ es de Lipschitz en cada banda $R\times[a,b]$ $b > a \geqslant 0$ con constante $M_\phi \|F\|_1 \max\{1,b\}$. La demostración es obvia para el primer caso y para el segundo es exactamente igual a lo que se hizo en 1.4(a)

Supongamos que $\phi(s)$ tiene derivada continua en $s \geqslant 0$ y que ambos $\phi(s)$ y $\phi'(s)$ son acotadas en $s \geqslant 0$. Entonces $\|\phi'\|_\infty =$ $= \sup_{s \geqslant 0} |\phi'(s)|$ es la constante de Lipschitz para ϕ .

El cociente incremental siguiente con $r > 0$.

$$\frac{1}{h}\left[G(\theta+h,r)-G(\theta,r)\right]=\int_A \frac{1}{h}\left[\phi(r|e(\theta+h).F(t)|)-\right.$$
$$\left.-\phi(r|e(\theta).F(t)|)\right]\,d\mu$$

tiene el integrando acotado uniformemente respecto h, por $r\,\|\phi'\|_\infty\,|F(t)| \in L^1(A,\mu)$ en casi todo punto $t \in A$, y se puede escribir como: $\phi'(\lambda)\,\frac{r}{h}\left[|e(\theta+h).F(t)| - |e(\theta).F(t)|\right]$, donde λ es un punto intermedio entre $r|e(\theta).F(t)|$ y $r|e(\theta+h).F(t)|$, para cada t donde $F(t)$ es finito. λ depende de θ, h, t y tiende a $r|e(\theta).F(t)|$ en casi todo $t \in A$ cuando $h \to 0$, como $\phi'(s)$ es continua en $s \geqslant 0$, el primer factor del integrando tiende a $\phi'(r|e(\theta).F(t)|)$ en caso todo $t \in A$; el segundo factor esto es:

$$g_h(t) = \frac{1}{h}\left[|e(\theta+h).F(t)| - |e(\theta).F(t)|\right]$$

se comporta del siguiente modo:

1°. Si $t \in N_\theta = \{t \in A/e(\theta).F(t) = 0,\ |F(t)| < +\infty)$, $g_h(t) =$ $= \frac{1}{h}\,|e(\theta+h).F(t)|$, como $e(\theta+h).F(t) = e'(\theta).F(t)$ sen h, $e'(\theta) = (-\text{sen}\ \theta, \cos\theta)$ $g_h(t) \to \pm\,|e'(\theta).F(t)|$ cuando $h \to 0^{\pm}$.

En consecuencia todo el integrando tiende a $\pm\,\phi'(0^+)r|e'(\theta).F(t)|$ cuando $h \to 0^{\pm}$

2°. Cuando $t \in (A-N_\theta)$ es decir $e(\theta).F(t) \neq 0$, $g_h(t) \to$
$\to (e'(\theta).F(t)$ sig $(e(\theta).F(t)$ en casi todo $t \in (A-N_\theta)$.

Luego todo el integrando tiende a $r\phi'(r|e(\theta).F(t)|)(e'(\theta).F(t))$ sig $(e(\theta).F(t)$.

Haciendo uso del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se llega a una expresión para los límites del cociente incremental que en 2.2 se especifica.

Siguiendo el mismo razonamiento se tiene un resultado similar para el cociente incremental $\frac{1}{h}|G(P + hv) - G(P)|$ donde v es un vector unitario de $\mathbb{R}^2$. Tenemos así demostrada la

2.2 <u>Proposición</u>

Sea $F(t) = (f(t),g(t) \neq 0 \ \forall \ t \in A$ con $f.g \in L^1(A, \mu)$ linealmente independientes, $\phi(s)$ con derivada continua en $s \geqslant 0$ y $\phi(s)$, $\phi'(s)$ acotadas en $s \geqslant 0$. Entonces:

a) Existen las derivadas parciales "laterales" de $G(\theta,r)$ respecto θ en todo (θ,r) con $r > 0$ y

$$G^{\pm}(\theta,r) = \int_{A-N_\theta} r\phi'(r|e(\theta).F(t)|)(e'(\theta).F(t))\text{sig}(e(\theta).F(t)d\mu(t)$$
$$\pm \phi'(0^+) \ r \int_{N_\theta} |e'(\theta).F(t)|d\mu(t)$$

b) Existen las derivadas direccionales "laterales" de $G(P)$ en todo $P = r\ e(\theta) \neq 0$ y para todo vector unitario $v \in \mathbb{R}^2$

$$G_v^{\pm}(P) = \int_{A-N_\theta} \phi'(|P.F(t)|)(v.F(t))\text{sig}(P.F(t))d\mu(t)$$
$$\pm \phi'(0^+) \int_{N_\theta} |v.F(t)|d\mu(t)$$

<u>Observamos</u> en 2.2, por una parte, la Lipschitzianidad de $G(\theta,r)$ en θ para cada $r > 0$ fijo, implica la existencia de $G_\theta(\theta,r)$ en casi todo θ. Luego si $\phi'(0^+) \neq 0$ se concluye que

$\mu(N_\theta) = 0$ en casi todo $\theta \in \mathbb{R}$, Por otra parte la recíproca es obvia. Pero en la nota al Lema 1.1 se indica que independientemente de G, $\mu(N_\theta) = 0$ salvo numerables θ; lo que garantiza la existencia de G_θ y G_v en todo $P = re(\theta) \neq 0$, excepto numerables θ. A partir de esta observación damos el siguiente:

2.3 Corolario.

Con las hipótesis de 2.2 se tiene:

a) Si $\phi'(0^+) \neq 0$, existen las derivadas direccionales

$$G_v(P) = \int_A \phi'(|P.F(t)|)(v.F(t))\operatorname{sig}(P.F(t))d\mu(t)$$

en todo punto $P = r\,e\,(\theta) \neq 0$ y todo $|v| = 1$ salvo innumerables θ.
Igualmente existe la derivada parcial

$$G_\theta(\theta,r) = \int_A \phi'(r|e(\theta).F(t)|)(e'(\theta).F(t))\operatorname{sig}(e(\theta).F(t))d\mu(t)$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$, salvo un conjunto numerable.

b) Si $\phi'(0^+) = 0$, $G(P)$ tiene derivadas direccionales en todo $P \neq 0$ y $G(\theta,r)$ es derivable en todo (θ,r) con $r > 0$. Los valores en ambos casos son como en (a) cambiando A por $A-N_\theta$

c) Para la función $D(P) = \int_A \phi_p(|P.F(t)|)d\mu(t)$ vale la conclusión (a) para todo $p \geqslant 1$; cuando $p > 1$ vale (b).

Demostración

(a) y (b) resultan de 2.2 y la nota del Lema 1.1.

(c) obviamente $\phi_p(s) = \dfrac{s^p}{1+s^p}$ $s \geq 0$, $1 \leq p < +\infty$ tiene las propiedades de $\phi(s)$ y además

$$\phi'_p(0^+) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p = 1 \\ 0 & \text{si} \quad p > 1 \end{cases} \quad . \blacksquare$$

2.4 Comentario

Busçamos ahora bajo qué condiciones, G es de clase C^1. Para esto no es suficiente aumentar la suavidad de ϕ, tal como se ha visto en 2.2, depende también de los conjuntos N_θ. Pongamos entonces aparte de las hipótesis de 2.2 que $\mu(N_\theta) = 0$ $\forall$ $\alpha < \theta < \beta$, α , $\beta \in [0, 2\pi)$.

En estas condiciones por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se concluye sin dificultad que G es de clase C^1 en el cono $= \{P = r\, e(\theta)$, $\alpha < \theta < \beta$, $r > 0\}$ (que brevemente lo denotaremos en lo que sigué con $\alpha < \theta < \beta$)

No se puede esperar mucho de la existencia y menos de la continuidad de las derivadas de mayor orden, partiendo de las consideraciones hechas en el comentario anterior. En efecto si $P = r\, e(\theta)$ es un punto del cono $\alpha < \theta < \beta$

$$G_x(P) = \int_A \phi'(|P.F(t)|) f(t) \operatorname{sig}(P.F(t))\, d\mu(t)$$

llamando $\psi(P,t) = f(t)\phi'(|P.F(t)|)$, el integrando del cociente incremental $\frac{1}{h}\left[G_x(P + he_1) - G_x(P)\right]$ se puede escribir como

$$G_h(t) = \frac{1}{h}\left[\psi(P + he_1, t) - \psi(P,t)\right] \operatorname{sig}((P + he_1).F(t))$$

$$+ \psi(P,t) \frac{1}{h} \left[sig((P + he_1).F(t)) - sig(P.F(t)) \right]$$

Suponiendo que $\phi''(s)$ es continua y acotada en $s \geq 0$ resulta $\psi(P,t)$ de Lipschitz en P, para casi todo $t \in A$. Entonces el problema se reduce a examinar el último término de $g_h(t)$, el cual tiende a la distribución $2f(t)\,\delta_{(P.F(t))}$ en todo $t \in A$ donde $f(t) \neq 0$ y $F(t)$ finito, cuando $h \to 0$, siendo por definición:

$$< \delta_{(P.F(t))}, \phi(P) > = \int_{\mathbb{R}} \phi(-\frac{g(t)y}{f(t)}, y) \frac{dy}{f(t)}$$

para cada $\phi(P) = \phi(x,y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

En consecuencia con todo lo bueno que puede ser ϕ no puede usarse el teorema de la convergencia dominada. Necesitamos que a partir de un $|h|$ suficientemente pequeño se cumpla $sig((P + he_1).F(t)) = sig(P.F(t))$ para casi todo $t \in A$. Esto motiva la siguiente:

2.5 Definición

Un cono $\{P = r\,e(\theta),\ \alpha < \theta < \beta\ ,\ r > 0\}$ de vértice el origen y abertura angular $0 < \beta - \alpha < 2\pi$ que se denotará brevemente $\alpha < \theta < \beta$, es un cono de suavidad (o regularidad) para la función

$$G(P) = \int_A \phi(|P.F(t)|)d\mu(t)$$

si $\mu(N_\theta) = 0$ y para casi todo $t \in A$ fijo $sig(P.F(t))$ permanece constante cuando $P = r\,e(\theta)$ varía en este cono

En estas condiciones $\lim_{h\to o} g_h(t) = f^2(t)\phi''(|P.F(t)|)$ en casi todo $t \in A$ y $|g_h(t)| \leqslant |f(t)|^2 \in L^1(A, \mu)$ en casi todo $t \in A$, a partir de un $|h|$ suficientemente pequeño.

Así tenemos la existencia y continuidad de la derivada parcial G_{xx} en el cono de suavidad $\alpha < \theta < \beta$.

De la misma manera la conclusión es válida para las otras derivadas parciales de segundo orden.

Suponiendo $\phi(s)$ de clase C^m en $s > 0$ y acotada con todas sus derivadas en $s \geqslant 0$ y además pidiendo que $f,g \in L^m(A, \mu)$, procediendo inductivamente se demuestra que G es de clase C^m en sus conos de suavidad. Tenemos así demostrada la:

2.6 <u>Proposición</u>

Sean $f,g \in L^m(A,\mu)$ linealmente independientes. $\phi(s)$ de clase C^m en $s > 0$ y acotada con todas sus derivadas en $s \geqslant 0$. Entonces: la función $G(P) = \int_A \phi(|P.F(t)|)d\mu(t)$ donde $P \in \mathbb{R}^2$ y $F(t) = (f(t),g(t))$; es de clase C^m en sus conos de suavidad y

$$D^\alpha G(P) = \int_A \phi^{(|\alpha|)}(|P.F(t)|)\left[F(t)\right]^\alpha |sig(P.F(t))|^{|\alpha|}d\mu(t)$$

$$\forall \ \alpha \in \mathbb{N}^2 \ \text{con} \ |\alpha| \leqslant m. \blacksquare$$

<u>Nota</u>.

Como $x(\theta,r) = r\cos\theta$ y $y(\theta,r) = r \operatorname{sen}\theta$ son funciones C^∞, los resultados de 2.6 también valen para $G(\theta,r)$ con $r > 0$.

2.7 Corolario

Con las hipótesis de la proposición 2.6 cambiando $\phi(s)$ por $\phi_p(s) = \dfrac{s^p}{1+s^p}$ $s \geqslant 0$, $1 \leqslant p < +\infty$ se tiene que las funciones $D(P) = \int_A \phi_p(|P.F(t)|)d\mu(t)$ son de clase C^m en sus conos de suavidad si $p = 1$ ó $p \geqslant m$.

Demostración

$\phi_p(s) = \dfrac{s^p}{1+s^p}$ es obviamente C^∞ en $s > 0$. Mostraremos que $\phi_p^{(n)}(s)$ es acotada $\forall\ 0 \leqslant n \leqslant m \leqslant p$. El caso $p = 1$ es inmediato. Veremos para $p > m$; llamando $\ell(s) = s^p$ y $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$$\phi_p(s) = 1 - (h \circ \ell)(s) \quad ; \quad \phi_p^{(n)}(s) = -(h \circ \ell)^{(n)}(s)$$

pero

$$(h \circ \ell)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} c(k,n)h^{(k)}[\ell(s)]\Big(\sum_{i_j+\ldots+i_k=n} \prod_{j=1}^{k} \ell^{(i_j)}(s)\Big)$$

donde $h^{(k)}(\ell(s))\ell^{(i_j)}(s) \sim \ell^{(i_j)}$ cuando $s \to 0^+$

y $h^{(k)}(\ell(s))\ell^{(i_j)}(s) \sim \dfrac{s^{p-i_j}}{s^{(k+1)p}}$ cuando $s \to +\infty$

lo que demuestra la acotación de $\phi_p^{(n)}(s)$ en $s \geqslant 0$.∎

§3. REGULARIDAD Y CURVATURA DE LAS ESFERAS.-

La regularidad de las esferas de la métrica (1-b) y en general de las curvas de nivel de la función G derivan de los resultados obtenidos en las secciones 1. y 2.

3.1 Observaciones

(a) De 2.4 y 1.4 se deduce que las curvas de nivel de G son de clase C^1 en cada cono $\theta_1 < \theta < \theta_2$ donde $\mu(N_\theta) = 0$.

(b) De 2.6 y 1.4, las curvas de nivel son de clase C^m en cada cono de suavidad de G.

(c) De 2.3 y 1.4 , $\forall$ $P \neq 0$ donde existen las derivadas direccionales G_v , G_w con $v , w \in \mathbb{R}^2$, linealmente independientes : $(G_v(P) , G_w(P)) \neq (0 , 0)$ y en particular

$$P . \nabla G(P) = \int_A \phi'(|P.F(t)|)|P.F(t)|d\mu(t) > 0$$

En efecto si fuera $G_v(P) = G_w(P) = 0$, como v , w son linealmente independientes $P = \alpha v + \beta w$ con $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$; para estos escalares $\alpha G_v(P) + \beta G_w(P) = 0$, es decir:

$$\int_A \phi'(|P.F(t)|)|\alpha\, v.F(t) + \beta w.F(t)|\operatorname{sig}(P.F(t))d\mu(t) = 0$$

$$\int_A \phi'(|P.F(t)|)|P.F(t)|d\mu(t) = 0 \quad \text{de aquí} \quad P.F(t) = 0$$

en casi todo $t \in A$, que contradice la independencia lineal de $f,g \in L^1(A , \mu)$.

Lo otro sale considerando v,w la base canónica.

3.2 Lema

Sea $F(t) = (f(t),g(t)) \neq 0 \quad \forall\ t \in A$ con $f,g \in L^2(A,\mu)$ linealmente independientes. $\phi(s)$ una función de clase C^2 en $s > 0$, acotada y continua con todas sus derivadas en $s \geqslant 0$, $\phi(s)$, $\phi'(s)$, $-\phi''(s)$, estrictamente positivas en $s > 0$. $\phi(0) = 0$. Entonces la función

$$G(P) = \int_A \phi(|P.F(t)|)d\mu(t)$$

tiene las siguientes propiedades:

a) El determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_x \\ G_{yx} & G_{yy} & G_y \\ G_x & G_y & 0 \end{vmatrix}$$

es continuo y estrictamente positivo en los conos de suavidad $\theta_1 < \theta < \theta_2$ de G.

b) Cuando $P_0 = (x_0, y_0)$ es un punto del cono de suavidad $\theta_1 < \theta < \theta_2$ y de la esfera $S_\rho : G(x,y) = \rho$ con $0 < \rho < \rho^*$ se tiene:

i) Si $G_y(P_0) \neq 0$, la función $y = y(x)$ definida implícitamente por $G(x,y) = \rho$ es de clase C^2 en un entorno $V_\delta(x_0)$ de x_0 y

$$y''(x) = \frac{\Delta(P)}{G_y^3(P)} \neq 0, \quad \forall\ P = (x,y(x)), \quad x \in V_\delta(x_0)$$

ii) Similarmente si $G_x(P)_0 \neq 0$

$$x''(y) = \frac{\Delta\ (P)}{G_x^3(P)} \neq 0 \qquad \forall\ P = (x(y),y) \qquad y \in V_\delta(y_0)$$

Demostración

a) De 2.6 existen y son continuas las derivadas parciales:

$$G_{xx}(P) = \int_A \phi''(|P.F(t)|)f^2(t)d\mu(t)$$

$$G_{yy}(P) = \int_A \phi''(|P.F(t)|)g^2(t)d\mu(t)$$

$$G_{xy}(P) = \int_A \phi''(|P.F(t)|)f(t)g(t)d\mu(t)$$

para cada P en el cono $\theta_1 < \theta < \theta_2$.

Como $\phi''(s) < 0$ y las componentes de $F(t) = (f(t),g(t))$ están en $L^2(A,\mu)$ y son linealmente independientes, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene

$$G_{xx}(P)G_{yy}(P) - G_{xy}^2(P) > 0$$

como $G_{xx}(P) < 0$ la matriz $B = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{bmatrix}$ es definida negativa, igualmente B^{-1}; pero

$$\Delta(P) = |B|\ |-(\nabla G)B^{-1}(\nabla G)^t| \qquad y \qquad \nabla G(P) \neq 0$$

$\forall p$ del cono (observación 3.1); luego $\Delta(P) > 0$ y además es continua en el cono $\theta_1 < \theta < \theta_2$.

b) Si $G_y(P_0) \neq 0$, por la continuidad de G_y, $G_y(P) \neq 0$ en un entorno $W_\delta(P_0)$ de P_0; por el teorema de la función implícita existe una única función $y = y(x)$, $x \in V_\delta(x_0) / y(x_0) = y_0$ y

$G(x,y(x)) = \rho$; además $y'(x) = \dfrac{-G_x(P)}{G_y(P)}$, $\forall$ $P = (x,y(x))$,

$x \in V_\delta(x_0)$. De esto sigue el resto.

En forma completamente similar se prueba la parte (ii).■

Observación.-

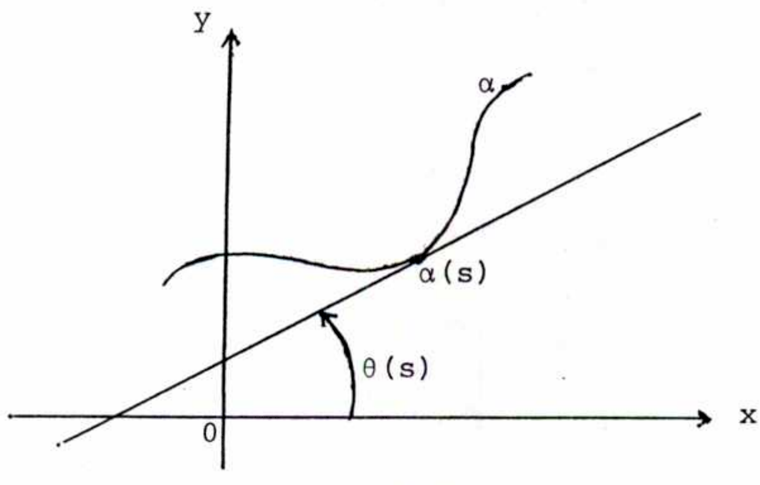
Si $\phi'' > 0$, $\Delta(P) < 0$ por que B sería una matriz definida positiva; esto independientemente de los signos de ϕ y ϕ'.

3.3 Algunos resultados sobre la curvatura con signo, para curvas regulares de clase C^2.

(a) Sea $\alpha(s) = (x(s),y(s))$ una curva parametrizada con longitud de arco; la curvatura $k_\alpha(s_0)$ en el punto $\alpha(s_0)$ se define como el:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\theta(s_0 + h) - \theta(s)}{h}$$

donde $\theta(s)$ es el ángulo orientado positivamente (sentido antihorario) de la parte positiva del eje X a la tangente en el punto $\alpha(s)$.



Luego $k_\alpha(s_0) = \theta'(s_0)$ como $|\alpha'(s)| = 1$ se deduce que

$$\theta'(s_0) = \begin{vmatrix} x'(s_0) & y'(s_0) \\ x''(s_0) & y''(s_0) \end{vmatrix} \equiv \alpha'(s_0) \times \alpha''(s_0)$$

donde $\alpha'(s)$, $\alpha''(s)$ son considerados como vectores de $\mathbb{R}^3$ con la tercera componente nula. y $\alpha' \times \alpha''$ si está identificando con su componente no nula.

(b) Si $\beta = \beta(t)$ es una parametrización cualquiera de una curva regular de clase C^2 ; $\alpha(s) = \beta(\ell^{-1}(s))$ su reparametrización con longitud de arco $s = \ell(t) = \int_a^t |\beta'(\tau)|d\tau$, $a \leqslant t \leqslant b$, se tiene

$$k_\alpha(s) = \frac{\beta' \times \beta''}{|\beta'|^3} \text{ (todo evaluando en t) } = k_\beta(t)$$

(c) Si $\beta(x) = (x , y(x))$, $k_\beta(x) = \dfrac{y''(x)}{|\beta'(x)|^3}$.

En las condiciones del lema 3.2 se tiene

$$|\beta'(x)|^3 = \frac{|\nabla G(P)|^3}{|G_y(P)|^3} \text{ , } P = (x,y(x)) \text{ , } G(x,y(x)) = \rho$$

luego:

$$k_\beta(x) = \frac{\Delta(P)}{|\nabla G(P)|^3} \operatorname{sig}(G_y(P)) \text{ , } P = (x,y(x))$$

lo que indica además que $\operatorname{sig}(k_\beta(s)) = \operatorname{sig}(G_y(P))$.

Similarmente cuando $\lambda(Y) = (x(y),y)$

$$k_\lambda(y) = \frac{-x''(y)}{|\lambda'(y)|^3} = \frac{-\Delta\ (P)}{|\nabla G(P)|^3} \operatorname{sig}(G_x(P)) \text{ , } P = (x(y),y)$$

(d) Sea $\beta(x) = \gamma(h(x))$, $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant h(x) \leqslant d$ curvas de clase C^2, $h' > 0$ ó $h' < 0$ en (a,b)

$\beta'(x) = \gamma'(h(x))h'(x)$; $\beta''(x) = \gamma'(h(x))h'^2(x) + \gamma'(h(x))h''(x)$

$$k_\beta(x) = \frac{\beta' \times \beta''}{|\beta'|^3} = \frac{h'(x)}{|h'(x)|} \quad \frac{\gamma' \times \gamma''}{|\gamma'|^3} = \operatorname{sig}(h')k_\gamma(h(x))$$

(e) si $\gamma(\theta) = r(\theta)e(\theta)$, $e(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, es de clase C^2

$$\gamma'(\theta) = r'(\theta)e(\theta) + r(\theta)e'(\theta)$$

$$\gamma''(\theta) = [r''(\theta) - r(\theta)]e(\theta) + 2r'(\theta)e'(\theta)$$ y

como $e(\theta) \times e'(\theta) \equiv 1$ y $e(\theta) \times e(\theta) = e'(\theta) \times e'(\theta) \equiv 0$

$$k_\gamma(\theta) = \frac{\gamma' \times \gamma''}{|\gamma'|^3} = \frac{2r'^2 + r^2 - rr''}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}$$

3.4 Teorema

Con las mismas hipótesis de 3.2, la curva de nivel $G(\theta,r) = \rho$, $0 < \rho < \rho^*$, parametrizada con $\gamma(\theta) = r(\theta)e(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, es de curvatura negativa en cada cono de suavidad $\theta_1 < \theta < \theta_2$ de G, es decir

$$\frac{2r'^2 + r^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} < 0 \qquad \forall \quad \theta_1 < \theta < \theta_2$$

Demostración

Dada la simetría de la curva de nivel, respecto del origen (esto es $r = r(\theta)$ es de período π) basta considerar el caso $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Sea $P_0 = (x_0, y_0) = r(\theta_0)e(\theta_0)$ un punto de la curva de nivel y del cono de suavidad. Por 3.1(c) $\nabla G(P_0) \neq (0,0)$

a) Supuesto que $G_y(P_0) \neq 0$; por la continuidad de G_y existe una vecindad de P_0 donde

$$\text{sig}(G_y(P)) = \text{sig}(G_y(P_0))$$

Por el teorema de la función implícita existe una única función $y = y(x)$ con $x \in V_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $G(x,y(x))=\rho$ y $y(x_0) = y_0$; luego $\beta(x) = (x,y(x))$ es una parametrización local de la curva de nivel $G(\theta, r) = \rho$ en un entorno del punto $P_0 = (x_0, y_0)$ relativo a la curva y además

$$\gamma(\theta) = r(\theta)e(\theta) = \beta(x) = (x,y(x)), \quad x \in V_\delta(x_0)$$

$$x = r(\theta)\cos\theta, \quad y(x) = r(\theta)\,\text{sen}\,\theta.$$

i) Si $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ consideramos $\theta(x) = \text{arc tg}\left(\frac{y(x)}{x}\right)$ así

$$\beta(x) = \gamma(\theta(x)) \quad \text{y} \quad \theta'(x) = -\frac{1}{G_y(P)}\left(\frac{P.\nabla G(P)}{|P|^2}\right) \quad \text{con } P = (x,y(x)),$$

$x \in V_\delta(x_0)$.

Por (3.1(c)) $P.\nabla G(P) > 0$ luego el signo de $\theta'(x)$ es el opuesto del signo de $G_y(P)$ cuando $x \in V_\delta(x_0)$

De 3.3(d)

$$k_\gamma(\theta_0) = \text{sig}(\theta'(x_0))k_\beta(x_0) = -\text{sig}(G_y(P_0))k_\beta(x_0)$$

y de 3.3(c)

$$k_\gamma(\theta_0) = -\frac{\Delta(P_0)}{|\nabla G(P_0)|^3} < 0$$

ii) Si $0 < \theta_0 < \pi$ se considera $\theta(x) = \text{arc cot}\,(\frac{x}{\gamma(x)})$ y siguiendo igual que en el caso (i), también se demuestra que $k_\gamma(\theta_0) < 0$.

b) Si $G_x(P_0) \neq 0$ el razonamiento es completamente similar, estableciéndose que $k_\gamma(\theta_0) < 0$.

En consecuencia se ha demostrado que:

$$k_\gamma(\theta) = \frac{\gamma'(\theta) \times \gamma''(\theta)}{|\gamma'(\theta)|^3} = \frac{2r'^2(\theta) + r^2(\theta) - r(\theta)r''(\theta)}{(r^2(\theta) + r'^2(\theta))^{3/2}} < 0$$

$\forall\ \theta_1 < \theta < \theta_2$.■

3.5 <u>Corolario</u>

Sean $(A,\mu), f, g$ como en 3.2. Entonces las esferas S_ρ de la métrica en $\mathbb{R}^2$

$$d(P,Q) = \int_A \frac{|(P-Q).F(t)|\,d\mu(t)}{1 + |(P-Q).F(t)|} \qquad 0 < \rho < \rho^*$$

parametrizadas con $\gamma(\theta) = r(\theta)e(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ tienen curvatura negativa en cada cono de suavidad

3.6 <u>Observaciones</u>

a) Para el caso $\phi_p(s) = \dfrac{s^p}{1+s^p}$, $s \geq 0$, $p \geq 2$ no se puede aplicar el corolario 3.5, la dificultad estriba en que $\phi_p''(s)$ cambia de signo cuando s recorre $[0\,,\infty)$:

$$\phi_p''(s) > 0 \quad \text{para} \quad 0 < s < \left(\frac{p-1}{p+1}\right)^{1/p} = R_p$$

y es negativo cuando $s > R_p$.

Sin embargo cuando $f,g \in L^{\infty}(A,\mu)$, se puede obtener algún tipo de información para los puntos $|P| \leqslant \frac{R_p}{\|F\|_{\infty}}$; lo cual se logra tomando en $G(P) = \rho$ un $\rho > 0$ suficientemente pequeño. En estos casos la curvatura será positiva en cada cono de suavidad de G porque $G_{xx} > 0$ y la matriz B del lema 3.2 será definida positiva; y de aquí $\Delta(P) < 0$.

b) Para los $P / |P.F(t)| > R_p$ en casi todo $t \in A$ se tiene curvatura negativa para las esferas cuya traza están en los conos de suavidad.

c) El caso $1 < p < 2$.

No se aplica el corolario anterior por cuanto falla la acotación de $\phi_p''(s)$ en $s = 0$.

d) La existencia de los conos de suavidad depende de la traza de $F(t)$ en el plano. Así por ejemplo cuando $F(t)$ es continua y su traza es una curva simple, que sin pasar por el origen contiene puntos de la forma $(\pm\ a\ ,\ 0)$ no genera conos de suavidad.

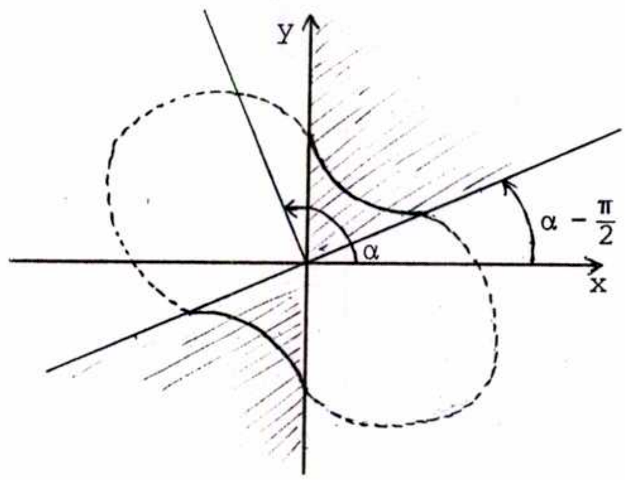
En consecuencia la regularidad de las esferas no dependen en general de la suavidad de $F(t)$, sino de los conos de suavidad de $G(P)$, que indudablemente están determinados por la traza de $F(t)$.

3.7 <u>Ejemplos</u>

a) Si $\frac{\pi}{2} < b < \pi$, $A = [0\ ,\ 1]$, $d\mu = dt$, $F(t) = (\cos bt, \operatorname{sen} bt)$

$$G(\theta,r) = \int_0^1 \phi(r|\cos(\theta - bt)|)dt \qquad \phi(s) = \frac{s}{1+s}$$

entonces sus conos de suavidad son $\alpha - \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ y el opuesto de este. En consecuencia las esferas tendrán curvatura negativa (en coordenadas polares) en el interior de estos conos.



(el trazo punteado completa la forma probable de las esferas o curvas de nivel de $G(\theta,r)$

b) Si en el ejemplo (a) consideramos $b = \pi$, entonces $G(\theta,r) = \int_0^1 \phi(r|\cos(\theta - \pi t)|)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(r|\cos t|)dt$ es independiente de θ, es decir $G(\theta,r)$ ó $G(P)$ es radial. En consecuencia las curvas de nivel son circunferencias. Debe notarse en este caso que $G(P)$ no tiene conos de suavidad y ello es compatible con la ausencia de curvatura negativa en todo punto de sus esferas, no obstante $\mu(N_\theta) = 0 \quad \forall \ \theta \in [0, \pi]$.

§4. DISTANCIAS EN EL PLANO INDUCIDAS POR INMERSIONES MEDIANTE FUNCIONES SIMPLES.-

4.1 (A,μ) es como siempre, un espacio de medida donde μ es finita no negativa (y completa).

Sea $\{A_1, \ldots, A_n\}$ una descomposición de A, es decir una sucesión de subconjuntos medibles disjuntos y cuya unión es A. Denotemos con χ_i la función característica χ_{A_i} y sean las funciones simples:

(4-a) $$f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i \ , \quad g(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_i \ , \quad a_i \, , \, b_i \in \mathbb{R}$$

y con esto tenemos $F(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i \chi_i$ donde $P_i = (a_i \, , b_i)$

La métrica inducida por $F(t)$

$$d(P,Q) = \left[\int_A \phi_p(|(P-Q).F(t)|)d\mu(t)\right]^{1/p} \qquad 1 \leqslant p < +\infty$$

es la función

(4-b) $$d(P,Q) = \left[\sum_{i=1}^{n} \phi_p(|(P-Q).P_i|)\mu_i\right]^{1/p}$$

donde $\mu_i = \mu(A_i)$ y $\phi_p(s) = \dfrac{s^p}{1+s^p} \qquad s \geqslant 0$ y

(4-c) $$D(P) = \sum_{i=1}^{n} \phi_p(|P.F(t)|)\mu_i$$ es la función asociada a esta métrica y que venimos tratando desde el principio. Continuaremos, entonces, con el estudio de las funciones del tipo

$G(P) = \sum_{i=1}^{n} \phi(|P.P_i|)\mu_i$, donde ϕ cumple las condiciones del lema 3.2.

4.2 Observaciones

a) Como $|P.P_i| = |P.(-P_i)|$ basta considerar en $F(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i\chi_i$ los coeficientes $P_i = (a_i, b_i)$ todos en un semiplano, particularmente en el semiplano derecho; ello no modifica la función $G(P)$ y tampoco la métrica (4-b). Este hecho equivale, en general, a considerar en $F(t) = (f(t), g(t))$ la primera componente $f(t) \geq 0$.

b) $N_\theta = \{t \in A / e(\theta).F(t) = 0 \ , \ 0 < |F(t)| < +\infty\}$ tiene una medida que no depende de la longitud del vector $P = re(\theta)$ sino de la dirección $e(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. El número de direcciones en que N_θ tiene medida positiva serán tantas como P_i no nulas y no paralelas existan.

c) De (a) y (b) será suficiente considerar en $F(t) = \sum_{n=1}^{n} P_i\chi_i$ los $P_j = r_j e^{i\alpha_j}$ no nulos todos en el semiplano derecho y angularmente ordenados, esto es: $-\pi/2 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \pi/2$

d) Una rotación de 90° del vector $P_i = (a_i, b_i)$ en el sentido positivo (antihorario) nos da el vector $Q_i = (-b_i, a_i)$; y pensando de estos como vectores de R^3 con la tercera componente nula, y lo mismo de $P = (x,y)$: la igualdad $P.P_i = (P \times Q_i).(0,0,1)$, permite identificar $P.P_i$ con $(P \times Q_i)$, luego se puede escribir (4-c) como

(4-d) $$G(P) = \sum_{i=1}^{n} \phi(|P \times Q_i|)\mu_i$$

Esto dice que las direcciones donde no se puede derivar $G(P)$ son las de Q_i

e) Escribiendo $Q_j = r_j e^{i\theta_j} = r_j e(\theta_j)$ quedan determinados ciertos conos $\{P = re(\theta)/\theta_j < \theta < \theta_{j+1}, r > 0\}$ donde $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots$ $\dots < \theta_n < \pi$ que son justamente los conos de suavidad para G. que se denota brevemente $\theta_j < \theta < \theta_{j+1}$.

En efecto sea $P = re(\theta)$ un punto del cono $\theta_j < \theta < \theta_{j+1}$; el signo de $P \times Q_i$ es positivo para $i = j+1, \dots, n$ y negativo para $i = 1,2, \dots, j$. En otros términos el $\mathrm{sig}(P.F(t)) = \mathrm{sig}(e(\theta).$ $.F(t))$ permanece constante para cada $t \in A$ fijo y P variando en el cono $\theta_j < \theta < \theta_{j+1}$. Además para los puntos $P = re(\theta)$ de cada uno de estos conos se tiene $N_\theta = \phi$ y de aquí $\mu(N_\theta) = 0$. En consecuencia cada cono (abierto) $\theta_j < \theta < \theta_{j+1}$ es un cono de suavidad para $G(P)$.

Luego estamos en las condiciones del teorema 3.4 y podemos dar la siguiente

4.3 <u>Proposición</u>

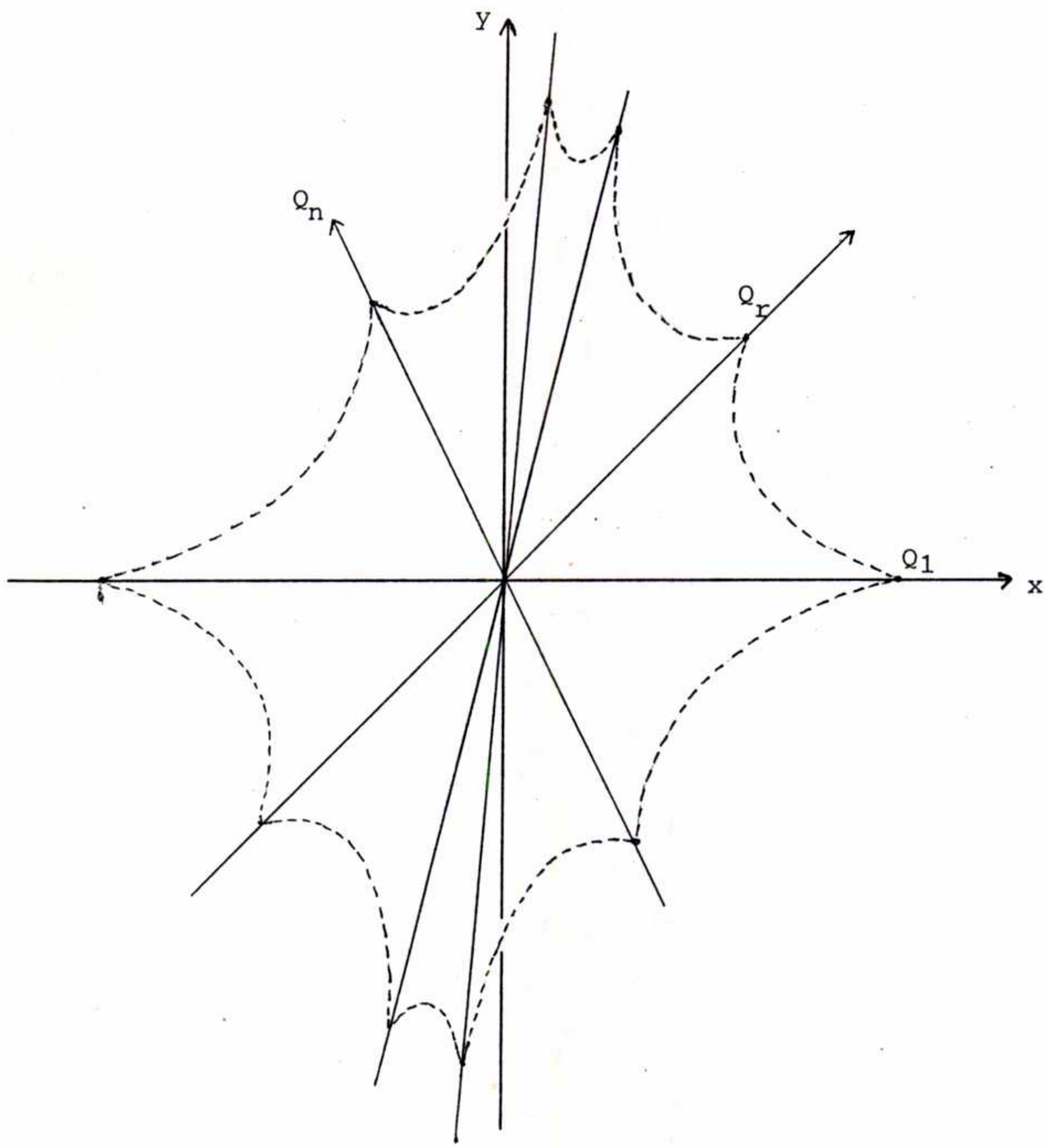
Sean $P_j = r_j e(\alpha_j)$ $j = 1,2,\dots,n$ vectores no nulos del semiplano $-\pi/2 \leq \theta < \pi/2$, angularmente ordenados. $\phi(s)$ como en el lema 3.2.

Entonces:

a) Las curvas de nivel $G(P) = \sum_{i=1}^{n} \phi(|P.P_i|)\mu_i = \rho$ con $0 < \rho < \rho^* = \left[\mu(A) - \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i\right] \|\phi\|_\infty$, admite una parametrización $\gamma(\theta) = r(\theta)e(\theta)$ con $r = r(\theta)$ Lipschitziana en $[0, 2\pi]$ y de clase C^2 en cada uno de sus conos de suavidad $\theta_j < \theta < \theta_{j+1}$.

b) $\gamma(\theta)$ tiene curvatura negativa en cada cono de suavidad.

c) Las esferas de la métrica (4-b), para el caso $p = 1$, satisfacen (a) y (b).■



4.4 Observaciones y resultados sobre interpolación de esferas.-

a) La función G(P) descrita en (4-d) es una expresión modificada de la que introducen Mc Gowan y Porta en |11|, cuando estudian representaciones de funciones de distancia en el plano y que es $L(P) = \sum_{j=1}^{n} |P \times P_j| \, m_j \quad P_j = (a_j , b_j) \quad m_j \in \mathbb{R}$ donde $P_1 , \dots , P_m$, son puntos del semiplano $Y > 0$ que están angularmente ordenados. El método de interpolación de Mc Gowan y Porta consiste en hacer pasar las curvas de nivel de L(P) por los puntos $P_1 , \dots , P_n$ prefijados, lo cual se reduce al estudio de la invertibilidad de la matriz $[|P_i \times P_j|]$ que efectivamente lo es y además consiguen una forma explícita para dicha inversa. Si se quiere hacer lo mismo con G(P), es decir que la curva $G(P) = \rho$ pase por los puntos $Q_1 , \dots , Q_n$ prefijados se llega a la ecuación matricial

$$(4\text{-}e) \qquad G(Q_i) = \sum_{j=1}^{n} \phi(|Q_i \times Q_j|) \, \mu_j = \rho \qquad i = 1, \dots , n$$

donde la invertibilidad de la matriz $A_\phi = [\phi(|Q_i \times Q_j|)]$ es falsa en general; por ejemplo $P_1 = (1/29 , 0)$, $P_2 = (1 , 1)$; $P_3 = (0,6)$, $P_4 = (-1,1)$, $\phi(s) = \frac{s}{1+s}$. La invertibilidad de la matriz es un problema abierto si se agrega que $\{P_1 , \dots P_n , -P_1 , \dots , -P_n\}$ forman un polígono convexo.

b) Cuando el conjunto de puntos no nulos $\{P_1 , \dots , P_n\}$ tiene un grupo invariante $\mathcal{U}$ de transformaciones ortogonales, cada $T \in \mathcal{U}$ define un único elemento σ del grupo de permutaciones S_n

(del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$) de modo que $T(P_j) = P_{\sigma(j)}$, $j = 1,2, \ldots, n$ de aquí $T^*(P_j) = T^{-1}(P_j) = P_{\sigma^{-1}(j)}$. Luego si $F(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j \chi_j$ es un par de funciones simples (como en (4-a)); entonces $G(\pm\, T(P)) = \sum_{j=1}^{n} \phi(|P.T^*(P_j)|)\mu_j$, con $\mu_j = \mu(A_j)$ y $\phi(s)$ como en 1.3. Tomando en cuenta $T^*(P_j)$ y luego reordenando la suma $= \sum_{j=1}^{n} \phi(|P.P_j|)\mu_{\sigma(j)}$

Si $\mu_j = \mu_{\sigma(j)}$ $\forall$ $j = 1,2, \ldots, n$ se tiene

$G(\pm\, T(P)) = G(P)$. Es decir $\pm\, \mathcal{U} = \{ \pm\, T/T \in \mathcal{U} \}$ es un grupo invariante para las curvas de nivel de $G(P)$ (observar que si $\mu_j = \frac{\mu(A)}{n}$ $\forall$ $j = 1,2, \ldots n \rightarrow \mu_j = \mu_{\sigma(j)}$)

<u>Recíprocamente</u> si $\pm\, \mathcal{U}$ es un grupo invariante para todas las curvas de nivel de $G(P)$, esto es $G(\pm\, T(P)) = G(P)$ $\forall$ T en $\pm\, \mathcal{U}$ y cada $P \in \mathbb{R}^2$ eligiendo $P = \lambda Q_i$ donde $\lambda > 0$ y Q_i es un vector no nulo y ortogonal a P_i, se tiene: $G(\pm\, T(\lambda Q_i)) = G(\lambda Q_i)$ de aquí el sistema de ecuaciones:

$$\text{(4-f)} \qquad \sum_{j=1}^{n} \phi(\lambda|Q_i \,.\, P_j|)\left[\mu_{\sigma(j)} - \mu_j\right] = 0 \qquad i = 1,2,\ldots n.$$

donde la matriz $\left[\phi(\lambda|Q_i \,.\, P_j|)\right]$ es simétrica, con diagonal nula, cuyo determinante $\Delta(\lambda)$ es una función continua en el parámetro $\lambda > 0$. (Ver ϕ en 1.3):

Como $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \Delta(\lambda) = \|\phi\|_{\infty}^{n} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & 1 \\ 1 & & & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= \|\phi\|_{\infty}^{n} \, (-1)^{n-1}(n-1) \neq 0$$

$\forall\ n \geqslant 2$, eligiendo un $\lambda > 0$ suficientemente grande, la matriz en (4-f) es invertible y de aquí $\mu_{\sigma(j)} = \mu_j \quad \forall \quad j = 1, \ldots, n.$

e) De la parte (b) dado un conjunto de puntos $P_1, \ldots, P_n$ de $\mathbb{R}^2 - 0$ que tiene un grupo invariante $\mathcal{U}$ de transformaciones ortogonales de modo que para cada $j = 1, \ldots, n$; existe un $T \in \mathcal{U} / T(P_j) = P_1$ entonces la esfera

$$G(P) = \int_A \phi(|P.F(t)|)d\mu(t) = \rho \ , \text{ con } \phi \text{ como en } 1.3 \ ,$$

$$F(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j \chi_j \qquad \chi_j = \chi_{A_j} \quad \text{donde} \quad \mu(A_j) = \frac{\mu(A)}{n} \ \text{ y } \ \rho = G(P_1) \ .$$

es la curva que pasa por los puntos prefijados $P_1, \ldots, P_n$.

§5. FUNCIONALES DE MINKOWSKI ASOCIADAS A LAS ESFERAS.

5.1 J. Mc Gowan y H Porta en |11|, demuestran la existencia de una representación integral y diferencial para las funciones de distancia o funcionales de Minkowski de una curva:

$\gamma(\theta) = r(\theta)(\cos\theta , \operatorname{sen}\theta)$ $\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ que reune las siguien - tes condiciones:

a) En $\gamma(\theta)$, $r(\theta)$ es una función continua de período π, $r(\theta) > 0$ en $[0 , \pi]$ y $\gamma(\theta)$ es de variación angular finita.

b) La región Ω cuya frontera es la curva $\gamma(\theta)$ tiene núcleo, $\operatorname{Ker}(\Omega)$, con interior no vacío.

En el parágrafo 7.1, del trabajo en referencia, se establece que si $r = r(\theta)$ es Lipschitziana, $\operatorname{Ker}(\Omega)$ contiene una esfera de centro el origen de coordenadas; y demuestran que en las condi - ciones citadas en (a), equivale a la no vacuidad del interior de $\operatorname{Ker}(\Omega)$.

De otro lado, en las condiciones de la proposición 4.3, la fun - ción:

$$G(P) = \sum_{i=1}^{n} \phi(|P.P_i|)\mu_i \qquad n \geqslant 2$$

induce una métrica en el plano: $d(P,Q)$ pues $\phi(s) \geqslant 0$, $\mu_i > 0$, $\phi(s)$ es estrictamente creciente, anulándose solamente en $s = 0$ y desde que $\phi''(s) < 0$ en $s > 0$, $\phi(s)$ es sublineal, es decir $\phi(s+t) < \phi(s) + \phi(t)$, $t,s \geqslant 0$.

Las esferas de esta métrica, con radios adecuados, satisfacen las propiedades arriba señaladas; más exactamente tenemos el:

5.2 Lema

En las condiciones de la proposición 4.3 las esferas C_ρ de la métrica $d(P,Q) = G(P-Q)$ de centro el origen y radio ρ, con $0 < \rho < \rho^*$ $\rho^* = \left[\mu(A) - \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i\right] \|\phi\|_\infty$; admite una parametrización $\gamma(\theta) = r(\theta)(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ que reune las condiciones (a) y (b) indicadas en 5.1.

Demostración

La Lipschitzianidad de $r(\theta)$ hace que se cumpla la parte (b).
La parte (a)

La variación angular de una curva $\gamma(\theta)$ se define (ver |11|) como

$$T(\gamma) = 2 \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^{m} |\delta_i|$$

donde δ_i es el ángulo orientado, que va del vector $\gamma(\alpha_i) - \gamma(\alpha_{i-1})$ al vector $\gamma(\alpha_{i+1}) - \gamma(\alpha_i)$ y $\Pi = \{0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots \ldots < \alpha_n < \alpha_{m+1} = \pi\}$ una partición de $[0, \pi]$. Si $T(\gamma)$ es finita se dice que γ es de variación angular finita.

Supongamos que Π contiene siempre los puntos $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} = \pi$, que determinan los conos de suavidad de $G(P)$ (si no lo fuera así tomamos simplemente un refinamiento Π' de Π con estos puntos). Entonces basta considerar las sumas de los $|\delta_i|$ cuando Π se restringe a cada intervalo $[\theta_j, \theta_{j+1}]$ $j = 0, 1, \ldots, n$.

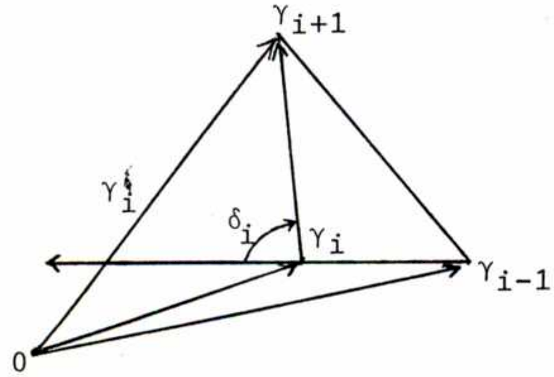
Sea entonces:

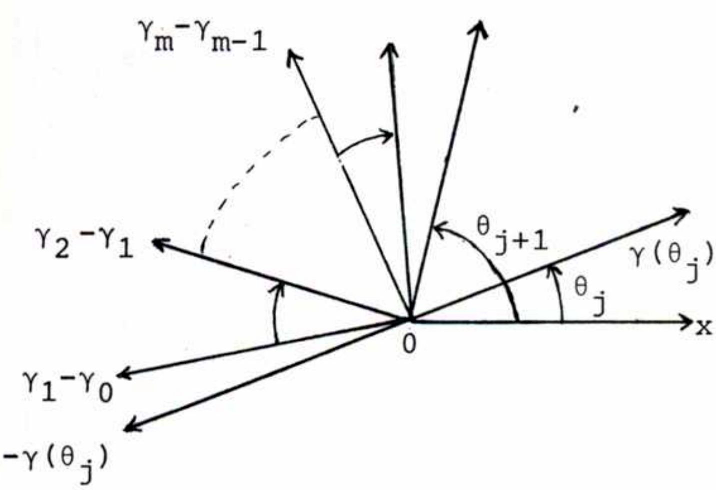
$\Pi = \{\theta_j = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{m+1} = \theta_{j+1}\}$ una partición del intervalo $[\theta_j , \theta_{j+1}]$. Los vectores $\gamma_i = \gamma(\alpha_i)$ están radialmente ordenados. Si aceptamos que

(5-a) $\quad (\gamma_i - \gamma_{i-1}) \times (\gamma_{i+1} - \gamma_i) < 0 \quad \forall \; i = 1, \ldots , m.$

Esta desigualdad indica que γ_i es punto interior del triángulo $(0 , \gamma_{i-1} , \gamma_{i+1})$ y de aquí el ángulo δ_i que va del vector $(\gamma_i - \gamma_{i-1})$ al vector $(\gamma_{i+1} - \gamma_i)$ es negativo y $|\delta_i| < \pi$. Mucho más cuando se hace variar $i = 0, \ldots, m$, los vectores en el origen: $(\gamma_{i+1} - \gamma_i)$ están angularmente ordenados y todos ellos en el cono $\theta_{j+1} < \theta < \pi + \theta_j$. Esto implica que:

$$\sum_{i=1}^{m} |\delta_i| < \pi + \theta_j - \theta_{j+1}$$





Cuando se considera Π en todo el intervalo $[0\ ,\pi]$ también aparecen otros ángulos δ_j construidos como antes, positivos, con vértice en $\gamma(\theta_j)$ y $\delta_j < \pi$, que no figuran en las sumas anteriores. Luego para cualquier partición Π de $[0\ ,\pi]$ que contenga a los θ_j se tendrá

$$\Sigma|\delta_i| < 2n\pi + \sum_{j=0}^{n} (\theta_j - \theta_{j+1}) = 2n\pi - (\theta_{n+1} - \theta_0) = (2n-1)\pi .$$

Luego $T(\gamma) < (2n-1)\pi$.

Finalmente mostraremos (5-a).

Sean $\alpha\ ,\ \beta \in [\theta_j\ ,\theta_{j+1}]$; $\alpha < \beta$ probaremos que $g(\theta) = \gamma(\alpha) \times \gamma(\beta) - \gamma(\alpha) \times \gamma(\theta) - \gamma(\theta) \times \gamma(\beta) > 0$ $\forall\theta \in (\alpha\ ,\beta)$, es decir la concavidad de la traza de $\gamma(\theta)$, cuando $\theta \in [\theta_j\ ,\theta_{j+1}]$.

$$g(\theta) = (\gamma(\beta) - \gamma(\alpha)) \times (\gamma(\theta) - \gamma(\alpha)).$$

Como $\gamma(\theta) = r(\theta)e(\theta) = r(\theta)(\cos\theta\ ,\operatorname{sen}\theta)$, es continua en $[\theta_j\ ,\theta_{j+1}]$ y de clase C^2 en $(\theta_j\ ,\theta_{j+1})$; y $g(\alpha) = g(\beta) = 0$, existe $\theta_0 \in (\alpha\ ,\beta)$ tal que $g'(\theta_0) = (\gamma(\beta) - \gamma(\alpha) \times \gamma'(\theta_0) = 0$.
Por otra parte

$$\forall\ \theta \in (\alpha,\beta): g''(\theta) = (\gamma(\beta) - \gamma(\alpha)) \times \gamma''(\theta), \quad \text{donde}$$

$$\gamma''(\theta) = [r''(\theta) - r(\theta)]\ e(\theta) + 2r'(\theta)e'(\theta).$$

Despejando $r''(\theta)$ de $k_\gamma(\theta) = k(\theta)$ se tiene

$$\gamma''(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}\left(-k(\theta)\,|\gamma'(\theta)|^3 e(\theta) + 2r'(\theta)\gamma'(\theta)\right)$$

como $(\gamma(\beta) - \gamma(\alpha)) \times \gamma'(\theta_0) = 0$

resulta:

$$g''(\theta_0) = \frac{k_\gamma(\theta_0)\,|\gamma'(\theta_0)|^3}{r(\theta_0)} \left[\gamma(\alpha) \times e(\theta_0) + e(\theta_0) \times \gamma(\beta)\right]$$

como $\alpha < \theta_0 < \beta$ y $\alpha , \beta \in [0 , \pi)$ cada uno de los sumandos del corchete son positivos; luego: $g''(\theta_0) < 0$ pues $k(\theta_0) < 0$.

En general, si $\theta \in (\alpha , \beta)$ fuera cualquier otro punto donde $g'(\theta) = 0$, por el argumento anterior $g''(\theta) < 0$. Luego g' tiene la propiedad de ser estrictamente decreciente en un entorno de cada uno de sus ceros; y como es continua en (α , β) no puede tener más que un cero en este intervalo. Así $g(\theta)$ es estrictamente creciente en $[\alpha , \theta_0]$ y estrictamente decreciente en $[\theta_0 , \beta]$; de aquí sigue (5-a).■

5.3 Proposición

En las condiciones de 4.3 para cada esfera C_ρ de la métrica $G(P)$, con $0 < \rho < \rho^*$, existirá una única medida de Borel μ sobre $[0 , \pi]$ finita y signada tal que la funcional de Minkowski $L_\gamma(P) = \frac{|P|}{r(\alpha)}$ admite una representación integral

(5-b) $$L_\gamma(P) = \int_0^\pi |P \times \gamma(\theta)|\, d\mu(\theta)$$

donde $d\mu$ también admite la representación diferencial:

(5-c) $$d\mu = \frac{\pi}{2}\ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''\right) \frac{d\theta}{\pi}$$

como $r(\theta)$ es de clase C^2 en cada intervalo $(\theta_j , \theta_{j+1})$ y acotadas; se puede determinar $\left(\frac{1}{r}\right)''$ en el sentido de las distribuciones

$$\left(\frac{1}{r}\right)'' = \frac{2r'^2}{r^3} - \frac{r''}{r^2} \qquad \forall \quad \theta_j < \theta < \theta_{j+1}$$

Si $s(\theta_j) = r'(\theta_j^+) - r'(\theta_j^-)$ es el salto de r' en θ_j

(5-d) $$d\mu = \frac{\pi}{2r}\left(\frac{1}{r} + \frac{2r'^2}{r^3} - \frac{r''}{r^2}\right) - \frac{\pi}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{s(\theta_j)}{r_j^3}\,\delta_{\theta_j}\right)$$

Haciendo los cálculos, para el caso $\phi(s) = \phi_1(s) = \frac{s}{1+s}$ se puede estimar el salto $s(\theta_j)$; pues

$$G_\theta(\theta_j^+, r_j) - G_\theta(\theta_j^-, r_j) = 2|P_j| r_j \mu_j \qquad r_j = r(\theta_j)$$

luego como $G_r(\theta, r)$ es continua en $r > 0$:

$$s(\theta_j) = r'(\theta_j^+) - r'(\theta_j^-) = -\frac{2|P_j|\, r_j \mu_j}{G_r(\theta_j, r_j)}$$

Finalmente:

(5-e) $$d\mu = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{2r'^2}{r^3} - \frac{r''}{r^2}\right) + \pi \sum_{j=1}^{n} \frac{|P_j|\, \mu_j}{r_j^2\, G_r(\theta_j, r_j)}\,\delta_{\theta_j}$$

§6. DISTANCIAS EN EL PLANO INDUCIDAS POR INMESIONES MEDIANTE FUNCIONES DE L^2

En esta sección mostraremos que la funcional de Minkowski de la curva

(6-a) $\quad G(P) = \int_A \phi(|P.F(t)|)d\mu(t) = \rho,$ con $f,g \in L^2(A,\mu)$ y ϕ

como en 3.2, admite una representación integral de la forma (5-b). Siempre que no exista dificultad, estudiaremos el problema en el caso $L^p(A,\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Sea entonces $f, g \in L^p(A,\mu)$ con $1 \leqslant p < \infty$, entonces existe una sucesión de funciones simples f_m, g_m que convergen en la norma L^p a f y g respectivamente. Si además f, g son linealmente independientes entonces f_m, g_m son también linealmente independientes a partir de un m_0 suficientemente grande; de lo contrario existirían subsucesiones de f_m y g_m (que lo denotamos igual) linealmente dependientes; es decir tendríamos sucesiones de vectores $e_m \in \mathbb{R}^2$ tal que $|e_m| = 1$ y $e_m \cdot F_m(t) = 0$ en casi todo $t \in A$. $\big(F_m(t) = (f_m(t), g_m(t))\big)$. Desde que la esfera en $\mathbb{R}^2$ es compacta, existe una subsucesión de $\{e_m\}$ (que también lo denotamos igual) tal que $e_m \to e$ y $|e| = 1$. De allí escribiendo $F(t) = (f(t), g(t))$ tenemos

$$\int_A |e.F(t)|d\mu = \left|\int_A |e.F(t)| - |e_m \cdot F_m(t)|d\mu\right|$$

$$\leqslant |e_m - e|\int_A |F_m(t)|d\mu + \int_A |F_m(t) - F(t)|d\mu$$

desde que μ es una medida finita, usando la desigualdad de Hölder se tiene

$$\leqslant |e_m - e| \; C \; \|F\|_p + C \; \|F_m - F\|_p$$

donde C es una constante que depende de $\mu(A)$.

Cuando $m \to +\infty$ la primera integral es cero de aquí $e.F(t) = 0$ en casi todo $t \in A$, que contradice la independencia lineal de f, g (que son las componentes de F). Cuando $f, g \in L^\infty$ es suficiente considerarlo en cualquier $L^p(A, \mu)$ con $1 \leqslant p < \infty$.

Es conocido que de una sucesión convergente en la norma de $L^p(A, \mu)$ se puede extraer una subsucesión convergente en casi todo punto de A. Además si f_m, g_m son funciones simples que corresponden a diferentes particiones de A, digamos $\{A_1, \ldots, A_m\}$ y $\{B_1, \ldots, B_n\}$ tomando $E_{ij} = A_i \cap B_j$, $i = 1, \ldots m$, $j = 1, \ldots, n$, podemos considerar f_m, g_m como funciones simples correspondientes a una misma partición de A.

6.1 Proposición

Sean $f, g \in L^0(A, \mu)$ linealmente independientes y finitas en casi todo punto de A; $f_m, g_m \in L^0(A, \mu)$ linealmente independientes, finitas en casi todo punto, tal que $f_m \to f$, $g_m \to g$ en casi todo punto y los números $\rho^* = \rho^*(f, g)$ $\rho^*_m = \rho^*(f_m, g_m)$ definidos como en 1.2. Entonces

$$\rho^* \leqslant \liminf_{m\to\infty} \rho^*_m$$

Demostración

Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ fijo, denotemos $M^{\theta}(t) = e(\theta).F(t)$ y $M_m^{\theta}(t) = e(\theta).F_m(t)$. Por hipótesis cada uno de ellos es finito en casi todo $t \in A$ y también $M_m^{\theta} \to M^{\theta}$ en c.t.p. cuando $m \to \infty$; es decir

$$|M^{\theta}(t)| = \lim |M_m^{\theta}(t)| = \lim\inf |M_m^{\theta}(t)| = \sup_{k\geq 1} (\inf_{m\geq k} |M_m^{\theta}(t)|)$$

en c.t.p.

Escribiendo brevemente

$$(|M^{\theta}| = 0) = \{t \in A \; ; \; |M^{\theta}(t)| = 0\} \qquad \text{(6-a)}$$

tenemos

$$(|M^{\theta}| = 0) = (\sup_{k\geq 1} (\inf_{m\geq k} |M_m^{\theta}|) = 0) = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\inf_{m\geq k} |M_m^{\theta}| = 0)$$

desde que $\quad (\inf_{m\geq k} |M_m^{\theta}| = 0) \supset \bigcup_{m=k}^{\infty} (|M_m^{\theta}| = 0)$

podemos concluir que $(|M^{\theta}| = 0) \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ donde $E_k = \bigcup_{m=k}^{\infty} (|M_m^{\theta}| = 0)$. Tomando en cuenta que $E_1 \supset E_2 \supset$ $\supset E_k \supset$ y $\mu(E_1) \leq \mu(A) < \infty$ llegamos a que

$$\mu(|M^{\theta}| = 0) \geq \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$$

Pero $\quad E_k \supset (|M_k^{\theta}| = 0)$ de aquí

$$\mu(|M^{\theta}| = 0) \geq \lim\sup_{k\to\infty} \mu(|M_k^{\theta}| = 0)$$

como $0 \leq \mu(|M_k^{\theta}| = 0) \leq \mu(A) \quad \forall \quad k \geq 1 \quad$ y $\quad \forall \quad \theta \in \mathbb{R}$

el límite superior y el supremo respecto $\theta \in \mathbb{R}$ pueden ser intercambiados.

De allí:

$$(6\text{-b}) \qquad \sup_{\theta} \mu(|M^{\theta}| = 0) \geqslant \limsup(\sup \mu(|M_k^{\theta}| = 0))$$

Por otra parte siguiendo el mismo razonamiento para la sucesión $F_k(t) = (f_k(t), g_k(t))$ que converge a $F(t) = (f(t), g(t))$ en c.t.p., tenemos

$$\mu(|F| = 0) \geqslant \lim_{k \to \infty} \sup \mu(|F_k| = 0)$$

de esta desigualdad y (6-b) sigue el resto.■

Usando los comentarios hechos en el comienzo de §6 y las aplicaciones obvias de las proposiciones 1.4, 4.3 y 5.3 llegamos a la siguiente.

6.2 <u>Proposición</u>

Sean $f, g \in L^p(A, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, funciones linealmente independientes. Entonces:

a) Existen sucesiones de funciones simples f_m, g_m correspondientes a una misma partición de A, linealmente independientes para cada $m \geqslant 1$ y tal que $f_m \to f$, $g_m \to g$ en c.t.p. y en la norma de $L^p(A, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$.

b) Sean

$$(6\text{-c}) \qquad G(\theta, r) = \int_A \phi(r|e(\theta).F(t)|)d\mu(t)$$

$$G^m(\theta, r) = \int_A \phi(r|e(\theta).F_m(t)|)d\mu(t)$$

donde $F(t) = (f(t), g(t))$, $F_m(t) = (f_m(t), g_m(t))$ y ϕ como en 3.2. Entonces dado ρ, $0 < \rho < \rho^*(f,g)$, existen funciones $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como en 1.4 y $r_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como en 4.3 tal que $G(\theta, r(\theta)) = \rho = G^m(\theta, r_m(\theta))$ $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$ y $\forall m \geq m_o$, donde $m_o = m_o(\rho)$. Es decir $\alpha(\theta) = r(\theta)e(\theta)$ y $\alpha_m(\theta) = r_m(\theta)e(\theta)$ son las parametrizaciones de $G(\theta, r) = \rho$ y $G^m(\theta, r) = \rho$ respectivamente.

c) La funcional de Minkowski L_m de la curva α_m, admite la representación integral

(6-e) $$L_m(P) = \int_0^\pi |P \times \alpha_m(\theta)| d\, M_m(\theta)$$

donde dM_m es una medida finita de Borel sobre $[0, \pi]$ y que es única

Cuando $P = |P|e(t) = |P|(\cos t, \operatorname{sen} t)$, (6-e) toma la forma

(6-f) $$L_m(P) = |P| \int_0^\pi |\operatorname{sen}(t-\theta)| r_m(\theta)\, dM_m(\theta) \quad , \quad m \geq m_0$$

Si identificamos las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ periódicas de período π, con las funciones real-valuadas definidas en el grupo topológico $T = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$ y la medida $\frac{d\theta}{\pi}$ con la medida de Borel invariante y normalizada sobre T, entonces la integral (6-f) puede ser escrito como la convolución.

(6-h) $$[|\operatorname{sen}| * (r_m d\, M_m)]\ (t)$$

y en este contexto, desde que r_m y $|\operatorname{sen}|$ son continuas, la convolución (6-h) es una función continua.

Veamos dos aspectos con respecto a dM_m y r_m

(*) Si demostráramos que $\| dM_m \|_{\mathcal{M}} < C$, $\forall\ m \geq m_0$ y para cierta constante C, donde $\| \ \|_{\mathcal{M}}$ es la norma en $\mathcal{M}$ (el espacio de las medidas finitas de Borel sobre $[0, \pi]$), entonces existiría una subsucesión de $\{dM_m\}$ (que lo denotamos igual) y una medida finita de Borel dM sobre $[0, \pi]$ tal que $dM_m \to dM$ en la topología débil estrella de $\mathcal{M}$, también llamada topología vaga.

(**) Si además, demostráramos que $r_m \to r$ uniformemente en $\mathbb{R}$, se tendría que $r_m\, dM_m \to r\,dM$ en la topología vaga de $\mathcal{M}$ y así $r_m\, dM_m \to r\,dM$ en la topología vaga de $\mathcal{M}$ y así

$$[\,|\mathrm{sen}| * (r_m\, dM_m)](t) \quad \to \quad [\,|\mathrm{sen}| * (r\, dM)]\,(t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo.

Por otra parte, como $r_m \to r$ en $\mathbb{R}$; para cada $P = |P|e(t)$ tenemos

$$L_m(P) = \frac{|P|}{r_m(t)} \to \frac{|P|}{r(t)} = L_\alpha(P)$$

es decir

$$L_\alpha(P) = |P| \int_0^\pi |\mathrm{sen}(\pi - \theta)|\, r(\theta)\, dM(\theta)$$

o sea

$$\text{(6-i)} \qquad L_\alpha(P) = \int_0^\pi |P \times \alpha(\theta)|\, dM(\theta) \qquad \alpha(\theta) = r(\theta)e(\theta).$$

Tomando en cuenta la representación integral (6-e), la unicidad de la medida dM sigue de las propiedades de la transformada de Fourier (sobre el particular puede verse en |11|).

En consecuencia, para que la representación integral (6-i) sea válida y con dM única, es necesario mostrar las consideraciones (*) y (**). Con esto en mente, veamos en primer lugar las siguientes proposiciones

6.3 Proposición

Sean las funciones $F(t)$, $F_m(t)$, r_m, r y ϕ como en la proposición 6.2. Entonces existen constantes $a,b > 0$ tal que $r(\theta)$, $r_m(\theta) \in [a, b]$ $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$ y $\forall\ m \geq m_0$

Demostración

Probaremos en primer lugar que existe una constante b_1 tal que $\max\limits_{0 \leq \theta \leq \pi} r_m(\theta) \leq b_1$ $\forall$ $m \geq m_o$

Si no fuera así, existiría una subsucesión de $\{r_m\}$ (que lo denotamos igual) tal que $\max\limits_{0 \leq \theta \leq r} r_m(\theta) \to \infty$ pero desde que r_m es continua en $[0, \pi]$, toma su máximo en un punto $\theta_m \in [0, \pi]$; entonces existe una subsucesión de $\{\theta_m\}$ que también lo denotamos igual) tal que $\theta_m \to \theta_0 \in [0, \pi]$.

Desde que $e(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ es continuo y $F_m(t) \to F(t)$ en c.t.p. se sigue que $|e(\theta_m).F_m(t)| \to |e(\theta_0).F(t)|$ en c.t.p. Así $r_m(\theta_m)|e(\theta_m).F_m(t)| \to +\infty$ en casi todo punto de

$B = [A - (F = 0)] - N_{\theta_0}$

Como $\phi(s)$ es creciente, acotado y continuo en $s \geq 0$ se sigue

$\phi(s) \to \|\phi\|_\infty$ cuando $s \to +\infty$. Usando el lema de Fatou conseguimos:

$$\|\phi\|_\infty \left[\mu(A) - \mu(F=0) - \mu(N_{\theta_0})\right] = \int_B \|\phi\|_\infty \, d\mu$$

$$\leqslant \liminf_{m\to\infty} \int_B \phi(r_m(\theta_m)\,|e(\theta_m).F(t)|)\,d\mu(t)$$

$$\leqslant \liminf_{m\to\infty} G(\theta_m , r_m(\theta_m)), \text{ pero } G(\theta_m , r_m(\theta_m)) = \rho \ ; \quad y$$

desde que $0 < \rho < \rho^*$ se llegaría a que $\sup_\theta \mu(N_\theta) < \mu(N_{\theta_0})$ que obviamente es imposible, de allí la afirmación hecha al comenzar la demostración tiene que ser cierta.

Análogamente, puede ser probado que existe una constante $a_1 > 0$ tal que $a_1 \leqslant \min_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} r_m(\theta)$

Desde que $r_m(\theta)$ es periódica con período π, las cotas son las mismas cuando el máximo y el mínimo se toman en $\mathbb{R}$.

De las propiedades de $r(\theta)$, existen también constantes $a_2 , b_2 > 0$ tal que $a_2 \leqslant r(\theta) \leqslant b_2 \quad \forall\ \theta \in \mathbb{R}$. De aquí sigue el resto.

6.4 <u>Proposición</u>

Sean $f , g , f_m , g_m \in L^2(A , \mu)$ tal que $f_m \to f$ y $g_m \to g$ en la norma L^2 y las funciones $G(\theta , r)$, $G^m(\theta , r)$ y ϕ definidos como en 6.2

Entonces:

a) $G^m_r(\theta , r) \to G_r(\theta , r)$ uniformemente en θ, para cada $r > 0$ fijo

b) Para cada banda $\mathbb{R} \times [a , b]$ con $a > 0$ existe un $\eta > 0$ tal que $\eta < G_r^m(\theta, r)$ con $(\theta, r) \in \mathbb{R} \times [a, b]$ $\forall$ $m \geq m_0$

Demostración

a) Fijando un $r > 0$ y tomando en cuenta las características de ϕ, y desde que

$$G_r(\theta, r) = \int_A \phi'(r|e(\theta).F(t)|)\,|e(\theta).F(t)|\,d\mu(t)$$ y una forma

similar para $G_r^m(\theta, r)$ se sigue

$$|G_r^m(\theta, r) - G_r(\theta, r)|$$

$$< \|\phi'\|_\infty \|F_m - F\|_1 + \|\phi''\|_\infty\, r \int_A |F(t)|\,|F_m(t) - F(t)|\,d\mu(t)$$

Usando la desigualdad de Cauchy - Schwartz tenemos

$\leq C\,\|F_m - F\|_2$ donde C es una cosntante adecuada que depende solamente de F, ϕ y r. El resto sigue de aquí.

b) Desde que $\phi'(s)$ es decreciente en $s > 0$ y $F_m(t)$ es finito en c.t.p. se sigue que $G_r^m(\theta, r)$ es decreciente en r para cada θ fijo; así $G_r^m(\theta, b) \leq G_r^m(\theta, r)$ $\forall$ $r \in [a, b]$.

Gracias al teorema 1.4 existe una constante $\eta_1 > 0$ tal que $G_r(\theta, r) \geq \eta_1$ $\forall$ $(\theta, r) \in \mathbb{R} \times [a, b]$. De aquí dado $0 < \eta < \eta_1$ y desde que $G_r^m(\theta, b) \to G_r(\theta, b)$ uniformemente en θ, se sigue que $G_r^m(\theta, r) \geq G_r^m(\theta, b) \geq \eta$ $\forall$ $(\theta, r) \in \mathbb{R} \times [a, b]$ y $\forall$ $m \geq m_o$, para un m_o suficientemente grande. ■

En el siguiente teorema demostraremos las consideraciones (*) y (**) que aun quedan pendientes.

6.5 Teorema

Sean las funciones $F(t)$, $F_m(t)$, $r(\theta)$, $r_m(\theta)$, $\phi(s)$ $G(\theta, r)$, $G^m(\theta, r)$ y las medidas de Borel dM_m como en el teorema 6.2. Entonces

a) $r_m \to r$ uniformemente en $\mathbb{R}$.

b) $\| dM_m \| \leq C \quad \forall \quad m > m_0$, para una cierta constante C.

Demostración

a) Desde que $G^m(\theta, r_m(\theta)) = G(\theta, r(\theta)) = \rho \quad \forall \ \theta \in \mathbb{R}$ y $\forall \ m \geq m_0$, con $0 < \rho < \rho^*$ se sigue

$$G^m(\theta, r_m(\theta)) - G^m(\theta, r(\theta)) = G(\theta, r(\theta)) - G^m(\theta, r(\theta))$$

Por el teorema 1.4 el primer miembro de esta igualdad es $(r_m(\theta) - r(\theta))\, G_r^m(\theta, \ell_m(\theta))$ para un cierto $\ell_m(\theta)$ entre $r_m(\theta)$ y $r(\theta)$; y el segundo miembro en valor absoluto, está acotado por

$$\|\phi'\|_\infty \int_A r(\theta)\, |e(\theta)|\, |F_m(t) - F(t)|\, d\mu(t)$$

En la proposición 6.3 hemos probado que $a \leq r(\theta) \leq b$ y en la proposición 6.4 que $G_r^m(\theta, \ell_m(\theta)) \geq \eta > 0$. De aquí conectando todo:

$$|r_m(\theta) - r(\theta)| \leq C_1 \|F_m - F\|_1 \qquad m \geq m_0$$

donde $$C_1 = \frac{b\, \|\phi'\|_\infty}{\eta}$$

Desde que la convergencia en $L^2(A, \mu)$ implica en convergencia en $L^1(A, \mu)$, queda demostrada la parte (a).

b) Antes de mostrar esta parte, precisamos que los conos de suavidad de G(P), en coordenadas polares son simplemente intervalos abiertos $\sigma < \theta < \beta$ y que los llamaremos <u>intervalos de suavidad</u> o regularidad para $G(\theta, r)$, y que satisfacen las siguientes condiciones:

1°) $\mu(N_\theta) = 0 \quad \forall\ \theta$ en el intervalo (σ, β)

2°) Para casi todo $t \in (A - (F = 0))$ fijado, $\mathrm{sig}(e(\theta).F(t))$ permanece constante cuando θ varía en el intervalo (σ, β).

Continuamos ahora con la demostración del teorema. Por 5.3 la medida finita Borel dM_m y la función r_m satisfacen la ecuación (5-e). Veamos una cota para el primer término de la suma (5-e). En cada intervalo de suavidad (θ_j, θ_{j+1}) de $G^m(\theta, r)$ tenemos:

$$G^m_\theta(\theta,r) = \int_A \phi'(r|e(\theta).F_m(t)|)(e'(\theta).F_m(t))\,\mathrm{sig}(e(\theta).F_m(t))\,d\mu(t)$$

$$G^m_{\theta\theta}(\theta,r) = \int_A \Big[\phi''(r|e(\theta).F_m(t)|)(e'(\theta).F_m(t))^2 - \phi'(r|e(\theta).F_m(t)|)\,r\,|e(\theta).F_m(t)|\,\mathrm{sig}(e'(\theta).F_m(t))\Big]d\mu(t)$$

$$G^m_{rr}(\theta, r) = \int_A \phi''(r|e(\theta).F_m(t)|)\,|e(\theta).F_m(t)|^2 d\mu(t)$$

$$G^m_{\theta r}(\theta, r) = \int_A \Big[\phi''(r|e(\theta).F_m(t)|)\,r\,|e(\theta).F_m(t)| + \phi'(r|e(\theta).F_m(t)|)\Big](e'(\theta).F_m(t))\,\mathrm{sig}(e(\theta).F_m(t))\,d\mu(t).$$

Tomando $r = r_m$ en G^m_θ , se tiene $|G^m_\theta| < \|\phi'\|_\infty \|F_m\|_1$ y desde que $\|F_m\|_1$ es una sucesión acotada $|G^m_\theta| \leqslant C_2 \ \forall\ \theta \in \mathbb{R} \quad \forall\ m \geqslant 1$, donde C_2 sólo depende de ϕ , F y $\mu(A)$.

En la misma forma tenemos la acotación:

$|G^m_{\theta\theta}| < \|\phi''\|_\infty \|F_m\|_2^2 + \|\phi'\|_\infty r_m(\theta)\|F_m\|_1$. Como $\|F_m\|_2$ y $\|F_m\|_1$ son sucesiones acotadas y $a \leqslant r_m(\theta) \leqslant b \quad \forall\ \theta \in \mathbb{R} \ \forall\ m \geqslant m_o$ (proposición 6.3) concluimos que $|G^m_{\theta\theta}| \leqslant C_3 \ \forall\ \theta \in \mathbb{R} \ \forall m > m_o$ con C_3 una apropiada constante. Análogamente puede mostrarse que las otras derivadas de $G(\theta , r)$ son acotadas por constantes que no dependen de θ ni de m.

Por otra parte $G^m_r(\theta , r) \geqslant \eta > 0 \quad \forall\ (\theta,r) \in \mathbb{R}\times [a , b]$ (proposición 6.4) de aquí las funciones $r'_m(\theta)$ y $r''_m(\theta)$, que pueden ser calculadas en términos de las derivadas parciales de $G^m(\theta,r)$, también están acotadas por una constante fija e independiente de θ y los $m \geqslant m_o$. De todo esto y tomando en cuenta nuevamente 6.3 el primer término de la suma (5-e) está uniformemente acotado respecto los $m \geqslant m_o$.

El segundo término de la suma (5-e) es una combinación lineal de deltas de Dirac soportados en $\theta_j \in [0 , \pi]$. Su norma en espacio M estará acotado por $C_4 \sum_{j=1}^{m} |P_j|\mu_j$ donde C_4 es una constante que proviene de las cotas para r_m y G^m_r mencionadas en las proposiciones 6.3 y 6.4 respectivamente.

Pero $\sum_{j=1}^{m} |P_j|\mu_j = \|F_m\|_1$ y esta es una sucesión acotada. De allí el segundo término de la suma (5-e), también está acotada en la norma de $\mathcal{M}$. Conectando todo

$$\|d\,M_m\|_{\mathcal{M}} \leqslant C \qquad \forall \quad m > m_o$$

De todo lo expuesto podemos concluir que se ha probado el siguiente

6.6 Teorema

Sean $f\,,g \in L^2(A\,,\mu)$ linealmente independientes, $\phi(s)$ como en 3.4 y $\alpha(\theta) = r(\theta)e(\theta)$ la parametrización de la esfera

$$G(P) = \int_A \phi(|P.F(t)|)d\mu(t) = \rho$$

donde $0 < \rho < \rho^*$. Entonces la funcional de Minkowski L_α de la curva $\alpha(\theta)$, admite la representación integral

$$L_\alpha(P) = \int_0^\pi |P \times \alpha(\theta)|dM(\theta)$$

donde dM es una medida finita de Borel sobre $[0\,,\pi]$, única para la curva $\alpha(\theta)$ satisfaciendo esta ecuación.■

6.7 Observaciones

a) El teorema 6.5, establece en términos de una sucesión de curvas $\alpha_m(\theta)$ y sus funcionales de Minkowski, que se diría de la siguiente manera

Sea $\alpha_m(\theta) = r_m(\theta)e(\theta)$ y $\alpha(\theta) = r(\theta)e(\theta)$ donde r_m ,

r son funciones real valuadas y estrictamente positivas en $[0,\pi]$. Además r_m es continua, periódica con período π y $r_m \to r$ uniformemente en $[0,\pi]$. Así, si la funcional de Minkowski de la curva α_m admite una representación integral de la forma (6-e) y $\| dM_m \|_M \leqslant C \ \forall m \geqslant 1$; entonces la funcional de Minkowski de $\alpha(\theta)$ también admite una representación de la misma forma.

b) Lo siguiente es un problema interesante. Sea $\alpha(\theta) = r(\theta)e(\theta)$ una curva cuya funcional de Minkowski puede ser representada por medio de una integral de la forma (6-e). ¿Será $\alpha(\theta)$ una curva de variación angular finita?. En esta dirección puede demostrarse usando (5-e) que $\frac{1}{r}$ es la diferencia de dos funcionales convexas en $[0,\pi]$. La respuesta a esta pregunta sería afirmativa si la curva $\beta(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} e(\theta)$ es de variación angular finita.

c) Un problema adicional es el siguiente. Si α_m, α son curvas como en la parte a) y α_m es además de variación angular finita, entonces α es de vairación angular finita?.

B I B L I O G R A F I A

|1| G. Corach - Horacio Porta: "Curvature an Lipschitz conditions for curves in euclidean spaces" in Dynamical Systems and Partial Differential Equations. Proc of the VII ELAM 1986. Caracas.

|2| Dieudonné J.: "Foundations of Modern Analysis" Vols. I, II. Academic Press. 1969.

|3| De Guzman M. - Rubio B.: "Integración: Teoría y Técnicas". Ed. Alhambra 1979.

|4| Edwards R.: "Integration and harmonic analysis on compact groups". University Press 1972.

|5| Espinoza H.P.: "Métricas que inducen convergencias en medida". Trabajos de Matemática N° 71. Instituto Argentino de Matemática. 1984.

|6| -------- : "Esferas en métricas que inducen convergencia en Medida". Actas del Segundo Coloquio de Matemática. Sociedad Matemática Peruana. 1985

|7| T. Fegurson: "A representations of the bivariate Cauchy distribution". Ann Math. Stat. 33 (1962) 1256-1266

|8| C.S. Herz: "A class of negative - definite functions" Proc. AMS. 14 (1963) 670 - 675

|9| Hewitt E.: "Abstract Harmonic Analysis" Academic Press 1963.

|10| J. Lindenstrauss and L. Tzafriri: "Clasical Banach Spaces" Lecture Not. in Math. Vol.338 (1973) Springer N.Y.

|11| Mc. Gowan, J - Porta H.: "On representations of distance Functions in the Plane". Trabajos de Matemática N° 41. Instituto Argentino de Matemática 1982.