Teoría de topos de Grothendieck y sus aplicaciones a la lógica y la geometría

Bruno, Oscar Pablo

1986

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

TEORIA DE
TOPOS DE GROTHENDIECK
Y SUS APLICACIONES
A LA LOGICA Y LA GEOMETRIA

por

Oscar Pablo Bruno

Trabajo de Tesis para optar al grado de Doctor en Matemática

Departamento de Matemática,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires;
Consejo Nacional de Investigaciones
Científicas y Técnicas.

-1986-

A mi esposa Marta Kahl

A mis padres, cuyo es-
fuerzo de muchos años
me permitió estudiar.

Topos de Grothendieck y sus aplicaciones a la lógica y la geometría

Geometría diferencial sintética en los modelos bien adaptados

Introducción

En esta tesis nos ocupamos de aspectos topológicos y diferenciales de tres modelos bien adaptados. Los capítulos 0. y 5. no contienen material original. En el capítulo 0. (en el cual no damos la totalidad de las demostraciones) se intenta ubicar en la filosofía de la Geometría Diferencial Sintética a un eventual lector no interiorizado con el tema. En el capítulo 5. incluimos algunos hechos generales que necesitamos en otros capítulos así como una sucinta descripción de la lógica interna en un topos. Los demás capítulos contienen el material original de esta tesis. Cada uno de ellos está precedido bien por una introducción, bien por algunos párrafos en los que se explica brevemente de que trata el capítulo.

Deseo expresar mi agradecimiento a la gente que me acompañó en el Departamento de Matemáticas de la F.C.E.N. durante el tiempo en que trabajé en esta tesis: C. López, M. del C. Calvo, A. Paenza, A. Dickenstein, C. Sessa, C. Cabrelli, R. Noriega, N. Fava, y tantos otros.

Además, deseo enfatizar mi agradecimiento en el caso de mi director de tesis Eduardo J. Dubuc quien, con gran generosidad puso a mi disposición todos sus conocimientos, me dio comprensión y afecto, y estuvo siempre dispuesto a discutir conmigo durante todo el tiempo que yo deseé. Estoy endeudado con él por su ayuda en cuestiones tanto matemáticas como no matemáticas.

Deseo agradecer también a todas las personas del departamento de matemática, de las cuales aprendí todo lo que sé de esta ciencia.

Por último, quisiera agradecer a Claudia Clemares quien, haciendo malabares para decifrar mis originales, mecanografió esta tesis.

Oscar P. Bruno

Buenos Aires, abril de 1986.

Indice

pag.

Capítulo 0

La Geometría Diferencial Sintética

y

sus modelos

El objeto de estudio de la Geometría Diferencial Sintética no es, como en la Geometría Diferencial Clásica, la categoría de variedades diferenciables. Tal objeto proviene del intento de aplicar técnicas similares a las de la Geometría Algebraica moderna para "sintetizar" los procesos de límite.

A. Grothendieck en 1957 [6] introdujo los Esquemas Afines, que son una especificación concreta de la categoría dual de la categoría de anillos conmutativos. En la categoría dual de la categoria de los anillos conmutativos, A_{nn}^{op} , existe la noción de desplazamiento infinitesimal. Para explicitar esto, convengamos en notar con $\bar{A} \in A_{nn}^{op}$ al objeto definido por el anillo conmutativo A, y llamemos $R = \overline{\mathbb{R}[x]}$ (la línea) y $D = \overline{\mathbb{R}[x]/_{(x^2)}}$ Nótese que dado que el morfismo cociente $\mathbb{R}[x] \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}[x]/_{(x^2)}$ es un epimorfismo, la flecha π en la categoría dual es un monomorfismo, i.e., D es un subobjeto de R.

Decíamos que en A_{nn}^{op} existe la noción de desplazamiento infinitesimal, o lo que es lo mismo, de vector tangente. Tomemos por ejemplo el anillo $A = \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n] /(f_1,\dots,f_k)$ y consideremos una flecha $t : D \to \bar{A}$. Tal fecha es un morfismo de anillos $t : A \to \mathbb{R}[x]/_{(x^2)}$. Pero los morfismos de anillos entre A y $\mathbb{R}[x]/_{(x^2)}$ están en correspondencia biunívoca con las n-tuplas $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ de elementos de $\mathbb{R}[x]/_{(x^2)}$ tales que $f_j(\xi_1,\ldots,\xi_n) = 0$ $(j = 1,\ldots,k)$. Como $\xi_i \in \mathbb{R}[x]/_{(x^2)}$ existen para cada i números $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ tq $\xi_i = a_i + b_i\epsilon$ (donde $\epsilon = [x] \in \mathbb{R}[x]/_{(x^2)}$). Además la escritura $\xi_i = a_i + b_i\epsilon$ es única. Y, por otro lado, la condición $f_j(\xi_1,\ldots,\xi_n) = 0$ es equivalente (por el desarrollo de Taylor, y dado que $\epsilon^2 = 0$) a $f_j(a_1,\ldots,a_n) + \left[\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f_j}{\partial x_i})(\bar{a}) .b_i\right]\epsilon = 0$. o, equivalentemente a que, para $j = 1,\ldots,k$

$$(1) \qquad f_j(a_1,\ldots,a_n) = 0 \qquad y \qquad \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f_j}{\partial x_i})(a_1,\ldots,a_n).b_i = 0$$

Resumiendo, existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de flechas $t : D \to \bar{A}$ y el conjunto de 2n-tuplas $(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n)$ que verifican las ecuaciones (1) para $j=1,\ldots,k$. Ahora, en el caso en que las ecuaciones $f_1 = 0,\ldots,f_k = 0$ sean independientes (es decir, su jacobiano tenga rango k en el conjunto de soluciones), las ecuaciones (1) dicen que $(b_1,\ldots,b_n)$ es un vector tangente a la variedad diferenciable definida por $f_1 = 0,\ldots,f_k = 0$ en el punto $(a_1,\ldots,a_n)$.

Así en el caso en que las ecuaciones que definen a A sean independientes, un morfismo $t : D \to \bar{A}$ "es lo mismo" que un vector tangente a la variedad que A define. Se comprende pues de lo que venimos de hacer el sentido de la siguiente definición, aún en el caso en el que ideal de presentación de A no este generado por funciones (polinomios) independientes.

0.0. Definición. *Llamaremos vector tangente a* $\bar{A} \in A_{nn}^{op}$ *a toda flecha* $t : D \to \bar{A}$.

0.1. Observación. Se desprende de lo anterior que una flecha $t : D \to R$ "es lo mismo" que un vector tangente a $\mathbb{R}$, es decir, un par de números reales. Para alimentar la imaginación podemos pensar que D es una variedad infinitesimal alrededor de "$0 \in R$", tal pequeña que toda flecha $t : D \to R$ es lineal, pero lo suficientemente "gorda" como para permitir calcular la "pendiente"de toda curva $t : D \to R$.

0.2. En 1967, Lawvere propuso [8] un tratamiento axiomático del estudio de la geometría, abstraído de las ideas de Grothendieck, pero, esta vez con una intención Geométrico-Diferencial. Básicamente, Lawere pensaba en una categoría que "contenga" a las variedades -en particular a la linea R- y al objeto D de "infinitesimales de cuadro nulo", y que se tenga el axioma de tipo línea: $R^D = R \times R$ (ver 0.1). Además, un cubrimiento por abiertos U_α de una variedad M debería ser un "cubrimiento", en el sentido de que una flecha de

$M \to X$ debería poder definirse definiéndola en cada abierto del cubrimiento -de tal manera que la definición sea coherente en las intersecciones $U_\alpha \cap U_\beta$- y, por último, si M y N son dos variedades diferenciables en el sentido clásico, las flechas entre ellas deberían ser exactamente las funciones diferenciables (de clase C^∞).

A mediados de la década del 70, A. Kock, G. Reyes y G. Wraith, comenzaron el desarrollo de esta teoría que dió en llamarse Geometría Diferencial Sintética. Sin embargo, no fue hasta 1978 que se conoció un modelo para los axiomas de Lawere, siendo E. Dubuc [2] , quien lo introdujo. Con el correr del tiempo, el mismo E. Dubuc introdujo otro modelo mas perfeccionado [3], que describimos a continuación.

Un modelo bien adaptado

Necesitamos comenzar introduciendo ciertas nociones.

0.3. Definición: *Sea* $U \subseteq \mathbb{R}$ *un abierto y sea* $I \subseteq C^\infty(U)$ *un ideal en el sentido algebraico usual. Diremos que* I *es de carácter local (o determinado por los gérmenes, o de naturaleza local) si dada* $f \in C^\infty(U)$ *se tiene*

$f \in I$ *si y sólo si existe un cubrimiento de* U *por abiertos* $\{U_\alpha\}$, $\bigcup_\alpha U_\alpha = U$ *tal que para todo índice* α *existe* $f_\alpha \in I$ *tal que* $f|_{U_\alpha} = f_\alpha|_{U_\alpha}$.

0.4. Proposición (Dubuc [3]). *Si* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un abierto y* $I \subseteq C^\infty(U)$ *es un ideal finitamente generado entonces* I *es un ideal de caracter local* ∎

Así, la proposición anterior nos brinda una gran cantidad de ejemplos de ideales de caracter local. Es fácil ver que también los ideales cerrados en la topología C^∞-CO (que definiremos en 1.10) lo son.

0.5. Observación: i) Si $I \subseteq C^\infty(U)$ es un ideal que no es de caracter local, existe el más pequeño ideal de caracter local que contiene a I. Llamaremos a tal ideal, la clausura de naturaleza local de I, y lo notaremos $\hat{I}$. De hecho, $f \in \hat{I}$ sii existe un cubrimiento $\{ U_\alpha \}$ de U tal que para cada α existe $f_\alpha \in I$ tal que $f|_{U_\alpha} = f_\alpha|_{U_\alpha}$.

ii) Sean U, V abiertos de $\mathbb{R}^n$, $V \subseteq U$. Si $I \subseteq C^\infty(U)$ es un ideal, llamamos $I|_V$ al ideal generado en $C^\infty(V)$ por $\{ f|_V : f \in I\}$. Nótese que puede darse el caso de que I sea de caracter local pero $I|_V$ no. Por ejemplo, tomemos $U = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ e I = ideal de funciones que se anulan en un entorno de $0 \in \mathbb{R}$. El ideal I es de caracter local pero $I|_V$ no lo es: 1 está localmente en $I|_V$, pero claramente no está en $I|_V$.

iii) Sea I un ideal de $C^\infty(U)$. Llamaremos $Z(I)$ al conjunto de los ceros de I, i.e. $Z(I) = \{\bar{x} \in U \mid \forall f \in I,\ f(\bar{x}) = 0 \}$. Nótese que si $\bar{x} \notin Z(I)$ y

$f \in C^\infty(U)$ la condición "existe un entorno abierto de $\bar{x}$ en U y $h \in I$ tal que $f|_U = h|_U$" es inmediatamente satisfecha. En efecto, como $\bar{x} \notin Z(I)$ podemos elegir $h \in I$ tal que $h(\bar{x}) \neq 0$; esta h será no nula en un entorno V' de $\bar{x}$ en U y así tendremos que $\psi = \frac{f}{h}$ está definida en V'. Tomando un entorno V de $\bar{x}$, tal que $\bar{V} \subseteq V'$ podemos elegir $\varphi \in C^\infty(U)$ tal que $\varphi|_V = \psi$, y así, la función $\varphi.h \in I$ es tal que $\varphi.h|_V = f|_V$. Por lo tanto, para verificar que una función f pertenece a $\hat{I}$ (o a I si I es de caracter local) basta encontrar un cubrimiento $\{U_\alpha\}$ de $Z(I)$ y $f_\alpha \in I$ tal que $f|_{U_\alpha} = f_\alpha|_{U_\alpha}$ (ver 0.3).

0.6. Observación. En toda $\mathbb{R}$-algebra, y en particular en los anillos de la forma $\dfrac{\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]}{I}$ (donde I es cualquier ideal), pueden evaluarse los polinomios. Explícitamente, si $f \in \mathbb{R}[y_1,\ldots,y_m]$ y $(h_1,\ldots,h_m) \in \dfrac{\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]}{I}$, está claro cual es el elemento $f(h_1,\ldots,h_m) \in \dfrac{\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]}{I}$ Con los anillos del tipo $C^\infty(\mathbb{R}^n)_{/I}$ (donde I es cualuier ideal) pasa algo análogo: en ellos pueden evaluarse las funciones C^∞ , razón por la cual diremos que tales anillos son anillos C^∞. Explicitamente, si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ y $(h_1,\ldots,h_m) \in$ $\in (\frac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I})^m$, tiene sentido calcular $f(h_1,\ldots,h_m)$. En efecto, tomemos elementos $\ell_1,\ldots,\ell_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que $[\ell_1] = h_1,\ldots,[\ell_m] = h_m$. Definimos $f(h_1,\ldots,h_m) = [f(\ell_1,\ldots$

$\ldots,\ell_m)] \in C^\infty(\mathbb{R}^m)_{/I}$ El hecho de que esta definición es independiente de la elección de los representantes $\ell_1,\ldots$ $\ldots,\ell_m$ de $h_1,\ldots,h_m$ se sigue del conocido lema siguiente.

0.7. <u>Lema</u>: *Sea* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. *Existen funciones* $h_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{2m})$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *tales que para todo* $\bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^m$. *se tiene*

$$f(\bar{x}) - f(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i).h_i(\bar{x},\bar{y}) \blacksquare$$

Por otro lado, un morfismo de $\mathbb{R}$-algebras $\varphi : \dfrac{\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]}{I} \to$ $\to \dfrac{\mathbb{R}[y_1,\ldots,y_m]}{J}$ es una función tal que $\varphi(a) = a$ para $a \in \mathbb{R}$, y que preserva sumas y productos ó, equivalentemente, una función tal que, para $h_1,\ldots,h_r \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]/I$ y $f \in \mathbb{R}[t_1,\ldots,t_r]$ se tiene

$$\varphi(f(h_1,\ldots,h_r)) = f(\varphi(h_1),\ldots,\varphi(h_r))$$

0.8. <u>Definición</u>. *Un <u>morfismo de anillo C^∞</u>* $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}^n)_{/I} \to$ $\to C^\infty(\mathbb{R}^m)_{/J}$ *es una función tal que para* $h_1,\ldots,h_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)_{/I}$ *y* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^r)$ *se tiene* $\varphi(f(h_1,\ldots,h_r)) = f(\varphi(h_1),\ldots,\varphi(h_r))$.

En particular, como los polinomios son funciones C^∞, un morfismo C^∞ es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

0.9. <u>Observación</u>: Así como $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]/I$ es finitamente generado por $[x_1],\dots,[x_n]$ (pues todo elemento de $\frac{\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]}{I}$ es una combinación polinomial de $[x_1],\dots$ $\dots,[x_n]$), $\frac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$ es C^∞- generado por $[x_1],\dots,[x_n]$ ($x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la i-ésima proyección) ya que todo elemento $[f(x_1,\dots,x_n)]$ $\frac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$ es una "combinación C^∞" de $[x_1],\dots,[x_n]$; en efecto, $[f(x_1,\dots,x_n)] = f([x_1],\dots,[x_n])$. Esto implica que todo morfismo de anillos $C^\infty \varphi : \frac{C(\mathbb{R}^n)}{I} \to$ $\to \frac{C^\infty(\mathbb{R}^m)}{J}$ queda univocamente determinado por sus valores en $[x_1],\dots,[x_n]$.

0.10. Proposición. *Existe una biyección entre* $\mathrm{Hom}_\infty\left(\frac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}, \frac{C^\infty(\mathbb{R}^m)}{J}\right)$ *y el conjunto* $A = \{(h_1,\dots,h_n) \in$ $\in \left(\frac{C^\infty(\mathbb{R}^m)}{J}\right)^n$ tq $\forall f \in I,\ f(h_1,\dots,h_n) = 0\}$. *Esta biyección está dada por* $\varphi \to (\varphi([x_1]),\dots,\varphi([x_n]))$. *El conjunto* A *será notado* $A = Z\left(I, \left(\frac{C^\infty(\mathbb{R}^m)}{J}\right)^n\right)$ ■

0.11. Definición: *Llamaremos* $\mathbb{G}'$ *a la categoría cuyos objetos son los anillos* C^∞ *de la forma* $\frac{C^\infty(\mathbb{R}^m)}{I}$ *donde* I *es un ideal de caracter local y cuyas flechas son los morfismos de anillo* C^∞. *Llamaremos* $\mathbb{G}$ *a la categoría dual de* $\mathbb{G}'$. *Convendremos también en notar con* $\overline{\frac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}}$ *al objeto de* $\mathbb{G}$ *definido por* $\frac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$.

Así, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}\left(\dfrac{\overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)}}{I}, \dfrac{\overline{C^\infty(\mathbb{R}^m)}}{J}\right) = \mathrm{Hom}_\infty\left(\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^m)}{J}, \dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}\right).$

En [2], [3] E. Dubuc formalizó las ideas de F. Lawvere (ver 0.2) respecto de un tratamiento axiomático de la Geometría Diferencial, introduciendo la noción de Módulo Plenamente Bien Adaptado. Además demostró el importante teorema que dice que la categoría $\mathbb{G}$ es un modelo plenamente bien adaptado.

Como en ningún momento utilizaremos explicitamente la noción de modelo plenamente bien adaptado, ni el teorema de Dubuc que venimos de mencionar en toda su generalidad, no entraremos en algunos detalles trabajosos. Sin embargo describiremos otros aspectos de estas cuestiones explicando en que sentido se verifican los "axiomas de Lawvere" descriptos en 0.2.. Ver 0.12.

Sea m la categoría de las variedades diferenciables paracompactas y funciones C^∞.

0.12. Proposición (Dubuc): *Existe un "funtor de inclusión"* $j : m \to \mathbb{G}$ *que es plenamente fiel, y tal que* $j(\mathbb{R}) = R = \overline{C^\infty(\mathbb{R})}$. *Si* $M \in m$ *es una variedad globalmente definida por las ecuaciones independientes* $f_1 = 0, \ldots, f_r = 0$, $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $j(M) = \dfrac{\overline{C^\infty(\mathbb{R})}}{(f_1, \ldots, f_r)}$. *Nótese que*

$$\frac{C^{\infty}(\mathbb{R})}{(f_1,\ldots,f_r)} \cong C^{\infty}(M).$$

Para la definición de funtor j en variedades no definidas globalmente por un conjunto de ecuaciones independientes se usa el hecho de que toda variedad diferenciable paracompacta es un retracto de un abierto de $\mathbb{R}^n$ (para algún n) y el lema siguiente. En realidad se tiene "$j(M) = \overline{C^{\infty}(M)}$"

0.13. Lema (Dubuc). *Sea* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y sea* $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *una función tal que* $Z(f) = \mathbb{R}^n \setminus U$. *Entonces, el anillo* $C^{\infty}(U)$ *es isomorfo (como el anillo* C^{∞}*) a* $\dfrac{C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})}{(f.x_{n+1}-1)}$. *El isomorfismo canónico entre ellos es* $\phi : \dfrac{C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})}{(f.x_{n+1}-1)} \to C^{\infty}(U)$ *dado por* $\phi([h]) =$ $= h(x_1,\ldots,x_n, \dfrac{1}{f(x_1,\ldots,x_n)})$. *Así que a fortiori*, "$j(U) \cong$ $\cong \overline{C^{\infty}(U)}$", *(donde* $j : m \to \mathbb{G}$ *es el funtor de inclusión).*

Observación: Venimos de escribir dos igualdades que en rigor no son propias. Nos referimos a $j(M) = \overline{C^{\infty}(M)}$ y $j(U) =$ $= \overline{C^{\infty}(U)}$. El problema es que $C^{\infty}(M)$ y $C^{\infty}(U)$ no son elementos de $\mathbb{G}'$, en la manera que venimos de describir. Sin embargo, $C^{\infty}(M)$ y $C^{\infty}(U)$ son isomorfos a objetos de $\mathbb{G}'$. En el caso de $C^{\infty}(U)$ el isomorfismo es canónico (ver 0.13) y en el caso de $C^\infty(M)$ el isomorfismo depende de la representación de M como retracto de algún abierto de algún $\mathbb{R}^n$. Así, no hay mal en pensar que $C^\infty(U)$ y $C^\infty(M)$ están en $\mathbb{G}'$.

0.14. <u>Recordemos</u> que cualquiera sea la categoría C, la exponencial de dos objetos $X,Y \in ob(C)$ es un objeto $X^Y \in ob(C)$ tal que existe para cada Z una biyección $\varphi_Z : \mathrm{Hom}_C(Z,X^Y) \to$ $\to \mathrm{Hom}_C(Z\ Y,X)$ que es natural en Z, es decir, cualesquiera sean $Z,W \in ob(C)$ y $f : W \to Z$, el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(Z,X^Y) \arrow[rr, "f^*"] \arrow[d, "\varphi_Z"'] & & \mathrm{Hom}_C(W,X^Y) \arrow[d, "\varphi_W"] \\
H_C(Z\times Y,X) \arrow[rr, "(f\times id_Y)^*"'] & & \mathrm{Hom}_C(W\times Y,X)
\end{tikzcd}$$

donde $f^*(h) = h_\circ f$.

Sea D el objeto $D = \dfrac{\overline{C^\infty(\mathbb{R})}}{(x^2)}$.

0.15. <u>Proposición</u>. *El objeto* $R \in \mathbb{G}$ *es un objeto anillo* C^∞ *del tipo línea , vale decir:*

a) *Las funciones diferenciables pueden "evaluarse" en* R

b) *El objeto* $R\times R$ *es una exponencial de* R *y* D .

Si seguimos la corriente práctica de llamar iguales a dos *objetos isomorfos podemos poner* $R^D = R \times R$.

Demostración: La demostración del punto b) es análoga a la demostración hecha al principio de este capítulo del hecho de que una flecha $D \to \bar{A}$ es lo mismo que un vector tangente a la variedad definida por A (si A esta presentado por ecuaciones independientes). Con respecto al punto a), que las funciones C^∞ "puedan calcularse en R" significa que toda función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ induce una flecha $f : R^n \to R$ (donde $R^n = R \times R \times \ldots \times R$, con n factores). Para ver que esto es cierto, observemos que $R^n = \overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Así que, una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ induce un morfismo de anillos C^∞, que también llamaremos $f : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, es decir, una flecha $f : R^n \to R$ ∎

Nos falta aún verificar uno de los "axiomas de Lawvere": el axioma que dice que "para definir una flecha debe bastar definirla coherentemente sobre un cubrimiento." Para hacer esto debemos precisar el concepto de familia epimorfa efectiva.

0.16. Definición: *Sea* C *una categoría e* $i_\alpha : X_\alpha \to X$ $(\alpha \in J)$ *una familia de flechas en* C.

Diremos que una familia de flechas en C $f_\alpha : X_\alpha \to F$ $(\alpha \in J)$ *es compatible con la familia* i_α *si para todo* $Y \in ob(C)$ *y todo par de flechas* h,k *que hace conmutativo el diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
 & X_\alpha \arrow[dr, "i_\alpha"] & \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "k"'] & & X \\
 & X_\beta \arrow[ur, "i_\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & X_\alpha \arrow[dr, "f_\alpha"] & \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "k"'] & & F \\
 & X_\beta \arrow[ur, "f_\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

Equivalentemente, la familia $\{f_\alpha\}$ *es compatible con* $\{i_\alpha\}$ *si para todo par* $(\alpha,\beta) \in J \times J$ *se tiene que el siguiente es un diagrama conmutativo*

$$
\begin{tikzcd}
X_\alpha \times X_\beta \arrow[r, "\pi_\alpha"] \arrow[d, "\pi_\beta"'] & X_\alpha \arrow[d, "i_\alpha"] \arrow[ddr, "f_\alpha"] & \\
X \arrow[r, "i_\beta"'] \arrow[drr, bend right, "f_\beta"'] & X & \\
 & & F
\end{tikzcd}
$$

(donde $X_\alpha \times X_\beta$ *es el producto fibrado de* i_α *a* i_β*)*

Nótese que si C = Sets ó $C = m$, X_α son subconjuntos (o subvariedades) de X e i_α son las inclusiones, entonces una familia $f_\alpha : X_\alpha \to F$ de funciones en un conjunto (o variedad) F es compatible con i_α sii para todo α, β es $f_\alpha|_{X_\alpha \cap X_\beta} = f_\beta|_{X_\alpha \cap X_\beta}$.

0.17. Definición: a) *Sea* C *una categoría y sea* $i_\alpha : X_\alpha \to X$ *una familia de flechas en* C . *Entonces la familia* $\{i_\alpha\}$ *es* *epimorfa efectiva* *si para cada familia compatible* $f_\alpha : X_\alpha \to F$ *existe una única flecha* $f : X \to F$ *haciendo el siguiente diagrama conmutativo para todo* α

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[rr, "i_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & X \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

b) *La familia* i *es* *epimorfa efectiva universal* *si para cualquier* $Y \in ob(C)$ *y cualquier flecha* $h : Y \to X$ *la familia* $h^*(i_\alpha)$ *definida por el siguiente producto fibrado es una familia epimorfa efectiva.*

$$\begin{tikzcd} Y \times_X X_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "h^*(i_\alpha)"'] & X_\alpha \arrow[d, "i_\alpha"] \\ Y \arrow[r, "h"'] & X \end{tikzcd}$$

Asi, la forma en que se verifica el axioma de Lawvere que dice que para definir una función sobre una variedad basta definirla en forma compatible sobre un cubrimiento, es la siguiente

0.18. <u>Teorema (Dubuc)</u>. *Si* M *es una variedad diferenciable paracompacta e* $i_\alpha\ U_\alpha \to M$ *es un cubrimiento por abiertos entonces* $j(i_\alpha) : j(U_\alpha) \to j(M)$ *es una familia efectiva epimorfa universal. Además,* $j(i_\alpha)$ *son monomorfismos.*

0.19. <u>Observación</u>: Es para la demostración de este teorema que se necesita que los ideales de presentación de los objetos de $\mathbb{G}$ sean de caracter local.

0.20. <u>Observación</u>. Se deduce del teorema 0.18 que si I es un ideal de $C^\infty(R^n)$, U_α es un cubrimiento por abiertos de $Z(I)$ y $i_\alpha : \overline{\dfrac{C^\infty(U_\alpha)}{\widehat{I|U_\alpha}}} \to \overline{\dfrac{C^\infty(R^n)}{I}}$ son las inclusiones (es decir las flechas inducidas por los morfismos de restricción), entonces i_α es una familia epimorfa efectiva universal. Esto se sigue del hecho que el siguiente cuadrado es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
\overline{\dfrac{C^\infty(U_\alpha)}{\widehat{I|U_\alpha}}} \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[d, tail, "\pi'"'] & \overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}} \arrow[d, tail, "\pi"] \\
\overline{C^\infty(U_\alpha)} \arrow[r, "i'_\alpha"'] & \overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)}
\end{tikzcd}$$

donde i_α e i'_α están inducidos por los morfismos de restricción y π y π' están inducidos por las proyecciones al cociente. Para usar el teorema 0.18, recuérdese que $j(\mathbb{R}^n) = \overline{C\ (\mathbb{R}^n)}$ y $j(U_\alpha) = \overline{C\ (U_\alpha)}$ (ver 0.12, 0.13).

Una idea que Lawvere tenía en mente al formular sus axiomas (ver 0.2) es que los "espacios de funciones deberían ser variedades". Por ejemplo R^R debería estar en el modelo. Pero R^R no existe en $\mathbb{G}$. Así que, siguiendo ideas de Grothendieck, Dubuc [3] construye una categoría G que"contiene" a $\mathbb{G}$, que es un modelo bien adaptado y que tiene exponenciales de cualquier par de objetos. Pasamos entonces, a la descripción de esta categoría G

El topos de Dubuc: Hay una manera muy sencilla de ver una categoría de C como una subcategoría plena de una categoría con exponenciales. En efecto, considérese la categoría $\mathrm{Sets}^{C^{op}}$ cuyos objetos son los funtores contravariantes de C en Sets y cuyas flechas son las transformaciones naturales de funtores.

(Recordemos que si $F,G \in \mathrm{Sets}^{C^{op}}$, una transformación natural $\eta : F \to G$ es una función $\eta_Y : F(Y) \to F(Y)$ para cada Y ob(C) tal que si $f : Y \to Z$ es una flecha en C, el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F(Z) & \xrightarrow{\eta_Z} & G(Z) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow[\eta_Y]{} & G(Y) \end{array}$$

Como todo objeto X de C define un funtor contravariante $[-,X] = \mathrm{Hom}_C(-,X)$ se sigue que hay un funtor $\epsilon : C \to \mathrm{Sets}^{C^{op}}$. El funtor ϵ es plenamente fiel. Esto se sigue del conocido lema siguiente

0.21. <u>Lema.</u> (Yoneda, ver [9]) *Sean* $F \in \mathrm{Sets}^{C^{op}}$ *y* $X \in C$. *Una transformación natural* $\eta : [-,X] \to F$ *queda completamente determinada por* $\eta_X(\mathrm{id}_X)$. *Mas precisamente, dado* $\xi \in F(X)$ *existe una única transformación natural* η *tal que* $\eta_X(\mathrm{id}_X) = \xi$. *Es decir, existe una biyección* $\phi_{X,F}$

$$\phi_{X,F} : F(X) \to \mathrm{Nat}([-,X],F).$$

Además, esta biyección es natural en X *y* F *, es decir, si* $\eta : [-,X] \to F$ *está inducida por* $\xi \in F(X)$ *y* $h : X \to Y$ *y* $\nu : F \to G$ *entonces la composición*

$$[-,Y] \xrightarrow{[h,X]} [-,X] \xrightarrow{\eta} F \xrightarrow{\nu} G$$

está inducida por $\nu_Y(F(h)(\xi))$ ∎

Así, si $F = [-,Y]$, una transformación natural $[-,X]$

$\to [-,Y]$ "es lo mismo" que un elemento $h \in [X,Y]$, es decir ϵ es plenamente fiel.

0.22. Proposición. *La categoría* $\mathrm{Sets}^{C^{op}}$ *tiene todos los límites, colímites y exponenciales (ver 0.14). Además, el funtor* ϵ *preserva todos los límites y exponenciales que existan en* C *(no así los colímites)* ∎

Como decíamos, la categoría $\mathbb{G}$ no tiene exponenciales en general. Esto no es deseable ya que los "espacios de funciones" deberían estar en el modelo. Tentativamente entonces proponemos la "inclusión" $\epsilon : \mathbb{G} \to \mathrm{Sets}^{\mathbb{G}^{op}}$ Como la inclusión $j : m \to \mathbb{G}$ es plenamente fiel y ϵ también lo es se sigue que $\epsilon \circ j$ es plenamente fiel. Como preserva exponenciales se tiene el axioma $[-R]^{[-,D]} = [-,R\times R]$. Pero, lamentablemente, el axioma de cubrimientos no se verifica. Es decir puede tenerse un cubrimiento por abiertos $U_\alpha \xhookrightarrow{i_\alpha} M$ de una variedad M sin que la familia $[-,C^\infty(U_\alpha)] \xrightarrow{\epsilon(j(i_\alpha))} [-,C^\infty(M)]$ sea epimorfa efectiva (ver 0.17). Dicho de otro modo existen funtores contravariantes $F \in \mathrm{Sets}^{C^{op}}$ y familias compatibles $f_\alpha : [-,C^\infty(U_\alpha)] \to F$ tales que o bien no existe o bien no existe con unicidad una flecha $f : [-C^\infty(M)] \to F$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[-,C^\infty(U_\alpha)]} \arrow[rr, "\epsilon(j(i_\alpha))"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & {[-,C^\infty(M)]} \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

Por ejemplo tomemos el funtor $F : \mathbb{G} \to \mathrm{Sets}$ $F\left(\frac{\overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)}}{I}\right) =$ $=$ {conjunto de funciones constantes de $Z(I)$ en $\mathbb{R}$}. Si $Z(I)$ no es conexo se sigue del lema de Yoneda que F es un tal funtor. En efecto, una familia compatible dada por funciones constantes en cada una de las componentes conexas, pero con constantes distintas en cada componente da un diagrama del tipo de * que no puede completarse.

0.23. Definición: *Sea* $F \in \mathcal{E}ns^{\mathbb{G}^{op}}$. *Diremos que* F *es un haz si cualquiera sea el objeto* $\overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)}/_I \in \mathbb{G}$, *cualquiera sea el cubrimiento por abiertos* U_α *del conjunto* $Z(I) \subsetneq \mathbb{R}^n$ *y cualquiera sea la familia* $f_\alpha : \left[-, \frac{\overline{C^\infty(U_\alpha)}}{\widehat{I|_{U_\alpha}}}\right] \to F$ *compatible con el cubrimiento* $\left[-, \frac{\overline{C^\infty(U_\alpha)}}{\widehat{I|_{U_\alpha}}}\right] \xrightarrow{i_\alpha} \left[-, \frac{\overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)}}{I}\right]$ *existe una única transformación natural* $f : \left[-, \frac{\overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)}}{I}\right] \to F$ *haciendo conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\left[-, \frac{\overline{C^\infty(U_\alpha)}}{\widehat{I|_{U_\alpha}}}\right] \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & \left[-, \frac{\overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)}}{I}\right] \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

(donde $i_\alpha : \left[-, \overline{\dfrac{C^\infty(U_\alpha)}{\widehat{I|_{U_\alpha}}}}\right] \to \left[-, \overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}}\right]$ es la transformación natural inducida por morfismo de restricción $\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I} \to \dfrac{C^\infty(U_\alpha)}{\widehat{I|_{U_\alpha}}}$ gracias al lema de Yoneda 0.21.

0.24. <u>Ejemplo</u>: *Todos los funtores representables* $\left[-, \overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}}\right] \in \mathrm{Sets}^{\mathbb{G}^{op}}$ *son haces.*

0.25. <u>Definición</u>: <u>*El topos de Dubuc*</u> $\mathcal{G}$ *es la categoría cuyos objetos son todos los funtores de* $\mathrm{Sets}^{\mathbb{G}^{op}}$ *que son haces y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre funtores.*

<u>Nota</u>: Esta construcción (el pasaje de $\mathbb{G}$ a $\mathcal{G}$) es solo un caso particular de la construcción general de un topos sobre un sitio (ver [6]).
Dado que los funtores representables son haces (ver 0.24) la "inclusión" $\epsilon_\circ j : \mathcal{m} \to \mathrm{Sets}^{\mathbb{G}^{op}}$ se factoriza por $\mathcal{G}$. Así tenemos que

0.26. <u>Teorema (Dubuc, ver[3])</u>: *El topos* $\mathcal{G}$ *junto con la inclusión* $\epsilon_\circ j : \mathcal{m} \to \mathcal{G}$ *es un modelo plenamente bien adaptado al estudio de la Geometria Diferencial*

0.27. <u>El abuso de notación introducido por Grothendieck</u>:

i) Sea X un objeto de $\mathbb{G}$. El objeto X define un objeto $[-,X]$ de G. Por el lema de Yoneda 0.21. sabemos que una flecha $[-,X] \to [-,Y]$ viene necesariamente inducida por una flecha $X \to Y$. Así que no hay mal en pensar que directamente $\mathbb{G} \subseteq G$.

ii) Por otro lado, una transformación natural $\eta : F \to G$ entre funtores es por definición una función $\eta_X : F(X) \to G(X)$ para cada $X \in \mathbb{G}$ de modo que cierto cuadrado conmute (naturalidad). Esta función η_X asocia a cada elemento de $F(X)$ un elemento de $G(X)$ (obvio). O, por el lema de Yoneda 0.21 junto con el abuso de notación $X = [-,X]$, η_X asocia a cada flecha $\xi : X \to F$ una flecha $\eta_X(\xi) : X \to G$. Precisamente $\eta_X(\xi)$ es el elemento de $G(X)$ que define por el lema de Yoneda al morfismo compuesto $X \xrightarrow{\xi} F \xrightarrow{\eta} G$

La naturalidad de la transformación η se traduce en lo siguiente: si $h : Y \to X$ es una flecha en $\mathbb{G}$ entonces da igual aplicarle la transformación natural a $\xi \circ h$ que aplicarle la transformación a ξ (obteniendo $\eta_X(\xi) \in G(X)$) y después aplicarle $G(h)$ a $\eta_X(\xi)$ (obteniendo $G(h)(\eta_X(\xi)) \in G(Y)$).

Así que, con esta notación, definir una transformación natural $\eta : F \to G$ es darse para cada $X \in \mathbb{G}$ y cada flecha

$\xi : X \to F$ una flecha $\eta_X(\xi) : X \to G$

$$\begin{tikzcd} & F & \\ X \arrow[ur, "\xi"] \arrow[rr, bend right, "\eta_X(\xi)"'] & & G \end{tikzcd}$$

de tal manera que si $h : Y \to X$ es una flecha en $\mathbb{G}$, "mandar y componer da igual que componer y mandar":

$$\begin{tikzcd} & F & G \\ X \arrow[ur, "\xi"] \arrow[urr, bend right, "\eta_X(\xi)"'] & & \end{tikzcd} \quad \text{y después} \quad \begin{tikzcd} & & G \\ & X \arrow[ur, "\eta_X(\xi)"] & \\ Y \arrow[ur, "h"'] \arrow[uurr, bend left, "a"] & & \end{tikzcd}$$

es lo mismo que

$$\begin{tikzcd} & & F & \\ & X \arrow[ur, "\xi"] & & G \\ Y \arrow[ur, "h"] \arrow[urrr, bend right, "b = \eta_Y(\xi \circ h)"'] & & & \end{tikzcd}$$

(es decir, $a = b$)

0.28. <u>Observación</u>. El modelo G no es el único posible. De hecho, se puede reemplazar la categoría $\mathbb{G}'$ (ver 0.11) por

a) la categoría $\mathbb{F}'$ de anillos $\dfrac{C^{\infty}(\mathbb{R}^n)}{I}$ donde I es un ideal cerrado en la topología C^{∞}-CO (ver 1.10) y morfismos de anillo C^{∞}. Llamando $\mathbb{F}$ a la categoría dual de $\mathbb{F}'$ se construye después el topos de haces $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{F}$ de la misma manera que la explicada para el topos $\mathcal{G}$. El modelo $\mathcal{F}$ es, como $\mathcal{G}$, un modelo plenamente bien adaptado.

b) La categoría $\mathbb{L}'$ de anillos $\frac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$ donde I es cualquier ideal y morfismos de anillo C^∞. Llamemos $\mathbb{L}$ a la categoría dual de $\mathbb{L}'$. Si seguimos con $\mathbb{L}$ los pasos que seguimos con $\mathbb{G}$ (y con $\mathbb{F}$) tenemos un problema: los funtores representables no son haces y, por lo tanto $\mathbb{L}$ "no está bien contenido en el topos". Reyes y Moerdijk ([15]) construyen un topos de todos los haces respecto de los cubrimientos <u>finitos</u>. Es decir, un funtor contravariante $F \in \mathrm{Sets}^{\mathbb{L}^{op}}$ es un haz si para todo cubrimiento finito

$$\frac{\overline{C^\infty(U_\ell)}}{I|_{U_\ell}} \overset{i_\ell}{\rightarrowtail} \frac{\overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)}}{I} \qquad \ell = 1,\dots,n$$

(donde $\bigcup_{\ell=1}^{n} U_\ell \supseteq Z(I)$ y U_ℓ son abiertos de $\mathbb{R}^n$) y para toda familia compatible $f_\ell : \frac{\overline{C^\infty(U_\ell)}}{I|_{U_\ell}} \to F$ existe un único morfismo f haciendo el siguiente diagrama conmutativo para todo ℓ, $1 \leq \ell \leq n$

$$\begin{tikzcd}
\frac{\overline{C^\infty(U_\ell)}}{I|_{U_\ell}} \arrow[rr, "i_\ell"] \arrow[dr, "f_\ell"'] & & \frac{\overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)}}{I} \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

Para esta nueva "topología", los funtores representables son haces . Así, llamando $\mathcal{Z}$ al topos de haces sobre $\mathbb{L}$ para la topología que acabamos de introducir, y con el abuso de notación de Grothendieck, tenemos

$$m \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathcal{Z}$$

La "inclusión" $m \subseteq \mathcal{Z}$ no es un modelo bien <u>adaptado</u> en el sentido mas general: para definir una flecha $\frac{C^{\infty}(\mathbb{R}^n)}{I} \to F$ basta definirla sobre un <u>cubrimiento finito</u>. Pero si se da un cubrimiento infinito y una familia compatible con este cubrimiento infinito, no puede asegurarse que exista una única flecha que "pega" la familia

La exponencial R^R en los topos G

Una buena parte de nuestro trabajo estará relacionada con la exponencial R^R en el topos G. Siendo este el caso, le dedicaremos aquí algunas palabras.

Los topos de Grothendieck (por ejemplo G, F, Z) tienen exponenciales de todo par de objetos. Lo que sigue es la demostración de este hecho en el caso particular de R^{R^n}. Primero observemos que

0.29. <u>Observación</u>. *La categoría* $\mathbb{G}$ *tiene productos finitos.*

El producto $\overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}} \times \overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^m)}{J}}$ *está dado por* $\overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})}{I(\bar{t},\bar{x})\hat{+}J(\bar{x},\bar{t})}}$ (debemos explicar esta notación. Como $I \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se sigue que $I \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$, dado que una función C^∞ de la variable $\bar{t} \in \mathbb{R}^n$ es una función C^∞ de la variable $(\bar{t},\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ que no depende de $\bar{x}$. Por supuesto I no es un ideal de $C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$, pero genera un ideal, que es el que llamamos $I(\bar{t},\bar{x})$. Analogas consideraciones valen para $J(\bar{x},\bar{t})$. Con respecto a $\hat{+}$, $I(\bar{t},\bar{x})\hat{+}J(\bar{x},\bar{t})$ es la clausura de naturaleza local (ver 0.5) del ideal suma $I(\bar{t},\bar{x}) + J(\bar{x},\bar{t})$.

0.30. Proposición: *El funtor* $R^{R^n} : G \to \text{Sets}$ *dado por* $R^{R^n}\left(\overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^p)}{I}}\right) = \dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^{p+n})}{I(\bar{x},\bar{t})}$ *en los objetos, y por la composición en las flechas es la exponencial de* R *a la* R^n.

Como demostración: Una flecha $\overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^p)}{I}} \to R^{R^n}$ es, por el lema de Yoneda 0.21., lo mismo que un elemento $R^{R^n}\left(\overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^p)}{I}}\right)$, es decir, un elemento de $\overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^{p+n})}{I(\bar{x},\bar{t})}}$ o, lo que es "lo mismo" un morfismo de anillos C^∞ $C^\infty(\mathbb{R}) \to \dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^{p+n})}{I(\bar{x},\bar{t})}$, o equivalentemente, una flecha $\overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^p)}{I}} \times R^n = \overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^{p+n})}{\widehat{I(\bar{x},\bar{t})}}} : \to R$. Por supuesto, falta verificar que R^{R^n} es un haz, cosa que no haremos ■

Capítulo I

Integración de campos vectoriales en R^R

Desde el punto de vista de la Geometría Diferencial sintética, un campo vectorial sobre una "variedad" M es una flecha $v : M\times D \to M$ tal que $v(x,0) = x$ (donde D es el subobjeto de R de elementos de cuadrado nulo que fue definido en el capítulo 0). Integrar un tal campo vectorial significa encontrar una flecha $u = M\times R \to M$ que verifique $u(x,0) = x$ y que haga conmutativo el siguiente diagrama:

$$(0) \qquad \begin{tikzcd} & M\times R \arrow[dr, "u"] & \\ M\times R\times D \arrow[ur, "(id_M\times +)"] \arrow[dr, "(u\times id_D)"'] & & M \\ & M\times D \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

En otras palabras, una flecha tal que

$$(1) \qquad \begin{cases} u(x,t+d) = v(u(x,t),d) \\ u(x,0) = x \end{cases}$$

Nosotros estudiaremos aquí este problema en el caso en que la "variedad" es $M = R^R$.

Las cuestiones de existencia y unicidad en el caso $M = R$ se reducen facilmente a las correspondientes cuestiones de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias. De hecho, una flecha

$$R \times D \xrightarrow{v} R$$

corresponde (prácticamente por definición) a una $v \in C^{\infty}(R^2)_{/(y^2)}$, o sea, $v_1, v_2 \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tales que $v = v_1(x) + v_2(x) \cdot [y]$ ([f] significa "clase de equivalencia de f).

Como $v(x,0) = x$, se sigue que $v_1(x) = x$, asi,

$$v = [x] + v_2(x) \cdot [y]$$

Por otro lado, u corresponde a una cierta $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. La validez de 1. es equivalente a

$$(2) \quad \begin{cases} u'(x,t) = v_2(u(x,t)) \\ \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

donde u' significa derivación con respecto al tiempo t.

En esta situación, sabemos que existe una solución localmente: el teorema de Cauchy de existencia y suavidad con respecto a ambas variables implica que existe un entorno U de $\mathbb{R} \times \{0\}$ en $\mathbb{R}^2$ y una u definida en U que verifica 2. Se sigue (ver [4], [13]) que existe un abierto de Penon $U, R \times \{0\} \subsetneq U \subseteq R \times R$ en $\mathcal{G}$ y $u : U \to R$ que verifica (0) con $M = U$.

Para estudiar el caso $M = R^R$, nosotros obtenemos una correspondencia similar a la ya descripta para flechas $R\times D \to R$, etc., pero esta vez para flechas del tipo

$$R^R\times D \to R^R, \quad R^R\times R \to R^R, \quad R^R\times R\times D \to R^R.$$

Dado que R (y por lo tanto R^R) es de tipo linea, i.e. $R^D = R\times R$ (ver 0.15,[2],[3]) basta con estudiar flechas del tipo

$$R^R \to R^{R^p} \qquad (p\in \mathbb{N}).$$

Tomemos una flecha $u : R^R \to R^{R^p}$, y sea Γ el funtor "secciones globales": $\Gamma(F) = \mathrm{Hom}(1,F)$. Dado que $\Gamma(R^R) = C^\infty(\mathbb{R})$, $\Gamma(R^{R^p}) = C^\infty(\mathbb{R}^p)$, Γ induce una función, (que en general no es un morfismo)

$$\Gamma(u) : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^p)$$

tal que, para $h\in C^\infty(\mathbb{R})$, $h : 1\to R^R$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & R^R \arrow[r, "u"] & R^{R^p} \\ 1 \arrow[ur, "h"] \arrow[urr, bend right, "\Gamma(u)(h)"'] & & \end{tikzcd}$$

Ahora, tomemos una función

$$G : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^p)$$

Queremos ver que, si G es "convenientemente suave", entonces, "viene del topos", i.e., $G = \Gamma(u)$ para cierta u, que, demostraremos, es necesariamente única.

1.3. <u>Definición</u>: i) *Diremos que una función* $c : \mathbb{R}^k \to C^\infty(\mathbb{R}^p)$ *es* C^∞ *sii la función* $c(t_1,\ldots,t_k)(x_1,\ldots,x_p)$ *es una función* C^∞ *de sus* $k+p$ *variables reales.*

ii) *Diremos que una función* $G : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^p)$ *es* C^∞ *si, para cada* $k \in \mathbb{N}$ *y para cada función* C^∞ *(en el sentido de* i) $c : \mathbb{R}^k \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $G \circ c$ es C^∞ (en el sentido de i)∎

Frölicher ya ha trabajado sobre funciones C^∞ en el sentido de la definición 3. (El las llama path-smooth, ver [5]).

Algunos ejemplos de funciones C^∞ son los siguientes:

(1) Operadores diferenciales lineales con coeficientes de clase C^∞.

(2) Operadores integrales con nucleo C^∞ y de soporte compacto.

(3) Morfismos de anillo C^∞ inducidos por funciones C^∞ $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ por composición.

(4) Funciones de la forma $h_* : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ inducidas por funciones $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Además, composición de funciones C^∞ da funciones C^∞ así que, cualquier operador construido por composición usando (1), (2), (3) y (4) también es C^∞.

Adoptemos la siguiente notación

1.4. <u>Notación</u>: i) *Se entenderá que* $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *es el anillo de todas las funciones* C^∞ *de la variable* $\bar{t} = (t_1,\ldots,t_n)$, *y que* $C^\infty(\mathbb{R}^{n+p})$ *es el anillo de todas las funciones* C^∞ *de las variables* $(\bar{t},\bar{x}) = (t_1,\ldots,t_n,x_1,\ldots,x_p)$.

ii) *Sea* $I \subsetneq C^\infty(\mathbb{R})$ *un ideal de caracter local (ver Cap. 0). Denotaremos* $I(\bar{t}) = I$ *y* $\hat{I}(\bar{t},\bar{x})$ *= clausura de naturaleza local del ideal generado por* I *en* $C^\infty(\mathbb{R}^{n+p})$.

(Nótese que $I \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^{n+p})$ dado que una función de n variables es una función de $n+p$ variables que no depende en las últimas p) ■

Si $u(\bar{t},s) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ y $G : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^p)$, para cada $t \in \mathbb{R}^n$ fijo podemos calcular G en u considerada como función de s:

$$G(u(\bar{t},-)) \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$$

Como G es C^∞, en realidad tenemos

$$G(u(\bar{t},-))(\bar{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+p})$$

como función de $(\bar{t},\bar{x})$. Este tipo de abuso de notación ocurrirá frecuentemente así que avisamos al lector para evitar malos entendidos. Por supuesto $C^\infty(C^\infty(\mathbb{R}), C^\infty(\mathbb{R}^p))$ es el conjunto de todas las funciones C^∞ $C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^p)$.

1.5. Teorema: Γ *induce una biyección*

$$\Gamma : \mathrm{Hom}(R^R, R^{R^p}) \to C^\infty(C^\infty(\mathbb{R}), C^\infty(\mathbb{R}^p))$$

Demostración: Probemos primero que si $u \in \mathrm{Hom}(R^R, R^{R^p})$ entonces $\Gamma(u)$ es C^∞, i.e., si $c : \mathbb{R}^n \to C^\infty(\mathbb{R})$ es C^∞ entonces $\Gamma(u)(c(\bar{t}))(\bar{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+p})$. Como $c(\bar{t})(s) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, c define una flecha $\hat{c} : R^n \to R^R$. Tenemos $\Gamma(u) \circ \Gamma(\hat{c}) = \Gamma(u \circ \hat{c})$: $\mathbb{R}^n \to C^\infty(\mathbb{R}^p)$. En este momento, necesitamos el siguiente lema:

1.6. Lema: *Si* $w : R^n \to R^{R^p}$, *entonces* $\Gamma(w)$ *es igual a la adjunta exponencial de* w, *digamos* $\tilde{w} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+p})$.

Demostración: Directa, por naturalidad de la adjunción exponencial.■

Volviendo a la demostración de 1.5. $\Gamma(u \circ \hat{c})$ es igual a la adjunta exponencial de $(u \circ \hat{c})$ y por lo tanto, está en $C^\infty(\mathbb{R}^{p+n})$. Pero también por lema 1.6., $\Gamma(\hat{c}) = c$; entonces

$$\Gamma(u) \circ c = \Gamma(u) \circ \Gamma(\hat{c}) = \Gamma(u \circ \hat{c}) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+p})$$

Ahora definimos una aplicación E, que será la inversa de Γ. Sea $G \in C^\infty(C^\infty(\mathbb{R}), C^\infty(\mathbb{R}^p))$ e $Y = \overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)}_{/I} \in \mathbb{G} \subseteq \mathcal{G}$. Definimos

$$E(G)_Y : \mathrm{Hom}(Y,R^R) \to \mathrm{Hom}(Y,R^P).$$

Como $\mathrm{Hom}(Y,R^R) = C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})_{/\hat{I}(t,x)}$ y $\mathrm{Hom}(Y,R^{R^P}) =$

$= C^\infty(\mathbb{R}^{n+p})_{/\hat{I}(\bar{t},\bar{x})}$, tenemos que definir una función $E(G)Y : C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{n+p})_{/\hat{I}(\bar{t},\bar{x})}$. Lo hacemos según la fórmula $E(G)_Y\ ([c]) = [G(c(\bar{t},-)(\bar{x})]$ donde los corchetes significan clase de equivalencia modulo $\hat{I}(\bar{t},s)$ y $\hat{I}(\bar{t},\bar{x})$ respectivamente. Obviamente, debemos demostrar que:

i) La definición es independiente de la elección de c,

ii) $E(G)$ es una flecha en el topos (o sea, es una transformación natural)

iii) E es la inversa de Γ.

Una vez que hallamos probado i), ii) se reducirá a una verificación directa. Con respecto a iii), obviamente $\Gamma \circ E$ es igual a la identidad, y el hecho de que $E \circ \Gamma$ es igual a la identidad es esencialmente el lema 1.6.

Ahora bien, i) es una propiedad de las funciones C^∞ (naturalidad) que probaremos en el teorema 1.8.■ Antes, y para fijar la notación, recordamos el siguiente hecho

1.7. <u>Lema</u>. *Para todo* $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+p})$ *y para todo entero* $m > 0$ *existen funciones* C^∞

$$f_k \textit{ de } n \textit{ variables } \{ k = (k_1,\dots,k_p) \mid \Sigma k_i < m\}$$

ℓ_k *de* n+p *variables* $\{k = (k_1,\ldots,k_p) \mid \Sigma\, k_i = m+1\}$ *tales que la igualdad*

$$h(\bar{t},\bar{x}) = \sum_k f_k(\bar{t})\bar{x}^k + \sum_k \ell_k(\bar{t},\bar{x})\bar{x}^k$$

vale para todo $(\bar{t},\bar{x}) = (t_1,\ldots,t_n,x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^{n+p}$ *, donde* $\bar{x}^k = x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_p^{k_p}$. *Además,* $f_k(\bar{t}) =$
$= \frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|}h}{\partial\bar{x}^k}\Big|_{(\bar{t},0)}$ *, donde* $|k| = \Sigma\, k_i$ *y* $\frac{\partial^{|k|}}{\partial\bar{x}^k} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_p^{k_p}}$ ∎

1.8. Teorema: (Naturalidad de las funciones C^∞): *Sea* $I \subsetneq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *cualquier ideal y* $G \in C^\infty(C^\infty(\mathbb{R}), C^\infty(\mathbb{R}^p))$. *Entonces, para* $c,c' \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ *tenemos* $c \equiv c'$ *modulo* $(\hat{I}(\bar{t},s))$ *implica* $G(c(\bar{t},-))(\bar{x}) \equiv G(c'(\bar{t},-))(\bar{x})$ *módulo* $(\hat{I}(\bar{t},\bar{x}))$ *donde* $\bar{t},\bar{x},s$ *son variables que varían sobre* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$ *y* $\mathbb{R}$ *respectivamente.*

Demostración: Recordando que $\hat{I}(\bar{t},\bar{x})$ es la clausura de naturaleza local de $I \subsetneq C^\infty(\mathbb{R}^{n+p})$, vemos que tenemos que demostrar que para cualquier $(\bar{t}_o,\bar{x}_o) \in \mathbb{R}^{n+p}$, existe un entorno abierto $U \ni (\bar{t}_o,\bar{x}_o)$ y una combinación lineal de elementos de I con coeficientes en $C^\infty(\mathbb{R}^{n+p})$ que sea igual a la diferencia $G(c'(\bar{t},-))(\bar{x}) - G(c(\bar{t},-))(\bar{x})$ para $(\bar{x},\bar{t}) \in U$. Por hipótesis sabemos que esto es cierto para $c'(\bar{t},s) - c(\bar{t},s)$, i.e., si $(\bar{t}_o,s_o) \in \mathbb{R}^{n+1}$ está dado, existe un entorno abierto W de $(\bar{t}_o,s_o)$, funciones $f_i \in I \subsetneq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $A_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ $(1 \leq i \leq r)$ tales que en W

$$c'(\bar{t},s) - c(\bar{t},s) = \sum_{i=1}^{r} A_i(t,s) f_i(\bar{t}) \qquad (1)$$

(1) tiene sentido en todo $\mathbb{R}^{n+1}$, pero vale la igualdad solo en W. Sea $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+r+1})$ la función definida por

$$g(\bar{t},\bar{\lambda},\bar{x}) = G(c(\bar{t},-) + \sum_{i=1}^{r} A_i(\bar{t},-).\lambda_i)(\bar{x})$$

Sabemos que $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+r+1})$ ya que G es C^{∞}. Del lema 1.7. con $m = 0$, obtenemos la igualdad

$$g(\bar{t},\bar{\lambda},\bar{x}) - g(\bar{t},0,\bar{x}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i H_i(\bar{t},\bar{\lambda},\bar{x})$$

para ciertas $H_i \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+r+p})$. Poniendo $\lambda_i = f_i(\bar{t})$, se sigue que

$$G(c(\bar{t},-) + \sum_{i=1}^{r} A_i(\bar{t},-) f_i(\bar{t}))(\bar{x}) - G(c(\bar{t},-))(\bar{x}) \in \hat{I}(\bar{t},\bar{x})$$

En este punto tenemos un problema, ya que
$c(\bar{t},s) + \sum_{i=1}^{r} A_i(\bar{t},s) f_i(\bar{t}) = c'(\bar{t},s)$ <u>sólo en</u> W, de tal modo que todavía no podemos concluir lo que queremos. Tendremos que resolver este problema. Tenemos

$$G(c'(\bar{t},-))(\bar{x}) - G(c(\bar{t},-))(\bar{x}) =$$

$$= [G(c'(\bar{t},-))(\bar{x}) - G(\sum_{i=1}^{r} A_i(\bar{t},-) f_i(\bar{t}) + c(\bar{t},-))(\bar{x})]$$

$$+ [G(\sum_{i=1}^{r} A_i(\bar{t},-)f_i(\bar{t}) + c(\bar{t},-))(\bar{x}) - G(c(\bar{t},-))(\bar{x})]$$

El segundo corchete es un elemento de $\hat{I}(\bar{t},\bar{x})$ como ya mostramos. Demostraremos dos cosas:

i) Dado un conjunto abierto relativamente compacto W, existen $f_i \in I$, $A_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tales que (1) vale en W

ii) Si (1) vale en un conjunto abierto y relativamente compacto suficientemente grande, entonces el primer corchete se anula en un entorno abierto de $(\bar{t}_o,\bar{x}_o)$. Claramente, esto terminará la demostración ■

Veremos que el punto i) y una versión mas general del punto ii) son ciertos. Haremos esto en los lemas 1.9. y 1.15. respectivamente. En la demostración de 1.15. necesitaremos o bien 1.14 ó 1.12. y 1.13. (daremos dos demostraciones de 1.15.)

1.9. <u>Lema</u>: *Sea* $I \subsetneq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *un ideal de caracter local,* $c \in \hat{I}(\bar{t},s) \subsetneq C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ *y* $W \subsetneq \mathbb{R}^{n+1}$ *un conjunto abierto relativamente compacto. Entonces existen funciones* $f_i \in I$ *y* $A_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ $1 \leq i \leq r$ *tales que la igualdad* $c(\bar{t},s) = \sum_{i=1}^{r} A_i(\bar{t},s)f_i(\bar{t})$ *vale en* W.

<u>Demostración</u>: Como $c \in \hat{I}(\bar{t},s)$, existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, $f_i^\alpha \in I$, $A_i^\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ $1 \leq i \leq r_\alpha$ tales que la igualdad $c(\bar{t},s) = \sum_{i=1}^{r_\alpha} A_i^\alpha(\bar{t},s)\, f_i^\alpha(\bar{t})$ vale un U_α. Po-

demos suponer que la familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es localmente finita y tiene una partición de la unidad subordinada a ella, digamos φ_α. Tenemos que la igualdad $\varphi_\alpha c = \sum_{i=1}^{r_\alpha} (A_i^\alpha \varphi_\alpha) f_i^\alpha$ es cierta en todo $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dado que $\bar{W}$ es compacto, el conjunto J_o de índices tales que $\mathrm{sop}(\varphi_\alpha) \cap W \neq \emptyset$ es finito. Entonces, en W tenemos

$$c = \sum_{\alpha \in J_o} \varphi_\alpha . c = \sum_{\alpha \in J_o} \sum_{i=1}^{r_\alpha} (A_i^\alpha \varphi_\alpha) f_i^\alpha \quad \blacksquare$$

Recordemos la siguiente definición.

1.10. <u>Definición</u>: *Decimos que una sucesión* $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *converge a* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *en la* <u>*topología*</u> <u>*C^∞-compacto*</u> <u>*abierta*</u> (C^∞-CO) *sii para cada* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \bar{t}^\alpha}(f_k)$ *converge uniformemente sobre compactos a* $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \bar{t}^\alpha}(f)$.

1.11. <u>Definición</u>: *Diremos que una sucesión* $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *converge a* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *en la* <u>*topología Stone*</u> *sii para cada conjunto compacto* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *existe* $k_o \in \mathbb{N}$ *tal que, para* $k \geq k_o$ *se tiene* $f_k = f$ *en* K.

Como ejemplo, notemos que 1.9. dice exactamente que $f \in I(\bar{t},s)$ sii existe una sucesión de combinaciones lineales de elementos de I que converge a f en la topología Stone. Por otro lado, con la misma idea de la demostración de 1.9. se puede mostrar facilmente que la clausura de naturaleza local de cualquier ideal coincide con su clausura en la topología Stone, como fue primero observado por J. Penon.

1.12. <u>Lema</u>: *(Glueing lemma, ver* [11], *lema que sigue al teorema 3). Si* $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *converge a* f C^∞-CO *entonces, existen una subsucesión* f_{k_r} *y* $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ *tales que* $F(\bar{t},1/r) = f_{k_r}$ *y* $F(\bar{t},s) = f(\bar{t})$ *si* $s \leq 0$. *En otras palabras, si* $f_k \to f$ C^∞-CO, *existe una subsucesión* f_{k_r} *y una curva* C^∞ *(en el sentido de* 1.3, i)) $F : \mathbb{R} \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *que pasa por* f_{k_r} *para* $s = 1/r$ *y tal que* $F = f$ *para* $s < 0$.

<u>Demostración</u>: Podemos suponer que $f = 0$. Sea $K_r = [-r,r]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Por hipótesis existe $k_r \in \mathbb{N}$ tal que $|D^\alpha f_{k_r}| < e^{-r}$ en K_r para todo α tal que $|\alpha| \leq r$. Tomemos ahora $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{sop}(\varphi) \subseteq (-1,1)$ y $\varphi(0) = 1$. Llamemos $\varphi_r(s) = \varphi(2r(r+1)(s-1/r))$.

Tenemos que $\mathrm{sop}(\varphi_r) \subseteq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2r(r+1)}, \frac{1}{r} + \frac{1}{2r(r+1)}\right)$ y $\varphi_r(1/r) = 1$. Definamos

$$F(\bar{t},s) = \begin{cases} f_{k_r}(\bar{t}).\varphi_r(s) & \text{si } s \in \mathrm{sop}(\varphi_r) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Obviamente $F(\bar{t},1/r) = f_{k_r}(\bar{t})$. Es muy fácil ver que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ ∎

1.3. <u>Corolario</u>: *Toda función* C^∞ $G : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^p)$ *es con-*

tinua en la topología C^∞- CO.

Demostración: Supongamos que la sucesión $\{f_k\} \subsetneq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ converge C^∞-CO a $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pero $G(f_k)$ no converge C^∞-CO a $G(f)$. Esto significa que existe un conjunto compacto $K \subsetneq \mathbb{R}^p$, $\epsilon > 0$, $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^p$, una subsucesión f_{k_ℓ} de f_k y $\bar{x}_\ell \in K$ tales que, para todo $\ell \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \bar{x}^\alpha} G(f_{k_\ell})(\bar{x}_\ell) - \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \bar{x}^\alpha} G(f)(\bar{x}_\ell) \right| \geq \epsilon$$

Por compacidad, podemos suponer $\bar{x}_\ell \to \bar{x}_0$ para un cierto $\bar{x}_0 \in K$. Por lema 1.12., existen una subsucesión de f_{k_ℓ} que también llamaremos f_{k_ℓ} y $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tales que $F(\bar{t},1/\ell) = f_{k_\ell}(\bar{t})$, $F(\bar{t},s) = f(\bar{t})$ para $s \leq 0$. Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ fijo, podemos calcular $G(F(-,\theta))(\bar{x})$, y, como G es C^∞, obtenemos una función C^∞ de ambas variables θ y $\bar{x}$.

Entonces, $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \bar{x}^\alpha} G(F(-,1/\ell))(\bar{x}_\ell) \xrightarrow[\ell \to \infty]{} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \bar{x}^\alpha} G(F(-,0))(\bar{x}_0)$. Esto es una contradicción∎

1.14. Lema: (Lema de reordenamiento).

Sea $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Entonces,* f_k *converge a* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *en la topología Stone sii para cada subsucesión* f_{k_ℓ} *de* f_k *y para cada sucesión decreciente* $\xi_\ell \searrow 0$ *de números reales existe una función* $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ *tal que* $F(\bar{t},\xi_\ell) = f_{k_\ell}(t)$ *y* $F(\bar{t},s) = f(\bar{t})$ *para* $s \leq 0$.

Demostración: Podemos suponer $f = 0$. Supongamos que f_k converge a 0 en la topología Stone. Tomemos una subsucesión f_{k_ℓ} y una sucesión decreciente $\xi_\ell \searrow 0$ de números reales. Elijamos también funciones $\varphi_\ell \in C^\infty(\mathbb{R})$ tales que $\varphi_\ell(\xi_\ell) = 1$

$\mathrm{sop}(\varphi_\ell) \cap \mathrm{sop}(\varphi_j) = \emptyset$ para $\ell \neq j$ y $\mathrm{sop}(\varphi_\ell)$ es un intervalo cerrado. Sea

$$F(\bar{t},s) = \begin{cases} \varphi_\ell(s).f_{k_\ell}(\bar{t}) & \text{si } s \in \mathrm{sop}(\varphi_\ell) \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado que f_k converge a 0 Stone, es muy fácil ver que $F(\bar{t},s) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Reciprocamente, supongamos que f_k no converge a cero en la topología Stone, o sea, existe un conjunto compacto K y una subsucesión f_{k_ℓ} tales que f_{k_ℓ} no es identicamente nula en K.

Sea $\xi_\ell = \max\limits_{\bar{t} \in K} |f_{k_\ell}(\bar{t})|$. Como por hipótesis $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ puede ser pegada con una F, podemos suponer (tomando otra subsucesión si es necesario) que ξ_ℓ decrece hacia cero. Llamemos $\bar{t}_\ell$ a un punto de K tal que $|f_{k_\ell}(\bar{t}_\ell)| = \xi_\ell \neq 0$. Otra vez, podemos suponer $\bar{t}_\ell \to \bar{t}_o$ para cierto $\bar{t}_o \in K$ (tomando otra subsucesión). Por hipótesis, existe $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que $F(\bar{t}, \xi_\ell) = f_{k_\ell}(\bar{t})$ y $F(\bar{t},s) = 0$ para $s \leq 0$. Entonces,

$$\frac{F(\bar{t}_\ell,\xi_\ell) - F(\bar{t}_\ell,0)}{\xi_\ell} = \pm \frac{\xi_\ell - 0}{\xi_\ell} = \pm 1$$

y, por el teorema del valor medio de Lagrange, existe un número real θ_ℓ, $0 < \theta_\ell < \xi_\ell$ tal que

$$\frac{F(\bar{t}_\ell,\xi_\ell) - F(\bar{t}_\ell,0)}{\xi_\ell} = \left.\frac{\partial F}{\partial s}\right|_{(\bar{t}_\ell,\theta_\ell)}$$

Luego, $\left.\frac{\partial F}{\partial s}\right|_{(\bar{t}_\ell,\theta_\ell)} = \pm 1$. Ahora bien, dado que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ y $(\bar{t}_\ell,\theta_\ell) \to (\bar{t}_o,0)$, obtenemos $\left.\frac{\partial F}{\partial s}\right|_{(\bar{t}_o,0)} = \pm 1$. Pero, siendo $F = 0$ para $s<0$, deberíamos tener $\left.\frac{\partial F}{\partial s}\right|_{(\bar{t}_o,0)} = 0$, lo cual es una contradicción∎

1.15. <u>Corolario</u>: *Cualquier función* C^∞ $G : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^p)$ *es contínua en la topología Stone.*

<u>Demostración</u>: Supongamos que $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ converge Stone a f pero $G(f_k)$ no converge Stone a $G(f)$. Apliquemos 1.14 a $G(f_k)$: existen una sucesión decreciente $\xi_\ell \to 0$, y una subsucesión f_{k_ℓ} de f_k tales que ninguna $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$ verifica $F(\bar{x},\xi_\ell) = G(f_{k_\ell})(\bar{x})$ y $F(\bar{x},s) = G(f)(\bar{x})$ para $s \leq 0$. Pero, otra vez por 1.14. , y dado que f_{k_ℓ} converge Stone a f, existe $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que $H(\bar{t},\xi_\ell) = f_{k_\ell}$, $H(\bar{t},s) = f(\bar{t})$

para $s \leq 0$. Sea $F(\bar{x},s) = G(H(-,s))$, tenemos: $F(\bar{x}, \xi_\ell) =$
$= G(f_{k_\ell})(\bar{x})$, $F(\bar{x},s) = G(f)(\bar{x})$ para $s \leq 0$ y $F(\bar{x},s) \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$.
Esto es una contradicción ■

Ahora presentamos otra demostración de 1.15.

i) <u>Acerca del diferencial de una función C^∞</u>:

Definamos <u>el diferencial</u> de $G \in C^\infty(C^\infty(\mathbb{R}^n), C^\infty(\mathbb{R}^p))$

$$dG : C^\infty(\mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^p)$$

por la fórmula

$$dG_h(k)(\bar{x}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{G(h+\lambda k)(\bar{x}) - G(h)(\bar{x})}{\lambda}$$

Dado que G es C^∞ se sigue que este limite existe y que $dG_h(k) \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$. Análogamente, puede verse que dG es una función C^∞ en ambas variables h y k (es decir, precedidas por un par de curvas C^∞ como en 1.3.i) da una curva C^∞ y, por lo tanto, con la misma demostración de 1.13 (adaptada a este caso de una función de dos variables) se muestra que dG es una función contínua en la topología C^∞-CO. Además, $dG_h : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^p)$ es $\mathbb{R}$-lineal. Para ver esto, tomemos $k,k' \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y consideremos la función $K(\lambda,\mu,\bar{x}) =$
$= G(h+\lambda k+\mu k')$. Tenemos que $dG_h(k+k') = \frac{\partial}{\partial\lambda}(K(\lambda,\lambda,\bar{x}))_{\lambda=0} =$
$= K_\lambda(0,0,\bar{x}) + K_\mu(0,0,\bar{x}) = dG_h(k) + dG_h(k')$. La propiedad

$dG_h(ak) = a\, dG_h(k)$ es inmediata de la definición de dG.

El lector interesado puede ver [5] donde la definición de dG asi como algunos de los resultados desarrollados en el punto i) pueden encontrarse. Sin embargo, el contexto es mucho más general y las demostraciones, menos elementales.

ii) <u>Segunda demostración de 1.15</u>. Tómense $f,h \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, y sea $H(\lambda,\bar{x}) = G(f+\lambda h)(\bar{x})$. Por el teorema del valor medio de Lagrange, tenemos $G(f+h)(\bar{x}) - G(f)(\bar{x}) = H(1,\bar{x}) - H(0,\bar{x}) =$

$= \left.\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}\right|_{(\xi,\bar{x})} = dG_{f+\xi h}(h)(\bar{x})$ para cierto $0<\xi<1$, $\xi = \xi(\bar{x})$.

Para cada $\ell \in C^{\infty}(\mathbb{R}^k)$, conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^k$ y $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ llamemos $\|\ell\|_K^r = \sup\limits_{\substack{|\alpha| \leq r \\ \bar{x} \in K}} \left| \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \ell(\bar{x}) \right|$.

Dado que dG es C^{∞}-CO continuo, tenemos que dado $\epsilon > 0$ y un conjunto compacto $K' \subseteq \mathbb{R}^p$ existen $\delta > 0$, un conjunto compacto $K = K(\epsilon, K')$ (que podemos suponer que es un n-cubo) y $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $\|h\|_K^r < \delta$ y $\|\ell - f\|_K^r < \delta$ implican $\|dG_{\ell}(h)\|_{K'}^0 < \epsilon$ (dado que siendo dG $\mathbb{R}$-lineal tenemos $dG_f(0) = 0$). Ahora bien, si h se anula en el cubo $K = K(\epsilon, K')$ tenemos $\|h\|_r^K = 0 < \delta$ y $\|(f+\xi h) - f\|_K^r = 0 < \delta$ para cualquier $\xi \in \mathbb{R}$. Así que, si h se anula en K, tenemos (λh también se anula en K) $\lambda \|dG_{f+\xi h}(h)\| = \|dG_{f+\xi h}(\lambda h)\|_{K'}^0 < \epsilon$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Se sigue que $\|dG_{f+\xi h}(h)\|_{K'}^{\theta} = 0$ para cualquier ξ y así $G(f+h)(\bar{x}) - G(f)(\bar{x}) = dG_{f+\xi h}(h)(\bar{x})$

se anula para $\bar{x} \in K'$.

Resumiendo: dado un conjunto compacto $K' \subset \mathbb{R}^p$ y $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ existe un conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $h_{|K} = 0$ implica $G(f+h)_{|K'} = G(f)_{|K'}$. Esto es una manera de decir que G es continua Stone ∎

<u>Observación</u>: El teorema 1.5. dice que una flecha $R^R \to R^{R^p}$ en el topos es en verdad "la misma cosa" que una función C^∞ $C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^p)$.

En este punto ya podemos tratar el problema central de este capítulo. Poniendo $M = R^R$ en las consideraciones del principio del capítulo, nos damos una flecha $v : R^R \times D \to R^R$ tal que $v(h,0) = h$ y debemos "hallar" una $u : R^R \times R \to R^R$ que haga conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & R^R \times R \arrow[dr, "u"] & \\
R^R \times R \times D \arrow[ur, "id_{R^R} \times +"] \arrow[dr, "(u \times id_D)"'] & & R^R \\
 & R^R \times D \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

y que verifique $u(h,0) = h$. En otras palabras, una flecha u tal que

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} u(h,t+d) = v(u(h,t),d) \\ \\ u(h,0) = h \end{array}\right.$$

Veamos cual es el significado (en términos de elementos de los anillos C^{∞} involucrados) de la conmutatividad del diagrama (1). Nótese que, dado que $R^D \simeq R\times R$, $(R^R)^D \simeq R^R\times R^R$, tenemos que la adjunta exponencial de v, digamos $\tilde{v} : R^R \to (R^R)^D \simeq$ $\simeq R^R\times R^R$ es un par (v_1,v_2) de flechas $R^R \to R^R$. Llamemos también $\tilde{u} : R^R \to R^{R\times R}$ a la adjunta exponencial de u.

1.16. <u>Lema</u>: i) *Si* $h : 1 \to R^R$, *entonces, la adjunta exponencial de la composición*

$$(1)\qquad R_t\times D = 1\times R_t\times D \xrightarrow{(h\times id_{R\times D})} R^R\times R_t\times D \xrightarrow{(u\times id_D)} R^R\times D \xrightarrow{v} R^{R_x}$$

(bajando R_x*) es la flecha dada por.*

$$\Gamma(v_1)(\Gamma(\tilde{u})(h)(-,t))(x)\ +$$

$$+\ \Gamma(v_2)(\Gamma(\tilde{u})(h)(-,t))(x).[z]\in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)_{/(z^2)}$$

ii) *Si* $h : 1 \to R^R$ *entonces, la adjunta exponencial de la composición*

$$(2)\qquad R_t\times D = 1\times R_t\times D \xrightarrow{(h\times id_{R\times D})} R^R\times R_t\times D \xrightarrow{(id_{R^R}\times +)} R^R\times R_t \xrightarrow{u} R^{R_x}$$

(bajando R_X*) es la flecha* $R\times R\times D \to R$ *dada por*

$$\Gamma(\tilde{u})(h)(x,t) + \frac{\partial\Gamma(\tilde{u})(h)}{\partial t}(x,t).[z] \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)_{/(z^2)}$$

iii) *La condición* $v(h,0) = h$ *es equivalente a* $v_1 = id_{R^R}$ *ó por 1.5. , a* $\Gamma(v_1) = id_{C^{\infty}(\mathbb{R})}$.

iv) *La condición* $u(h,0) = h$ *es equivalente a* $\Gamma(\tilde{u})(h)(x,0) = h(x)$.

Demostración: i) En vista de 5.6.,y tomando la adjunta exponencial (levantando D) en (1), para demostrar i) basta ver que para $i = 1,2$, la flecha

$$1\times R_t \xrightarrow{h\times id_R} R^R\times R_t \xrightarrow{u} R^R \xrightarrow{v_i} R^{R_x}$$

está dada por

$$\Gamma(v_i)(\Gamma(\tilde{u})(h)(-,t)(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2) \qquad (i = 1,2)$$

y para ver esto basta ver (ver 5.7.) que para cada $t_o \in \mathbb{R}$ la flecha

$$(3) \qquad 1 \xrightarrow{(id_1,t_o)} 1\times R_t \xrightarrow{h\times id_R} R^R\times R_t \xrightarrow{u} R^R \xrightarrow{v_i} R^{R_x}$$

está dada por $\Gamma(v_i)(\Gamma(\tilde{u})(h)(-,t_o))(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Claramente, la flecha (3) está dada por $\Gamma(v_i)(u\circ(h\times id_R)\circ$ $\circ(id_1,t_o))$, así que basta ver que la flecha (4) es $\Gamma(\tilde{u})(h)(-,t_o)$:

$$(4)\qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "{(id_1,t_o)}"] & 1\times R_t \arrow[r, "h\times id_R"] \arrow[rr, bend right, "a"'] & R^R\times R_t \arrow[r, "u"] & R^{R_x} \end{tikzcd}$$

Ahora bien, levantando R en la flecha a obtenemos su adjunta exponencial $\tilde{a}$.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "\tilde{a}"'] & R^R \arrow[r, "\tilde{u}"] & R^{R_x\times R_t} \end{tikzcd}$$

y vemos que $\tilde{a} = \Gamma(\tilde{u})(h)$, así que a está dada por $\Gamma(\tilde{u})(h) \in$ $\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ y, finalmente, esto implica que la flecha (4) es igual a $\Gamma(\tilde{u})(h)(-,t_o)$. Con esto terminamos la demostración de i).

ii) La flecha (2) es igual a la composición

$$(5)\qquad R\times D \xrightarrow{+} R_t \xrightarrow{h\times id_R} R^R\times R_t \xrightarrow{u} R^{R_x}$$

Ahora bien, la adjunta exponencial de la composición

$$(6)\qquad R_t \xrightarrow{(h\times id_R)} R^R\times R_t \xrightarrow{u} R^{R_x}$$

es

(7) $$1 \xrightarrow{h} R^R \xrightarrow{\tilde{u}} R^{R_x \times R_t}$$

o, en otras palabras, $\Gamma(\tilde{u})(h)$. Así que, la flecha (7) es igual a $\Gamma(\tilde{u})(h)$, y por lo tanto la flecha (6) está dada por $\Gamma(\tilde{u})(h)$.

Entonces, la adjunta exponencial de (5) (bajando R) corresponde a

$$\Gamma(\tilde{u})(h)(x,t + [z]) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^3)_{/(z^2)}$$

Y ahora, por 1.7., dado que $[z]^2 = 0$ esto es igual a $\Gamma(\tilde{u})(h)(x,t) + \frac{\partial(\Gamma(\tilde{u})(h))}{\partial y}(x,t) \cdot [z]$.

iii) Debemos verificar que $v(h,0) = h$, es decir, la composición

(6) $$R^R \xrightarrow{(id_{R^R},0)} R^R \times D \xrightarrow{v} R^R$$

es igual a la identidad de R^R si y sólo si $v_1 = id_{R^R}$.

En virtud de 5.2 la flecha compuesta que venimos de escribir es igual a la composición siguiente

$$\begin{tikzcd} R^R \arrow[r, "\tilde{v}"] & (R^R)^D \arrow[r, "id_{(R^R)^D} \times 0"] \arrow[rr, bend right, "a"'] & (R^R)^D \times D \arrow[r, "ev"] & R^R \end{tikzcd}$$

Ahora bien, sabemos por 5.5 que la flecha a definida en el diagrama anterior es igual a

$$(R^R)^D \simeq R^R \times R^R \xrightarrow{\pi_1} R^R$$

donde es el isomorfismo canónico y π_1 es la primera proyección. Así que la flecha compuesta (6) es igual a la composición

$$R^R \xrightarrow{\tilde{v}} (R^R)^D \simeq R^R \times R^R \xrightarrow{\pi_1} R^R$$

Pero, por definición, $\simeq \circ \tilde{v} = (v_1, v_2)$, así vemos que la flecha (6) es igual a v_1. Entonces se sigue que $v(h,0) = h$ si y sólo si $v_1 = id_{R^R}$.

iv) Debemos verificar que $u(h,0) = h$, es decir, la composición

(7) $$R^{\dot{R}} \xrightarrow{(id_{R^R}, 0)} R^R \times R_t \xrightarrow{u} R^{R_x}$$

es igual a id_{R^R} si y sólo si $\Gamma(\tilde{u})(h)(x,0) = h(x)$ para cada $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$.

En virtud de 5.2. la flecha (7) es igual a

(8) $$R^R \xrightarrow{(\tilde{u},0)} (R^{R_x})^{R_t} \times R_t \xrightarrow{ev} R^{R_x}$$, y,

por el teorema 1.5. esta flecha es igual a la identidad de R^R si y sólo si, para toda $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, $1 \xrightarrow{h} R^R$ la composición

$$(9) \qquad 1 \xrightarrow{h} R^R \xrightarrow{(\tilde{u},0)} (R^{R_x})^{R_t} \times R_t \xrightarrow{ev} R^R$$

es igual a h. Ahora, la flecha (9) es igual a

$$1 \xrightarrow{(\Gamma(\tilde{u})(h),0)} (R^{R_x})^{R_t} \times R_t \xrightarrow{ev} R^{R_x}$$

y, por 5.2., esta última es igual a

$$(10) \qquad 1 \xrightarrow{(id_1,0)} 1 \times R_t \xrightarrow{\Gamma(\tilde{u})(h)} R^{R_x}$$

y sabemos que $u(h,0) = h$ si y sólo si la flecha (10) es h. Ahora, la flecha (10) es igual a h si y sólo si su adjunta lo es

$$R_x \xrightarrow{(id_R,0)} R_x \times R_t \xrightarrow{\Gamma(\tilde{u})(h)} R$$

es decir, si y sólo si $\Gamma(\tilde{u})(h)(x,0) = h(x)$ ∎

1.17. Teorema: i) *Sea* $v : R^R \times D \to R^R$ *una flecha tal que* $v(h,0) = h$ *y* $u : R^R \times R \to R^R$. *Entonces tenemos que* i) *u cumple*

$$
(1) \quad \begin{cases} u(h,t+d) = v(u(h,t),d) \\ u(h,0) = h \end{cases}
$$

si y sólo si

$$
(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Gamma(\tilde{u})(h)}{\partial t}(x,t) = \Gamma(v_2)(\Gamma(\tilde{u})(h)(-,t))(x) \\ \Gamma(\tilde{u})(h)(x,0) = h(x) \end{cases}
$$

ii) *Recíprocamente, sea* $U : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^2)$ *una función* C^∞ *que satisface el problema*

$$
(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U(h)}{\partial t}(x,t) \\ U(h)(x,0) = h(x) \end{cases}
$$

Sea $\tilde{u} = E(U) \in Hom(R^R, R^{R\times R})$ (ver 1.5.) *y sea* $u : R^R \times R \to$ $\to R^R$ *su adjunta exponencial. Entonces* u *verifica* (1).

<u>Observación</u>: Los teoremas 1.17 y 1.5 dicen que integrar un campo vectorial en R^R es lo mismo que resolver un problema diferencial del tipo (3).

<u>Demostración de 1.17</u>. i) Sean A y B las composiciones

$$
R^R \times R \times D \xrightarrow{id_{R^R} \times +} R^R \times R_t \xrightarrow{u} R^{R_x}
$$

y

$$R^R \times R \times D \xrightarrow{u\times id_D} R^R \times D \xrightarrow{v} R^R$$

respectivamente. Con esta notación, (1) significa $A = B$ y $u(h,0) = h$. Ahora bien, $A = B$ si y sólo si sus adjuntos exponenciales (subiendo $R\times D$), digamos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ también lo son.

Y dado que $(R^R)^{R\times D} = (R^D)^{R\times R} \simeq R^{R\times R} \times R^{R\times R}$, $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son pares de flechas de $R^R \to R^{R\times R}$ seguidas de un isomorfismo.

Entonces, por 1.5., $\tilde{A} = \tilde{B}$ sii precedidas de todas las posibles secciones globales $1 \to R^R$ son iguales.

Tomemos una sección global $h : 1 \to R^R$. Las flechas $\tilde{A}\circ h$ y $\tilde{B}\circ h$ son iguales sii sus adjuntas exponenciales (bajando $R\times D$ nuevamente) son las mismas. Pero las adjuntas exponenciales de $\tilde{A}\circ h$ y $\tilde{B}\circ h$ son $A\circ(h\times id_{R\times D})$ y $B\circ(h\times id_{R\times D})$.

Así que, hemos demostrado que $A = B$ sii para todo $h\in C^\infty(R)$ $A\circ(h\times id_{R\times D}) = B\circ(h\times id_{R\times D})$. En vista de 1.16, esto termina la demostración de i).

ii) Para ver que u verifica (1) basta, por i), ver que u verifica (2) en i).

Pero esto es inmediato ya que $\Gamma(\tilde{u}) = \Gamma(E(U)) = U$ ∎

<u>Discusión y ejemplos sencillos</u>

Por 1.16. iii), una flecha $v : R^R \times D \to R^R$ tal que $v(h,0) =$

$= h$ queda definida por una flecha $v_2 : R^R \to R^R$, y, por 1.5. esta v_2 queda identificada con una función C^∞

$$G : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$$

$$G = \Gamma(v_2) \qquad\qquad v_2 = E(G)$$

1) Tómese $G : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $G(h) = h$. La solución del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(h)}{\partial t}(x,t) = G(U(h)(-,t))(x) \\ \\ U(h)(x,0) = h(x) \end{cases}$$

es $U(h)(x,t) = e^t.h(x)$, la cual es C^∞.
En este caso la flecha v correspondiente está descripta por $v(h,d) = h+hd$. Así que el problema

$$(1) \quad \begin{cases} u(h,t+d) = v(u(h,t),d) \\ \\ h(h,0) = h \end{cases}$$

tiene como (única) solución a

$$u = \text{adjunta exponencial de } E(U)$$

2) Supongamos ahora que $G(h)(x) = h'(x)$. G es C^∞. En este caso, la solución del problema (1) correspondiente está

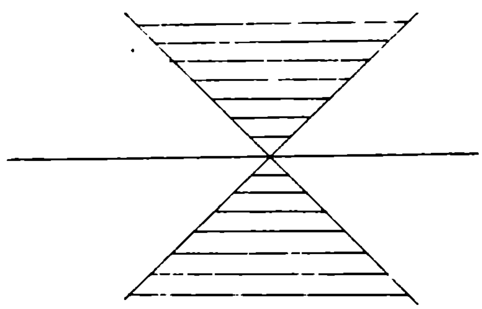
dada por u = adjunta exponencial de $E(U)$, donde $U(h)(x,t) = h(x+t)$.

No tenemos aún un teorema de existencia para nuestro problema. Debería ser un teorema de existencia local, para alguna topología que debe encontrarse. Por ejemplo, considerando la topología C^{∞}-CO , la existencia falla en general. Por el momento, nos contentamos con decir que, como hicimos en 1) y 2), y en casos menos simples que estos, podemos encontrar ejemplos donde hay existencia global y unicidad.

Capítulo 2: Ideales con extensiones determinadas por las líneas.

Introducción

Sea $J \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Como siempre pensamos que $\bar{t} = (t_1, \dots t_n)$ varía en $\mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_p)$ varía en $\mathbb{R}^p$ y $(\bar{t}, \bar{x}) = (t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_p)$ varía en $\mathbb{R}^{n+p}$. Dado que una función de la variable $\bar{t}$ es una función de $(\bar{t}, \bar{x})$ (que no depende de $\bar{x}$), tenemos $J \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+p})$. Por supuesto, J no es un ideal de $C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+p})$ pero genera en $C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+p})$ un ideal que llamamos $J(\bar{t}, \bar{x})$ (comparar con 1.4). Consideremos el siguiente enunciado (1) sobre J : "Cualquiera sea $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+p})$, $f \in J(\bar{t}, \bar{x})$ sii para cada $\bar{a} \in \mathbb{R}^p$ fijo, $f(\bar{t}, \bar{a}) \in J$". Es fácil ver que el enunciado 1 es en general falso. Tómese por ejemplo $n = 1$ y $J = \{h \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \mid h$ se anula en un entorno de $0 \in \mathbb{R}\}$ y sea $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ una función nula en $C = \{|x| \leqslant |y|\} \cup \{y = 0\}$ y distinta de cero en el complemento de C.



C = conjunto de ceros de f

En este capítulo demostramos que el enunciado (1) es cierto pa

ra una gran clase de ideales finitamente generados (Cor. 2., Teor 2.) , aunque no para todos ellos.
Decimos que los ideales que verifican el enunciado (1) tienen extensiones determinadas por las lineas. Aquí caracterizamos estos ideales como ideales cerrados $J(\bar{t})$ (en el sentido de Whitney [10]) tales que, para todo $p \in \mathbb{N}$, el ideal $J(\bar{t},\bar{x})$ es también cerrado (Teor. 2.). Finalmente, desarrollamos algunos ejemplos no triviales. El material de este capítulo se desarrolló para tratar los abiertos de Penon de Y^X, cosa que haremos en el capítulo próximo.

<u>Ideales con extensiones determinadas por las lineas</u>

2.1. <u>Definición</u>. *Decimos que un ideal* $J \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tiene <u>extensiones determinadas por las lineas</u> sii para cada entero* $p > 0$ *y cada función* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+p})$ *se cumple lo siguiente: si* $f(\bar{t},a) \in J$ *para cada* $\bar{a} \in \mathbb{R}^p$ *fijo entonces* $f \in J(\bar{t},\bar{x})$.
(La razón del nombre es que, para $n = 1$, $p = 1$ la definición significa $f \in J(\bar{t},\bar{x})$ sii restringido a lineas horizontales está en J).

2.2. <u>Observación</u>. i) Si $J = J(\bar{t})$ tiene extensiones determinadas por las líneas, entonces cualquier extensión $J(\bar{t},\bar{x})$ tiene extensiones determinadas por las lineas. La recíproca también es cierta: si alguna extensión de $J(\bar{t})$ tiene e.d.l , entonces $J(\bar{t})$ tiene e.d.l.

ii) Notemos que la propiedad de J de tener e.d.l. es una propiedad intrínseca del anillo cociente $A = C^\infty(\mathbb{R}^n)_{/J}$. Explicitamente, J tiene extensiones determinadas por las lineas sii para cada $p \in \mathbb{N}$, la familia de todas las evaluaciones $ev_{\bar{x}} : A \otimes_\infty C^\infty(\mathbb{R}^p) \to A$ $(\bar{x} \in \mathbb{R}^p)$ es colectivamente monomorfa, o, en otras palabras, todo "smooth polynomial" con coeficientes en A (i.e., cada elemento de $A(x_1,\ldots,x_p) = A \otimes_\infty C^\infty(\mathbb{R}^p))$ es nulo si se anula en todo punto de $\mathbb{R}^p \subseteq A^p$).

Un ejemplo de ideal que no tiene extensiones determinadas por las lineas fue dado en la introducción. Nótese que ese ideal no es cerrado en la topología C^∞-CO (ver 1.10).

2.3. <u>Proposición</u>: *Si el ideal* $J = J(\bar{t}) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tiene extensiones determinadas por las lineas entonces es cerrado en la topología* C^∞-CO.

<u>Demostración</u>: Supongamos que la sucesión f_k, $k \in \mathbb{N}$, $f_k \in J$ converge en la topología C^∞-CO a $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por el lema 2.4 (que demostraremos a continuación) podemos suponer (tomando una subsucesión) que existe $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que $H(\bar{t},1/k) = H(\bar{t},-1/k) = f_k(\bar{t})$, $H(\bar{t},0) = f(\bar{t})$ y $\frac{\partial H}{\partial s}(\bar{t},s) \in J(\bar{t})$ para cada $s \in \mathbb{R}$ fijo. Ahora bien, como J tiene extensiones determinadas por las lineas, se sigue que $\frac{\partial H}{\partial t}(\bar{t},s) \in J(\bar{t},s)$, o, en otras palabras, $\frac{\partial H}{\partial s}(\bar{t},s) = \sum_{i=1}^{r} A_i(\bar{t},s)h_i(\bar{t})$

para ciertos $A_i \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$, $h_i \in J$. Entonces, $H(\bar{t},1)-H(\bar{t},0) = \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial s}(\bar{t},s)\,ds = \sum_{i=1}^{r} h_i(\bar{t}) \int_0^1 A_i(\bar{t},s)\,ds$. Esto dice que $H(\bar{t},1) - H(\bar{t},0) \in J$, y como $H(\bar{t},1) = f_1 \in J$ concluímos que $H(\bar{t},0) = f(\bar{t}) \in J$ ∎

2.4. <u>Lemma</u>: Sea $J = J(\bar{t})$ un ideal de $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, y sea $f_k \in J$ una sucesión de funciones que converge C^{∞}-CO a $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe una subsucesión f_{k_ℓ} y $H \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que

$$\begin{cases} H(\bar{t},1/\ell) = H(\bar{t},-1/\ell) = f_{k_\ell}(t) \\ H(\bar{t},0) = f(\bar{t}) \\ \frac{\partial H}{\partial s}(\bar{t},s_o) \in J(\bar{t}) \quad \text{para cada } s_o \in \mathbb{R} \text{ fijo.} \end{cases}$$

<u>Demostración</u>: Sea $K = [-\ell,\ell]^n$ el cubo cerrado n-dimensional. Por hipótesis, existe k_ℓ tal que $|D^{\alpha}(f_k - f)| < e^{-\ell}$ en K_ℓ para cada tal que $|\alpha| = \Sigma \alpha_i \leq \ell$. Tomemos una función $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi([-1/2,1/2]) = 1$ y $\operatorname{sop}(\varphi) \subseteq (-1,1)$, y llamemos $\varphi_\ell(s) = \varphi(2\ell(\ell+1)(s-1/\ell))$. Tenemos que $\operatorname{sop}(\varphi_\ell) \subseteq (1/\ell-1/2\ell(\ell+1),\ 1/\ell+1/2\ell(\ell+1))$ y $\varphi_\ell([1/\ell-1/4\ell(\ell+1), 1/\ell+1/4\ell(\ell+1)]) = 1$.

Nótese que $\operatorname{sop}(\varphi_\ell) \cap \operatorname{sop}(\varphi_k) = \emptyset$ si $\ell \neq k$. Definamos

$$H(\bar{t},s) = \begin{cases} \varphi_\ell(s).f_{k_\ell}(\bar{t}) + (1-\varphi_\ell(s)).f_{k_{\ell+1}}(\bar{t}) \\ \text{si } 1/(\ell+1) \leq s \leq 1/\ell \quad \text{ó} \quad -1/\ell \leq s \leq -1/\ell+1 \\ f_{k_1}(\bar{t}) \quad \text{si} \quad |s| > 1 \\ f(\bar{t}) \quad \text{si} \quad s = 0 \end{cases}$$

Se ve facilmente que H es C^∞ y que $\frac{\partial H}{\partial s}(\bar{t},0) = 0 \in J$. El hecho que $\frac{\partial H}{\partial s}(\bar{t},s_o) \in J(\bar{t})$ para cada $s_o \neq 0$ fijo es inmediato ■

2.5. <u>Definición</u>: *Decimos que un ideal* J *es universalmente cerrado sii* $J = J(\bar{t})$ *y cualquier extensión* $J(\bar{t},\bar{x})$ *de el son cerrados.*

Observemos que 2.3 junto con 2.2 dicen que ideales que tienen extensiones determinadas por las lineas deben ser universalmente cerrados. E. Dubuc observó que un argumento derivada-integral como el de 2.3 permitiría usar sumas de Riemann para probar su recíproca. En verdad podemos usar sumas de Riemann directamente.

2.6. <u>Proposición</u>: *Sea* $J \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *un ideal y sea* $f(\bar{t},s) \in \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ *tal que* $f(\bar{t},s_o) \in J(\bar{t})$ *para cada* $s_o \in \mathbb{R}$ *fijo. Entonces* $f(\bar{t},s)$ *está en la clausura* C^∞-CO *de* $J(\bar{t},s)$.

Para probar esto, necesitamos el lema 2.7.

2.7. <u>Lema</u>: *Sea* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. *Se tiene* *i) Las sumas de Riemann* $S_n^a(\bar{t}) = \sum_{i=-n}^{n} f(\bar{t},\frac{ai}{n}).\frac{a}{n}$ *convergen a* $S^a(\bar{t}) = \int_{-a}^{a} f(\bar{t},w)\,dw$ *en la topología* C^∞-CO *cuando* $n \to \infty$.

ii) Sea $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ *la función*

$$\rho(s) = \begin{cases} \exp(-1/(1-s^2)) & \text{si } |s| < 1 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

y sea ρ_j *el núcleo* $\rho_j(s) = \dfrac{j.\rho(js)}{\int \rho(s)\,ds}$. *Entonces la sucesión* $f_j^a(\bar{t},s) = \int_{-a}^{a} f(\bar{t},w)\rho_j(s-w)\,dw$ *converge a* $f(\bar{t},s)$ *en la topología* C^∞-CO *cuando* $n,a \to +\infty$.

Demostración: i) Está claro que basta probar que $S_n^a(\bar{t})$ converge uniformemente sobre compactos a $S^a(\bar{t})$. Sea pues $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Para $n \in \mathbb{N}$, $-n \leq i \leq n-1$ y $\bar{t} \in K$ existe $\xi_{i,n}^{\bar{t}}$ $(\frac{ai}{n}, \frac{a(i+1)}{n})$ tal que

$$\int_{\frac{ai}{n}}^{\frac{a(i+1)}{n}} f(\bar{t},w)\,dw = f(\bar{t},\xi_{i,n}^{\bar{t}}).\ \frac{a}{n}.$$

Tenemos entonces

$$|S_n^a(t) - \int_{-a}^{a} f(\bar{t},w)| \leq \Big| \sum_{i=-n}^{n-1} f(\bar{t},\frac{ai}{n}).\ \frac{a}{n} -$$

$$- \sum_{i=-n}^{n-1} \int_{\frac{ai}{n}}^{\frac{a(i+1)}{n}} f(\bar{t},w)\,dw \,\Big| + \Big| f(\bar{t},a)\,.\,\frac{a}{n} \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{i=-n}^{n-1} \Big| f(\bar{t},\frac{ai}{n}) - f(\bar{t},\xi^{\bar{t}}_{i,n}) \Big| \,.\, \frac{a}{n} + \Big| f(\bar{t},a) \Big| \,.\, \frac{a}{n}$$

El resultado sigue por la uniforme continuidad de f en el compacto $K \times [-a,a]$

ii) Primero notemos que basta probar que $f^a_j(\bar{t},s) = \int_{-a}^{a} f(\bar{t},w)\rho_j(s-w)\,dw$ converge uniformemente sobre compactos a $f(\bar{t},s)$.

En efecto, las derivadas respecto de $\bar{t}$ no son problema, y con respecto a las derivadas respecto de s tenemos

$$\frac{\partial f^a_j}{\partial s}(\bar{t},s) = \int_{-a}^{a} f(\bar{t},w)\rho'_j(s-w)\,dw =$$

$$= - \int_{-a}^{a} f(\bar{t},w)\,\frac{\partial}{\partial w}(\rho_j(s-w))\,dw = -[f(\bar{t},w)\rho_j(s-w)]_{-a}^{a} +$$

$$+ \int_{-a}^{a} \frac{\partial f}{\partial s}(\bar{t},w)\,.\,\rho_j(s-w)\,dw.$$

Ahora bien, si s se mueve en un compacto y a es suficientemente grande, el primer sumando se anula y nos hemos reducido al caso anterior. Probemos entonces que f^a_j tiende a f

uniformemente sobre compactos. Observemos para esto que

$$\int_{-a}^{a} \rho_j(s-w)\,dw = \int_{s-a}^{s+a} \rho_j(w)\,dw$$

Tomemos el compacto $[-s_o,s_o] \subseteq \mathbb{R}$, y tomemos $a_o \in \mathbb{R}$ $a_o > 0$ suficientemente grande como para que $s \in [-s_o,s_o]$ y $a > a_o$ implique $s+a > 1/j$, $s-a < -1/j$. Entonces tenemos

$$\int_{s-a}^{s+a} \rho_j(w)\,dw = \int_{\mathbb{R}} \rho_j(w)\,dw = 1,$$

o sea, $\int_{-a}^{a} \rho_j(s-w) = 1$, si $s \in [-s_o,s_o]$ y $a > a_o$.

Tenemos entonces para $s \in [-s_o,s_o]$ y $a > a_o$

$$|f_j^a(\bar{t},s) - f(\bar{t},s)| = \left| \int_{-a}^{a} (f(\bar{t},w) - f(\bar{t},s))\, \rho_j(s-w)\,dw \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-a}^{a} |f(\bar{t},w) - f(\bar{t},s)|\, \rho_j(s-w)\,dw.$$

Sea $K = [-b,b]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Por uniforme continuidad de f en $K \times [-s_o-1, s_o+1]$, dado $\epsilon > 0$ existe $j_o \in \mathbb{N}$ tal que $\|(\bar{t},s) - (\bar{t}',s')\| < \frac{1}{j_o}$, $(\bar{t},s),(\bar{t}',s') \in K \times [-s_o-\text{ч}, s_o+1]$ implica $|f(\bar{t},s) - f(\bar{t}',s')| < \epsilon$ Así que, si $(\bar{t},s) \in K \times [-s_o,s_o]$ y $j \geqslant j_o$ tenemos que $|f(\bar{t},s) - f(\bar{t},w)| . \rho_j(s-w) \leqslant \epsilon . \rho_j(s-w)$ (si $|s-w| \geqslant 1/j_o$ $\rho_j(s-w) = 0$, así que basta considerar $|s-w| < 1/j_o$ lo cual implica $w \in [-s_o-1, s_o+1]$). De todo esto se deduce que $|f_j^a(\bar{t},s) - f(\bar{t},s)| < \epsilon \int_{-a}^{a} \rho_j(s-w)\,dw$ si $j > j_o$,

$a > a_o$ y $(\bar{t},s) \in K \times [-s_o, s_o]$. Pero habíamos tomado a_o y s_o de tal manera que, en las condiciones en que estamos $\int_{-a}^{a} \rho_j(s-w)\,dw = 1$. Como todo compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$ se cubre con un compacto de la forma $K \times [-s_o, s_o]$, esto termina la demostración de ii)

<u>Demostración de 2.6</u>: Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que para cada $s_o \in \mathbb{R}$ fijo, $f(\bar{t},s_o) \in J(\bar{t})$. Debemos mostrar que $f(\bar{t},s) \in \overline{J(\bar{t},s)}$. Tenemos que, para $w \in \mathbb{R}$ fijo, $f(\bar{t},w)\rho_j(s-w) \in J(\bar{t},s)$. Se sigue de 2.7.i) que $\int_{-a}^{a} f(\bar{t},w)\rho_j(s-w)\,dw \in \overline{J(\bar{t},s)}$. Entonces, de 2.7.ii) deducimos que $f(\bar{t},s) \in \overline{J(\bar{t},s)}$ ■

El siguiente teorema se sigue inmediatamente de 2.3 y 2.6.

2.8. <u>Teorema</u>: *Un ideal* $J \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tiene extensiones determinadas por las líneas sii es universalmente cerrado* ■

Es sabido (ver [10]) que los ideales generados por un número finito de funciones analíticas son cerrados y, por lo tanto, universalmente cerrados. Tenemos

2.9. <u>Corolario</u>: *Si* $f_1, \ldots, f_r$ *son funciones analíticas en* $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *el ideal generado por* $f_1, \ldots, f_r$ *tiene extensiones determinadas por las líneas* ■

Este corolario nos da una gran clase de ideales finitamen te generados que tienen extensiones determinadas por las lineas. Sin embargo, no todos los ideales finitamente generados las tienen: basta recordar que los ideales finitamente generados no son necesariamente cerrados.

2.10. <u>Teorema</u>: *Sea* $J \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *un ideal finitamente generado con extensiones determinadas por las lineas y consideremos una* n-*tupla* $\bar{g} = (g_1,\ldots,g_n)$ *de elementos de* $C^\infty(\mathbb{R}\ )$, *i.e.*, $\bar{g} : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^n$. *Supongamos que* $(g_1,\ldots,g_n)$ *son independientes (i.e., el jacobiano de* $\bar{g}$ *tiene rango* n*) en todo punto de* $\bar{g}^{-1}(Z(J))$. *Entonces el ideal* J_g = *ideal generado en* $C^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ *por* $\{h \circ \bar{g} : h \in J\}$ *tiene extensiones determinadas por las lineas.*

<u>Demostración</u>: Tomemos $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{\ell+p})$ tal que para cada $a \in \mathbb{R}^p$ fijo $f(\bar{s},\bar{a}) \in J_g$. Debemos mostrar que $f(\bar{s},\bar{x}) \in J_g(\bar{s},\bar{x})$ ($\bar{s}$ varía sobre $\mathbb{R}^\ell$ y $\bar{x}$ sobre $\mathbb{R}^p$). Dado que J_g es de caracter local (porque es finitamente generado, ver [2]) es suficiente mostrar que para cada $(\bar{s}_o,\bar{x}_o) \in \mathbb{R}^{\ell+p}$ existe un entorno abierto V de $(\bar{s}_o,\bar{x}_o)$ tal que $f|_V$ está en el ideal $J_g(\bar{s},\bar{x})|_V$ de $C^\infty(V)$. Esto último es trivial si $\bar{s}_o \notin Z(J_g)$. Tomemos entonces $(\bar{s}_o,\bar{x}_o)$ con $\bar{s}_o \in Z(J_g) = \bar{g}^{-1}(Z(J))$. Llamemos $\bar{s}_o'' \in \mathbb{R}^{\ell-n}$ a las últimas ℓ-n coordenadas de $\bar{s}_o$. Dado que por hipótesis $g_1,\ldots,g_n$ son independientes en $\bar{s}_o$, por el teorema de la función inversa prodemos suponer (cambiando el orden de las variables si es necesario) que existen entor-

nos abiertos U' de $\bar{s}_o \in \mathbb{R}^\ell$, W' de $(\bar{g}(\bar{s}_o),\bar{s}''_o) \in \mathbb{R}^\ell$ y un difeomorfismo $\bar{\psi} : W' \to U'$ tal que $\bar{g} \circ \bar{\psi} : W' \to \mathbb{R}^n$ es igual a la proyección $\bar{\pi}$ en las primeras n coordenadas. Sabemos que $f(\bar{s},\bar{a}) \in J_{\bar{g}}$ para $\bar{a} \in \mathbb{R}^p$ fijo, así que existen funciones $A_i^{\bar{a}} \in C^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ tales que $f(\bar{s},\bar{a}) = \sum_{i=1}^{r} A_i^{\bar{a}}\, h_i(\bar{g})\ (\bar{a} \in \mathbb{R}^p)$, siendo $h_1,\ldots,h_r$ generadores de J. Se sigue que, en W', $f(\bar{\psi},\bar{a}) = \sum_{i=1}^{r} A_i^{\bar{a}}(\bar{\psi}).h_i \circ \bar{\pi}$.

Poniendo $\bar{s}' = (s_1,\ldots,s_n)$, $\bar{s}'' = (s_{n+1},\ldots,s_\ell)$, tenemos, equivalentemente, $f(\bar{\psi}(\bar{s}',\bar{s}''),\bar{a}) = \sum_{i=1}^{r} A_i^{\bar{a}}(\bar{\psi}(\bar{s}',\bar{s}'')).h_i(\bar{s}')$.

Tomemos ahora un entorno abierto W de $(\bar{g}(\bar{s}_o),\bar{s}''_o)$ tal que $\bar{W} \subseteq W'$ y una función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ tal que $Z(\varphi) = \mathbb{R}^\ell \setminus W$. Tenemos que $H(\bar{s},\bar{x}) = \bar{\varphi}(\bar{s}).f(\bar{\psi}(\bar{s}),\bar{x})$ y $\varphi(\bar{s}).A_i^{\bar{a}}(\psi(\bar{s}))$ están definidas y son C^∞ en todo $\mathbb{R}^{\ell+p}$ y $\mathbb{R}^\ell$ respectivamente. Además tenemos $H(\bar{s},\bar{a}) = \sum_{i=1}^{r} \varphi(\bar{s}).A_i^{\bar{a}}(\psi(\bar{s})).h_i(\bar{s}')$.

Entonces, para cada $(\bar{s}'',\bar{a}) \in \mathbb{R}^{(\ell-n)+p}$ fijo, $H(\bar{s}',\bar{s}'',\bar{a}) \in$ $\in J(\bar{s}')$. Se sigue que $H(\bar{s}',\bar{s}'',\bar{a}) \in J(\bar{s}',\bar{s}'',\bar{a})$ ya que J tiene extensiones determinadas por las lineas. Además, dado que φ no se anula en W, $f(\bar{\psi},\bar{x})|_{W\times\mathbb{R}^p} \in J(\bar{s}',\bar{s}'',\bar{x})|_{W\times\mathbb{R}^p}$.
Entonces, llamando $U = \bar{\psi}(W)$,

$$f(\bar{s},\bar{x})|_{U\times\mathbb{R}^p} \in J_g(\bar{s},\bar{x})|_{U\times\mathbb{R}^p} \quad \text{y,}$$

por lo tanto, $V = U \times \mathbb{R}^p$ es el entorno de $(\bar{s}_o,\bar{x}_o)$ que necesitábamos ∎

Ejemplos de ideales con extensiones determinadas por las líneas.

Ejemplo 1: Todos aquellos ideales obtenidos por una adecuada combinación de 2.9 y 2.10 , como los ideales generados por un número finito de funciones independientes (i.e. independientes en el conjunto de ceros comunes).
Un ejemplo de esto es el ideal $J = (f(\bar{t})t_{n+1}-1) \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$, donde $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n})$ es una función tal que $Z(f) = \mathbb{R}^{n} \setminus U$ para cierto subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^{n}$. Este ideal J es el ideal de presentación del anillo $C^{\infty}(U)$ como un cociente de $C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$ (ver [3]). Por supuesto, $(f(\bar{t})t_{n+1}-1)$ no es, en general, una función analítica.

Ejemplo 2: Se sigue de un resultado de A. P. Calderón (no publicado) que el ideal de funciones playas en $t_o \in \mathbb{R}$ es universalmente cerrado (recordemos que "playa en t_o" significa "la función y todas sus derivadas se anulan en t_o".
Van Que y Reyes ([11]) generalizan este resultado y muestran que el ideal de funciones playas en un conjunto cerrado es universalmente cerrado (y por lo tanto con extensiones determinadas por las lineas).

2.12. Teorema: (Calderón-Reyes-Que). *Sean* X *e* Y *subconjuntos cerrados de* $\mathbb{R}^{n}$ *y* $\mathbb{R}^{p}$ *respectivamente. Sean* $J = J(\bar{t}) \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R}^{n})$, $I = I(\bar{x}) \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R}^{p})$ *y* $K = K(\bar{t},\bar{x}) \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+p})$ *los i* *deales de funciones playas en* X, Y *y* $X \times Y$ *respectivamente. Entonces* $K = J(\bar{t},\bar{x}) + I(\bar{x},\bar{t})$ ∎

Claramente, poniendo $Y = \mathbb{R}^p$ se sigue que J tiene extensiones determinadas por las lineas.

Ejemplo 3: El ideal J de todas las funciones $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ tales que $h(1/n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ver que J tiene extensiones determinadas por las lineas, tomemos $p \in \mathbb{N}$ y una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{1+p})$ que se anula en $\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{R}^p$. Probaremos dos lemas.

2.13. Lema: *Sea* $k \in \mathbb{N}$. *Supongamos que* $h(t,\bar{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^{1+p})$ *es tal que* $\frac{\partial^j h}{\partial t^j}(1/n,\bar{x}) = 0$ *para* $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$, $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq j \leq k$. *Sea* $U = \{(t,\bar{x}) \in \mathbb{R}^{1+p} | t > 0$ *y* $t \neq 1/n, n \in \mathbb{N}\}$ *y* $g(t,\bar{x}) = \dfrac{h(\bar{x},t)}{\operatorname{sen}^k(\pi/k)}$ $g : U \to \mathbb{R}$. *Entonces, para* $x_0 \in \mathbb{R}^p$ *tenemos*

$$\lim_{\substack{(t,\bar{x}) \to (0,\bar{x}_0) \\ (t,\bar{x}) \in U}} g(t,\bar{x}) = 0$$

Demostración: Probamos esto por inducción. La afirmación es trivial si $k = 0$. Así que tomemos $k > 0$, supongamos que la afirmación vale para $k-1$ pero existe $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{1+p})$ que para $\bar{x}$ fijo tiene un cero de orden no menor a k en $1/n$, tal que el límite anterior o bien no existe o bien es distin to de cero. En tal caso, existe una sucesión $(t_\ell, \bar{x}_\ell)$ que converge a $(0,\bar{x}_0)$, $t_\ell > 0$, $t_\ell \neq 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$ tal que

$$\lim_{\ell \to \infty} \frac{h(t_\ell, \bar{x}_\ell)}{\operatorname{sen}^k(\pi/t_\ell)} = a$$

con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ó $a = \infty$. Tomando una subsucesión podemos suponer que $\operatorname{sen}(\pi/t_\ell)$ es una sucesión convergente.

Notemos que necesariamente debe tender a cero, y, por lo tanto, $|\cos(\pi/t_\ell)|$ debe tender a 1. Sea $n_\ell \in \mathbb{N}$ tal que $n_\ell . \pi$ realiza la distancia entre π/t_ℓ y el conjunto $\{n.\pi : n \in \mathbb{N}\}$.

Tenemos que

$$\frac{h(t_\ell, \bar{x}_\ell)}{\operatorname{sen}^k(\pi/t_\ell)} = \frac{h(t_\ell, \bar{x}_\ell) - f(1/n_\ell, \bar{x}_\ell)}{\operatorname{sen}^k(\pi/t_\ell) - \operatorname{sen}^k(\pi/_{1/n_\ell})}$$

y, por el teorema del valor medio de Cauchy esto es igual a

$$\frac{-\xi_\ell^2}{\pi} \; \frac{\frac{\partial h}{\partial t}(\xi_\ell, \bar{x}_\ell)}{k \operatorname{sen}^{k-1}(\pi/\xi_\ell)\cos(\pi/\xi_\ell)}$$

para cierto ξ_ℓ entre t_ℓ y $1/n_\ell$. Ahora, por hipótesis inductiva

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial t}(\xi_\ell,\bar{x}_\ell)}{\operatorname{sen}^{k-1}(\pi/\xi_\ell)}$$

tiende a cero y $|\cos(\pi/\xi_\ell)|$ tiende a 1 ■

2.14. __Lema__: *Sea* $f(t,\bar{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^{1+p})$ *tal que* $f(1/n,\bar{x}) = 0$. *Nótese que, dado que* $\operatorname{sen}(\pi/t)$ *tiene un cero de órden* 1 *en* $t = 1/n$ *la función* $f(t,\bar{x})_{/\operatorname{sen}(\pi/t)} : U \to \mathbb{R}$ *puede extenderse a una función* C^∞ $g : \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. *Entonces la función*

$$\tilde{g}(t,\bar{x}) = \begin{cases} g(t,\bar{x}) & \text{si } t > 0 \\ f(t,\bar{x}) & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

está en $C^\infty(\mathbb{R}^{1+p})$ *y es playa en* $\{0\}\times\mathbb{R}^p$.

__Demostración__: Basta mostrar que g y todas sus derivadas tienden a cero cuando $(t,\bar{x})$ tiende a $(0,\bar{x}_o)$ $(\bar{x}_o \in \mathbb{R}^p)$

i) g tiende a cero: se sigue de 2.13.

ii) g_t tiende a cero: en U, g_t es igual a

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial t}(t,\bar{x}).\ \operatorname{sen}(\pi/t) + \pi/t^2 \cdot \cos(\pi/t)\ f(t,\bar{x})}{\operatorname{sen}^2(\pi/t)}.$$

El numerador está en $C^\infty(\mathbb{R}^{1+p})$ (nótese que dado que f se anula en $t = 1/_n$, $n \in \mathbb{N}$, se sigue que f es playa en $\{0\} \times \mathbb{R}^p$, y, por lo tanto, $\frac{f(t,\bar{x})}{t^2} \cdot \cos(\pi/_t) \in C^\infty(\mathbb{R}^{1+p})$); y el cociente es C^∞ en un entorno de $1/_n$. Se sigue que para $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ fijo el numerador tiene un cero de orden no menor a dos en $t = 1/_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ahora se aplica 2.13.

iii) Cualquier otra derivada de g: se la trata de manera similar ∎

Volvamos ahora al ejemplo 3). Consideremos las funciones

$$A(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi/t) & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

y $\tilde{g}$ como está definida en 2.14. Tenemos $A \cdot \tilde{g} = f$. Dado que $\tilde{g}$ es playa en $\{0\} \times \mathbb{R}^p$, se sigue del ejemplo 2. que existe una función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ playa en cero que divide a $\tilde{g}$, i.e., existe $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{1+p})$ tal que $\tilde{g}(t,\bar{x}) = \varphi(t).h(t,\bar{x})$. Así, $f(t,\bar{x}) = (A(t).\varphi(t)).h(t,\bar{x})$. Y se ve fácilmente que $(A(t).\varphi(t))$ es una función C^∞ y, como se anula en $t = 1/_n$, está en J ∎

1.15. <u>Observación</u>: Las construcciones de este ejemplo pueden generalizarse para tratar el ideal K cuyas funciones se anulan en $1/_n$ con un orden $0(n)$, supuesto que los órdenes finitos estén acotados.

Reyes y Van Quê (ver [11]) formulan la pregunta siguiente: ¿Es todo ideal cerrado universalmente cerrado?. Creemos que esto es cierto al menos en dimensión 1.

<u>Conjetura</u>: Todo ideal cerrado $J \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R})$ es universalmente cerrado.

Capítulo 3 . Abiertos de Penon en Y^X.

Introducción.

Sean $X = \dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^p)}{J}$, $Y = \dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$ dos representables en el topos de Dubuc $\mathcal{G}$ donde J tiene extensiones determinadas por las lineas (ver capítulo 2). El resultado central de este capítulo dice que el funtor "secciones globales" Γ establece una biyección entre los abiertos de Penon de Y^X (ver capítulo 5) y abiertos C^∞-CO de $\Gamma(Y^X)$. Mostramos también que cuando $I = \{0\}$ podemos suponer J arbitrario. Sin embargo la restricción en J [de tener extensiones determinadas por las lineas] no puede evitarse en general (ver 3.14).

Probamos primero algunos resultados auxiliares. Sean $B = \dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$, $A = \dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^p)}{J}$ dos anillos C^∞ en el sitio de definición del Topos de Dubuc $\mathcal{G}$. Sea $\Gamma : \mathcal{G} \to$ Sets el functor secciones globales: $\Gamma(F) = \mathrm{Hom}(1,F)$. Tenemos

3.1. Proposición: $\Gamma(Y^X) = Z(I,A^n)$, donde $Z(I,A^n) = \{(f_1,\ldots,f_n) \in A^n \mid \forall h \in I,\ h(f_1,\ldots,f_n) = 0\}$ (nótese que la definición de $Z(I,A^n)$ tiene sentido: las funciones diferenciables pueden evaluarse en anillos C^∞) ∎

3.2. Definición. *La topología* C^∞-CO *en* A *es la topología cociente determinada por la topología* C^∞-CO *de* $C^\infty(\mathbb{R}^p)$ *(ver*

1.10) y damos a A^n *y* $Z(I,A^n)$ *las topologías producto y de subespacio resp.* Nótese que la proyección $\pi : C^\infty(\mathbb{R}^p) \to A$ es abierta, se sigue pues:

3.3. Lema: *Si una sucesión* h_k *de elementos de* A *converge a* $h \in A$ *en la topología* C^∞-CO *entonces existe una sucesión* $\{f_k\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^p)$ *y* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$ *tales que:*

i) $[f_k] = h_k$ *y* $[f] = h$ *(los corchetes significan "clase de equivalencia de"·*

ii) f_k *converge a* f *en la topología* C^∞-CO *de* $C^\infty(\mathbb{R}^p)$

Demostración: Sea f tal que $[f] = h$ y consideremos la siguiente base de entornos abiertos de f

$$U_n = \{ g \in C^\infty(\mathbb{R}^p) \ : \ | D^\alpha(g-f)(\bar{x})| < 1/n$$

para $|\alpha| \leq n$ y $\bar{x} \in [-n,n]^p \}$. Sabemos que $\pi(U_n)$ es un entorno abierto de h en A. Así que dado n existe k_n tal que $k \geq k_n$ implica $h_k \in \pi(U_n)$. Podemos suponer que la sucesión k_n es estrictamente creciente. Así, para $k_n \leq k < k_{n+1}$ podemos tomar $f_k \in U_n$ tal que $[f_k] = h_k$. Para $k < k_o$ tomamos cualquier f_k tal que $[f_k] = h_k$. Es claro que f_k converge a f ∎

3.4. Lema: *Sean* X,Y *como recién y sea* $i : H \to Y^X$ *un subob-*

jeto de Y^X. *Entonces* H *es abierto de Penon (*ver 5.19. *)* *sii satisface las siguientes condiciones:*

a) *Para cada representable* $T = \dfrac{\overline{C^\infty(\mathbb{R}^k)}}{K}$ *, para cada flecha* $q : T \to Y^X$ *y* $\bar{s}_o \in Z(K) \subseteq \mathbb{R}^k$, $\bar{s}_o : 1 \to T$, *si* $q \circ \bar{s}_o$ *se factoriza por* H *entonces existe un entorno abierto* V *de* $\bar{s}_o$ *en* $\mathbb{R}^k$ *tal que* $q \circ j_V$ *se factoriza por* H *(donde* $j_V : \dfrac{\overline{C^\infty(V)}}{\widehat{K}|_V} \to \dfrac{\overline{C^\infty(\mathbb{R}^k)}}{K}$ *es la flecha correspondiente a la restricción)*

b) *Si* $T = \dfrac{\overline{C^\infty(\mathbb{R}^k)}}{K}$ *es un representable y* q *y* h *son flechas,* $a : T \to Y^X$, $h : T \to H$, *y existe una sucesión* $\bar{s}_r$ *de elementos de* Z(K) *que converge a* $\bar{s}_o \in Z(K)$ *tal que* $q \circ \bar{s}_r = i \circ h \circ \bar{s}_r$, *entonces* $q \circ \bar{s}_o$ *se factoriza por* H.

(Nótese que esta condición es trivial si el ideal J es C^∞-CO cerrado dado que en este caso tenemos $q \circ \bar{s}_o = i \circ h \circ \bar{s}_o$).

<u>Demostración</u>. La semantica de Kripke-Joyal (ver 5.16) nos dice que H es abierto de Penon sii para cada representable T y para cada $q : T \to Y^X$, $h : T \to H$ existe un cubrimiento de T

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[dr, "f_1"] & \\
& T \\
T_2 \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que $(q_\circ f_1, i_\circ h_\circ f_1)$ verifica la fórmula $\neg(h = q)$ y $q_\circ f_2$ se factoriza por H. Debemos probar que este enunciado K. J. es equivalente al enunciado del lema.

<u>Enunciado del lema implica al enunciado K.J.</u>

Supongamos que H verifica el enunciado del lema. Gracias al axioma de haz en H, ver (0.23) basta mostrar que para cada $\bar{s}_o \in Z(K)$ o bien i) existe un entorno abierto V de $\bar{s}_o$ en $\mathbb{R}^k$ tal que $q_\circ j_V$ se factoriza por H, o

ii) existe un entorno abierto V de $\bar{s}_o$ en $\mathbb{R}^k$ tal que para $\bar{s} \in V \cap Z(K)$, $i_\circ h_\circ \bar{s} \neq q_\circ s$.

Tomemos $\bar{s}_o \in Z(K)$ y supongamos que $\bar{s}_o$ no verifica ii). Se sigue que hay una sucesión $\bar{s}_r$ de puntos de $Z(K)$ que converge a $\bar{s}_o$ y tal que para todo $r \in \mathbb{N}$ $q_\circ \bar{s}_r = i_\circ h_\circ \bar{s}_r$. Por b), se sigue que $q_\circ \bar{s}_o$ se factoriza por H y, por a), se tiene que $\bar{s}_o$ verifica el punto i).

<u>El enunciado K.J. implica el enunciado del lema.</u>

a) Tomemos $q : T \to Y^X$ y consideremos el siguiente diagrama conmutativo

(1)
$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, dashed, "\bar{s}_o"] \arrow[dr, dashed, "q_1"'] & T \arrow[r, dashed, "q"] & Y^X \\
& H \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Con estos datos podemos considerar las flechas

$$q : T \to Y^X \quad y \quad T \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{q_1} H$$

Por el enunciado K.J., sabemos que existe un cubrimiento

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[dr, "f_1"] & \\
& T \\
T_2 \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que $(q\circ f_1, i\circ q_1\circ a\circ f_1)$ verifica la fórmula $\neg(q = h)$ y $q\circ f_2$ se factoriza por H. Dado que T_1, T_2 es un cubrimiento, $\bar{s}_o : 1 \to T$ se factoriza o bien por T_1 o bien por T_2. Pero no puede factorizarse por T_1, dado que esto implicaría que $(q\circ\bar{s}_o\ , i\circ q_1\circ\bar{s}_o) = (q\circ\bar{s}_o, i\circ q_1)$ verifica la fórmula $\neg(q = h)$, lo cual contradice la conmutatividad de (1).

b) Inmediato ∎

3.5. <u>Lema</u>: *Sea* F *un objeto en el topos* G. a) *La correspondencia* $R \to \Gamma(R)$ *del conjunto de subobjetos de* F *al conjunto de subconjuntos de* $\Gamma(F)$ *tiene un adjunto a derecha* E *, i.e., para cada* $S \subseteq \Gamma(F)$ *existe* $E(S) \leqslant F$ *tal que para cada* $R \leqslant F$ *tenemos*

$$\Gamma(R) \subseteq S \quad \text{sii} \quad R \leqslant E(S)$$

Además $\Gamma(E(S)) = S$. *De hecho, para* $S \subseteq \Gamma(F)$, $E(S)$ *está definido por la siguiente regla: una flecha* $f : T \to F$ *(*T *representable) se factoriza por* $E(S)$ *sii* $\Gamma(f) : \Gamma(T) \to \Gamma(F)$ *se factoriza por* S.

b) *Si* $H \rightarrowtail F$ *es abierto de Penon entonces* $E(\Gamma(H)) = H$.

<u>Demostración</u>: a) Debe verse que el sub-pre-haz definido en el enunciado es en realidad un haz, lo demás es inmediato. Tomemos para esto un cubrimiento $T_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} T$ y una familia compatible con este cubrimiento $T_\alpha \xrightarrow{h_\alpha} E(S)$ (ver 0.16). Llamemos i a la inclusión $i : E(S) \to F$. Tenemos entonces

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "h_\alpha"] & T & \\ & E(S) \arrow[r, tail, "i"] & F \end{tikzcd}$$

Como h_α es compatible con f_α, también $i_\circ h_\alpha$ lo es. Como F es un haz existe una única $h : T \to F$ tal que $h_\circ f_\alpha = i_\circ h_\alpha$. Es claro que h precedida de cualquier sección global se factoriza por $E(S)$ (ya que $T_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} T$ es un cubrimiento). Esto dice, por definición, que h se factoriza por $E(S)$. Como i es un monomorfismo, se sigue que

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "h_\alpha"'] & T \arrow[d, dashed, "\tilde{h}"] \\ & E(S) \end{tikzcd}$$

es conmutativo (donde $\tilde{h}$ es la flecha que factoriza a h). De nuevo, gracias a que i es mono y a la unicidad de h se sigue la unicidad de $\tilde{h}$.

b) Debe verse que una flecha $f : T \to F$ se factoriza por H sii se factoriza por $E(\Gamma(H))$. Ahora, $\Rightarrow$) es inmediata. Para ver $\Leftarrow$) supongamos que $f : T \to F$ se factoriza por $E(\Gamma(H))$. Esto significa que para cada sección global $\bar{s}_o : 1 \to T$, $f \circ \bar{s}_o$ se factoriza por H. Ahora, por 3.4.a), se sigue que para cada $\bar{s}_o \in Z(K)$ existe un entorno V de $\bar{s}_o$ en $\mathbb{R}^k$ tal que $q \circ j_V$ se factoriza por H. O sea que tenemos un cubrimiento de T_α, $f : T_\alpha \to T$ tq $f \circ f_\alpha$ se factoriza por H

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, dashed, "\tilde{f}_\alpha"'] & T \arrow[r, "f"] & F \\ & H \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

como i es un mono, $\tilde{f}_\alpha$ es compatible con f_α, y entonces existe un único $h : T \to H$ tq $h \circ f_\alpha = \tilde{f}_\alpha$ (pues H es un haz). Ahora, $i \circ h = f$ como se sigue del hecho que F es un haz, que f_α es un cubrimiento y que $i \circ h \circ f_\alpha = f \circ f_\alpha$ ■

3.6. Proposición. *Sea* W *un subconjunto de* $Z(I, A^n)$ *abierto en la topología* C^∞-CO *de* $Z(I, A^n)$. *Entonces* $E(W) \leqslant Y^X$ *es abierto de Penon.*

<u>Demostración</u>: Usamos 3.4.. Veamos que $E(W)$ verifica 3.4.

a) Tomemos flechas como en el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\bar{s}_o"] \arrow[dr, dashed] & T \arrow[r, "q"] & Y^X \\ & E(W) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd} \qquad T = \frac{\overline{C^\infty(\mathbb{R}^k)}}{K(\bar{s})}$$

Se sigue que $q \circ \bar{s}_o \in W$. Ahora, q está representada por una $[\bar{f}] \in \left[\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^{k+p})}{K(\bar{s},\bar{x}) \hat{+} J(\bar{x},s)}\right]^n$, $[\bar{f}] = ([f_1],\ldots,[f_n])$ y por lo tanto, $q \circ \bar{s}$ está representada por $[\bar{f}(\bar{s}_o,\bar{x})] \in W$. Entonces, dado que W es abierto, se sigue que $[f(\bar{s},\bar{x})] \in W$ para cada $\bar{s}$ fijo en un cierto entorno abierto V' de $\bar{s}_o$ en $Z(K)$. Así, llamando $V \subseteq \mathbb{R}^k$ un conjunto abierto tal que $V' = V \cap \cap Z(K)$ tenemos que $q \circ j_V$ se factoriza por $E(W)$, donde

$$j_V : \frac{\overline{C^\infty(V)}}{\widehat{K|_V}} \rightarrowtail \frac{\overline{C^\infty(\mathbb{R}^k)}}{K}$$

es la flecha correspondiente a la restricción.

Esto muestra que $E(W)$ verifica 3.4.a).

Veamos ahora que $E(W)$ verifica 1.4.b). Para esto tomemos flechas $q : T \to Y^X$, $h : T \to E(W)$ y una sucesión $\bar{s}_r$ de elementos de $Z(K)$ que converja a $\bar{s}_o \in Z(K)$ y tal que $q \circ \bar{s}_r = i \circ h \circ \bar{s}_r$.

Sean $[\bar{f}]$, $[\bar{g}]$ elementos de $\left[\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^{k+p})}{K(s,x) \hat{+} J(x,s)}\right]^n$ que re presentan a $i_\circ h$ y a q respectivamente.

La igualdad $q_\circ \bar{s}_r = i_\circ h_\circ \bar{s}_r$ significa que

$$[\bar{f}(\bar{s}_r,\bar{x})] = [\bar{g}(\bar{s}_r,\bar{x})] \quad \text{en} \quad \left[\frac{C^\infty(\mathbb{R}^p)}{J}\right]^n$$

para cada $r \in \mathbb{N}$, ó, en otras palabras, $(\bar{f}(\bar{s}_r,\bar{x}) - \bar{g}(\bar{s}_r,\bar{x})) \in \in J^n$. Ahora, $\bar{g}(\bar{s}_0,\bar{x}) + (\bar{f}(\bar{s}_r,\bar{x}) - \bar{g}(\bar{s}_r,\bar{x}))$ converge a $\bar{f}(\bar{s}_0,\bar{x})$ en la topología C^∞-CO cuando $r \to \infty$. Entonces, $[\bar{g}(\bar{s}_0,\bar{x})] = [\bar{g}(\bar{s}_0,\bar{x}) + (\bar{f}(\bar{s}_r,\bar{x}) - \bar{f}(\bar{s}_r,\bar{x}))]$ converge a $[f(\bar{s}_0,\bar{x})]$. Pero nosotros sabemos que $[\bar{f}(\bar{s}_0,\bar{x})] = h_\circ \bar{s}_0$ está en el abierto W. Se sigue que $[\bar{g}(\bar{s}_0,\bar{x})]$ está en W ó, en otras palabras, $q_\circ \bar{s}_0$ se factoriza por $E(W)$ ■

Para probar la recíproca de 3.6. (en el caso en que J tiene extensiones determinadas por las lineas)necesitamos dos lemas.

3.7. <u>Lema</u>: *Si una sucesión* f_ℓ *de elementos de* $C^\infty(\mathbb{R}^p)$ *y* $f \in \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$ *son tales que para cada conjunto compacto* $K \subsetneq \mathbb{R}^p$ *y cada* $d \in \mathbb{N}$ *existe* $L_{K,d} \in \mathbb{R}$ *tal que* $|D^\alpha(f_\ell - f)| < L_{K,d} \cdot e^{-\ell}$ *en* K *para* $|\alpha| \leqslant d$ *y* $\ell \geqslant \ell_0$ *para cierto* $\ell_0 \in \mathbb{N}$, *entonces existe* $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$ *tal que*

$$\begin{cases} F(\bar{x},s) = f_\ell(\bar{x}) \quad si \quad 1/\ell - 1/_{4\ell(\ell+1)} < \\ \qquad\qquad < s < 1/\ell + 1/_{4\ell(\ell+1)} \\ F(\bar{x},s) = f(\bar{x}) \quad si \quad s \leqslant 0. \end{cases}$$

y tal que $F(\bar{x},s_o)$ *pertence al ideal generado por* $\{f_\ell : \ell \in \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$ *para cada* $\bar{s}_o \in \mathbb{R}$ *fijo.*

<u>Demostración</u>. Podemos suponer $f = 0$. Tomemos $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{sop}(\varphi) \subseteq (-1,1)$ y $\varphi([-1/2, 1/2]) = 1$. Llamemos $\varphi_\ell(s) = \varphi(2\ell(\ell+1)(s-1/\ell))$. Tenemos que $\operatorname{sop}(\varphi_\ell) \cap \operatorname{sop}(\varphi_k) = \emptyset$ si $\ell \neq k$. Se ve fácilmente que

$$F(\bar{x},s) = \begin{cases} f_\ell(x)\varphi_\ell(s) & \text{si } s \in \operatorname{sop}(\varphi_\ell) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es C^∞ y tiene las propiedades requeridas.■

3.8. <u>Lema</u>: a) *Supongamos que el ideal* J *tiene extensiones determinadas por las líneas. Sea* $\bar{h}_k$ *una sucesión de elementos de* $Z(I,A^n)$ *que converge a* $\bar{h} \in Z(I,A^n)$ *en la topología* C^∞*-CO. Sea* $N \subsetneq C^\infty(\mathbb{R})$ *el ideal de todas las* <u>*funciones*</u> *que se anulan en* $\{\frac{1}{j} : j \in \mathbb{N}\}$ *y en* 0 *, y sea* $S = \dfrac{C^\infty(\mathbb{R})}{N}$ *.* *(Llamamos a* S *"la sucesión convergente genérica"). Entonces, existe una subsucesión* $\bar{h}_{k_\ell}$ *de* $\bar{h}_k$ *y una flecha* $F : S \to Y^X$ *tal que* $F \circ 1/\ell = \bar{h}_{k_\ell}$ *y* $F \circ 0 = h$*, donde* $1/\ell : 1 \to S$ *y* $0 : 1 \to S$ *son las flechas correspondientes a evaluación en* $1/\ell$ *y* 0 *respectivamente.*

b) *Sea* J <u>*cualquier*</u> *ideal* de caracter local *e* $I = \{0\}$. *Sea* $\bar{h}_k$ *una sucesión de elementos de* $Z(\{0\},A^n) = A^n$ *que converge* C^∞-CO *a* $\bar{h} \in A^n$. *Entonces existe una subsucesión* $\bar{h}_{k_\ell}$ *de* $\bar{h}_k$ *y una flecha* $F : \underline{R} \to \overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)}^X$ *tal que* $F \circ 1/\ell = \bar{h}_{k_\ell}$ *y* $F \circ 0 = \bar{h}$, *donde* $\underline{R} = \overline{C^\infty(\mathbb{R})}$ *es la linea.*

<u>Demostración</u>. Solo probamos a), dado que b) sigue analogamente (aunque mas directamente). Por 3.3., existe una sucesión $\{f_k\} \subseteq (C^\infty(\mathbb{R}^p))^n$ y $\bar{f} \in (C^\infty(\mathbb{R}^p))^n$ tal que $\{\bar{f}_k\}$ converge a f $(C^\infty\text{-CO})$ y $[f_k] = \bar{h}_k$, $[f] = h$. Tomemos una subsucesión $\bar{f}_{k_\ell}$ de $\bar{f}_k$ tal que $|D^\alpha(f^i_{k_\ell} - f^i)| < e^{-\ell}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ en $[-\ell,\ell]^p$ para todo α tal que $|\alpha| \leqslant \ell$. Así, por 3.7., existe $\bar{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$ tal que $\bar{F}(\bar{x},s) = \bar{f}_{k_\ell}(\bar{x})$ para $s \in (\frac{1}{\ell} - \frac{1}{4\ell(\ell+1)}, \frac{1}{\ell} + \frac{1}{4\ell(\ell+1)})$ y $\bar{F}(\bar{x},s) = f(\bar{x})$ para $s \leqslant 0$. Mostraremos que esta $\bar{F}$ define una flecha $F : S \to Y^X$. Una tal flecha es un cero de I en $\left[\frac{C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})}{(N(s,\bar{x}) \hat{+} J(\bar{x},s)}\right]^n$. Así, lo que debemos demostrar es que $[\bar{F}] \in \left[\frac{C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})}{N(s,\bar{x}) \hat{+} J(\bar{x},s)}\right]^n$ es un cero de I. Tomemos $g \in I$. Tenemos que $g([\bar{F}]) = [g(\bar{F})]$ (ver 0.6)) y $g(\bar{F}(\bar{x},0)) = g(f(x)) \in J$, y, para todo $\ell \in \mathbb{N}$ y $s \in (\frac{1}{\ell} - \frac{1}{4\ell(\ell+1)}, \frac{1}{\ell} + \frac{1}{4\ell(\ell+1)})$ $g(\bar{F}(\bar{x},s)) = g(\bar{f}_{k_\ell}(\bar{x})) \in J$. Ahora veremos que $g(\bar{f}_{k_\ell})$, $g(\bar{f})$ satisfacen las hipótesis de 3.7. En efecto, de 1.7. (con $m = 0$) se deduce que existen funciones $\eta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tales que

$$(1) \quad g(\bar{f}_{k_\ell}) - g(\bar{f}) = \sum_{i=1}^{n} (f^i_{k_\ell} - f^i)\eta_i(\bar{f}_{k_\ell}, \bar{f})$$

Sean $d \in \mathbb{N}$, $|\alpha| \leq d$ y $K \subseteq \mathbb{R}^p$ un conjunto compacto. Se ve de (1) que $D^\alpha(g(\bar{f}_{k_\ell}) - g(\bar{f}))$ es una combinación lineal (con coeficientes en $C^\infty(\mathbb{R}^p)$) de $D^\beta(f^i_{k_\ell} - f^i)$ $(1 \leq i \leq n, |\beta| \leq d)$. Sea $\ell_o \geq d$ tal que $[-\ell_o, \ell_o]^p \supseteq K$. Sabemos (por la manera en que se eligió $\bar{f}_{k_\ell}$) que si $\ell \geq \ell_o$, $|D^\beta(f^i_{k_\ell} - f^i)| < e^{-\ell}$ en K para $1 \leq i \leq n$ y $|\beta| \leq d$. Como los coeficientes de la combinación lineal de $D^\beta(f^i_k - f^i)$ antes mencionada son funciones C^∞, están acotados en el compacto K. Además, para $|\alpha| \leq d$ hay un número finito de tales coeficientes. Así que podemos elegir una cota común para el módulo de todos ellos, digamos $M_{K,d}$. Se sigue que $|D^\alpha(g(\bar{f}_{k_\ell}) - g(\bar{f}))| \leq M_{K,d} . n . e^{-\ell}$ en K para $\ell \geq \ell_o$ y $|\alpha| \leq d$ y así, $L_{K,d} = n . M_{K,d}$ es la constante requerida para satisfacer las hipótesis de 3.7. Entonces, usando 3.7., encontramos que existe $G \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$ tq.

$$\begin{cases} G(\bar{x},s) = g(f_{k_\ell}(\bar{x})) \text{ si } \frac{1}{\ell} - \frac{1}{4\ell(\ell+1)} < s < \frac{1}{\ell} + \frac{1}{4\ell(\ell+1)} \\ G(\bar{x},s) = g(f(\bar{x})) \quad \text{si} \quad s \leq 0 \end{cases}$$

y, para $s_o \in \mathbb{R}$ fijo, $G(\bar{x}, s_o) \in J$. Dado que J tiene extensiones determinadas por las líneas, se sigue que $G(\bar{x},s) \in J(\bar{x},s)$. Por otro lado, $g(\bar{F}) - G \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$ es una función playa en $\mathbb{R}^p \times (\{1/k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\})$. Entonces, por 2.12., exis te una función $\varphi(s) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, φ playa en $\{1/k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ que divide a $g(\bar{F}) - g$, i.e., existe $H \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{p+1})$ tal que $g(\bar{F}) - G = \varphi . H$. Esto implica que $g(\bar{F}) - G \in N(s,\bar{x})$. Asi, $g(\bar{F}) = G + (g(\bar{F}) - G) \in N(s,\bar{x}) + J(\bar{x},s) \subseteq N(s,\bar{x}) \hat{+} J(\bar{x},s)$. Es inmediata la verificación de que $F_\circ 1/\ell = \bar{h}_{k_\ell}$ y $F_\circ 0 = \bar{h}$ ∎

3.9. <u>Proposición</u>: *Supongamos que* J *tiene extensiones determinadas por las líneas y sea* U *un abierto de Penon de* Y^X. *Entonces* $\Gamma(U)$ *es un abierto de* $Z(I,A^n)$ *en la topología* C^{∞}-CO.

<u>Demostración</u>: Supongamos que $\Gamma(U)$ no es abierto en la topología C^{∞}-CO de $Z(I,A^n)$. Esto significa que hay una sucesión $\bar{h}_k$ de elementos de $Z(I,A^n) \setminus \Gamma(U)$ que converge C^{∞}-CO a cierta $\bar{h} \in \Gamma(U)$. Por 3.8.a), existe una subsucesión $\bar{h}_{k_\ell}$ de $\bar{h}_k$ y una flecha $F : S = \dfrac{C^{\infty}(\mathbb{R})}{N} \to Y^X$ tal que $F_\circ 1/\ell = \bar{h}_{k_\ell}$ y $F_\circ 0 = \bar{h}$. Ahora, dado que U es abierto de Penon, tenemos por 3.4. que existe un entorno abierto V de $0 \in \mathbb{R}$ tal que $F_\circ j_V$ se factoriza por U. Esto es contradictorio. ∎

3.10. <u>Proposición</u>: *Sea* J <u>cualquier</u> *ideal de caracter local e* $I = \{0\} \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. *Sea* U *un abierto de Penon de* $Y^X = \overline{C^{\infty}(\mathbb{R}^n)}^{\,X}$. *Entonces* $\Gamma(U)$ *es un conjunto abierto de* $A^n = Z(0,A^n)$ *en la topología* C^{∞}-CO.

<u>Demostración</u>: La misma que la de 3.9., usando 3.8.b) en vez

de 3.8.a).

De 3.5., 3.6 y 3.9. se sigue:

3.11. <u>Teorema</u>: *Sea* $X = \overline{\frac{C^\infty(\mathbb{R}^p)}{J}} = \bar{A}$, $Y = \overline{\frac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}} = \bar{B}$ *y supongamos que* J *tiene extensiones determinadas por las líneas. Entonces la asignación* $U \to \Gamma(U)$ *del conjunto de subobjetos de* Y^X *al conjunto de subconjuntos de* $Z(I,A^n)$ *induce una biyección entre el conjunto de abiertos de Penon de* Y^X *y el conjunto de abiertos de* $Z(I,A^n)$ *en la topología* C^∞-CO ■

Como se dijo en la introducción a este capítulo, la hipótesis sobre J de tener extensiones determindas por las lineas es esencial para el teorema 3.11. (ver el ejemplo 3.14 siguiente) en general. Sin embargo, el teorema 3.11. es cierto en algunos casos para ideales J que no tienen extensiones determinadas por las lineas. Este es el caso, por ejemplo, si el ideal I es 0.

3.12. <u>Teorema</u>: *Sea* $X = \overline{\frac{C^\infty(\mathbb{R}^p)}{J}} = \bar{A}$, $Y = \overline{C^\infty(\mathbb{R}^n)} = \bar{B}$ *donde* J *es* <u>*cualquier*</u> *ideal* [*de caracter local*]. *Entonces la asignación* $U \to \Gamma(U)$ *del conjunto de subobjetos de* Y^X *al conjunto de subconjuntos de* A^n *induce una biyección entre el conjunto de abiertos de Penon de* Y^X *y el conjunto de subconjuntos de* A^n *que son abiertos en la topología* C^∞-CO.

<u>Demostración</u>: dada por 3.5., 3.6. y 3.10.■

3.13. Ejemplos: i) Consideremos R^R en el topos de Dubuc donde $R = \overline{C^\infty(\mathbb{R})}$. En este caso, el teorema 3.12. dice que Γ establece una biyección entre el conjunto de abiertos de Penon de R^R y el conjunto de abiertos de C^∞-CO de $C^\infty(\mathbb{R})$. Esto fue conjeturado por M. Bunge y respondido independientemente por I. Moerdijk y por el autor.

ii) Sea $A = \overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R})}{J}}$ donde J es el ideal de todas las $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ que se anulan en un entorno de $0 \in \mathbb{R}$. R^Δ es el anillo interno de gérmenes en 0 de funciones de una variable. Por 3.12., la topología de Penon de R^Δ "coincide" con la topología C^∞-CO de $\dfrac{C^\infty(\mathbb{R})}{J}$, que es el anillo conjuntista de gérmenes en 0 de funciones diferenciables de una variable. J no tiene e.d.l. El siguiente ejemplo que muestra que la hipótesis sobre J de tener e.d.l. es esencial en general.

3.14. Ejemplo: Sea $w \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ una función nula en $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq |y|\} \cup \{(x,y) \mid y = 0\}$ y distinta de cero en $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Sea $I \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^2)$ el ideal generado por w, y $J \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el ideal de todas las funciones que se anulan en un entorno de $0 \in \mathbb{R}$. Sea $X = \overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R})}{J}}$ e $Y = \overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^2)}{I}}$. Tenemos que $\Gamma(Y^X) = \{([f_1], [f_2]) \in (\dfrac{C^\infty(\mathbb{R})}{J})^2 \mid W(f_1(x), f_2(x))$ se anula en un entorno de $0 \in \mathbb{R}\}$. Sea $V \subsetneq \Gamma(Y^X)$ el conjunto $V = \{([f_1], 0) \mid \dfrac{df_1}{dx}(0) \neq 0\}$. Nuestro ejemplo es $E(V) \leq Y^X$ (ver 3.5.): $E(V)$ es abierto de Penon de Y^X pero $\Gamma(E(V)) =$

$= V$ no es abierto C^∞-CO de $\Gamma(Y^X)$. El hecho de que V no es abierto de $\Gamma(Y^X)$ es inmediato: la sucesión $([x],[1/n]) \notin V$ tiende a $([x],0) \in V$. Para ver que $E(V)$ es abierto de Penon necesitamos el siguiente lema.

3.15. Lema: *Sean* V, C, X, Y *como venimos de describir y sea* $\bar{F} = (F_1,F_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})^2$ *tal que para cierto* $\bar{s}_o \in \mathbb{R}^k$, $[\bar{F}(\bar{s}_o,x)] \in V$ *pero existe una sucesión* $\bar{s}_r$ *de puntos de* $\mathbb{R}^k$, $\bar{s}_r \to \bar{s}_o$ *cuando* $r \to \infty$ *tal que* $[\bar{F}(\bar{s}_r,x)] \in \Gamma(Y^X) \setminus V$. *Entonces existe una sucesión* x_r *de números reales,* $x_r \to 0$ *cuando* $r \to \infty$ *y* $r_o \in \mathbb{N}$ *tal que, para* $r \geq r_o$ *tenemos* $\bar{F}(\bar{s}_r,x_r) \notin C$.

Demostración. Veamos primero que, en estas condiciones, debe ser $F_1(s_o,0) = 0$. Si no fuera así, existirían $\epsilon > 0$, $\delta' > 0$ y $r_o \in \mathbb{N}$ tal que para $|x| \leq \delta'$ y $r \geq r_1$, $|F_1(s_r,x)| > \epsilon$. Ahora, como $F_2(s_o,x)$ tiene gérmen nulo en el origen $(x=0)$ existen $\delta'' > 0$, y $r_2 \in \mathbb{N}$ tal que para $|x| \leq \delta''$ y $r \geq r_2$ $|F_2(s_r,x)| < \epsilon$. Así vemos que existiría $\delta > 0$ y $r_o \in \mathbb{N}$ tal que para $|x| \leq \delta$ y $r \geq r_o$ $|F_1(s_r,x)| > |F_2(s_r,x)|$. Pero como $[\bar{F}(s_r,x)] = ([F_1(s_r,x)], [F_2(s_r,x)])$ esta en $\Gamma(Y^X)$ sabemos que $w(F_1(s_r,x), F_2(s_r,x))$ es nula en un entorno del origen y, entonces, $(F_1(s_r,x),F_2(s_r,x))$ debería pertencer a C para x en un entorno de cero. Nosotros vimos que, $|F_1(s_r,x)| > |F_2(s_r,x)|$ en un entorno de cero para $r \geq r_o$. Así que la única manera de que $\bar{F}(s_r,x) \in C$ para x en un entorno del origen y $r \geq r_o$ es que $F_2(s_r,x) = 0$ en un entorno del origen para $r \geq r_o$. Ahora, como $\frac{dF_1}{dx}(s_o,o) \neq 0$, se sigue que, para r suficientemente grande $\frac{dF_1}{dx}(s_r,o) \neq 0$. Esto dice que, para r suficientemente grande $[\bar{F}(s_r,x)] \in V$, contradiciendo nuestras hipótesis. Concluimos pues que $F_1(s_o,o) = 0$.

Ahora bien, sabemos que $[\bar{F}(s_o,x)] \in V$, lo cual implica que $F_2(s_o,x)$ se anula en $|x| \leq \delta'$ para cierto $\delta' > 0$. Entonces, cualquiera sea $p \in \mathbb{N}$ existe $r_p \in \mathbb{N}$ tal que para $|x| \leq \delta'$ y $r \geq r_p$ tenemos $|F_2(s_r,x)| < 1/p$ y $|F_1(s_r,0)| < 1/p$ Podemos suponer que la sucesión r_p es estrictamente creciente. Por otro lado, $\frac{\partial F_1}{\partial x}(s_o,0) \neq 0$. Podemos suponer $\frac{\partial F_1}{\partial x}(s_o,0) > 0$, pues si (F_1,F_2) satisface las hipótesis del lema también lo hace $(-F_1,F_2)$ y si $(-F_1,F_2)$ verifica la tesis del lema también lo hace (F_1,F_2). Entonces existen $\epsilon > 0$, $\delta'' > 0$ y $r_o \in \mathbb{N}$ tales que, si $r \geq r_o$ y $|x| \leq \delta''$, $\frac{\partial F_1}{\partial x}(s_r,x) > \epsilon$. De aquí en adelante tomamos $\delta = \min\{\delta',\delta''\}$ y $r \geq r_o$. Llamemos $y_p = \sup\limits_{\substack{r > r_p \\ r > r_o}} \left\{ \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{1}{p} - F_1(s_r,0)\right)\right\}$. Dado que $\{F_1(s_r,0) : r \geq r_p, r_o\}$ es un conjunto acotado (por ser s_r convergente) está claro que y_p es un número real finito. Además, $y_p > 0$ ya que $F_1(s_o,0) = 0$, e $y_p \to 0$ cuando $p \to \infty$. Tomemos p_o tal que para $p \geq p_o$ tengamos $|y_p| < \delta$ y $r_p \geq r_o$. Mostraremos que para $p \geq p_o$ y $r \geq r_p$, $F_1(s_r,y_p) > 1/p$. En efecto, si $p \geq p_o$ sabemos que $|y_p| < \delta$ y $r_p \geq r_o$, entonces, para

$r \geq r_p$ y $|x| \leqslant y_p$ tenemos que $\dfrac{\partial F_1}{\partial x}(s_r,x) > \epsilon$. Como $y_p > 0$, integrando entre 0 e y_p, deducimos que $F_1(s_r,y_p) > F_1(s_r,0) + \epsilon . y_p > F_1(s_r,0) + \epsilon . \frac{1}{\epsilon} . (\frac{1}{p} - F_1(s_r,0)) = 1/p$. Así, para $r \geq r_p$ (con $p \geq p_o$) tenemos $|F_2(s_r,y_p)| < 1/p < |F_1(s_r,y_p)|$

Si tuviéramos que $F_2(s_r,y_p) \neq 0$ para $r_p \leqslant r < r_{p+1}$, definiríamos $x_r = y_p$ para $r_p \leqslant r < r_{p+1}$ y tendríamos que $\bar{F}(s_r,x_r) \notin C$ para $r \geq r_{p_o}$, con $x_r \to 0$ cuando $r \to \infty$. Desafortunadamente, este puede no ser el caso, lo que nos obliga a ser mas cuidadosos.

<u>Definición de x_r para $r_p \leqslant r < r_{p+1}$, con $p \geq p_o$</u>

1) Si $r_p \leqslant r < r_{p+1}$ y $F_2(s_r,y_p) \neq 0$, definimos $x_r = y_p$. ($p \geq p_o$).

2) Si $r_p \leqslant r < r_{p+1}$ y $F_2(s_r,y_p) = 0$, llamamos $a_r = \sup\limits_{\substack{|x|<\delta \\ x<y_p \\ F_2(s_r,x) \neq 0}} x$.

Notemos que $a_r \geq 0$ ya que si no (a_r,y_p) es un entorno de cero y como $F_2(s_r,x)$ se anula para $x \in (a_r,y_p)$ y $\dfrac{\partial}{\partial x} F_2(s_r,0) \neq 0$ tendríamos $[\bar{F}(s_r,x)] \in V$, contrariamente a nuestras hipótesis.

Notemos tambipen que $F_2(s_r,a_r) = 0$, como se sigue de la definición de a_r y del hecho de que estamos en el caso $F_2(s_r,y_p) = 0$. Así, $|F_2(s_r,a_r)| = 0 \leqslant |F_1(s_r,a_r)|$.

Aquí debemos dividir el caso 2) en otros dos subcasos

2.1) Si $F_1(s_r,a_r) \neq 0$, ent $|F_2(s_r,a_r)| < |F_1(s_r,a_r)|$. Por la definición de a_r, y dado que $a_r \geq 0$, podemos tomar x_r, $-1/r < x_r < a_r$ tal que $F_2(s_r,x_r) \neq 0$ y que x_r sea tan próximo a a_r como para que se cumpla la desigualdad $|F_2(s_r,a_r)| < |F_1(s_r,a_r)|$.

2.2) Si $F_1(s_r,a_r) = 0$ entonces $F_1(s_r,a_r) = F_2(s_r,a_r) = 0$. En este caso, sabemos que $a_r \neq y_p$ ya que $F_1(s_r,y_p) > 1/p$. Así, para $a_r < x < y_p$, $F_2(s_r,x) = 0$, y entonces, $\frac{\partial F_2}{\partial x}(s_r,a_r) = 0$. Como $|a_r| < \delta$, $\frac{\partial F_1}{\partial x}(s_r,s_r) > \epsilon > 0$. De esto se sigue (ver lema 3.16. al final del capítulo) que existe un entorno U de a_r tal que para $x \in U \setminus \{a_r\}$ $|F_1(s_r,x)| > |F_2(s_r,x)|$. Como $a_r \geq 0$, y por su definición, podemos tomar x_r con $-1/r < x_r < a_r$, $x_r \in U$ y tal que $F_2(s_r,x_r) \neq 0$.

Así queda definido x_r para $r_p \leq r < r_{p+1}$. Como en todo caso se tiene $-\frac{1}{r} < x_r < y_p$ (si $r_p \leq r < r_{p+1}$) y como $y_p \longrightarrow 0$ $(p \to \infty)$ concluímos que $x_r \to 0$ $(r \to \infty)$. También, en todo caso, definimos x_r de tal manera que $F_2(s_r,x_r) \neq 0$ y $|F_2(s_r,x_r)| < |F_1(s_r,x_r)|$, es decir, $\bar{F}(s_r,x_r) \notin C$. ∎

Volvamos al ejemplo 3.14. Debíamos mostrar que $E(V)$ es abierto de Penon. Usamos 3.4.. Veamos primeramente que $E(V)$ verifica 3.4.b). Tomemos $T = \frac{\overline{C^\infty(\mathbb{R}^k)}}{K}$, un par de flechas $q : T \to Y^X$, $h : T \to E(V)$ y una sucesión $\bar{s}_r$ de elementos de $Z(K)$ que converja a $\bar{s}_0 \in Z(K)$ y tal que $q \circ s_r = i \circ h \circ s_r$. Supongamos que q e $i \circ h$ están representadas por $[\bar{f}], [\bar{g}] \in$

$\left[\frac{C^{\infty}(\mathbb{R}^{k+1})}{K(\bar{s},x) \hat{+} J(\bar{x},s)}\right]^2$ respectivamente. Se sigue que $q \circ s_r$, $i \circ h \circ \bar{s}_r$ están representadas por $[\bar{f}(s_r,x)], [\bar{g}(s_r,x)] \in \Gamma(Y^X) \subseteq$ $\subseteq \left[\frac{C^{\infty}(\mathbb{R})}{J}\right]^2$. Para todo $r \in \mathbb{N}$ tenemos que $\bar{f}(\bar{s}_r,x) -$ $- \bar{g}(\bar{s}_r,x) \in J^2$, entonces, $\bar{f}(\bar{s}_o,x) - \bar{g}(\bar{s}_o,x) = \lim_{r \to \infty} (\bar{f}(\bar{s}_r,x) -$ $- \bar{g}(\bar{s}_r,x))$ tiene todas las derivadas nulas en $x = 0$, es decir, es playa en $x = 0$. Como $[\bar{g}(\bar{s}_o,x)] \in V$, se sigue que $\frac{dg_1}{dx}(\bar{s}_o,0) \neq 0$ y, por lo tanto $\frac{df_1}{dx}(\bar{s}_o,0) \neq 0$. Lo que falta mostrar es que $f_2(\bar{s}_o,x)$ se anula para x en un entorno de cero. Como $f_2(\bar{s}_o,x) - g_2(\bar{s}_o,x)$ es playa en $x = 0$ y $g_2(\bar{s}_o,x)$ es nula en un entorno de cero, se sigue que $f_2(\bar{s}_o,0) = 0$, y, más aún, $f_2(\bar{s}_o,x)$ es playa en $x = 0$. Tenemos ahora dos casos

1) $f_1(\bar{s}_o,0) \neq 0$.

En este caso, como $w(f_1(\bar{s}_o,x), f_2(\bar{s}_o,x))$ debe ser nula en un entorno de $x = 0$, se sigue $(f_1(\bar{s}_o,x), f_2(\bar{s}_o,x)) \in C$ para x en un entorno de 0. Pero $|f_1(\bar{s}_o,0)| > 0 = |f_2(\bar{s}_o,0)|$ así que esta desigualdad se mantiene en un cierto entorno de cero. Se sigue ahora que $f_2(\bar{s}_o,x) = 0$ para x en un entorno de cero.

2) $f_2(\bar{s}_o,0) = 0$

En este caso $f_1(\bar{s}_o,0) = f_2(\bar{s}_o,0) = 0$ y además $\frac{df_1}{dx}(\bar{s}_o,0) \neq 0$, entonces, por 3.16., en un entorno de cero $|f_1(\bar{s}_o,x)| > |f_2(\bar{s}_o,x)|$. Como $(f_1(\bar{s}_o,x), f_2(\bar{s}_o,x))$ debe estar en C para x en un entorno de cero, concluimos que $f_2(\bar{s}_o,x) = 0$ para x en un entorno de cero. En todo caso, $[\bar{f}(\bar{s}_o,x)] \in V$, que es lo que debíamos mostrar.

Veamos ahora que $E(V)$ verifica 3.4.a).

Tomemos $T = \overline{\frac{C^\infty(\mathbb{R}^k)}{K}}$ tal que $q\circ\bar{s}_o$ se factoriza por $E(V)$, i.e., $q\circ\bar{s}_o \in V$. Tenemos que q está representada por un elemento $[\bar{F}] \in Z\left[I, \left[\frac{C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})}{K(\bar{s},\bar{x}) \hat{+} J(\bar{x},\bar{s})}\right]^2\right]$ y, por lo tanto, $q\circ\bar{s}_o$ esta representada por $[\bar{F}(\bar{s}_o,x)] \in \Gamma(Y^X)$. Debemos mostrar que existe un entorno abierto W de $\bar{s}_o$ en $\mathbb{R}^k$ tal que $q\circ j_W$ se factoriza por $E(V)$. Ahora, por 3.5., la condición "$t\circ j_W$ se factoriza por $E(V)$" significa "$q\circ\bar{s} \in V$ para cada $\bar{s} \in W \cap Z(K)$".

Supongamos que no existe tal W. Esto significa que existe una sucesión $\bar{s}_r$ de puntos de $Z(K) \subseteq \mathbb{R}^k$ que converge a $\bar{s}_o$ y tal que $\bar{F}(\bar{s}_r,x) \in \Gamma(Y^X) \setminus V$. Por 3.15., se sigue que existe una sucesión x_r de números reales $x_r \to 0$ $(r \to \infty)$ tal que $\bar{F}(\bar{s}_r,x_r) \notin C$, i.e., $w(\bar{F}(\bar{s}_r,x_r) \neq 0$. Pero nosotros sabemos que $w(\bar{F}) \in K(\bar{s},x) \hat{+} J(x,\bar{s})$ y, por lo tanto, dado que las funciones de J se anulan en un entorno de cero, existe un entorno W de $(\bar{s}_o,0) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tal que en W, $w(F)$ es igual a un elemento de $K(\bar{s},x)$. Para algún $\epsilon > 0$, $(s_o^1 - \epsilon$,

$s_o^1 + \epsilon) \times \ldots \times (s_o^k - \epsilon,\ s_o^k + \epsilon) \times (-\epsilon,\epsilon)$ está contenido en W y por lo tanto, como $\bar{s}_r \in Z(K)$, deberíamos tener $w(\bar{F}(\bar{s}_r,x)) = 0$ para $x \in (-\epsilon,\epsilon)$ y $r \geq r_o$ (para r_o tal que $|\bar{s}_r - \bar{s}_o| < \epsilon$ si $r \geq r_o$). Esto es contradictorio ∎

Por fin probamos el lema que usamos en 3.14. y 3.15.

3.16. Lema: *Sean* $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ *tales que* $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $f_1'(0) \neq 0$, $f_2'(0) = 0$. *Entonces existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $0 < |x| < \delta$ *entonces* $|f_1(x)| > |f_2(x)|$.

Demostración: Tomemos δ tal que para $|x| < \delta$ $|f_1'(x)| > |f_2'(x)|$ y $f_1'(x) \neq 0$. Para $0 < |x| < \delta$ tendremos, en consecuencia $f_1(x) \neq 0$. Calculemos para tales valores de x $\left|\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right| = \frac{|f_2(x) - f_2(0)|}{|f_1(x) - f_1(0)|}$ y esto es, por el teorema del valor medio de Cauchy, igual a $\frac{|f_2'(\xi)|}{|f_1'(\xi)|}$ para cierto ξ, $0 < \xi < x < \delta$ Y este cociente menor que uno ∎

Capítulo 4

Tres problemas de ideales de funciones diferenciables

Introducción

En este capítulo, demostramos que las siguientes dos fórmulas son válidas internamente (ver Cap.5) en los topos $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{Z}$:

$$1)\quad \forall\, f \in R^{[0,1]}\ \left(f \geq 0 \;\rightarrow\; \int_0^1 f \geq 0\right)$$

$$2)\quad \forall\, f \in R^R\ \left[f|_{R_{>0}} = 0 \;\wedge\; f|_{R_{<0}} = 0\right] \rightarrow f \equiv 0$$

($f|_{R_{>0}}$ significa "f restringida a $R_{>0}$").

Por otro lado, consideramos una tercera cuestión.

3) ¿Son las flechas $t^n : R \rightarrow R$ (n impar) y $t^n : R \rightarrow R_{>0}$ (n par) epimorfismos efectivos universales en las categorías $\mathbb{G}$, $\mathbb{F}$ y $\mathbb{L}$?

En su artículo "Forcing smooth square roots and integration", van Quê - Moerdijk - Reyes muestran que esto es cierto para n = 2 y formulan la pregunta 3). Lo sorprendente es que para $n > 2$ esto no es cierto en ningún caso. El capítulo está precedido por una sección o donde recordamos algunos resultados y fijamos la notación.

Sección 0. Sea $I \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^k)$ un ideal cualquiera. Decimos que I es un ideal cerrado si I es un subconjunto cerrado de $C^\infty(\mathbb{R}^k)$ en la topología C^∞-CO (ver 1.10). Con $\bar{\ }$ denotamos el operador de clausura en $C^\infty(\mathbb{R}^k)$. Así, I es cerrado sii $\bar{I} = I$. Siguiendo a Malgrange [10], decimos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ está puntualmente en un ideal $I \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^k)$ sii para cada $\bar{x}_o \in \mathbb{R}^k$ existe $h \in I$ tal que la serie de Taylor de f en $\bar{x}_o$ es igual a la serie de Taylor de h en $\bar{x}_o$, es decir, $T_{\bar{x}_o}(f) = T_{\bar{x}_o}(h)$. El siguiente es un resultado bien conocido.

4.0.1. Teorema: (H. Whitney, ver [10]). *Sea* $I \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^k)$ *un ideal. Una función* f *está puntualmente en* I *sii está en* $\bar{I}$ ∎

Nos conviene para lo que sigue introducir la siguiente notación.

4.0.2. Notación. i) Teniendo en mente 0.11, 0.25 y 0.28 y siendo $I \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^k)$ cualquier ideal, denotamos

$$Cl_{\mathbb{L}}(I) = I,\ Cl_{\mathbb{G}}(I) = \hat{I} \quad (\text{ver } 0.5.i)),\ Cl_{\mathbb{F}}(I) = \bar{I}$$

(también $Cl_{\mathcal{Z}}(I) = I$, $Cl_{\mathcal{G}}(I) = \hat{I}$, $Cl_{\mathcal{F}}(I) = \bar{I}$).
Diremos también que un ideal I es C-cerrado ($C = \mathbb{L}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$ ó $C = \mathcal{Z}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$) si $Cl_C(I) = I$. Así, "ser $\mathbb{G}$ cerrado" signi

fica "ser de caracter local", "ser $\mathbb{F}$ cerrado" significa "ser C^∞-CO cerrado", y "ser $\mathbb{L}$-cerrado" no significa nada: todo ideal es $\mathbb{L}$-cerrado.

Observese que, con esta notación se tiene que el producto cartesiano en la categoría C (C = $\mathbb{L}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{F}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$) está dado por

$$\overline{\frac{C^\infty(\mathbb{R}^k)}{I}} \times \overline{\frac{C^\infty(\mathbb{R}^\ell)}{J}} = \overline{\frac{C^\infty(\mathbb{R}^{k+\ell})}{Cl_C(I(\bar{x},\bar{t}) + J(\bar{t},\bar{x}))}}$$

donde $\bar{x}$ varía sobre $\mathbb{R}^k$ y $\bar{t}$ sobre $\mathbb{R}^\ell$ (ver 0.29).

Otra notación que usaremos es

4.0.3. <u>Notación</u>. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^k$ un conjunto cerrado. Notaremos m_X^∞ al ideal de todas las funciones de $\mathbb{R}^k$ tales que f y todas sus derivadas se anulan en X. Se llama "playa en X" a una tal f. Así, $m_X^\infty = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^k) : f$ es playa en $X \}$.

Recordemos los siguientes lemas

4.0.4. <u>Lema</u>: (ver [16]). *Sea* f_i $(i \in \mathbb{N})$ *una sucesión de funciones de* m_X^∞. *Entonces, existe* $g \in m_X^\infty$, $g > 0$ *en* $\mathbb{R}^k \setminus X$, *tal que para todo* $i \in \mathbb{N}$, $f_i \in g . m_X^\infty$ ■

El siguiente lema no es mas que una versión de un lema bien conocido debido a E. Borel.

4.0.5. <u>Lema</u>: *Dada una serie de potencias* $S \in C^{\infty}(\mathbb{R}^k)[[t]]$, *digamos,* $S(\bar{x},t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \cdot \frac{t^i}{i!}$ *para ciertas* $A_i \in C^{\infty}(\mathbb{R}^k)$, *existen funciones* $\eta_i \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *tales que:*

i) $\eta_i(t) = 1$ *en un entorno de* $t = 0$

ii) η_i *es de soporte compacto*

iii) *La serie* $s(\bar{x},t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(\bar{x})\eta_i(t)\frac{t^i}{i!}$ *converge en la topología* C^{∞}-CO *y, por lo tanto,* $s(\bar{x},t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{k+1})$.

Además $\frac{\partial^{|\alpha|+j} s}{\partial \bar{x}^{\alpha} \, \partial t^j}(\bar{x},0) = \frac{\partial^{|\alpha|} A_j}{\partial \bar{x}^{\alpha}}(\bar{x})$ *para todo multiíndice* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^k$ *y* $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

iv) *Si es necesario (y lo será en* 4.3.2.3) *podemos suponer que las funciones* η_i *son pares, de tal modo que* $s(\bar{x},t)$ *será par en la variable* t *si todos los* A_i *con* i *impar son nulos.*

<u>Demostración</u>: Para $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^k$ considérese la función $B_{\alpha,j}(\bar{x},t) = \frac{\partial^{|\alpha|} A_j}{\partial \bar{x}^{\alpha}}(\bar{x}) \cdot |t|^{j/2}$, la cual es nula para $t = 0$. Por continuidad, dado $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ podemos escoger $\epsilon_j \in \mathbb{R}$, $0 < \epsilon_j < 1$ tal que para todo $(\bar{x},t) \in \mathbb{R}^{k+1}$ con $|\bar{x}| \leq j$ y $-\epsilon_j < t < \epsilon_j$ y para todo $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^k$ con $|\alpha| \leq j$ tengamos $|B_{\alpha,j}(\bar{x},t)| < 1$.

Ahora tomemos una función par $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $\eta([-1/2, 1/2]) = 1$ y $\eta(t) = 0$ para $|t| \geq 1$ y definamos

$\eta_j(t) = \eta(\frac{t}{\epsilon_j})$. Se ve fácilmente que la serie $s(\bar{x},t) =$
$= \sum_{i=0}^{\infty} A_i(\bar{x})\eta_i(t) \frac{t^i}{i!}$ tiene las propiedades requeridas ■

Sección 1

Recordemos ante todo que:

i) Notamos $[0,1] = \dfrac{\overline{C^{\infty}(\mathbb{R})}}{m^{\infty}_{[0,1]}}$ (ver 4.0.3)

ii) $\int_0^1 : R^{[0,1]} \to R$ es la flecha descripta como sigue (ver 0.27.ii)): Sea $f : \dfrac{\overline{C^{\infty}(\mathbb{R}^k)}}{I} \to R^{[0,1]}$. Tal f corresponde a una cierta $[g] \in \dfrac{C^{\infty}(\mathbb{R}^{k+1})}{Cl_C(I(\bar{x},t)+m_{[0,1]}(t,\bar{x}))}$ (si estamos trabajando en el topos C donde $C = G, F, Z$). Entonces se define $\int_0^1 \circ f = \int_0^1 f : \dfrac{\overline{C^{\infty}(\mathbb{R}^k)}}{I} \to R$ como la flecha correspondiente a $[\int_0^1 g(\bar{x},t)dt] \in \dfrac{\overline{C^{\infty}(\mathbb{R}^k)}}{I}$. Esta definición es independiente de la elección de g, como puede verse facilmente.

iii) Llamemos $R_{>0} = \dfrac{\overline{C^{\infty}(\mathbb{R})}}{m^{\infty}_{\mathbb{R}_{>0}}}$. Diremos que una flecha $X \to R$ verifica la fórmula "$f \geq 0$" sii f se factoriza por $R_{>0} \to R$.

iv) Analogamente, una flecha $X \to R^{[0,1]}$ "es ≥ 0" sii f se factoriza por $R^{[0,1]}_{>0} \to R^{[0,1]}$.

En esta sección demostraremos que en el topos C ($C = G, F, Z$) la siguiente fórmula es internamente válida:

(1) $\quad \forall f \in R^{[0,1]}\ [\, f \geq 0 \to \int_0^1 f \geq 0 \,]$

4.1.1. <u>Lema</u>: *La fórmula* (1) *vale internamente en el topos* $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C} = \mathcal{G}, \mathcal{F}$ ó $\mathcal{Z}$) *sii la siguiente condición es satisfecha:*

(1') Para todo ideal C-cerrado $I \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^k)$ $(k \in \mathbb{N})$ y toda $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$ se tiene

"Para toda $\rho \in m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}$, $\rho(f(\bar{x},t)) \in Cl_C(I(\bar{x},t) + m^\infty_{[0,1]}(t,\bar{x}))$" implica que "para toda $\rho \in m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}$, $\rho(\int_0^1 f(\bar{x},t)dt) \in I$".

<u>Demostración</u>: Por 5.17., la validez de la fórmula (1) equivale a $\mathrm{Ext}(f \geqslant 0) \leqslant \mathrm{Ext}(\int_0^1 f \geqslant 0)$. Así que, que la fórmula (1) sea válida en $\mathcal{C}$ quiere decir que para todo k y para todo ideal C-cerrado $I \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^k)$ si una flecha $f : X = \overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^k)}{I}} \to R^{[0,1]}$ se factoriza por $\mathrm{Ext}(f \geqslant 0)$ entonces f se factoriza por $\mathrm{Ext}(\int_0^1 f \geqslant 0)$.

Veamos que esto equivale a (1'). $\mathrm{Ext}(f \geqslant 0) = R_{>0}^{[0,1]}$. Y por otro lado, $\mathrm{Ext}(\int_0^1 f \geqslant 0) = (\int_0^1)^{-1}(R_{>0})$. Así, una flecha f se factoriza por $\mathrm{Ext}(\int_0^1 f \geqslant 0)$ sii $\int_0^1 \circ f$ se factoriza por $R_{>0}$. Por último, una flecha $f : X \to R^{[0,1]}$ se factoriza por $R_{>0}^{[0,1]} \to R^{[0,1]}$ sii su adjunta exponencial $\tilde{f} : X \times [0,1] \to R$ se factoriza por $R_{>0}$. Digamos que $\tilde{f}$ está inducida por $[f] \in \dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})}{Cl_C(I(\bar{x},t) + m^\infty_{[0,1]}(t,\bar{x})}$. Que $\tilde{f}$ se factorice por $R_{>0}$ quiere decir que $[f]$ define un morfismo

$$\frac{C^\infty(\mathbb{R})}{m_{\mathbb{R}_{>0}}} \to \frac{C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})}{Cl_C(I(\bar{x},t) + m^\infty_{[0,1]}(t,\bar{x}))}$$ o, equivalentemente, que para toda $\rho \in m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}$ se tiene $\rho([f]) = 0$ ó, $\rho(f) \in$ $\in Cl_C(I(\bar{x},t) + m^\infty_{[0,1]}(t,\bar{x}))$. Analogamente, $\int_0^1 \circ f$ se factoriza por $R_{>0}$ sii para toda $\rho \in m_{\mathbb{R}_{>0}}$ $\rho(\int_0^1 f(\bar{x},t)dt) \in I$ ∎

4.1.2. <u>Teorema</u>: *La condición* (1') *es siempre satisfecha y, por lo tanto* (1) *es válida internamente* ($C = Z$, G, F).

Para demostrar 4.1.2. necesitamos los lemas siguientes:

4.1.3. <u>Lema</u>: *Sea* f_i ($i \in \mathbb{N}$) *una sucesión de elementos de* $m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}$. *Entonces, existe* $\varphi \in m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}$ *tal que*

i) $\varphi(t) > 0$ *para* $t < 0$, $\varphi'(t) < 0$ *para* $t < 0$, $\varphi''(t) > 0$ *para* $t < 0$.

ii) *para todo* $i \in \mathbb{N}$, $f_i \in \varphi \cdot m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}$.

<u>Demostración</u>: Para cada $\ell, m, i \in \mathbb{N}$ escribamos $\frac{d^\ell f_i}{dt^\ell}$ como un producto de m funciones $P_j^{\ell,m,i} \in m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}$ ($i \leqslant j \leqslant m$) (esto puede hacerse por 4.0.4). También por 4.0.4, podemos encontrar una $\psi \in m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}$, $\psi(t) > 0$ para $t < 0$ tal que para todo ℓ, m, i, j se tenga $\frac{d^2 P_j^{\ell,m,i}}{dt^2} \in \psi \cdot m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}$. Ahora llamemos $\varphi(t) = \int_0^t (\int_0^u \psi(w)dw)du$. Esta φ verifica el pun

to i). Para ver que φ verifica ii) llamemos

$$g_i(t) = \begin{cases} \dfrac{f_i(t)}{\varphi(t)} & \text{para } t<0 \\ 0 & \text{para } t\geq 0 \end{cases}$$

Tenemos que demostrar que $g_i \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Basta demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{f_i(t)}{\varphi(t)}\right) = 0$$

Esta derivada es una suma de términos de la forma $\dfrac{f_i^{(\ell)}(t).\varphi^{(r)}(t)}{\varphi^s(t)}$, y este término es igual a $\prod_{j=1}^{s}\left(\dfrac{P_j^{\ell,s,i}(t)}{\varphi(t)}\right).\varphi^{(r)}(t)$. Ahora, cada uno de los cocientes $P_j^{\ell,s,i}/\varphi$ tiende a cero cuando $t\to 0$, como se sigue de dos aplicaciones de la regla de L'hospital ■

El lema siguiente es bien conocido

4.1.4. <u>Lema</u>: *Sea* $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ *una función tal que* $\varphi'' \geq 0$, *y (digamos),* $f \in C^0([0,1])$. *Entonces* $\varphi\left(\int_0^1 f(t)dt\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(t))dt$ ■

Demostración del teorema 4.1.2. Tomemos $\rho \in m^{\infty}_{\mathbb{R}_{>0}}$ y, para cada $m \in \mathbb{N}$ escribamos ρ y cada una de sus derivadas como un producto de m funciones de $m^{\infty}_{\mathbb{R}_{>0}}$, digamos $\rho^{(\ell)}(t) = \prod_{j=1}^{m} P_j^{\ell,m}$. Por 4.1.3. podemos elegir $\varphi \in {}^{\infty}_{\mathbb{R}_{>0}}$ que verifica el punto i) de 4.1.3 y tal que para todo ℓ,m,j, $P_j^{\ell,m} \in \varphi \cdot m^{\infty}_{\mathbb{R}_{>0}}$.

Definimos $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ por

$$h(\bar{x}) = \begin{cases} \dfrac{\rho\left(\int_0^1 f(\bar{x},t)\,dt\right)}{\int_0^1 \varphi(f(\bar{x},t))\,dt} & \text{si} \quad \int_0^1 f(\bar{x},t)\,dt < 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(Nótese que $\int_0^1 f(\bar{x},t)\,dt < 0$ implica $\int_0^1 \varphi(f(\bar{x},t))\,dt > 0$).

Afirmamos que $h \in C^{\infty}(\mathbb{R}^k)$. Para ver esto probamos el siguiente sublema

Sublema: *Si* $\bar{x}_j \to \bar{x}_o$ *cuando* $j \to \infty$, $\int_0^1 f(\bar{x}_j,t)\,dt < 0$ *y* $\int_0^1 f(\bar{x}_o,t)\,dt = 0$ *entonces* $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \left(\dfrac{\rho\left(\int_o^1 f(\bar{x}_j,t)\,dt\right)}{\int_0^1 \varphi(f(\bar{x}_j,t))\,dt} \right)$ *tiende a cero cuando* $j \to \infty$.

Demostración: La derivada que estamos considerando es igual a una suma de cocientes de la forma

$$\frac{\rho^{(\ell)}(\int_0^1 f(\bar{x}_j,t)dt).A(\bar{x}_j)}{(\int_0^1 \varphi(f(\bar{x}_j,t))\ dt)^m}$$

para cierta función $A \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$. El valor absoluto de este cociente es, por el lema 4.1.4, menor o igual que

$$\frac{|\rho^{(\ell)}(\int_0^1 f(\bar{x}_j,t)dt)|.|A(\bar{x}_j)|}{[\ \varphi(\int_0^1 f(\bar{x}_j,t)dt)]^m}$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \left| \frac{P_i^{\ell,m}\ (\int_0^1 f(\bar{x}_j,t)dt)}{\varphi(\int_0^1 f(\bar{x}_j,t)dt)} \right| .|A(\bar{x}_j)|$$

que tiende a cero dado que $\int_0^1 f(\bar{x}_j,t)dt$ tiende a cero ∎

Volvamos a la demostración de 4.1.2. Teníamos que probar que $h \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$. Pero sabemos que h es C^∞ en $G = \{\bar{x} : \int_0^1 f(\bar{x},t) < 0\}$ y, por el sublema, cualquier derivada de h tiende a cero cuando $\bar{x} \in G$ tiende a un punto de G^c. Esto muestra que $h \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$. Ahora, de la definición de h se sigue que $\rho(\int_0^1 f(\bar{x},t)dt) = h(\bar{x}). \int_0^1 \varphi(f(\bar{x},t))dt$.

Y, por hipótesis, sabemos que $\varphi(f(\bar{x},t)) \in \mathcal{Cl}_C(I(\bar{x},t) + m^\infty_{[0,1]}(t,\bar{x}))$ (en cada caso $C = \mathcal{G}, \mathcal{F}$ ó $\mathcal{Z}$). La demostración termina facilmente

a) $C = \mathcal{Z}$: $\varphi(f(\bar{x},t)) = \sum_j A_j(\bar{x},t)h_j(\bar{x}) + \sum_i B_j(\bar{x},t)m_j(t)$

para ciertas $h_j \in I$, $m_j \in m^{\infty}_{[0,1]}$. Entonces

$$\int_0^1 \varphi(f(\bar{x},t))dt = \sum_j h_j(\bar{x}) \int_0^1 A_j(\bar{x},t)dt \in I$$

y, en consecuencia, $\rho(\int_0^1 f(\bar{x},t)dt) \in I$.

b) $C = G$: En este caso se supone que el ideal I es de caracter local, y nuestras hipótesis dicen que $\varphi(f(\bar{x},t))$ es localmente una combinación lineal de elementos de I y elementos de $m^{\infty}_{[0,1]}$. Por compacidad del intervalo real $[0,1]$ y usando una partición de la unidad adecuada, vemos que para todo $\bar{x}_o \in \mathbb{R}^k$, existe un entorno U de $\bar{x}_o$ en $\mathbb{R}^k$ y funciones $A_j, B_j \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{k+1})$, $h_j \in I$ y $m_j \in m^{\infty}_{[0,1]}$ tales que en $U \times [0,1]$ tenemos $\varphi(f(\bar{x},t)) = \sum_j A_j(\bar{x},t)h_j(\bar{x}) +$
$+ \sum_j B_j(\bar{x},t)m_j(t)$. Entonces, para $\bar{x} \in U$ tenemos

$$\int_0^1 \varphi(f(\bar{x},t))dt = \sum_j h_j(\bar{x}) \int_0^1 A_j(\bar{x},t)dt \in I,$$

i.e., $\int_0^1 \varphi(f(\bar{x},t))dt$ está localmente en I y, por lo tanto, está en I ya que I es de caracter local. Nuevamente, se sigue que

$$\rho(\int_0^1 f(\bar{x},t)dt) \in I.$$

c) $C = F$: Similar a a) y b).

Esto termina la demostración de 4.1.2. ■

Section 2.

En esta sección mostramos que la siguiente fórmula es internamente válida en el topos C ($C = \mathcal{Z}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$)

$$(2)\quad \forall f \in R^R \; [(f|_{R_{>0}} = 0 \wedge f|_{R_{<0}} = 0) \rightarrow f = 0]$$

(donde $R_{>0} = \overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R})}{m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}}}$ y $R_{<0} = \overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R})}{m^\infty_{\mathbb{R}_{<0}}}}$)

4.2.1. **Lema**: *La fórmula (2) es internamente válida en el topos C ($C = \mathcal{Z}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$) sii se verifica la siguiente condición:*

(2') *Para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y para todo ideal* C*-cerrado* $I \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^k)$,

$$Cl_C(I(\bar{x},t) + m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}(t,\bar{x})) \cap Cl_C(I(\bar{x},t) + m^\infty_{\mathbb{R}_{<0}}(t,\bar{x})) =$$
$$= Cl_C(I(\bar{x},t)).$$

Demostración. Por 5.17., que la fórmula (2) valga internamente significa que

$$\mathrm{Ext}(f|_{R_{>0}} = 0) \wedge \mathrm{Ext}(f|_{R_{<0}} = 0) \leqslant \mathrm{Ext}(f = 0)$$

o, equivalentemente que para todo objeto del tipo $X = \overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^k)}{I}}$

(I ideal C-cerrado) y toda flecha $f : X \to R^R$, si f se factoriza por $\mathrm{Ext}(f|_{R_{>0}} = 0)$ y por $\mathrm{Ext}(f|_{R_{<0}} = 0)$ entonces f es la flecha nula. Estudiemos pues, que quiere decir que f se factorice por $\mathrm{Ext}(f|_{R_{>0}} = 0)$. Para esto debemos recordar que el morfismo de restricción $r : R^R \to R^{R_{>0}}$ está definido por la siguiente regla (ver 0.27.ii)): a la flecha $f : X \to R^R$ (que estará dada por un cierto elemento $[f] \in \dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})}{Cl_C(I(\bar{x},t)}$) le asigna la flecha $f_\circ r : X \to R^{R_{>0}}$ dada por el elemento $[f]' \in \dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})}{Cl_C(I(\bar{x},t)+m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}(t,\bar{x}))}$. Así, que f se factorize por $\mathrm{Ext}(f|_{R_{>0}} = 0)$ quiere decir que $[f]'=0$ o sea, $f \in Cl_C(I(\bar{x},t)+m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}(t,\bar{x}))$. Análogamente, que f se factorice por $\mathrm{Ext}(f|_{R_{<0}} = 0)$ quiere decir que $f \in Cl_C(I(\bar{x},t) + m^\infty_{\mathbb{R}_{<0}}(t,\bar{x})$.

Y, que f sea la flecha nula, quiere decir que $f \in Cl_C(I(\bar{x},t))$. Así, hemos visto que la fórmula (2) vale internamente sii

$$Cl_C(I(\bar{x},t)+m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}(t,\bar{x})) \cap Cl_C(I(\bar{x},t) + m_{\mathbb{R}_{<0}}(t,\bar{x})) \subseteq$$

$$\subseteq Cl_C(I(\bar{x},t) \text{ . La otra inclusión es trivial } \blacksquare$$

4.2.2. <u>Teorema</u>: *La condición* (2') *es válida en todo caso* (C = *G, F, Z*) *y, por lo tanto, la fórmula* (2) *es válida in-*

ternamente en los topos G, F, Z.

Demostración: Primero mostramos que se verifica (2') en el caso $C = Z$, i.e., $(I(\bar{x},t) + m^{\infty}_{\mathbb{R}_{>0}}(t,\bar{x})) \cap (I(\bar{x},t) + m^{\infty}_{\mathbb{R}_{<0}}(t,\bar{x})) = I(\bar{x},t)$. La inclusión $\supseteq$ es obvia. Para probar la inclusión recíproca, tomemos $f(\bar{x},t) \in (I(\bar{x},t) + m^{\infty}_{\mathbb{R}_{>0}}(t,x)) \cap$ $\cap (I(\bar{x},t) + m^{\infty}_{\mathbb{R}_{<0}}(t,\bar{x}))$. Esto significa que existen funciones $\varphi_i \in I$ $(1 \leq i \leq n)$, $\varphi_j \in I$ $(n+1 \leq j \leq m)$, $\rho_1 \in m^{\infty}_{\mathbb{R}_{>0}}(t,\bar{x})$, $\rho_2 \in m^{\infty}_{\mathbb{R}_{<0}}(t,\bar{x})$ y $A_i \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{k+1})$, $(1 \leq i \leq n)$, $A_j \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{k+1})$ $(n+1 \leq j \leq m)$ tales que $f(\bar{x},t) = \sum_{i=1}^{n} (-A_i(\bar{x},t))\varphi_i(\bar{x}) + \rho_1(t,\bar{x}) = \sum_{j=n+1}^{m} A_j(\bar{x},t)\varphi_j(\bar{x}) + \rho_2(t,\bar{x})$.

(Hemos puesto $-A_i$ en la primera suma por conveniencia en las notaciones que siguen). Entonces

$$\text{(a)} \qquad \rho_1 - \rho_2 = \sum_{i=1}^{m} A_i(\bar{x},t)\varphi_i(\bar{x}) \in I(\bar{x},t)$$

Basta que demostremos que $\rho_1 \in I(\bar{x},t)$.

Consideremos la serie formal $S_i(\bar{x},t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial^j A_i}{\partial t^j}(\bar{x},0)\, \frac{t^j}{j!} \in$ $\in C^{\infty}(\mathbb{R}^k)[[t]]$. Por el lema 4.0.5., podemos elegir funciones $\eta_j(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tales que, para todo i, $1 \leq i \leq m$, las series $s_i(\bar{x},t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial^j A_i(\bar{x},0)}{\partial t^j} \cdot \eta_j(t) \cdot \frac{t^j}{j!}$ convergen en la topología C^{∞}-CO y, por lo tanto, $s_i(\bar{x},t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{k+1})$. Además, pa ra todo α , j, $\dfrac{\partial^{|\alpha|+j} s_i}{\partial t^j \partial \bar{x}^\alpha}(\bar{x},0) = \dfrac{\partial^{|\alpha|+j} A_i}{\partial t^j \partial \bar{x}^\alpha}(\bar{x},0)$.

(En realidad, el lema 4.0.5 fue probado para una sola serie S. Pero se ve fácilmente de la demostración de 4.0.5. que si tenemos un número finito de series S_i $(1 \leq i \leq m)$, las funciones η_j se pueden elegir de tal manera que sirvan para todos los S_i). Nótese ahora lo siguiente:

i) $\sum_{i=0}^{m} s_i(\bar{x},t)\varphi_i(\bar{x}) = 0$

ii) $A_i(\bar{x},t) - s_i(\bar{x},t)$ es playa en $\{t = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$.

El punto ii) es inmediato de lo que venimos de hacer. Para ver que se verifica el punto i), notemos primero que de (a) se sigue que

$$0 = \frac{\partial^j}{\partial t^j}(\rho_1-\rho_2)(\bar{x},0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^j}{\partial t^j} A_i(\bar{x},0)\varphi_i(\bar{x}) \ ,$$

entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^t A_i}{\partial t^j}(\bar{x},0)\, \frac{t^j}{j!}\, \eta_j(t)\varphi_i(\bar{x}) = 0$

y por lo tanto $\displaystyle 0 = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^j}{\partial t^j} A_i(\bar{x},0)\, \frac{t^j}{j!}\, \eta_j(t).\varphi_i(\bar{x})\right) =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial^j A_i}{\partial t^j}(\bar{x},0)\, \frac{t^j}{j!}\, \eta_j(t)\right).\varphi_i(\bar{x}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(\bar{x})\ s_i(\bar{x},t)$$

De los puntos i) y ii) se sigue el resultado: de (a), e i) se sigue que $\rho_1-\rho_2 = \sum_{i=1}^{m} (A_i(\bar{x},t)-s_i(\bar{x},t))\varphi_i(\bar{x})$. Consideremos ahora la función de Heavyside

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

Tenemos: $\rho_1(t,\bar{x}) = H(t)(\rho_1(t,\bar{x})-\rho_2(t,\bar{x})) =$

$$= \sum_{i=1}^{m} H(t)(A_i(\bar{x},t)-s_i(\bar{x},t))\varphi_i(\bar{x})$$

Para ver que $\rho_1(\bar{x},t) \in I(\bar{x},t)$ basta demostrar ahora que $H(t).(A_i(\bar{x},t)-s_i(\bar{x},t)) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{k+1})$. Esto es consecuencia directa de ii). Esto termina la demostración en el caso $C = \mathcal{Z}$. El caso $C = \mathcal{G}$ se sigue fácilmente del anterior dado que el operador de clausura de naturaleza local preserva intersecciones finitas. La demostración en el caso $C = \mathcal{F}$ sigue facilmente del teorema de Whitney 4.0.1 ∎

Sección 3.

En esta sección probamos que las flechas $t^n : R \to R$ (n impar) y $t^n : R \to R_{>0}$ (n par, $n > 2$) no son epimorfismos efectivos universales en ninguna de las categorías $\mathbb{L}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$.

Como dijimos en la introducción de este capítulo, esta pregunta fue contestada afirmativamente en el caso $n = 2$ (ver [11]).

Recordemos que $t^n : R \to R$ (n impar) es la flecha correspondiente al morfismo de evaluación en $t^n \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si n es par, la flecha $t^n : R \to R_{>0}$ es también la flecha inducida por el morfismo $\varphi : \dfrac{C^\infty(\mathbb{R})}{m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}} \to C^\infty(\mathbb{R})$ de evaluación en t^n.
Nótese que φ está bien definido en el caso n par dado que si $\varphi \in m^\infty_{\mathbb{R}_{>0}}$ entonces $\varphi(t^n) = 0$.

4.3.1. Lema: (Ver [11]) a) *Sea* n *un natural impar. Entonces,* $t^n : R \to R$ *sería un epimorfismo efectivo universal (ver 0.17) en* C $(C = \mathbb{L}, \mathbb{F}, \mathbb{G})$ *sii para cada* $k \in \mathbb{N}$, *cada ideal* C-*cerrado* I *y cada* $g \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ *se tuviera que:*

i) *para toda* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$, $f(\bar{x},t) - f(\bar{x},s) \in$
$\in Cl_C(I(\bar{x},t,s) + (g(\bar{x}) - t^n) + (t^n - s^n))$ *implica que existe* $h \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ *tal que* $f(\bar{x},t) - h(\bar{x}) \in Cl_C(I(\bar{x},t)+(g(\bar{x})-t^n))$

ii) $h(\bar{x}) \in Cl_C(I(\bar{x},t) + (g(\bar{x}) - t^n))$ *implica* $h(\bar{x}) \in I$.

b) *Sea* n *un natural par. Entonces,* $t^n : R \to R_{>0}$ *sería* *un epimorfismo efectivo universal en* C $(C = \mathbb{L}, \mathbb{F}, \mathbb{G})$ *sii para cada* $k \in \mathbb{N}$, *cada ideal* C-*cerrado* I *y cada* $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^k)$ *tal que para toda* $\rho \in m^{\infty}_{\mathbb{R}_{>0}}$, $\rho(g(\bar{x})) \in I$ *tuviéramos que los dos puntos* i) *y* ii) *de* a) *se satisfacen.*

<u>Demostración</u>: Demostramos solamente b). El punto a) puede demostrarse paso por paso de la misma manera excepto por una pequeña y obvia modificación.

Sea $g : \bar{A} \to R_{>0}$ una flecha en C $(C = \mathbb{L}, \mathbb{G}$ ó $\mathbb{F})$ donde $A = \dfrac{C^{\infty}(\mathbb{R}^k)}{I}$. Obsérvese que necesariamente debe tenerse que $\rho(g(\bar{x})) \in I$ para toda $\rho \in m^{\infty}_{\mathbb{R}_{>0}}$ (he aquí la única diferencia con el caso n impar). Consideremos el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} \bar{A} \arrow[r, dashed, "g"] & R_{>0} \\ \bar{B} \arrow[u, dashed, "\pi_{\bar{x}}"] \arrow[r, dashed, "\pi_t"'] & R \arrow[u, dashed, "t^n"'] \end{tikzcd}$$

donde $B = \dfrac{C^{\infty}(\mathbb{R}^{k+1})}{Cl_C(I(\bar{x},t) + (g(\bar{x}) - t^n))}$. Debemos demostrar (ver 0.17) que cualquiera sea $\bar{H} \in C$ y $f : \bar{B} \to \bar{H}$, si $f_\circ p_1 = f_\circ p_2$, entonces existe una única h tal que $h_\circ \pi_{\bar{x}} = f$ (donde p_1 y p_2 son las proyecciones del producto fibrado $\bar{B} \times_{\bar{A}} \bar{B}$)

(1)
$$\begin{tikzcd}
\bar{B} \times_{\bar{A}} \bar{B} \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] \arrow[dr] & \bar{B} \arrow[r, dashed, "\pi_{\bar{x}}"] \arrow[d, dashed, "f"] & \bar{A} \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& \bar{H} &
\end{tikzcd}$$

Puede suponerse que $H = C^\infty(\mathbb{R})$ (En fecto, supongamos ciertas la existencia y la unicidad para $H = C^\infty(\mathbb{R})$ y tomemos $H = \dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^m)}{K}$. Se tiene que $\bar{H} \overset{i}{\rightarrowtail} R^m$. Es claro que el siguiente diagrama se completa de manera única

$$\begin{tikzcd}
\bar{B} \arrow[r, dashed, "\pi_x"] \arrow[d, dashed, "f"'] & \bar{A} \arrow[ddl, dashed, "h"] \\
\bar{H} \arrow[d, tail, dashed, "i"'] & \\
R^m &
\end{tikzcd}$$

Debemos pues verificar que h factoriza por $\bar{H}$, es decir, que para toda $q \in K$, $q \circ (h_1, \ldots, h_m) \in I$ (si h está dada por "evaluación en $(h_1, \ldots, h_m)$"). Ahora, sabemos que el siguiente diagrama también se completa con unicidad, cualquiera sea $q \in K$

$$\begin{tikzcd}
\bar{B} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "f"'] & \bar{A} \arrow[dddl, "\ell"] \\
\bar{H} \arrow[d, tail, "i"'] & \\
R^m \arrow[d, "q"'] & \\
R &
\end{tikzcd}$$

Pero, claramente $q \circ h$ también hace conmutativo el diagrama anterior. Así que $\ell = q \circ h$. Por otro lado, $q \circ i \circ f = 0$, así que la flecha $0 : \bar{A} \to R$ (dada por evaluación en 0) también hace conmutativo el diagrama anterior. Entonces, por unicidad, $0 = q \circ h$, ó, en otras palabras, $q(h_1, \ldots, h_n) \in I$. Esto dice que h se factoriza por $\bar{H}$. Como i es un monomorfismo, deducimos la existencia y unicidad). Ahora bien

como $\bar{B} \times_{\bar{A}} \bar{B} = \dfrac{\overline{C^\infty(R^{k+2})}}{Cl_C(I(\bar{x},t,s) + (g(\bar{x})-t^n) + (t^n-s^n))}$, la existencia de h puede ser formulada como:

$$\text{"}f(\bar{x},t)-f(\bar{x},s) \in Cl_C(I(\bar{x},t,s)+(g(\bar{x})-t^n)+(t^n-s^n))\text{"}$$

implica que "existe $h(\bar{x})$ tal que $f(\bar{x},t)-h(\bar{x}) \in Cl_C(I(\bar{x},t) + (g(\bar{x})-t^n))$".

Con respecto a la unicidad, quiere decir que si h y h' hacen conmutativo el diagrama (1), es decir, si $f(\bar{x},t) - h(\bar{x}) \in Cl_C(I(\bar{x},t)+(g(\bar{x})-t^n))$ y $f(\bar{x},t)-h'(\bar{x}) \in Cl_C(I(\bar{x},t) + (g(\bar{x})-t^n)) \Rightarrow h-h' \in I$. Se ve fácilmente que, que esto valga para toda f,h,h' es equivalente a que valga para $f=0$, $h \in C^\infty(R^k)$ y $h'=0$, es decir, $h(\bar{x}) \in Cl_C(I(\bar{x},t)+(g(\bar{x})-t^n))$ implica $h \in I$ ∎

Observación: Supongamos que la función $g(\bar{x})$ del lema 4.3.1. es tal que $(g(\bar{x}))^{1/n}$ está bien definida y es C^∞.

Entonces las condiciones i) y ii) se verifican trivialmente.

<u>Observación</u>. Nótese que el punto i) en 4.3.1. está relacionado con cierta existencia mientras que el punto ii) está relacionado con cierta unicidad. En cada una de las categorías $\mathbb{G}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{L}$ uno de ellos es cierto y el otro no. El teorema siguiente resume la situación.

4.3.2. <u>Teorema</u>: <u>La existencia</u>; *es decir, el punto* i) *en el lema* 4.3.1 *(en ambos casos,* n *par y* n *impar) es válida en las categorías* $C = \mathbb{L}$ *y* $C = \mathbb{G}$ *pero no lo es en la categoría* $C = \mathbb{F}$ *si* $n > 2$

<u>La unicidad</u>; *es decir, el punto* ii) *en el lema* 4.3.1 *(en ambos casos,* n *par y* n *impar) es válida en la categoría* $C = \mathbb{F}$ *pero no lo es en las categorías* $C = \mathbb{L}$ *y* $C = \mathbb{G}$ *si* $n > 2$.

Dividimos la demostración de 4.3.2. en cinco partes: de 4.3.2.1 a 4.3.2.5.

4.3.2.1. <u>Demostración de que la existencia es válida para $C = \mathbb{L}$ en ambos casos n par y n impar</u>.

Sea I un ideal y $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^k)$ (si n es par, nuestras hipótesis nos permiten tomar $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^k)$ tal que para toda $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ $\rho(g(\bar{x})) \in I$, pero esto no es necesario en esta demostración). Tomemos $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{k+1})$ tal que $f(\bar{x},t) - f(\bar{x},s)$

$\in (I(\bar{x},t,s) + (g(\bar{x})-t^n) + (t^n-s^n))$. Esto significa que existe $r\in\mathbb{N}$ y funciones $a_j(\bar{x},t,s)\in C^\infty(\mathbb{R}^{k+2})$ $\varphi_j\in I$ $(1\leqslant j\leqslant r)$, $b(\bar{x},t,s)$, $c(\bar{x},t,s)\in C^\infty(\mathbb{R}^{k+2})$ tales que $f(\bar{x},t) - f(\bar{x},s) = $
$= \sum_{j=1}^{r} a_j(\bar{x},t,s)\varphi_j(\bar{x}) + b(\bar{x},t,s)(g(\bar{x})-t^n) + c(\bar{x},t,s)(t^n-s^n)$.
Llamemos T_s al morfismo de anillos "desarrollo en serie de Taylor en la variable s en $s = 0$", $T_s : C^\infty(\mathbb{R}^{k+1}) \to$ $\to C^\infty(\mathbb{R}^k)[[s]]$. Análogamente, $T_{t,s}$ es el morfismo "desarrollo en serie en $t = 0$, $s = 0$" y T_t es "desarrollo en serie en $t = 0$". Aplicando $T_{t,s}$ a la igualdad anterior deducimos que, en el anillo $C^\infty(\mathbb{R}^k)[[t,s]]$ se tiene

$$(T_tf)(\bar{x},t)-(T_sf)(\bar{x},s) = \sum_{j=1}^{r}(T_{t,s}a_j)(\bar{x},t,s)\varphi_j(\bar{x}) +$$

$$+ (T_{t,s}b)(\bar{x},t,s).(g(\bar{x})-t^n) + (T_{t,s}c)(\bar{x},t,s).(t^n-s^n).$$

Sea ω una raiz n-ésima de la unidad en $\mathbb{C}$.

Podemos evaluar ambos lados de esta igualdad en $s = \omega t$. Obtenemos la igualdad

$$(1)\quad \begin{aligned}(T_tf)(\bar{x},t)-(T_sf)(\bar{x},\omega t) &= \sum_{j=1}^{r}(T_{t,s}a_j)(\bar{x},t,\omega t).\varphi_j(\bar{x}) +\\ &+ (T_{t,s}b)(\bar{x},t,\omega t) . (g(\bar{x})-t^n).\end{aligned}$$

Necesitamos ahora el siguiente hecho bien conocido

4.3.3. Hecho: Sea G_n el grupo de raíces n-ésimas de la unidad en $\mathbb{C}$. Sea $j \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\sum_{\omega \in \mathbb{G}_n} \omega^j = \begin{cases} n & \text{si} \quad n/j \\ 0 & \text{si} \quad n \not/ j \end{cases} \quad \blacksquare$$

Se sigue que:

a) La serie $\frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{G}_n} (T_s f)(\bar{x}, \omega t)$ es igual a $S(\bar{x}, t^n) \in$ $\in C^\infty(\mathbb{R}^k)[[t]]$ para cierta $S \in C^\infty(\mathbb{R}^k)[[t]]$. ($S$ tiene funciones a valores reales como coeficientes).

b) Las series

$$K_j(\bar{x}, t) = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{G}_n} (T_{t,s} a_j)(\bar{x}, t, \omega t)$$

y

$$L(\bar{x}, t) = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{G}_n} (T_{t,s} b)(\bar{x}, t, \omega t)$$

tiene funciones de valores reales por coeficientes, i.e, están en $C^\infty(\mathbb{R}^k)[[t]]$.

Así que, sumando miembros de (1) sobre toda $\omega \in \mathbb{G}_n$ y dividiendo por n obtenemos

$$(2) \quad \begin{aligned} (T_t f)(\bar{x}, t) - S(\bar{x}, t^n) &= \sum_{j=1}^{r} K_j(\bar{x}, t) \varphi_j(\bar{x}) \\ &+ L(\bar{x}, t) \,.\, (g(\bar{x}) - t^n). \end{aligned}$$

Por 4.0.5., podemos elegir funciones s, k_j, $\ell \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{k+1})$ tales que

$$(3) \qquad (T_t s)(\bar{x},t) = S(\bar{x},t) \ , \quad (T_t k_j)(\bar{x},t) = K_j(\bar{x},t),$$

$$(T_t \ell)(\bar{x},t) = L(\bar{x},t).$$

En vista de (2) y (3), la función

$$(4) \qquad \begin{aligned} P(\bar{x},t) = f(\bar{x},t) - s(\bar{x},t^n) - \sum_{j=1}^{r} k_j(\bar{x},t)\varphi_j(\bar{x}) - \\ - \ell(\bar{x},t)\ (g(\bar{x})-t^n) \end{aligned}$$

es playa en $\{t = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$.

Consideramos ahora dos casos dependiendo de la paridad de n.

<u>n impar</u>) Siendo n impar y p playa en t = 0, la función $q(\bar{x},t) = p(\bar{x},t^{1/n})$ es C^{∞}. Entonces, llamando $d(\bar{x},t) = s(\bar{x},t) + q(\bar{x},t)$, obtenemos de (4)

$$f(\bar{x},t) - d(\bar{x},t^n) \in (I(\bar{x},t) + (g(\bar{x})-t^n))$$

Se deduce ahora de 1.7. que la función $h(\bar{x}) = d(\bar{x},g(\bar{x}))$ es tal que $f(\bar{x},t) - h(\bar{x}) \in (I(\bar{x},t) + (g(\bar{x})-t^n))$.

<u>n par</u>) De (4) obtenemos

$$\frac{p(\bar{x},t)+p(\bar{x},-t)}{2} = \frac{f(\bar{x},t)+f(x,-t)}{2} -$$

(5)

$$- \sum_{j=1}^{r} \frac{k_j(\bar{x},t)+k_j(\bar{x},-t)}{2} \varphi_j(\bar{x}) - \left(\frac{\ell(\bar{x},t)+\ell(\bar{x},-t)}{2}\right)(g(x)-t^n)$$

$$- s(x,t^n).$$

Llamemos $p_o(\bar{x},t) = \frac{p(\bar{x},t)+p(\bar{x},-t)}{2}$. La función $q(\bar{x},t) =$ $= p_o(\bar{x},|t|^{1/n})$ es C^∞ dado que p_o es playa en $t = 0$; y como p_o es una función par, $q(\bar{x},t^n) = p_o(\bar{x},t)$. Llamando $d(\bar{x},t) = s(\bar{x},t)+q(\bar{x},t)$, se sigue de (5) que

$$\frac{f(\bar{x},t)+f(\bar{x},-t)}{2} - d(\bar{x},t^n) \in (I(\bar{x},t)+(g(\bar{x})-t^n)).$$

Sea $h(\bar{x}) = d(x,g(\bar{x}))$. De la misma manera que en el caso n impar, se sigue que

$$\frac{f(\bar{x},t)+f(\bar{x},-t)}{2} - h(\bar{x}) \in (I(\bar{x},t)+(g(\bar{x})-t^n)$$

Pero ahora, siendo n par, sigue de nuestras hipótesis (poniendo $s = -t$) que

$$\frac{f(\bar{x},t)-f(\bar{x},-t)}{2} \in (I(\bar{x},t)+(g(x)-t^n)$$

Esto termina la demostración de 4.3.2.1.

4.3.2.2. Demostración de que la existencia es válida para $C = \mathbb{G}$.

Sea I un ideal de caracter local y $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^k)$. Tomemos $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{k+1})$ tal que $f(\bar{x},t) - f(\bar{x},s) \in Cl_{\mathbb{G}}(I(\bar{x},t,s) + (g(\bar{x}) - t^n) + (t^n-s^n))$.

Afirmación 1. *Sea* $(x_o,t_o) \in Z\ (I(\bar{x},t)+(g(\bar{x})-t^n))$. *Entonces, existe un entorno* $W_{\bar{x}_o,t_o}$ *de* $(\bar{x}_o,t_o)$ *en* $\mathbb{R}^{k+1}$ *y* $\ell_{\bar{x}_o,t_o}(\bar{x}) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^k)$ *tal que existe una función* $\psi_{\bar{x}_o,t_o}(\bar{x},t) \in (I(\bar{x},t) + (g(\bar{x})-t^n))$ *que, para* $(\bar{x},t) \in W_{(\bar{x}_o,t_o)}$*, es igual a* $f(\bar{x},t) - \ell_{\bar{x}_o,t_o}(\bar{x})$.

Demostración de 1: Caso $g(\bar{x}_o) \neq 0$. En este caso, tenemos que la función $\overline{g(\bar{x})^{1/n}}$ está definida y es C^{∞} en un entorno de $\bar{x} = \bar{x}_o$. (Nótese que si n es par las condiciones $g(\bar{x}_o) \neq 0$ y $(\bar{x}_o,t_o) \in Z(I(\bar{x},t) + (g(\bar{x})-t^n))$ implican $g(\bar{x}_o) > 0$). El resultado es pues, inmediato.

Caso $g(\bar{x}_o) = 0$. La demostración de 1 en este caso es exactamente la misma que la demostración de 4.3.2.1, empezando esta vez con la igualdad $f(\bar{x},t)-f(\bar{x},s) = \sum_{j=1}^{r} a_j(\bar{x},t,s).\varphi_j(\bar{x}) + b(\bar{x},t,s)(g(\bar{x})-t^n) + c(\bar{x},t,s).(t^n-s^n)$ en un entorno de $(\bar{x}_o,0,0)$ en vez de todo $\mathbb{R}^{k+2}$.

Afirmación 2. *Si* n *es impar, para cada* $\bar{x}_o \in Z(I)$ *existe exactamente un* $t_o \in \mathbb{R}$ *tal que* $(\bar{x}_o, t_o) \in Z(I(\bar{x},t)+(g(\bar{x})-t^n))$: $t_o = \sqrt[n]{g(\bar{x}_o)}$. *Si* n *es par y* $\bar{x}_o \in Z(I)$ *es tal que* $g(\bar{x}_o) > 0$ *hay dos* t_o's : $t_o = \pm\sqrt[n]{g(\bar{x}_o)}$. *En este caso,* $W_{\bar{x}_o, t_o}$, $W_{\bar{x}_o, -t_o}$, $\ell_{\bar{x}_o, t_o}$ *y* $\ell_{\bar{x}_o, -t_o}$ *pueden elegirse de tal manera que* $\ell_{\bar{x}_o, t_o} = \ell_{\bar{x}_o, -t_o}$, *digamos* $\ell_{\bar{x}_o, t_o} = h_{\bar{x}_o}$, $W_{\bar{x}_o, t_o} \subseteq R^k \times R_{>0}$, $W_{\bar{x}_o, t_o} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_{<0}$ *y que* $f(\bar{x},t) - h_{\bar{x}_o}(x)$ *sea igual a un elemento de* $(I(\bar{x},t)+(g(\bar{x})-t^n)$ *en* $W_{\bar{x}_o, t_o} \cup W_{\bar{x}_o, t_o}$.

Demostración de 2: La única afirmación no trivial es que, en el caso n par, se puede elegir $\ell_{\bar{x}_o, t_o} = \ell_{\bar{x}_o, -t_o}$. Tómese pues, n par, los dos pares $(\bar{x}_o, t_o)$, $(\bar{x}_o, -t_o) \in Z(I(\bar{x},t) + (g(\bar{x})-t^n))$ $(t_o > 0)$, y consideremos la función $\ell_{\bar{x}_o, t_o}$ dada por 1, y definida en $W_{\bar{x}_o, t_o}$. Poniendo $s = -t$ en nuestras hipótesis se sigue que, en un entorno de $(\bar{x}_o, t_o)$, $\frac{f(\bar{x},t)-f(\bar{x},-t)}{2}$ es igual a un elemento $\eta \in (I(\bar{x},t) + (g(\bar{x})-t^n))$. Tomando un $W_{\bar{x}_o, t_o}$ más pequeño, podemos suponer que ambas igualdades siguientes son válidas en $W_{\bar{x}_o, t_o}$:

$$\frac{f(\bar{x},t)-f(\bar{x},-t)}{2} = \eta(\bar{x},t)$$

$$f(\bar{x},t) - \ell_{\bar{x},t_o}(\bar{x}) = \psi_{\bar{x}_o,t_o}(\bar{x},t)$$

(donde $\psi_{\bar{x}_o,t_o}$ es la función dada por la afirmación 1. Ambas, $\psi_{\bar{x}_o,t_o}$ y η están en $(I(\bar{x},t) + (g(\bar{x})-t^n))$. Entonces la igualdad $\dfrac{f(\bar{x},t)+f(\bar{x},-t)}{2} - \ell_{\bar{x}_o,t_o}(\bar{x}) = \psi_{\bar{x}_o,t_o}(\bar{x},t) - \eta(\bar{x},t)$ vale en $W_{\bar{x}_o,t_o}$. Digamos que $\psi_{\bar{x}_o,t_o}(\bar{x},t) - \eta(\bar{x},t) = \sum_{j=1}^{r} a_j(\bar{x},t).\varphi_j(\bar{x}) + b(\bar{x},t).(g(\bar{x})-t^n)$ para ciertas $\varphi_j \in I$ y $a_j, b \in C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$. Es decir, para $(\bar{x},t)$ en $W_{\bar{x}_o,t_o}$ tenemos

$$\frac{f(\bar{x},t)+f(\bar{x},-t)}{2} - \ell_{\bar{x}_o,t_o} = \sum_{j=1}^{r} a_j(\bar{x},t).\varphi_j(\bar{x}) +$$

$$+ b(\bar{x},t)\ (g(\bar{x}) - t^n).$$

Entonces, para $(x,t) \in W_{\bar{x}_o,-t_o} = \{(\bar{x},t) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid (\bar{x},-t) \in \in W_{\bar{x}_o,t_o}\}$ tenemos

$$\frac{f(\bar{x},-t)+f(\bar{x},t)}{2} - \ell_{\bar{x}_o,t_o}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{r} a_j(\bar{x},-t)\varphi_j(x) +$$

$$+ b(\bar{x},-t).(g(\bar{x}) - t^n).$$

Nuevamente, de nuestras hipótesis, podemos suponer que en $W_{\bar{x}_o,-t_o}$, $\frac{f(\bar{x},t)-f(\bar{x},-t)}{2}$ es igual a un elemento de $(I(\bar{x},t)+$ $+(g(\bar{x})-t^n))$ (tomando un $W_{(\bar{x}_o,t_o)}$ mas pequeño si es necesario). Como $f(\bar{x},t) = \frac{f(\bar{x},t)+f(\bar{x},-t)}{2} + \frac{f(\bar{x},t)-f(\bar{x},-t)}{2}$, se sigue que en $W_{\bar{x}_o,-t_o}$, $f(\bar{x},t)-\ell_{\bar{x}_o,t_o}$ es igual a un cierto elemento de $(I(\bar{x},t) + (g(\bar{x})-t^n))$.

Esto es lo que queríamos demostrar.

<u>Afirmación 3</u>. *Si* $(\bar{x}_o,t_o) \in Z(I(\bar{x},t) + (g(\bar{x})-t^n))$, *existen un entorno* $U_{\bar{x}_o}$ *de* $\bar{x}_o$, $h_{\bar{x}_o} \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ *y* $\psi_{\bar{x}_o} \in (I(\bar{x},t) +$ $+ (g(\bar{x}) - t^n))$ *tales que la siguiente igualdad es válida para* $(\bar{x},t) \in U_{\bar{x}_o} \times \mathbb{R}$

$$f(\bar{x},t) - h_{\bar{x}_o}(\bar{x}) = \psi_{\bar{x}_o}(\bar{x},t)$$

<u>Demostración de 3</u>: De las afirmaciones 1 y 2 sabemos que, para $(\bar{x}_o,t_o) \in Z(I(\bar{x},t) + (g(\bar{x})-t^n))$ existen un entorno $W_{\bar{x}_o,t_o}$ de $(\bar{x}_o,t_o)$ (si n es par y $t_o > 0$ dos entornos, de $(\bar{x}_o,t_o)$ y $(\bar{x}_o,-t_o)$, respectivamente, $W_{\bar{x}_o,t_o}$ y $W_{\bar{x}_o,-t_o}$) y una función $h_{\bar{x}_o}(\bar{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ tales que para $(\bar{x},t) \in W_{\bar{x}_o,t_o}$ (para $(\bar{x},t) \in W_{\bar{x}_o,t_o} \cup W_{\bar{x}_o,-t_o}$ si n es par

y $t_o > 0$) $f(\bar{x},t) - h_{\bar{x}_o}(\bar{x})$ es igual a un elemento $\eta_{\bar{x}_o} \in$ $\in (I(\bar{x},t) + (g(\bar{x})-t^n))$. Entonces, la función $q(\bar{x},t) =$ $= f(\bar{x},t) - h_{\bar{x}_o}(\bar{x}) - \eta_{\bar{x}_o}(\bar{x},t)$ se anula en un entorno de $(\bar{x}_o,t_o)$ (en un entorno de $(\bar{x}_o,t_o)$ y $(\bar{x}_o,-t_o)$ si n es par) Recordando que $t_o = \pm \sqrt[n]{g(\bar{x}_o)}$, se verifica rapidamente que existe un entorno $U_{\bar{x}_o}$ de $\bar{x}_o$ en $\mathbb{R}^k$ tal que, en $U_{\bar{x}_o} \times \mathbb{R}$, $q(\bar{x},t) = \ell(\bar{x},t).(g(\bar{x})-t^n)$ para cierta $\ell(\bar{x},t) \in C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$. Entonces, en $U_{\bar{x}_o} \times \mathbb{R}$, $f(\bar{x},t) - h_{\bar{x}_o}(\bar{x}) = \eta(\bar{x},t) +$ $+ \ell(\bar{x},t).(g(\bar{x})-t^n) \in (I(\bar{x},t) + (g(\bar{x})-t^n))$.

Esto termina la demostración de la afirmación 3. Volvamos a la demostración de 4.3.2.2. De la afirmación 3, sabemos que para todo $\bar{x}_o \in Z(I)$ si n es impar, y para todo $\bar{x}_o \in Z(I)$ tal que $g(\bar{x}_o) \geq 0$ si n es par existen un entorno $U_{\bar{x}_o}$ de $\bar{x}_o$ y $h_{\bar{x}_o} \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ tales que $f(\bar{x},t)-h_{\bar{x}_o}(\bar{x})$ es igual a un cierto elemento de $(I(\bar{x},t)+(g(\bar{x})-t^n))$ en $U_{\bar{x}_o} \times \mathbb{R}$. La demostración termina pegando las $h_{\bar{x}_o}$ con una partición de la unidad ∎

4.3.2.3. <u>Demostración de que no vale la existencia para $C = F$ si $n > 2$.</u>

Sean $k = 1$, $n > 2$ y $p(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ cualquier función pla ya en cero y positiva para $x \neq 0$. Para fijar ideas podemos elegir $p(x) = e^{-1/x^2}$. Por el lema 4.3.4 que demostraremos después, existe $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, positiva excepto para $x = 0$ y tal que $g(x)^{2/n} . p(x)$ no es C^∞ (este es el punto en el que necesitamos $n > 2$). Sea $f(x,t) = t^2.p(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ (la razón por la que necesitamos $t^2.p(x)$ (y por lo tanto $g^{2/n}(x).p(x)$) y no $t.p(x)$ es que necesitaremos que f sea par en la variable t).

Veremos que

a) $f(x,t) - f(x,s) \in Cl_{\mathbb{F}}(g(x)-t^n, t^n-s^n)$

pero

b) no hay ninguna $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $f(x,t) - h(x) \in$ $\in Cl_{\mathbb{F}}(g(x)-t^n)$.

Para verificar el punto a), consideremos el ideal K generado en $C^\infty(\mathbb{R})$ por $\{q(g(x)) \mid q$ es playa en $t = 0\}$. El único cero de K es $x = 0$. Por el teorema de Whitney 4.0.1., existe una sucesión de elementos de K que converge a $p(x)$ en la topología C^∞-CO, digamos $p(x) = \lim_{r\to 0} p_r(x)$, $p_r \in K$, donde p_r es una combinación lineal de la forma $p_r(x) = \sum_{i=1}^{n_r} \lambda_{i,r}(x).q_{i,r}(g(x))$, para ciertas $\lambda_{i,r} \in C^\infty(\mathbb{R})$ y funciones $q_{i,r}$ playas en cero.

Nótese que, para todo $\ell \in \mathbb{N}$, $\dfrac{p_r(x)}{g^\ell(x)} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Por 4.0.5.,

existen funciones pares $\varphi_\ell \in C^\infty(\mathbb{R})$, que tienen soporte compacto y, para cada ℓ, $\varphi_\ell = 1$ en un cierto entorno U_ℓ del origen tales que $b_r(x,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \varphi_\ell(t) \dfrac{p_r(x)}{g(x)^{\ell+1}} \cdot t^{\ell.n}$ es C^∞-CO convergente, y, por lo tanto, $b_r \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Nótese que si n es par, b_r es par en la variable t. Se ve fácilmente que las funciones $b_r(x,t).(g(x)-t^n)$ y $p_r(x)$ tienen las mismas derivadas en $t = 0$. Entonces, la diferencia $d_r(x,t) = t^2.p_r(x) - t^2.b_r(x,t).(g(\bar{x})-t^n)$ es una función playa en $t = 0$ (y par en la variable t si n es par). Llamemos $f_r(x,t) = t^2.p_r(x)$. Nótese que f_r converge a f en la topología C^∞-CO. Se tiene que $f_r(x,t) =$
$= t^2 b_r(x,t).(g(x)-t^n) + d_r(x,t)$. Como d_r es playa en $t =$
$= 0$ (y par en la variable t si n es par), llamando

$$q_r(x,t) = \begin{cases} d_r(x,t^{1/n}) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \\ d_r(x,|t|^{1/n}) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

tenemos $q_r(x,t^n) = d_r(x,t)$ y $q_r \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Entonces, $f_r(x,t) -$
$- f_r(x,s) = t^2 b_r(x,t).(\sigma(x)-t^n) - s^2 b_r(x,s)(\sigma(x)-s^n) + q_r(\bar{x},t^n)$
$- q_r(x,s^n)$. Como $q_r(x,t^n) - q_r(x,s^n) \in ((t^n-s^n))$ (como se sigue del lema 1.7.) se sigue que $f_r(x,t) - f_r(x,s) \in$
$\in ((g(x)-t^n) + (t^n-s^n))$, y dado que $f_r \to f$ vemos que $f(x,t) - f(x,s) \in \mathcal{C}\ell_F((g(x)-t^n) + (t^n-s^n))$, i.e., vale el punto a).

Tratemos ahora el punto b). Supongamos que existe $h \in$ $\in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $f(x,t) - h(x) \in Cl_{\mathbb{F}}(g(x)-t^n)$. En este caso (recordemos que g es positiva para $x \neq 0$) tenemos que $f(x, \sqrt[n]{g(x)}) - h(x) = 0$ ó, por definición de f, $g^{2/n}(x)$. $.p(x) = h(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, lo cual es absurdo. Esto completa la demostración de 4.3.2.3.

4.3.2.4. Demostración de que vale la unicidad para $C = \mathbb{F}$.

Tomemos un ideal cerrado $I \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^k)$ y, $g(x), h(x) \in$ $\in C^\infty(\mathbb{R}^k)$. Supongamos que $h(x) \in Cl_{\mathbb{F}}(I(x,t) + (g(x)-t^n))$. Debemos demostrar que $h(\bar{x}) \in I$. Para hacer esto (I es cerrado) usamos el teorema de Whitney 4.0.1. Basta verifica que $T_{\bar{x}_o}(h) \in T_{\bar{x}_o}(I)$ para $\bar{x}_o \in Z(I)$. En el caso n par sabemos por hipótesis que $\rho(g(\bar{x})) \in I$ para toda $\rho \in m_{\mathbb{R}_{>0}}$, lo cual implica que $g(\bar{x}_o) \geq 0$ para $\bar{x}_o \in Z(I)$. Tenemos dos casos

i) $g(\bar{x}_o) \neq 0$ ($g(\bar{x}_o) > 0$ si n es par) y

ii) $g(\bar{x}_o) = 0$.

i) En este caso $\sqrt[n]{g(\bar{x})}$ es una función C^∞ en un entorno de $\bar{x}_o$. Se ve pues fácilmente que $T_{\bar{x}_o}(h) \in T_{\bar{x}_o}(I)$.

ii) Nótese que, dado que $g(\bar{x}_o) = 0$, se sigue que $(\bar{x}_o, 0)$ es un cero de $(I(\bar{x},t) + (g(\bar{x})-t^n))$. Nuevamente por 4.0.1., sabemos que $T_{\bar{x}_o}(h) = T_{\bar{x}_o,0}(h)$ es igual al desarrollo en serie de Taylor en $(\bar{x}_o, 0)$ de una cierta $f \in (I(\bar{x},t) +$

$+ (g(\bar{x})-t^n))$, i.e., $T_{\bar{x}_o}(h) = T_{\bar{x}_o,0}(f)$. Digamos que $f(\bar{x},t) = \sum_{i=1}^{r} a_i(\bar{x},t).\varphi_i(\bar{x}) + b(\bar{x},t).(g(\bar{x})-t^n)$ para ciertos $a_i, b \in C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$ y $\varphi_i \in I$. Tomando desarrollo en serie de Taylor en $(\bar{x}_o,0)$ obtenemos $T_{\bar{x}_o}(h) = \sum_{i=1}^{r} T_{\bar{x}_o,0}(a_i).T_{\bar{x}_o}(\varphi_i) + T_{\bar{x}_o,0}(b).(T_{\bar{x}_o}(g)-t^n)$. Reemplazando t por ωt ($\omega \in \mathbb{G}_n$) y sumando para $\omega \in \mathbb{G}_n$ (ber 4.3.3) obtenemos:

$$T_{\bar{x}_o}(h) = \sum_{i=1}^{r} S_i(\bar{x},t^n).T_{\bar{x}_o}(\varphi_i)(\bar{x}) +$$

$$+ U(\bar{x},t^n).(T_{\bar{x}_o}(g)(\bar{x})-t^n)$$

para ciertas series S_i, $U \in \mathbb{R}[[(\bar{x}-\bar{x}_o),t]]$.

Por 4.0.5., existen funciones s_i, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$ tales que $T_{\bar{x}_o,0}(s_i) = S_i$, $T_{\bar{x}_o,0}(u) = U$. Entonces, la función $q(\bar{x},t) = h(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{r} s_i(\bar{x},t^n).\varphi_i(\bar{x}) - u(\bar{x},t^n).(g(\bar{x})-t^n)$ es playa en $(\bar{x}_o,0)$ y es claro de la definición de q que $q(\bar{x},t) = p(\bar{x},t^n)$ para cierta $p \in C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$. Además, como q es playa en $(\bar{x}_o,0)$, p debe ser playa en $(\bar{x}_o,0)$. Entonces tenemos que

$$* \quad h(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{r} s_i(\bar{x},t^n).\varphi_i(\bar{x})+u(\bar{x},t^n).(g(\bar{x})-t^n)+p(\bar{x},t^n).$$

Tenemos ahora dos casos

a) n impar. En este caso, reemplazamos t por $\sqrt[n]{g(\bar{x})}$ en $*$ y obtenemos $h(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{r} s_i(\bar{x},g(\bar{x})).\ \varphi_i(\bar{x})+p(\bar{x},g(\bar{x}))$. Dado que p es playa en $(\bar{x}_o,0)$ y $g(\bar{x}_o) = 0$ se sigue que $T_{\bar{x}_o}(h)\in T_{\bar{x}_o}(I)$.

b) n par. Se sigue de $*$ que la función $h(\bar{x})$ - $- \sum_{i=1}^{r} s_i(\bar{x},t).\varphi_i(\bar{x}) - u(\bar{x},t)(g(\bar{x})-t) - p(\bar{x},t)$ se anula para $t \geqslant 0$ y, por lo tanto, es playa en $t = 0$ y en particular, en $(\bar{x}_o,0)$. Como $g(\bar{x}_o) = 0$, reemplazando $t = g(\bar{x})$ vemos que $h(\bar{x}) - \Sigma\, s_i(\bar{x},g(\bar{x}))\varphi_i(\bar{x})$ es playa en $\bar{x}_o$ (dado que $p(\bar{x},g(\bar{x}))$ es también playa en $\bar{x}_o$), y por lo tanto, $T_{\bar{x}_o}(h)\in T_{\bar{x}_o}(I)$. Esto termina la demostración de 4.3.2.4.

4.3.2.5. Demostración de que no vale la unicidad para $C = \mathbb{L}$ y $C = G$ si $n > 2$.

Tenemos dos casos

n impar. Sea n impar, $n > 2$, $I = (e^{-1/x^2}) \subsetneq C^\infty(\mathbb{R})$ y $h(\bar{x}) = \sqrt[n]{x}\,.e^{-1/x^2} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Demostraremos que $h(\bar{x})\in (I(x,t) + (x-t^n))$ - mientras que, claramente, $h \notin I$. Basta demostrar que existe $b(\bar{x},t)\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\sqrt[n]{x}\ e^{-1/x^2} = t.e^{-1/x^2} + b(x,t)(x-t^n)$. Y, para hacer esto, basta mostrar que la función

$$b(x,t) = \frac{e^{-1/x^2}(\sqrt[n]{x} - t)}{x - t^n}$$

definida para

$x \neq t^n$ se extiende a una función diferenciable definida en todo $\mathbb{R}^2$. Ahora bien, $x-t^n = (\sqrt[n]{x} - t) \cdot \sum_{i=1}^{n} (\sqrt[n]{x})^{n-i} \cdot t^{i-1} = (\sqrt[n]{x} - t) \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1} \cdot \eta(x,t)$ donde $\eta(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{t}{\sqrt[n]{x}}\right]^{i-1}$.

Entonces, para $0 \neq x \neq t^n$, $b(x,t) = \dfrac{e^{-1/x^2}}{(\sqrt[n]{x})^{n-1} \cdot \eta(x,t)} =$

$= \dfrac{e^{-1/2x^2}}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}} \cdot \dfrac{e^{-1/2x^2}}{\eta(x,t)}$. Por supuesto, el primer facor se extiende a un elemento de $C^\infty(R)$. Y también el segundo factor se extiende. Para ver esto, notemos que la función $\eta(x,t)$ tiene una cota inferior positiva. En efecto

i) no se anula en ningún punto dado que la función $(1-\left[\frac{t}{\sqrt[n]{x}}\right]^n) = (1 - \frac{t}{\sqrt[n]{x}}) \cdot \eta(x,t)$ considerada como función de $\frac{t}{\sqrt[n]{x}}$ tiene un único cero (simple) $\frac{t}{\sqrt[n]{x}} = 1$

ii) $\eta(x,t)$ tiende a $+\infty$ cuando $\frac{t}{\sqrt[n]{x}}$ tiende a ∞.

Entonces, para $x \neq 0$, el segundo factor es C^∞. Así que, basta demostrar que sus derivadas tienden a cero cuando (x,t) tiende a $(0,t_o)$ $(t_o \in \mathbb{R})$. Y esto es inmediato a partir del hecho de que η tiene una cuota inferior positiva. Esto termina con el caso impar.

<u>n par</u>. Sea n par, $n > 2$, $I = (e^{-1/x^2}) \subsetneq C^\infty(R)$ y $h(x) = \sqrt[n]{x^4} \cdot e^{-1/x^2}$. Vamos a demostrar que $h(\bar{x}) \in (I(\bar{x},t) +$

$+ (x^2-t^n))$ - mientras que $h(x) \notin I$ dado que $n > 2$ (en este caso (n par) debe verificarse la condición $\rho(g(x)) \in I$ para toda $\rho \in m_{R_{>0}}$. Pero, hemos tomado $g(x) = x^2$ y, por lo tanto $\rho(g(x)) = 0 \in I$). Mostraremos que existe $b(x,t) \in$ $\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\sqrt[n]{x^4} \cdot e^{-1/x^2} = t^2 . e^{-1/x^2} + b(x,t).(x^2-t^n)$.

Basta mostrar que la función $b(x,t) = e^{-1/x^2} \dfrac{(\sqrt[n]{x^4} - t^2)}{x^2 - t^n}$ definida para $x^2 \neq t^n$ se extiende a una $b \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Ahora, $x^2-t^n = ((|x|^{4/n})^{n/2} - (t^2)^{n/2}) =$

$= (|x|^{4/n}-t^2).\sum_{i=1}^{n/2} (|x|^{4/n})^{(n/2-i)} \cdot t^{2(i-1)}$ y, por lo tanto, para $0 \neq x^2 \neq t^n$

$$b(x,t) = \frac{e^{-1/x^2}}{|x|^{4/n\cdot(n/2-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n/2} \left[\dfrac{t^2}{|x|^{4/n}}\right]^{i-1}}$$

La demostración sigue ahora de la misma manera que en el caso n impar $(\eta(x,t) = \sum_{i=1}^{n/2} (\dfrac{t^2}{|x|^{4/n}})^{i-1} > 1)$.

Dado que los ideales finitamente generados son de caracter local, esto termina la demostración de 4.3.2.5. y también termina la demostración del teorema 4.3.2. ■

Probamos ahora el lema usado en 4.3.2.3. Este lema está inspirado en un ejemplo dado en [12] de una función f playa en $x = 0$ y $f > 0$ en $\mathbb{R} \neq 0$ tal que $\sqrt[2]{f(x)}$ no es C^∞.

4.3.4. Lema: *Sea* $p \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *una función tal que* $p(x) > 0$ *para* $x \neq 0$. *Sean* $n, i \in \mathbb{N}$, $i < n$. *Entonces existe una función* $g(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $g(x) > 0$ *excepto para* $x = 0$ *y playa en* $x = 0$ *tal que* $g(x)^{i/n}.p(x)$ *no es* C^{∞}.

Demostración. Sea $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ una función tal que

$$\begin{cases} \phi = 1 \text{ en un entorno de } 0 \in \mathbb{R} \\ \phi \text{ es positiva en } (-1,1) \\ \phi \text{ se anula fuera de } (-1,1) \end{cases}$$

Para $r \in \mathbb{N}$, definimos $g_r(x) = \phi\,(r(r+1)(x-1/r))$.

$$\cdot \left[e^{-r/p(1/r)} \left(e^{-r/p(1/r)} + \frac{r}{p(1/r)} (x-1/r)^2\right) \right] \in C^{\infty}(\mathbb{R}).$$

i) La función g_r es positiva en $I_r = \left(\frac{1}{r+1}, \frac{r+2}{r(r+1)}\right)$ y nula fuera de I_r.

ii) El intervalo I_r no contiene ningún elemento de la sucesión $\left\{\frac{1}{\ell}\right\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ excepto $\frac{1}{r}$.

iii) $\bigcup_{\ell=1}^{\infty} I_{\ell} = (0,3/2)$.

Sea g_0 una función C^{∞} en $\mathbb{R}_{>0}$ tal que $g_0((0,1]) = 0$ y g_0 es positiva para $x > 1$.

Así la serie $g = \sum_{r=0}^{\infty} g_r$ representa una función C^{∞} y positiva definida en $\mathbb{R}_{>0}$. Además, todas las derivadas de g tienden a cero cuando x tiende a cero, así que las fórmulas $g(0) = 0$ y $g(-x) = g(x)$ $(x>0)$ definen una función C^{∞} en todo $\mathbb{R}$. Es claro que la función g_{ℓ} así como todas sus derivadas se anulan en $x = 1/r$ para $\ell \neq r$. Entonces, en $x = 1/r$, $a(x)$ y sus derivadas son iguales a $g_r(x)$ y sus respectivas derivadas. Mostraremos que la segunda derivada de la función $a(x) = [g(x)]^{i/n} .p(x)$ en el punto $x = 1/r$ tiende a infinito cuando x tiende a cero. Esto terminará la demostración. Como $g'(1/r) = 0$, tenemos que $a''(1/r) = \frac{i}{n}[g(1/r)]^{\frac{i-n}{n}} .g''(1/r).p(1/r) + g(1/r)^{i/n}.p''(\frac{1}{r})$. El segundo término tiende a cero. Analicemos el comportamiento del primer término, que es igual a

$$\frac{i}{n}\, g(\tfrac{1}{r})^{\frac{i-n}{n}} . \frac{2r}{p(1/r)} .p(1/r) = \frac{2ir}{n}\, g(1/r)^{\frac{i-n}{n}}$$

Dado que $i<n$, esto tiende a infinito cuando r tiende a infinito. ∎

Capítulo 5: Apéndice.

En este apéndice incluimos algunas proposiciones utilizadas en el cuerpo central de esta tesis así como una breve descripción de la lógica en los topos $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{Z}$.

5.1. Notación: *Sean* A, X, Y *objetos de una categoría* C, *y, supongamos que la exponencial* A^X *existe en* C (ver 0.14). *Entonces, una flecha* $f : Y \to A^X$ *corresponde (por una cierta biyección natural) a una flecha* $\tilde{f} : Y \times X \to A$. *Llamamos a* $\tilde{f}$ *la adjunta exponencial de* f *(bajando* X *). En particular, poniendo* $Y = A^X$ *y* $f = id_{A^X}$, *notamos* $ev = \widetilde{id}_{A^X} : A^X \times X \to A$. *La razón por la cual se nota con* ev *a* $\widetilde{id}_{A^X}$ *salta a la vista.*

5.2. Proposición. *Sean* X, Y *y* A *objetos en una categoría* C *en la cual existe la exponencial* A^X *y sean* $f_1 : Y \to A^X$, $f_2 : Y \to X$ *un par de flechas en* C. *Entonces, el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} & A^X \times X \arrow[dr, "ev"] & \\ Y \arrow[ur, dashed, "(f_1, f_2)"] \arrow[dr, "(id_Y, f_2)"'] & & A \\ & Y \times X \arrow[ur, "\tilde{f}_1"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración: La flecha superior es igual

$$Y \xrightarrow{(id_Y, f_2)} Y\times X \xrightarrow{(f_1\times id_X)} A^X\times X \xrightarrow{ev} A \,.$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{a}$$

Por naturalidad de la adjunción exponencial la traspuesta exponencial de a (subiendo X) es

$$Y \xrightarrow{f_1} A^X \xrightarrow{id_{A^X}} A^X$$

es decir, es f_1. Así que $a = \tilde{f}_1$. ■

5.3. <u>Lema</u>: *Sea* $X = \overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}} \in \mathbb{G}$ *y sean* $f : X \to R^D$, $g : X \to D$ *un par de flechas en* $\mathbb{G}$. *La flecha* $\tilde{f} : X\times D \to R$ *está dada por un morfismo de anillos* $C^\infty\ \tilde{f} : C^\infty(\mathbb{R}) \to \dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}{I(\bar{x},t) \hat{+} (t^2)}$ *que a su vez, debe ser el morfismo de composición con un cierto elemento* $[f_1(\bar{x})] + [f_2(\bar{x})] . [t] \in \dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}{I(\bar{x},t) \hat{+} (t^2)}$. *Además* g *está dada por cierta* $"g" \in \dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$. *En estas condiciones, la flecha compuesta*

$$X \xrightarrow{(f,g)} R^D\times D \xrightarrow{ev} R$$

está dada por el elemento $[f_1(\bar{x})] + [f_2(\bar{x})] . [g(\bar{x})] \in \dfrac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$.

<u>Demostración</u>. En virtud de 5.2. el siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & R^D \times D \arrow[dr, "ev"] & \\
X \arrow[ur, "{(f,g)}"] \arrow[dr, "{(id_X, g)}"'] & & R \\
 & X \times D \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

El resultado es ahora inmediato ■

Análogamente, tenemos

5.4. <u>Lema</u>: *Si la flecha* $f : X \to (R^R)^D$ *está dada por*

$$[f_1(\bar{x}, x_{n+1})] + [f_2(\bar{x}, x_{n+1})].[t] \in \frac{C^\infty(\mathbb{R}^{n+2})}{I(x, x_{n+1}, t) \hat{+} (t^2)}$$ *y*

$g : X \to D$ *está dada por* $g \in \frac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$, *entonces la flecha compuesta*

$$X \xrightarrow{(f,g)} (R^R)^D \times D \xrightarrow{ev} R^R$$

está dada por

$$[f_1(\bar{x}, x_{n+1})] + [f_2(\bar{x}, x_{n+1})] . [g(\bar{x})]$$

<u>Demostración</u>: Análoga a la de 5.3. ■

5.5. <u>Corolario</u>: *Los siguientes son diagramas conmutativos*

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & R^D \times D \arrow[dr, "ev"] & \\
R^D \arrow[ur, "{(id_{R^D},0)}"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & R \\
 & R \times R \arrow[ur, "\bar{\pi}_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (R^R)^D \times D \arrow[dr, "ev"] & \\
(R^R)^D \arrow[ur, "{(id_{(R^R)^D},0)}"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & R^R \\
 & R^R \times R^R \arrow[ur, "\pi_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

(donde, en cada caso, π_1 *es la primera proyección,* $\simeq$ *es el isomorfismo canónico y* $0 : R^D \to D$ *(res.* $0 : (R^R)^D \to D$*) es la flecha* $R^D \to 1 \xrightarrow{0} D$ *(resp.* $(R^R)^D \to 1 \xrightarrow{0} D$*)*

<u>Demostración</u>: Para probar el primer diagrama conmuta (resp. el segundo) basta probar que conmuta precedido por cualquier flecha $X \to R^D$ (resp. $X \to (R^R)^D$) con $X \in \mathbb{G}$. Y esto es inmediato a partir de 5.3. (resp. 5.4) ∎

5.6. <u>Proposición</u>. *Sea* $v : R_y \times D \to R^{R_x}$ *una flecha en el topos* $\mathbb{G}$ *y llamemos* $\tilde{v} : R_x \times R_y \times D \to R$ *su adjunta exponencial (bajando* R_x *) y* $\hat{v} : R_y \to (R^{R_x})^D$ *a su adjunta exponencial* *(subiendo* D*). Así, la composición*

$$R_y \overset{\hat{v}}{\dashrightarrow} (R^{R_x})^D \cong R^{R_x} \times R^{R_x}$$

es un par (v_1, v_2) *de flechas* $R_y \to R^{R_x}$. *Por otro lado,* $\tilde{v}$ *es un elemento de* $\frac{C^\infty(\mathbb{R}^3)}{(t^2)}$ *y* $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ *son elementos de* $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. *En estas condiciones se tiene* $\tilde{v} = \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2.[t] \in \frac{C^\infty(\mathbb{R}^3)}{(t^2)}$.

<u>Demostración</u>: El isomorfismo canónico $(R^R)^D \cong R^R \times R^R$ asigna la flecha $\hat{v} : R_y \to (R^{R_x})^D$ al par de flechas v_1, v_2 sii la adjunta exponencial (bajando D y R_x) de $\hat{v}$ está dada por $\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2.[t]$. Pero la adjunta (bajando D y R_x) de $\hat{v}$ es igual a la adjunta (bajando R_x) de v, es decir, $\tilde{v}$ ■

5.7. <u>Proposición</u>. *La flecha* $h : R_y \to R^{R_x}$ *está dada por* $h(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ *sii para todo* $y_o \in \mathbb{R}$, $1 \overset{y_o}{\dashrightarrow} R_y$, *la flecha*

$$1 \overset{y_o}{\dashrightarrow} R_y \overset{h}{\dashrightarrow} R^{R_x}$$

está dada por $h(x, y_o)$.

<u>Demostración</u>: Bajando R_x, basta ver que una flecha $a : R_x \times R_y \to R$ está dada por $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ sii para todo $y \in \mathbb{R}$, la composición

$$R_x \times 1 \xrightarrow{id_R \times y_o} R_x \times R_y \xrightarrow{a} R \quad \text{está dada por} \quad h(x,y_o),$$

y esto es claro ∎

Un poco de lógica interna

Todo topos de Grothendieck (mas generalmente, todo topos elemental) tiene una lógica interna. Describimos aquí algunos aspectos de la lógica en los topos G, F y Z. (La teoría general de la lógica en los Topos puede verse en [1], [7]).

Con un punto de vista un poco parcial, podría decirse que la lógica de la matemática cotidiana (o sea la matemática de la teoría de conjuntos) está deducida de la teoría de conjuntos misma: tomemos un par de fórmulas φ, ψ, predicables, digamos, sobre un anillo A y llamemos Ext(φ) (extension de φ) al conjunto de elementos de A que verifican φ. Se tiene

(1) $\mathrm{Ext}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{Ext}(\varphi) \cup \mathrm{Ext}(\psi)$

(2) $\mathrm{Ext}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{Ext}(\varphi) \cap \mathrm{Ext}(\psi)$

Para preservar la simetría (y por otras razones mas profundas también), para X, Y subconjuntos de A, llamaremos $X \to Y = X^c \cup Y$, de tal modo que

(3) $\mathrm{Ext}(\varphi \to \psi) = \mathrm{Ext}(\varphi) \to \mathrm{Ext}(\psi)$.

Siguiendo con esta última idea, definimos para un subconjunto $S \subseteq A\times B$, $\forall y(S) = \{x \in A : \forall y \in B,\ (x,y) \in S\}$ de tal modo que si $\varphi = \varphi(x,y)$ es una fórmula predicable sobre $A\times B$ (por ejemplo, poniendo $A = B$ anillo, $x.y = 1 \vee (1-x).y = 1$)

(4) $\mathrm{Ext}(\forall y \varphi(x,y)) = \forall y\ \mathrm{Ext}(\varphi(x,y))$

Análogamente, $\exists y(S) = \{x \in A : \exists\ y \in B : (x,y) \in S\}$ y se tiene

(5) $\mathrm{Ext}(\exists y \varphi(x,y)) = \exists y(\mathrm{Ext}(\varphi(x,y))$

(La negación $\neg$ es un caso particular de $\to$: $\neg X = X \to \emptyset$)

Ahora bien, toda fórmula de la lógica es una combinación de conectivas ($\exists$, $\forall$, $\wedge$, etc) y fórmulas atómicas (por ejemplo, en un anillo, la fórmula atómica es una igualdad de polinomios). Si uno tiene definidas las extensiones de las fórmulas atómicas y se atiene a las reglas (1) a (5), puede inductivamente calcular la extensión de cualquier fórmula y así decidir si es verdadera ó falsa. Esta idea se puede imitar en una categoría de haces: las extensiones de las fórmulas atómicas son siempre fáciles de definir, de modo que bastará construir las contectivas "conjuntistas" en el conjunto de sub-haces de un haz dado.

Esto haremos en seguida en el topos $\mathcal{G}$. Consideraciones completamente análogas (reemplazando el sitio de definición y la noción de cubrimiento de $\mathcal{G}$ por las correspondientes de $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{F}$) valen para $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{F}$. Antes, recordemos la siguiente proposición.

5.8. <u>Proposición</u> (ver [6]). *Sea* F *un functor contravariante,* $F \in \mathrm{Sets}^{\mathbb{G}^{op}}$ (ver Cap.0). F *puede ser o no ser un haz en el sentido de* 0.23.*En todo caso, existe un haz* #F *llamado el* <u>*haz*</u> <u>*asociado*</u> <u>*a*</u> F *provisto de una "inclusión"* i : F $\to$ #F *con la propiedad siguiente: si* $G \in \mathrm{Sets}^{\mathbb{G}^{op}}$ <u>*es*</u> <u>*un*</u> <u>*haz*</u> *y* $\eta : F \to G$ *es una transformación natural, existe una única transformación natural* $\psi : \#F \to G$ *haciendo el siguiente triángulo conmutativo*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\eta"'] & & \#F \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

■

<u>Observación</u>: F es un haz sii i es un isomorfismo. Puede decirse que #F es el haz libre sobre el prehaz F.

Pasamos ahora a definir y construir las conectivas "conjuntistas".

5.9. <u>Definición</u>. *Dados dos sub-haces* * *de un haz* H , *la* *notación* $K \leqslant L$ *significa* $K(X) \subseteq L(X)$ *para todo* $X \in G$.

5.10. <u>Definición de $\wedge$</u> : i) *Si* K *y* L *son sub-haces del haz* H, $K \wedge L$ *es el mas grande subhaz de* H *contenido en* K *y en* L *(en el sentido de* 5.9. *). Dicho de otro modo,* $K \wedge L$ *es* <u>*el*</u> *sub-haz que verifica*

$$\frac{T \leqslant K \wedge L}{T \leqslant K \quad y \quad T \leqslant L}$$

donde la línea significa que los enunciados de arriba y debajo son equivalentes.

ii) <u>Construcción de $\wedge$</u> : Sencillamente, $(K \wedge L)(X) = K(X) \cap K(X)$.

Con respecto al comportamiento de $K \wedge L$ en las flechas, hay una única elección posible: la inducida por H. Es trivial ver que $K \wedge K$ es un haz y que se cumple i).

5.11. i) <u>Definición de $\vee$</u>: $K \vee L$ *es el sub-haz de* H *que verifica*

para todo $T \leqslant H$ $\dfrac{K \vee L \leqslant T}{K \leqslant T \quad y \quad L \leqslant T}$

---

* K es una sub-haz de L sii a) K es un haz, b) para todo $X \in \mathbb{G}$, $K(X) \subseteq K(X)$ y c) si $f : X \to Y$ entonces $K(f) = L(f)|_{K(Y)}$.

ii) <u>Construcción de $\vee$</u>: Podría pensarse que $(K \vee L)(X) = K(X) \cup L(X)$. Sin embargo esta fórmula define un pre-haz que no es un haz. Se verifica sin dificultad que llamando F al pre-haz $F(X) = K(X) \cup L(X)$, $K \vee L = \# F$ (ver 5.8.) tiene la propiedad requerida.

5.12. i) <u>Definición de $\rightarrow$</u> : $K \rightarrow L$ *es un sub-haz de* H *que verifica*

$$\textit{para todo} \quad T \leqslant H \quad \frac{T \leqslant K \rightarrow L}{T \wedge K \leqslant T}$$

ii) <u>Construcción de $\rightarrow$</u> : Nuevamente, la primera idea que viene a la mente no es correcta: la fórmula $(K \rightarrow L)(X) = K(X)^{c} \cup L(X)$ no define siquiera un funtor. Inspeccionando la cuestión unos momentos aparece naturalmente la fórmula

$$(K \rightarrow L)(X) = \{ x \in H(X) : \text{ para toda flecha } f : Y \rightarrow X$$

en $\mathbb{G}$, $H(f)(x) \in K(Y)$ implica $H(f)(x) \in L(Y) \}$, que resulta ser la correcta, como es fácil de ver.

5.13. i) <u>Definición de $\neg$</u>: $\neg K$ *es el subhaz de* H *que verifica*

$$\textit{para todo} \quad T \leqslant H \quad \frac{T \leqslant \neg K}{T \wedge K = 0}$$

donde 0 *es el haz vacío*

$$0(X) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } X \neq \overline{\{0\}} \\ & \text{si } X = \overline{\{0\}} \end{cases}$$

El hecho de que 0 $(\overline{\{0\}})$ sea un conjunto de un punto se debe a que la familia vacía es un cubrimiento de $\overline{\{0\}}$ (ver 0.23) y a que 0 (el menor sub-haz de H) debe ser un haz. Nótese que el haz 0 es representable por $\overline{\{0\}}$.

ii) Construcción de $\neg K$. $\neg K = K \to 0$, y por lo tanto, ya fue construido en 5.12.

Observación muy importante: La igualdad $K \vee \neg K = H$ es, en la mayoría de los casos, falsa.

5.14. i) Definición de $\exists_\pi$: *Si* A *y* B *son haces,* K *es un sub-haz de* $A{\times}B$ $(A{\times}B(X) = A(X){\times}B(X))$ *y* $\pi : A{\times}B \to A$ *es la proyección entonces* $\exists_y(K) = \exists_\pi(K)$ *es el sub-haz de* A *que verifica*

$$\textit{para todo} \quad T \leqslant A \qquad \frac{\exists_\pi(K) \leqslant T}{K \leqslant \pi^{-1}(T)}$$

ii) Construcción de $\exists_\pi$: Llamemos F al sub-funtor de A definido por $F(X)$ = imágen por π de $K(X) \subseteq A(X){\times}B(X)$.

F no es en general un haz, pero se verifica que $\exists_\pi(K) = \#F$ verifica la condición de i).

5.15. i) Definición de $\forall$: *En las condiciones de* 5.14. i) $\forall y(K) = \forall_\pi(K)$ *es el sub-haz de* A *que verifica*

$$\text{para todo} \quad T \leqslant A \quad \frac{T \leqslant \forall_\pi(K)}{\pi^{-1}(T) \leqslant K}$$

ii) Construcción de $\forall_\pi$: con las mismas ideas de 5.12. ii)

$\forall_\pi(K)(X) = \{x \in A(X)$: para toda flecha $f : Y \to X$ en $\mathbb{G}$ y para todo $y \in B(Y)$ $(A(f)(x), y) \in K(Y)\}$.

Es de utilidad recordar 5.10. a 5.15. en la siguiente forma semántica, que es llamada semántica de Kripke-Joyal (para esto téngase en mente el lema de Yoneda 0.21)

5.16. Proposición: *Sean* H *un haz y* K *y* L *sub-haces de* H . *Sea además* X *un objeto de* $\mathbb{G}$ *y* $x : X \to H$ *una flecha. Entonces*

5.10': x *se factoriza por* $K \wedge L$ *sii* x *se factoriza por* K *y por* L .

5.11': x *se factoriza por* $K \vee L$ *sii existe un cubrimiento (ver* 0.23 *)* $i_\alpha : X_\alpha \rightarrowtail X$ *tal que para cada* $\alpha, x \circ i_\alpha$ *se factoriza ó bien por* K *ó bien por* L .

5.12': x *se factoriza por* $(K \to L)$ *sii para toda flecha* $f : Y \to X$ *en* $\mathbb{G}$, *si* $x \circ f$ *se factoriza por* K *entonces* $x \circ f$ *se factoriza por* L .

5.13': x *se factoriza por* $\neg K$ *sii para toda flecha* $f : Y \to X$ *en* $\mathbb{G}$ *se tiene que* "$x \circ f$ *se factoriza por* K *implica* $Y = \overline{\{0\}}$".

Sean ahora A *y* B *haces, y* K *un sub-haz de* $A \times B$. *Sea además* X *un un objeto de* $\mathbb{G}$ *y* $x : X \to A$ *una flecha. Notamos* $\pi : A \times B \to A$ *a la proyección. Entonces*

5.14': x *se factoriza por* $\exists_\pi(K)$ *sii existe un cubrimiento* $i_\alpha : X_\alpha \rightarrowtail X$ *y flechas* $y_\alpha : X_\alpha \to B$ *tales que para todo* α *el par* $(x \circ i_\alpha, y_\alpha)$ *se factoriza por* K .

5.15': x *se factoriza por* $\forall_\pi(K)$ *sii para toda flecha* $f : Y \to X$ *en* $\mathbb{G}$ *y para toda flecha* $y : Y \to B$, *el par* $(x \circ f, y)$ *se factoriza por* K.

Demostración: Las partes 5.10', 5.12' y 5.15' son ni mas ni menos que la traducción por el lema de Yoneda 0.21. de 5.10

ii), 5.12.ii) y 5.15.ii) respectivamente. Con respecto a 5.13'. sigue de 5.12'. (pues $\neg K = K \to 0$) y del hecho de que si hay una flecha $f : Y \to \overline{\{0\}}$ entonces $Y = \overline{\{0\}}$ (ya que el minimo sub-haz 0 de H es representable por $\overline{\{0\}}$). Con respecto a 5.11'. y 5.14'. siguen inmediatamente del lema de Yoneda y del hecho siguiente (ver [6]): si H es un haz y S es un subfuntor de H (no necesariamente un sub-haz), entonces, una flecha $f : X \to H$ (X objeto de $\mathbb{G}$) se factoriza por $\# S \leqslant H$ (ver 5.8) sii existe un cubrimiento $i_\alpha : X_\alpha \rightarrowtail X$ tal que $f \circ i_\alpha$ se factoriza por S cualquiera sea α ■

Esta claro así, por 5.10 a 5.15 , como se calcula la extensión de cualquier fórmula de la lógica predicable sobre un objeto de H de G (ó F ó Z) siempre y cuando se conozcan las extensiones de las fórmulas atómicas. En efecto, esto se hace inductivamente:

$$\mathrm{Ext}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{Ext}(\varphi) \vee \mathrm{Ext}(\psi), \ \mathrm{Ext}(\forall y \ \psi(x,y)) =$$

$$= \forall_\pi \ \mathrm{Ext}(\psi(x,y)), \text{ etc.}$$

Hacemos ahora una observación que necesitamos en el capítulo 4.

5.17. Observación: *Sean* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *dos fórmulas predicables sobre* A . *Entonces, la fórmula* $\forall x \in A \ (\varphi(x) \to \psi(x))$ *es válida* * *sii* $\mathrm{Ext}(\varphi(x)) \leqslant \mathrm{Ext}(\psi(x))$.

Demostración: La fórmula $\forall x \in A\ (\varphi(x) \to \varphi(x))$ es válida sii $\forall_\pi\ (Ext(\varphi(x)) \to Ext(\psi(x))) = 1$, (donde π es la única flecha $A \to 1$), o equivalentemente, si $1 \leq \forall_\pi\ (Ext(\varphi(x)) \to Ext(\psi(x))$. Ahora, por 5.15. i) esto es equivalente a $A \leq Ext(\varphi(x)) \to$ $\to Ext(\psi(x))$ y, por 5.12. i) esto equivale a $A \wedge Ext(\varphi(x)) \leq$ $\leq Ext(\psi(x))$. Pero $A \wedge Ext(\varphi(x)) = Ext(\varphi(x))$ pués $Ext(\varphi(x))$ es un subobjeto de A ■

Finalmente dedicamos unas palabras a los abiertos lógicos ó abiertos de Penon (ver [13]).

Los abiertos de Penon

5.18. Definición: *Sea* K *un objeto en un topos y sea* L *un subobjeto de* K, $L \leq K$. *Consideremos la fórmula* $\varphi(x) \equiv$ $\equiv \forall p \in K\ (\neg(p = x) \vee p \in L)$ *cuya variable libre* x *varía sobre* L. *Llamamos interior de* L *en* K *a* $\overset{\circ}{L} = Ext(\varphi(x))$.

Debemos decir cuales son las extensiones de las fórmulas atómicas utilizadas en la definición anterior. Esto se hace de

---

* La fórmula $\forall x \in A\ (\varphi(x) \to \psi(x))$ no tiene variables libres y es, por lo tanto predicable sobre el objeto terminal $1 = \overline{\dfrac{C^\infty(\mathbb{R})}{x}}$ del topos. Su extensión es un subobjeto de 1, es decir, un valor de verdad. Diremos que una fórmula sin variables libres es válida si su extensión es todo 1.

la manera obvia:

i) La fórmula $p = x$ está considerada como predicable sobre $K \times L$. Sea $i : L \rightarrowtail K$ la inclusión de L en K y π_1, π_2 las proyecciones de $K \times L$ en K y L respectivamente. Definimos la extensión de $p = x$ como el egalizador

$$\mathrm{Ext}(p = x) \rightarrowtail K \times L \underset{i \circ \pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} K$$

ii) La fórmula $p \in L$ debe también ser considerada como predicable sobre $K \times L$ para poder calcular el supremo $\neg(p = x) \vee p \in L$. Es decir que la extensión de la fórmula $p \in K$ debiera ser "el conjunto de los $(p,x) \in K \times L$ tales que $p \in L$".

Entonces definimos $\mathrm{Ext}(p = x) = L \times L$.

Observación: Demos una interpretación de $\mathring{L}$, definido en 5.18. Vemos la proposición $\neg(x = y)$ como diciendo "x está lejos de y" ó "x está separado de y". Esto se explica como sigue: la fórmula $(x = y) \vee \neg(x = y)$ no es en general cierta. Puede pensarse que existen y's que no son ni iguales ni distintos de x. Esos y se piensan como muy cerca de x, los otros, están separados. Entonces $\mathring{L} = \{x \in L :$ $\forall y \in K$, está lejos de x ó $y \in L\}$. De aquí el nombre de interior dado a $\mathring{L}$.

5.19. <u>Definición</u>: Diremos que $L \leqslant K$ es abierto de Penon sii $L = L^{\circ}$.

5.20. <u>Teorema (Penon)</u>. *Sea* $X = \dfrac{\overline{C^{\infty}(\mathbb{R}^n)}}{I}$ *un objeto de* $\mathbb{G} \subsetneq G$ *y sea* U *un subobjeto de* X *(no necesariamente representable). Entonces* U *es abierto de Penon sii* U *es representable por* $\dfrac{\overline{C^{\infty}(U')}}{I|_{U'}}$ *para cierto abierto* $U' \subseteq \mathbb{R}^n$.

En el capítulo 2. generalizamos este resultado para el caso en que X es una exponencial de representables.

Referencias

[1] Bruno, Oscar P.: *"Internal Mathematics in Toposes"*, Trabajos de Matemática, N°70, I.A.M., Argentina.

[2] Dubuc, Eduardo J.: *"Sur les modeles de la Géometrie Differentielle Synthêtique"*, Cahiers de Topologie et Géometrie Différentielle, XX.

[3] Dubuc, Eduardo J.: *"C^{∞}-Schemes"*, American Journal of Mathematics, 103(4).

[4] Dubuc, Eduardo J.: *"Integración de campos vectoriales y geometría diferencial sintética"*, VII Seminario Nacional de Matemática, FAMAF, Univ. Nac. de Córdoba, Cursos y Conferencias (1984).

[5] Frölicher, A.: *"Smooth Structures"*, Lecture Notes in Mathematics 962, Springer (Proceedings Gummersbach, 1981).

[6] Grothendieck; Artin; Verdier: "S.G.A. IV", Lecture Notes in Mathematics n° 269, Springer-Verlag.

[7] Kock, A: *"Synthetic Differential Geometry"*, Cambridge University Press, 1981.

[8] Lawvere, F. W.: *"Categorical Dynamics"*, talk at the University of Chicago, Mayo 1967, en Various Publications Series N° 30, Aarhus Universitet.

[9] Mac Lane, S.: *"Categories for the working mathematics"*, Springer-Verlag.

[10] Malgrange, B.: *"Ideals of differentiable functions"*, Oxford University Press, 1966.

[11] Moerdijk, I; Ngo van Que; Reyes, G. E.: *"Forcing smooth squares roots and integration"*, University of Amsterdam (Preprint, 1984).

[12] Muñoz Diaz, J.: *"Caracterización de las algebras diferenciables"*, Collectanea Mathematica, Vol. XXIII, fasículo 1°(1972).

[13] Penon, J.: *"De l'infinitesimal au local"*, these de doctorat d'Etat, Paris VII (1985). Publicado en Diagrammes, Paris VII.

[14] Reyes, G. E.; Moerdijk, I.; Ngo van Que: *"Forcing smooth squares roots and integration"*, preprint, Departament of Mathematics, University of Amsterdam.

[15] Reyes, G. E.; Moerdijk, I.: *"Smooth spces versus continuous spaces in models of synthetic differential geometry"*, Journal of Pure and Applied Algebra 32.

[16] Tourgeron, J. C.: *"Ideaux de fonctions differentiables"*, Springer, Berlin (1972).