Generalización de la teoría de intersección a esquemas noetherianos y separados

Solotar, Andrea Leonor

1986

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Tesis 1980

ej. 2

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Tema de Tesis

GENERALIZACION DE LA TEORIA DE INTERSECCION A ESQUEMAS NOETHERIANOS Y SEPARADOS

Autor

Andrea Leonor Solotar

Director de Tesis

Ing. Orlando E. Villamayor

Lugar de trabajo:

Departamento de Matemática

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

1986

Quiero agradecer especialmente :

Al Ing. Orlando E. Villamayor, quien sugirió el tema del presente trabajo y siguió atentamente el desarrollo del mismo.

Al CONICET, que hizo posible el desarrollo de parte de este trabajo mediante una beca de iniciación.

Al Departamento de Matematica de la F.C.E. y N., Univ. de Bs. As., que fue mi lugar de trabajo.

A María Ofelia Ronco, con quien compartí la realización de parte del trabajo.

A José, por su constante apoyo, estímulo y paciencia.

A Ana Bianco, con quien compartimos nuestra mesa de trabajo.

A mis compañeros del Depto. de Matematica, en especial a Alicia, Marianne, Olga, Jorge, Fernando, Lucas, Jorge, Elicita, Juan Carlos, Guillermo, Teresa, Fernando, quienes hicieron de éste un lugar más agradable, y colaboraron en todo lo necesario, y más aún, brindando así su apoyo a nuestro trabajo.

INDICE

INTRODUCCION

El objeto de este trabajo es demostrar la relación entre los anillos de Chow de un esquema noetheriano Y, no necesariamente regular; un subesquema cerrado X de Y; el esquema Y' obtenido por la Explosión de Y a lo largo de X; y el producto fibrado de X con Y' sobre Y, que llamaremos X'.

El anillo de Chow está definido como la suma directa de los grupos $H^p(E,\underline{K}_p)$, con $p \geq 0$; le cual tiene un producto definido a partir del producto cup de Karoubi. Los funtores K_p utilizados son los de la teoría K de Karoubi y Villamayor.

Los cuatro primeros capítulos corresponden al desarrollo elemental de la teoría de intersección clasica de geometría algebraica, de la teoría K de Karoubi y Villamayor; a la demostración del isomorfismo entre la p-ésima componente del anillo de Chow de un esquema regular X y el p-ésimo grupo de cohomología de X a valores en K; y el esbozo de los principales resultados de cohomología sobre espacios paracompactos. La demostración de que la p-ésima componente del anillo de Chow es isomorfa al grupo $H^p(X,\underline{K}_p)$ se basa en la demostración de este resultado hecha por D. Quillen para su teoría K, publicada en Lecture Notes in Math. 341 (77-139), Springer Verlag, 1972.

En el Cap. V se define un producto de $H^p(X,\underline{K}_p) \times H^p(X,\underline{K}_p)$ en $H^{p+q}(X,\underline{K}_{p+q})$, para todo par $p,q \geq 0$, utilizando el producto en los grupos K definido por Karoubi en Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.-4° serie t. 4 (p. 63-95), 1971. Se demuestra además en este capítulo que el producto definido coincide con el producto de intersección clásico sobre esquemas regulares, vía el isomorfismo del capítulo III.

En el Cap. VI se definen f^* y f_*, para un morfismo de esquemas f; y se demuestran para nuestra definición de anillo de Chow las principales propiedades de la teoría de intersección clásica.

En el Cap. VII se definen clases de Chern de un fibrado, en forma análoga al caso clásico para esquemas regulares, siguiendo el desarrollo de W. Fulton. Intersection Theory. A series of mod. surv. in math.-Springer Verlag. 1984.

Hasta este capítulo el trabajo fue realizado en forma conjunta con M. O. Ronco, quien también se encuentra realizando su tesis bajo la dirección del

Ing. Orlando Villamayor.

En el Cap. VIII ,finalmente,se obtiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^{k}(X,K_{k}) \longrightarrow H^{k+d-1}(X',K_{k+d-1}) \oplus H^{k+d}(Y,K_{k+d}) \longrightarrow H^{k+d}(Y',K_{k+d}) \longrightarrow$$

donde $X \hookrightarrow Y$ es una inmersión cerrada y regular en codimensión d; Y' es la explosión de Y a lo largo de X;y X' es el producto fibrado de X con Y' sobre Y.Para lograr este resultado se definen los Morfismos de Gysin Refinados,siguiendo nuevamente el desarrollo de W. Fulton,"Intersection Theory."

CAPITULO I - INTRODUCCION

[El] propósito de este capítulo es fijar la terminología y notaciones de geometría algebraica que usaremos en nuestro trabajo, así como también dar demostraciones o referencias de algunas propiedades básicas que utilizaremos. Haremos hincapié en los resultados concernientes a la Teoría de Intersección, basándonos en el desarrollo que se hace en (4) del tema.

En todo lo que sigue supondremos que los esquemas son noetherianos y los cuerpos de base son algebraicamente cerrados.

I.1 - Espacios anillados

Un espacio anillado es un par (X, O_X), donde X es un espacio topológico y O_X es un haz de anillos sobre X, llamado el haz estructural del espacio anillado.

Un morfismo de espacios anillados $f: (X, O_X) \longrightarrow (Y, O_Y)$ es un par (f_1, f_2), donde $f_1: X \longrightarrow Y$ es una función continua y f_2 es una aplicación que asigna a cada abierto V de Y un morfismo de anillos $f_2(V): \Gamma(V, O_Y) \longrightarrow \Gamma(f_1^{-1}(V), O_X)$, compatible con las restricciones. Para cada $x \in X$, f_2 determina entonces un morfismo en las fibras $f_{2,x}: O_{Y,f(x)} \longrightarrow O_{X,x}$.

I.2 - Esquemas afines

Sea A un anillo conmutativo y $X = \mathrm{Spec}(A)$. Sean $f, g \in A$ tales que $D(f) \subset D(g)$, donde $D(f)$ y $D(g)$ son los abiertos de $\mathrm{Spec}(A)$ formados por todos los ideales primos que no contienen a f y a g, respectivamente; entonces $R(f) \supset R(g)$ y, por lo tanto, existen $n > 0$ y $s \in A$ tales que $g^n = s.f$

Definimos entonces un morfismo de anillos $\rho_{g,f}: A_f \longrightarrow A_g$ en la forma $\rho_{g,f}(a/f^m) = a.s^m/g^{nm}$; se verifica que $\rho_{h,g} \circ \rho_{g,f} = \rho_{h,f}$ y que $\rho_{g,f}$ está bien definida.

La asignación $D(f) \longrightarrow A_f$, forma un prehaz sobre la base de abiertos $(D(f))_{f\in A}$ de $Spec(A)$; este prehaz determina un haz sobre X, que notaremos O_X.

PROP. 1.1: ((14) pag.37) (i) La fibre de O_X en un punto $x \in X$ es isomorfa a A_x.

(ii) O_X es un haz sobre X, luego $\Gamma(D(f), O_X) \cong A_{(f)}$; para todo $f \in A$; en particular, $\Gamma(X, O_X) \cong A$.

Not.:

El espacio anillado (X, O_X) se llamará el esquema afín del anillo A.

1.3- Pre-esquemas

Si (X, O_X) es un espacio anillado, un abierto V de X se llamará abierto afín si $(V, O_X|_V)$ es isomorfo al esquema afín de algún anillo A.

DEF: un pre-esquema es un espacio anillado (X, O_X) tal que, para todo $x \in X$, existe un entorno abierto afín V de x. O sea, (X, O_X) es localmente un esquema afín.

Sea (X, O_X) un pre-esquema:

LEMA 1.2: (i) Los abiertos afines forman una base de la topología de X.

(ii) Si U es un abierto en X, el espacio anillado $(U, O_X|_U)$ es un pre-esquema llamado restricción de (X, O_X) a U.

(iii) Todo cerrado irreducible F de X tiene un único punto generico, y la correspondencia entre puntos de X y cerrados irreducibles de X, dada por $x \leadsto \overline{\{x\}}$, es biunívoca.

Sean (X, O_X) e (Y, O_Y) pre-esquemas. Un morfismo de espacios anillados es un morfismo de pre-esquemas si, para todo $x \in X$, θ_x^* es un morfismo local de $O_{Y,\Psi(x)}$ en $O_{X,x}$ (si el morfismo f es el par (Ψ, θ^*)). De ahí, θ_x^* define un morfismo de cuerpos $\theta^x: k(\Psi(x)) \longrightarrow k(x)$, con lo cual $k(x)$ resulta una extensión de $k(\Psi(x))$.

Por otra parte, dados dos esquemas afines $X = \operatorname{Spec}(A)$ e $Y = \operatorname{Spec}(B)$, se tiene $X \times Y = \operatorname{Spec}(A \otimes B)$ que resulta un esquema afín que verifica las propiedades universales de producto en la categoría de esquemas afines. Analogamente, se define el producto de dos pre-esquemas utilizando el hecho de que localmente son esquemas afines.

De la misma forma, dados tres anillos A, B y C tales que existen morfismos $f: C \longrightarrow A$ y $g: C \longrightarrow B$, si $X = \operatorname{Spec}(A)$, $Y = \operatorname{Spec}(B)$ y $Z = \operatorname{Spec}(C)$, se puede definir $X \underset{Z}{\times} Y = \operatorname{Spec}(A \underset{C}{\otimes} B)$ el producto fibrado entre esquemas afines X e Y sobre Z. Esto nos permite definir $X \underset{Z}{\times} Y$; para X, Y y Z pre-esquemas tales que existen $\zeta: X \longrightarrow Z$ y $\gamma: Y \longrightarrow Z$ morfismos de pre-esquemas.

Sea ahora X un pre-esquema, se tiene el morfismo diagonal $\Delta: X \longrightarrow X \times X$; y si Y es otro pre-esquema y $f: X \longrightarrow Y$ un morfismo, también tenemos $\Delta_Y: X \longrightarrow X \underset{Y}{\times} X$.

DEF: Un esquema es un pre-esquema X separado sobre $\mathbb{Z}$; o sea, tal que el morfismo característico $X \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ es separado. (recordemos que un morfismo de pre-esquemas $f: X \longrightarrow Y$ se llama separado si $\Delta_Y(X)$ es cerrado en $X \underset{Y}{\times} X$.

Obs.: Si $X = \operatorname{Spec}(A)$, entonces X resulta un esquema.
De la misma manera, si U, V y Z son esquemas con $f: U \longrightarrow Z$ y $g: V \longrightarrow Z$ morfismos entonces $U \underset{Z}{\times} V$ es un esquema.

DEF: Un morfismo de pre-esquemas $f: X \longrightarrow Y$ es de TIPO FINITO si Y es unión de abiertos afines V_α tales que cada $f^{-1}(V_\alpha)$ es una unión finita de abiertos afines $U_{i\alpha}$ con la propiedad de que cada anillo $A(U_{i\alpha})$ es un álgebra de tipo finito sobre $A(V_\alpha)$.

Obs.: Si X e Y son espacios afines; $X = \operatorname{Spec}(A)$ e $Y = \operatorname{Spec}(B)$, entonces $f: X \longrightarrow Y$ es de tipo finito si y solo si A es un álgebra finitamente generada sobre B.

DEF: Un morfismo $f:X \longrightarrow Y$ es propio si y solo si:

(i) f es separado y de tipo finito.

(ii) f es universalmente cerrado; es decir: para cada morfismo $Y' \longrightarrow Y$, la proyección de $X \times_Y Y'$ en Y' es un morfismo cerrado.

I.4 - Esquemas algebraicos

Un esquema algebraico sobre un cuerpo k es un esquema X con un morfismo de tipo finito de X en Spec(k). Es decir, un esquema X que tiene un cubrimiento finito de abiertos afines cuyos anillos de coordenadas son k-álgebras de tipo finito.

El anillo de coordenadas de un abierto afín U se notará A(U).

De ahora en más "esquema" significará esqueme algebraico sobre algún cuerpo algebraicamente cerrado.

Todo subesquema Y de un esquema X está caracterizado por un haz de ideales J(Y) del haz estructural O_X de X. Para un cubrimiento afín de X, J(Y) corresponde a un ideal en cada anillo de coordenadas de X, (el cociente de éstos resulta el anillo de coordenadas de Y.)

Un subesquema cerrado de un esquema X , llamado Y, está provisto de una inmersión cerrada de Y en X. Además U= X- Y es un subesquema abierto de X .

DEF: Una VARIEDAD es un esquema algebraico reducido e irreducible (íntegro).

Una SUBVARIEDAD de un esquema X es un subesquema cerrado de X, reducido irreducible; una subvariedad de un esquema X, llamada V corresponde a un ideal primo en el anillo de coordenadas de todo abierto afín que interseque a V. el anillo local de X sobre V ($O_{V,X}$) es la localización de tal anillo de coordenadas en el correspondiente ideal primo; su ideal maximal se denota $m_{V,X}$. El cuerpo de funciones racionales de una variedad V se notará R(V). Si V es una subvariedad de X, R(V) es el cuerpo residual $O_{V,X}/m_{V,X}$.

DEF: se llama DIMENSION de un esquema X a la máxima longitud n que puede tener una cadena de subvariedades cerradas de X:

$$\emptyset \neq V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots\cdots\cdots \subsetneq V_n \subseteq V$$

Obs: Si X es una variedad; dim X es el grado de trascendencia de $R(X)$ sobre k.

DEF: Si V es una subvariedad de un esquema X, se define la CODIMENSION de V en X (que se notará codim(V,X)) como la máxima longitud d de una cadena de subvariedades :

$$V = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots\cdots \subsetneq V_d \subset X$$

DEF: Un morfismo $f:X \longrightarrow Y$ de esquemas algebraicos es un morfismo de espacios anillados que es compatible con el morfismo estructural en Spec(k). Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}(k) & \end{tikzcd}$$

Si f aplica un abierto afín U' de X en un abierto afín U de Y, entonces a f le corresponde un morfismo de k-álgebras $f^*:A(U) \longrightarrow A(U')$.

DEF: Un morfismo se dice DOMINANTE si su imagen es densa en el codominio.

Si V es subvariedad de X, existe una única subvariedad W de Y tal que $f|_V:V \longrightarrow W$ es dominante. f induce entonces un morfismo local $f^*:O_{W,Y} \longrightarrow O_{V,X}$ y un morfismo (también notado f^*) entre los cuerpos residuales, que además es inyectivo , y si dimV = dimW entonces $R(V)$ es extensión finita (como cuerpos) de $R(W)$.

Si $f:X \longrightarrow Y$ es un morfismo de esquemas y Z es un subesquema cerrado de Y, el esquema imagen inversa $f^{-1}(Z)$ se identificará con el producto fibrado $X \times_Y Z$ y el ideal que define a $f^{-1}(Z)$ en X ($J(f^{-1}(Z))$) es $f^{-1}(J(Y)).O_X$

Obs: Si f es una inmersión cerrada, $f^{-1}(Z) = Z \cap X$.

DEF: Un esquema X es COMPLETO si el morfismo $f: X \longrightarrow Spec(k)$ es propio.

DEF: Un morfismo $f: X \longrightarrow Y$ es PLAYO si y solo si para todo par de abiertos afines U y U' de Y y X respectivamente, tales que $f(U) \subset U'$, el morfismo inducido $f^*: A(U) \longrightarrow A(U')$ convierte a $A(U')$ en un $A(U)$-módulo playo.

Es decir, para toda subvariedad V de X, si $W = \overline{f(V)}$; $O_{V,X}$ es un $O_{W,Y}$-módulo playo.

DEF: Un morfismo $f: X \longrightarrow Y$ tiene DIMENSION RELATIVA n si para toda subvariedad V de Y y toda componente irreducible V' de $f^{-1}(V)$, se verifica que dim V' = dim V + n.

DEF: Un esquema X se dice LOCALMENTE NOETHERIANO si existe un cubrimiento $(U_i)_{i \in I}$ de X tal que si $U_i = Spec(A_i)$; A_i es anillo noetheriano.

X es un esquema notheriano si es localmente noetheriano y compacto (y por lo tanto cuasicompacto).

Es decir, X es un esquema noetheriano si existe un cubrimiento $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ tal que $U_i = Spec(A_i)$ y A_i es anillo notheriano.

PROP:1.3: Un esquema X es localmente noetheriano si y solo si para todo abierto afín U de X, si $U = Spec(A)$, entonces A es noetheriano.

EJEMPLO 1.4: X el espacio afín $\mathbb{A}^2$, $X = Spec(k[x_1, x_2])$. Veamos que X es un esquema notheriano:

El anillo $k[x_1, x_2]$ es noetheriano , por el teorema de los ceros de Hilbert, lo tanto X es localmente noetheriano.

Veamos que es compacto:

Sea $(U_i)_{i \in I}$ un cubrimiento de X por abiertos. Puede demostrarse que este cubrimiento [illegible] un refinamiento [illegible] abiertos de la forma X_f (donde si $f\in k[x_1, x_2]$, X_f es el conjunto de los elementos $P\in Spec(k[x_1, x_2])$ tales que $f\notin P$). Supongamos entonces $U_i = X_{f_i}$ ($i\in I$). Como $\bigcup_{i\in I} X_{f_i} = Spec(k[x_1, x_2])$ resulta que $1\in\langle f_i\rangle_{i\in I}$, se tiene entonces un subconjunto finito $J\subset I$ que $1=\sum_{i\in I} a_i f_i$ ($a_i\in A$) y por lo tanto los $(X_{f_i})_{i\in J}$ forman el refinamiento finito buscado.

Sea $Y = Z(x_2^2 - x_1^3) \subset \mathbb{A}^2$, $Y \cong Spec(k[x_1, x_2]/(x_2^2 - x_1^3))$

Como Y es un subconjunto cerrado de $\mathbb{A}^2$, Y es compacto. Además Y es localmente noetheriano porque $k[x_1, x_2]/(x_2^2 - x_1^3)$ es noetheriano (por ser cociente de un anillo notheriano).

Además, Y es una variedad no regular.

Recordemos que la separabilidad es el concepto análogo para esquemas al de espacio Hausdorff para espacios topológicos, y que un esquema X se dice SEPARADO si es separado sobre $Spec(\mathbb{Z})$.

<u>Obs:</u> Un morfismo $f:X \longrightarrow Y$ es separado si y solo si la imagen del morfismo diagonal $\Delta: X \longrightarrow X \times_Y X$ es cerrada en $X \times_Y X$.

Volviendo al ejemplo anterior, Y es separado.

En general, dado un esquema $Z = Spec(A)$, Z es separado, porque la aplicación $\Delta: Spec(A) \longrightarrow Spec(A) \times_{\mathbb{Z}} Spec(A) \cong Spec(A \otimes_{\mathbb{Z}} A)$ corresponde a la aplicación de $A\otimes_{\mathbb{Z}} A$ en A dada por $x\otimes y \longmapsto x.y$, que es suryectiva y por lo tanto $Spec(A)$ es homeomorfo a un cerrado de $Spec(A\otimes_{\mathbb{Z}} A)$.

I.5 - <u>Fibrados vectoriales</u>

<u>DEF:</u> Un FIBRADO VECTORIAL E de rango r sobre un esquema X es un par (E, π), donde E es un esquema y $\pi: E \longrightarrow X$ es un morfismo tal que existe $(U_i)_{i\in I}$

cubrimiento abierto de X e isomorfismos $\varphi_i:\pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{A}^r$ tales que $\varphi_i|_{\pi^{-1}(U_i\cap U_j)} \circ (\varphi_j|_{\pi^{-1}(U_i\cap U_j)})^{-1}$ es una transformación lineal, o sea que existe $g_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow Gl_r(k)$ tal que $\varphi_i \cdot \varphi_j^{-1} = g_{ij}$, y además

$g_{ij} \cdot g_{jk} = g_{ik}$, $g_{ij}^{-1} = g_{ji}$, $g_{ii} = id$

DEF: Una sección de E es un morfismo de esquemas $s:X \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ s = id_X$. Además, si $s_i = s/U_i$, s queda determinada por $(s_i)_{i\in I}$, $s_i:U_i \longrightarrow \mathbb{A}^r$ que verifican $s_i = g_{ij}s_j$ en $U_i \cap U_j$ para todo $i,j \in I$

Obs: El haz de secciones de E es un haz $\mathcal{E}$ de O_X-módulos, localmente libre de rango r.

I.6 - Divisores

Sea X un esquema sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k.

DEF: Se dice que Y es un CICLO de codimensión r en X si es un elemento del grupo abeliano libre generado por las subvariedades irreducibles de X de codimensión r, o sea, $Y = \sum n_i Y_i$ con $n_i \in \mathbb{Z}$ e Y_i subvariedad de codimensión r de X.

Si Z es un subesquema cerrado de X; sean $Y_1, \ldots, Y_t$ sus componentes irreducibles; entonces el ciclo asociado a Z es $\sum n_i Y_i$, donde n_i es la longitud del anillo local O_{Z,y_i}, si y_i es el punto genérico de Y_i.
Un ciclo se dice positivo si $n_i \geq 0$, para todo i.

DEF: Se dice que dos ciclos Y y Z se cortan propiamente si para toda componente conexa X_i de $Y \cap Z$,

$$\dim X_i = \dim Y + \dim Z - \dim Y\cap Z .$$

Sea $f:X \longrightarrow X'$ un morfismo de esquemas y sea Y un subesquema cerrado de X; se define $f_*(Y)$ como:

$$f_*(Y) = \begin{cases} 0 \text{ si } \dim f(Y) < \dim (Y) \\ [R(Y) : R(f(Y))] . \overline{f(Y)} \text{ , si } \dim f(Y) = \dim Y \end{cases}$$

donde $[R(Y) : R(f(Y))]$ es el grado de la extensión.

Esta aplicación está bien definida y se extiende por linealidad al grupo de ciclos sobre X.

Sea X un esquema regular en codimensión 1; íntegro, noetheriano y separado, y sea $f \in R(X)^*$, donde $R(X)$ es el cuerpo de funciones racionales sobre X .

DEF: Llamaremos DIVISOR de f a $(f) = \sum v_Y(f).Y$, donde la suma se toma sobre todos los esquemas cerrados íntegros de X de codimensión 1, y $v_Y(f)$ es la valuación de f en Y.

DEF: Dos ciclos D y D' se dicen LINEALMENTE EQUIVALENTES si $D - D' = (f)$, para alguna $f \in R(X)^*$.

Dos ciclos D_0 y D_1 se dicen RACIONALMENTE EQUIVALENTES si existe un ciclo C en el esquema producto X x k tal que corta a $X \times \{0\}$ y $X \times \{1\}$ propiamente y $C \cap (X \times \{0\}) = D_0 \times \{0\}$; $C \cap (X \times \{1\}) = D_1 \times \{1\}$.

Obs: En el caso en que D_0 y D_1 sean dos ciclos de codimensión 1, ambas definiciones coinciden.

Para cada $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, sea $A^r(X)$ el grupo de ciclos de codimensión r en X, módulo equivalencia racional, y sea $A(X) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A^i(X)$.

A(X) resulta un grupo graduado y f_* está definida como una aplicación de A(X) en A(X') (si $f: X \longrightarrow X'$)

Sea X un esquema. Para cada abierto afín U = Spec(A), sea S el conjunto de elementos de A que no son divisores de 0 y sea $K(U)$ la localización de A por el sistema multiplicativo S.

Llamamos a $K(U)$ el anillo total cociente de U.

Entonces $(K(U))_U$ (donde U recorre el conjunto de los abiertos afines de X), es un prehaz cuyo haz de anillos asociado $\mathcal{K}$ reemplaza el concepto de cuerpo de funciones de un esquema íntegro. Notamos $\mathcal{K}^*$ el haz de elementos inversibles en el haz $\mathcal{K}$, y $\mathcal{O}^*$ el haz de elementos inversibles de $\mathcal{O}$.

<u>DEF:</u> Un DIVISOR DE CARTIER en un esquema X es una sección global del haz $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$.

Usando las propiedades de los cocientes de haces se ve que un divisor de Cartier en X puede ser descripto dando un cubrimiento abierto $(U_i)_{i\in I}$ de X, y para cada $i\in I$, un elemento $f_i \in \Gamma(U_i,\mathcal{K}^*)$ tales que para cada $i,j \in I$, $f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j,\mathcal{O}^*)$.

Un divisor de Cartier es PRINCIPAL si está en la imagen de la aplicación natural $\Gamma(X, \mathcal{K}^*) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$.

<u>Obs:</u> Sea X una variedad, $\mathcal{K}$ el haz constante $R(X)$. Sea $r\in R(X)^*$. El divisor principal asociado a f es, como antes, $(f) = \sum v_Y(f).Y$, donde Y recorre las subvariedades de X de codimensión 1.

La suma es finita porque el soporte de f es un cerrado propio de X y por lo tanto existen solamente finitas subvariedades de X de codimensión 1 tales que $f \notin \mathcal{O}^*_{V,X}$.

<u>DEF:</u> Dado un divisor de Cartier D sobre un esquema X, representado por $(U_i, f_i)_{i\in I}$; definimos un subhaz $\mathcal{L}(D)$ asociado a D del haz de anillos cocientes totales $\mathcal{K}$, tomando $\mathcal{L}(D)$ como el $\mathcal{O}_X$- submódulo de $\mathcal{K}$ generado por f_i^{-1} en U_i.

<u>Obs:</u> $\mathcal{L}(D)$ está bien definido pues f_i/f_j es inversible en $U_i \cap U_j$, por lo tanto f_i^{-1} y f_j^{-1} generan el mismo módulo sobre $\mathcal{O}_X$.

DEF: Un divisor de Cartier es EFECTIVO si las ecuaciones locales f_i son secciones de O sobre U_i; en este caso hay una sección canónica de $O(D)$ que será notada s_D; $s_D|_{U_i} = f_i$.

DEF: Un haz de módulos $\mathcal{F}$ sobre un esquema X se dice LOCALMENTE LIBRE si existe un cubrimiento $(U_i)_{i\in I}$ de X tal que $\mathcal{F}(U_i) = O_{U_i,X}^{r_i}$, para algún $r_i \in \mathbb{N}$ y para todo $i \in I$.

Obs: Si X es conexo, entonces $r_i = r$, para todo $i\in I$, decimos entonces que rango $\mathcal{F} = r$.

DEF: $\mathcal{F}$ es un haz INVERSIBLE si es localmente libre de rango 1.

DEF: El grupo de Picard de X, $\mathrm{Pic}(X)$, es el grupo de clases de isomorfismo de haces inversibles sobre X, con la operación $\otimes$.

I.7 - Conos proyectivos y fibrados

Sea $S^\cdot$ un álgebra graduada. Notaremos $S_+ = \bigoplus_{d>0} S^d$. Se define el conjunto $\mathrm{Proj}\ S^\cdot = \{P \text{ ideal primo homogéneo } / P \not\supset S_+\}$.

Si $\mathfrak{a}$ es ideal homogéneo de $S^\cdot$ definimos el subconjunto $V(\mathfrak{a}) = \{P \in \mathrm{Proj}\ S^\cdot / \mathfrak{a} \subset P\}$.

Puede probarse que $\mathrm{Proj}\ S^\cdot$ es un espacio topológico, considerando como cerrados los subconjuntos de la forma $V(\mathfrak{a})$.

Para cada $P \in \mathrm{Proj}\ S^\cdot$, consideremos el anillo $S_{(P)}$ de elementos de grado cero del anillo localizado $T^{-1}S$, donde T es el conjunto de elementos homogéneos que no pertenecen a P.

Dado un abierto $U \subset \mathrm{Proj}\ S^\cdot$, definimos $O(U)$ como el conjunto de funciones $s: U \longrightarrow \coprod_{P\in U} S_{(P)}$ tal que para cada $P \in U$, $s(P) \in S_{(P)}$, y tal que s es localmente un cociente de elementos de S, es decir para cada $P \in U$ existe un entorno V de $P \subset U$ y elementos homogéneos a y f en S de igual grado tales que para todo $Q \in V$, $f \notin Q$ y $s(Q) = a/f \in S_{(Q)}$.

$\mathcal{O}$ resulta un prehaz de anillos y es claro por su definición que es un haz.

DEF: Si $S^{\bullet}$ es un álgebra graduada definimos $(\mathrm{Proj}\ S^{\bullet}, \mathcal{O})$ como el espacio topológico con el haz de anillos así construido.

PROP 1.4: Sea S un álgebra graduada.

(a) Para todo $P \in \mathrm{Proj}\ S$, la fibra $\mathcal{O}_P$ es isomorfa a $S_{(P)}$.

(b) Para todo $f \in S_+$, tal que f es homogéneo, sea $D_+(f) = \{P \in \mathrm{Proj}\ S \ / \ f \notin P\}$ entonces $D_+(f)$ es abierto en Proj S. Más aún, estos abiertos cubren Proj S y para cada uno de ellos se tiene un isomorfismo de espacios localmente anillados dado por $(D_+(f), \mathcal{O}_{D_+(f)}) \cong (\mathrm{Spec}(S_f))$.

(c) $(\mathrm{Proj}\ S, \mathcal{O})$ es un esquema.

Dem: Ver (4), Pág. 76.

Ej: Sea A un anillo, $P^n(A) = \mathrm{Proj}\ A[x_0, \dots, x_n]$

Obs: Sea A un anillo y M un A-módulo. Sea $T^n(M)$ el producto tensorial $M \otimes \dots \otimes M$ (n veces), si $T^0(M) = A$, entonces $T(M) = \bigoplus_{m \geq 0} T^n(M)$ es una A-álgebra no conmutativa.

DEF: Se define el álgebra simétrica $S(M) = \bigoplus_{m \geq 0} S^n(M)$, como el cociente de $T(M)$ por el ideal bilátero generado por las expresiones $x \otimes y - y \otimes x$, para todo $x, y \in M$. $S(M)$ resulta una A-álgebra conmutativa.

Sea ahora X un esquema noetheriano, $\mathcal{J}$ un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos cuasicoherentes, que es $\mathcal{O}_X$-álgebra graduada generada localmente por $\mathcal{J}_1$ como $\mathcal{O}_X$-álgebra y tal que $\mathcal{J}_0 = \mathcal{O}_X$.

Dado U abierto afín de X, $U = \mathrm{Spec}(A)$, sea $S(U)$ el $\mathcal{O}_X$-álgebra graduada $\Gamma(U, \mathcal{J}|_U)$. Consideramos entonces $\mathrm{Proj}\ S(U)$ y $\pi_U: \mathrm{Proj}\ S(U) \longrightarrow U$. Si $f \in A$, $U_f = \mathrm{Spec}(A_f)$, resulta que $\mathrm{Proj}\ S(U_f) = \pi_U^{-1}(U_f)$.

Si U y V son dos abiertos afines de X resulta que $\pi_U^{-1}(U \cap V) = \pi_V^{-1}(U \cap V)$.

Se obtiene entonces un esquema (Proj S) con una proyección π de Proj S en X tal que para todo U abierto afín de X, $\pi^{-1}(U) = \text{Proj } S(U)$.

Además, los haces inversibles $O(1)$ son compatibles con esta construcción, donde $O(1)$ es el haz asociado al álgebra graduada $S(1)$.

Sea X esquema noetheriano, $\mathcal{E}$ un haz coherente localmente libre sobre X.
Se define el FIBRADO PROYECTIVO ASOCIADO $P(\mathcal{E})$ en la forma:
Sea $Sim(\mathcal{E})$ el álgebra simétrica de $\mathcal{E}$, entonces $P(\mathcal{E}) = \text{Proj}(Sim\,\mathcal{E})$.
Entonces, $P(\mathcal{E})$ tiene un morfismo proyección π en X, y un haz inversible $O_{\mathcal{E}}(1)$.

<u>Obs</u>: Si $\mathcal{E}$ es libre de rango n+1 sobre un abierto U, entonces $\pi^{-1}(U) = \mathbb{P}^n_U$.

EXPLOSION DE UNA CURVA EN UN PUNTO

<u>1º PASO</u>: Construcción de la explosión de $\mathbb{A}^n$ sobre $(0,\ldots,0)$.

Consideremos la variedad producto $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$.

Sean $x_1,\ldots,x_n$ las coordenadas afines de $\mathbb{A}^n$ e $y_1,\ldots,y_n$ las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^{n-1}$.

Entonces todo cerrado de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ viene dado por un conjunto de polinomios en $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$, homogéneos en los y_i.

<u>DEF</u>: La explosión de $\mathbb{A}^n$ en $0 = (0,\ldots,0)$ es el subconjunto cerrado X de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ definido por las ecuaciones $\{ x_i y_j = x_j . y_i \ ; \ i,j=1,\ldots,n \}$

Se tiene entonces $\phi : X \longrightarrow \mathbb{A}^n$, que es la restricción de la proyección $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{A}^n$.

<u>Obs</u>: (i) Sea $P \in \mathbb{A}^n$, $P \neq 0$. Entonces $\phi^{-1}(P)$ es un solo punto y ϕ da un isomorfismo entre $\mathbb{A}^n - \{0\}$ y $X - \{\phi^{-1}(0)\}$

(ii) $\phi^{-1}(0) = \{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \in A^n \times P^{n-1}$ tal que $x_i=0$, $1\leq i\leq n\}=$
$= \{(0,\dots,0,y_1,\dots,y_n) \in A^n \times P^{n-1}\} \cong P^{n-1}$

(iii) Sea L una recta en A^n que pasa por $(0,\dots,0)$, y sea

$L^1 = \phi^{-1}(L-\{0\}) \leq X - \phi^{-1}(0)$

Si $L = \{(x_1,\dots,x_n) \,/\, x_i = a_i.t \quad i=1,\dots,n \;;\; \exists j / a_j \neq 0 \;,\; t \in A^1\}$ entonces

$L^1 = \{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \,/\, x_i = a_i.t \;;\; y_i = a_i.t \;,\; t \in A^1 - \{0\}\}$

$= \{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \,/\, x_i = a_i.t \;;\; y_i = a_i\} = (L-\{0\}) \times (a_1,\dots,a_n)$

$\overline{L^1} = L \times (a_1,\dots,a_n)$

$\overline{L^1} \cap \phi^{-1}(0) = (a_1,\dots,a_n) \in P^{n-1}$

$\therefore$ se tiene una correspondencia biunívoca entre rectas que pasan por 0 en A^n y puntos de $\phi^{-1}(0)$.

(iv) X es irreducible. Porque:

Si $X = (X-\phi^{-1}(0)) \cup \phi^{-1}(0) \cong A^n - \{0\}) \cup \phi^{-1}(0)$, $(A^n - \{0\})$ irreducible.
Pero todo punto de $\phi^{-1}(0)$ está en la clausura de la imagen de alguna recta L que pasa por 0. Por lo tanto todo punto está en la clausura de algún subconjunto de $X - \phi^{-1}(0)$.

Luego, como $X - \phi^{-1}(0)$ es denso en X, X resulta irreducible.

DEF: Si Y es subvariedad cerrada de A^n tal que $0 \in Y$, se define la explosión de Y en 0 como $\tilde{Y} = \overline{(\phi^{-1}(Y-0))}$, donde $\phi : X \longrightarrow A^n$ es la explosión de A^n en 0.
Se notará también $\phi : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ al morfismo obtenido restringiendo $\phi : X \longrightarrow A^n$ a $\tilde{Y}$.

Obs: (i) Para hacer la explosión de Y en un punto $P \in A^n$, se hace un cambio de coordenadas lineal, llevando el origen a P.

(ii) ϕ induce un isomorfismo entre $\tilde{Y} - \phi^{-1}(0)$ e $Y - \{0\}$

(iii) A pesar de la definición de la explosión de ésta no depende de la inmersión de Y en $\mathbb{A}^n$.

Ej (4; Pág 29): Sea Y la cúbica dada por la ecuación $y^2 = x^2(x+1)$

Entonces: $0 \in Y \subseteq \mathbb{A}^2$

Al calcular la explosión de Y en 0 (punto singular de la curva) se obtiene un subconjunto cerrado de $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$.

Sean t, u las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^1$

Sea X la explosión de $\mathbb{A}^2$ en 0, $X = \{(x,y,t,u) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 / xu = yt\}$

$\phi^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^1$, llamamos a $\phi^{-1}(0)$ la curva excepcional (notada E)

$\phi^{-1}(Y) = \{(x,y,t,u) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \;/\; xu = yt \;;\; y^2 = x^2(x+1)\}$

Se tiene un cubrimiento de $\mathbb{P}^1$ dado por $U_1 = \{(t,u) \;/\; t \neq 0\}$ y $U_2 = \{(t,u) \;/\; u \neq 0\}$

En U_1 podemos suponer $t=1$ y usar u como parámetro afín. Se tienen entonces las ecuaciones $\begin{cases} y^2 = x^2(x+1) \\ y = xu \end{cases}$ en $\mathbb{A}^3$ (con coordenadas x, y, u).

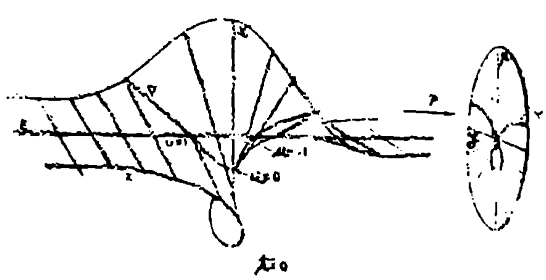
Sustituyendo se obtiene la ecuación $x^2u^2 - x^2(x+1) = 0$ que se factoriza como

$x^2(u^2 - (x+1)) = 0$.

Obtenemos así dos componentes irreducibles; la primera definida por ($x=0$; $y=0$; u cualquiera), que es E; mientras que la segunda está definida por ($x+1 = u^2$; $y = xu$), que es $\tilde{Y}$.

$\tilde{Y} \cap E = \{(x,y,u) \;/\; u = \pm 1 \;;\; x = y = 0\}$, valores que corresponden a las dos pendientes de las tangentes a la curva en 0.

Considerando el abierto U_2 en $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ se procede en forma análoga.



Obs: El efecto de la explosión es separar las ramas de la curva que pasa por 0, de acuerdo a sus pendientes.

Definiremos ahora una noción más general de la explosión. Esta es la de la explosión de un esquema noetheriano con respecto a un subesquema cerrado.

Como todo subesquema cerrado corresponde a un haz de ideales, hablaremos también de la explosión de un haz de ideales.

En el caso en que Y es una variedad y el subesquema cerrado es un punto de la variedad, ambas nociones coinciden.

Sea X un subesquema cerrado de Y, definido por un ideal $\mathcal{J}$.

DEF: El CONO NORMAL $C_X Y$ a X en Y es el cono sobre X definido por el haz graduado de O_X-álgebras $\bigoplus_{m\geq 0} \mathcal{J}^m/\mathcal{J}^{m+1}$; es decir $C_X Y = \operatorname{Spec}\left(\bigoplus_{m\geq 0} \mathcal{J}^m/\mathcal{J}^{m+1}\right)$.

Obs: Sea $f:Y' \longrightarrow Y$ un morfismo de esquemas, sea $X' = f^{-1}(X)$ y $g = f|X'$; entonces existe una inmersión canónica:

$$C_{X'}Y' \subseteq g^* C_X Y = C_X Y \times_X X'$$

Además, la aplicación de $f^*\mathcal{J}$ en el haz de ideales de X' en Y' es suryectiva por lo tanto se tiene una suryacción de $\bigoplus_{m\geq 0} g^*(\mathcal{J}^m/\mathcal{J}^{m+1})$ en $\bigoplus_{m\geq 0} \mathcal{J}'^m/\mathcal{J}'^{m+1}$

DEF: Una sucesión de elementos $a_1,\dots,a_d$ de un anillo A es una sucesión REGULAR si el ideal I generado por $a_1,\dots,a_d$ es un ideal propio de A, y la imagen de a_i en $A/(a_1,\dots,a_{i-1})$ no es divisor de cero $(1 \leq i \leq d)$

Obs: Existe un epimorfismo canónico de anillos graduados

$$\alpha : (A/I)\left[x_1,\dots,x_d\right] \longrightarrow \bigoplus_{m\geq 0} I^n/I^{n+1}$$

dado por $\qquad x_i \longmapsto \overline{a_i} \in I/I^2$

DEF: Una inmersión cerrada de esquemas $i:X \longrightarrow Y$ es REGULAR de CODIMENSION d si todo punto de X tiene un entorno abierto afín U en Y tal que si es el ideal que defi $O_{X,U}$ en $O_{Y,U}$, entonces $\mathcal{J}$ es generado por una sucesión regular de longitud d.

Obs: Si $\mathcal{J}$ es el ideal de X en Y, el haz $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ es un haz localmente libre, de rango d sobre X.

Sea ahora $i: X \longrightarrow Y$ inmersión cerrada regular de codimensión d, entonces $C_X Y$ es un fibrado vectorial de rango d sobre X, notado también $N_X Y$, tal que su haz de secciones es $(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^{\vee}$.

DEF: La explosión de Y a lo largo de X, notado $Bl_X Y$ es el cono proyectivo sobre Y del haz de O_Y-álgebras $\bigoplus_{m\geq 0} \mathcal{J}^m$

$$\tilde{Y} = Bl_X Y = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{m\geq 0} \mathcal{J}^m\right)$$

Sea $\pi: \tilde{Y} \longrightarrow Y$ la proyección.

$\tilde{Y}$ tiene un haz inversible canónico $O_{\oplus \mathcal{J}^n}(1)$, que es exactamente $\pi^{-1}(X)$. Sea $E = \pi^{-1}(X)$, por construcción:

$$E = \mathrm{Proj}\left(\left(\bigoplus_{m\geq 0} \mathcal{J}^m\right) \otimes_{O_Y} O_X\right) = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{m\geq 0} \left(\mathcal{J}^m \otimes_{O_Y} O_X\right)\right) = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{m\geq 0} \mathcal{J}^m/\mathcal{J}^{m+1}\right) = P(C_X Y)$$

$$\text{Entonces } C_E\tilde{Y} = O_{\tilde{Y}}(E)\Big|_E = O_C(-1) \qquad (C = C_X Y)$$

Sea η la proyección de $E = P(C_X Y)$ en X.

La inmersión canónica $N_E\tilde{Y} \hookrightarrow \eta^* N_X Y$ es la inmersión del fibrado lineal $O_N(-1)$ en $\eta^* N_X Y$.

Obs: Si la inmersión es regular, $C_X Y$ es un fibrado de rango d sobre X y por lo tanto $E = \pi^{-1}(X)$ es un fibrado de rango d-1 sobre X.

Supongamos que n = dim Y, entonces dim $\tilde{Y}$ = n también. Porque si $(t_1, \ldots, t_d)$ es la sucesión regular que define a X en Y, $T_1, \ldots, T_d$ las coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^{d-1}$ entonces $\tilde{Y}$ es el subesquema de $Y \times \mathbb{P}^{d-1}$ definido por las ecuaciones

$$\left\{ t_i T_j - t_j T_i = 0;\ 1 \leq i < j \leq n \right\}$$

Ejemplo 1

Si $Y=\mathbb{A}^n_k$, $X=\{(0,\dots,0)\}$, veamos que la explosión definida de esta forma, coincide con la definida antes:

En este caso $Y=\operatorname{Spec} k[X_1,\dots,X_n]$, donde $k[X_1,\dots,X_n]$ es A, y X corresponde al ideal $I=(X_1,\dots,X_n)$.

Entonces $\tilde{Y}=\operatorname{Proj}(\bigoplus_{d\geq 0} I^d)$

Definimos una aplicación suryectiva de anillos graduados

$$\phi : A[y_1,\dots,y_n] \longrightarrow \bigoplus_{d\geq 0} I^d$$
$$y_i \longmapsto x_i \in I^1$$

Entonces $\tilde{Y}$ resulta isomorfo a un subesquema cerrado de $\operatorname{Proj} A[y_1,\dots,y_n]=\mathbb{P}^{n-1}_A$; definido por los polinomios homogéneos en y_i que generan el núcleo de ϕ que son aquéllos de la forma $\{x_iy_j - y_ix_j / i,j=1,\dots,n\ .\}$

Ejemplo 2

Sean $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y \overset{j}{\hookrightarrow} Z$ inmersiones regulares

Sean $\tilde{Z}=Bl_XZ$, $F=\rho^{-1}(X)$ (donde $\rho:\tilde{Z}\longrightarrow Z$ es la proyección),
$\tilde{Y}=Bl_XY$

Veamos que $\tilde{Y}\subset\rho^{-1}(Y)$; $F\subset\rho^{-1}(Y)$ y se verifica que

$$\mathcal{J}(\tilde{Y}).\mathcal{J}(F)=\mathcal{J}(\rho^{-1}(Y))$$

y además, la inmersión de Y en Z es regular y tal que

$$N_{\tilde{Y}}\tilde{Z}\cong\pi^{*}N_YZ\otimes O(-E)$$

donde $\pi:\tilde{Y}\longrightarrow Y$ es la proyección y $E=\pi^{-1}(X)$.

Para demostrar esta afirmación, podemos suponer que Z es un esquema afín, con anillo de coordenadas A.

Como $Y\hookrightarrow Z$ es regular, existe $(t_1,\dots,t_d)$ sucesión regular en A que define a Y, y $(t_1,\dots,t_d,\dots,t_n)$ sucesión regular en A que define a X.

Sean $T_1,\dots,T_n$ las coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^{n-1}$.

Entonces Z es el subesquema de $Z\times\mathbb{P}^{n-1}$ definido por las ecuaciones

$\{t_iT_j - t_jT_i=0 \ ; \ 1\leq i<j\leq n\}$

y $\tilde{Y}$ es el subesquema de $Y\times\mathbb{P}^{d-1}$ definido por las ecuaciones

$\{\bar{t}_iT_j - \bar{t}_jT_i=0 \ ; \ d+1\leq i<j\leq n\}$

donde $\bar{t}_i$ es la imagen de t_i en $A/(t_1,\dots,t_d)$.

Sea U_k el abierto afín de Z definido por $\{T_k\neq 0\}$, que tiene como anillo de coordenadas:

$$A[x_1,\dots,\hat{x}_k,\dots,x_n]/(\{t_i - t_kx_i \ / \ i\neq k\})$$

Entonces:

$\rho^{-1}(Y)$ está definido en U_k por el ideal I_k generado por $(t_1,\dots,t_d)$

Si $k\leq d$, $I_k=(t_k)$, que es el ideal de F en $\tilde{Z}$.

Si $k>d$, $I_k=(t_kx_1,\dots,t_kx_d)=t_k(x_1,\dots,x_d)$

Como t_k define F en U_k, y $(x_1,\dots,x_d)$ define $\tilde{Y}$ en U_k, resulta que

$$\mathcal{J}(\tilde{Y})\cdot\mathcal{J}(F) \quad \mathcal{J}(\rho^{-1}Y) \quad \text{en } U_k$$

Además $(x_1,\dots,x_d)$ es sucesión regular en el anillo de U_k, si $k>d$; por lo tanto la inmersión de $\tilde{Y}$ en $\tilde{Z}$ es regular.

<u>Obs</u>: (i) Supongamos que $i:X\longrightarrow Y$; $j:Y\longrightarrow Z$ son inmersiones regulares. Entonces $j\circ i$ es inmersión regular y se tiene la siguiente sucesión exacta de fibrados vectoriales:

$$0\longrightarrow N_XY\longrightarrow N_XZ\longrightarrow i^*N_YZ\longrightarrow 0$$

(ii) Supongamos que $i:X\longrightarrow Y$ es inmersión regular y $f:Y'\longrightarrow Y$ es playo, entonces la inmersión de $X'=f^{-1}(X)$ en Y' es regular, y

$N_{X'}Y' = g^{*}N_{X}Y$, donde $g=f/X'$

DEF: Un morfismo $f:X \longrightarrow Y$ se llama un morfismo de INTERSECCION LOCALMENTE COMPLETA (i.l.c.) de codimensión d si f admite una factorización en una inmersión cerrada regular de codimensión e (para algún e), seguida por un morfismo suave de dimensión relativa d+e.

Obs: Si X admite una inmersión cerrada j en un esquema M suave sobre Spec(K), entonces todo morfismo $f:X \longrightarrow Y$ admite una factorización:

$X \xrightarrow{i} Y\times M \xrightarrow{p} Y$, donde $i=(f,j)$ y p es la proyección, que es una factorización como la pedida en la definición anterior.

I.8 - Teoría de intersección

Sea X un esquema algebraico. Una teoría de intersección en X consiste en dar una aplicación de $A^{r}(X) \times A^{s}(X)$ en $A^{r+s}(X)$; para todos $r,s\in \mathbb{N}_0$; que satisface los siguientes axiomas:

Ax.1: Esta aplicación convierte a $A(X)$ en un anillo graduado, conmutativo y con identidad, llamado anillo de Chow de X; donde $A(X) = \bigoplus_{n\geq 0} A^{n}(X)$.

Not: Si $Y\in A^{r}(X)$ y $Z\in A^{s}(X)$, notaremos la intersección de Y y Z como Y.Z , que pertenece a $A^{r+s}(X)$.

Ax.2: Sea $f:X \longrightarrow X'$ un morfismo de esquemas. Definimos un morfismo $f^{*}:A(X') \longrightarrow A(X)$ como $f^{*}(Y') = p_{1_*}(\Gamma_f . p_2^{-1}(Y'))$, donde Y' es un subesquema de X'; p_1 y p_2 son las proyecciones de $X \times X'$ en X y X' respectivamente y $\Gamma_f \subseteq X \times X'$ es el gráfico de f. Entonces f^{*} resulta un morfismo de anillos y además, si $g: X' \longrightarrow X''$ es otro morfismo, $f^*_o g^* = (g_o f)^*$

Ax.3: Para todo morfismo propio $f : X \longrightarrow X'$, f_* es un morfismo de grupos graduados; y si $g: X' \longrightarrow X''$ es otro morfismo, entonces $g_* o f_* = (g_o f)_*$

Ax.4: Si $f : X \longrightarrow X'$ es un morfismo propio, entonces, para todo $x \in A(X), y \in A(X')$

$$f_*(x.\ f^*(y)) = f_*(x).\ y$$

Ax.5: Si Y, Z son ciclos en X y $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ es la diagonal, entonces:

$$Y.\ Z = \Delta^*(Y \times Z)$$

Ax.6: Si Y, Z son subvariedades de X en posición general, entonces :

$$Y.\ Z = \sum i(Y,Z;\ W_j).\ W_j$$

donde W_j recorre las componentes irreducibles de Y. Z

Ax.7: Si Y es una subvariedad de X y Z es un divisor de Cartier positivo que corta a Y propiamente, entonces Y.Z es el ciclo asociado al divisor de Cartier $Y \cap Z$ de Y, que se define restringiendo la ecuación local de Z a Y.

TEOREMA: ((4), pág.427)

Existe una única teoría de intersección para variedades no singulares sobre un cuerpo K que satisface Ax.1—Ax.7.

Si X es un esquema regular, el anillo de Chow verifica también las siguientes propiedades:

Ax.8: Como los ciclos de codimensión 1 son exactamente los divisores sobre X y la equivalencia racional coincide con la equivalencia lineal, resulta que $A^1(X) \cong \mathrm{Pic}\ (X)$.

Ax.9: Consideremos el espacio afín A^m y sea $p: X \times A^m \longrightarrow X$ la proyección;

entonces, $p^*: A(X) \longrightarrow A(X \times \mathbb{A}^m)$ es un isomorfismo.

Ax.10: Si Y es un subesquema cerrado regular de X y $U = X - Y$, la sucesión:

$$A(Y) \xrightarrow{i} A(X) \xrightarrow{j} A(U) \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $i: Y \longrightarrow X$ es la inclusión y $j: U \longrightarrow X$ es la inclusión de U en X.

Ax.11: Sea $\mathcal{E}$ un haz localmente libre de rango r sobre X y sea $P(\mathcal{E})$ el fibrado proyectivo asociado. Sea $\xi \in A^1(P(\mathcal{E}))$, la clase del divisor correspondiente a $O_{P(\mathcal{E})}(1)$ (ver (7)); sea $\pi: P(\mathcal{E}) \longrightarrow X$ la proyección. Entonces, π^* transforma a $A(P(\mathcal{E}))$ en un $A(X)$-módulo libre generado por $1, \xi, \xi^2, \ldots\ldots, \xi^{r-1}$.

I.9 - Clases de Chern

DEF: Sea $\mathcal{E}$ un haz localmente libre de rango r sobre X; la i-ésima clase de Chern de $\mathcal{E}$, $c_i(\mathcal{E}) \in A^i(X)$, $(0 \leq i \leq r)$ queda definida por las siguientes condiciones:

(i) $c_0(\mathcal{E}) = 1$

(ii) $\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \pi^*(c_i(\mathcal{E})).\xi^{r-i} = 0$ en $A^r(P(\mathcal{E}))$.

DEF: La CLASE TOTAL DE CHERN $c(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$ es:

$c(\mathcal{E}) = c_0(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{E}) + \ldots + c_r(\mathcal{E})$,

y el POLINOMIO DE CHERN $c_t(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$ es:

$c_t(\mathcal{E}) = c_0(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{E}).t + \ldots + c_r(\mathcal{E}).t^r$

Las clases de Chern verifican las siguientes propiedades: (ver (4), pág.429)

C1: Si $\mathcal{E} = \mathcal{L}(D)$, haz localmente libre asociado a un divisor D, entonces:

$$c_t(\mathcal{E}) = 1 + D.t$$

C2: Si $f: X' \longrightarrow X$ es un morfismo y $\mathcal{E}$ es un haz localmente libre sobre X, entonces $c_i(f^*(\mathcal{E})) = f^*(c_i(\mathcal{E}))$, para todo i, $0 \leq i \leq r$.

C3: Si se tiene la sucesión exacta de haces localmente libres sobre X:

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow 0$$

entonces , $c_t(\mathcal{E}) = c_t(\mathcal{E}') . c_t(\mathcal{E}'')$. En particular; para todo k, $0 \leq k \leq r$:

$$c_k(\mathcal{E}) = \sum_{i=0}^{r} c_i(\mathcal{E}').c_{k-i}(\mathcal{E}'')$$

C4: Si $\mathcal{E}$ tiene una filtración cuyos cocientes son los haces inversibles $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_r$, resulta que :

$$c_t(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{r} c_t(\mathcal{L}_i)$$

II - TEORIA K ALGEBRAICA

Desarrollaremos ahora las principales nociones de la teoría K algebraica de Karoubi- Villamayor, basándonos en (2) y (3).

Existen distintas construcciones de teorías K, realizadas por Quillen, Volodin, Swan y Karoubi- Villamayor; una comparación entre ellas puede encontrarse en (10) y (11).

II.1 - Los grupos K_n de categorías en grupos de Banach

DEF: Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva tal que para todos $M,N \in Obj(\mathcal{C})$, $Hom_{\mathcal{C}}(M,N)$ es un grupo de Banach, cuya estructura es compatible con la estructura de grupo abeliano. $\mathcal{C}$ se llama una CATEGORIA EN GRUPOS DE BANACH si para todos $M,N,P \in Obj(\mathcal{C})$ existe una constante c tal que $\|g\circ f\| \leq c\|g\|.\|f\|$, para toda $g \in Hom_{\mathcal{C}}(N,P)$ y $f \in Hom_{\mathcal{C}}(M,N)$.

DEF: Sean A y B dos anillos de Banach y sean f_0 y f_1 dos morfismos acotados de A en B; entonces f_0 y f_1 se llaman HOMOTOPICOS si existe $f: A \longrightarrow B\langle x\rangle$ tal que $f_0 = p_0\circ f$ y $f_1 = p_1\circ f$; donde $B\langle x\rangle$ es el conjunto de expresiones de la forma

y $p_i: B\langle x\rangle \longrightarrow B$ es la evaluación en i $(i=0,1)$.

DEF: El anillo A se dice CONTRACTIBLE si el morfismo nulo de A es homotópico al morfismo identidad de A.

Notaremos EA al núcleo de la aplicación $A\langle x\rangle \xrightarrow{ev_0} A$

Notaremos ΩA al núcleo de la aplicación $A\langle x\rangle \xrightarrow{ev_1} A$

Dada una categoría en grupos de Banach $\mathcal{C}$, puede asociársele la categoría $\mathcal{C}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$, cuyos objetos son los objetos de $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos $f: E \longrightarrow F$ son expresiones formales $\sum_{i_1\cdots i_n} a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$, con $a_{i_1\dots i_n}$ pertenecientes a $Hom_{\mathcal{C}}(E,F)$ y tales que $\sum_{i_1\cdots i_n} \| a_{i_1\dots i_n} \| < \infty$

Sea $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ funtor de categorías en grupos de Banach, se obtiene un funtor $\mathcal{C}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \longrightarrow \mathcal{C}'\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ al que también llamaremos ϕ .

Consideramos ahora los pares (E, α); donde $E \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ y $\alpha(x_1,\ldots,x_n) = id_E$ si algún x_i es 0 ó 1 y $\phi(\alpha) = 1$.

DEF: Dos automorfismos α_0 y α_1 son homotópicos si existe un automorfismo $\alpha = \alpha(x_1,\ldots,x_n,t)$ en $\mathcal{C}\langle x_1,\ldots,x_n,t\rangle$ tal que

(i) $\alpha(x_1,\ldots,x_n,t) = id$ si alguna $x_i = 0,1$

(ii) $\alpha(x_1,\ldots,x_n,0) = \alpha_0$

(iii) $\alpha(x_1,\ldots,x_n,1) = \alpha_1$

(iv) $\phi(\alpha) = 1$

DEF: Dos pares (E,α) y (E',α') son EQUIVALENTES si existe un par (G, id_G) tal que $\alpha \oplus id_{E'} \oplus id_G$ es homotópica a $id_E \oplus \alpha' \oplus id_G$

LEMA: Dados los pares (E,α) y (E,α') resulta que los pares $(E,\alpha\circ\alpha')$; $(E,\alpha'\circ\alpha)$ y $(E\oplus E, \alpha\oplus\alpha')$ son equivalentes.
(Dem: ver (3) Pág 292)

DEF: Sea $\phi : A \longrightarrow B$ morfismo de anillos de Banach, entonces ϕ es una FIBRACION DE SERRE si para todo $\beta \in Gl(B\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tal que $\beta(0,\ldots,0) = Id$, existe $\alpha \in Gl(A\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tal que $\phi(\alpha) = \beta$

DEF: Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}''$ dos categorías en grupos de Banach. Entonces ϕ es FUNTOR DE SERRE si para todo $E \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$, el morfismo de anillos de Banach, $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(E) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{C}''}(\phi E)$ es fibración de Serre.

DEF: Sea $\phi\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ un funtor de Serre, entre dos categorías en grupos de Banach, suryectivo. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Se define $K_{n+1}(\phi)$ como el conjunto de clases de equivalencia de pares (E,α), donde

$E \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C},\ \alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}\langle x_1,\dots,x_n\rangle}(E)$

Si $\mathcal{C}''$ C, $K_{n+1}(\phi)$ se notará $K_{n+1}(\mathcal{C})$.

Si $\mathcal{C} = \mathcal{P}(A)$, entonces $K_{n+1}(\mathcal{C})$ se notará $K_{n+1}(A)$

PROPII.1: En $K_{n+1}(\phi)$ se define la suma $(\overline{E,\alpha})+(\overline{E',\alpha'})=(\overline{E\oplus E',\alpha\oplus\alpha'})$, $K_{n+1}(\phi)$ resulta un grupo abeliano.

Dem: Es evidente que el elemento $\overline{(G,id)}$ es el elemento neutro, para cualquier $G \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$

La conmutabilidad se verifica, pues

$$(\overline{E\oplus E',\alpha\oplus\alpha'})=(\overline{E'\oplus E,\alpha'\oplus\alpha})$$

tomando como homotopía $\quad Id\oplus\sum_{i_1,\dots,i_n}(\alpha_{i_1\dots i_n}\oplus\alpha'_{i_1\dots i_n})x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}$ +

$$+\ t\Big(\sum_{i_1\dots i_n}(\alpha'_{i_1\dots i_n}\oplus\alpha_{i_1\dots i_n}-\alpha_{i_1\dots i_n}\oplus\alpha'_{i_1\dots i_n})x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}\Big)$$

Además dado $(\overline{E,\alpha}) \in K_{n+1}(\phi)$, $(\overline{E\oplus E,\alpha\oplus\alpha^{-1}}) = (\overline{E\oplus E,\alpha\alpha^{-1}}) = (\overline{E\oplus E,id})$

y por lo tanto $(\overline{E,\alpha^{-1}})$ es el elemento inverso de $(\overline{E,\alpha})$

En general, si $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva cualquiera, puede ser considerada como una categoría de Banach con la métrica discreta, en ese caso los elementos de $K_n(\mathcal{C})$ son las clases de equivalencia de pares (E,α) con $E \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y α un polinomio en $n-1$ variables con coeficientes en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E,E)$.

Obs: Un polinomio de esta forma resulta inversible si y sólo si $\alpha_{0\ldots 0}$ es inversible y $\alpha_{i_1\ldots i_n}$ es nilpotente si algún $i_j \neq 0$.

Dem: Ver (13), C p. 1.

Además, si $\varphi: \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A'')$ es el funtor extensión de escalares asociado una fibración de Serre $\varphi: A \longrightarrow A''$ y $A' = \mathrm{Ker}\ \varphi$, existe un isomorfismo natural entre $K_{n+1}(\varphi)$ y $K_{n+1}(A')$.

Se define el morfismo de conexión $\partial^{n+1}: K_{n+1}(\mathcal{C}'') \longrightarrow K_n(\varphi)$, $(n \geq 1)$ de la siguiente forma:

Como φ es suryectiva, dado $\overline{(E'', \alpha''(x_1, \ldots, x_n))} \in K_{n+1}(\mathcal{C}'')$, existe $E \in \mathrm{Obj}\ \mathcal{C}$ tal que $\varphi(E) = E''$. Además, tomando t variable, $\alpha''(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ es una homotopía que se levanta a $\alpha(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(E)$, donde $\alpha(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \mathrm{Id}$.

Entonces tomamos $\partial^{n+1}(\overline{E'', \alpha''}) = (\overline{E, \alpha(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)})$

DEF: Se define $R(\varphi)$ como el conjunto de triples (E, F, α) tales que $E, F \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\varphi E, \varphi F)$ y es un isomorfismo.

- Dos triples (E, F, α) y (E', F', α') son ISOMORFOS si existen dos isomorfismos $f: E \longrightarrow E'$ y $g: F \longrightarrow F'$ tales que $\alpha' \circ \varphi(f) = \varphi(g) \circ \alpha^{-1}$.
- El triple (E, F, α) es ELEMENTAL si $E = F$ y $\alpha = \mathrm{Id}_E$.
- Dos triples (E, F, α) y (E', F', α') son EQUIVALENTES (Not: $\sim$) si existe un triple elemental (G, G, id_G) tal que $(E \oplus G, F \oplus G, \alpha \oplus \mathrm{id}_G)$ es isomorfo a $(E' \oplus G, F' \oplus G, \mathrm{id}_G)$.
- Se define $K(\varphi) = R(\varphi)/\sim$.
- Dos triples (E, F, α) y (E', F', α') son HOMOTOPICOS si existen dos isomorfismos $f: E \longrightarrow E'$ y $g: F \longrightarrow F'$ tales que α es homotópica a $\varphi(g)^{-1} \alpha' \circ \varphi(f)$.
- Se define $K^{*}(\varphi) = R(\varphi)/\overset{*}{\sim}$, donde $\overset{*}{\sim}$ es la relación de equivalencia generada por la homotopía y la adición de triples.

PROP II.2: Si φ es una fibración de Serre, la aplicación identidad de $R(\varphi)$ induce un isomorfismo entre $K(\varphi)$ y $K^{\circ}(\varphi)$.

Dem: Ver (3), pág. 281.

Entonces, si $n = 0$, definimos $\partial^1 : K_1(\mathcal{C}'') \longrightarrow K^{\circ}(\varphi)$ en la siguiente forma: Dado (E'', α'') tal que $E'' \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}''$ y $\alpha'' \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}''}(E'')$, existe $E \in \mathcal{C}$ tal que $\varphi(E) = E''$, entonces tomamos $\partial^1(\overline{E'', \alpha''}) = (\overline{E, E, \alpha''})$, que resulta bien definido.

TEOREMA II.1: Sea $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ funtor de Serre suryectivo. Entonces la siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots \longrightarrow K_{n+1}(\mathcal{C}) \longrightarrow K_{n+1}(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\partial^{n+1}} K_n(\varphi) \longrightarrow K_n(\mathcal{C}) \longrightarrow K_n(\mathcal{C}'') \longrightarrow \cdots$$

II.2 - Producto cup en la teoría K algebraica

Sean A y B dos anillos; se considera en $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ la multiplicación definida por $(a,b).(a',b') = (a.a', b.b')$.

Si A y B son unitarios entonces $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ también lo es.

El producto tensorial de módulos induce entonces un funtor bilineal de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ en $\mathcal{P}(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$, y por lo tanto, un morfismo bilineal de $K_0(A) \times K_0(B)$ en $K_0(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$, donde si C es un anillo unitario, $K_0(C)$ es el grupo de Grothendieck de C.

Si A y B no son unitarios, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A^+ \otimes_{\mathbb{Z}} B^+ \arrow[r] \arrow[d] & A^+ \arrow[d] \\ B^+ \arrow[r] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

donde, si C es un anillo, $C^+ = \mathbb{Z} \oplus C$, con la operación $(n,c).(m,c') = (m.n, cm+c'n+cc')$; C^+ resulta un anillo unitario con elemento neutro $(1,0)$ para el producto así definido. Además, si C tiene unidad, $C^+ \cong C$, definiendo la aplicación

$\eta : C^{+} \longrightarrow C$, $\eta(n,c) = n.1_C + c$.

Si A no tiene unidad, se define $K_0(A) = \mathrm{Ker}(K_0(A^{+}) \longrightarrow K_0(\mathbb{Z}))$.

Sea D el producto fibrado $A^{+} \underset{\mathbb{Z}}{\times} B^{+}$, la siguiente sucesión de anillos es exacta:

$$0 \longrightarrow A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} B \longrightarrow A^{+} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} B^{+} \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

Además, existe un isomorfismo bilineal m de $K_0(A) \times K_0(B)$ en $K_0(A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} B)$, donde $K_0(A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} B) = \mathrm{Ker}(K_0(A^{+} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} B^{+}) \longrightarrow K_0(D))$.

Sean A, B y C anillos de Banach; un BIMORFISMO de A x B en C es una aplicación θ que satisface las siguientes propiedades:

(i) θ es - bilineal.

(ii) $\theta(a,b).\theta(a',b') = \theta(aa',bb')$.

(iii) Existe una constante t tal que $\|\theta(a,b)\| \leq t.\|\theta(a,0)\|.\|\theta(0,b)\|$.

Por la condición (ii), θ induce un morfismo de anillos de $A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} B$ en C; y por lo tanto, un morfismo $\theta_1 : K_0(A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} B) \longrightarrow K_0(C)$.

Componiendo θ_1 y m se deduce un morfismo $\bar{\theta}: K_0(A) \times K_0(B) \longrightarrow K_0(C)$

TEOREMA II.2: Sea $\mathcal{K}$ una categoría de anillos de Banach; a toda cuatrupla (A, B, C, θ) tal que $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y $\theta : A \times B \longrightarrow C$ es un bimorfismo, pueden asociarse de manera única aplicaciones bilineales naturales $\theta^{n,p} : K_n(A) \times K_p(B) \longrightarrow K_{n+p}(C)$, para todo $n, p \geq 0$, que satisfacen los siguientes axiomas:

(i) $\theta^{0,0} = \bar{\theta}$

(ii)(a) Sea el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' \times B & \longrightarrow & A \times B & \longrightarrow & A'' \times B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde las sucesiones horizontales son fibraciones de Serre, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
K_{n+1}(A'') \times K_p(B) \arrow[r] \arrow[d, "\partial^{n+1} \times id"] & K_{n+p+1}(C'') \arrow[d, "\partial^{n+p+1}"] \\
K_n(A) \times K_p(B) \arrow[r] & K_{n+p}(C)
\end{tikzcd}$$

(ii)b) Sea el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \times B' \arrow[r] \arrow[d] & A \times B \arrow[r] \arrow[d] & A \times B'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r] & C \arrow[r] & C'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las sucesiones horizontales son fibraciones de Serre, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
K_n(A) \times K_{p+1}(B'') \arrow[r] \arrow[d, "(-1)^n \times \partial^{p+1}"] & K_{n+p+1}(C'') \arrow[d, "\partial^{n+p+1}"] \\
K_n(A) \times K_p(B) \arrow[r] & K_{n+p}(C)
\end{tikzcd}$$

Para la demostración de este teorema, ver (3), pág. 79.

<u>Obs.</u>: En el caso $A = B = C$, $\theta : A \otimes A \longrightarrow A$ el producto, notaremos $\cdot_K$ a las aplicaciones $\theta^{n,p} : K_n(A) \times K_p(A) \longrightarrow K_{n+p}(A)$

<u>TEOREMA II.3</u>: Sean $p,q \geq 0$; si $x \in K_p(A)$ e $y \in K_q(B)$, entonces $y \cdot_K x = (-1)^{p.q} x \cdot_K y$

<u>Dem</u>: Ver (3)

II.3 <u>Extensión de la definicion del producto cup a la categoria de haces coherentes sobre un esquema</u>

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorias abelianas. Se considera la categoria producto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, se tiene un morfismo bilineal trivial de $K_0(\mathcal{C}) \times K_0(\mathcal{D})$ ----- $K_0(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$

<u>TEOREMA II.4</u>: Dadas dos categorias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, existen aplicaciones únicas bilineales

$K_n(\mathcal{C}) \times K_p(\mathcal{D}) \xrightarrow{\theta^{n,p}} K_{n+p}(\mathcal{C}\times\mathcal{D})$ tales que :

(i) $\theta^{0,0} = \theta$

(ii)(a) Si tenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'' \longrightarrow 0$$

donde los morfismos son fibraciones de Serre. Entonces :

$$\begin{tikzcd}
K_{n+1}(\mathcal{C}'') \times K_p(\mathcal{C}) \arrow[r, "\theta^{n+1,p}"] \arrow[d, "\partial_{n+1} \times \mathrm{Id}"] & K_{n+p+1}(\mathcal{C}'' \times \mathcal{C}) \arrow[d, "\partial_{n+p+1}"] \\
K_n(\mathcal{C}') \times K_p(\mathcal{C}) \arrow[r, "\theta^{n,p}"] & K_{n+p}(\mathcal{C}' \times \mathcal{C})
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

(b) Si $0 \longrightarrow \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'' \longrightarrow 0$ es exacta, entonces:

$$\begin{tikzcd}
K_n(\mathcal{C}) \times K_{p+1}(\mathcal{C}'') \arrow[r, "\theta^{n,p+1}"] \arrow[d, "(-\mathrm{Id})^n \times \partial_{p+1}"] & K_{n+p+1}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'') \arrow[d, "\partial_{n+p+1}"] \\
K_n(\mathcal{C}) \times K_p(\mathcal{C}') \arrow[r, "\theta^{n,p}"] & K_{n+p}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}')
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Dem: Es similar al caso de módulos proyectivos sobre un anillo y basta observar que si $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana, entónces $E\mathcal{C}$ es contractible.

III - FORMULA DE BLOCH

El objeto de este capítulo es dar una demostración de la fórmula de Bloch

$$A^p(X) = H^p(X, \underline{\underline{K}}_p)$$

donde $A^p(X)$ es el grupo de clases de ciclos de codimensión p, módulo equivalencia racional de un esquema regular y noetheriano para los funtores K definidos por Karoubi- Villamayor en (2).

Esta demostración fue realizada en (1) por D. Quillen para los funtores K definidos a partir del espacio clasificante $BQ(\underline{\underline{M}})$, donde $\underline{\underline{M}}$ es una categoría exacta.

III.1 - Definición del haz de grupos $\underline{\underline{K}}_n(X)$

Dado un esquema X y un abierto U de X llamaremos $K_n(U)$ al grupo K_n de de la categoría de haces de módulos proyectivos de dimensión finita sobre $O_{X,U}$, tal como se define en el capítulo II. Evidentemente $\{K_n(U)\}_{U \text{ abierto en } X}$ define un prehaz de grupos sobre X, y tomaremos $\underline{\underline{K}}_n(X)$ como el haz asociado a dicho prehaz.

Recordemos que si X es un esquema regular y noetheriano, la categoría de haces de módulos proyectivos sobre U coincide con la categoría de haces coherentes sobre U (para cualquier U abierto en X) a la que notaremos $\underline{\underline{M}}(U)$ y además, por ser X noetheriano, los grupos de cohomología coinciden con los grupos de cohomología de Čech (ver (6)).

III.2 - Construcción de la sucesión espectral asociada a $\underline{\underline{K}}_p$

Sea $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, notaremos $\underline{\underline{M}}_p(X)$ a la subcategoría de $\underline{\underline{M}}(X)$ de haces coherentes con soporte de codimensión mayor o igual que p, donde la codimensión de un cerrado Z es igual al inf $\{\dim O_{Z,z}\}$,donde z recorre los puntos genéricos de Z.

TEOREMA III.1: Sea X_p el conjunto de puntos de codimensión p de X, (si $x \in X$, $\operatorname{codim}(x) = \operatorname{codim}(\overline{\{x\}})$).

Se tiene la siguiente sucesión espectral:

$$E_1^{pq}(X) = \coprod_{x \in X_p} K_{p+q}(k(x)) \quad ,\text{con } p+q \geq 0$$

Consideremos la filtración de $\underline{M}(X)$ por subcategorías de Serre dada por:

$$\underline{M}(X) = \underline{M}_0(X) \supseteq \underline{M}_1(X) \supseteq \ldots\ldots$$

PROP.III.1: Existe una equivalencia de categorías entre $\underline{M}_p(X)/\underline{M}_{p+1}(X)$ y $\coprod_{x \in X_p} \bigcup_{n \in N} \operatorname{Modf.}(O_{X,x}/m^n_{X,x})$, donde $\operatorname{Modf.}(O_{X,x}/m^n_{X,x})$, es la categoría de módulos finitamente generados sobre $O_{X,x}/m^n_{X,x}$, y $m_{X,x}$ es el ideal maximal del anillo local $O_{X,x}$.

Dem: Definimos la aplicación $:\underline{M}_p(X)/\underline{M}_{p+1}(X) \longrightarrow \coprod_{x \in X} \bigcap_{n \in N} \operatorname{Modf.}(O_{X,x}/m^n_{X,x})$

como $\Theta_1(\overline{E}) = (E_x)_{x \in \operatorname{sop}(E) \cap X_p}$; (si $x \in \operatorname{sop}(E) \cap X_p$ entonces E_x es un módulo finitamente generado sobre $O_{X,x}/m^n_{X,x}$ para algún $n \in N$ -ver (13).

Tambien definimos la aplicación:

$\Theta_2 : \coprod_{x \in X} (\bigcup_{n \in N} \operatorname{Modf.}(O_{X,x}/m^n_{X,x})) \longrightarrow \underline{M}_p(X)/\underline{M}_{p+1}(X)$ en la siguiente forma

Si $x \in X$, sea $E \in \operatorname{Modf.}(O_{X,x}/m^n_{X,x})$ para algún $n \in N$. Si $y \in \overline{\{x\}}$ se toma $E_y =$ $= E_x \otimes_{O_{X,x}} O_{X,y}$. Como E_x es finitamente generado sobre $O_{X,x}/m^n_{X,x}$ y, por lo tanto sobre $O_{X,x}$, se tiene entonces un epimorfismo de $O^q_{X,x}$ en E_x (para algún $q \geq 0$).

Entonces la aplicación $O^q_{X,y} \longrightarrow E_x \otimes_{O_{X,x}} O_{X,y}$ es un epimorfismo. (*)

Definimos

$$E = \begin{cases} \tilde{E}_{\gamma} & \text{si } y \in \{\bar{x}\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

E resulta un haz coherente (por (*)). Se tiene entonces la aplicación buscada. Las aplicaciones θ_1 y θ_2 son inversas y se tiene una equivalencia de categorías.

PROP.III.2: Para todo $n \in N_0$:

$$K_n(\bigcup_m \mathrm{Modf}(O_{X,x}/m^m_{X,x})) = K_n(k(x))$$

Dem: La aplicación $\eta_1 : K_n(k(x)) \longrightarrow K_n(\bigcup_m \mathrm{Modf}(O_{X,x}/m^m_{X,x}))$

está definida por $[f_{ij}(x_1,\dots,x_{n-1})]_{m\times m} \longrightarrow (k(x)^m, [f_{ij}(x_1,\dots,x_{n-1})]_{m\times m})$

Hay que probar que si $(E,\alpha(x_1,\dots,x_{n-1})) \in K_n(\bigcup_m \mathrm{Modf}(O_{X,x}/m^m_{X,x}))$

entonces existen $m \in N$ y $[f_{ij}(x_1,\dots,x_{n-1})]_{m\times m}$ tales que

$(E,\alpha(x_1,\dots,x_{n-1}))$ es homotópico a $(k(x)^m,[f_{ij}(x_1,\dots,x_{n-1})]_{m\times m})$

(es decir, definen el mismo elemento en $K_n(k(x))$)

Sea $E \in \mathrm{Modf}(O_{X,x}/m^k_{X,x})$, $\alpha(x_1,\dots,x_{n-1}) = \sum_{i_1\dots i_n} a_{i_1\dots i_{n-1}} x_1^{i_1}\dots x_{n-1}^{i_{n-1}}$

$$\begin{tikzcd} O^q_{X,x} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{a}_{i_1\dots i_{n-1}}"] & (O_{X,x}/m^k_{X,x})^q \arrow[r] \arrow[d, "\bar{a}_{i_1\dots i_{n-1}}"] & E \arrow[r] \arrow[d, "a_{i_1\dots i_{n-1}}"] & 0 \\ O^q_{X,x} \arrow[r] & (O_{X,x}/m^k_{X,x})^q \arrow[r] & E \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\bar{a}_{i_1\dots i_{n-1}}$ está definido porque $(O_{X,x}/m^k_{X,x})^q$ es proyectivo sobre $O_{X,x}/m^k_{X,x}$

$\tilde{a}_{i_1\dots i_{n-1}}$ está definido porque la aplicación de $O_{X,x}$ en $O_{X,x}/m^k_{X,x}$

un epimorfismo y $O^q_{X,x}$ es proyectivo sobre $O_{X,x}$ y además $\bar{a}_{i_1\dots i_{n-1}}$

también es un morfismo de módulos sobre $O_{X,x}$.

$$\begin{tikzcd} O^q_{X,x} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{a}_{i_1\dots i_{n-1}}"] & k(x)^q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ O^q_{X,x} \arrow[r] & k(x)^q \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Si $e_i \in O^q_{X,x}$ (donde $e_i = (0,\ldots,\overset{i}{1},\ldots,0)$), entonces $\{\bar{e}_i\}_{1\leq i\leq q}$ genera $k(x)^q$

Si $\tilde{a}_{i_1\ldots i_{n-1}}(e_i) = b^i_{i_1\ldots i_{n-1}}$, entonces toma

$\bar{\bar{a}}_{i_1\ldots i_{n-1}}(\bar{e}_i) = \bar{b}^i_{i_1\ldots i_{n-1}}$ (**)

Hay que probar ahora que $(k(x)^q, \bar{\bar{a}}(x_1,\ldots,x_{n-1}))$ es homotópico a $(E, \alpha(x_1,\ldots,x_{n-1}))$.

Pero $(E\oplus k(x)^q, \alpha(x_1,\ldots,x_{n-1})\oplus id_{k(x)^q})$ es equivalente a:

$(E\oplus k(x)^q,\ id_E\oplus\bar{\bar{a}}(x_1,\ldots,x_{n-1}))$ pues:

$$(O^q_{X,x}\oplus O^q_{X,x}, \tilde{\alpha}(x_1,\ldots,x_{n-1})\oplus id_{O^q_{X,x}}) \sim (O^q_{X,x}\oplus O^q_{X,x},\ id_{O^q_{X,x}}\oplus\tilde{\alpha}(x_1,\ldots,x_{n-1}))$$

y se tiene entonces la homotopía

$\sum (b_{i_1..i_{n-1}i_n}\oplus c_{i_1..i_{n-1}i_n})\, x_1^{i}\ldots x_n^{i}$,donde

$b_{i_1\ldots i_{n-1}i_n}\oplus c_{i_1\ldots i_{n-1}i_n} : O^q_{X,x}\oplus O^q_{X,x}\longrightarrow O^q_{X,x}\oplus O^q_{X,x}$

$$\begin{tikzcd}
O^q_{X,x} \arrow[r] \arrow[d, "b_{i_1\ldots i_n}"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\bar{b}_{i_1\ldots i_n}"] & 0 \\
O^q_{X,x} \arrow[r] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{b}_{i_1\ldots i_n}$ existe porque $O^q_{X,x}$ es proyectivo sobre si mismo.

$$\begin{tikzcd}
O^q_{X,x} \arrow[r] \arrow[d, "c_{i_1\ldots i_n}"] & k(x)^q \arrow[d, "\bar{\bar{c}}_{i_1\ldots i_n}"] \\
O^q_{X,x} \arrow[r] & k(x)^q
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{\bar{c}}_{i_1\ldots i_n} : k(x)^q \longrightarrow k(x)^q$ está definida como en (* *)

Como η_i es epimorfismo y además es claramente un monomorfismo, y por la Prop. III.1

$$K_i(\underline{M}_p(X)/\underline{M}_{p+1}(X)) \cong \coprod_{x\in X_p} K_i(k(x))$$

Obs: Los funtores K_i conmutan con los coproductos.

PROP.III.3: Dada la sucesión exacta corta :

$$\underline{\underline{M}}_{p+1}(X) \longrightarrow \underline{\underline{M}}_p(X) \xrightarrow{\varphi_p} \underline{\underline{M}}_p(X)/\underline{\underline{M}}_{p+1}(X) \qquad (p \geq 0)$$

Resulta:

$$K_{n-1}(\varphi_p) \cong K_n(\underline{\underline{M}}_{p+1}(X)) \qquad (n \geq 1)$$

Dem: Se tiene la sucesión exacta larga:

$$\ldots \longrightarrow K_i(\varphi_p(X)) \longrightarrow K_i(\underline{\underline{M}}_p(X)) \longrightarrow K_i(\underline{\underline{M}}_p(X)/\underline{\underline{M}}_{p+1}(X)) \longrightarrow K_{i-1}(\varphi_p) \longrightarrow \ldots$$

$$(i \in \mathbb{N})$$

donde los elementos de $K_i(\varphi_p)$ son las clases de equivalencia de pares de la forma (E,α) con $E \in \underline{\underline{M}}_p(X)$, y $\alpha(x_1,\ldots,x_{i-1}) = Id$ si algún x_j es 0 ó 1 $(1 \leq j \leq i-1)$.

Sabemos que $\mathrm{sop}(E) \subseteq \bigcup_{k \geq p} X_k$ pero $\varphi_p(\alpha) = 1$ implica que $\alpha|_{X_p} = Id$, tomamos entonces, $\{x \in \bigcup_{k \geq p} X_k / \alpha(x) \neq Id\} \subset \bigcup_{k \geq p} X_k$.

Si restringimos (E,α) a ese conjunto, obtenemos un haz coherente sobre $\{x \in \bigcup_{k \geq p} X_k / \alpha(x) \neq Id\}$, que puede extenderse por 0 fuera de ese conjunto.

El elemento $(\bar{E},\bar{\alpha})$ obtenido tiene naturalmente sopoetr de codimensión mayor o igual que p+1; además, $\alpha(x_1,\ldots,x_{i-1}) = Id$ si algún $x_j = 0$ ó 1 $(1 \leq j \leq i-1)$.

Es claro por otra parte que $K_i(\underline{\underline{M}}_{p+1}(X)) \hookrightarrow K_i(\varphi_p)$.

Resulta fácil comprobar ahora que los morfismos definidos antes resultan inverso uno de otro, con lo cual queda probada la proposición.

Obs: Se tiene entonces la sucesión exacta larga:

$$\ldots \longrightarrow K_i(\underline{\underline{M}}_{p+1}(X)) \longrightarrow K_i(\underline{\underline{M}}_p(X)) \longrightarrow K_i(\underline{\underline{M}}_p(X)/\underline{\underline{M}}_{p+1}(X)) \longrightarrow K_{i-1}(\underline{\underline{M}}_{p+1}(X)) \longrightarrow .$$

$$(i \in \mathbb{N})$$

Sean ahora,

$$(1)\ \ldots \longrightarrow K_i(\underline{\underline{M}}_{p+1}(X)) \longrightarrow K_i(\underline{\underline{M}}_p(X)) \xrightarrow{\delta_{i,p}} K_i(\underline{\underline{M}}_p(X)/\underline{\underline{M}}_{p+1}(X)) \xrightarrow{\delta_{i,p}} K_{i-1}(\underline{\underline{M}}_{p+1}(X)) \longrightarrow \ldots$$

$$(2)\ \ldots \longrightarrow K_{i-1}(\underline{\underline{M}}_{p+2}(X)) \longrightarrow K_{i-1}(M_{p+1}(X)) \longrightarrow K_{i-1}(\underline{\underline{M}}_{p+1}(X)/\underline{\underline{M}}_{p+2}(X)) \longrightarrow K_{i-2}(\underline{\underline{M}}_{p+2}(X)) \longrightarrow \ldots$$

Tomando la composición $\delta_{i-1,p+1} \circ s_{i,p}$ se obtiene un morfismo de $K_i(\underline{\underline{M}}_p(X)/\underline{\underline{M}}_{p+1}(X))$ en $K_{i-1}(\underline{\underline{M}}_{p+1}(X)/\underline{\underline{M}}_{p+2}(X))$, a partir del cual, usando las proposiciones anteriores, se tiene un morfismo de $\coprod_{x \in X_p} K_i k(x)$ en $\coprod_{x \in X_{p+1}} K_{i-1} k(x)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión espectral:

$$(\ast)\ 0 \longrightarrow K_n(\underline{\underline{M}}_0(X)) \xrightarrow{e} \coprod_{x \in X_0} K_n k(x) \xrightarrow{d_0^n} \coprod_{x \in X_1} K_{n-1} k(x) \xrightarrow{d_2^n} \ldots.$$

<u>LEMA III.1</u>: Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Para todo $p \geq 0$, la inclusión $\underline{\underline{M}}_{p+1}(X) \hookrightarrow \underline{\underline{M}}_p(X)$ induce el 0 en los K grupos.

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión espectral $(\ast)$ es exacta.

<u>Dem</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii)

• Veamos que e es un monomorfismo

Se tiene

$$(1)\ K_n(\underline{\underline{M}}_1(X)) \xrightarrow{0} K_n(\underline{\underline{M}}_0(X)) \xrightarrow{e} \coprod_{x \in X_0} K_n k(x)$$

que es exacta, con lo cual, Ker e = Im 0 = 0 .

. Para ver que Im e = Ker d_0^n

$$(2)\ \xrightarrow{s_{n,0}} K_{n-1}(\underline{\underline{M}}_2(X)) \xrightarrow{0} K_{n-1}(\underline{\underline{M}}_1(X)) \longrightarrow \coprod_{x \in X_1} K_{n-1} k(x) \longrightarrow \ldots$$

Notemos que $s_{n,0} \circ e = 0$ (por (1)); pero:

$d_0^n \circ e = \delta_{n-1,1} \circ s_n \circ e = 0$, por lo tanto Im e $\subseteq$ Ker d_0^n

Además, $\delta_{n-1,1}$ resulta un monomorfismo, o sea:

Ker d_0^n = Ker $s_{n,0}$ = Im e

Veamos que en general $\operatorname{Im} d_{i-1}^{n} = \operatorname{Ker} d_{i}^{n}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\cdots \longrightarrow K_{n-i}(\underline{\underline{M}}_{i+1}(X)) \xrightarrow{0} K_{n-i}(\underline{\underline{M}}_{i}(X)) \longrightarrow \coprod_{x \in X_i} K_{n-i}k(x) \longrightarrow K_{n-i-1}(\underline{\underline{M}}_{i+1}(X)) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow K_{n-i-1}(\underline{\underline{M}}_{i+2}(X)) \xrightarrow{0} K_{n-i-1}(\underline{\underline{M}}_{i+1}(X)) \longrightarrow \coprod_{x \in X_{i+1}} K_{n-i-1}k(x) \longrightarrow K_{n-i-2}(\underline{\underline{M}}_{i+2}(X)) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow K_{n-i-2}(\underline{\underline{M}}_{i+3}(X)) \xrightarrow{0} K_{n-i-2}(\underline{\underline{M}}_{i+2}(X)) \longrightarrow \coprod_{x \in X_{i+2}} K_{n-i-2}k(x) \longrightarrow K_{n-i-3}(\underline{\underline{M}}_{i+3}(X)) \longrightarrow \cdot$$

Como $\delta_{n-i-2,i+2}$ es monomorfismo, resulta $\operatorname{Ker} d_{i+1} = \operatorname{Ker} s_{n-(i+1),i+1} =$

$= \operatorname{Im} \delta_{n-1-i,i+1} = \operatorname{Im} d_{i}^{n-1}$, pues $s_{n-i,i}$ es un epimorfismo.

(ii)⇒(i).

Se ve por inducción sobre p; comenzamos probando que:

$K_n(\underline{\underline{M}}_1(X)) \longrightarrow K_n(\underline{\underline{M}}_0(X))$ es cero, lo cual es trivial ya que e es un monomorfismo.

Supongamos ahora que la aplicación de $K_n(\underline{\underline{M}}_i(X))$ en $K_n(\underline{\underline{M}}_{i-1}(X))$ es cero, para todo $i \leq p$, para todo $n \in \mathbb{N}$; debemos probar que la aplicación de $K_n(\underline{\underline{M}}_{p+1}(X))$ en $K_n(\underline{\underline{M}}_p(X))$ es cero.

Se consideran las siguientes sucesiones exactas:

$$\cdots \longrightarrow K_{n+2}(M_{p-1}(X)) \xrightarrow{0} K_{n+2}(M_{p-2}(X)) \xrightarrow{\delta_{n+2,p-2}} \coprod_{x \in X_{p-2}} K_{n+2}k(x) \xrightarrow{s_{n+2,p-2}} K_{n+1}(M_{p-1}(X)) \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow K_{n+1}(M_p(X)) \xrightarrow{0} K_{n+1}(M_{p-1}(X)) \xrightarrow{\delta_{n+1,p-1}} \coprod_{x \in X_{p-1}} K_{n+1}k(x) \xrightarrow{s_{n+1,p-1}} K_n(M_p(X)) \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow K_n(M_{p+1}(X)) \xrightarrow{0} K_n(M_p(X)) \xrightarrow{\delta_{n,p}} \coprod_{x \in X_p} K_nk(x) \xrightarrow{s_{n,p}} K_{n-1}(M_{p+1}(X)) \longrightarrow \cdots$$

Queremos probar que $\delta_{n,p}$ es un monomorfismo, pero:

$\operatorname{Ker} \delta_{n,p} = \operatorname{Im} s_{n+1,p-1}(\operatorname{Ker} d_{p-1})$,

pues por hipótesis inductiva , $s_{n+1,p-1}$ es un epimorfismo. Además,

$\operatorname{Im} s_{n+1,p-1}(\operatorname{Ker} d_{p-1}) = s_{n+1,p-1}(\operatorname{Im} \delta_{n+1,p-1} \circ s_{n+2,p-2})$;

con lo cual, $\operatorname{Ker} \delta_{n,p} = \operatorname{Im} s_{n+1,p-1} \circ \delta_{n+1,p-1} \circ s_{n+2,p-2} = 0$, pues

$\varepsilon_{n+1,p-1} \circ \delta_{n+1,p-1} = 0$

PROP.III.4: (Gersten)

Sea K' el haz sobre X asociado al prehaz de grupos:

$$U \longmapsto K_n(\underline{\underline{M}}_o(U)) \qquad (U \subset X \text{ abierto})$$

Supongamos que Spec $O_{X,x}$ satisface las condiciones del lema III.1, para todo $x \in X$. Entonces,

$$H^p(X, \underline{\underline{K}}'_n) = \operatorname{Ker} d^n_p / \operatorname{Im} d^n_{p-1} \qquad (p,q \in \mathbb{N})$$

Dem: Dado U abierto en X, se considera la sucesión de prehaces:

$$0 \longrightarrow K_n(\underline{\underline{M}}_o(U)) \xrightarrow{\varepsilon} \coprod_{x \in U_o} K_n k(x) \xrightarrow{d^n_o} \coprod_{x \in U_1} K_{n-1} k(x) \xrightarrow{d^n_1} \cdots$$

y se obtiene la sucesión de haces:

$$(\ast\ \ast)\ 0 \longrightarrow \underline{\underline{K}}'_n \longrightarrow \coprod_{x \in X_o} (i_x)_\ast (K_n k(x)) \longrightarrow \coprod_{x \in X_1} (i_x)_\ast (K_{n-1} k(x)) \longrightarrow \cdots$$

donde i_x: Spec(k(x)) $\longrightarrow$ X es la aplicación canónica.

La fibra de $(\ast\ \ast)$ sobre x es la sucesión $(\ast)$ para Spec$(O_{X,x})$, pues Spec$(O_{X,x}) = \varprojlim$ Spec$(O_{X,U})$, donde U recorre los entornos abiertos afines de x, y además la sucesión espectral construída conmuta con límites proyectivos. Por hipótesis, $(\ast\ \ast)$ es exacta, por lo tanto se tiene una resolución por haces fláccidos de $\underline{\underline{K}}'_n$. O sea,

$$H^p(X, \underline{\underline{K}}'_n) = H^p(s \longmapsto \Gamma(X, \coprod_{x \in X_s} (i_x)_\ast K_{n-s} k(x))) = H^p(s \longmapsto E_1^{s,-n}(X)) .$$

Conjeture de Gersten : Las condiciones del Lema III.1 se satisfacen si X = Spec(A) , donde A es un anillo local regular.

Probaremos ahora la conjerura en un caso menos general tal como lo hace Quillen en (1).

Sean X e Y esquemas algebraicos.

<u>DEF</u>: Un morfismo $f:X \longrightarrow Y$ se llama SUAVE DE DIMENSION RELATIVA n si :

(i) f es playo

(ii) Si $X'\subset X$, $Y'\subset Y$ son tales que $f(X')\subseteq Y'$, entonces $\dim X' = \dim Y' + n$.

(iii) $\dim_{k(x)}(\Omega_{X/Y} \; k(x)) = n$, para todo $x \in X$, donde $\Omega_{X/Y}$ es el módulo de diferenciales de Kahler de X sobre Y,

<u>DEF</u>: Sea R una K-álgebra de tipo finito; R se llama <u>suave</u> sobre K si $f: R \longrightarrow K$ es suave.

Si K es además un cuerpo perfecto, se tienen los siguientes lemas:

<u>LEMA III.2</u>: Sea B una localización de una K-álgebra de tipo finito, donde K es un cuerpo perfecto. Entonces:

$\Omega_{B/K}$ es un B-módulo libre de rango igual a la dimensión de B si y solo si B es un anillo regular local.

<u>LEMA III.3</u>: Sea $f:X \longrightarrow Y$ un morfismo de variedades no singulares sobre K.

Sea $n = \dim X - \dim Y$.

Son equivalentes:

(i) f es suave de dimensión relativa n.

(ii) $\Omega_{X/Y}$ es localmente libre de rango n en X.

Para las demostraciones de estos lemas ver (4),Ch.II .

<u>TEOREMA III.2</u>: Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y R una K-álgebra de tipo finito . Sea $S\subset \mathrm{Spec}(R)$, subconjunto finito tal que R_P es regular, para todo $P\in S$; y sea $A = R_S$ el anillo semilocal regular.

Entonces $X = \mathrm{Spec}(A)$ satisface las condiciones del Lema III.2.

Dem: (i) Reducción al caso A suave sobre K.

Es bien conocido que existen K' subcuerpo de K tal que K' es finitamente generado sobre el cuerpo primo, y una K'-álgebra A' tales que $A = K \otimes_{K'} A'$. Esto puede verse facilmente ya que:

$A = K[x_1,\ldots,x_n]/(p_1(x),\ldots p_s(x))$ y se toma entonces como K' el subcuerpo generado por el cuerpo primo y los coeficientes de los polinomios p_i $(1 \leq i \leq s)$, y $A' = K'[x_1,\ldots,x_n]/(p_1(x),\ldots, p_s(x))$ (Para consultar una demostración de que K' y A' verifican lo pedido, ver: Hyman Bass; Lectures on Topics in Algebraic K-Theory, TATA Institute of Fundamental Research, Bombay).

Sea $S' \subset \mathrm{Spec}(A')$ finito tal que si $P \in S$, entonces P es una extensión de algún $P' \in S'$. Entonces $A' = A'_{S'}$ es tal que $A = K \otimes_{K'} A'$ y A' es regular.

Sean K_i los subcuerpos de K que contienen a K' y son finitamente generados sobre el cuerpo primo.

Se tiene que $A = \varinjlim_i (K_i \otimes_{K'} A')$, y entonces:

$K_n(\underline{M}_p(\mathrm{Spec}A)) = \varinjlim_i K_n(\mathrm{Spec}(K_i \otimes_{K'} A'))$,

por lo tanto basta probar el teorema cuando K es finitamente generado sobre el cuerpo primo.

En este caso A es una localización de una K-álgebra de tipo finito sobre el cuerpo primo, luego puede pensarse a A como un álgebra sobre el cuerpo primo, que es perfecto.

Aplicando el Lema III.2 a $B = A_p$ se tiene que $\Omega_{A_p/K}$ es un B-módulo libre de rango n; y por lo tanto, por el Lema III.3, f es suave de dimensión relativa n, es decir A_p es suave sobre K, de dimensión relativa n.

Entonces, R es suave sobre K en los puntos de S, y por lo tanto en un entorno abierto de S (ver (4)). Se reemplaza R por R_f, si $f \notin P$ para todo P en ese entorno de S.

Puede suponerse entonces R suave sobre K.

(ii) Queremos probar ahora que, para todo $p \geq 0$, la inclusión de $\underline{\underline{M}}_{p+1}(A)$ en $\underline{\underline{M}}_p(A)$ induce la aplicación 0 en los $\underline{\underline{K}}_n$.

Sabemos que, $K_n(\underline{\underline{M}}_{p+1}(A)) = \varinjlim K_n(\underline{\underline{M}}_{p+1}(R_f))$, donde $f(P) \neq 0$, para todo $P \in S$. Si llamamos $R = R_f$, bastaría con ver que:

$\underline{\underline{K}}_n(\underline{\underline{M}}_{p+1}R) \xrightarrow{0} \underline{\underline{K}}_n(\underline{\underline{M}}_p(R))$, para todo $p \geq 0$.

Pero, $\underline{\underline{K}}_n(\underline{\underline{M}}_{p+1}R) = \varinjlim \underline{\underline{K}}_n(\underline{\underline{M}}_p(R/tR))$, donde $t \in R$ es un elemento regular.

Basta demostrar que dado $t \in R$, t regular, existe f tal que $f \notin P$, para todo $P \in S$; y la aplicación $M \longmapsto M_f$ de $\underline{\underline{M}}_p(R/tR)$ en $\underline{\underline{M}}_p(R)$ induce el 0 de $\underline{\underline{K}}_n(\underline{\underline{M}}_p(R/tR))$ en $\underline{\underline{K}}_n(\underline{\underline{M}}_p(R))$.

Para esto necesitamos el siguiente :

<u>LEMA III.4</u>: Sea R una K-álgebra de tipo finito, suave y de dimensión r. Sea $t \in R$, regular y sea $S \subset \operatorname{Spec}(R)$ finito. Entonces, existen $x_1, \ldots x_{r-1} \in R$ (algebraicamente independientes sobre K) tales que si $B = K[x_1, \ldots, x_{r-1}]$:

(i) R/tR es finito sobre B.

(ii) R_P es suave sobre B, para todo $P \in S$.

<u>Dem</u>: Dado $P \in S$ existe $\mathfrak{m}$ maximal tal que $P \subseteq \mathfrak{m}$. Puede suponerse $S \subset \operatorname{Spec}_{\mathfrak{m}}(R)$ y finito (donde $\operatorname{Spec}_{\mathfrak{m}}$ es el espectro maximal).

Sea Ω el módulo de diferenciales de Kahler de R sobre K. Sabemos que Ω es un R-módulo proyectivo de rango r si y solo si, R es regular. Además si $P \in S$, R_P es suave sobre $B = K[x_1, \ldots, x_{r-1}]$ si y solo si, $\{dx_i\}_{1\leq i\leq r-1}$ es linealmente independiente en P. (Pues $\langle dx_i\rangle_{1\leq i\leq r-1} \to \Omega$ que debe ser localmente libre de rango r).

Sea $J = \bigcap_{\mathfrak{m}\in S} \mathfrak{m}$, entonces $R/J^n \to \prod_{\mathfrak{m}\in S} R/\mathfrak{m}^n$.

Por lo tanto, R/J^n tiene dimensión finita sobre K. Existe entonces un subespacio $V \subsetneq R$ tal que $\dim_K V$ es finita; y, para todo $\mathfrak{m}\in S$, existen $v_1,\ldots,v_r$ en V tales que $\{dv_i\}_{1\leq i\leq r}$ es base de $\Omega_{R_{\mathfrak{m}}/K}$ y tales que $v_i \in \mathfrak{m}'$, para todo $\mathfrak{m}' \in S$ ($\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$).

Podemos suponer además que V genera a R como K-álgebra.

Dado $t \in R$, t regular, definimos una filtración de R/tR:

$R/tR \supseteq \ldots\ldots\ldots\ldots \supseteq F_1(R/tR) \supseteq F_0(R/tR) = 0$

donde $F_n(R/tR)$ es el subespacio generado por los monomios de grado menor o igual que n, en los elementos de V. El anillo graduado asociado, que notemos $Gr(R/tR)$, tiene dimensión r-1.

Para ver esto, observemos que $Proj(\coprod_n F_n(R/tR))$ es la clausura en el espacio proyectivo del subesquema $Spec R/tR$ del espacio afín $Spec(S(V))$. Como R/tR tiene dimensión r-1, la parte de este proyectivo en infinito llamado $Proj(Gr(R/tR))$ tiene dimensión r-2. Entonces, $Gr(R/tR)$ tiene dimensión r-1 como se afirmó antes.

Sean $z_1,\ldots,z_{r-1}$ un sistema de parámetros de $Gr(R/tR)$ tales que cada z_i es homogéneo de grado mayor o igual que 2.

$Gr(R/tR)$ resulta finito sobre $K[z_1,\ldots,z_{r-1}]$; luego, si los z_i "son levantados" a elementos $x_i' \in R$, R/tR será finito sobre $K[x_1',\ldots,x_{r-1}']$.

Pueden elegirse $x_1,\ldots,x_{r-1}$ en V tales que $x_i = x_i' + v_i$ $(1 \leq i \leq r-1)$ tengan diferenciales independientes en los puntos de S, con lo cual R_P resulta suave sobre B, para todo $P \in S$.

Por otra parte, los x_i tienen terminos principales z_i en $Gr(R/tR)$; luego, R/tR es finito sobre $K[x_1,\ldots,x_{r-1}]$.

Entonces queda demostrado el lema.

Continuamos con la demostración del teorema:

Tomamos $B' = A/tA$ y $A' = A \otimes_B B'$; luego, tenemos un diagrama:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] & A \\ B' \arrow[r] \arrow[u, shift left, "u'"] & B \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales son finitas.

Sea S' el conjunto finito de puntos de $\mathrm{Spec}(A')$ que está sobre los puntos de S. Como u es suave de dimensión relativa uno sobre los puntos de S, u' es suave de dimensión relativa uno sobre los puntos de S'.

Sabemos que el ideal $I = \mathrm{Ker}(A' \longrightarrow B')$ es principal en los puntos de S' (ver SGA 1, II.4.15). Luego I es principal en un entorno de S'. Como A'/A es finita, este entorno contiene la imagen inversa de un entorno de S en $\mathrm{Spec}(A)$.

Luego, podemos encontrar $f \in A$ tal que f no se anula sobre los puntos de S y tal que I_f es isomorfo a A'_f como A_f-módulo. Podemos también suponer que f está elegido de modo que A'_f es suave, luego playo, sobre B'.

Entonces, si M es un B'-módulo, tenemos la sucesión exacta de A_f-módulos:

$$(*) \quad 0 \longrightarrow I_f \otimes_{B'} M \longrightarrow A'_f \otimes_{B'} M \longrightarrow M_f \longrightarrow 0$$

Como A'_f es playo sobre B', si $M \in \underline{\underline{M}}_p(B')$, entonces $A'_f \otimes_{B'} M \in \underline{\underline{M}}_p(A'_f)$; y, mirado como A_f-módulo, $A'_f \otimes_{B'} M \in \underline{\underline{M}}_p(A_f)$.

Luego, tenemos que $(*)$ es una sucesión exacta de funtores exactos de $\underline{\underline{M}}_p(B')$ en $\underline{\underline{M}}_p(A_f)$.

Aplicando el Lema III.5 (que probaremos más adelante); y usando el isomorfismo entre I_f y A'_f concluimos que el funtor $\underline{\underline{M}}_p(B') \longrightarrow \underline{\underline{M}}_p(A_f)$ induce la aplicación 0 en los grupos K.

LEMA III.5: Sea $\underline{\underline{M}}$ una categoría exacta, y sea $\underline{\underline{E}}$ la familia de sucesiones exactas cortas en $\underline{\underline{M}}$, considerada como categoría aditiva. LLamaremos a los objetos de $\underline{\underline{E}}$, E, E', etc.; y sean sE, tE, qE definidos en la siguiente forma:

Si $E \in \underline{\underline{E}}$ $\qquad 0 \longrightarrow sE \longrightarrow tE \longrightarrow qE \longrightarrow 0$

Una sucesión en $\underline{\underline{E}}$ se llamará exacta si da origen a tres sucesiones exactas en $\underline{\underline{M}}$ aplicando s,t,q. Con esta noción de exactitud resulta claro que $\underline{\underline{E}}$ es una categoría exacta; y que, s,t y q son funtores exactos de $\underline{\underline{E}}$ en $\underline{\underline{M}}$.
Resulta además que el funtor $(s, q):\underline{\underline{E}} \longrightarrow \underline{\underline{M}} \times \underline{\underline{M}}$ induce una equivalencia de homotopías en los grupos K_n.

Dem: $K_n(s, q): K_n(\underline{\underline{E}}) \longrightarrow K_n(\underline{\underline{M}}) \times K_n(\underline{\underline{M}})$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & sE & \longrightarrow & tE & \longrightarrow & qE & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & \\ 0 \longrightarrow & sE & \longrightarrow & tE & \longrightarrow & qE & \longrightarrow 0 \end{array} \longmapsto \left(\begin{array}{c} sE \\ \downarrow \\ sE \end{array} ; \begin{array}{c} qE \\ \downarrow \\ qE \end{array} \right)$$

.Veamos primero la buena definición de la aplicación:

Si $(E, (\gamma, \beta, \alpha))$ es homotópica a la identidad es fácil ver que $(s(E), \gamma)$ y (qE, α) son homotópicos a la identidad.

.Es un epimorfismo:

Dados $(A, \sum_{i_1 \ldots i_{n-1}} \alpha_{i_1 \ldots i_{n-1}} x_1^{i_1} \ldots x_{n-1}^{i_{n-1}})$ y $(B, \sum_{i_1 \ldots i_{n-1}} \beta_{i_1 \ldots i_{n-1}} x_1^{i_1} \ldots x_{n-1}^{i_{n-1}})$

se tiene:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus B & \longrightarrow & B & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha\oplus\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & \\ 0 \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus B & \longrightarrow & B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

.Es un monomorfismo:

Supongamos que $(qE, \sum_{i_1 \ldots i_{n-1}} \gamma_{i_1 \ldots i_{n-1}} x_1^{i_1} \ldots x_{n-1}^{i_{n-1}})$ y $(qE, \sum_{i_1 \ldots i_{n-1}} \alpha_{i_1 \ldots i_{n-1}} x_1^{i_1} \ldots x_{n-1}^{i_{n-1}})$

son homotópicas a la identidad. Es claro que:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & sE \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & qE\oplus sE \arrow[r] \arrow[d, "\alpha\oplus\gamma"] & qE \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & sE \arrow[r] & qE\oplus sE \arrow[r] & qE \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es homotópica a la identidad.

Veremos ahora que:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & sE\oplus sE \arrow[r] \arrow[d, "\gamma\oplus Id"] & tE\oplus sE\oplus qE \arrow[r] \arrow[d, "\beta\oplus Id\oplus Id"] & qE\oplus qE \arrow[r] \arrow[d, "\alpha\oplus Id"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & sE\oplus sE \arrow[r] & tE\oplus sE\oplus qE \arrow[r] & qE\oplus qE \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es homotópica

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & sE\oplus sE \arrow[r] \arrow[d, "Id\oplus\gamma"] & tE\oplus sE\oplus qE \arrow[r] \arrow[d, "Id\oplus\gamma\oplus\alpha"] & qE\oplus qE \arrow[r] \arrow[d, "Id\oplus\alpha"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & sE\oplus sE \arrow[r] & tE\oplus sE\oplus qE \arrow[r] & qE\oplus qE \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Para ello, basta tomar de $sE\oplus sE$ en $sE\oplus sE$ la aplicación:

$$(\gamma_{0\ldots0}\oplus Id) + \sum_{i_1\ldots i_{n-1}\neq 0\ldots0}(\gamma_{i_1\ldots i_{n-1}}\oplus 0)x_1^{i_1}\; x_{n-1}^{i_{n-1}} + x_n\sum_{i_1\ldots i_{n-1}\neq 0\ldots 0}(-\gamma_{i_1\ldots i_{n-1}}\oplus\gamma_{i_1\ldots i_{n-1}})x_1^{i_1}\; x_{n-1}^{i_{n-1}}$$

Es claro que $\gamma_{0\ldots0}\oplus Id$ es inversible (ya que $\gamma_{0\ldots0}{}^{1}$ es) y que los demás coeficientes son nilpotentes, por lo tanto este morfismo es inversible.

Análogamente tomemos de $tE\oplus sE\oplus qE$ en $tE\oplus sE\oplus qE$ la aplicación:

$$(\beta_{0\ldots0}\oplus Id\oplus Id)+\sum_{i_1\ldots i_{n-1}\neq 0\ldots0}\beta_{i_1\ldots i_{n-1}}\oplus 0\oplus 0)x_1^{i_1}\cdots x_{n-1}^{i_{n-1}}+x_n\sum_{i_1\ldots i_{n-1}\neq 0\ldots0}(-\beta_{i_1\ldots i_{n-1}}\oplus\gamma_{i_1\ldots i_{n-1}}\oplus\alpha_{i_1\ldots i_{n-1}})x_1^{i_1}\cdots x_{n-1}^{i_{n-1}}$$

y de $qE\oplus qE$ en $qE\oplus qE$, la aplicación:

COR: Sean $\underline{\underline{M}}$ y $\underline{\underline{M}}'$ categorías exactas y sea $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de funtores exactos de $\underline{\underline{M}}'$ en $\underline{\underline{M}}$.

Entonces $K_n F = K_n F' + K_n F''$

Dem: Basta verificar el lema para la suceción exacta $0 \longrightarrow s \longrightarrow t \longrightarrow q \longrightarrow 0$ de funtores de $\underline{\underline{E}}$ en $\underline{\underline{M}}$. Sea $f:\underline{\underline{M}} \times \underline{\underline{M}} \longrightarrow \underline{\underline{E}}$ el funtor exacto que manda $(\underline{\underline{M}}', \underline{\underline{M}}'')$ en la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \underline{\underline{M}}' \longrightarrow \underline{\underline{M}}' \oplus \underline{\underline{M}}'' \longrightarrow \underline{\underline{M}}'' \longrightarrow 0$$

Los funtores tf y $\oplus(s, q)f$ son isomorfos, de donde:

$K_i tf = K_i(\oplus(s, q)f) = (K_i s \oplus K_i q)K_i f : K_i\underline{\underline{M}} \times K_i\underline{\underline{M}} \longrightarrow K_i\underline{\underline{M}}$.

pero $K_i f$ es una sección de $(K_i s, K_i q)$: $K_i\underline{\underline{E}} \longrightarrow K_i\underline{\underline{M}} \times K_i\underline{\underline{M}}$, que es un isomorfismo por el lema.

De donde, $K_i t = K_i s + K_i q$; con lo cual queda demostrado el corolario.

TEOREMA III.3: Sea X un esquema regular de tipo finito sobre un cuerpo. Entonces la imagen de:

$$\coprod_{x \in X_{p-1}} K_1 k(x) \longrightarrow \coprod_{x \in X_p} K_0 k(x) = \coprod_{x \in X_p} \mathbb{Z} \cdot x$$

en la sucesión espectral es el subgrupo de ciclos de codimensión p que son linealmente equivalentes a 0.

Luego, $H^p(X, \underline{K}_p)$ es isomorfo al grupo $A^p(X)$ de ciclos de codimensión p, módulo equivalencia lineal.

Dem: Sea $\mathbb{P}^1$ la recta proyectiva sobre K, y sea t la función racional canónica en $\mathbb{P}^1$. Sea $C^p(X)$ el grupo de ciclos de codimensión p. El subgrupo de ciclos linealmente equivalentes a 0 está generado por ciclos de la forma $W_0 - W_\infty$, donde W es una subvariedad irreducible de $X \times \mathbb{P}^1$ de codimensión p, y tal que $W_0 = W \cap (X \times 0)$ y $W_\infty = W \cap (X \times \infty)$ son intersecciones propias.

Necesitamos usar una fórmula para $W_0 - W_\infty$, que es la que recordamos a continuación:

Si Y es la imagen de W por la proyección de $X \times \mathbb{P}^1$ en X, entonces dim Y = dim W o dim Y = dim W − 1; en este último caso, se tiene $W = Y \times \mathbb{P}^1$ o sea $W_0 - W_\infty = 0$. Podemos suponer entonces que dim Y = dim W, de donde Y tiene codimensión p−1 en X.

Si y es el punto genérico de Y y w el punto genérico de W, tenemos que k(w) es una extensión finita de k(y). Sea t' el elemento no nulo de k(w) obtenido como imagen inversa de t en W, y sea x un punto de codimensión uno en Y, de donde $O_{Y,x}$ es un dominio local de dimensión uno con cuerpo de cocientes k(y).

La fórmula que necesitamos es :

$$(\text{multiplicidad de } x \text{ en } W_0 - W_\infty) = \mathrm{ord}_{yx}(\mathrm{Norma}_{k(w)/k(y)}t')$$

donde $\mathrm{ord}_{yx}: k(y)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ es el único morfismo tal que

$\mathrm{ord}_{yx}(f) = \mathrm{long}\,(O_{Y,x}/fO_{Y,x})$, para $f \in O_{Y,x}$, $f \neq 0$

(ver (8); 2-12).

Por lo tanto, el subgrupo de ciclos linealmente equivalentes a cero es la imagen del morfismo:

$$\phi : \coprod_{y \in X_{p-1}} K_1 k(y) \longrightarrow \coprod_{x \in X_p} \mathbb{Z} = C^p(X)$$

$$\phi(f) = \sum \mathrm{ord}_{yx}(f), \text{ donde } \mathrm{ord}_{yx}(f) = 0 \text{ si } x \notin \overline{\{y\}}$$

Observemos ahora que $\coprod_{y \in X_{p-1}} k(y)^*$ es isomorfo a $\coprod_{y \in X_{p-1}} K_1 k(y)$.

Definimos para esto: $\tau : \coprod_{y \in X_{p-1}} k(y)^* \longrightarrow \coprod_{y \in X_{p-1}} K_1 k(y)$; donde si $f \in k(y)^*$, $\tau(f) = (k(y), f)$ (con f notamos también la homotecia de razón f).

τ es claramente un isomorfismo, ya que si $(k(y)^n, [f_{ij}])$ es un elemento de $K_1k(y)$, $\det[f_{ij}] \in k(y)^{\cdot}$; y $(k(y)^n, [f_{ij}])$ resulta homotópico a $(k(y), \det[f_{ij}])$.

Por lo tanto basta ver que $\phi = d_{1,p-1} \circ \tau$.

Para ello alcanza con considerar $f \in O_{Y,x}$, para $x \in \{\bar{y}\} - Y$.

Veamos ahora qué es $d_{1,p-1} \circ \tau$:

Si $f \in k(y)^{\cdot}$ tomamos $(k(y), f) \in K_1k(y)$ que por el isomorfismo entre $\coprod_{y \in X_{p-1}} K_1k(y)$ y $K_1(\underline{\underline{M}}_{p-1}(X)/\underline{\underline{M}}_p(X))$ se aplica en un par (E, α) tal que:

(i) $E_z = k(y) \otimes_{O_{Y,y}} O_{Y,z}$ (si $z \in Y$)

$\alpha_z = \bar{f} \otimes_{O_{Y,y}} 1_{O_{Y,z}}$

y se verifica que $\mathrm{sop}(E/\alpha E) \subseteq \bigcup_{q \geq p} X_q$, ya que si $z \in \{\bar{y}\}$, entonces $z = y$ o $z \in \bigcup_{q \geq p} X_q$; de donde $E_z/\alpha_z E_z = 0$, o bien, debemos verificar que $\dim_{k(z)}(E_z/\alpha_z E_z) = \mathrm{long}(O_{Y,z}/fO_{Y,z})$.

Sea $E_z/\alpha_z E_z = < \bar{v}_1, \ldots \bar{v}_s >$.

$v_1 \in k(y) \otimes_{O_{Y,y}} O_{Y,z}$, $f.E_z \subsetneq < v_1 >$

$v_1 = \sum m_i \otimes \frac{1}{a_i}$, con $m_i \in k(y)$

Tomando m_i' tal que $\bar{m}_i' = m_i$; $m_i' \in O_{X,y}$ se tiene que:

$f.O_{Y,z} \subseteq < \sum m_i' \otimes \frac{1}{a_i} > \overset{\text{NOT}}{=} < \sum \frac{m_i}{a_i} >$.

Veamos que $< \sum \frac{m_i}{a_i} >$ es simple en $O_{Y,z}/fO_{Y,z}$.

Supongamos que existe $a \in O_{Y,z}$ tal que $(\bar{a}) \subseteq < \sum \frac{m_i}{a_i} >$, como $a \in O_{Y,z}$, entonces $1 \otimes a \in k(y) \otimes_{O_{Y,y}} O_{Y,z}$; y por lo tanto, $<\overline{1 \otimes a}> \subset <\overline{v}_1>$, entonces $\overline{1 \otimes a} \neq 0$ o $<\overline{1 \otimes a}> = <\overline{v}_1>$. Pero $1 \otimes a \notin <f>$; luego $<\overline{1 \otimes a}> = <\overline{v}_1>$.

Tenemos entonces:

$$0 \subsetneq <\overline{v}_1> \subsetneq <\overline{v_1, v_2}> \subsetneq \ldots\ldots\ldots \subsetneq <\overline{v_1, \ldots, v_s}> \qquad \text{tal que}$$

$<\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_j> / <\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{j-1}> = <\overline{v}_j>$ es simple con el mismo argumento que antes.

Además, $<\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_s> = O_{Y,z}/fO_{Y,z}$, con lo cual queda demostrado el teorema.

<u>TEOREMA III.4</u>: Sea X un esquema regular de tipo finito sobre un cuerpo. Entonces, existe un isomorfismo entre $H^p(X, \underline{K}_p)$ y $A^p(X)$; donde $A^p(X)$ son las clases de ciclos de codimensión p, módulo equivalencia lineal.

<u>Dem</u>: Resulta trivial a partir de los teoremas III.2 y III.3 y de la proposición III.4.

<u>Obs</u>: Si $p = 0$; $H^0(X, \mathbb{Z}) = C^0(X)$

Si $p = 1$; $H^1(X, O_X^*) = Pic(X)$

IV - COHOMOLOGIA

En este capítulo desarrollaremos la noción general de cohomología de un haz de grupos abelianos sobre un espacio topológico y enunciaremos los principales resultados sobre cohomología de haces coherentes y cuasi coherentes sobre un esquema noetheriano.

En la construcción de la teoría de la intersección para los $H^p(X,\underline{K}_p)$ $(p \geq 0)$ utilizaremos esencialmente que la cohomología de Cech de un haz de grupos abelianos sobre un esquema coincide com la cohomología de funtores derivados; esto nos permitirá definir el producto de intersección y las clases de Chern utilizando la cohomología de Cech que resulta en general más fácil de calcular que la de funtores derivados, a la vez que realizaremos la demostración de que $A^p(X) = H^p(X,\underline{K}_p)$, si X es un esquema regular y noetheriano, utilizando la cohomología de funtores derivados.

En esta parte nos hemos basado fundamentalmente en el desarrollo que se hace en (4) y (6) de este tema; la demostración de la coincidencia de las dos cohomologías está realizada en EGA III.1.

IV.1 - Funtores derivados

Def: Una categoría ABELIANA es una categoría $\mathcal{A}$, tal que:

(i) Para cada par de objetos A, B de $\mathcal{A}$; $Hom_{\mathcal{A}}(A,B)$ tiene una estructura de grupo abeliano, y la ley de composición:

$$Hom_{\mathcal{A}}(A,B) \times Hom_{\mathcal{A}}(B,C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(A,C)$$

resulta un morfismo de grupos.

(ii) Existen todas las sumas directas finitas.

(iii) Todo morfismo tiene un núcleo y un conúcleo.

(iv) Todo monomorfismo es el núcleo de su conúcleo.

(v) Todo epimorfismo es el conúcleo de su núcleo.

(vi) Todo morfismo puede ser factorizado como un epimorfismo compuesto con un monomorfismo.

Las siguientes resultan categorías abelianas:

(a) $Ab(X)$, la categoría de haces de grupos abelianos sobre un espacio topológico X.

(b) $Mod(X)$, la categoría de haces de O_X-módulos sobre un espacio anillado (X,O_X)

(c) $C(X)$, la categoría de haces cuasicoherentes de O_X-módulos sobre un esquema X.

(d) $M(X)$, la categoría de haces coherentes de O_X-módulos sobre un esquema noetheriano X.

<u>Def</u>: Un <u>complejo</u> $A^\cdot$ en una categoría abeliana $\mathcal{Q}$ es una colección de objetos A^i, $i\in\mathbb{Z}$, y morfismos $d^i: A^i \longrightarrow A^{i+1}$, tales que $d^{i+1}\circ d^i = 0$, para todo i.

Un <u>morfismo de complejos</u> $f: A^\cdot \longrightarrow B^\cdot$ es un conjunto de morfismos $f^i: A^i \longrightarrow B^i$ para cada i, que conmutan con los morfismos d^i.

El <u>i-ésimo objeto de cohomología</u> $h^i(A^\cdot)$ del complejo $A^\cdot$ se define como $\operatorname{Ker} d^i / \operatorname{Im} d^{i-1}$. Si $f: A^\cdot \longrightarrow B^\cdot$ es un morfismo de complejos, entonces induce una aplicación natural $h^i(f): h^i(A^\cdot) \longrightarrow h^i(B^\cdot)$.

Si $0 \longrightarrow A^\cdot \longrightarrow B^\cdot \longrightarrow C^\cdot \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de complejos, existen aplicaciones naturales $\delta^i: h^i(C^\cdot) \longrightarrow h^{i+1}(A^\cdot)$ que dan origen a la sucesión exacta larga:

$$\cdots \longrightarrow h^i(A^\cdot) \longrightarrow h^i(B^\cdot) \longrightarrow h^i(C^\cdot) \xrightarrow{\delta^i} h^{i+1}(A^\cdot) \longrightarrow \cdots$$

Dos morfismos de complejos $f,g: A^\cdot \longrightarrow B^\cdot$ se dicen <u>homotópicos</u>

(not: $f \sim g$) si existe una colección de morfismos $k^i : A^i \longrightarrow B^i$ para cada i, tales que $f^i - g^i = d_B^{i-1} \circ k^i + k^{i+1} \circ d_A^i$; la colección de morfismos $k = (k^i)$ se llama operador de homotopía.

Si $f \sim g$, entonces f y g inducen el mismo morfismo $h^i(A^\cdot) \longrightarrow h^i(B^\cdot)$, para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ de una categoría abeliana en otra es aditivo si para cada par de objetos A, A' de $\mathcal{A}$, la aplicación inducida de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A')$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA,FA')$ es un morfismo de grupos abelianos.

F es exacto a izquierda si es aditivo y para cada sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

en $\mathcal{A}$, la sucesión:

$$0 \longrightarrow FA \longrightarrow FA' \longrightarrow FA'' \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathcal{B}$.

Analogamente se define exacto a derecha.

Def: Un objeto I de $\mathcal{A}$ es inyectivo si el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\ ,I)$ es exacto.

Una resolución inyectiva de un objeto A de $\mathcal{A}$ es un complejo $I^\cdot$, definido en grados no negativos ($A^i = 0$ si $i \leqslant 0$), junto con un morfismo $\varepsilon : A \longrightarrow I^0$ tal que I^d es un objeto inyectivo para cada $i \geqslant 0$, y tal que la sucesión:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots\cdots$$

es exacta.

Si cada objeto de $\mathcal{A}$ es isomorfo a un subobjeto de un objeto inyectivo diremos que $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos. Es fácil ver además que dos resoluciones inyectivas resultan homotópicamente equivalentes.

Sea ahora $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes objetos inyectivos, y sea $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor exacto a izquierda.

Se definen los funtores derivados a derecha R^iF, $i \geq 0$, como:

$$R^iF(A) = h^i(F(I^\bullet))$$

donde $I^\bullet$ es una resolución inyectiva de A.

TEOREMA IV.1: Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana con suficientes objetos inyectivos, y $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un funtor exacto a izquierda en otra categoría abeliana $\mathcal{B}$. Entonces:

(i) Para cada $i \geq 0$, R^iF es un funtor aditivo, que no depende de las resoluciones inyectivas elegidas.

(ii) F resulta isomorfo a R^0F.

(iii) Para cada sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

y cada $i \geq 0$, existe un morfismo natural $\delta^i: R^iF(A'') \longrightarrow R^{i+1}F(A')$ tal que se tiene la sucesión exacta larga:

$$\ldots \longrightarrow R^iF(A') \longrightarrow R^iF(A) \longrightarrow R^iF(A'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(A') \longrightarrow R^{i+1}F(A) \longrightarrow .$$

(iv) Dado un morfismo de la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

en la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$$

los morfismos δ dan un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} R^iF(A'') & \longrightarrow & R^{i+1}F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^iF(B'') & \longrightarrow & R^{i+1}F(B') \end{array}$$

(v) Para cada objeto inyectivo I de $\mathcal{A}$, y para cada $i > 0$, se tiene que $R^iF(I) = 0$.

IV.2 - Cohomología de haces

PROP. IV.1: Si A es un anillo, todo A-módulo es isomorfo a un submódulo de un A-módulo inyectivo.

Dem: Ver (6) 1,I,1.2.2 .

PROP IV.2: Sea (X,O_X) un espacio anillado. Entonces, la categoría $Mod(X)$ de haces de O_X-módulos tiene suficientes inyectivos.

Dem: Ver (4), III,2.2

COR.IV.1: Si X es un espacio topológico, entonces la categoría de haces de grupos abelianos sobre X tiene suficientes inyectivos.

Def: Sea X un espacio topológico. Sea $\Gamma(X, \ )$ el funtor sección global de $Ab(X)$ en Ab, se definen los funtores de cohomología $H^i(X, \ )$ como los funtores derivados a derecha de $\Gamma(X, \ )$. Para todo haz $\mathcal{F}$, los grupos $H^i(X, \ )$ son los grupos de cohomología de $\mathcal{F}$.

Def: Un haz $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X es flácido, si para toda inclusión de abiertos $V \subseteq U$, la restricción $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ es sobreyectiva.

LEMA IV.1: Si (X,O_X) es un espacio anillado, todo O_X-módulo inyectivo es flácido.

PROP IV.3: Si $\mathcal{F}$ es un haz flácido sobre un espacio topológico X, entonces $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$, para todo $i > 0$.

Para la demostración del lema y la proposición, ver (4), ch.3.

PROP. IV.4: Sea $\mathcal{F}$ un haz de grupos sobre un espacio topológico X, y sea

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow F^0 \xrightarrow{\gamma^0} F^1 \xrightarrow{\gamma^1} \cdots\cdots \xrightarrow{\gamma^{n-1}} F^n.$$

una sucesión exacta tal que F^i es flácido ($i \in \mathbb{N}$).

Entonces $H^i(X,\mathcal{F}) = h^i(\Gamma(X, \ )(F^\bullet))$

Dem: Como $\Gamma(X, \ )$ es exacto a izquierda, resulta evidente que:

$H^0(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F}) = h^0(\Gamma(X, \ )(F^\bullet))$

Se tiene además $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow F^0 \longrightarrow \mathrm{Im}\,\gamma^0 \longrightarrow 0$ es exacta, de donde se obtiene

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X,F^0) \xrightarrow{\Gamma(X,\gamma^0)} \Gamma(X, \mathrm{Im}\,\gamma^0) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

que también es exacta.

Entonces $H^1(X,\mathcal{F}) \cong \Gamma(X,\mathrm{Im}\,\gamma^0)/_{\mathrm{Im}\,\Gamma(X,\gamma^0)}$,

pero $h^1(\Gamma(X, \ )(F^\bullet)) = \mathrm{Ker}\,\Gamma(X,\gamma^1)/_{\mathrm{Im}\,\Gamma(X,\gamma^0)}$ y

$\mathrm{Ker}\,(X,\Gamma^1) \cong \Gamma(X, \mathrm{Im}\,\gamma^0)$. (*)

Siguiendo, se tienen $0 \longrightarrow \mathrm{Im}\,\gamma^i \longrightarrow F^{i+1} \longrightarrow \mathrm{Im}\,\gamma^{i+1} \longrightarrow 0$ $(i \geq 0)$

y usando que $H^n(X, F^{i+1}) = 0$ $(n > 0)$, resulta que $H^{n+1}(X,\mathrm{Im}\,\gamma^i) = H^n(X,\mathrm{Im}\,\gamma^{i+1})$.

Pero, $H^n(X,\mathcal{F}) = H^{n-1}(X,\mathrm{Im}\,\gamma^0) = H^{n-2}(X, \mathrm{Im}\,\gamma^1) = \cdots\cdots = H^1(X,\mathrm{Im}\,\gamma^{n-2})$.

Por otra parte,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\,\gamma^{n-2} \longrightarrow F^{n-1} \longrightarrow F^n \longrightarrow \cdots\cdots\cdots$$

es una resolución por haces flácidos de $\mathrm{Im}\,\gamma^{n-2}$, y, usando (*) para $\mathrm{Im}\,\gamma^{n-2}$ en lugar de $\mathcal{F}$, resulta que:

$$H^1(X,\mathrm{Im}\,\gamma^{n-2}) \cong \mathrm{Ker}\,\Gamma(X,\gamma^n)/_{\mathrm{Im}\,\Gamma(X,\gamma^{n-1})}$$

con lo cual queda probada la proposición.

TEOREMA IV.2: (Grothendieck. Sur quelques points d'algebre homologique, Tohoku Math. J. 9 (1957), 119-221).

Sea X un espacio topológico noetheriano de dimensión n.

Entonces, para todo $i > n$ y todo haz de grupos abeliano $\mathcal{F}$ sobre X, se tiene $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.

TEOREMA IV.3: (EGA III,1.3.1)

Sea $X = \mathrm{Spec}(A)$ el espectro de un anillo A. Entonces, para todo haz cuasicoherente $\mathcal{F}$ sobre X, y para todo $i \geq 0$, se tiene que $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$

TEOREMA IV.4: (Serre, J.P.; Sur la cohomologie des varietes algebriques, J. de Maths. Pures et Appl. 36 (1957) 1-16). Sea X un esquema noetheriano.

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) X es afín

(ii) $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $\mathcal{F}$ cuasicoherente y todo $i > 0$.

(iii) $H^1(X, \mathcal{J}) = 0$ para todo haz coherente de ideales $\mathcal{J}$.

IV.3 - La resolución canónica de un haz

Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre un espacio topológico X, designamos como $\mathcal{C}^0_0(X, \mathcal{F})$ el haz de gérmenes de secciones no necesariamente continuas de $\mathcal{F}$; una sección de $\mathcal{C}^0_0(X, \mathcal{F})$ sobre un abierto U es una aplicación $s: U \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ tal que $s(x) \in \mathcal{F}_x$ (para todo $x \in U$); las operaciones de restricción se definen en forma evidente en $\mathcal{C}^0_0(X, \mathcal{F})$. Es claro además que se tiene una inyección canónica j de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{C}^0_0(X, \mathcal{F})$.

PROP IV.5: El haz $\mathcal{C}^0_0(X, \mathcal{F})$ es flácido.

Dem: Resulta evidente , ya que cualquier seccion $s: U \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ se puede extender a $\bar{s}: X \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ como:

Vamos a definir ahora los haces $\mathcal{G}_0^n(X,\mathcal{F})$:

$$\mathcal{G}_0^1(X,\mathcal{F}) = \mathcal{G}_0^0(X,\ Z^1(X,\mathcal{F})),\ \text{donde } Z^1(X,\mathcal{F}) = \mathcal{G}_0^0(X,\mathcal{F})/\mathcal{F}$$

$$\mathcal{G}_0^2(X,\mathcal{F}) = \mathcal{G}_0^0(X,\ Z^2(X,\mathcal{F})),\ \text{donde } Z^2(X,\mathcal{F}) = \mathcal{G}_0^1(X,\mathcal{F})/\ ^1(X,\mathcal{F})$$

y así sucesivamente.

Es trivial ver que todos los $\mathcal{G}_0^i(X,\mathcal{F})$ resultan flácidos. $(i \geq 0)$.

Se tienen además los morfismos:

$$d_0^n : \mathcal{G}_0^n(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{G}_0^{n+1}(X,\mathcal{F})$$

que se obtienen componiendo:

$$\mathcal{G}_0^n(X,\mathcal{F}) \longmapsto Z^{n+1}(X,\mathcal{F}) = \mathcal{G}_0^n(X,\mathcal{F})/Z^n(X,\mathcal{F})$$

con la inyección:

$$Z^{n+1}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{G}_0^{n+1}(X,\mathcal{F}) = \mathcal{G}_0^0(X,\ Z^{n+1}(X,\mathcal{F}))$$

y además es claro, por la construcción, que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{G}_0^0(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{d_0^0} \mathcal{G}_0^1(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{d_0^1} \cdots\cdots$$

O sea, que se tiene una **resolución** de $\mathcal{F}$ por haces flácidos que llamaremos $\mathcal{G}_0^*(X,\mathcal{F})$

<u>Obs</u>: Se puede dar una construcción explícita de las secciones de los haces $\mathcal{G}_0^n(X,\mathcal{F})$. Si U es un abierto de X, una sección de $\mathcal{G}_0^0(X,\mathcal{F})$ sobre U es una función f de U en $\mathcal{F}(U)$ tal que $f(x_0) \in \mathcal{F}_{x_0}$. Por otra parte, $\mathcal{G}_0^1(X,\mathcal{F}) = \mathcal{G}_0^0(X,\mathcal{G}_0^0(X,\mathcal{F})/\mathcal{F})$, de modo que una sección de $\mathcal{G}_0^1(X,\mathcal{F})$ sobre un abierto de U es una función $f(x_0)$ que toma valores en los grupos cocientes $\mathcal{G}_0^0(X,\mathcal{F})_{x_0}/\mathcal{F}_{x_0}$.
Observemos además que, $\mathcal{G}_0^0(X,\mathcal{F})$ es suma directa de $\mathcal{F}$ y del subgrupo $\eta^0_{f(x)}$ formado por los gérmenes de funciones (no continuas) de $\mathcal{F}$ en x, que sobre x toman el valor 0_x .

A partir de ésto, puede representarse una sección f de $\mathcal{G}_0^1(X,\mathcal{F})$ sobre U como una función:

$$x_0 \longrightarrow f(x_0) \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}^0(x_0)$$

Por otra parte, el elemento $f(x_0) \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}^0(x_0)$ se representa (no en forma unívoca) por una aplicación:

$$x_1 \longrightarrow f(x_0,x_1) \in \mathcal{F}_{x_1}$$

sobre un entorno abierto $U(x_0)$ de x_0, que se anula si $x_1 = x_0$; por consiguiente las secciones de $\mathcal{G}_0^1(X,\mathcal{F})$ sobre U son las funciones $f(x_0,x_1) \in \mathcal{F}_{x_1}$ definidas para $x_0 \in U$, $x_1 \in U(x_0)$ y tales que $f(x_0,x_0) = 0$ $(x_0 \in U)$. Además, dos funciones f' y f" definen la misma sección de $\mathcal{G}_0^1(X,\mathcal{F})$ en U si y solo si todo $x_0 \in U$ tiene un entorno $V(x_0)$ tal que $f'(x_0,x_1) = f''(x_0,x_1)$ para $x_1 \in V(x_0)$.

La construcción anterior permite explicitar el operador de borde

$\overset{0}{d}: \mathcal{G}_0^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{G}_0^1(X,\mathcal{F})$:

si f es una sección de $\mathcal{G}_0^0(X,\mathcal{F})$ sobre U, df es la sección de $\mathcal{G}_0^0(X,\mathcal{F})/\mathcal{F}$ deducida de f pasando al cociente; si se representa df como una función que toma valores en los grupos variables $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}^0(x_0)$, se tendrá:

$$df(x_0) = \tilde{f}(x_0) \pmod{\mathcal{F}_{x_0}}$$

donde $\tilde{f}(x_0) \in \mathcal{G}_0^0(X,\mathcal{F})$ es el germen de sección continua de $\mathcal{G}_0^0(X,\mathcal{F})$ definida por f en x_0. Representemos $df(x_0)$ por una aplicación:

$$x_1 \longrightarrow df(x_0,x_1) \in \mathcal{F}_{x_1}$$

definida en un entorno de x_1; la relación anterior nos señala que la sección

$$x_1 \longrightarrow df(x_0,x_1) - f(x_1)$$

de $\mathcal{F}$ es continua en x_0; como $df(x_0,x_0) = 0$, la aplicación anterior es necesariamente igual, en el entorno de x_0, a la sección continua de $\mathcal{F}$ que, en x_0, vale $f(x_0)$; si designamos como:

$$x_1 \longrightarrow f(x_0)(x_1)$$

una cualquiera de estas secciones, definida en el abierto $U(x_0)$, obtenemos la formula:

$$df(x_0,x_1) = f(x_1) - f(x_0)(x_1)$$

que es valida en un conjunto de la forma $x_0 \in U$, $x_1 \in U(x_0)$.

Finalmente, como $\mathcal{C}^1_0(X,\mathcal{F}) = \mathcal{C}^0_0(X,\mathcal{C}^0_0(X,\mathcal{F})/\mathcal{F})$, el mismo razonamiento que antes muestra que para todo x, $\mathcal{C}^1_0(X,\mathcal{F})_x$ es suma directa del subgrupo $\eta^1(x)$ formado por los germenes de secciones (no continuas) de $\mathcal{Z}^1$ que en x tomen el valor 0, y del subgrupo $\mathcal{Z}^1_x = \eta^0(x)$.

Si representamos una seccion $f(x_0,x_1)$ de $\mathcal{C}^1_0(X,\mathcal{F})$ como una aplicacion:

$$x_0 \longrightarrow f(x_0) \in \eta^0(x_0)$$

es claro que el germen $\tilde{f}(x) \in \mathcal{C}^1_0(X,\mathcal{F})_x$ definido por f en x pertenece a $\eta^1(x)$ si y solo si $f(x) = 0$; como $f(x)$ es, en el punto x, el germen de la seccion (no continua) de $\mathcal{F}$ definida por la aplicacion $x_1 \longrightarrow f(x,x_1)$ se ve que la relacion:

$$\tilde{f}(x) \in \eta^1(x)$$

equivale al hecho de que se tiene $f(x,x_1) = 0$ si x_1 es suficientemente próximo a x.

Antes de extender estos resultados a un grado p cualquiera, notemos que tomando $\mathcal{Z}^p = \mathcal{Z}^p(X,\mathcal{F}) = \mathcal{C}^{p-1}_0(X,\mathcal{F})/\mathcal{Z}^{p-1}$ se tiene la relacion:

$$\mathcal{C}^p_0(X,\mathcal{F}) = \mathcal{C}^0_0(X,\mathcal{Z}^p)$$

y por consiguiente, que para todo x, $\mathcal{C}^p_0(X,\mathcal{F})$ es suma directa del subgrupo $\mathcal{Z}^p_x$ y del subgrupo $\eta^p(x)$ formado por los germenes de secciones no continuas de $\mathcal{F}$ que toman el valor 0 en x.

Se demuestra entonces, por inducción sobre p, que (ver (8), pag.17):

(a) Toda sección de $\mathcal{C}(X,\mathcal{F})$ sobre un abierto U se puede representar como una función $f(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}) \in \mathcal{F}_{x_p}$, nula si $x_0 = x$ y definida sobre un conjunto de la forma: $x_0 \in U$; $x_1 \in U(x_0)$; $\ldots$; $x_p \in U(x_0, \ldots, x_{p-1})$, (*)

donde se designa en forma general como $U(x_0, \ldots, x_i)$ un abierto que contiene a x_i y depende de $x_0, \ldots, x_i$; además, dos de tales funciones f' y f" definen la misma sección de $\mathcal{C}_0^p(X,\mathcal{F})$ si y solo si coinciden sobre un conjunto de la forma (*).

(b) El morfismo $d_0^{p-1}: \mathcal{C}_0^{p-1}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}_0^p(X,\mathcal{F})$ está dado por la fórmula:

$$(**)\quad d_0^{p-1} f(x_0, \ldots, x_p) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i f(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p) + (-1)^p f(x_0, \ldots, x_{p-1})(x_p)$$

donde $f(x_0, \ldots, x_{p-1})(x_p)$ designa el valor en el punto x_p de una sección continua de un abierto $U(x_0, \ldots, x_{p-1})$, y es igual a $f(x_0, \ldots, x_{p-1})$ si $x_p = x_{p-1}$

(c) Sea f una sección de $\mathcal{C}_0^p(X,\mathcal{F})$ sobre un entorno de un punto x, representada por una función $f(x_0, \ldots, x_p) \in \mathcal{F}_{x_p}$; para que el germen $\tilde{f}(x) \in \mathcal{C}_0^p(X,\mathcal{F})_x$ definido por f en x, esté en el subgrupo $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}^p(x)$ es necesario y suficiente que

$$f(x, x_1, \ldots, x_p) = 0$$

sobre un conjunto de la forma:

$$x_1 \in U;\ x_2 \in U(x_1); \ldots, x_p \in U(x_1, \ldots, x_{p-1}),$$

donde U es un entorno de x.

IV.4 - Familias de soportes

Def: Sea $s \in \Gamma(X,\mathcal{F})$, llamamos soporte de s el conjunto de $x \in X$ tales que $s(x) \neq 0_x$.
Es claro que soporte de s es cerrado en X.

Def: Sea Φ una familia de subconjuntos cerrados de X.
Diremos que Φ es una familia de soportes en X si:

(a) La unión de dos elementos de está en

(b) Todo cerrado contenido en un conjunto que está en Φ, está también en Φ.

Dado un haz de grupos $\mathcal{F}$ sobre X, notaremos $\Gamma_{\Phi}(\mathcal{F})$ a las secciones s en $\Gamma(X,\mathcal{F})$ tales que el soporte de s está en Φ.

$\Gamma_{\Phi}(\mathcal{F})$ resulta entonces un subgrupo de $\Gamma(X,\mathcal{F})$ y se tiene $\mathcal{F} \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(\mathcal{F})$.

Def: Llamaremos familia paracompactificante en X a toda familia Φ de partes de X que satisfaga las siguientes condiciones:

(a) Todo $S \in \Phi$ es cerrado y paracompacto.

(b) Toda unión finita de conjuntos que están en Φ, está en Φ.

(c) Todo subconjunto cerrado de un $S \in \Phi$ está en Φ.

(d) Todo $S \in \Phi$ posee un entorno que también pertenece a Φ.

Dada una familia de soportes Φ en X, y un haz $\mathcal{F}$ sobre X, notaremos:

$$C_0^*(\Phi,\mathcal{F}) = \Gamma_{\Phi}(\mathcal{C}_0^*(X,\mathcal{F}))$$

Def: Sea X un espacio topológico paracompacto y $\mathcal{F}$ un haz de conjuntos sobre X. Si para todo $x \in X$, existe un entorno U de x que verifica la condición: (Toda sección de $\mathcal{F}$ sobre un subconjunto cerrado de X, contenido en U, se prolonga a U), entonces diremos que $\mathcal{F}$ es mudo.

Def: Sea $\mathcal{F}$ un haz de grupos sobre un espacio topológico paracompacto X. Diremos que $\mathcal{F}$ es fino si el haz de anillos $Hom_Z(\mathcal{F},\mathcal{F})$ es mudo.

Def: Sea X un espacio topológico, Φ una familia paracompactificante en X y $\mathcal{F}$ un haz de conjuntos sobre X.

Diremos que $\mathcal{F}$ es mudo sobre Φ si, para todo $S \in \Phi$, el haz inducido $\mathcal{F}|_S$

es mudo; o sea, si para todo par S', S" $\in \Phi$ con S" $\subset$ S', la restricción $\mathcal{F}(S') \longrightarrow \mathcal{F}(S'')$ es suryectiva.

Def: Sea X un espacio topológico, Φ una familia paracompactificante en X y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre X, diremos que $\mathcal{F}$ es <u>fino</u> sobre Φ si $\mathcal{F}|_S$ es fino, para todo S

IV.5 - <u>Cohomología a valores en un haz sobre una familia de soportes</u>

Dados un espacio topológico X, una familia de soportes Φ sobre X y un haz sobre X, llamaremos $H^n_\Phi(X, \mathcal{F})$ al n-ésimo grupo de cohomología del complejo $C^*_\Phi(X, \mathcal{F})$; $h^n(C^*_0(\Phi, \mathcal{F}))$.

<u>Teorema IV.5:</u> Los funtores $\mathcal{F}_n \longrightarrow \Gamma_\Phi(\mathcal{F})$ y $\mathcal{F} \longrightarrow H^0_\Phi(X, \mathcal{F})$ son isomorfos.

<u>Dem:</u> Resulta evidente a partir de que Γ_Φ es exacto a derecha y se tiene la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^0_0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^1_0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \ldots\ldots$$

con lo cual, se obtiene la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \Gamma_\Phi(\mathcal{F}) \longrightarrow C^0_0(\Phi, \mathcal{F}) \longrightarrow C^1_0(\Phi, \mathcal{F}) \longrightarrow \ldots\ldots$$

<u>Obs:</u> Dada una sucesión exacta de haces:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

se tiene una sucesión exacta de complejos:

$$0 \longrightarrow C^*_0(\Phi, \mathcal{F}') \longrightarrow C^*_0(\Phi, \mathcal{F}) \longrightarrow C^*_0(\Phi, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0$$

de donde se obtiene una sucesión exacta larga de cohomología:

$$0 \longrightarrow \Gamma_\Phi(\mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma_\Phi(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_\Phi(\mathcal{F}'') \longrightarrow H^1_\Phi(X,\mathcal{F}') \longrightarrow H^1_\Phi(X,\mathcal{F}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \dots\dots \longrightarrow H^i_\Phi(X,\mathcal{F}') \longrightarrow H^i_\Phi(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^i_\Phi(X,\mathcal{F}'') \longrightarrow H^{i+1}_\Phi(X,\mathcal{F}')$$

TEOREMA IV.6: Sea X un espacio topológico, Φ una familia de soportes en X y $\mathcal{F}$ un haz sobre X. Se tiene:

$$H^n_\Phi(X,\mathcal{F}) = 0 \quad , \text{ para } n \geq 1$$

en los siguientes casos:

(a) El haz $\mathcal{F}$ es flácido.

(b) La familia Φ es paracompactificante y $\mathcal{F}$ verifica que para todos $S,S' \in \Phi$ tales que $S' \subseteq S$, la aplicación de restricción $\mathcal{F}(S) \longrightarrow \mathcal{F}(S')$ es suryectiva.

Dem: Ver (6), Cap.II.4 .

IV.6 - Cohomología de Čech

Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento de X: dada una n+1-upla en I^{n+1}, $(i_0,i_1,\dots,i_n)$, notaremos como $U_{i_0\dots i_n} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$.

Dado un haz $\mathcal{F}$ sobre X, se toma un buen orden en I y se define el complejo $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ de grupos abelianos de la siguiente forma:

$$C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{i_0<\dots<i_p} \mathcal{F}(U_{i_0\dots i_p}) \qquad (n\in \mathbb{N}_0)$$

y $d^p: C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$

$$(d^p\alpha)_{i_0\dots i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0\dots \hat{i}_k\dots i_{p+1}}\Big|_{U_{i_0\dots i_{p+1}}}$$

Resulta fácil ver que $d^{p+1} \circ d^{p} = 0 \ (p \geq 0)$.

Observemos que se podría tomar $\prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p})$, con la condición de que si $\alpha \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$; $\alpha_{i_0 \dots i_p} = 0$ si existe $i_j = i_k$ con $j \neq k$ y $\alpha_{i_0 \dots i_p} = sg\sigma . \alpha_{\sigma(i_0) \dots \sigma(i_p)}$ y σ es la permutación que ordena los índices de menor a mayor.

Def: Sea X un espacio topologico y $\mathcal{U}$ un cubrimiento de X. Dado un haz de grupos abelianos $\mathcal{F}$ sobre X, se define el p-esimo grupo de cohomología de Čech, con respecto al cubrimiento $\mathcal{U}$, como:

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = h^p(C^{\cdot}(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \qquad (p \geq 0)$$

Dado un morfismo de haces $f: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ se deduce en forma evidente un morfismo $f^*: \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ para todo $p \geq 0$.

Veamos ahora otra forma de definir $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Dado U abierto en X; $\mathcal{U} \cap U = (U_i \cap U)_{i \in I}$ resulta un cubrimiento de U; además se tiene $i: U \longrightarrow X$ la inclusión. Si $p \geq 0$, consideremos:

$$\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} i_*(\mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p}))$$

Entonces $\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ resulta un haz sobre X (ver (6), Cap.II.5.2) y se tienen como antes, $d^p: \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

Entonces, es fácil ver que:

$$\Gamma(X, \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Esta fórmula nos conduce a definir, para una familia Φ de soportes en X, el complejo:

$$C^*_{\Phi}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma_{\Phi}(\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

y se designan los grupos de cohomología de este complejo:

$$\check{H}^p_\Phi(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

Observemos que existe un morfismo canónico $j:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ definido por:

si $\alpha\in\mathcal{F}(U)$ entonces $j(\alpha)_{i_0}$ es la restriccion de α a $U\cap U_{i_0}$. Es claro que $d^0\circ j=0$

<u>TEOREMA IV.7</u>: Si el cubrimiento $\mathcal{U}$ es abierto, o bien cerrado y localmente finito; entonces, para todo haz $\mathcal{F}$ la sucesión siguiente es exacta:

$$0\longrightarrow\mathcal{F}\xrightarrow{j}\mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\xrightarrow{d^0}\mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\xrightarrow{d^1}\ldots\ldots$$

o sea, $\mathcal{C}^*(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es una resolucion de $\mathcal{F}$.

<u>Dem</u>: El hecho de que j es inyectiva resulta inmediato a partir de las propiedades elementales de los haces, lo mismo que $Ker(d^0)=Im(j)$ si $\mathcal{U}$ es abierto.

Si $\mathcal{U}$ es cerrado y localmente finito, nos remitimos a la demostración de (6), II.1.3 y II.5.2.

Falta probar que $Im(d^n)=Ker(d^{n+1})$ si $n\geq 1$.

Para esto consideramos en $x\in X$ un germen $\tilde{\alpha}$ de $\mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})_x$ tal que $d^{n+1}(\tilde{\alpha})=0$; existe un entorno abierto U de X tal que $\tilde{\alpha}$ es el representante de un elemento en $\mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})(U)$.

Si $\mathcal{U}$ es abierto se puede suponer $U\subset U_i$ para algún índice i, con lo cual $U\cap U_{i_0\ldots i\ldots i_n}=U\cap U_{i_0\ldots i_n}$ para todos $i_0<\ldots<i_n$; se define así

$\beta\in\mathcal{C}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})(U)$: $\qquad \beta_{i_0\ldots i_n}=\alpha_{i_0\ldots i\ldots i_n}=\tilde{\alpha}_{i_0\ldots i_n}$

se tiene que $(d\beta)_{i_0\ldots i_{n+1}}=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\alpha_{i_0\ldots i\ldots i_{n+1}}$

pero, como $d\alpha = 0$, resulta:

$$\alpha_{i_0 \dots i_{n+1}} - \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{n+1}} = 0$$

en $U \cap U_{i_0 \dots i_{n+1}}$; con lo cual $d\beta = \alpha$.

Si $\mathcal{U}$ es cerrado y localmente finito, se puede suponer, tomando U suficientemente pequeño que $\mathcal{U}$ es finito y que $x \in U_i$, para todo i (reemplazando $\mathcal{U}$ por $\mathcal{U} \cap U$). Como x pertenece a todos los $U_{i_0 \dots i_{n+1}}$ se puede considerar el valor en x de la sección $\alpha_{i_0 \dots i_{n+1}}$, como $d\alpha = 0$, resulta:

$$\sum_{k=0}^{n+2} (-1)^k \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{n+2}} (x) = 0$$

Elijamos ahora un índice i cualquiera y tomemos:

$$\beta_{i_0 \dots i_n}(x) = \alpha_{i_0 \dots i \dots i_n} (x)$$

como hay finitos i, se puede suponer que U es tan pequeño que los gérmenes de secciones así definidos se prolongan a secciones $\beta_{i_0 \dots i_n} \in \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_n})$ de donde $\beta \in \mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U)$, y es claro con la misma cuenta que en el caso abierto, que las secciones que componen $d\beta$ y α tienen el mismo valor en x; como hay un número finito de tales secciones, se puede suponer que $d\beta = \alpha$, con lo cual queda probado el teorema.

COR: Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto, o cerrado y localmente finito de X, para todo haz $\mathcal{F}$, $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ resulta isomorfo a $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \check{H}^n(X, \mathcal{F})$.

Se tiene por otra parte el siguiente resultado:

TEOREMA IV.8: Sea X un espacio topológico; $\mathcal{U}$ un cubrimiento de X, $\mathcal{F}$ un haz sobre

X y Φ una familia de soportes en X. Entonces:

$$H^n_\Phi(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0 \qquad (n \geq 1)$$

si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(a) $\mathcal{U}$ es abierto y $\mathcal{F}$ es flácido.

(b) $\mathcal{U}$ es abierto; es paracompactificante y $\mathcal{F}$ es fino sobre Φ .

(c) $\mathcal{U}$ es cerrado y localmente finito, Φ es paracompactificante y verifica que si S' y $S \in \Phi$ y $S' \subset S$ entonces la restricción $\mathcal{F}(S) \longrightarrow \mathcal{F}(S')$ resulta suryectiva.

Dem: Ver (6) II.5.2.

Se tiene además (ver (6),II.4.7) un morfismo canónico:

$$\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^*(\Phi, \mathcal{F})$$

TEOREMA IV.9: Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X y $\mathcal{F}$ un haz sobre X. Para que los morfismos canónicos:

$$\check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F})$$

sean biyectivos es suficiente que para toda n+1-upla $i_0 < \dots < i_n$ en I.

$$\check{H}^q(U_{i_0 \dots i_n}, \mathcal{F}) = 0 \qquad (q \geq 1)$$

Dem: Ver (6), II.5.4.

Def: Sean $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ y $\mathcal{W} = (W_j)_{j \in J}$ dos cubrimientos de un espacio topológico X. Diremos que $\mathcal{W}$ es más fino que $\mathcal{U}$ si existe una aplicación $\theta : J \longrightarrow I$ $W_j \subseteq U_{\theta(j)}$, para todo $j \in J$.

Si $\mathcal{F}$ es un haz sobre X y $\mathcal{W}$ un cubrimiento más fino que $\mathcal{U}$ y Φ una familia de soportes en X; se tiene un morfismo de complejos:

$$\theta^*: C^*_\Phi(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^*_\Phi(\mathcal{W}, \mathcal{F})$$

$\theta^*(\alpha)_{j_0 \ldots j_n}$ es la restricción a $W_{j_0 \ldots j_n} \subset U_{\theta(j_0) \ldots \theta(j_n)}$.

De la misma forma se obtiene $\theta^*: \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{W}, \mathcal{F})$

<u>TEOREMA IV.10</u>: Si $\mathcal{W}$ es más fino que $\mathcal{U}$ y θ, θ' son dos aplicaciones de J en I tales que $W_j \subset U_{\theta(j)}$ y $W_j \subset U_{\theta'(j)}$, para todo $j \in J$; entonces θ^* y θ'^* son homotópicas.

<u>Dem</u>: Ver (6), II.5.7.

Luego, si $\mathcal{W}$ es más fino que $\mathcal{U}$ se tienen morfismos canónicos:

$$\check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^n(\mathcal{W}, \mathcal{F})$$

$$\check{H}^n_\Phi(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^n_\Phi(\mathcal{W}, \mathcal{F})$$

para todo haz $\mathcal{F}$ y toda familia de soportes Φ .

Si consideramos ahora los cubrimientos abiertos de X de la forma $\mathcal{U} = (U_x)_{x \in X}$ tal que U_x es un entorno de x, para todo $x \in X$, se tiene en la familia $\mathcal{R}_0(X)$ de todos los cubrimientos de esta forma una relación de orden:

$\mathcal{U} << \mathcal{W}$ si y solo si $U_x \subset W_x$, para todo $x \in X$.

Si $\mathcal{U} << \mathcal{W}$ se tienen morfismos canónicos:

$$C^*_\Phi(\mathcal{W}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^*_\Phi(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^*(\mathcal{W}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

para todo $\mathcal{F}$ haz sobre X y toda familia de soportes Φ ; que induce un morfismo

$$\check{H}^n_\Phi(\mathcal{W}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^n_\Phi(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad \text{y} \quad \check{H}^n(\mathcal{W}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Definimos $C^*_\Phi(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{R}(X)} C^*_\Phi(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

$$C^*(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{R}(X)} C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

de donde, se tienen:

$$\check{H}^n_\Phi(X, \mathcal{F}) = H^n_\Phi(\check{C}(X, \mathcal{F})) = \varinjlim_{\mathcal{R}(X)} H^n_\Phi(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

$$\check{H}^n(X, \mathcal{F}) = H^n(\check{C}^*(X, \mathcal{F})) = \varinjlim_{\mathcal{R}(X)} H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

los grupos de cohomología de Čech de X con soporte en Φ y a valores en $\mathcal{F}$; y los grupos de cohomología de Čech de X a valores en $\mathcal{F}$, respectivamente.

Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de X que puede ser refinado por un cubrimiento abierto, se tienen morfismos canónicos:

$$\check{H}^n_\Phi(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n_\Phi(X, \mathcal{F})$$

$$\check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F})$$

esto resulta pues todo cubrimiento de esa forma tiene un refinamiento $\tilde{\mathcal{U}} \in \mathcal{R}(X)$, se tome u la composición:

$$\check{H}^n_\Phi(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^n_\Phi(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^n_\Phi(X, \mathcal{F})$$

(analogamente, para $\check{H}^n(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^n(X,\mathcal{F})$)

Este morfismo resulta independiente del refinamiento $\tilde{\mathfrak{U}}$ elegido (ver(6),II.5.8)

Se podría decir en cierto sentido que $\check{H}^n_\Phi(X,\mathcal{F})$ (resp. $\check{H}^n(X,\mathcal{F})$) resulta el límite inductivo de los $\check{H}^n_\Phi(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ (resp. $\check{H}^n(\mathfrak{U},\mathcal{F})$), cuando $\mathfrak{U}$ recorre todos los cubrimientos abiertos de X. (En general, la familia de todos los cubrimientos abiertos no es un conjunto).

Es claro, por otra parte, que si X es cuasicompacto para calcular los grupos de Čech se puede tomar el límite sólo sobre los cubrimientos finitos deX.

TEOREMA IV.11: Sea X un espacio topológico, Φ una familia de soportes en X, y supongamos que todo $S \in \Phi$ posee un entorno en Φ.

Entonces el funtor $\check{C}^*_\Phi(X,\ )$ transforma las sucesiones exactas de haces en sucesiones exactas de complejos.

Obs: Los morfismos canónicos $\check{H}^n(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X,\mathcal{F})$ y $\check{H}^n_\Phi(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^n_\Phi(X,\mathcal{F})$ inducen morfismos $\check{H}^n(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X,\mathcal{F})$ y $\check{H}^n_\Phi(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^n_\Phi(X,\mathcal{F})$ respectivamente.

TEOREMA IV.12: Sea X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un haz sobre X y Φ una familia paracompactificante en X.

Los morfismos canónicos:

$$\check{H}^n_\Phi(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^n_\Phi(X,\mathcal{F})$$

son biyectivos.

Dem: Ver (6),II.5.10.1, pág.228.

Si X es un espacio cuasicompacto, la familia de todos los cerrados de X, a la que llamaremos $\mathcal{C}$ es paracompactificante, y $\check{H}^n_{\mathcal{C}}(X,\mathcal{F}) = \check{H}^n(X,\mathcal{F})$, con lo cual resulta que si X es cuasicompacto, $\check{H}^n(X,\mathcal{F}) \cong H^n(X,\mathcal{F})$, para todo $n \in N_0$.

IV.7 - Morfismo canónico entre $\mathcal{C}^*(X,\mathcal{F})$ y $\mathcal{C}_0^*(X,\mathcal{F})$

Dados un espacio topologico X y un haz $\mathcal{F}$ sobre X, recordemos que $\mathcal{C}^{*p}(X,\mathcal{F})$ se obtiene tomando limite de $\mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ cuando $\mathcal{U}$ recorre la familia de cubrimientos de la forma $\mathcal{U} = (U_x)_{x\in X}$ y U_x es un entorno de x, para todo $x \in X$.

Por otra parte, si $\mathcal{U} = (U_x)_{x\in X}$ y U es un abierto de X, el grupo $\mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})(U)$ es el subgrupo de $\prod_{x_0\ldots x_p} i_*(\mathcal{F}(U_{x_0\ldots x_p}))$, formado por todas las α tales que $\alpha_{x_0\ldots x_p} = 0$ si existe $x_i = x_j$ con $i \neq j$, $\alpha_{x_0\ldots x_p} = sg\,\sigma.\alpha_{\sigma(x_0)\ldots\sigma(x_p)}$, si σ es la permutación que ordena los x_i de menor a mayor; donde se tiene un buen orden de X fijo e $i: U \hookrightarrow X$ es la inclusion.

Definamos entonces $i^p: \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}_0^p(X,\mathcal{F})$, donde $\mathcal{U} = (U_x)_{x\in X}$

Para esto, dado U abierto en X; si α es una sección sobre U de $\mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$; o sea, $\alpha = (\alpha_{x_0\ldots x_p})$ se le asigna la sección de $\mathcal{C}_0^p(X,\mathcal{F})$ sobre U dada por:

$f(x_0,\ldots,x_p) \in \mathcal{F}_{x_p}$ es la clase de $\alpha_{x_0\ldots x_p}$ en $\mathcal{F}_{x_p}$.

La aplicacion queda bien definida, a partir de la caracterización que se hizo en IV.3 de $\mathcal{C}_0^p(X,\mathcal{F})$ y es trivial ver que los siguientes diagramas resultan conmutativos.

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \xrightarrow{d^p} & \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_0^p(X,\mathcal{F}) & \xrightarrow{d_0^p} & \mathcal{C}_0^{p+1}(X,\mathcal{F}) \end{array}$$

con $p \geq 0$; y $\mathcal{U}$ un cubrimiento de X de la forma $\mathcal{U} = (U_x)_{x \in X}$.

Si $\mathcal{U} \ll \mathcal{W}$:

$$
(2) \qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^p(\mathcal{W}, \mathcal{F}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \arrow[dl] \\
& \mathcal{C}_0^p(X, \mathcal{F}) &
\end{tikzcd}
$$

Con lo cual, se tiene $\mathcal{C}^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}_0^p(X, \mathcal{F})$.

V - PRODUCTO DE INTERSECCION

El objetivo de este capítulo es demostrar que, en el caso en que X es un *esquema* regular y notheriano, el producto $H^p(X, \underline{\underline{K}}_p) \times H^q(X, \underline{\underline{K}}_q) \xrightarrow{\cdot} H^{p+q}(X, \underline{\underline{K}}_{p+q})$ inducido por la definición de $\cdot_K : \underline{\underline{K}}_p(A) \times \underline{\underline{K}}_q(B) \longrightarrow \underline{\underline{K}}_{p+q}(A \otimes B)$ dada en el Capítulo II, coincide con el producto en el anillo de Chow de X; es decir, que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, \underline{\underline{K}}_p) \times H^q(X, \underline{\underline{K}}_q) & \xrightarrow{\cdot K} & H^{p+q}(X, \underline{\underline{K}}_{p+q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^p(X) \times A^q(X) & \xrightarrow{\cdot} & A^{p+q}(X) \end{array}$$

V.1 - Construcción de $\cdot_K$

Sea X un esquema, entonces existe un cubrimiento $(U_i)_{i \in I}$ de X tal que (U_i, O_{X,U_i}) es isomorfo al esquema afín Spec(A_i), para algún anillo A_i, y para todo $i \in I$.

Es evidente que con el $\cdot_K$ del capítulo II, se tiene :
$\underline{\underline{K}}_p(U_i) \times \underline{\underline{K}}_q(U_j) \xrightarrow{(.K)ij} \underline{\underline{K}}_{p+q}(U_i \times U_j)$.

Si $x \in X$, existe $U_j \in (U_i)_{i \, I}$ tal que $x \in U_j$ y tomando :

$$\Delta^*(\cdot_K)_{ii} : \underline{\underline{K}}_p(U_i) \times \underline{\underline{K}}_q(U_i) \longrightarrow \underline{\underline{K}}_{p+q}(U_i \times U_i) \longrightarrow \underline{\underline{K}}_{p+q}(U_i),$$

donde $\Delta: U_i \longrightarrow U_i \times U_i$ es la diagonal.

Como para definir el producto basta definirlo en cada fibra, se tiene $\underline{\underline{K}}_p(X) \times \underline{\underline{K}}_q(X) \longrightarrow \underline{\underline{K}}_{p+q}(X)$. (Si $x \in U_i \cap U_j$, como $U_i \cap U_j$ también es un esquema afín, el producto coincide).

$\mathcal{U} = (V_j)_{j \in J}$ un cubrimiento de X; $s \in \mathcal{C}^p(X, \underline{\underline{K}}_p)$ y $t \in \mathcal{C}^q(X, \underline{\underline{K}}_q)$;

se quiere definir $s\cdot_K t \in \mathcal{C}^{p+q}(\mathcal{U}, \underline{\underline{K}}_{p+q})$

Si tomo $\mathcal{U}\times\mathcal{U} = (V_i \times V_j)_{i,j\in J}$; $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ resulta un cubrimiento de $X \times X$ tomo entonces $s\times t \in \mathcal{C}^{p+q}(\mathcal{U}\times\mathcal{U}, \underline{\underline{K}}_{p+q})$ de la siguiente forma:

$$(s \times t)_{(i_0j_0)(i_1j_1)\dots(i_{p+q}j_{p+q})}(x,y) = s_{i_0\dots i_p}(x)\cdot_K t_{j_p\dots j_{p+q}}(y)$$

ya que, si $x \in V_{i_0\dots i_{p+q}} \Rightarrow x \in V_{i_0\dots i_p}$

si $y \in V_{j_0\dots j_{p+q}} \Rightarrow y \in V_{j_p\dots j_{p+q}}$

$$\text{y}\quad s_{i_0\dots i_p}\Big|_{V_{i_0\dots i_{p+q}}} \in \underline{\underline{K}}_p(V_{i_0\dots i_{p+q}})$$

$$t_{j_p\dots j_{p+q}}\Big|_{V_{j_0\dots j_{p+q}}} \in \underline{\underline{K}}_q(V_{j_0\dots j_{p+q}})$$

Por otra parte se tiene $\Delta^*: \mathcal{C}^{p+q}(\mathcal{U}\times\mathcal{U}, \underline{\underline{K}}_{p+q}) \longrightarrow \mathcal{C}^{p+q}(\mathcal{U}, \underline{\underline{K}}_{p+q})$, dada por: $(\Delta^*\circ s)_{i_0\dots i_{p+q}}(y) = s_{(i_0i_0)\dots(i_{p+q}i_{p+q})}(y)$, $(y \in V_{i_0\dots i_{p+q}})$

Es evidente que $(\Delta^*\circ \times)$ conmuta con los morfismos de borde ∂^i, y por lo tanto puede definirse:

$$\cdot_K(\mathcal{U}): H^p(\mathcal{U}, \underline{\underline{K}}_p) \times H^q(\mathcal{U}, \underline{\underline{K}}_q) \longrightarrow H^{p+q}(\mathcal{U}, \underline{\underline{K}}_{p+q})$$

y tomando límite sobre todos los cubrimientos:

$$\cdot_K : H^p(X, \underline{\underline{K}}_p) \times H^q(X, \underline{\underline{K}}_q) \longrightarrow H^{p+q}(X, \underline{\underline{K}}_{p+q})$$

V.2 - Comparación de $\cdot_K$ con el producto del anillo de Chow, cuando X es regular

Dado un esquema X regular y notheriano, se tiene la resolución por haces flaccidos de $\underline{\underline{K}}_p$, dada por :

$$\underline{\underline{K}}_p \longrightarrow \coprod_{x \in X_0} K_p k(x) \longrightarrow \coprod_{y \in X_1} K_{p-1} k(x) \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \coprod_{x \in X_p} K_0 k(x)$$

donde X_i es el conjunto de puntos de codimensión uno en X.

Recordemos además que $\underline{\underline{K}}_p(X)$ es el haz asociado al prehaz $(K_p(V))_V$ abierto en X y que la imagen de d_i son los ciclos de codimensión p linealmente equivalentes a cero.

<u>PROP V.1</u>: Sea V abierto en X, entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K_0(V) \times K_0(V) & \xrightarrow{\cdot_K} & K_0(V) \\ \downarrow d_0 \times d_0 & & \downarrow d_0 \\ \coprod_{x \in V_0} \mathbb{Z} \times \coprod_{y \in V_0} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot_i} & \coprod_{t \in V_0} \mathbb{Z} \end{array}$$

donde $\cdot_i$ es el producto de intersección $A^0(V) \times A^0(V) \longrightarrow A^0(V)$

Si x, y $\in V_0$, entonces $x\cdot_i y = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ x & \text{si } x = y \end{cases}$

ya que tanto $\{\bar{x}\}$ como $\{\bar{y}\}$ son componenetes conexas de V ,y los puntos genéricos de cada componente conexa son uno.

<u>Dem</u>: Sean P, Q $\in K_0(V)$

$(d_0 \times d_0)(P, Q) = ((n_x),(m_y))_{\substack{x \in V_0 \\ y \in V_0}}$ si $\dim_{k(x)} P_x = n_x$ y $\dim_{k(y)} Q_y = m_y$,

$\cdot_i \; (d_0 \times d_0)(P, Q) = (n_x \cdot m_y)_{x \in V_0}$

Por otra parte:

$\cdot \; (P, Q) = (P \otimes_{O_V} Q)$

$$d_o \cdot_K (P, Q) = (\dim_{K(x)}(P_x \underset{O_{V,x}}{\otimes} Q_x))_{x\in V_o} = (n_x \cdot m_x)_{x \in V_o}$$

PROP V.2: Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de V, con V abierto en X; el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
K_o(V) \times K_o(V) \arrow[r, "\partial_o \times \partial_o"] \arrow[d, "\otimes"] & \mathcal{C}^o(\mathcal{U}, K_o) \times \mathcal{C}^o(\mathcal{U}, K_o) \arrow[d, "\cdot_K"] \\
K_o(V \times V) \arrow[r, "\partial_o"] & \mathcal{C}^o(\mathcal{U} \times \mathcal{U}, K_o)
\end{tikzcd}$$

Dem: Sean $P, Q \in K_o(V)$;

$(\partial_o \times \partial_o)(P, Q) = (s,t)$; donde:

$s_i : U_i \longrightarrow K_o(U_i)$, $s_i(x) = P_x$

$t_j : U_j \longrightarrow K_o(U_j)$, $t_j(x) = Q_x$

$\cdot_K(s,t)_{(i,j)} = s_i \cdot_K t_j : U_i \times U_j \longrightarrow K_o(U_i \times U_j)$

$(s_i \cdot_K t_j)(x,y) = P_x \otimes Q_y$

Por otra parte, $P \cdot_K Q = P \underset{O_V}{\otimes} Q$

$\partial_o(P \cdot_K Q)_{(i,j)} : U_i \times U_j \longrightarrow K_o(U_i \times U_j)$

$\partial_o(P \cdot_K Q)_{(i,j)}(x,y) = P_x \underset{O_{V,y}}{\otimes} Q$

Obs: (1) Es evidente que
$$\begin{tikzcd}
K_o(V \times V) \arrow[r, "\partial_o"] \arrow[d, "\Delta^*"] & \mathcal{C}^o(\mathcal{U} \times \mathcal{U}, K_o) \arrow[d, "\Delta^*"] \\
K_o(V) \arrow[r, "\partial_o"] & \mathcal{C}^o(\mathcal{U}, K_o)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, para V abierto en X y $\mathcal{U}$ cubrimiento de V.

(2) De las proposiciones V,1 y V.2; y de lo anterior se deduce que:

$$\begin{tikzcd}
A^{o}(X) \times A^{o}(X) \arrow[r] \arrow[d] & A^{o}(X) \arrow[d] \\
H^{o}(X,\underline{K}_o) \times H^{o}(X,\underline{K}_o) \arrow[r] & H^{o}(X,\underline{K}_o)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

<u>PROP V.3</u>: Dados $p,q \in \mathbb{N}_o$; $0 \leqslant i < p+q$ y V abierto en X; se tiene que los siguientes diagramas son conmutativos:

(1)

$$\begin{tikzcd}
K_{p-j}(\underline{\underline{M}}_j(V)/\underline{\underline{M}}_{j+1}(V)) \times K_{q-L}(\underline{\underline{M}}_L(V)/\underline{\underline{M}}_{L+1}(V)) \arrow[r, "\cdot K"] \arrow[d, "\partial_V^{p-j} \times \mathrm{Id}"] & K_{p+q-i}(\underline{\underline{M}}_i(V\times V)/\underline{\underline{M}}_{i+1}(V\times V)) \arrow[d, "\partial^{p+q-i}_{V \times V}"] \\
K_{p-i+1}(\underline{\underline{M}}_{j+1}(V)/\underline{\underline{M}}_{j+2}(V)) \times K_{q-L}(\underline{\underline{M}}_L(V)/\underline{\underline{M}}_{L+1}(V)) \arrow[r, "\cdot K"] & K_{p+q-i-1}(\quad (V\times V)/\underline{\underline{M}}_{i+2}(V\times V))
\end{tikzcd}$$

(2)

$$\begin{tikzcd}
K_{p-j}(\underline{\underline{M}}_j(V)/\underline{\underline{M}}_{j+1}(V)) \times K_{q-L}(\underline{\underline{M}}_L(V)/\underline{\underline{M}}_{L+1}(V)) \arrow[r, "\cdot K"] \arrow[d, "((-1)^{p-j}) \times \partial_V^{q-L}"] & K_{p+q-i}(\underline{\underline{M}}_i(V\times V)/\underline{\underline{M}}_{i+1}(V\times V)) \arrow[d, "\partial^{p+i}_{V \times V}"] \\
K_{p-j}(\underline{\underline{M}}_j(V)/\underline{\underline{M}}_{j+1}(V)) \times K_{q-L+1}(\underline{\underline{M}}_{L+1}(V)/\underline{\underline{M}}_{L+2}(V)) \arrow[r, "\cdot K"] & K_{p+q-i-1}(\underline{\underline{M}}_{i+1}(V\times V)/\underline{\underline{M}}_{i+2}(V\times V))
\end{tikzcd}$$

donde $j + L = i$

donde $X \times X$ es el esquema producto que resulta regular y noetheriano pues X lo es; $\underline{\underline{M}}_i(X)$ es la categoría de haces coherentes sobre X con soporte de codimensión mayor o igual que i.

Además, $\delta^i_V : K_i(\underline{\underline{M}}_k(V)/\underline{\underline{M}}_{k+1}(V)) \longrightarrow K_{i-1}(\underline{\underline{M}}_{k+1}(V)/\underline{\underline{M}}_{k+2}(V))$

está dada por:

$$0 \longrightarrow (\underline{\underline{M}}_{k+1}(V)/\underline{\underline{M}}_{k+2}(V)) \longrightarrow \underline{\underline{M}}_k(V)/\underline{\underline{M}}_{k+2}(V) \longrightarrow \underline{\underline{M}}_k(V)/\underline{\underline{M}}_{k+1}(V) \longrightarrow 0$$

La demostración es obvia a partir de la propiedad II. del producto.

<u>COR</u>: Dados $p,q \in \mathbb{N}_0$; $0 \leq i < p+q$ y V abierto en X, se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus\limits_{j+l=i} \Big(\coprod\limits_{x \in V_j} K_{p-j}k(x) \times \coprod\limits_{y \in V_l} K_{q-l}k(y) \Big) & \xrightarrow{\ \bigoplus\limits_{j+l=i} (\Delta^*_i \circ \cdot_K)\ } & \coprod\limits_{t \in V_i} K_{p+q-i}k(t) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \frac{1}{2}\left(\delta^{p-j}_V \times id + (-1)^{p-j}(id \times \delta^{q-l}_V)\right)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \delta^{p+q-i}_V} \\
\begin{array}{c} \bigoplus\limits_{j+l=i} \Big(\coprod\limits_{x' \in V_{j+1}} K_{p-j-1}k(x') \times \coprod\limits_{y \in V_l} K_{q-l}k(y) \Big) \oplus \\ \oplus \Big(\coprod\limits_{x \in V_j} K_{p-j}k(x) \times \coprod\limits_{y' \in V_{l+1}} K_{q-l-1}k(y') \Big) \end{array} & \xrightarrow{\ \bigoplus\limits_{j+l=i} (\Delta^*_i \cdot_K + \Delta^*_i \cdot_K)\ } & \coprod\limits_{t' \in V_{i+1}} K_{p+q-i-1}k(t')
\end{array}$$

con $\Delta_i^*: K_{p+q-i}(\underline{\underline{M}}_i(V \times V)/\underline{\underline{M}}_{i+1}(V \times V)) \longrightarrow K_{p+q-i}(\underline{\underline{M}}_i(V)/\underline{\underline{M}}_{i+1}(V))$

inducida por $\Delta: V \longrightarrow V \times V$; $\Delta(x) = (x, x)$ (ver Apéndice de este capítulo)

PROP V. 4 : Dados $p, q \in \mathbb{N}_0$; $0 \leq \not{p} < p+q$ y V abierto en X y $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ cubrimiento de V; se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}^i(\mathcal{U},K_p) \times \mathcal{C}^j(\mathcal{U},K_q) & \xrightarrow{\quad \cdot_K \quad} & \mathcal{C}^{i+j}(\mathcal{U}\times\mathcal{U},K_{p+q}) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \partial^i_{\mathcal{U}} \times id + (-1)^i(id \times \partial^j_{\mathcal{U}})} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \partial^{i+j}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}} \\
(\mathcal{C}^{i+1}(\mathcal{U},K_p) \times \mathcal{C}^j(\mathcal{U},K_q)) \quad (\mathcal{C}^i(\mathcal{U},K_p) \times \mathcal{C}^{j+1}(\mathcal{U},K_q)) & \xrightarrow{\quad \cdot_K + \cdot_K \quad} & \mathcal{C}^{i+j+1}(\mathcal{U}\times\mathcal{U},K_{p+q})
\end{array}$$

$\cdot_K : \mathcal{C}^i(\mathcal{U},K_p) \times \mathcal{C}^j(\mathcal{U},K_q) \longrightarrow \mathcal{C}^{i+j}(\mathcal{U}\times\mathcal{U},K_{p+q})$ está dada por

$((\cdot_K)(s,t))_{(l_0 s_0)\dots(l_{i+j}s_{i+j})}(x,y) = s_{l_0\dots l_i}(x) \cdot_K t_{s_i\dots s_{i+j}}(y)$

(Por abuso de notación, seguimos notando como $s_{l_0\dots l_i}$ a $s\big|_{U_{l_0\dots l_{i+j}}}$)

Dem: Sean $(s,t) \in \mathcal{C}^i(\mathcal{U},K_p) \times \mathcal{C}^j(\mathcal{U},K_q)$

$$(\partial^{i+j}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \cdot_K (s,t))_{(l_0 s_0)\dots(l_{i+j+1}s_{i+j+1})} = \sum_{k=0}^{i+j+1} (-1)^k (s \cdot_K t)_{(l_0 s_0)\dots(\widehat{l_k s_k})\dots(l_{i+j+1}\, s_{i+j+1})}$$

$$= \sum_{k=0}^{i} (-1)^k s_{l_0\dots\hat{l}_k\dots l_{i+1}} \cdot_K t_{s_{i+1}\dots s_{i+j+1}} + \sum_{k=i+1}^{i+j+1} (-1)^k s_{l_0\dots l_i} \cdot_K t_{s_i\dots\hat{s}_k\dots s_{i+j+1}} \quad (*$$

$$(\partial^i_{\mathcal{U}})(s)_{j_0\dots j_{i+1}} = \sum_{r=0}^{i+1} (-1)^r s_{j_0\dots \hat{j}_r \dots j_{i+1}}$$

$$(\partial^j_{\mathcal{U}})(t)_{i_0\dots i_{j+1}} = \sum_{r=0}^{j+1} (-1)^r t_{i_0\dots \hat{i}_r\dots i_{j+1}}$$

$$(\cdot_K \circ (\partial^i_{\mathcal{U}} \times id)(s,t))_{(l_0 s_0)\dots(l_{i+j+1} s_{i+j+1})} =$$

$$= \partial^i_{\mathcal{U}}(s)_{l_0\dots l_{i+1}} \cdot_K t_{s_{i+1}\dots s_{i+j+1}} =$$

$$= \sum_{r=0}^{i+1} (-1)^r s_{l_0\dots \hat{l}_r \dots l_{i+1}} \cdot_K t_{s_{i+1}\dots s_{i+j+1}} = (**)$$

$$(\cdot_K \circ (-1)^i (id \times \partial^j_{\mathcal{U}})(s,t))_{(l_0 s_0)\dots(l_{i+j+1} s_{i+j+1})} =$$

$$= (-1)^i s_{l_0\dots l_i} \cdot_K (\partial^j_{\mathcal{U}} t)_{s_i\dots s_{i+j+1}} =$$

$$= (-1)^i s_{l_0\dots l_i} \cdot_K \sum_{r=0}^{j+1} (-1)^r t_{s_i\dots \hat{s}_{i+r}\dots s_{i+j+1}} =$$

$$= \sum_{r=0}^{j+1} (-1)^{r+i} s_{l_0\dots l_i} \cdot_K t_{s_i\dots \hat{s}_{i+r}\dots s_{i+j+1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{i+j+1} (-1)^k s_{l_0\dots l_i} \cdot_K t_{s_i\dots \hat{s}_k\dots s_{i+j+1}} = (***)$$

Se ve inmediatamente que $(**) + (***) = (*)$, que es lo que se quería probar.

COR: Dados $p, q \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq i < p+q$, V abierto en X y $\mathcal{U}$ cubrimiento de V; se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{L+j=i} \mathscr{C}^L(\mathcal{U},K_p) \times \mathscr{C}^j(\mathcal{U},K_q) & \xrightarrow{\Delta^* \circ \cdot_K} & \mathscr{C}^i(\mathcal{U},K_{p+q}) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \bigoplus_{L+j=i} (\partial^L_{\mathcal{U}} \times id + (-1)^L (id \times \partial^j_{\mathcal{U}}))} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \partial^i_{\mathcal{U}}} \\
\bigoplus_{L+j=i} \mathscr{C}^{L+1}(\mathcal{U},K_p) \times \mathscr{C}^j(\mathcal{U},K_q) \oplus \mathscr{C}^L(\mathcal{U},K_p) \times \mathscr{C}^{j+1}(\mathcal{U},K_q)) & \xrightarrow{\Delta^* \circ \cdot_K} & \mathscr{C}^{i+1}(\mathcal{U},K_{p+q})
\end{array}$$

PROP V.5: El morfismo inducido en $A^p(X) \times A^q(X)$ por el diagrama de la Prop. V.3 es el producto de intersección clásico.

Dem: Se tiene:

$$\begin{array}{ccccc}
\coprod_{x\in V_p} K_0 k(x) \times \coprod_{y\in V_q} K_0 k(y) & \xrightarrow{\cdot_K} & \coprod_{t\in (V\times V)_{p+q}} K_0 k(t) & \xrightarrow{*} & \coprod_{z\in V_{p+q}} K_0 k(z) \\
\wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\
K_0(\underline{\underline{M}}_p(V)/\underline{\underline{M}}_{p+1}(V))\times K_0(\underline{\underline{M}}_q(V)/\underline{\underline{M}}_{q+1}(V)) & \xrightarrow{\cdot_K} & K_0(\underline{\underline{M}}_{p+q}(V\times V)/\underline{\underline{M}}_{p+q+1}(V\times V)) & \xrightarrow{*} & K_0(\underline{\underline{M}}_{p+q}(V)/\underline{\underline{M}}_{p+q+1}(V))
\end{array}$$

Pero $\cdot_K(\bar{E}, \bar{F}) = \overline{E \otimes_{O_V} F}$ si $(E, F) \in K_0(\underline{\underline{M}}_p(V)/\underline{\underline{M}}_{p+1}(V))\times K_0(\underline{\underline{M}}_q(V)/\underline{\underline{M}}_{q+1}(V))$

o sea que, si $x \in V_p$ e $y \in V_q$, $\cdot_K(k(x)^n ; k(y)^m) = k(x,y)^{n.m}$

Pero, en $A^p(X) \times A^q(X)$; si $x \in X_p$ e $y \in X_q$ resulta que $x.y = \Delta^*(x\times y)$

Obs: Si en las proposiciones en las cuales aparece $\mathcal{E}^i(\mathcal{U},\underline{\underline{K}}_r)$ apareciere $\mathcal{E}_0^i(X,\underline{\underline{K}}_r)$ (donde $\mathcal{E}_0^i(X,\underline{\underline{K}}_r)$ son las secciones no necesariamente continuas), dichas proposiciones continuarían siendo verdaderas. Además, se tiene, para todo V abierto en X y para todo $\mathcal{U}$ cubrimiento de V, que los diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}^i(\mathcal{U},\underline{\underline{K}}_p) \times \mathcal{E}^j(\mathcal{U},\underline{\underline{K}}_q) & \xrightarrow{\Delta^* \circ \cdot_K} & \mathcal{E}^{i+j}(\mathcal{U},\underline{\underline{K}}_{p+q}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{E}_0^i(X,\underline{\underline{K}}_p) \times \mathcal{E}_0^j(X,\underline{\underline{K}}_q) & \xrightarrow{\Delta^* \circ \cdot_K} & \mathcal{E}_0^{i+j}(X,\underline{\underline{K}}_{p+q})
\end{array}$$

$0 \leq i \leq p$; $0 \leq j \leq q$; son conmutativos.

Por otra parte, tanto $(\mathcal{E}_0^i(X,\underline{\underline{K}}_p))_{0\leq i\leq p}$, como $(\coprod_{x\in X_i} K_{p-i} k(x))_{0\leq i\leq p}$ son resoluciones de $\underline{\underline{K}}_p$ por haces fláccidos; por lo tanto, como $\cdot_K : \underline{\underline{K}}_p \times \underline{\underline{K}}_q \longrightarrow \underline{\underline{K}}_{p+q}$ induce un único morfismo de $H^p(X,\underline{\underline{K}}_p) \times H^q(X,\underline{\underline{K}}_q)$

en $H^{p+q}(X,\underline{\underline{K}}_{p+q})$; resulta que el morfismo inducido por

$$\mathcal{L}_0^p(X,\underline{\underline{K}}_p)\times\mathcal{L}_0^q(X,\underline{\underline{K}}_q)\longrightarrow\mathcal{L}_0^{p+q}(X,\underline{\underline{K}}_{p+q})$$ coincide con el producto de

intersección.

V.3 - Apéndice

Definiremos aquí $\Delta^*: K_p(X\times X)\longrightarrow K_p(X)$.

En el próximo capítulo definiremos, en general, si $f: X\longrightarrow Y$ es un morfismo de esquemas la aplicación $f^*: K_p(Y)\longrightarrow K_p(X)$ inducida por f $(p\in\mathbb{N}_0)$.

Si $(E,\alpha)\in K_p(X\times X)$, definimos $\Delta^*(E,\alpha)=(\Delta^*E,\Delta^*\alpha)$, donde :
$\Delta^*E_{\Delta^{-1}(V)}=E_V\ O^n_{X,\Delta^{-1}(V)}$, si V es abierto en $X\times X$ y n es tal que E_V es sumando directo de $O^n_{X\times X,V}$.

$\Delta^*E|_{\Delta^{-1}(V)}$ resulta un $O_{X,\Delta^{-1}(V)}$- módulo proyectivo.

y $\Delta^*\alpha_{\Delta^{-1}(V)}=\alpha_V\otimes id_{O^n_{X,\Delta^{-1}(V)}}$

V.4 - Apéndice II

Enunciaremos aquí los axiomas 6 y 7 que verifica el anillo de Chow de un esquema regular X; como $A^p(X)=H^p(X,\underline{\underline{K}}_p)$ si X es un esquema regular y en este caso el producto definido en ambos miembros coincide, los axiomas se verifican también en $H(X)$.

Axioma 6: Si Y y Z son subvariedades de X que se intersecan propiamente (es decir, toda componente irreducible de $Y\cap Z$ tiene codimensión igual a codim Y + codim Z), puede escribirse:

$$Y.Z=\sum i(Y,Z;W_j).W_j$$

donde la suma recorre las componentes irreducibles W_j de $Y \cap Z$, y donde $i(Y,Z;W_j)$ es un entero que depende solamente de un entorno del punto genérico de W_j sobre X.

<u>Axioma 7</u>: Si Y es una subvariedadd de X y Z es un divisor de Cartier efectivo que interseca propiamente a Y, entonces $Y.Z$ es el ciclo asociado al divisor de Cartier $Y \cap Z$ sobre Y, que se define restringiendo la ecuación local de Z a Y.

VI - DEFINICION Y PROPIEDADES DE f^* Y f_*, DADO UN MORFISMO DE ESQUEMAS f

Sea $f: X \longrightarrow Y$ un morfismo de esquemas. Se tiene entonces un morfismo del espacio de base de X en el espacio de base de Y, y para cada abierto V del espacio topológico y, un morfismo de anillos de $O_{Y,V}$ en $O_{X,f^{-1}(V)}$.

VI.1 - Definición de f^*

Sea $i \in \mathbb{N}_0$, definimos : $f^*: K_i(Y) \longrightarrow K_i(X)$ como $f^*\overline{(E,\alpha)} = \overline{(f^*E, f^*\alpha)}$

donde, dado un abierto V de Y, E_V es un $O_{Y,V}$-módulo proyectivo. (Es decir, existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que E_V es sumando directo de $O_{Y,V}^n$)

Definimos entonces $f^*E\big|_{f^{-1}(V)} = E_V \otimes_{O_{Y,V}} O^n_{X,f^{-1}(V)}$ que resulta un $O_{X,f^{-1}(V)}$ -módulo

proyectivo porque si S es tal que $E_V \oplus S = O_{Y,V}^n$, entonces:

$$(E_V \otimes_{O_{Y,V}} O^n_{X,f^{-1}(V)}) \oplus (S \otimes_{O_{Y,V}} O^n_{X,f^{-1}(V)}) = (E_V \oplus S) \otimes_{O_{Y,V}} O^n_{X,f^{-1}(V)} = (O_{Y,V} \otimes_{O_{Y,V}} O_{X,f^{-1}(V)})^n$$

Si, $\alpha = \alpha(x_1,\dots,x_{i-1}) : E \longrightarrow E$, se define $f^*\alpha\big|_{f^{-1}(V)} = \alpha\big|_V \otimes_{O_{Y,V}} id_{O^n_{X,f^{-1}(V)}}$

Se ve claramente que f^* está bien definida y además induce un morfismo al que también llamaremos f^* entre $H^i(Y,\underline{K}_i)$ y $H^i(X,\underline{K}_i)$ en la siguiente forma:

Si $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in I}$ es un cubrimiento de Y y se tienen secciones

$s_{j_0\dots j_i} : V_{j_0\dots j_i} \longrightarrow K_i(V_{j_0\dots j_i})$, donde $V_{j_0\dots j_i} = V_{j_0} \cap \dots \cap V_{j_i}$

se toma al cubrimiento $\mathcal{U} = (U_j)_{j\in I}$ de X , donde $U_j = f^{-1}(V_j)$ y las secciones $(f^*s)_{j_0\dots j_i} : U_{j_0\dots j_i} \longrightarrow K_i(U_{j_0\dots j_i})$ dadas por:

$(f^*s)_{j_0\dots j_i}(x) = f^*(s_{j_0\dots j_i}(y)) \in K_i(f^{-1}(V_{j_0\dots j_i})) = K_i(U_{j_0\dots j_i})$, si $f(x)=y$

Obs: f^* conserva la codimensión.

Sea ahora $f: X \longrightarrow Y$ un morfismo de esquemas. Supongamos, sin pérdida de generalidad que X e Y son conexos. Sea $n = \dim X$ y $m = \dim Y$. Definiremos ahora , en el caso en que n es menor o igual que m, la aplicación $f_* : H^{n-i}(X, \underline{\underline{K}}_{n-i}) \longrightarrow H^{m-i}(Y, \underline{\underline{K}}_{m-i})$, $0 \leq i \leq n$.

Pedimos que f sea un morfismo propio; en este caso, la imagen por f de cualquier conjunto cerrado de X será un cerrado de Y.

Dado un cubrimiento $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X y una sección $s \in H^{n-i}(\mathcal{U}, \underline{\underline{K}}_{n-i})$ resulta que f(sop s) es cerrado en Y. Puede suceder que $\dim(f(\text{sop } s)) < \dim(\text{sop } s)$ o que $\dim(\text{sop } s) = \dim(f(\text{sop } s))$.

En el primer caso decimos que $f_* s = 0 \in H^{m-i}(\mathcal{V}, \underline{\underline{K}}_{m-i})$, donde $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in I \cup \{j_0\}}$ es el cubrimiento de Y dado por $V_j = (f(U_j^c))^c$, si $j \neq j_0$ y $V_{j_0} = (f(\text{sop } s))$.

En el segundo caso consideramos a f como la composición de los morfismos f_1 e i, donde f_1 es la correstricción de f a $f(X) \subset Y$ e i es la inclusión del subesquema cerrado f(X) en Y.

Si pedimos que $f_* = i_* \circ f_{1*}$, bastará con definir i_* y f_{1*} .

(I) Definición de f_{1*} :

Sea $(\overline{E, \alpha}) \in \underline{\underline{K}}_{n-i}(X)$. Si U es un abierto cualquiera de X, E_U es un módulo proyectivo sobre $O_{X,U}$; sea entonces $n \in \mathbb{N}$ tal que E_U es sumando directo de $O_{X,U}^n$. Entonces, dado un abierto V de Y, sea:

$(f_{1*}E)|_V = E|_{f^{-1}(V)}$ (mirado como $O_{Y,V}$-módulo)

$f_{1*}\alpha|_V = \alpha|_{f^{-1}(V)}: E|_{f^{-1}(V)} \longrightarrow E|_{f^{-1}(V)}$ (mirado como morfismo de $O_{Y,V}$-módulos, o sea:

$(f_{1*})(a.x) = f(a).(x)$, si $a \in O_{Y,V}$)

Para que $f_{1_*}E|_V$ resulte un módulo proyectivo sobre $O_{Y,V}$ es necesario que $O_{X,f^{-1}(V)}$ sea proyectivo sobre $O_{Y,V}$. Esta condición se satisface en el caso en que f es morfismo propio, porque entonces $O_{X,f^{-1}(V)}$ es una $O_{Y,V}$-álgebra de tipo finito.

Definimos ahora la aplicación buscada, a la que también notaremos f_{1_*}. Dado el cubrimiento $\mathcal{U}$ de X y la sección $s \in H^{n-i}(\mathcal{U}, \underline{\underline{K}}_{n-i})$ le asociamos el cubrimiento $\mathcal{V}$ de Y como antes y la sección $(f_{1_*}s) \in H^{n-i}(\mathcal{V}, \underline{\underline{K}}_{n-i})$ dada por

$$(f_{1_*}s)_{j_0 \dots j_{n-i}} : V_{j_0 \dots j_{n-i}} \longrightarrow K_{n-i}(V_{j_0 \dots j_{n-i}}), \text{ donde } V_{j_0 \dots j_{n-i}} = (f_1(U^c_{j_0 \dots j_{n-i}}))^c$$

$$(f_{1_*}s)(y) = f_{1_*}(s(x)).\left[R(f(\mathrm{sop}\ s)):R(\mathrm{sop}\ s)\right]$$, si x es el punto genérico de $f^{-1}(\overline{\{y\}})$

(II) Definición de i_* :

Esta definición no se hará en general, sino sólo para una clase especial de inmersiones: las inmersiones cerradas regulares de codimensión d, para algún $d \in \mathbb{N}_0$.

Sea $X' = f(X)$. A X' puede asociársele un elemento de $H^0(X', \underline{\underline{K}}_0) = \Gamma(X', \underline{\underline{K}}_0)$, que es la sección global $\alpha_{X'Y}$ que a cada $x \in X'$ le asigna el elemento $\overline{U}_{X',x}$ de $\underline{\underline{K}}$ y se tiene un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i\in I}$ de X', donde, para cada $i \in I$, $U_i = V_i \cap X'$ y V_i es abierto de Y.

Además a $\alpha_{X'Y}$ le asociamos un elemento de $H^d(Y, \underline{\underline{K}}_d)$ al que notaremos de la misma forma. Tomamos el cubrimiento abierto de Y dado por $(V_i)_{i\in I} \cup \{X_0^c, X_1^c, \dots, X_{d-1}^c\}$, donde $X' = X_0 \subseteq \dots \subseteq X_d \subsetneq Y$ es una cadena de cerrados. (Observar que X' tiene codimensión d).

Obs: Podemos suponer que d = 1, si no, se considera X' cerrado en X_1, X_1 en X_2, etc. (todos de codimensión 1 en el siguiente)

Sea entonces $i: X' \hookrightarrow Y$ inmersión cerrada regular de codimensión 1. Entonces el anillo local de un punto $x \in X'$ es el cociente $O_{Y,x}/(f_1)$, donde f_1 es un elemento regular (o sea, que no divide a cero en $O_{Y,x}$). Tomamos el elemento $\alpha_{X'Y} \in H^1(Y,\underline{\underline{K}}_1)$ asociado a X', definido por:

$$(\alpha_{X'Y})_{ij}(y) = \begin{cases} \overline{(O_{Y,y}^{\cap}, \, id)} & \text{si } y \notin X' \\ \overline{(O_{Y,y}^{\cap}, \, .1-f_1)} & \text{si } y \in X' \cap U_i \cap U_j \end{cases}$$

Obs: La multiplicación por $(1-f_1)$ es un morfismo inversible. (Se sabe que f_1 no es inversible porque $(f_1).O_{Y,y}$ debe ser un ideal propio, pero como $O_{Y,y}$ es un anillo local, entonces $1-f_1$ tiene que ser inversible)

Podemos definir ahora, para todo $k \in \mathbb{N}_0$ una aplicación i_* de $H^k(X', \underline{\underline{K}}_k)$ en $H^{k+1}(Y, \underline{\underline{K}}_{k+1})$ como sigue:

Sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento de X', donde, como antes, cada U_i es la intersección con X' de un abierto V_i de Y y secciones $s_{i_0 \dots i_k} : U_{i_0 \dots i_k} \longrightarrow K_k(U_{i_0 \dots i_k})$

Se toma entonces el cubrimiento de Y dado por $(V_i)_{i\in I} \cup \{X'^c\}$ y las secciones

$(i_* s)_{i_0 \dots i_{k+1}} : V_{i_0 \dots i_{k+1}} \longrightarrow K_{k+1}(V_{i_0 \dots i_{k+1}})$ tales que

$(i_* s)_{i_0 \dots i_{k+1}}(y) = s_{i_0 \dots i_k}(y) \cdot K(\alpha_{X'Y})_{i_k i_{k+1}}(y)$, si $y \in X'$

$(i_* s)_{i_0 \dots i_{k+1}}\big|_{X'^c} = 0$

Obs: f_* conserva la dimensión de un subesquema cerrado.

Verificaremos ahora los axiomas que deben cumplir f_* y f^* para que el producto $\cdot_K$ definido de $H^r(X,\underline{\underline{K}}_r) \times H^s(X,\underline{\underline{K}}_s)$ en $H^{r+s}(X,\underline{\underline{K}}_{r+s})$ sea una teoría de intersección.

AXIOMA 1: El producto $\cdot_K$ es conmutativo.

Basta ver que el producto definido en los $\underline{\underline{K}}_p$ es anticonmutativo. Referimos al Teorema 4.3 (3), pág. 83.

AXIOMA 2: Sean $f:X \longrightarrow Y$; $g:Y \longrightarrow Z$ morfismos de esquemas. Se verifica que $f^* \circ g^* = (g\circ f)^*$.

Basta probarlo para los morfismos f^* y g^* en los $\underline{\underline{K}}_p$.

Sea E" un haz de módulos proyectivos sobre Z.

Sea W un abierto de Z, V un abierto de Y, U un abierto de X.

$$(f^*\circ g^*(\overline{E'',\alpha}))_{f^{-1}(g^{-1}(W))} = f^*(E''_W \otimes_{O_{Z,W}} O^n_{Y,g^{-1}(W)}, \alpha\otimes id)_{f^{-1}(g^{-1}(W))} =$$

$$= ((E''_W \otimes_{O_{Z,W}} O^n_{Y,g^{-1}(W)}) \otimes_{O_{Y,g^{-1}(W)}} O^m_{X,f^{-1}(g^{-1}(W))}, \alpha\otimes id) =$$

$$\cong ((E''_W \otimes_{O_{Z,W}} O^m_{X,f^{-1}(g^{-1}(W))})^n, \alpha\otimes id) \cong$$

$$\cong ((E''_W \otimes_{O_{Z,W}} O_{X,f^{-1}(g^{-1}(W))})^{n.m}, \alpha\otimes id) \cong$$

$$\cong (E''_W \otimes_{O_{Z,W}} O^{n.m}_{X,f^{-1}(g^{-1}(W))}, \alpha\otimes id) \cong$$

$$=(g\circ f)^*(E'',\alpha)_{f^{-1}(g^{-1}(W))}$$

Obs: En los pasos intermedios omitimos, dada la buena definición de f^* y g^* las barras que indican la clase de un elemento en $\underline{\underline{K}}_p$.

AXIOMA 3: Sean $f:X \longrightarrow Y$; $g:Y \longrightarrow Z$ morfismos de esquemas que además son propios. Se verifica entonces que $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$.

(Pedimos además que $\dim X \leq \dim Y \leq \dim Z$)

Podemos suponer, sin perdida de generalidad que $f(X)$ tiene codimensión 1 en Y y que $g(Y)$ tiene codimensión 1 en Z.

Sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento de X y sea $s_{i_0\ldots i_p} : U_{i_0\ldots i_p} \longrightarrow K_p(U_{i_0\ldots i_p})$

Probaremos primero que:

$$\dim g(f(\mathrm{sop}\ s)) < \dim(\mathrm{sop}\ s) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dim g(\mathrm{sop}\ f_* s) < \dim(\mathrm{sop}\ f_* s) \quad \mathrm{o} \\ \dim f(\mathrm{sop}\ s) < \dim(\mathrm{sop}\ s)\end{array}\right]$$

Observemos que $(\mathrm{sop}\ f_* s)$ es vacío si $\dim f(\mathrm{sop}\ s) < \dim(\mathrm{sop}\ s)$ y es igual a $f(\mathrm{sop}\ s)$ si $\dim f(\mathrm{sop}\ s) = \dim(\mathrm{sop}\ s)$.

$\Leftarrow$) Si $\dim f(\mathrm{sop}\ s) < \dim(\mathrm{sop}\ s)$, entonces:

$\dim g(f(\mathrm{sop}\ s)) \leq \dim f(\mathrm{sop}\ s) < \dim(\mathrm{sop}\ s)$

Si $\dim g(f(\mathrm{sop}\ s)) < \dim(\mathrm{sop}\ f_* s)$, resulta $\dim g(\mathrm{sop}\ f_* s) < \dim(\mathrm{sop}\ f_* s)$ (considerando $\dim f(\mathrm{sop}\ s) = \dim(\mathrm{sop}\ s)$), luego se obtiene la desigualdad buscada.

$\Rightarrow$) La demostración es análoga a la anterior.

Podemos suponer ahora que $\dim(\mathrm{sop}\ s) = \dim g\ f(\mathrm{sop}\ s)$.

Sean $i : f(X) \longrightarrow Y$; $j : g(Y) \longrightarrow Z$ inmersiones regulares de codimensión 1. Sea α_{XY} el elemento de $H^1(Y, \underline{\underline{K}}_1)$ asociado a $f(X)$, sea α_{YZ} el elemento de $H^1(Z, \underline{\underline{K}}_1)$ asociado a $g(Y)$ y sea α_{XZ} el elemento de $H^2(Z, \underline{\underline{K}}_2)$ asociado a $g(f(X))$.

Por definición, $\alpha_{XZ} = \alpha_{XY} \cdot_K \alpha_{YZ}$.

Dado el cubrimiento $\mathcal{U}$ de X, le asociamos el cubrimiento $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I} \cup (Y-X)$ de Y, donde $V_i = (f_1(U_i^c))^c$

Entonces, $(f_*s)_{i_o\ldots i_{p+1}} : V_{i_o\ldots i_{p+1}} \longrightarrow K_{p+1}(V_{i_o\ldots i_{n+1}})$

$(f_*s)(y) = \left[A(f(\mathrm{sop}\,s)):A(\mathrm{sop}\,s)\right] \cdot (f_{1*}s)_{i_o\ldots i_p}(y)\cdot_K(\alpha_{XY})_{i_p i_{p+1}}(y)$, si $y\in f(X)$,
0 si no.

Para aplicar g_* , a $\mathcal{V}$ se le asocia el cubrimiento $\mathcal{W} = (W_i)_{i\in I'}$ (Z-Y)

$$g_*(f_*s)_{j_o\ldots j_{p+1}}(z) = \left[A(g(f(\mathrm{sop}\,s))):A(f(\mathrm{sop}\,s))\right]\cdot\left[A(f(\mathrm{sop}\,s)):A(\mathrm{sop}\,s)\right].$$

$$g_{1*}(f_*s)_{j_o\ldots j_{p+1}}(z).\ \alpha_{YZ}(z)_{j_{p+1}j_{p+2}} =$$

$$= \left[A(g(f(\mathrm{sop}\,s))):A(\mathrm{sop}\,s)\right].g_{1*}(f_*s)_{j_o\ldots j_{p+1}}(y)\cdot_K$$

$\cdot_K(\alpha_{YZ})_{j_{p+1}j_{p+2}}(z)$, si y es el punto genérico de $g^{-1}(\{\bar{z}\})$

$$= \left[A(g(f(\mathrm{sop}\,s))):A(\mathrm{sop}\,s)\right].g_{1*}(f_{*j_o\ldots j_p}(s(x))_K\alpha_{XY\,j_pj_{p+1}}(y)$$

$\cdot_K\alpha_{YZ\,j_{p+1}j_{p+2}}(z)$, si x es el punto genérico de $f^{-1}\{\bar{y}\}$

Se necesita que $\alpha_{XY}(y) = g_1^*(\beta)$, con $\beta\in H^1(Z,\underline{K}_1)$; lo que resulta cierto si tomamos $\beta(z) = (0^n_{Z,z}, \gamma)$, si $z = g(y)$, (donde γ es la multiplicación por $g(1-f_1)$, que es inversible)

$(0^n_{Z,z}$, id), si no.

(6) Entonces, $g_*(f_*(s))_{j_o\ldots j_{p+1}}(z) =$

$$= \left[A(g(f(\mathrm{sop}\,s)):A(\mathrm{sop}\,s)\right].(g_{1*}\circ f_{1*})_{j_o\ldots j_p}(s(x))\cdot_K$$

$$\cdot_K\beta_{j_pj_{p+1}}(g(y))\cdot_K\alpha_{YZ\,j_{p+1}j_{p+2}}(z) =$$

$$= \left[A(g(f(\mathrm{sop}\,s)):A(\mathrm{sop}\,s)\right].(g_{1*}\circ f_{1*})_{j_o\ldots j_p}(s(x))\cdot_K$$

$$\cdot_K(0^n_{Z,g(y)},\gamma).\ (0^{n'}_{Z,z},\gamma')$$

(donde γ' es la multiplicación por $(1-f_2)$).

Por otra parte,

$$(g\ f)_{*\, j_0 \dots j_{p+2}}(z) = (g_1\ f_1)_{*\, j_0 \dots j_p}(s(x)) .\ \alpha_{K\ XZ\ j_p j_{p+1} j_{p+2}}(z) ,$$

si el punto genérico de $f^{-1}(g^{-1}(\{\bar{z}\}))$.

Como $\alpha_{XZ\, j_p j_{p+1} j_{p+2}}(z)$ es por definición $\backslash(O^{n}_{Z,g(\cdot)}, \gamma) . (O^{n'}_{Z,z}, \gamma')$

(si $f(x)=y$), basta ver que $g_{1_*} \circ f_{1_*} = (g_1 \circ f_1)_*$ ..

Pero $(f_1)_*(s)(y) = f_{1_*}(s(x))$, si x es punto genérico de $f^{-1}(\{\bar{y}\})$

$$g_{1_*}(f_{1_*}(s))(z) = g_{1_*}(f_{1_*}(s)(y)) = g_{1_*}(f_{1_*}(s(x)))$$

$$(g_1 \circ f_1)_*(s)(z) = (g_1 \circ f_1)_*(s(x))$$

Luego, basta ver que $(g_1 \circ f_1)_*$ y $g_{1_*} \circ f_{1_*}$ coinciden en los $\underline{\underline{K}}_p$.

Si V es abierto en Y, W es abierto en Z:

$$f_{1_*}(E, \alpha)_V = (E|_{f^{-1}(V)}, \alpha|_{f^{-1}(V)})$$

$$g_{1_*}(f_{1_*}(E, \alpha))_W = (f_{1_*}E|_{g^{-1}(W)} , f_1\alpha|_{g^{-1}(W)})$$

$$= (E|_{f^{-1}\circ g^{-1}(W)}, \alpha|_{f^{-1}\circ g^{-1}(W)}) = (E|_{(g\circ f)^{-1}(W)}, \alpha_{(g\circ f)^{-1}(W)}) =$$

$$= (g_1 \circ f_1)_*(E, \alpha)_W \quad .$$

Obs: Para esta demostración se utilizó el Axioma 4 en (G)

AXIOMA 4: Sea $f: X \longrightarrow Y$ un morfismo propio. Entonces:

si $x \in \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} H^i(X, \underline{\underline{K}}_i)$; $y \in \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} H^i(Y, \underline{\underline{K}}_i)$ resulta que $f_*(x ._K f^*(y)) = f_*(x) ._K y$

Se puede verificar que:

$\dim f(\mathrm{sop}(x ._K f^*(\mathrm{sop}\ y))) < \dim \mathrm{sop}(x ._K f^*(y)) \Leftarrow\!\!\!\!\not\;\; \dim f(\mathrm{sop}\ x) < \dim(\mathrm{sop}\ x)$ o

sea $f_* x \cap \mathrm{sop}\ y = \emptyset$

Si $\dim f(\mathrm{sop}(x._K f^*(y))) = \dim \mathrm{sop}(x._K f^*(y))$, y $f_* = i_* \circ f_*$,

$f_*(x._K f^*(y)) = i_*(f_{1*}(x._K f_1^*(i^*(y)))) = (*)$

Si el axioma vale para inmersiones regulares y para morfismos tales que $\dim X = \dim \mathrm{Im}(X)$, $(*) = i_*(f_{1*}x._K i^* y) = i_* f_{1*}(x)._K y = f_* x._K y$

(I)

Sea $s \in H^i(X, \underline{\underline{K}}_i)$ y sea $t \in H^l(Y, \underline{\underline{K}}_l)$, queremos probar que:

$f_{1*}(s._K f_1^*(t))(y) = f_{1*}s(y)._K t(y)$, para todo $(j_0, \ldots, j_{l+i})$ y para todo

$y \in V_{j_0 \ldots j_{l+i}}$

donde si $(V_j)_{j \in I}$ es el cubrimiento dado con s, y $(W_k)_{k \in I'}$ es el cubrimiento dado con t, entonces $(U_j)_{j \in I''}$ es el cubrimiento dado por:

$(f(V_j^c))^c \cap W_k$.

Supongamos que $i > 0$.

Basta ver entonces que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{K}}_i(X) \times \underline{\underline{K}}_j(Y) \arrow[r, "H.f_* \times id"] \arrow[d, "id \times f^*"] & \underline{\underline{K}}_i(Y) \times \underline{\underline{K}}_j(Y) \arrow[r, "\cdot K"] & \underline{\underline{K}}_{i+j}(Y) \arrow[d, "R.f_*"] \\
\underline{\underline{K}}_i(X) \times \underline{\underline{K}}_j(X) \arrow[rr, "\cdot K"] & & \underline{\underline{K}}_{i+j}(X)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(s(y), t(y)) \arrow[r, mapsto] \arrow[dd] & (R.f_* s(y), t(y)) \arrow[r, mapsto] & \phi^{-1}(\phi(R.f_* s(y)._K t(y))) \\
 & & ② = R.f_*(\phi^{-1}(\phi(s(y))._K f^*(t(y))) \\
(s(y), f^* t(y)) \arrow[rr, mapsto] & & \phi^{-1}(\phi s(y)._K f^*(t(y)))) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

donde $R = [R(f(\mathrm{sop}\ s)) : (\mathrm{sop}\ s)]$

Donde $\phi : \underline{K}_i(X) \longrightarrow \underline{\underline{K}}_{i-1}(\Omega X)$ es un isomorfismo .

Hay que ver que ① = ② .

Pero ① = $R.\phi\ (\phi^{-1}(f_* s(y)._K t(y))$

Por lo tantó, basta observar que f_* conmuta con ϕ y ϕ^{-1} porque entonces

$$f_*(\phi^{-1}(\phi(s(y)).{}_K f^*(t(y)) = \phi^{-1}(f_*(\phi(s(y)).{}_K f^*(t(y)))$$

y a este último término , podemos aplicarle la hipótesis inductiva

(inducción en i), resultando igual a:

$$\phi^{-1}(f_*(\phi(s(y))).{}_K t(y)) = \phi^{-1}(\phi(f_*(s(y))).{}_K t(y))$$

Supongamos ahora $i = 0$.

Sea $s \in H^0(X, \underline{K}_0)$ y sea $t \in H^L(Y, \underline{\underline{K}}_L)$

Sea $y \in U_{j_0 \dots j_L}$, queremos ver que $(f_* s)(y)._K t(y) = f_*(s._K f^*(t)(y))$

Basta probar que: $f_*(s(y))._K t(y) = f_*(s._K f^*(t)(y))$

Pero: $f^*(t)(y) \in K_L(U_{j_0 \dots j_L})$; si $t(y) = (E, \alpha)$ y V es abierto de Y

$$f^*(t(y))\Big|_{f^{-1}(V)} = (E_V \otimes_{O_{Y,V}} O^n_{X, f^{-1}(V)}, \alpha \otimes id), \text{ donde n es tal que } E_V \oplus S_V = O^n_{Y,V}$$

$$s(y).\ f\ t(y)\Big|_{f^{-1}(V)} = (F \otimes f^*E)_{f^{-1}(V)}$$

$$= (F_{f^{-1}(V)} \otimes_{O_{X, f^{-1}(V)}} O^n_{X, f^{-1}(V)} \otimes_{O_{Y,V}} E_V) = (F^n_{f^{-1}(V)} \otimes_{O_{Y,V}} E_V)$$

donde $s(y) = F \in \underline{\underline{K}}_0(X)$, F haz de módulos proyectivos sobre O_X.

Por otra parte, si V es abierto de Y:

$$f_* F\Big|_V = F\Big|_{f^{-1}(V)}$$

$$f_*(s(y))._K t(y)\Big|_V = (F_{f^{-1}(V)} \otimes_{O_{Y,V}} E_V\ ,\ id \otimes \alpha)$$

Pero: $f_*(s(y)._K f\ (t(y))\Big|_V = (F_{f^{-1}(V)} \otimes_{O_{Y,V}} E_V\ ,\ id \otimes \alpha)$

(II)

Sea $i: X \longrightarrow Y$ inmersión cerrada regular de codimensión 1.

Dados $s \in H^i(X, \underline{K}_i)$; $t \in H^m(Y, \underline{K}_m)$, queremos probar que para todo $y \in V_{j_0 \ldots j_{i+m+1}}$ (donde el cubrimiento es el siguiente: Si $(X \cap U_j)_{j \in I}$ es un cubrimiento de X, y los U_j son abiertos de Y y $(W_L)_{L \in I'}$ es el cubrimiento dado para Y con la sección t, entonces los V_k son de la forma $U'_j \cap W_L$, donde $U'_j = U_j$ para algún $j \in I$ o $U'_j = Y - X$)

$$i_*(s(y) \cdot_K i^*(t(y))) = i_* s(y) \cdot_K t(y) \in K_{i+m+1}(V_{j_0 \ldots j_{i+m+1}})$$

Si $y \in X$, $i_*(s \cdot_K i^* t)(y) = 0$

Además $(i_* s)(y) = 0 \Longrightarrow (i_* s \cdot_K t)(y) = 0$

Si $y \notin X$, $i_*(s \cdot_K i^* t)_{j_0 \ldots j_{i+m+1}}(y) = (s \cdot_K i^* t)_{j_0 \ldots j_{i+m}}(y) \cdot_K \alpha_{XY\, j_{i+m} j_{i+m+1}}(y) =$

$$= s_{j_0 \ldots j_i}(y) \cdot_K i^* t_{j_i \ldots j_{i+m}}(y) \cdot_K \alpha_{XY\, j_{i+m} j_{i+m+1}}$$

Además:

$$(i_* s \cdot_K t)_{j_0 \ldots j_{i+m+1}}(y) = (s \cdot_K \alpha_{XY} \cdot_K t)_{j_0 \ldots j_{i+m+1}} = (s \cdot_K t \cdot_K \alpha_{XY})_{j_0 \ldots j_{i+m+1}}$$

$$= (s \cdot_K t \cdot_K \alpha_{XY})_{j_0 \ldots j_{i+m+1}}(y)$$

y $i^* t$ coincide con t sobre los puntos de X.

AXIOMA 5: Sean $s \in H^p(X, \underline{K}_p)$; $t \in H^q(X, \underline{K}_q)$; $\Delta: X \longrightarrow X \times X$ la diagonal.

Entonces a $s \times t \in H^p(X, \underline{K}_p) \times H^q(X, \underline{K}_q)$ puede asociársele un elemento de $H^{p+q}(X \times X, \underline{K}_{p+q})$ que llamaremos también $s \times t$, y resulta que:

$$s \cdot_K t = \Delta^*(s \times t)$$

La demostración es clara por la definición del producto.

Obs: Los axiomas 6 y 7 del anillo de Chow se verificaron en el capítulo V.

AXIOMA 8: Sea X un esquema, entonces $H^1(X,\underline{K}_1) \simeq \mathrm{Pic}(X)$

D

Sea $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ y $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X tal que $\mathcal{L}\big|_{U_i}$ es libre, y sea $\phi_i : O_{U_i} \longrightarrow L\big|_{U_i} (i \in I)$.

Se tiene entonces $\phi_i^{-1} \circ \phi_j : O_{U_i \cap U_j} \longrightarrow O_{U_i \cap U_j}$ isomorfismo $(i,j \in I)$

Se considera $s_{\mathcal{L}} \in H^1(X,\underline{K}_1)$, $(s_{\mathcal{L}})_{ij}(x) = (O_{U_i \cap U_j, x}, \phi_i^{-1} \circ \phi_j(x))$

Hemos definido entonces una aplicación $\mathcal{L} \longmapsto s_{\mathcal{L}}$ de $\mathrm{Pic}(X)$ en $\check{H}^1(X,\underline{K}_1)$ que resulta un morfismo de grupos. Para definir la inversa; daremos dos morfismos $\check{H}^1(X,\underline{K}_1) \longrightarrow \check{H}^1(X,O_X^*)$ y $\check{H}^1(X,O_X^*) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ cuya composición será el morfismo buscado.

(a) Sea $s \in \check{H}^1(X,O_X^*)$, entonces existe $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ cubrimiento por abiertos de X tal que $s = (s_{ij})_{i<j\in I}$

$s_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow O_X^*(U_i \cap U_j)$

Pero, por definición del haz O_X^* ; tener una sección del haz sobre $U_i \cap U_j$ es lo mismo que tener $s_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, O_X)$ inversible.

Se tienen entonces $(O_{U_i})_{i\in I}$ y $s : O_{U_i \cap U_j} \longrightarrow O_{U_i \cap U_j}$ que definen un haz localmente libre de rango 1.

(b) Sea ahora $s \in H^1(X,\underline{K}_1)$, existe entonces $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ cubrimiento abierto de X tal que $s = (s_{ij})_{i<j\in I}$.

$s_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow K_1(U_i \cap U_j)$

Existen entonces, para cada $x \in U_i \cap U_j$ $(\forall i,j)$, $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_x \in \mathrm{Aut}(O^n_{X,x})$ tales que $s_{ij}(x) = \overline{(O^n_{X,x}, \alpha_x)} \in K_1(U_i \cap U_j)$.

Se considera entonces $\bar{s}_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow O_X^*(U_i \cap U_j)$

$$\bar{s}_{ij}(x) = \det \alpha_x$$

y $\xi \in \check{H}^1(X,\underline{K}_1)$.

AXIOMA 9: Sea A^m el espacio afín m-dimensional y sea $p: X \times A^m \longrightarrow X$ la proyección. Entonces $p^*: H^q(X,\underline{K}_q) \longrightarrow H^q(X \times A^m,\underline{K}_q)$ es un isomorfismo, para todo $q \in \mathbb{N}_0$.

(i) Se puede suponer $m=1$, porque $X \times A^m = (X \times A^{m-1}) \times A^1$.

(ii) $A^1 = \operatorname{Spec} k[x_1]$ y $X \times A^1 = X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k[x_1] \cong X \times k$.

Luego, $O_{X\times A^1} = O_X \; k[x_1] = O_X[x_1]$.

y, si $(x,t) \in X \times A^1$, $O_{X\times A^1,(x,t)} = O_{X,x} \otimes_k k[x_1] = O_{X,x} \otimes_k k \cong O_{X,x}$.

(iii) Si $(U_i)_{i \in I}$ es un cubrimiento de X; $(p^{-1}(U_i))_{i \in I} = (U_i \times A^1)$ es un cubrimiento de $X \times A^1$.

Dado $(U_i)_{i \in I}$ cubrimiento de X, $(V_j)_{j \in J}$ cubrimiento de A^1, el cubrimiento de $X \times A^1$ dado por $(U_i \times V_j)_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ es un refinamiento de $(U_i \times A^1)_{i \in I}$.

Basta demostrar entonces el Axioma 9 construyendo una aplicación inversa a $p^*: K_q(X) \longrightarrow K_q(X \times A^1)$ a la que llamaremos π^*.

Sea $(E,\alpha(x_1,\ldots,x_{q-1})) \in K_q(X \times A^1)$, entonces $(\pi^* E, \pi^*\alpha)$ es:

$(\pi^* E)_x = E_{(x,o)}$ que es proyectivo sobre $O_{X\times A^1,(x,o)} \cong O_{X,x}$

$(\pi^*\alpha)_x = \alpha_{(x,o)}$. Es claro que p^* y π^* son aplicaciones inversas.

AXIOMA 10: Sea $Y \longrightarrow X$ subvariedad cerrada y sea $U = X - Y$.

Entonces, para todo $q \in N$, la siguiente sucesión es exacta:

$$H^q(Y,\underline{K}_q) \xrightarrow{i_*} H^{q+d}(X,\underline{K}_{q+d}) \xrightarrow{j^*} H^{q+d}(U,\underline{K}_{q+d}) \longrightarrow 0$$

donde $i: Y \longrightarrow X$ es una inmersión cerrada regular de codimensión d.

$j: U \longrightarrow X$ es la inclusión.

Basta probarlo en el caso $d = 1$.

(I) Veamos que $j^* \circ i_* = 0$

Sea $(U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento de Y, donde $U_i = V_i \cap Y$, y sea

$s \in H^q(Y, \underline{K}_q)$, $s_{i_0 \ldots i_q}(y) = (E_y , \sum \alpha_{i_1 \ldots i_{q-1}} x_1^{i_1} \ldots x_{q-1}^{i_{q-1}})$

(Puede suponerse $E_y = O^k_{Y,y}$)

Tomamos el cubrimiento de X dado por $((V_i)_{i\in I}, X-Y)$

$(i_* s)_{i_0 \ldots i_{q+1}} : V_{i_0 \ldots i_{q+1}} \longrightarrow K_{q+1}(V_{i_0 \ldots i_{q+1}})$

$$(i_* s)_{i_0 \ldots i_{q+1}}(x) = \begin{cases} id & \text{si } x \notin Y \\ \overline{s_{i_0 \ldots i_q}(x)} \cdot_K (O_{X,x}, 1-f_1) & \text{si } x \in Y \end{cases}$$

donde $\overline{s_{i_0 \ldots i_q}(x)}$ es el elemento de $K_q(O_{X,x})$ obtenido extendiendo los morfismos $\alpha_{i_1 \ldots i_{q-1}} : O^k_{Y,y} \longrightarrow O^k_{Y,y}$ a $\bar{\alpha}_{i_1 \ldots i_{q-1}} : O^k_{X,y} \longrightarrow O^k_{X,y}$; $\bar{\alpha}_{i_1 \ldots i_{q-1}}(f_1) = f_1$

Como j^* restringe el haz a $X-Y = U$, resulta que $j^* \circ i_*(s) = 0$

(II) Como U es denso, toda sección continua de un abierto se extiende de manera única a una sección de X.

Por lo tanto, j^* es un epimorfismo.

(III) Veamos que $\operatorname{Ker} j^* \subset \operatorname{Im} i_*$

Sea $t \in H^{q+1}(X, \underline{K}_{q+1})$ tal que $j^* t = 0$ en $H^{q+1}(U, \underline{K}_{q+1})$

Esto dice que toda intersección de abiertos del cubrimiento $V_{i_0 \ldots i_{q+1}}$ de U, para todo $x \in V_{i_0 \ldots i_{q+1}}$, $(j^* t)_{i_0 \ldots i_{q+1}}(x)$ es homotópico a $(O_{X,x}, id)$ en $K_{q+1}(O_{X,x})$. Pero,

$(j^* t)_{i_0 \ldots i_{q+1}}(x) = t_{i_0 \ldots i_{q+1}}(x)$, si $x \in U$.

Queremos probar que existe $s\in H^q(Y,\underline{K}_q)$ tal que $i_* s = t$.

Sea $y\in Y = X-U$, entonces $t_{i_0\dots i_{q+1}}(y) = (0^m_{X,y},\sum \alpha_{r_1\dots r_q}\, x_1^{r_1}\dots x_r^{r_q})$,

donde $\alpha_{r_1\dots r_q}: 0^m_{X,y} \longrightarrow 0^m_{X,y}$

Si $s_{i_0\dots i_q}(y) = (0^k_{Y,y},\sum \beta_{j_1\dots j_{q-1}}x_1^{j_1}\dots x_{q-1}^{j_{q-1}})$, debe ser homotópico a $\overline{s_{i_0\dots i_q}(y)}\cdot K(0^n_{X,y},\ 1-f_1)$ en $K_{q+1}(0_{X,y})$.

Pero esto sucede si y solo si $\Phi_{q+1}(t_{i_0\dots i_{q+1}}(y))$ es homotópico a $\overline{s_{i_0\dots i_q}(y)}\cdot K_1(\alpha_{XY}(y))$, donde $\Phi_j:K_j(0_{X,y}) \longrightarrow K_{j-1}(\Omega 0_{X,y})$ es el isomorfismo que se usó en la demostración anterior. $(j\geq 1)$

<u>Obs</u>: $\Phi_1(\alpha_{XY}(y)) = \text{long}(0_{X,y}/(1-f_1)0_{X,y}) = 1$

Entonces:

$$\overline{s_{i_0\dots i_q}(y)}\cdot_K\Phi_1(\alpha_{XY}(y)) = (0^k_{X,y}\otimes_{0_{X,y}}\Omega 0_{X,y}\ ,\sum\beta(\overline{{}_{j_1\dots j_{q-1}}}\otimes \text{id})x_1^{j1}\dots x_{q-1}^{j_{q-1}})$$

y si notamos $\Phi_{q+1}(t_{i_0\dots i_{q+1}}(y)) =$

$$= (0^m_{X,y}\otimes_{0_{X,y}}\Omega 0_{X,y},\sum(\tilde{\alpha}_{L_1\dots L_{q-1}}\otimes \text{id})x_1^{L_1}\dots x_{q-1}^{L_{q-1}})$$

Basta pedir que $\bar{\beta}_{j_1\dots j_{q-1}} = \tilde{\alpha}_{j_1\dots j_{q-1}}$

A continuación probaremos algunas propiedades de f^* y f_*

<u>PROP VI.1</u>: Sean X e Y esquemas y sea $f:X \longrightarrow Y$ un morfismo de esquemas.

Entonces, para todo $k\geq 0$, $f^*:H^k(Y,\underline{K}_k) \longrightarrow H^k(X,\underline{K}_k)$ es inyectiva

<u>Dem</u>: Sean $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento de Y y $s\in H^k(\mathcal{U},\underline{K}_k)$

$\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ otro cubrimiento de Y y $t\in H^k(\mathcal{V},\underline{K}_k)$ y supongamos que $f^*s = f^*t$

Entonces:

Se toma el cubrimiento $\mathcal{W} = (W_r)_{r\in R}$ que refine a ambos. como $f^*s = f^*t$,

$(f^*s)_{r_0\dots r_k}(x) = (f^*t)_{r_0\dots r_k}(x)$, para todo $x\in W_{r_0\dots r_k}$, $\forall r_0 \dots r_k$

Pero $(f^*s)_{r_0\dots r_k}(x) = f^*(s_{r_0\dots r_k}(y))\in K_k(f^{-1}(V_{r_0\dots r_k}))=K_k(W_{r_0\dots r_k})$, si $f(x)=y$

$(f^*t)_{r_0\ldots r_k}(x) = f^*(t_{r_0\ldots r_k}(y))$

Basta ver entonces que f^* es inyectiva en los $\underline{\underline{K}}_k$.

Sean $\overline{(E, \alpha)}$; $\overline{(E', \alpha')}$ elementos de $K_k(W_{r_0\ldots r_k})$ tales que

$f^*\overline{(E, \alpha)} = f^*\overline{(E', \alpha')}$. Si V es un abierto de $W_{r_0\ldots r_k}$,

$f^*E\big|_{f^{-1}(V)} = E_V \otimes_{O_{Y,V}} O^n_{X,f^{-1}(V)}$ (donde n es tal que E_V es sumando directo de $O^n_{Y,V}$

$f^*\alpha\big|_{f^{-1}(V)} = \alpha \otimes \mathrm{id}$

Entonces:

$(E_V \otimes_{O_{Y,V}} O^n_{X,f^{-1}(V)}, \alpha \otimes \mathrm{id}_n) = (E'_V \otimes_{O_{Y,V}} O^{n'}_{X,f^{-1}(V)}, \alpha' \otimes \mathrm{id}_{n'})$ en $K_k(f^{-1}(V))$

por lo tanto existe G, proyectivo sobre $O_{X,f^{-1}(V)}$, tal que:

$(\alpha \otimes \mathrm{id}_n) \oplus (\mathrm{id}_{E'} \otimes \mathrm{id}_{n'}) \oplus \mathrm{id}_G$ es homotópico a $(\mathrm{id}_E \otimes \mathrm{id}_n) \oplus (\alpha' \otimes \mathrm{id}_{n'}) \oplus \mathrm{id}_G$

Sea $\sum \Upsilon_i t^i$ la homotopía, donde $\Upsilon_i = \Upsilon_{j_0,\ldots,j_k} x_1^{j_1}\ldots x_k^{j_k}$

$$\Upsilon_{j_1\ldots j_k i}: (E_V \otimes_{O_{Y,V}} O^n_{X,f^{-1}(V)}) \oplus (E'_V \otimes_{O_{Y,V}} O^{n'}_{X,f^{-1}(V)}) \oplus G \longrightarrow (E_V \otimes_{O_{Y,V}} O^n_{X,f^{-1}(V)}) \oplus (E'_V \otimes_{O_{Y,V}} O^n_{X,f^{-1}(V)}) \oplus G$$

donde $\Upsilon_{0\ldots 0}$ es inversible y los demás son nilpotentes.

Tomamos entonces la restricción de cada $\Upsilon_{j_1\ldots j_k i}$ a

$(E_V \otimes \{(1,\ldots,1)\}) \oplus (E'_V \otimes \{(1,\ldots,1)\}) \oplus G$ (mirando a G como $O_{Y,V}$-módulo

proyectivo, si $O_{X,f^{-1}(V)}$ es un álgebra de tipo finito sobre $O_{Y,V}$)

a la que notamos $\overline{\Upsilon}_{j_1\ldots j_k i}$, obteniendo entonces una homotopía

entre $(\alpha \oplus \mathrm{id}_{E'} \oplus \mathrm{id}_G)$ y $(\mathrm{id}_E \oplus \alpha' \oplus \mathrm{id}_G)$.

Por lo tanto: $\overline{(E, \alpha)} = \overline{(E', \alpha')}$ en $K_k(V)$

PROP VI.2: Si $t \in H^k(X, \underline{\underline{K}}_k)$; $s \in H^j(X, \underline{\underline{K}}_j)$; $f: X' \longrightarrow X$ es un morfismo de esquemas:

$$f^*(s \cdot_K t) = (f^*s) \cdot_K (f^*t)$$

Dem: Basta ver que si $\alpha \in K_k(O_{X,x})$; $\beta \in K_j(O_{X,x})$, $f^*(\alpha \cdot_K \beta) = f^*(\alpha) \cdot_K f^*(\beta)$ en $K_{k+j}(O_{X,x})$

Supongamos que $j > 0$.

$f^*(\alpha \cdot_K \beta) = f^*(\Phi^{-1}(\alpha \cdot_K \Phi(\beta)))$; donde Φ es el isomorfismo entre $K_j(O_{X,x})$ y $K_{j-1}(\Omega O$

Entonces, razonando por inducción,

$$f^*(\alpha \cdot_K \beta) = \Phi^{-1}(f^*(\alpha \cdot_K \Phi(\beta))) = \Phi^{-1}(f^*\alpha \cdot_K f^*(\Phi(\beta))) =$$
$$= \Phi^{-1}(f^*(\alpha) \cdot_K \Phi(f^*(\beta))) = f^*(\alpha) \cdot_K f^*(\beta)$$

VII - CLASES DE CHERN

El objetivo de este cqpitulo es definir las clases de Chern de un fibrado vectorial E sobre un esquema X.

La forma de hacerlo consiste en definir primero las clases de Chern de un fibrado lineal y luego, pidiendo que las clases de Chern de un fibrado cualquiera satisfagan ciertas propiedades, obtener la definición general.

VII.1 - Notaciones

Sea E un fibrado vectorial de rango r sobre un esquema algebraico X. Notaremos $P(E)$ el fibrado proyectivo asociado a E, $p_E:P(E) \longrightarrow X$ a la proyección, y $O_E(1)$ el fibrado lineal canónico sobre $P(E)$ (o sea: el fibrado lineal dual de $O_E(-1)$; que es el subfibrado lineal trivial de $p^*E = P(E) \times_X E$).

Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
O_E(-1) \arrow[d, hook] & \\
p^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\
P(E) \arrow[r, "p_E"'] & X
\end{tikzcd}$$

donde p^*E es un fibrado de rango r sobre $P(E)$.

VII.2 - Clases de Chern de un fibrado lineal

Sea E un fibrado vectorial de rango 1 sobre X.

Definimos las clases de Chern de E en la forma:

$c_0(E) = 1$

$c_1(E) = \phi(O_E(1)) = \phi([E])$

$c_i(E) = 0$, si $i \geq 2$

donde $[E] \in Pic(X)$, y $\phi : Pic(X) \longrightarrow H^1(X, O_X^*) \simeq H^1(X, \underline{\underline{K}}_1)$ es el isomorfismo descripto en el capítulo VI.

Entonces $c_i(E) \in H^i(X, \underline{\underline{K}}_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

VII.3 - Clases de Chern de un fibrado cualquiera

Sea E un fibrado vectorial de rango r sobre X, $r > 1$. El fibrado $P(E)$ tiene rango $r-1$ sobre X y p^*E tiene rango r sobre $P(E)$.

Veamos primero el caso $r = 2$. Resulta entonces que $p^*E/O_E(-1)$ es un fibrado lineal sobre $P(E)$, así como $O_E(-1)$.

Definimos el polinomio de Chern de p^*E

$c_t(p^*E) = (1 + c_1(p^*E/O_E(-1))t).(1 + c_1(O_E(-1))t)$

y si $i \geq 0$, $c_i(p^*E)$ es el coeficiente de t^i en $c_t(p^*E)$.

Entonces $c_i(p^*E) \in H^i(P(E), \underline{\underline{K}}_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Si pedimos además que: $c_i(f^*E) = f^*(c_i(E))$ $(*)$, para todo fibrado vectorial E y para todo morfismo de esquemas f, obtenemos $p^*(c_i(E))$. Como también, dado f, f^* es inyectiva en el sentido del capítulo VI, obtenemos $c_i(E) \in H^i(X, \underline{\underline{K}}_i)$, ya que éstos quedan determinados de manera única.

Sea ahora $r > 1$ cualquiera.

Sean $E^{(1)} = p^*E/O_E(-1)$; $P^{(i)}(E) = P(P^{(i-1)}E)$; $p_i : P^{(i)}(E) \longrightarrow P^{(i-1)}(E)$ la proyección $(1 \leq i \leq r-1)$; y en general $E^{(i)} = p_i^*(E^{(i-1)}/O_{P^{(i-1)}(E)}(-1))$, $2 \leq i \leq r-1$.

Entonces $E^{(i)}$ es un fibrado de rango $r-i$ sobre $P^{(i)}(E)$ y $O_{P^{(i-1)}(E)}(-1)$ es fibrado lineal sobre $P^{(i)}(E)$.

Si suponemos definidos $c_i(E^{(1)}) \in H^i(P(E), \underline{\underline{K}}_i)$, decimos que:

$$c_t(p^*E) = c_t(E^1).(1 + c_1(O_E(-1)t);$$

$$c_t(E^{(1)}) = \sum^{r-1} c_i(E^{(1)})t^i$$

Obs: (i) Si p^*E [illegible] a filtración:

$$p^*E = E_r \supset E_{r-1} \ \ldots \supset E_0 = \emptyset$$

[illegible] lineales $L_i = E_i/E_{i-1}$; $1 \leq i \leq r$, resulta que:

$$c_t(p^*E) = \prod (1 + c_1(L_i)t)$$

(ii) La propiedad (*) se verifica si rg E = 1, porque:

Si $g: X' \longrightarrow X$ es un morfismo de esquemas y E es un fibrado lineal sobre X;

$$c_1(g^*E) = \Phi([0_{g^*E}(1)]) = \Phi[g^*(0_E(1))] = g^*(\Phi(0_E(1))) = g^*(c_1(E))$$

(iii) Si E es un fibrado vectorial cualquiera, existe un morfismo playo de esquemas $f: X' \longrightarrow X$ tal que:

(1) $f^*: H(X) \longrightarrow H(X')$ es inyectivo

(2) f^*E tiene una filtración por subfibrados:

$$f^*E = E_r \supset E_{r-1} \ \ldots \supset E_1 \supset E_0 = \emptyset \qquad (r = \mathrm{rg}\, E)$$

con fibrados cocientes lineales $L_i = E_i/E_{i-1}$, $1 \leq i \leq r$

Este morfismo f se construye por inducción en el rango de E.

Si rg E = 1 es claro.

Sea n = rg E y sea $p: P(E) \longrightarrow X$ la proyección . Sabemos que p^* es inyectiva y p^*E tiene un subfibrado de rango 1. Si $E^{(1)}$ es $p^*E/0_E(-1)$; tenemos por hipótesis inductiva un morfismo playo $q: X' \longrightarrow X$ tal que q^* es inyectivo y $q^*E^{(1)}$ es filtrado. Entonces, si $f = p \circ q$, f^* es inyectiva y se obtiene una filtración inducida de f^*E. Luego, podemos obtener una filtración de E con cocientes lineales.

TEOREMA VII.1: Las clases de Chern de un fibrado vectorial de rango r, E, satisfacen las siguientes propiedades:

(i) Si E tiene una filtración con cocientes lineales L_i, $1 \leq i \leq r$, $c_t(E) = \prod_{i=1}^{r} (1 + c_1(L_i)t)$

(ii) Si $j>r$, $c_j(E) = 0$

(iii) Si $f: X' \longrightarrow X$ es morfismo propio de esquemas, para toda sección $s \in H^k(X, \underline{K}_k)$, para todo $k \geq 0$:

$$f_*(c_i(f^*E)._K s) = c_i(E)._K f_*(s)$$

(iv) Si E es un fibrado vectorial sobre X, $f: X' \longrightarrow X$ es un morfismo de esquemas playo:

$$c_i(f^*E)._K f^* s = f^*(c_i(E)._K s)$$

para toda $s \in H^k(X, \underline{K}_k)$, para todo $k, i \in \mathbb{N}_0$.

(v) <u>Fórmula de Whitney</u>:

Si $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de fibrados vectoriales sobre X, entonces:

$c_t(E) = c_t(E').\, c_t(E'')$, o sea: $\quad c_k(E) = \sum_{i+j=k} c_i(E')._K c_j(E'') \quad k \geq 0$

<u>Obs</u>: Con la propiedad (i) demostraríamos la primera parte de la observación anterior.

<u>Dem</u>: (ii) Es claro a partir de la definición de las clases de Chern.

(iii) Sea $f: X' \longrightarrow X$ un morfismo propio; sea $s \in H^k(X', \underline{K}_k)$, entonces:

$$f_*(c_i(f^*E)._K s) = f_*(f^*(c_i(E))._K s) = c_i(E)._K f_* s \text{ (por el axioma 5)}$$

(iv) Sea $f: X' \longrightarrow X$ un morfismo playo, sea $s \in H^k(X, \underline{K}_k)$, entonces:

$$c_i(f^*E)._K f^* s = f^*(c_i(E))._K f^* s = f^*(c_i(E)._K s)$$

(La última igualdad está demostrada en la PROP.VI.2)

(i) Razonando por inducción en $r = rg\, E$.

Si $r = 1$, el resultado es trivial.

Si $r = k+1$, sea $p^*E/O_E(-1) = E_{r-1} \supset \dots \supset E_1 \supset E_o = \emptyset$ una filtración.

Por hipótesis inductiva: $c_t(p^*E/O_E(-1)) = \prod_{i=1}^{r-1}(1 + c_1(L_i))$, donde L_i $(1 \leq i \leq r-1)$ son los cocientes lineales de la filtración de $p^*E/O_E(-1)$ dada. Entonces p^*E tiene una filtración con fibrados cocientes lineales $E_i \oplus O_E(-1)/E_{i-1} \oplus O_E(-1) = L_i$ $(1 \leq i \leq r-1)$ y $L_r = O_E(-1)$.

$$c_t(p^*E) = c_t(E^{(1)}).(1+ c_1(O_E(-1))t) = \prod_{i=1}^{r}(1 + c_1(L_i)t)$$

(v) Sea $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de fibrados vectoriales sobre X.

Aplicamos la Obs.(iii) para hallar $f: X' \longrightarrow X$ tal que f^* es inyectiva y f^*E' tiene una filtración con fibrados cocientes lineales L'_i $(1 \leq i \leq r)$ y f^*E'' tiene una filtración con fibrados cocientes lineales L''_j $(1 \leq j \leq s)$

Entonces f^*E tiene una filtración con fibrados cocientes lineales L'_i y L''_j. Por lo tanto:

$$c_t(f^*E) = \prod_{i=1}^{r}(1 + c_1(L'_i)t) \prod_{j=1}^{s}(1 + c_1(L''_j)t) = c_t(f^*E').c_t(f^*E'')$$

Luego: $f^*(c_t(E)) = f^*(c_t(E')).f^*(c_t(E''))$; y como f^* es inyectiva, $c_t(E) = c_t(E').\ c_t(E'')$

VII.4 - Algunas observaciones

Completaremos este capítulo con algunas observaciones sobre las clases de Chern.

Obs.(iv) Supongamos que se quiere probar una fórmula que relacione las clases de Chern de un número finito de fibrados vectoriales. Si la fórmula es verdadera cada vez que los fibrados tienen filtraciones con fibrados cocientes lineales, y la relación entre los fibrados se preserva por productos fibrados playos, entonces la fórmula vale en general.

Esto resulta por la forma en que se construyeron las clases de Chern parte (iv) del teorema anterior.

Si el polinomio de Chern de un fibrado E de rango r se factoriza como:

$c_t(E) = \prod_{i=1}^{r} (1 + \alpha_i t)$, con $\alpha_i \in H^1(X, \underline{K}_1)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ se llamarán las <u>raíces de Chern</u> del fibrado E.

Esta factorización es puramente formal y las clases de Chern de E son las funciones simétricas elementales de $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

Si E tiene una filtración con cocientes lineales L_i y $c_t(E) = \prod_{i=1}^{r} (1 + \alpha_i t)$, entonces $c_1(L_i) = \alpha_i$ $(1 \leq i \leq r)$.

Todo polinomio simétrico en las raíces de Chern de E tiene una expresión como polinomio en las clases de Chern de E.

La fórmula de Whitney dice que para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ de fibrados vectoriales sobre X, el conjunto de raíces de Chern de E es la unión de los conjuntos de raíces de Chern de E' y E".

<u>PROP.VII.1</u>: Dado un fibrado vectorial E sobre un esquema X, las clases de Chern del fibrado dual $\check{E}$ están dadas por:

$$c_i(\check{E}) = (-1)^i c_i(E) \qquad (i \in \mathbb{N}_0)$$

<u>Dem</u>: Si E es un fibrado lineal es trivial.

Si E tiene una filtración con cocientes lineales L_i $(1 \leq i \leq r)$, entonces $\check{E}$ tiene una filtración con cocientes lineales $\check{L}_{r-i}$.

Luego, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son las raíces de Chern de E; $-\alpha_1, \ldots, -\alpha_r$ son las raíces de Chern de $\check{E}$.

La fórmula de las clases de Chern de un producto tensorial de fibrados vectoriales sobre X; $E \otimes F$ tiene una expresión sencilla en términos de las raíces de Chern de E y F.

<u>PROP.VII.2</u>: Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son las raíces de Chern de E; $\beta_1, \ldots, \beta_s$ son las de F, entonces $\alpha_i + \beta_j$ $(1 \leq i \leq r;\ 1 \leq j \leq s)$ son las raíces de Chern de $E \otimes F$.

La demostración de este resultado es ánaloga a la anterior, considerando primero el caso de fibrados lineales y luego el caso general. Resulta que $c_k(E \otimes F)$ es la k-ésima función simétrica elemental de $\alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_r+\beta_s$.

El carácter de Chern de un fibrado vectorial E se define por la fórmula:

$$ch(E) = \sum_{i=1}^{r} (\exp \alpha_i)$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son las raíces de Chern de E y $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Obs: (v) Las clases de Chern de un fibrado vectorial E quedan univocamente determinadas por las partes (iii) y (iv) del Teorema VII.1 y la definición de las clases de Chern de fibrados lineales.

(vi) Sean X e Y esquemas. Sean p y q las proyecciones de X x Y en X y en Y respectivamente. Sea E un fibrado vectorial sobre X y F un fibrado vectorial sobre Y.

Si $\alpha \in H(X)$; $\beta \in H(Y)$, resulta que:

$$(c_i(E)._K \alpha) \times \beta = c_i(p^* E)._K (\alpha \times \beta) \qquad (i \in \mathbb{N}_0)$$

Dem: Por definición $\alpha \times \beta = p^*\alpha \, ._K q^* \beta$.

Luego,
$$\begin{aligned} c_i(p^*E)._K(\alpha \times \beta) &= c_i(p^*E)._K(p^*\alpha \, ._K q^*\beta) = \\ &= (c_i(p^*E)._K p^*\alpha)._K q^*\beta = \\ &= p^*(c_i(E)._K\alpha)._K q^*\beta = \\ &= (c_i(E)._K\alpha) \times \beta . \end{aligned}$$

VIII - MORFISMOS REFINADOS Y SUCESION EXACTA DE GYSIN

El objetivo de este capítulo es demostrar algunas relaciones existentes entre un esquema noetheriano X y el esquema Y' obtenido por la explosión de Y a lo largo de un subesquema cerrado X, tal que la inmersión de X en Y es regular de codimensión d.

Se construirá una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow H^{k}(X,\underline{\underline{K}}_{k}) \longrightarrow H^{k+d-1}(\widetilde{X},\underline{\underline{K}}_{k+d-1}) \oplus H^{k+d}(Y,\underline{\underline{K}}_{k+d}) \longrightarrow H^{k+d}(\widetilde{Y},\underline{\underline{K}}_{k+d}) \longrightarrow 0$$

donde X' es el producto fibrado de X e Y sobre Y y $k \in \mathbb{N}_0$.

Para construir esta sucesión es necesario definir los morfismos de Gysin refinados, primero para inmersiones y luego para morfismos de intersección localmente completa.

VIII.1 - Morfismos de Gysin refinados

Sea $i: X \longrightarrow Y$ una inmersión cerrada regular de codimensión d y sea $f: Y' \longrightarrow Y$ un morfismo de esquemas.

Sea $X' = X \times_Y Y'$.

Se tiene el siguiente diagrama, que es un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "j"] \arrow[d] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i"'] & Y \end{tikzcd}$$

Si $j: X' \longrightarrow Y'$ es también una inmersión cerrada regular de codimensión d'.

d' Definiremos un morfismo:

$$i^!: \bigoplus_{k\geq 0} H^k(Y',\underline{\underline{K}}_k) \longrightarrow \bigoplus_{k\geq 0} H^k(X',\underline{\underline{K}}_k)$$

Sea $\mathcal{J}$ el ideal que define a X en Y. Como la inmersión de X en Y es regular de codimensión d, tenemos que el cono $C_XY = \mathrm{Spec}(\bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1})$ es un fibrado vectorial de rango d sobre X, notado también N_XY (llamado el "fibrado normal virtual").

Llamamos Y a la explosión de Y a lo largo de X ($Y = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{J}^n)$)

Si $\alpha \in \bigoplus_{k\geq 0} H^k(Y',\underline{\underline{K}}_k)$, definimos $i^!(\alpha) = c_d(g^* N_X Y) \cdot_K j^*(\alpha)$

<u>Obs</u>: (i) Si $Y = Y'$, $f = id_{Y'}$, entonces $g = id_X$, $g^* = id_{H^k(X,\underline{\underline{K}}_k)}$, $C_XY = C_{X'}Y'$

y $j = i$, por lo tanto $i^!$ es en este caso el morfismo de Gysin clásico .

Probaremos ahora algunas propiedades de los morfismos de Gysin refinados.

<u>TEOREMA VIII.1</u>: Sean $i: X \longrightarrow Y$, $i': X' \longrightarrow Y'$ e $i'': X'' \longrightarrow Y''$ inmersiones regulares de codimensión d, d' y d'' respectivamente, tales que $X' = X \times_Y Y'$, $X'' = X \times_Y Y''$ y se tiene el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X'' \arrow[r, "i''"] \arrow[d, "q"'] & Y'' \arrow[d, "p"] \\
X' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "i"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Entonces (si p_* y q_* están definidos) se cumple que:

(a) $i^!_{Y'}(p_*\alpha) = q_*(i^!_{Y''}(\alpha))$, para todo $\alpha \in \bigoplus_{j\geq 0} H^j(Y'',\underline{\underline{K}}_j)$

(b) Si p es morfismo plano de dimensión relativa n,

$i^!_{Y''}(p^*\alpha) = q^*(i^!_{Y'}(\alpha))$, para todo $\alpha \in \bigoplus_{j\geq 0} H^j(Y',\underline{\underline{K}}_j)$

(c) Si $d = d'$, $i^!_{Y''}(\alpha) = i'^!_{Y''}(\alpha)$, para todo $\alpha \in \bigoplus_{j\geq 0} H^j(Y'',\underline{\underline{K}}_j)$

Dem: (a) Si p es un morfismo propio, $i^!_{Y'}(p_*\alpha) = c_d(g^*N)._K i'^*(p_*\alpha)$

(donde $N = N_X Y$) .

Por otra parte, $q_*(i^!_{Y''}\alpha) = q_*(c_d(q^*g^*N)._K i''^*(\alpha)) =$

$$= c_d(g^*N)._K q_* i''^*(\alpha)$$

Basta ver entonces que $i'^* \circ p_* = q_* \circ i''^*$.

En general, si f_* y g_* están definidas y se tiene el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "m"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde Z es el producto fibrado de X y W sobre Y.

se verifica que:

$$h^* \circ f_* = g_* \circ m^*$$

(b) $i^!_{Y''}(p^*\alpha) = c_d(q^*g^*N)._K i''^*(p^*\alpha) = c_d(q^*g^*N)._K (p\ i'')^*(\alpha)$

Mientras que:

$q^*(i^!_{Y'}\alpha) = q^*(c_d(g^*N)._K i'^*(\alpha)) = c_d(q^*g^*N)._K (i'\ q)^*(\alpha)$

Pero $p \circ i'' = i' \circ q$.

(c) $i^!_{Y''}(\alpha) = c_d(q^*g^*N)._K i''(\alpha)$

$i'^!_{Y''}(\alpha) = c_d(q^*N')._K i''^*(\alpha)$, donde $N' = N_{X'}Y'$.

Basta ver, entonces que $N_{X'}Y' = g^*N_X Y$

Esto no sucede en general, pero si en este caso porque $d = d'$ y las inmersiones son regulares.

Obs: Como caso especial de (c) puede considerarse $i'' = i'$, $p = id_{Y'}$, $q = id_{X'}$.

Resulta entonces que $i''^{*} = i'^{*}$ y por lo tanto $i^{!}(\alpha) = i'^{*}(\alpha)$.

Ejemplo VIII.1: Sea E un fibrado vectorial de rango d sobre un esquema Y; sean s una sección regular de E, $X = Z(s)$; i la inmersión regular de X en Y; $\alpha \in H^{k}(Y,\underline{\underline{K}}_k)$; $Y' = \mathrm{sop}(\alpha)$; $X' = X \cap Y'$; p y q las inmersiones de Y' en Y y X' en X respectivamente y s_E la restricción de s a X.

Entonces, por el Teorema VIII.1 (c), al considerar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & Y' \arrow[d, "q"] \\
X \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "s_E"'] & E
\end{tikzcd}$$

se verifica que:

$$i^{!}_{Y'}(\alpha) = s_E^{!}(s_{*}\alpha) = s^{!}(s_{E*}(\alpha))$$

TEOREMA VIII.2: En las condiciones del teorema VIII.1, sea E el fibrado cociente $g^{*}N/N'$, de rango d-d'.

Entonces, para todo $\alpha \in \bigoplus_{j\geq 0} H^{j}(Y'',K_j)$:

$$i^{!}_{Y''}(\alpha) = c_{d-d'}(q^{*}E)._{K} i'^{!}_{Y''}(\alpha)$$

Dem: $i^{!}_{Y''}(\alpha) = c_d((g\,q)^{*}N)._{K} i''^{*}(\alpha) = q^{*}(c_d(g^{*}N))._{K} i''^{*}(\alpha)$

Mientras que:

$c_{d-d'}(q^{*}E)._{K} i'^{!}_{Y''}(\alpha) = q^{*}(c_{d-d'}(g^{*}N/N')._{K} c_{d'}(q^{*}N')._{K} i''^{*}(\alpha)$

Basta probar entonces que:

$$c_d(g^*N) = c_{d-d'}(g^*N/N')._K c_{d'}(N')$$

Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow g^*N \longrightarrow g^*N/N' \longrightarrow 0$$

Según la fórmula de Whitney para clases de Chern :

$$c_d(g^*N) = \sum_{i=0}^{d} c_i(g^*N/N')._K c_{d-i}(N')$$

Pero g^*N/N' es un fibrado de rango $d-d'$, luego $c_i(g^*N/N') = 0$ si i es mayor que $d-d'$, y N' es un fibrado de rango d', luego $c_{d-i}(N') = 0$ si $0 \leq i < d-d'$

Entonces, $c_d(g^*N) = \sum_{i=0}^{d-d'} c_i(g^*N/N')._K c_{d-i}(N') =$

$$= c_{d-d'}(g^*N/N')._K c_{d'}(N')$$

<u>Corolario VIII.2.1</u>: Si i' es un isomorfismo:

$$i^!_{Y'}(\alpha) = c_d(g^*N)._K \alpha \quad , \text{ para todo } \alpha \in \bigoplus_{j\geq 0} H^j(Y', \underline{K}_j)$$

<u>Dem</u>: Basta considerar $X'' = X'$; $Y'' = Y'$; $p = id_{X'}$; $q = id_{Y'}$.

En ese caso: $N_{X'}Y' = 0$, $d' = 0$; y resulta $E = g^*N$

<u>PROP VIII.1</u>: Sean $i: X \longrightarrow Y$; $i': X' \longrightarrow Y'$ inmersiones regulares de codimensión d y d' respectivamente y sea F un fibrado vectorial sobre Y'. Entonces, si el siguiente diagrama es un producto fibrado,

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

se verifica que:

$$i^!(c_m(F)._K \alpha) = c_m(i'^*F)._K i^!(\alpha)$$

todo $\alpha \in \bigoplus_{j\geq 0} H^j(Y',\underline{K}_j)$ y para todo $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Dem: $i^!(c_m(F)._K\alpha) = c_{d-d'}(E)._K i'^*(c_m(F)._K\alpha)$ (por el teorema VIII.2)

$$= c_{d-d'}(E)._K c_m(i'^*(F))._K i'^*\alpha$$

$$= c_m(i'^*F)._K c_{d-d'}(E)._K i'^*\alpha$$

$$= c_m(i'^*F)._K i^!(\alpha)$$

Ejemplo VIII.2: Sea E un fibrado vectorial de rango d sobre un esquema Y y sea una sección regular de E. Si $X = Z(s)$, la inclusión $i:X \longrightarrow Y$ es regular de codimensión d y $E|_X = N_X Y$.

Si $f : Y' \longrightarrow Y$ es un morfismo de esquemas, se tiene el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i"'] & Y \end{tikzcd}$$

Entonces $j_*\circ i^!(\alpha) = c_d(f^*E)._K\alpha$, para todo $\alpha \in \bigoplus_{j\geq 0} H^j(Y',\underline{K}_j)$

TEOREMA VIII.3: Sean $i: X \longrightarrow Y$; $i': X' \longrightarrow Y'$ e $i'': X'' \longrightarrow Y''$ inmersiones regulares de codimensión d, d', y d", respectivamente.

Sean $j: S \longrightarrow T$, $j': Y'' \longrightarrow Y'$ y $j'': X'' \longrightarrow X'$ inmersiones regulares de codimensión e, e', y e" , respectivamente.

Supongamos que se tiene el siguiente diagrama, en el que todos los cuadrados son productos fibrados:

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "i''"] \arrow[d, "j''"'] & Y'' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "j'"'] & S \arrow[d, "j"] \\ X' \arrow[r, "i'"'] \arrow[d, "q"'] & Y' \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "f"'] & T \\ X \arrow[r] & Y & \end{tikzcd}$$

Entonces: para todo $\alpha \in \bigoplus_{j \geq 0} H^j(Y', \underline{\underline{K}}_j)$, $j^! \circ i^!(\alpha) = i^! \circ j^!(\alpha)$.

Dem.: Sea $F = N_S I$.

$$j^! \circ j^!(\alpha) = c_d(j''^* \circ q^* N)._K i''^*(c_e(p^* F)._K j'^* \alpha) =$$

$$= c_d(j''^* \circ q^* N)._K c_e(i''^* \circ p^* F)._K (i''^* \circ j'^* \alpha) =$$

$$= c_d(j''^* \circ q^* N)._K c_e(i''^* \circ p^* F)._K (j' \circ i'')^*(\alpha)$$

Mientras que:

$$j^! \circ i^!(\alpha) = c_e(i''^* p^* F)._K j''^*(c_d(q^* N)._K (i'^* \alpha)) =$$

$$= c_e(i''^* \circ p^* F)._K c_d(j''^* \circ q^* N)._K (i' \circ j'')^*(\alpha) =$$

$$= c_e(i''^* \circ p^* F)._K c\ (j''^* \circ q^* N)._K (j' \circ i'')^*(\alpha)$$

Se verifica entonces el enunciado.

TEOREMA VIII.4: Consideremos el diagrama fibrado:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "h"'] & Y' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "g"] & Z' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i"'] & Y \arrow[r, "p"'] & Z \end{tikzcd}$$

Donde i (respectivamente p) es inmersión regular de codimensión d(resp.e) y donde i' (respectivamente p') es inmersión regular de codimensión d' (resp. e').

Entonces: $p \circ i$ es inmersion regular de codimensión d + e: y

$p' \circ i'$ es inmersión regular de codimensión d' + e',

y para todo $\alpha \in \bigoplus_{j \geq 0} H^j(Z, \underline{\underline{K}}_j)$:

$$(p \circ i)^!(\alpha) = i^! \circ p^!(\alpha)$$

Dem: Es claro que $p \circ i$ y $p' \circ i'$ son inmersiones regulares de codimensión d + e y

$d' + e'$ respectivamente.

Sean $N = N_X Z$; $M = N_X Y$; $H = N_Y Z$

Entonces: $(p \circ i)^!(\alpha) = c_{d+e}(h^* M)\cdot_K (p' \circ i')^*(\alpha) =$

$$= c_{d+e}(h^* M)\cdot_K (i'^* \circ p^*(\alpha))$$

Por otra parte: $i^! \circ p^!(\alpha) = c_d(h^* N)\cdot_K i'^*(c_e(g^* H)\cdot_K (p'^* \alpha)) =$

$$= c_d(h^* N)\cdot_K c_e(i'^* g^* H)\cdot_K (i'^*(p'^* \alpha)) =$$

$$= c_d(h^* N)\cdot_K c_e(h^* i^* H)\cdot_K (i'^*(p'^* \alpha))$$

Basta ver entonces que $M/i^* H = N$.

Pero este resultado está demostrado en EGA IV - 19.1.5.

PROP. VIII.2: Consideremos un diagrama fibrado como el anterior, donde i es una inmersión regular de codimensión d, y p y $p \circ i$ son morfismos planos de dimensión relativa n y $n-d$, respectivamente.

Entonces i' es inmersión regular de codimensión d; p' y $p' \circ i'$ son planos, y si $\alpha \in \bigoplus_{j \geq 0} H^j(Z', \underline{\underline{K}}_j)$:

$$(p' \circ i')^*(\alpha) = i'^*(p'^* \alpha) = i^!(p'^* \alpha)$$

Dem: Para las afirmaciones sobre i', p' y $p' \circ i'$ ver (5), App. A .

Para probar la fórmula, es claro que:

$$(p' \circ i')^*(\alpha) = i'^* \circ p'^*(\alpha)$$

La otra igualdad resulta de la observación posterior al Teorema VIII.1.

PROP. VIII.3: Considerando el mismo diagrama , supongamos que i es una inmersión regular de codimensión d) y que i' es inmersión regular de codimension d') ; p es suave de dimensión relativa n (y p' es suave de dimensión relativa n') y $p\circ i$ es inmersión regular de codimensión $d-n$ ($p'\circ i'$ es inmersion regular de codimensión $d'-n'$).

Entonces, para todo $\alpha \in \bigoplus_{j\geq 0} H^j(Z', \underline{\underline{K}}_j)$, se verifica que:

$$(p\circ i)^!(\alpha) = i^!(p'^*\alpha)$$

Dem: Consideremos el siguiente diagrama, que es un producto fibrado:

$$\begin{array}{ccc} W = X \times_Z Y & \xrightarrow{j} & Y \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[p\circ i]{} & Z \end{array}$$

La inmersión $i : X \longrightarrow Y$ determina una sección $s: X \longrightarrow W$ tal que $q\circ s = id_X$ e $i = j\circ s$.

p es suave de dimensión relativa n y por lo tanto q también es suave de la misma dimensión relativa.

Entonces s resulta una inmersión regular de codimensión n (ver Cap.I, pág.)

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} i^!(p'^*\alpha) &= (j\circ s)^!(p'^*\alpha) \\ &= s^!\circ j^!(p'^*\alpha) && \text{(por teorema VIII.4)} \\ &= s^!\circ q'^*(p\ i)^!(\alpha) && \text{(por teorema VIII.1 (b))} \\ &= (q'\circ s')^*(p\circ i)^!(\alpha) && \text{(por prop.VIII.2, usando que } q'\ s' = id) \\ &= (p\circ i)^!(\alpha) \end{aligned}$$

Obs: Como consecuencia del teorema VIII.2, podemos afirmar que para todo

$\alpha \in \bigoplus_{j \geq 0} H^j(Y, \underline{K}_j)$; $i^* \circ i_*(\alpha) = c_d(N)._K \alpha$

Para demostrar este hecho , basta considerar en el corolario VIII.2.1,

$X' = X$; $g = id_X$; $Y' = X$; $f = i$.

Ejemplo VIII.3: Sean $i_j : X_j \longrightarrow Y_j$ inmersiones regulares de codimensión d_j $(1 \leq j \leq r)$. Sean $f_j : Y'_j \longrightarrow Y_j$ morfismos de esquemas.

Sea $X'_j = X_j \times_{Y_j} Y'_j$; $i'_j : X'_j \longrightarrow Y'_j$ inmersiones regulares de codimensión d'_j $(1 \leq j \leq r)$ y $\alpha_j \in \bigoplus_{k \geq 0} H^k(Y', \underline{K}_k)$.

Entonces: . $i_1 \times \ldots \times i_r$ es una inmersión regular de codimensión $\sum_{k=1}^{r} d_k$;

. $i'_1 \times \ldots \times i'_r$ es una inmersión regular de codimensión $\sum_{k=1}^{r} d'_k$;

. $(i_1 \times \ldots \times i_r)^!(\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_r) = i_1^!(\alpha_1) \times \ldots\ i_r^!(\alpha_r)$

Dem: Podemos suponer $r = 2$, porque la demostración para r cualquiera es análoga. Además, como $(i_1 \times i_2) = (i_1 \times id_{Y_2}) \circ (id_{Y_1} \times i_2)$, por el teorema VIII.4, podemos suponer $i_2 = id_{Y_2}$.

Luego se usa el teorema VIII.1 (c).

Ejemplo VIII.4: Para la demostración del teorema VIII.4 se utilizó la conmutatividad (teorema VIII.3).

Supongamos ahora probado el teorema VIII.4 y demostremos la conmutatividad a partir del mismo.

En la situación del teorema VIII.4, consideremos el producto fibrado siguiente:

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f,g)} \\ X \times S & \xrightarrow[i\times j]{} & Y \times T \end{array}$$

Entonces : $j^! \circ i^!(\alpha) = (i\times j)^!(\alpha) = i^! \circ j^!(\alpha)$

<u>Dem</u>: Si $\alpha \in \bigoplus_{k\geq 0} H^k(Y', K_{\geq k})$, $i\times j = (i\times id_T)\circ(id_X\times j)$

Luego, $(i\times j)^!(\alpha) = (i\times id_T)^!((id_X\times j)^!(\alpha)) = i^! \circ j^!(\alpha)$

Escribiendo $i\times j = (id_X\times j)\circ(i\times id_T)$ obtenemos la otra igualdad.

VIII.3 - <u>Morfismos de intersección localmente completa</u>

Supongamos que todos los esquemas considerados admiten inmersiones cerradas en esquemas regulares.

Entonces, todo morfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ admite una factorización en una inmersión cerrada y un morfismo suave.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\ & P \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

(Tomar, por ejemplo: si $j: X \longrightarrow M$ es inmersión cerrada y M es un esquema regular, $P = Y \times M$; $i = (f,j)$ y $p: Y\times M \longrightarrow Y$ la proyección).

Recordemos que un morfismo $f: X \longrightarrow Y$ es de intersección localmente completa (i.l.c.) de codimensión d si admite una factorización en una inmersión cerrada regular de codimensión e (para algun $e \in N_0$), $i : X \longrightarrow P$ y un morfismo suave $p: P \longrightarrow Y$ de dimensión relativa $d+e$.

Para un morfismo i.l.c. $f: X \longrightarrow Y$ definiremos también el morfismo de Gysin refinado $f^!$.

Sea entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"'] & Y' \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde f es i.l.c. de codimensión d, f' es i.l.c. de codimensión d' y X' es el producto fibrado de X e Y' sobre Y.

Definimos entonces el morfismo de Gysin refinado:

$$f^! : \bigoplus_{k\geq 0} H^k(Y', \underline{\underline{K}}_k) \longrightarrow \bigoplus_{k\geq 0} H^k(X', \underline{\underline{K}}_k)$$

en la siguiente forma:

Si $f = p\circ i$ (i inmersión regular de codimensión d, p morfismo suave de dimensión relativa d+e) y $f' = p'\circ i'$, construimos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "h'"'] & P' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "h''"] & Y' \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r] & P \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

y si $\alpha \in \bigoplus_{k\geq 0} H^k(Y', \underline{\underline{K}}_k)$; $f^!(\alpha) = i^!(p'^*\alpha)$.

Para ver que $f^!$ está bien definida hay que probar la siguiente proposición.

<u>PROP.VIII.3</u>: En las condiciones anteriores:

(i) f es independiente de la factorización.

(ii) Si f es i.l.c. y playo, entonces $f^! = f'^*$.

(iii) Los teoremas VIII.1, VIII.3 y VIII.4 son verdaderos para $f^!$.

<u>Dem</u>: (i) Supongamos que $X \xrightarrow{i_1} P_1 \xrightarrow{p_1} Y$ es otra factorización de f.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & P_1 \arrow[dr, "p_1"] & \\ X \arrow[r, "{(i,\, i_1)}"] & P \times_{Y_1} P_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & Y \\ & & P \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

al que se le aplica la Prop. VIII.3 para obtener el resultado.

(ii) Se sigue de la Prop. VIII.2.

(iii) La validez de los teoremas VIII.1 y VIII.3 se deduce de que estos se verifican para morfismos suaves.

Para ver la funtorialidad (teorema VIII.4):

Sean $f: X \longrightarrow Y$ y $g: Y \longrightarrow Z$ morfismos i.l.c.

Podemos elegir factorizaciones tales que el diagrama que sigue sea conmutativo, con aplicaciones verticales suaves, y aplicaciones horizontales que sean inmersiones cerradas regulares, y los cuadrados sean productos fibrados.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & P \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "p"] & R \arrow[d, "p'"] \\
& Y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "g"'] & Q \arrow[d, "q"] \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

(Por ejemplo, si $P = Y \times M$, podemos tomar $R = Q \times M$)

Entonces:

$$\begin{aligned}
f^! \circ g^!(\alpha) &= f^!(j^! \circ q^*(\alpha)) && \text{(por def. de } g^!\text{)} \\
&= i^!(p^*(j^! \circ q^*(\alpha))) && \text{(por def. de } f^!\text{)} \\
&= i^!(j'^!(p'^* \circ q^*(\alpha))) && \text{(por teorema VIII.1(b))} \\
&= (j' \circ i)^!((q \circ p')^*(\alpha)) && \\
&= (g \circ f)^!(\alpha) && \text{(por def. de } (g \circ f)^!\text{)}
\end{aligned}$$

VIII.4 - Transformaciones monoidales

Supongamos que X es un subesquema cerrado de un esquema Y, y la inmersión $i: X \longrightarrow Y$ es regular de codimensión d, para algún $d \in \mathbb{N}_0$. Sea $N = N_X Y$ el fibrado normal virtual de X en Y, que es un fibrado vectorial sobre X. (ver Cap.I, pág.)

Sea $\tilde{Y}$ la explosión de Y a lo largo de X y $\tilde{X}$ el fibrado proyectivo sobre X asociado a N. Se tiene entonces el siguiente diagrama, que es un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & \tilde{Y} \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde j es una inmersión reguler de codimensión 1.

Como $N_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \mathcal{O}_{N_X Y}(-1)$, entonces $E = g^*N/N_{\tilde{X}}\tilde{Y} = g^*N/\mathcal{O}_N(-1)$

Supondremos en lo que sigue que Y es un subesquema de un esquema regular (o que $f: \tilde{Y} \longrightarrow Y$ es i.l.c.), por lo tanto, también lo es $\tilde{Y}$.

Entonces f es i.l.c. de dimensión relativa 0.

Queremos probar que en estas condiciones existe una sucesión exacta (sucesión exacta de Gysin) de la forma:

$$0 \longrightarrow H^k(X,\underline{\underline{K}}_k) \xrightarrow{\alpha} H^{k+d-1}(\tilde{X},\underline{\underline{K}}_{k+d-1}) \oplus H^{k+d}(Y,\underline{\underline{K}}_{k+d}) \xrightarrow{\beta} H^{k+d}(\tilde{Y},\underline{\underline{K}}_{k+d}) \longrightarrow 0$$

donde:

$$\alpha(x) = (c_{d-1}(g^*N/N_{\tilde{X}}\tilde{Y}) \cdot_K g^*(x) \,;\, -i_*x) = (f^!(x);\, -i_*x) \quad , \text{ si } x \in H^k(X,\underline{\underline{K}}_k)$$

$$\beta(x,y) = j_*(x) + f^*(y) \quad , \text{ si } x \in H^{k+d-1}(\tilde{X},\underline{\underline{K}}_{k+d-1}) \text{ e } y \in H^{k+d}(Y,\underline{\underline{K}}_{k+d})$$

Dem:

1°paso: α es un monomorfismo.

Sea $x \in H^K(X,\underline{\underline{K}}_K)$ tal que $i_* x = 0 = f^!(x)$

Pero i_* es un monomorfismo, luego $x = 0$

2°paso: $\mathrm{Im}\,\alpha \subseteq \mathrm{Ker}\,\beta$.

Vamos a saber que, para todo $x \in H^K(X,\underline{\underline{K}}_K)$,

$j_*(c_{d-1}(E)._K g^* x) - f^* \circ i_*(x)) = 0$, o sea $j_*(c_{d-1}(E)._K g^* x) = f^* \circ i_*(x)$

Pero $f^* \circ i_*(x) = j_* \circ f^!(x)$, aplicando el teorema VII.1 (a), al diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ Y & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

donde f es i.l.c. de codimensión d, y g es i.l.c. de codimensión 1.

(i_* y j_* están bien definidas)

3°paso: β es un epimorfismo.

Sea $\tilde{y} \in H^{K+d}(\tilde{Y},\underline{\underline{K}}_{K+d})$.

veamos que existe $\tilde{x} \in H^{K+d-1}(\tilde{X},\underline{\underline{K}}_{K+d-1})$ tal que $\tilde{y} = f^* \circ f_*(\tilde{y}) + j_*(\tilde{x})$

Obs: $f_* = p_* \circ i_*$

Basta ver que $\tilde{y} - f^* \circ f_*(\tilde{y})$ se anula en $\tilde{Y} - \tilde{X}$ porque entonces, considerando la sucesión exacta:

$$H^{K+d-1}(\tilde{X},\underline{\underline{K}}_{K+d-1}) \longrightarrow H^{K+d}(\tilde{Y},\underline{\underline{K}}_{K+d}) \longrightarrow H^{K+d}(\tilde{Y}-\tilde{X},\underline{\underline{K}}_{K+d}) \longrightarrow 0$$

existe $\tilde{x} \in H^{k+d-1}(X,\underline{\underline{K}}_{k+d-1})$ tal que $j_*(\tilde{x}) = \tilde{y} - f^* f_*(\tilde{y})$.

Pero para esto basta con calcular $\tilde{y} - f^* f_*(\tilde{y})$ en un elemento de $\tilde{Y} - \tilde{X}$ (o ver el corolario VIII.2.1)

<u>4º paso</u>: $\operatorname{Ker}\beta \subset \operatorname{Im}\alpha$

Sea $(\tilde{x},y) \in H^{k+d-1}(X,\underline{\underline{K}}_{k+d-1}) \oplus H^{k+d}(Y,\underline{\underline{K}}_{k+d})$ tal que $f^*(y) + j_*(\tilde{x}) = 0$

Entonces, $f^*(y) = -j_*(\tilde{x})$

$$y = f_* f^*(y) = -f_* j_*(\tilde{x}) = -i_*(g_*(\tilde{x})).$$

Basta ver entonces que:

$$\tilde{x} = c_{d-1}(E)\cdot_K g^*(g_*(\tilde{x}))$$

Tomemos $\tilde{x}' = \tilde{x} - c_{d-1}(E)\cdot_K g^*\circ g_*(\tilde{x})$.

$$g_*\tilde{x}' = g_*(\tilde{x}) - g_*(c_{d-1}(E)\cdot_K g^*\circ g_*(\tilde{x})) =$$

$$= g_*(\tilde{x}) - g_*(\tilde{x})$$

<u>Obs</u>: La última igualdad es una consecuencia directa de la definición de g_* cuando $g : F \longrightarrow X$ y F es un fibrado sobre X. (ver(15

$$y \quad j_*(\tilde{x}') = j_*(\tilde{x}) - j_*(c_{d-1}(E)\cdot_K g^*\circ g_*(x)) =$$

$$= j_*(\tilde{x}) - f^*\circ i_*\circ g_*(\tilde{x}) =$$

$$= j_*(\tilde{x}) - f^*\circ f_*\circ j_*(\tilde{x}) =$$

$$= j_*(\tilde{x}) - j_*(\tilde{x}) = 0$$

De aquí podemos deducir que $\tilde{x}' = 0$:

Si $\tilde{x} = \sum_{i=0}^{d-1} c_1(O_N(1))^{i+1}\cdot_K g^*(x_i)$, (ver (15)) entonces

$$0 = g_*\left(\sum_{i=0}^{d-1}(c_1(0_N(1))^{i+1}\cdot_K g^*(x_i)\right) =$$

$$= x_{d-1}$$

porque, $g_*: H^k(X,\underline{\underline{K}}_k) \longrightarrow H^{k-(d-1)}(X,\underline{\underline{K}}_{k-(d-1)})$, luego, si $k<d-1$ $g_*(x) = 0$, para todo $x \in H^k(X,\underline{\underline{K}}_k)$.

Además, $0 = j^*\cdot j_*(\widetilde{x}) =$

$$= c_1(N_XY)\cdot_K\widetilde{x} =$$

$$= c_1(0_N(-1))\cdot_K\widetilde{x} =$$

$$= -c_1(0_N(1))\cdot_K\widetilde{x} =$$

$$= -\sum_{i=0}^{d-2} c_1(0_N(1))^{i+2}\cdot_K g^*(x_i)$$

y aplicando nuevamente g_* resulta que $x_{d-2} = 0$.

Si luego multiplicamos por $c_1(0_N(1))$ y aplicamos g_* , obtenemos que $x_{d-3} = 0$ y procediendo de la misma forma, resulta que:

$x_{d-1} = x_{d-2} = \ldots\ldots = x_0 = 0$.

Por lo tanto, $\widetilde{x}' = 0$.

VIII.5 - Algunas observaciones

Agregaremos ahora algunos resultados relacionados con los morfismos de Gysi[illegible]ador.

Ejemplo VIII.5 : Sea el siguiente diagrama un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde i, j, f y g son inmersiones cerradas regulares.

Entonces,

$$g^{*}N_XY/N_{X'}Y' \cong j^{*}N_{Y'}Y/N_{X'}X$$

El fibrado $g^{*}N_XY/N_{X'}Y'$ es llamado también el "fibrado normal exceso", y el ejemplo dice que en este caso es independiente de la orientación del cuadrado.(ver (5), pág.104)

Ejemplo VIII.6 : Consideremos un producto fibrado como el del ejemplo anterior donde i y j son inmersiones cerradas regulares de codimensión d y d' respectivamente.

Supongamos también que $c_d(N_XY) = 0$.

Entonces , existe un único morfismo que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} H^k(X',\underline{\underline{K}}_k) \arrow[r, "i'_*"] & H^{k+d'}(Y',\underline{\underline{K}}_{k+d'}) \arrow[r, "j'^*"] \arrow[d, "i^!"] & H^{k+d'}(Y'-X',\underline{\underline{K}}_{k+d'}) \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\sigma"] & 0 \\ & H^{k+d}(X',\underline{\underline{K}}_{k+d}) & & \end{tikzcd}$$

Porque, sabemos que la fila es exacta por el Axioma 10. Luego j^* es un epimorfismo.

Además, σ está bien definida, ya que:

$$i^! \circ i'_*(x) = c_d(g^* N Y) \cdot_K x \qquad \text{(por teorema VIII.1(a))}$$
$$= 0$$

para todo $x \in H^k(X', \underline{K}_k)$.

INDICE DE NOTACIONES

BIBLIOGRAFIA

(1) D. QUILLEN . Higher Algebraic K-theory I

Lecture Notes in Math. 341 (77-139), Springer Verlag, 1972.

(2) M.KAROUBI - O.VILLAMAYOR . K-théorie algebrique et K-théorie topologique.

Math. Scand.28,(p.265-307), 1971.

(3) M.KAROUBI . La periodicité de Bott en K-théorie generale.

Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.- 4° serie t.4 (p. 63-95),1971.

(4) R.HARTSHORNE . Algebraic Geometry.

Grad. Texts in Math. - Springer Verlag, 1977.

(5) W.FULTON . Intersection Theory.

A series of mod. surv. in Math. - Springer Verlag, 1984.

(6) R.GODEMENT . Topologie algebrique et théorie des faisceaux.

Actualité scient. et industrielles, 1252.

Publ. de l'Inst. de Math. de l'Université de Strasbourg, XIII.

Ed. Hermann, 1958.

(7) J.P.SERRE . Faisceaux algebriques coherents.

Annals of Math. 61 (p. 197-278), 1955.

(8) C.CHEVALLEY . Les classes d'equivalence rationelle I, II.

Seminaire . Chevalley, 2° anee, Anneaux de Chow et applications, Secr. Math. Paris, 1958.

(9) A. GROTHENDIECK . La théorie des classes de Chern.

Bull. Soc. Math. France, 86 (p. 137-154), 1958

(10) A. BOREL- J. P. SERRE . Le théorème de Riemann-Roch.

Bull. Soc. Math. France, 86 (p. 97-136), 1958.

(11) D. ANDERSON . Relationship among K-theories.

Lect. Notes in Math. 341 (p. 52-67). Springer Verlag, 1973.

(12) L. VASERSHTEIN . Foundations of Algebraic K-theory.

Russian Math. Surveys 31.4 (p. 89-156), 1976.

(13) M. ATIYAH- I. MACDONALD . Introducción al Algebra Conmutativa.

Ed. Reverté, 1978.

(14) I. G. MACDONALD . Introduction to schemes.

Benjamin, Inc., New York. 1968.