Invariantes en álgebras de Banach

Suárez, Fernando Daniel

1985

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INVARIANTES EN ALGEBRAS DE BANACH

POR

FERNANDO DANIEL SUAREZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. GUSTAVO CORACH

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TITULO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

1985

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado entre 1982 y 1985, período en el que conté con becas del CONICET, sin cuya ayuda, jamás se hubiera escrito.

Agradezco al IAM como institución, por haberme provisto de un lugar agradable donde trabajar, y por las muchas posibilidades brindadas, entre ellas, la de tipear esta tesis; pero particularmente, agradezco a sus miembros, por haberme ayudado durante estos años de muchas maneras distintas.

Leticia Scoccia hizo un gran trabajo de tipeo, dedicando a la tarea tanto entusiasmo como no le hubiera dedicado el mismo autor.

Quiero también agradecer a muchos colegas de la UBA por su aliento, sugerencias y confianza; a mi amigo Horacio Porta, cuya ayuda y enseñanzas siempre guardaré en la memoria; y para terminar, mis más profundas gracias a mi amigo y director de tesis, Gustavo Corach, con quien me introduje en el tema, y de cuyos conocimientos, colaboración y amistad, me he nutrido en los últimos años.

Fernando Daniel Suárez.

Haedo, 8 de Octubre de 1985.

INDICE

INTRODUCCION

El concepto de rango estable es usado por Bass [4] desde los comienzos de la K - teoría como un medio para estabilizar los K - grupos de un anillo; a partir de aquí, se inicia una serie de investigaciones tendientes a desarrollar este concepto, estudiando por un lado sus consecuencias, y por otro, relacionándolo con la estructura de ciertos anillos particulares. Es principalmente en este último sentido que el rango estable llama la atención de los analistas; el primer antecedente y posiblemente el desencadenante de esta tendencia, es un trabajo de Vasershtein [49] en el cual se demuestra, entre otras cosas, que el rango estable del álgebra de funciones continuas sobre un espacio topológico X , queda definitivamente determinado por la dimensión de X ; es promisorio pensar entonces, que la vieja corriente matemática, de relacionar un álgebra de Banach compleja conmutativa (A) con su espacio de ideales maximales (X(A)) , puede enriquecerse con el aporte del rango estable; efectivamente, la estructura de las álgebras de Banach nos permite establecer estrechas relaciones topológicas inherentes a A y a X(A).

Esencialmente su aplicación al análisis viene dada en el terreno de la interpolación, o en caso de álgebras de funciones, su problema dual, que es el de extensión.

En un trabajo reciente, Rieffel [39] define otras nociones de estabilidad (o como dice él, otras "dimensiones") para anillos topológicos, entre las cuales se destaca el rango estable topológico, también estudiaremos este concepto, en el contexto de álgebras de Fréchet primero, y de álgebras de Banach después, sirviendo en este caso a problemas de aproximación, tan cercanos por otra parte a las cuestiones de interpolación.

Este trabajo consta de tres capítulos, en el primero, se estudia el concepto de unimodular, en torno al cual gira toda la teoría siguiente; los resultados de este capítulo han sido extraídos casi en su totalidad de trabajos de Corach y Larotonda [9] y [10], aún cuando muchas de las demostraciones han sido cambiadas, particularmente, con el aporte de algunos resultados de Michael sobre selecciones continuas [31] y [32].

En el capítulo II se demuestra que el problema de hallar el rango estable de un álgebra de Banach conmutativa ($sr(A)$), es equivalente a un problema de extensión de homotopía inherente al espacio $X(A)$ y a los ceros de los ideales de A. Se prueba asimismo que $sr(A_1) = 1$, y más generalmente, que $[n/2] + 1 \leq sr\, A_n \leq n$, donde A_n es el álgebra del n-polidisco y $[q]$ es la parte entera de q. Hay también otras estimaciones del rango estable para algunas álgebras uniformes y su significado analítico, finalizando con una generalización de algunos de los resultados obtenidos en el capítulo I y sus posibles aplicaciones.

El capítulo III trata sobre el rango estable topológico (tsr), obteniéndose una caracterización espectral del mismo, en álgebras de Fréchet. Se generaliza un resultado de Rieffel sobre el álgebra de funciones continuas, del intervalo $[0,1]$ en un álgebra de Banach; terminando con el estudio, en el caso conmutativo, de como se conectan tsr A y X(A) cuando X(A) contiene o está contenido en una variedad.

Capítulo I. UNIMODULARES

Unimodulares y la n - esfera.

Si A es un anillo con identidad, notaremos con $A^{\bullet}$ los elementos inversibles, y si $M_n(A)$ es el anillo de matrices de orden $n \times n$ con coeficientes en A, como es usual, $GL_n(A) \subset M_n(A)$ será el grupo de matrices inversibles.

Definición 1.1: Sea A un anillo con identidad y n un número natural, diremos que un elemento $a \in A^n$ es unimodular (a izquierda) si alguna de las siguientes condiciones equivalentes se verifica:

i) existe $b \in A^n$ tal que

$$\langle b,a \rangle = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = 1$$

ii) la aplicación A - lineal

$$\langle\ ,a \rangle : A^n \to A$$

es suryectiva

iii) el ideal $\sum_{i=1}^{n} A\, a_i$ es igual a A.

Notaremos $U_n(A)$ al conjunto de elementos unimodulares de A^n. En particular el conjunto de elementos inversibles a izquierda de A será $U_1(A)$. De forma completamente análoga se definen los unimodulares a derecha, los cuales notaremos ${}_nU(A)$. El concepto de unimodular es el eje sobre el cual gira toda la teoría aquí desarrollada, por eso, los anillos considerados necesariamente deberán tener una unidad; sin embargo, si A no tiene unidad, podemos adjuntarle una obteniendo así un anillo unitario A^+, y desarrollar allí la teoría; muchos de los hechos obtenidos para A^+ van a seguir teniendo sentido, con la definición apropiada, si uno "baja" a A . Como el análisis sistemático de cuáles resultados siguen valiendo para A y cuales no, ocuparía demasiado lugar y cansaría innecesariamente la atención, vamos a resistir esta tendencia y considerar sólo anillos unitarios. De manera que cuando se mencione un anillo cualquiera, o específicamente un álgebra de Banach, de Fréchet, etc., se entenderá siempre que tiene unidad.

Los unimodulares aparecen naturalmente en un anillo de varias formas distintas, veamos una, si A es un anillo con unidad, y $GL_n(A)$ es el conjunto de matrices de dimensión $n \times n$ inversibles, es claro que sus filas están en $U_n(A)$ y sus columnas en ${}_nU(A)$; por otra parte no siempre la recíproca es cierta, es decir, no todo unimodular a izquierda es la fila de alguna matriz inversible, dependiendo esto del anillo en cuestión.

Vamos a desarrollar la teoría para unimodulares a izquierda, pero es evidente que lo mismo valdrá para unimodulares a derecha, simplemente considerando A^{op} , el anillo cuyo producto es el opuesto de A .

Estudiaremos algunas propiedades de los unimodulares y de ciertos conjuntos relacionados con ellos, cuando A es un álgebra de Banach (real o compleja) con unidad.

Proposición 1.2: $U_n(A)$ es abierto en A^n .

Dem.: Tomemos $a \in U_n(A)$ y $b \in A^n$ tales que $\langle b,a \rangle = 1$. Si llamamos f a la aplicación

$$\langle b, \ \rangle : A^n \to A$$

resulta claro que f es contínua, por lo que

$$V = \{x \in A^n : f(x) \in A^{\bullet}\}$$

es abierto en A^n (ya que $A^{\bullet}$ es abierto en A), y está incluido en $U_n(A)$, pues si $\langle b,x \rangle = u \in A^{\bullet}$, es inmediato que $\langle u^{-1} b, x \rangle = 1$, donde $u^{-1} b = (u^{-1} b_1, \dots, u^{-1} b_n)$. Por lo tanto $a \in V \subset U_n(A)$, lo que muestra lo afirmado.

Definición 1.3: En $A^n \times A^n$ definimos la n-esfera como el conjunto $S_n(A) = \{(a,b) \in A^n \times A^n : \langle b,a \rangle = 1\}$.

Es claro que la proyección sobre el primer factor induce una sobreyección $p : S_n(A) \to U_n(A)$, veremos que vía esta aplicación podemos relacionar homotópicamente $U_n(A)$ con ${}_nU(A)$, para lo cual necesitaremos algún trabajo previo, hecho esencialmente por Michael [32].

Si X es un espacio topológico metrizable, Y un espacio topolÓgico, y $P(Y) = \{S \subset Y : S \neq \phi\}$; una aplicación $\phi : X \to P(Y)$ es semicontinua inferiormente si el conjunto

$$\{x \in X : \phi(x) \cap V \neq \phi\}$$

es abierto en X para cada abierto $V \subset Y$.

Teorema 1.4 (Michael): Sea X metrizable, y M un subconjunto metrizable de un espacio localmente convexo F , tal que la cápsula convexa cerrada de cada conjunto compacto $K \subset M$, es compacta. Sea $\phi : X \to P(M)$ semicontinua inferiormente y tal que $\phi(x)$ es completo (para alguna métrica en M). Entonces existe $f : X \to F$ tal que para todo $x \in X$,

$$f(x) \in (\mathrm{conv}\ \phi(x))^{-}$$

(donde H^{-} significa la clausura de H).

Con este resultado en mente podemos encarar el siguiente teorema.

Teorema 1.5:

1) $p : S_n(A) \to U_n(A)$ admite una sección global.

2) p es una equivalencia homotópica.

Dem.: Consideremos $p^{-1} : U_n(A) \to P(S_n(A))$; donde $p^{-1}(a) = \{ b \in A^n : \langle b,a\rangle = 1 \}$ es una variedad lineal, pues si $b_1, b_2 \in p^{-1}(a)$, tenemos que $\langle b_1 - b_2, a\rangle = 0$, y por lo tanto $b_2 \in b_1$

$+ \operatorname{Ker} f$, donde $f(x) = \langle x,a \rangle (f : A^n \to A)$. Por otra parte , cualquier elemento $c \in b_1 + \operatorname{Ker} f$ verifica $\langle c,a \rangle = 1$.
Entonces $p^{-1}(a)$ es convexo y cerrado (pues f es continua).
Veamos que p^{-1} es semicontinua inferiormente, sea V un abierto de $S_n(A)$ (con la topología inducida por A^{2n}) y veamos que:

$$T = \{x \in U_n(A) \ : \ p^{-1}(x) \cap V \neq \phi\}$$

es abierto en $U_n(A)$.
Sea $x_0 \in T$, entonces $p^{-1}(x_0) \cap V \neq \phi$, es decir existe $b_0 \in A^n$ tal que $\langle b_0,x_0 \rangle = 1$ y $(x_0,b_0) \in V$.
Tomemos en A^n alguna de las normas equivalentes derivadas de la norma de A . Dado $0 < \epsilon < 1$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x_1 - x_0\| < \delta$, tenemos

$$\|\langle b_0,x_1 \rangle - 1\| = \|\langle b_0,x_1 - x_0 \rangle\| < \epsilon$$

por lo que $\langle b_0,x_1 \rangle = 1 + h$ con $\|h\| < \epsilon$; como $\epsilon < 1$,este elemento es inversible, y su inversa es $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (-h)^j$.

Así, $\qquad \|\langle b_0,x_1\rangle^{-1}\| \leqslant \sum\limits_{j\geqslant 0} \epsilon^j = \dfrac{1}{1-\epsilon}$.

Tomemos $b_1 = \langle b_0,x_1\rangle^{-1} . b_0$, resulta entonces que

$$\|b_1 - b_0\| = \|\langle b_0,x_1 \rangle^{-1}(1 - \langle b_0,x_1\rangle)b_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\langle b_0,x_1 \rangle^{-1}\| \ \|1 - \langle b_0,x_1 \rangle\| \, \|b_0\| < \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \|b_0\| = \epsilon' \ .$$

Como $\langle b_1, x_1 \rangle = \langle b_0, x_1 \rangle^{-1} . \langle b_0, x_1 \rangle = 1$, es claro que $(x_1, b_1) \in p^{-1}(x_1)$, y como

$$\|x_0 - x_1\| < \delta \quad ; \quad \|b_0 - b_1\| < \epsilon'$$

con ϵ' tan chico como se quiera, con tal de tomar δ suficientemente pequeño, obtenemos así que para un δ adecuado $(x_1, b_1) \in V$.

O sea que si $\|x_0 - x_1\| < \delta$, tenemos $p^{-1}(x_1) \cap V \neq \phi$, con lo cual T es abierto.

Entonces por el teorema de Michael existe $\varphi : U_n(A) \to A^n \times A^n$ continua, tal que

$$\varphi(a) \in (\mathrm{conv}\ p^{-1}(a))^-$$

pero como $p^{-1}(a)$ es convexo y cerrado, queda que

$$\varphi(a) \in p^{-1}(a) \ , \ \text{con} \quad \varphi : U_n(A) \to S_n(A)$$

Es inmediato que φ es una sección de p , es decir $p(\varphi(a)) = a$, lo que prueba 1).

Para probar 2) usemos la sección recién encontrada, como $p \circ \varphi = id_{U_n(A)}$, basta con ver que $\varphi \circ p$ es homotópica a $id_{S_n(A)}$. Definamos $F : I \times S_n(A) \to S_n(A)$ por

$$F(t;(a,b)) = (a, \varphi_2(a) + t(b - \varphi_2(a))$$

donde $\varphi_2 = \pi_2 \circ \varphi : U_n(A) \to {}_nU(A)$, siendo π_2 la proyección del segundo factor de $S_n(A)$, en ${}_nU(A)$.
Obviamente F es continua y efectivamente va a $S_n(A)$, pues

$$\langle \varphi_2(a) + t(b - \varphi_2(a)), a \rangle =$$

$$= \langle \varphi_2(a), a \rangle + t(\langle b, a \rangle - \langle \varphi_2(a), a \rangle) =$$

$$= 1 + t(1 - 1) = 1 .$$

Y como $F(0;(a,b)) = (a,\varphi_2(a)) = \varphi(p(a,b))$

y $F(1;(a,b)) = (a,b)$,

obtenemos que $F_0 = \varphi \circ p$ y $F_1 = id_{S_n(A)}$,como queríamos.

<u>Corolario 1.6</u>: $U_n(A)$ y ${}_nU(A)$ son homotópicamente equivalentes.

<u>Corolario 1.7</u>: Si X es un espacio topológico y $Y \subset X$ es cerrado, toda aplicación continua

$$(X,Y) \to (U_n(A), a)$$

se puede levantar a

$$(X,Y) \to (S_n(A), (a,b))$$

para algún $b \in A^n$, tal que $\langle b, a \rangle = 1$.

Si A es un álgebra de Banach y X es un compacto separado, consideremos el álgebra de Banach de funciones continuas de X en A, $C(X,A)$, con $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|_A , x \in X\}$.
Si $A = C$, notaremos simplemente $C(X)$.

Corolario 1.8: La inclusión

$$U_n(C(X,A)) \xrightarrow{i} C(X,U_n(A))$$

es un homeomorfismo.

Dem.: Basta con ver que i es suryectiva. Por el último corolario, si $f \in C(X,U_n(A))$, existe $g \in C(X,{}_nU(A))$ tal que $(f,g) \in C(X,S_n(A))$. Pero es claro que

$$C(X,S_n(A)) \approx S_n(C(X,A))$$

luego $f \in U_n(C(X,A))$.
En realidad esto puede probarse de una forma más directa, sin el uso del teorema 1.5; la siguiente demostración está adaptada de [5] (ver [9]).
Si X es paracompacto y $f : X \to U_n(A)$ es continua, sabemos que dado $x \in X$, existen $g_1(x),\ldots,g_n(x)$ tales que $\Sigma f_i(x) g_i'(x) = 1$.
Como $A^\bullet$ es abierto, existe un entorno abierto V_x de x tal que $\Sigma f_i(y)\, g_i'(x) \in A^\bullet$ $(y \in V_x)$, luego

$$y \to g_i'(x)\ [\Sigma\ f_i(y)\ g_i'(x)]^{-1}$$

es una función continua definida en V_x . Usando una partición de la unidad subordinada a un refinamiento localmente finito de (V_x), podemos construir $g_i : X \to A$ tal que

$$\langle f,g \rangle = \Sigma\ f_i g_i = 1\ .$$

En igual forma podemos probar que si X es una variedad de clase C^k $(1 \leqslant K \leqslant \infty)$:

$$C^K(X,U_n(A)) \approx U_n(C^K(X,A))\ .$$

<u>$U_n(A)$ y $GL_n(A)$.</u>

Como ya dijimos anteriormente, $GL_n(A)$ está íntimamente relacionado con $U_n(A)$; aquí vamos a estudiar esa relación, y veremos, entre otras cosas, condiciones suficientes para que un unimodular dado se pueda completar a una matriz inversible.

Si A es un anillo con unidad, $a,b \in A^n$ y $\sigma \in M_n(A)$, resulta $\langle b,\sigma.a \rangle = \sum_{T=1}^{n} b_T\ [\sum_{j=1}^{n} \sigma_{Tj}\ a_j] = \sum_{T=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_T\ \sigma_{Tj}\ a_j =$

$= \sum_{j=1}^{n} [\sum_{T=1}^{n} b_T\ \sigma_{Tj}]\ a_j = \langle b.\sigma,a \rangle$.

Dado $a \in A^n$, definamos

$$T : M_n(A) \to A^n \quad \text{por} \quad T(\sigma) = \sigma.a$$

y $\quad t_a : GL_n(A) \to A^n \quad , \quad t_a = T / GL_n(A)$.

Proposición 1.9: Las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) $\quad a \in U_n(A)$,

(ii) $\quad$ la imagen de t_a está contenida en $U_n(A)$,

(iii) la imagen de t_a interseca $U_n(A)$.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii) como $a \in U_n(A)$, existe $b \in A^n$ tal que $\langle b,a \rangle = 1$. Tomemos un x en la imagen de t_a , entonces $x = \sigma.a$ con $\sigma \in GL_n(A)$, y:
$\langle b\sigma^{-1},x \rangle = \langle b\sigma^{-1},\sigma a \rangle = \langle b\sigma^{-1}\sigma,a \rangle = \langle b,a \rangle = 1$, por lo que $x \in U_n(A)$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) es trivial.
(iii) $\Rightarrow$ (i) si x es unimodular y está en la imagen de t_a , $x = \sigma a$ para algún $\sigma \in GL_n(A)$, y existe $y \in A^n$ tal que

$$1 = \langle y,x \rangle = \langle y,\sigma a \rangle = \langle y\sigma^{-1},a \rangle \quad ,$$

y así $a \in U_n(A)$.
Observemos que en general t_a (con $a \in U_n(A)$) no tiene por qué ser suryectiva, por ejemplo, si A no es conmutativo, $n = 1$ y $a = 1$, t_a es la inclusión del grupo de elementos inversibles de A , $A^\bullet$, en $U_1(A)$, los elementos inversibles a izquierda, en general un conjunto más grande que $A^\bullet$.
Pero aún en el caso de un álgebra de Banach conmutativa con uni-

dad, t_a puede no ser suryectiva (ver [9] para un ejemplo).
Sin embargo, t_a tiene importantes propiedades.

<u>Proposición 1.10</u>: Si $a \in U_n(A)$, $t_a : GL_n(A) \to U_n(A)$ es abierta.

<u>Dem.</u>: $T : M_n(A) \to A^n$,dada por $T(\sigma) = \sigma.a$ es un epimorfismo, pues si $\langle b,a \rangle = 1$ y $x \in A^n$, $\sigma = (x_i b_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ verifica que $\sigma.a = x$.
Por el teorema de la aplicación abierta, T es abierta, y como $t_a = T / GL_n(A)$ y $GL_n(A)$ es abierto, resulta que t_a es abierta.
Como hemos visto, $GL_n(A)$ actúa sobre $U_n(A)$ por intermedio de la aplicación

$$\begin{aligned} GL_n(A) \times U_n(A) &\to U_n(A) \\ (\sigma,a) &\to \sigma.a \end{aligned}$$

podemos entonces considerar la siguiente relación de equivalencia en $U_n(A)$:
si $a,b \in U_n(A)$, $a \sim b \Leftrightarrow$ existe $\sigma \in GL_n(A)$ tal que $\sigma.a = b$.
Notemos Γ_a la clase (la órbita) de a :

$$\Gamma_a = \{\sigma a : \sigma \in GL_n(A)\} = GL_n(A).a$$

y G_a la fibra (el estabilizador) de a :

$$G_a = \{\sigma \in GL_n(A) : \sigma a = a\}$$

Siendo $\Gamma_a = \text{im } t_a$, por la proposición es abierto, pero entonces también es cerrado (en $U_n(A)$), es decir Γ_a es unión de algunas componentes conexas de $U_n(A)$.
Es también claro que Γ_a es un espacio homogéneo,vía el isomorfismo analítico de variedades de Banach inducido por t_a

$$\hat{t}_a : GL_n(A)/G_a \to \Gamma_a$$

con lo que $U_n(A)$ resulta ser una unión discreta de espacios homogéneos.
Para información sobre la estructura analítica de A^n , el lector puede remitirse a [5] o [27].
Por razones de exposición pondremos también $t_a : GL_n(A) \to \Gamma_a$ indicando el codominio,aún cuando originalmente $t_a : GL_n(A) \to U_n(A)$.
Para probar la propiedad fundamental de t_a,que será usada a lo largo de todo este trabajo, usaremos el siguiente teorema, el cual puede encontrarse en [31] como Corolario 7.3.

Teorema 1.11: Sea G un grupo metrizable, y H un subgrupo cerrado, que es (localmente) isomorfo al grupo aditivo de un espacio vectorial topológico metrizable, completo, y localmente convexo. Entonces la aplicación $p : G \to G/H$ tiene una sección local.

Proposición 1.12: $t_a : GL_n(A) \to \Gamma_a$ es una fibración principal localmente trivial.

Dem.: Vía $\hat{t}_a$ podemos identificar Γ_a con $GL_n(A)/G_a$ y t_a

con la proyección $p : GL_n(A) \to GL_n(A)/G_a$, luego por el teorema existe una sección local de p , es decir, dado $p(x) \in GL_n(A)/G_a$, existe un entorno abierto U de $p(x)$ y una función continua $s : U \to GL_n(A)$ tal que $p(s(y)) = y$ $\forall y \in U$. Obviamente $z_0 = s(p(x)) \in p^{-1}(p(x))$, si $z_1 \in p^{-1}(p(x))$, $s_{z_1} : U \to GL_n(A)$ definida por $s_{z_1}(y) = s(y)\, z_0^{-1}\, z_1$ también es una sección local, y además $s_{z_1}(p(x)) = z_1$.

El resto sale por teoría general (ver [24]).

Es interesante ver que en [9],Corach y Larotonda construyen explícitamente una sección local sin el uso del teorema de Michael, de la forma siguiente:

Si $b \in A^n$ es tal que $\langle b,a \rangle = 1$ y si

$N = \mathrm{Ker}\ (x \to \langle x,a \rangle)$ de A^n en A ,

entonces se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N^n \longrightarrow M_n(A) \xrightarrow{T} A^n \longrightarrow 0$$

donde $T(\sigma) = \sigma.a$.

La función $j : A^n \to M_n(A)$ definida por $j(x) = (x_i b_K)$ es una sección para T , y es claro que la exponencial $\exp : M_n(A) \to GL_n(A)$ induce un isomorfismo local de variedades de Banach

$$\exp / N^n : N^n \to G_a .$$

Definamos $\phi : A^n \to \Gamma_a$ por $\phi = t_a \circ \exp \circ j$, o sea

$$\phi(x) = \exp\ (x_i b_K).a \qquad (x \in A^n).$$

Entonces la derivada de ϕ en 0 es

$$D_0(\phi) = D_1(t_a) \circ D_0(\exp) \circ D_0(j) = 1_{A^n}$$

pues $D_1(t_a) = T$, $D_0(\exp) = 1_{M_n(A)}$, $D_0(j) = j$;
y $T \cdot j(x) = (x_i b_K).a = (x_i) = x$.
Luego, por el teorema de la función inversa, existen entornos U de 0 en A^n y V de a en Γ_a tales que

$$\phi : U \to V$$

es un isomorfismo, y

$$s = \exp . j . \phi^{-1} : V \to GL_n(A)$$

es una sección de t_a , tal que $s(a) = 1$.

<u>Corolario 1.13</u>: $t_a : GL_n(A) \to U_n(A)$ es una fibración de Serre.

El estudio de las propiedades homotópicas de $U_n(A)$, donde A es un álgebra de Banach, requiere la identificación de una componente conexa destacada de $U_n(A)$. Es fácil ver que los vectores canónicos de A^n :

$e_1 = (1,0,\ldots,0);\ldots; e_n = (0,\ldots,0,1)$

están todos en la misma componente conexa de $U_n(A)$, la cual llamaremos $U_n(A)_0$.
Es sabido que si A es un álgebra de Banach, la componente cone-

xa del 1 en $A^{\cdot}$, notada $A_0^{\cdot}$, es el subgrupo de $A^{\cdot}$ generado por la imagen de la función exponencial:

$$\exp : A \to A^{\cdot} \qquad\qquad \exp a = \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$$

En particular, cuando A es conmutativa la imagen de la exponencial es un subgrupo de $A^{\cdot}$ y $\exp A = A_0^{\cdot}$.
Con estas notaciones, $GL_n(A)_0$ será la componente conexa del $1_{M_n(A)}$ en $GL_n(A) = M_n(A)^{\cdot}$.

<u>Proposición 1.14</u>: Si $a \in U_n(A)_0$ y $t_a : GL_n(A)_0 \to U_n(A)$, $t_a(\sigma) = \sigma.a$, entonces $\operatorname{im} t_a = U_n(A)_0$.

<u>Dem.</u>: por el corolario anterior, si $\operatorname{im} t_a \cap U_n(A)_0 \neq \phi$, entonces $\operatorname{im} t_a \supset U_n(A)_0$, pero como $\operatorname{im} t_a$ es conexo y está incluido en $U_n(A)$, tenemos que $\operatorname{im} t_a = U_n(A)_0$.
Luego como $t_a(1) = a \in \operatorname{im} t_a \cap U_n(A)_0$, sale la proposición.

Veamos ahora la acción de un morfismo de álgebras de Banach unitarias $f : A \to B$ en los elementos unimodulares.
Como se ve claramente, f induce una función lineal continua

$$f : A^n \to B^n$$

y por restricción, una aplicación continua

$$f : U_n(A) \to U_n(B)$$

que en el caso $n = 1$ es un morfismo de grupos.

Claramente también las aplicaciones inducidas

$$f_1 : A^\cdot \to B^\cdot \quad \text{y, en general} \quad f_n : GL_n(A) \to GL_n(B)$$

son morfismos de grupos.

<u>Teorema 1.15</u>: Sean A y B álgebras de Banach, $f : A \to B$ un epimorfismo, entonces

(i) $f_1 : A_0^\cdot \to B_0^\cdot$ es una fibración localmente trivial

(ii) $f_1 : A^\cdot \to B^\cdot$ es una fibración de Serre.

(Como antes, notamos igual a dos morfismos con distintos dominios y codominios por razones de simplicidad).

<u>Dem.</u>: (ii) es una consecuencia inmediata de (i).

Para demostrar (i), por [7] basta con ver que $f_1(A_0^\cdot) = B_0^\cdot$.

Claramente $f_1(A_0^\cdot) \subset B_0^\cdot$. Si $b \in B_0^\cdot$, como $B_0^\cdot$ está generado por la imagen de $\exp$, existen $b_1,\ldots,b_n \in B$ tales que $b = \prod_{i=1}^{n} \exp b_i$.

El diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\exp"'] & B \arrow[d, "\exp"] \\ A_0^\cdot \arrow[r, "f_1"] & B_0^\cdot \end{tikzcd}$$

muestra que $\exp b_i \in f_1(A_0^\cdot)$, luego

$$b = \prod_{i=1}^{n} \exp b_i \in f_1(A_0^{\cdot}) .$$

Notemos que $f : A \to B$ induce un epimorfismo de $M_n(A) \to M_n(B)$, que por restricción induce $f_n : GL_n(A) \to GL_n(B)$, al cual se le puede aplicar el teorema anterior.

En general, el homomorfismo de grupos inducido $f_n : GL_n(A) \to GL_n(B)$ puede no ser suryectivo, por ejemplo si $A = C(\bar{\Delta})$, donde $\bar{\Delta} = \{z \in C : |z| \leq 1\}$, $B = C(S^1)$, y $f : A \to B$ es la aplicación restricción, tenemos que $A^{\cdot}$ es conexo y $\Pi_0(B^{\cdot}) = Z$ (ver [24]), por lo que $f_1 : A^{\cdot} \to B^{\cdot}$ no puede ser suryectiva.

Teorema 1.16: Si $f : A \to B$ es un epimorfismo de álgebras de Banach, entonces la aplicación inducida

$$\tilde{f}_n : U_n(A) \to U_n(B)$$

es una fibración de Serre.

Dem.: Si $a \in U_n(A)$ y $b = f(a)$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} GL_n(A) \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "t_a"'] & GL_n(B) \arrow[d, "t_b"] \\ U_n(A) \arrow[r, "\tilde{f}_n"] & U_n(B) \end{tikzcd}$$

t_a, t_b y f_n son fibraciones de Serre por el comentario anterior y corolario 1.13, el resto es claro.

Recordemos que una subálgebra A de B se dice plena si $B^{\bullet} \cap A = A^{\bullet}$. El siguiente teorema fue extraído de [9].

Teorema 1.17: Sean A y B álgebras de Banach y $f : A \to B$ un monomorfismo con imagen densa y plena. Entonces $f_n : U_n(A) \to U_n(B)$ es una equivalencia homotópica.

Dem.: En [36] (Teoremas 12 y 15) Palais demuestra lo siguiente: si $g : E \to F$ es una aplicación lineal continua de espacios de Fréchet con imagen densa, y $U \subset F$ es abierto, g es una equivalencia homotópica entre $g^{-1}(U)$ y U. Luego, basta con ver que

$$f_n^{-1}(U_n(B)) = U_n(A)$$

o, la inclusión no trivial

$$f_n^{-1}(U_n(B)) \subset U_n(A) \quad .$$

Si $f(a) \in U_n(B)$, existe $b \in B^n$ tal que $\langle b, f(a) \rangle = 1$, y como $f(A)$ es denso en B y $B^{\bullet}$ es abierto en B, existe $c \in A^n$ tal que $\langle f(c), f(a) \rangle \in B^{\bullet}$, o sea $f(\langle c, a \rangle) \in B^{\bullet}$, pero por la plenitud de $f(A)$ resulta que $\langle c, a \rangle \in A^{\bullet}$, en particular $a \in U_n(A)$.

No se puede quitar la hipótesis de plenitud, como lo muestra el ejemplo anterior.

Algebras de Banach conmutativas.

Vamos a considerar ahora el caso conmutativo, la posibilidad de pensar al álgebra A como una "subálgebra" (no necesariamente inyectiva) del álgebra de funciones continuas sobre su espectro,enriquece la teoría con resultados mucho más definitivos que en el caso no conmutativo.

Aunque gran parte de lo que sigue es clásico y muy sabido, es conveniente ponerlo (en la forma más breve posible) como medio de introducir notación. En adelante, y hasta el fin del capítulo, A será un álgebra de Banach compleja y conmutativa.

Generalidades: Si A' es el dual de A como espacio de Banach, con la topología de convergencia puntual, también llamada débil (inducida por la topología producto de C^A), consideremos el conjunto (el espectro de A):

$$X(A) = \{\varphi \in A' : \varphi \not\equiv 0 \quad y \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \forall x,y \in A\} \quad ,$$

se demuestra que $X(A)$ está incluido en la esfera unidad de A', y que resulta compacto con la topología inducida. Además, si $\varphi \in X(A)$, $\varphi(1) = 1$ y $\operatorname{Ker} \varphi$ es un ideal maximal; recíprocamente, si M es un ideal maximal de A , que necesariamente es cerrado, existe un único $\varphi \in X(A)$ tal que $\operatorname{Ker} \varphi = M$.

Luego uno puede definir un morfismo continuo

$$A \xrightarrow{\wedge} C(X(A))$$

$$a \to \hat{a} \ , \ \hat{a}(\varphi) = \varphi(a) \ ,$$

llamado la transformada de Gelfand, con las siguientes propiedades:

(i) $\|\hat{a}\| \leq \|a\|$

(ii) $\hat{A}$ es plena en $C(X(A))$, es decir $sp\ \hat{a} = \hat{a}(X(A)) = sp(a)$ $\forall a \in A$, donde $sp\ a = \{\lambda \in C \ / \ a - \lambda \notin A^{\bullet}\}$ (el espectro de a).

(iii) Ker $\hat{}$ $= \cap\{M \subset A : M$ ideal maximal$\}$, llamado el radical de Jacobson (rad A).

Observemos que (ii) implica (i). A se dice semisimple si y sólo si rad A = 0 , o sea si $\hat{}$ es inyectivo, por lo que $A / \text{rad } A$ con su norma inducida es un álgebra de Banach semisimple.

La imagen $\hat{A}$ puede no ser cerrada en $C(X(A))$, como muestra por ejemplo tomar $A = C^K(S^1)$ con

$\|a\| = \sup_{t \in S^1} \{ \sum_{j=0}^{K} |a^{(j)}(t)| \}$, donde $a^{(j)}$ es la derivada j-ésima de a.

Si I es un ideal cerrado de A ,

$$\text{hull } I = \{\varphi \in X(A) : \varphi(b) = 0 \quad \forall b \in I\} \quad ,$$

es fácil ver que $X(A/I)$ se puede identificar con hull I.

La relación entre un álgebra de Banach y su espectro ha sido estudiada desde los comienzos de la teoría, y mucho se podría decir al respecto, uno de los primeros resultados en esta dirección es el teorema de Shilov [43]: $H^0(X(A),Z)$ = grupo generado por idempotentes de A ; también están los teoremas de:

Arens - Royden [3;41]: $H^1(X,Z) = A^{\bullet}/\exp A$

Forster [20] : $H^2(X,Z) = \mathrm{Pic}(A)$ (grupo de Picard)

Taylor [47] : $H^3(X,Z) = \mathrm{Br}(A)$ (grupo de Brauer).

Cuando el álgebra en cuestión es de la forma $C(X)$, con X un compacto separado, su espectro coincide con las evaluaciones en los puntos de X, y la topología inducida por el dual es igual a la topología original; es fácil ver en esas condiciones que $C(X)$ es isomorfo a $C(Y)$, como álgebras de Banach, si y sólo si X es homeomorfo a Y, lo que hace razonable pensar que las propiedades topológicas de X se traducirán en propiedades de $C(X)$ y viceversa; por ejemplo, Watts [50] calcula los grupos de homología de X a partir de $C(X)$.

Siguiendo las ideas de Novodvorskii [35], y haciendo uso de un cálculo funcional holomorfo global desarrollado por Craw [15]; Taylor [46], [47], y Raeburn [37] prueban los resultados más completos en esta dirección, uno de los cuales será de uso continuo en este trabajo. Primero necesitamos algunas definiciones previas.

<u>Definición 1.18</u>: Sea A un álgebra de Banach compleja conmutativa, B un espacio de Banach, y $M \subset B$.

1) $A \hat{\otimes} B$ es el espacio de Banach que se obtiene por la completación de $A \otimes B$ con norma $\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \| = \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_A \|b_i\|_B$ (Notemos que si $\alpha \in A \hat{\otimes} B$, $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes b_i$, con $\Sigma \|a_i\| \|b_i\| < \infty$).

2) $\mathrm{sp}\, \alpha = \mathrm{im}\, \hat{\alpha} \subset B$, donde

$$\hat{\alpha}(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(a_i) b_i \quad (\text{para } \varphi \in X(A))$$

3) $A^M = \{\alpha \in A \hat{\otimes} B : \text{sp}\, \alpha \subset M\}$

Para un desarrollo de la teoría de estos "conjuntos espectrales", A^M, cuando M es una variedad o un espacio homogéneo, uno puede acudir a [51].

Teorema 1.19: Sea M un abierto de B, y supongamos que M es una unión discreta de espacios homogéneos. Entonces A^M es localmente conexo por arcos y la transformada de Gelfand $\hat{}: A \to C(X(A))$ induce una biyección de $\pi_0(A^M)$ (componentes conexas de A^M) en $[X(A), M]$ (donde $[X,Y]$ nota las clases de homotopía de aplicaciones continuas de X en Y).

Observemos que si B es un álgebra de Banach y $M = U_n(B)$, entonces por el comentario que sigue a la proposición 1.10, $U_n(B)$ está en las condiciones del teorema.

Lema 1.20: $a \in U_n(A)$ si y sólo si $\hat{a} \in U_n(C(X(A)))$.

Dem.: $\hat{a} \in U_n(C(X(A))) \Leftrightarrow h(a) \neq 0 \;\; \forall h \in X(A) \Leftrightarrow \{a_1, \ldots, a_n\}$ no está en ningún ideal maximal $\Leftrightarrow A a_1 + \ldots + A a_n = A$.

Teorema 1.21: Sea A un álgebra de Banach. La transformada de Gelfand induce una equivalencia homotópica

$$U_n(A) \to C(X(A), \mathbb{C}^n_*) .$$

Dem.: Notando que $U_n(A) = A^{C_*^n}$ y que C_*^n es un espacio homogéneo de $GL_n(C)$, vía

$$GL_n(C) \to C_*^n \quad , \quad \sigma \to \sigma e_1 \quad ,$$

el teorema anterior nos dice que en este caso la transformada de Gelfand induce una biyección

$$\pi_0(U_n(A)) \approx [X(A), C_*^n] \quad (= \pi_0(C(X(A), C_*^n))) \ .$$

Notemos que por corolario 1.8 $C(X(A), C_*^n)$ es homeomorfo a $U_n(C(X(A)))$.

Ahora, como $U_n(A)$ y $U_n(C(X(A)))$ son subconjuntos abiertos de espacios de Banach, basta probar que tienen el mismo tipo de homotopía débil (ver [36]); para esto veremos que si Y es un espacio compacto separado; $\hat{}$ induce una biyección

$$[Y, U_n(A)] \to [Y, U_n(C(X(A)))]$$

En corolario 1.8 probamos que $[Y, U_n(A)] = \pi_0[U_n(C(Y,A))]$, y como $X(C(Y,A)) = Y \times X(A)$ (ver [28]), usando el teorema anterior obtenemos $\pi_0[U_n(C(Y,A))] \approx [Y \times X(A), C_*^n]$, y haciendo reiterado uso de este teorema, y del hecho obvio $C(Y, C(X(A))) = C(Y \times X(A))$ (vía la adecuada identificación), llegamos a que

$$[Y \times X(A), C_*^n] = \pi_0[U_n(C(Y \times X(A)))] = \pi_0[U_n(C(Y, C(X(A))))]$$

$$= \pi_0[C(Y,U_n(C(X(A))))] = [Y,U_n(C(X(A)))] \ .$$

Corolario 1.22: Sea A un álgebra de Banach, si $X(A)$ es contráctil, tenemos que $U_n(A)$ es homotópicamente equivalente a S^{2n-1}.

Con una argumentación similar a la del teorema, se puede demostrar lo siguiente.

Teorema 1.23: Dadas dos álgebras de Banach A y B, con A conmutativa, la transformada de Gelfand induce una equivalencia homotópica

$$U_n(A \hat{\otimes} B) \to U_n(C(X(A),B)) \ .$$

Definición 1.24: Una subálgebra B de C se dirá n-plena si

$$U_n(C) \cap B^n = U_n(B).$$

Esta noción aparece naturalmente en el estudio de álgebras de Banach, por ejemplo el famoso teorema de la corona afirma que H^∞ es n-plena en $BC(\Delta)$ para todo n natural. Para tener una idea más generalizada de la importancia de esta noción, veamos el siguiente teorema.

Teorema 1.25: Sean A y B álgebras de Banach conmutativas complejas, y $\nu : A \to B$ un monomorfismo. Consideremos la aplicación traspuesta

$$\nu^* : X(B) \to X(A) \qquad (\nu^*(\varphi)(a) = \varphi(\nu(a)),\ \varphi \in X(B),\ a \in A).$$

Entonces:

1) ν^* es inyectiva si y sólo si $\nu(A)$ separa puntos de $X(B)$.

2) ν^* es sobreyectiva si y sólo si $\nu(A)$ es n-plena para todo $n \in N$.

Dem.: 1) Si $\varphi_1,\varphi_2 \in X(B)$ con $\varphi_1 \neq \varphi_2$, tenemos que: existe $a \in A$ tal que $\varphi_1(\nu(a)) \neq \varphi_2(\nu(a))$ si y sólo si existe $a \in A$ tal que $\nu^*\varphi_1(a) \neq \nu^*\varphi_2(a)$. Notemos que aquí no se usa que sea inyectivo.

2) Supongamos que ν^* es sobreyectiva, y $(a_1,\ldots,a_n) \in A^n$ es tal que $(\nu(a_1),\ldots,\nu(a_n)) \in U_n(B)$, o sea $(\varphi(\nu(a_1),\ldots,\varphi(\nu(a_n)) \neq 0$ para todo $\varphi \in X(B)$; luego $\nu^*\varphi(a_1,\ldots,a_n) \neq 0$, $\forall\varphi \in X(B)$, y como ν^* es sobreyectiva, resulta que $\phi(a_1,\ldots,a_n) \neq 0$, $\forall\phi \in X(A)$, es decir $(a_1,..,a_n) \in U_n(A)$, y así

$$(\nu(a_1),\ldots,\nu(a_n)) \in \nu(U_n(A)) \subset U_n(\nu(A)).$$

Si ν^* no es sobreyectiva existe $\varphi \in X(A)$, $\varphi \notin \nu^*(X(B))$; tomemos $N = \operatorname{Ker}\varphi$, como $\nu^*(X(B))$ es compacto, para todo $x \in \nu^*(X(B))$ existe a en N tal que $x(a) \neq 0$, luego $y(a) \neq 0$ para todo $y \in U_x$ (un cierto entorno abierto de x). Por compacidad podemos hallar finitos de estos entornos tales que

$\nu^*(X(B)) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n$, y $(a_1,\ldots,a_n) \in N^n$ sea tal que

$x(a_j) \neq 0$ si $x \in U_j$, con lo cual si $z \in X(B)$, $\nu^*z(a_1,\dots,a_n) = z(\nu(a_1),\dots,\nu(a_n)) \neq 0$, y por lo tanto $(\nu(a_1),\dots,\nu(a_n)) \in U_n(B)$, pero como $\varphi(a_1,\dots,a_n) = 0$ y ν es inyectiva, tenemos que $(\nu(a_1),\dots,\nu(a_n)) \notin \nu(U_n(A))$. De la inyectividad de ν se sigue que $\nu(U_n(A)) = U_n(\nu(A))$, y entonces $\nu(A)$ no es n-plena en B.

<u>Corolario 1.26</u>: Sea Y un espacio compacto separado, A una subálgebra cerrada de $C(Y)$, $i : A \to C(Y)$ la inclusión. Entonces $i^* : Y \to X(A)$ es un homeomorfismo si y sólo si A separa puntos de Y, y es n - plena en $C(Y)$ $(\forall n \in N)$.

Tomemos por ejemplo $A = \{f \in C(\bar{\Delta}) : f$ es holomorfa en $\Delta\}$ con norma supremo, y $B = H^\infty$, las funciones holomorfas y acotadas en Δ con la misma norma, si $\nu : A \to B$ es la inclusión, es fácil ver que A es n - plena en H^∞ para todo n natural, y por lo tanto $\nu^* : X(A) = \bar{\Delta} \to X(B)$ es sobreyectiva, pero A no separa puntos de $X(B)$, y entonces ν^* no es inyectiva.

<u>Proposición 1.27</u>: Sean A y B álgebras de Banach, y $f : A \to B$ un monomorfismo con imagen densa y plena, entonces $f(A)$ es n-plena en B para todo $n \in N$.

<u>Dem.</u>: Si $(f(a_1),\dots,f(a_n)) \in f(A)^n \cap U_n(B)$, existen $b_j (1 \leq j \leq n)$ en B tales que $\sum_{j=1}^{n} b_j f(a_j) = 1$, luego por densidad de $f(A)$, existen $c_j (1 \leq j \leq n)$ en A tales que $f(c_j)$ está lo suficientemente cerca de b_j como para que $\Sigma f(c_j) f(a_j) \in B^{\cdot}$, es decir $f(\Sigma c_j a_j) \in B^{\cdot} \cap f(A) = f(A)^{\cdot}$ por plenitud, luego por la inyecti-

vidad de f , $f(A)^{\bullet} = f(A^{\bullet})$, y claramente $\Sigma c_j a_j \in A^{\bullet}$, en particular $(a_1,\ldots,a_n) \in U_n(A)$ y $(f(a_1),\ldots,f(a_n)) \in f(U_n(A)) = U_n(f(A))$.

Capítulo II. RANGO ESTABLE, O INTERPOLACION UNIMODULAR

Convexidad polinomial y álgebras uniformes.

En este capítulo y en el siguiente vamos a hacer reiterado uso de la teoría de álgebras uniformes, por ese motivo comenzamos este capítulo con una lista de definiciones y teoremas que estarán presentes hasta el final de este trabajo. Todos los resultados aquí expuestos se pueden encontrar en Stout [45].

Definición 2.1:

1) Si Λ es un conjunto, C^Λ nota el producto cartesiano de Λ copias de C con la topología producto.

2) Si $\lambda \in \Lambda$, π_λ es la proyección de C^Λ sobre la λ-ésima coordenada.

3) P_Λ es el álgebra más chica de funciones continuas de C^Λ en C que contiene las constantes y las proyecciones π_λ.

Los elementos de P_Λ son llamados polinomios en Λ variables; si $p \in P_\lambda$, p es de la forma $\sum_{j=1}^{K} p_j$, donde cada p_j es un producto finito de potencias de las proyecciones π_λ.
Así, cuando $\Lambda = \{1,\dots,N\}$, P_Λ es el anillo de polinomios en N variables complejas.

Definición 2.2:

1) Si K es un compacto en C^Λ, definimos la cápsula polinomialmente convexa de K, $\hat{K}$ como el conjunto compacto

$$\hat{K} = \{z \in C^{\Lambda} : |p(z)| \leq \|p\|_K \text{ para todo } p \in P_{\Lambda}\} .$$

K se dice polinomialmente convexo si $K = \hat{K}$.

2) Definimos la cápsula racionalmente convexa de K , R - hull K , como

$\{z \in C^{\Lambda}$: si p y q son polinomios con q nunca nulo en K ,
$|p(z)| \leq |q(z)| \ \|pq^{-1}\|_K\}$,

K se dice racionalmente convexo si K = R - hull K .

Es claro que todo polinomialmente convexo es racionalmente convexo. Si $K \subset C$ compacto, se pueden caracterizar topológicamente estos tipos de convexidad: K es polinomialmente convexo si y sólo si $C - K$ es conexo; y todo compacto es racionalmente convexo. En dimensiones más altas la situación es mucho más complicada y no hay una clara caracterización de estos conjuntos; veamos un ejemplo en C^2 : si $S_1 = \{(e^{i\theta},1) : \theta \text{ real}\}$ y $S_2 = \{(e^{i\theta},e^{-i\theta}) : \theta \text{ real}\}$ entonces S_1 es homeomorfo a S_2 , pero S_2 es polinomialmente convexo y S_1 no.

<u>Teorema 2.3</u>: Si $K \subset C^n$ es un compacto polinomialmente convexo (resp. racionalmente convexo), entonces hay una base de entornos de K formada por conjuntos de la forma

$$\{z \in C^n : |p_j(z)| < 1 \ (1 \leq j \leq S), \text{ donde los } p_j \text{ son polinomios}\}$$

(resp. $\{z \in C^n : |p_j(z)| < |q_j(z)| \ 1 \leq j \leq S$, donde p_j y q_j son polinomios, y $q_j(\omega) \neq 0$, $\forall \omega \in K$, $\forall j\}$)

llamados P-poliedros (resp. R-poliedros).

Teorema 2.4: Si A es un álgebra de Banach conmutativa y $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un conjunto de generadores de A (como álgebra de Banach con unidad), entonces la aplicación $\phi : X(A) \to C^\Lambda$ dada por $\varphi \to (\hat{a}_\lambda(\varphi))_{\lambda\in\Lambda} \in$ sp a_λ es un homeomorfismo de $X(A)$ sobre sp(a_λ) , que resulta ser polinomialmente convexo.

Definición 2.5: Diremos que A es un álgebra uniforme (compleja) sobre un compacto separado X si A es una subálgebra cerrada de $C(X)$ que separa puntos y que contiene las constantes; munida de norma supremo, la cual la convierte en un álgebra de Banach. Esta definición es ligeramente más restrictiva que la de [45], pero preferimos escribirla así porque es precisamente ésta la definición que verifican todas las álgebras uniformes que aparecen en este trabajo.

Definición 2.6: Sea $X \subset C^\Lambda$ un compacto.

1) Notaremos por $P(X)$ a la mínima subálgebra uniforme de $C(X)$ que contiene a P_Λ .

2) Notaremos $R(X)$ a la mínima subálgebra uniforme de $C(X)$ que contiene a las funciones racionales p/q , con $p,q \in P_\Lambda$ y donde q no se anula en X .

3) Si $X \subset C^n$, $A(X)$ será la subálgebra uniforme de $C(X)$ formada por funciones que son holomorfas en X^0 .

Claramente si $X \subset C^n$, $P(X) \subset R(X) \subset A(X) \subset C(X)$; y para cada inclusión se pueden dar ejemplos donde ésta es estricta.

<u>Teorema 2.7</u>: Si $Y \subset C^n$ es compacto, $X(P(Y)) = \hat{Y}$ y $X(R(Y)) =$ R - hull Y .

<u>Teorema 2.8</u>: Si Y es un compacto polinomialmente convexo de C^n, $P(Y) = A(Y)$.

<u>Observación</u>: Si A es un álgebra de Banach compleja conmutativa, podemos considerar vía teorema 2.4 que $X(A)$ es un compacto de C^Λ para algún conjunto Λ ; y así la clausura en $C(X(A))$ de la transformada de Gelfand de A , $(\hat{A})^-$ es $P(X(A))$, de manera que mediante un morfismo de álgebras de Banach unitarias, A / rad A es densa y plena en un álgebra uniforme $P(X)$.

<u>Corolario 2.9</u>: Si A es un álgebra uniforme y $a = (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ generan A , entonces sp a es polinomialmente convexo y A es isomorfa a $P(\text{sp } a)$.

Para un amplio desarrollo de todas estas cuestiones el lector pue de consultar al ya citado Stout .

<u>Estabilidad y el álgebra del disco</u>.

Sobre la teoría general de rango estable mucho se ha escrito en los últimos años (ver [4], [44], [48]); la noción de rango estable fue introducida por Bass como un medio de control para ciertas propiedades de los K-grupos de un anillo; los resultados que describen la naturaleza de este tipo de control se encuentran entre los frecuentemente llamados resultados de estabilidad, los cuales tienen incidencia tanto en K-teoría algebraica como en K-teoría topológica. Sin embargo, no va a ser en función de la K-teoría que vamos a desarrollar aquí diversos conceptos de estabilidad, sino principalmente para establecer relaciones, en el caso de un álgebra de Banach conmutativa, entre estos conceptos y algunas propiedades topológicas, o más específicamente homotópicas, del espectro del álgebra y los ceros de sus ideales. Como ya se dijo, una vieja tendencia en la teoría de álgebras de Banach conmutativas consiste en relacionar un álgebra con su espectro; es en esta dirección que encuadramos nuestro estudio del rango estable. A partir de este punto de vista podemos calcular, o estimar, en forma relativamente sencilla, los rangos estables de ciertas álgebras que no parecen nada fácil de ser calculados por otros medios.

Como veremos en la siguiente sección de este capítulo, la noción de reducibilidad definida a continuación, va a resultar equivalente a la posibilidad de extender funciones continuas de un cerrado del espectro de A a todo el espectro $X(A)$; a su vez en esta sección veremos que el hecho de que un unimodular sea reducible o no depende de como se relacionan entre sí ciertos subconjuntos de A^n. Por consiguiente obtendremos equivalencias entre algunos de los conceptos desarrollados en esta sección y la que sigue.

Las aplicaciones posibles de esta teoría al análisis se pueden encuadrar en el terreno de la interpolación, a cuyo respecto hay un claro ejemplo al final de esta sección.

Por razones de simplicidad notaremos con letras latinas los elementos de A^n y con letras griegas los de A , así, que $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$ significará que $a \in A^n$, $\alpha \in A$ y $\sum_{i=1}^{n} A a_i + A\alpha = A$.

<u>Definiciones 2.10</u>: Sea A un anillo,

(i) $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$ es reducible (en A) si existe $x \in A^n$ tal que $a + x\alpha = (a_1+x_1\alpha,\ldots,a_n+x_n\alpha) \in U_n(A)$.

(ii) A es n-estable en α si todo $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$ es reducible.

(iii) El rango estable de A (sr A) es el mínimo n tal que A es n-estable en α , para todo $\alpha \in A$; o lo que en virtud de la proposición siguiente es lo mismo; $\mathrm{sr}\, A \leq n$ si y solo si todo $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$ es reducible. Si tal n no existe, decimos que $\mathrm{sr}\, A = \infty$.

Estas nociones de estabilidad están dadas a izquierda, pero se pueden definir de forma completamente análoga como estabilidad a derecha; obviamente es indistinto para que lado se define la estabilidad si el anillo es conmutativo. Con respecto al rango estable, en [49] Vasershtein demuestra que el rango estable de un anillo coincide con el de su opuesto, por lo que el número sr(A) no depende de considerarlo a derecha o a izquierda. También en [49] se define el rango estable de un anillo sin unidad A , simplemente como el de A^+ , el anillo que se obtiene de A por adjunción de una unidad.

Finalmente, dentro de la teoría general de anillos demostraremos un resultado que hace del rango estable una auténtica noción de estabilidad.

Proposición 2.11: Si $sr(A) = m$, y $n > m$ entonces todo $b \in U_n(A)$ es reducible, y de tal forma que existen $v_i \in A$ tales que $(b_i + v_i b_n)_{1 \leq i \leq n-1}$ es unimodular y $v_i = 0$ si $i > m$.

Dem.: $b \in U_n(A)$, es decir existe $a \in A^n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 1$, consideremos la $(m+1)$-upla unimodular $(b_1,\ldots,b_m, \sum_{i=m+1}^{n} a_i b_i)$, como $sr(A) = m$, existe $c \in A^m$ tal que $(b_1 + c_1\beta, \ldots, b_m + c_m\beta) \in U_m(A)$, donde $\beta = \sum_{i=m+1}^{n} a_i b_i$, pero entonces también es unimodular $(b_1 + c_1 a_n b_n, \ldots, b_m + c_m a_n b_n, b_{m+1}, \ldots, b_{n-1})$, pues si $(x_j)_{1 \leq j \leq m}$ son tales que $\sum_{j=1}^{m} x_j(b_j + c_j\beta) = 1$, entonces

$$\sum_{j=1}^{m} x_j(b_j + c_j a_n b_n) + \left(\sum_{j=1}^{m} x_j c_j\right).\left(\sum_{i=m+1}^{n-1} a_i b_i\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} x_j b_j + \left(\sum_{j=1}^{m} x_j c_j\right)\left(a_n b_n + \sum_{i=m+1}^{n-1} a_i b_i\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} x_j b_j + \sum_{j=1}^{m} x_j c_j \beta = 1 .$$

De lo cual tomando $v_i = c_i a_n$ para $1 \leq i \leq m$ y $v_i = 0$ si $i > m$ sale lo afirmado.

Proposición 2.12: Sea A un anillo conmutativo. Si $\alpha \in A$ y $\langle \alpha \rangle$ es el ideal generado por α , consideremos $p : A^n \to (A/\langle \alpha \rangle)^n$ la aplicación producto de la proyección al cociente, entonces

(i) $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$ es reducible si y sólo si $p(a) \in p(U_n(A))$.

(ii) A es n-estable en α si y sólo si la función $U_n(A) \to U_n(A/\langle\alpha\rangle)$ inducida por p es suryectiva.

(iii) $\mathrm{sr}\, A \leq n$ si y sólo si $U_n(A) \to U_n(A/I)$ es suryectiva para todo ideal $I \subset A$ (equivalentemente para todo ideal principal de A).

<u>Dem.</u>: (i) (a,α) es reducible si y sólo si existe $b \in A^n$ tal que $c = a + b\alpha \in U_n(A)$, o sea $p(a) = p(c) \in p(U_n(A))$,

(ii) es una consecuencia inmediata de (i), pues $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$ $\Leftrightarrow p(a) \in U_n(A/\langle\alpha\rangle)$,

(iii) es claro si uno toma ideales principales, veamos la equivalencia a tomar ideales cualesquiera; que $p(a) \in U_n(A/I)$ con a en A^n , significa que existe $\alpha \in I$ tal que $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$, pero entonces (a,α) es reducible, y por tanto $p(a) \in p(U_n(A))$ (igual que en (i)).

Podemos hacer una reformulación de esta proposición, en función de ciertos subconjuntos de A^n ; si I es un ideal de A , notemos

$$H_{n,I}(A) = \{a \in A^n \,/\, (a,\alpha) \in U_{n+1}(A) \text{ para algún } \alpha \in I\} ,$$

en caso de que $I = \langle\alpha\rangle$ simplemente escribiremos $H_{n,\alpha}(A)$.

Es fácil ver que si p es como antes, $H_{n,I}(A) = p^{-1}(U_n(A/I))$ y $U_n(A) + I^n = p^{-1}(p(U_n(A))$, por lo que la proposición queda así:

(i) si $a \in H_{n,\alpha}(A)$, (a,α) es reducible si y sólo si $a \in U_n(A) + A^n\alpha$,

(ii) A es n-estable en α si y sólo si $H_{n,\alpha}(A) = U_n(A) + A^n\alpha$ (notemos que la inclusión $\supset$ siempre se verifica),

(iii) $\operatorname{sr} A \leqslant n$ sii $H_{n,\alpha}(A) \subset U_n(A) + A^n\alpha$ para todo $\alpha \in A$.

Una de las posibles ventajas de este punto de vista es que la proposición sigue siendo válida en el caso no conmutativo, eso además del hecho de que algunos resultados que relacionan $U_n(A)$ con $U_n(A/I)$ y que usan herramientas bastante fuertes,pueden demostrarse muy simplemente en estos términos.
Es fácil ver que si A es un álgebra de Banach,tanto $H_{n,\alpha}(A)$ como $U_n(A)$ son subconjuntos abiertos de A^n , luego también lo es $U_n(A) + A^n\alpha$,pues es la unión de los abiertos $U_n(A) + a\alpha$, $a \in A^n$; mucho más puede decirse en el caso conmutativo, de modo que de aquí en adelante salvo que se especifique lo contrario A será un álgebra de Banach conmutativa.

<u>Lema 2.13</u>: $U_n(A) + A^n\alpha$ es abierto y cerrado en $H_{n,\alpha}(A)$.

<u>Dem.</u>: $U_n(A) + A^n\alpha$ es abierto en A^n , luego lo es en $H_{n,\alpha}(A)$.
Primero observemos que si $b \in A^n$, $a \in U_n(A) + A^n\alpha$ y $\beta \in A$ son tales que $\langle a,b \rangle + \beta\alpha \in A^{\cdot}$, entonces $b \in U_n(A) + A^n\alpha$, pues $a = c + h\alpha$, donde $c \in U_n(A)$ y $h \in A^n$. Así,

$$\langle c + h\alpha, b \rangle + \beta\alpha = \langle c,b \rangle + (\langle h,b \rangle + \beta)\alpha \in A^{\cdot} .$$

Como c es unimodular, existe $r \in A^n$ tal que $\langle h,b \rangle + \beta = \langle c,r \rangle$, y entonces

$$\langle c,b\rangle + \langle c,r\rangle\alpha = \langle c,b+r\alpha\rangle \in A^{\cdot} \quad .$$

Tomemos ahora (a_m) una sucesión en $U_n(A) + A^n\alpha$ con $\lim a_m = a \in H_{n,\alpha}(A)$, como $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$, existe $d \in A^n$ y $\beta \in A$ tales que $\langle d,a\rangle + \beta\alpha = 1$ y como $A^{\cdot}$ es abierto, $\langle d,a_m\rangle + \beta\alpha \in A^{\cdot}$ para $m \geq m_0$, y por lo recién visto también $d \in U_n(A) + A^n\alpha$, luego por igual motivo $a \in U_n(A) + A^n\alpha$.

Corolario 2.14: Las siguientes condiciones son equivalentes:

1) A es n-estable en α .

2) $U_n(A) + A^n\alpha \supset H_{n,\alpha}(A)$.

3) $(U_n(A) + A^n\alpha)^- \supset H_{n,\alpha}(A)$.

Teorema 2.15: Dado $b \in A^n$, son equivalentes:

1) $b \in U_n(A) + A^n\alpha$

2) Existe $d \in U_n(A)$ y una curva $\gamma : [0,1] \to H_{n,\alpha}(A)$ tal que $\gamma(0) = b$ y $\gamma(1) = d$.

Dem.: 1) $\Rightarrow$ 2) es claro, pues $b = d + a\alpha$ con $d \in U_n(A)$ y $a \in A^n$; entonces $\gamma(t) = d + (1-t)a\alpha \in U_n(A) + A^n\alpha \subset H_{n,\alpha}(A)$ para todo $t \in [0,1]$ es la curva buscada.

2) $\Rightarrow$ 1) . Dada $\gamma : [0,1] \to H_{n,\alpha}(A)$ reuniendo b y $d \in U_n(A)$, es obvio que b y d pertenecen a la misma componente conexa D de $H_{n,\alpha}(A)$. Por lema 2.13 , $(U_n(A) + A^n\alpha) \cap D$ es abierto y cerrado en D , pero $d \in (U_n(A) + A^n\alpha) \cap D$, por lo que $(U_n(A) + A^n\alpha) \cap D = D$, y $b \in U_n(A) + A^n\alpha$ como afirmamos.

Corolario 2.16: A es n-estable en α si y sólo si cada componente de $H_{n,\alpha}(A)$ interseca $U_n(A)$.

Dem.: Sea D una componente de $H_{n,\alpha}(A)$, y $b \in D$, como D es arco conexo e interseca $U_n(A)$, hay una curva en las condiciones del teorema, por lo cual $b \in U_n(A) + A^n \alpha$.
Para la otra implicación, tenemos que $H_{n,\alpha}(A) = U_n(A) + A^n \alpha$, y el resultado se sigue del teorema, parte 2).

Proposición 2.17: Si $A^{\cdot} + A\alpha$ es denso en $H_{1,\alpha}(A)$, entonces para todo $b \in H_{n,\alpha}(A)$ existen $u \in (A^{\cdot})^n$ y $\beta \in A$ tales que $\langle u,b \rangle + \beta\alpha = 1$.

Dem.: Tomemos $a_1,\dots,a_n, \delta$ en A tales que $\langle a,b \rangle + \delta\alpha = 1$.
Por hipótesis existe $c_j = v_j + r_j\alpha \in A^{\cdot} + A\alpha$ que aproxima en menos de ϵ a a_j para cada $1 \leq j \leq n$, por lo que $\langle c,b \rangle + \delta\alpha \in A^{\cdot}$, pero $\langle c,b \rangle + \delta\alpha = \langle v,b \rangle + (\langle r,b \rangle + \delta)\alpha = \gamma \in A^{\cdot}$.
Tomando $u = \gamma^{-1} . v \in (A^{\cdot})^n$ y $\beta = \gamma^{-1} (\langle r,b \rangle + \delta) \in A$ resulta lo afirmado.

Observemos que si $S \subset A$ es un conjunto multiplicativo (o sea $s_1,s_2 \in S$ implica $s_1 . s_2 \in S$) , y $\alpha \in A$, también es multiplicativo el conjunto $A^{\cdot} S + A\alpha = \{u.s + a\alpha : u \in A^{\cdot},\ s \in S \ \text{y} \ a \in A\}$, pues

$$(u_1 s_1 + a_1\alpha)(u_2 s_2 + a_2\alpha) = (u_1 u_2) s_1 s_2 + (u_1 s_1 a_2 + u_2 s_2 a_1 + a_1 a_2 \alpha)\alpha .$$

Entonces, si $T \subset A^{\bullet} + A\alpha$, resulta que $S(T)$, el conjunto multiplicativo generado por T también está incluido en $A^{\bullet} + A\alpha$; luego, si para un tal T, $S(T)$ es denso en A, tenemos que $H_{1,\alpha}(A) \subset A = \overline{S(T)} \subset \overline{A^{\bullet} + A\alpha}$, y por lo tanto A es 1-estable en α.

Con lo hecho hasta el momento estamos en condiciones de demostrar el resultado principal de esta sección.

<u>Teorema 2.18</u>: Sea X un subconjunto compacto de C. Luego si $A = P(X)$ o $R(X)$, $A^{\bullet} + A\alpha$ es denso en A para todo $\alpha \in A$, y por lo tanto vale la tesis de la proposición.
En particular $sr(P(X)) = sr(R(X)) = 1$.

<u>Dem.</u>: Consideremos primero el caso $A = P(X)$. Como $P(X) = P(\hat{X})$, donde $\hat{X}$ es la cápsula polinomialmente convexa de X, no hay pérdida de generalidad en considerar X polinomialmente convexo.
Probaremos que

$$T = \{(z - z_0) \in A : z_0 \in (X^0 \setminus Z_\alpha) \cup X^c\} \cup C_* \subset A^{\bullet} + A\alpha$$

(aquí X^0 = interior de X, $X^c = C - X$, y $Z_\alpha = \{\omega \in C / \alpha(\omega) = 0\}$).
Si $z_0 \in X^c$, se tiene que $(z - z_0) \in A^{\bullet}$.
Si $z_0 \in X^0 \setminus Z_\alpha$, tomemos la componente conexa de z_0 en X^0, D.
Entonces existe $z_1 \in \partial D$ (borde de D) tal que $\alpha(z_1) \neq 0$, y una curva $\gamma : [0,1] \to C \setminus Z_\alpha$ tal que $\gamma(0) = z_0$ y $\gamma(1) = z_1$.
Así, $z - \gamma$ es una curva en $H_{1,\alpha}(A)$ que conecta $z - z_0$ con $z - z_1$.

De forma análoga $z - z_1$ se conecta en $H_{1,\alpha}(A)$ con $z - z_2$ para algún $z_2 \notin X$; como $z - z_2$ es inversible en A , por teorema 2.15 tenemos que $z - z_0 \in A^{\bullet} + A\alpha$. Y obviamente $C_* \subset A^{\bullet} + A\alpha$. Es claro que $S(T)$ es denso, y por las observaciones anteriores, $S(T) \subset A^{\bullet} + A\alpha$, luego este último conjunto es denso como afirmamos.

El caso $A = R(X)$ es similar, tomando

$$T = \{(z - z_0) \in A : z_0 \in (X^0 \setminus Z_\alpha) \cup X^c\} \cup \{1/(z - z_1) \in A : z_1 \notin X\} \cup C_*$$

<u>Corolario 2.19</u>: El álgebra del disco, $P(\bar{\Delta})$ tiene rango estable uno.

La versión tan simplificada de este teorema, que hace hincapié en el análisis algebraico, no fue la primera que obtuvimos. El hecho de que el rango estable del álgebra del disco $P(\bar{\Delta})$ fuera uno, era de sospecharse a partir de que el álgebra de funciones enteras en $C, O(C)$ tiene esa propiedad (ver[42]). Peter Jones, Donald Marshall y Thomas Wolff demuestran de modo totalmente analítico que $\operatorname{sr} P(\bar{\Delta}) = 1$ en [26], al mismo tiempo que encontrábamos ésta y otras pruebas de esa igualdad [12], la primera de las cuales reproducimos aquí a continuación por dos motivos: en primer lugar es totalmente analítica, y aunque más complicada que la demostración anterior, es muy elemental, aparte de proveer el germen para el teorema 2.39 , que veremos más adelante; en segundo lugar, demuestra constructivamente que si $f, g \in P(\bar{\Delta})$ y $|f| + |g| > 0$, existen $a,b \in P(\bar{\Delta})$ tales que $af + bg = 1$. Demostraciones constructivas de que los caracteres de $P(\bar{\Delta})$ son exactamente las evaluaciones en puntos de $\bar{\Delta}$ se pueden encontrar en [6], [8] y [19].

Teorema 2.20: El álgebra del disco A tiene rango estable uno.

Dem.: En lo que sigue podemos suponer $\|g\| = 1$ $(g \in A)$.

1) Existe $z_1 \in S^1$ tal que $(z - z_1, g)$ es reducible. Como los polinomios forman una subálgebra densa en A , existe un polinomio p tal que $\|p - g\| < 1/2$. Luego, $\|p/\|p\| - g\| < 1$, pues

$$\begin{aligned} \|p/\|p\| - g\| &\leqslant \|p/\|p\| - p\| + \|p - g\| = \\ &= \|p\|\,|1/\|p\| - 1| + \|p - g\| = \\ &= |\,\|g\| - \|p\|\,| + \|p - g\| \\ &\leqslant 2\|p - g\| < 1 . \end{aligned}$$

Llamemos $q = p/\|p\|$. Luego, podemos elegir un z_1 en S^1 tal que $|q(z_1)| = \|q\| = 1$. Rotando adecuadamente podemos suponer que $z_1 = 1$. Veamos que $f_n(z) = ((z+1)/2)^n\, q(z)$ alcanza su norma únicamente en el punto $z = 1$ para todo n natural. Si $z \neq 1$

$$|((z+1)/2)^n\, q(z)| < |q(z)| \leqslant \|q\| = 1 = |f_n(1)| .$$

Ahora, elijamos n de modo tal que $f_n'(1) = (n/2)q(1) + q'(1) \neq 0$. Probemos que $(z-1,g)$ es reducible.

Pongamos

$$v(z) = \begin{cases} \dfrac{((z+1)/2)^n q(z) - q(1)}{1-z} & , z \neq 1 \\ \\ -f_n'(1) & , z = 1 \end{cases}$$

De la identidad $(z-1)v(z) + ((z+1)/2)^n q(z) = q(1)$, y observando que $v \in A^\bullet$ y que $|q(1)| = 1$, es claro que $(z-1,q)$ es reducible. Consideremos ahora

$$l(z) = (z-1)v(z) + ((z+1)/2)^n g(z) = q(1) - [((z+1)/2)^n (q(z)-g(z))]$$

Luego, $\|l - q(1)\| = \|((z+1)/2)^n (q-g)\| \leq \|(z+1)/2)^n\| \|q-g\| = \|q-g\| < 1$, y como $|q(1)| = 1$, resulta que $l \in A^\bullet$ y entonces $(z-1,g)$ es reducible.

2) Existe $z_0 \in \Delta \setminus Z_g$ (aquí Z_g nota los ceros de g en $\bar{\Delta}$) tal que $(z-z_0,g)$ es reducible. Por lo recién hecho, existe $h \in A$, $u \in A^\bullet$ tales que $(z-1)+hg = u$. Como $A^\bullet$ es abierto

$$(z-1+1/n) + hg = u + 1/n \in A^\bullet$$

para $n \geq n_0$. Es suficiente tomar $z_0 = 1-1/n_0$.

3) Para todo $\alpha \in \Delta \setminus Z_g$, $(z-\alpha,g)$ es reducible.

(i) Si $\alpha \in \Delta \setminus Z_g$, hay un entorno U_α de α con la siguiente

propiedad: si $\omega \in U_\alpha$, existen $h \in A$, $u \in A^\cdot$ tales que $(z-\alpha)+hg = (z-\omega)u$. Dado $0<\epsilon<1$, tal que la bola abierta de centro α y radio ϵ está contenida en Δ , existe $0<\delta<\epsilon$ tal que $|\omega-\alpha| < \epsilon\ |g(\omega)|$ si $|\omega-\alpha| < \delta$.
Si $|z-\alpha| \geq \epsilon$, tenemos que $|z-\alpha| > |(\omega-\alpha)/g(\omega)||g(z)|$, luego la función

$$b(z) = (z-\alpha)-((\omega-\alpha)/g(\omega))\ g(z)$$

no tiene ceros en $|z-\alpha| \geq \epsilon$, y en $|z-\alpha| < \epsilon$ tiene un solo cero por el teorema de Rouché [29]. Pero $b(\omega) = 0$, lo que implica que $b(z) = (z-\alpha)u(z)$, con $u \in A^\cdot$.

(ii) Dados $\alpha, \beta \in \Delta\setminus Z_g$, pondremos $\alpha \sim \beta$ si existen $h \in A$, $u \in A^\cdot$ tal que

$$(z-\alpha)+hg = (z-\beta)u .$$

Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\Delta\setminus Z_g$.
Por (i), $\sim$ es abierta, luego como $\Delta\setminus Z_g$ es conexo, hay una única clase de equivalencia.
Ahora, por 2) existe un $z_0 \in \Delta\setminus Z_g$ tal que

$$(z-z_0)+lg = v$$

donde $l \in A$ y $v \in A^\cdot$.
Por (ii), si $\alpha \in \Delta\setminus Z_g$, para algunos $h \in A$, $u \in A^\cdot$ se tiene

$(z-\alpha)+hg = (z-z_0)u$, y entonces

$(z-\alpha)u^{-1} + (u^{-1}h+1)g = (z-z_0)+1g = v \in A^{\cdot}$.

con lo que $(z-\alpha,g)$ resulta reducible.

4) Dado cualquier polinomio p tal que $Zp \cap (S^1 \cup Z_g) = \phi$, (p,g) es reducible. Si $|\alpha| > 1$, $(z-\alpha) \in A^{\cdot}$; si $|\alpha| < 1$ y $\alpha \notin Z_g$, por 3) tenemos que $(z-\alpha,g)$ es reducible. En otras palabras, $(z-\alpha,g)$ es reducible si $\alpha \notin S^1 \cup Z_g$.
Sea p el tal polinomio, luego $p(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n}(z-\alpha_j)$, para algunos $\lambda \in C$ y $\alpha_j \notin S^1 \cup Z_g$ $(j=1,\dots,n)$. Sean $h_j \in A$, $u_j \in A^{\cdot}$ tales que $(z-\alpha_j)+h_jg = u_j$ $(j=1,\dots,n)$. Luego $A^{\cdot} \ni \lambda \prod_{j=1}^{n} u_j = \lambda \prod_{j=1}^{n}[(z-\alpha_j)+h_jg] = \lambda \prod_{j=1}^{n}(z-\alpha_j)+Hg =$

$$= p + Hg$$

con H en A . Esto prueba lo afirmado.

5) Si $f,g \in A$ y $|f|+|g| > 0$, entonces (f,g) es reducible. Vía una transformación de Moebius adecuada, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $g(0) \neq 0$.
Consideremos $\varphi = f/S^1$ y $\tau = g/S^1$, es claro que $\bar\varphi\varphi + \bar\tau\tau \in C(S^1)^{\cdot}$ (donde $\bar\varphi$ = conjugado de φ y $C(S^1)$ es el álgebra uniforme de funciones continuas de S^1 en C); luego $(\varphi,\tau) \in U_2(C(S^1))$ y como por [49], theorem 7, sr $C(S^1) = 1$, existe $\beta \in C(S^1)$ tal que $\varphi + \beta\tau \in C(S^1)^{\cdot}$.

Por el teorema de Stone - Weierstrass los polinomios en z y z^{-1} son densos en $C(S^1)$, y entonces existen polinomios p,q tales que $p+\tilde{q}$ (con $\tilde{q}(z) = q(z^{-1})$) está lo suficientemente cerca de β como para que

$$\varphi + (p+\tilde{q})\tau \in C(S^1)^{\bullet} \quad .$$

Ahora, si n = grado de q , la función

$$z^n\varphi + z^n(p+\tilde{q})\tau \in C(S^1)$$

se puede extender a una función del álgebra del disco

$$z^n f + rg \in A$$

donde $r \in A$; y como esta función no tiene ceros en S^1 , existen $u \in A^{\bullet}$ y un polinomio s sin ceros en $\{z \in C : |z| \geq 1\}$ tales que $z^n f + rg = u.s$.
Es claro que s no se anula en Z_g , y por 4) y el hecho de que $g(0) \neq 0$, (z^n,g) es reducible, con lo cual existen $c \in A$, $v \in A^{\bullet}$ tales que $z^n + cg = v$, y así

$$(z^n + cg)f + (r - cf)g = u.s$$

Nuevamente por 4), (s,g) es reducible, o sea existe d en A tal que $s + dg \in A^{\bullet}$. Entonces

$$f + (z^n + cg)^{-1}(r - cf + ud)g = (z^n + cg)^{-1}u(s + dg) \in A^{\bullet}$$

como muestra una fácil cuenta. Lo que prueba el teorema.

Veamos una aplicación de este teorema, si $K \subset S^1$ es un compacto de medida lineal nula, el teorema de Rudin - Carleson (ver [45], pág.204) nos dice que si $f \in C(K)$, existe F en el álgebra del disco A que extiende a f, luego si $f \in C(K)^n$ tenemos $F \in A^n$ tla que $F|_K = f$. El teorema anterior nos dice que si $f \in U_n(C(K))$ también podemos elegir $F \in U_n(A)$, pues si $g \in A$ es tal que sus ceros son exactamente el conjunto K, y H extiende a $f \in U_n(C(K))$, se tiene que $(H_1,\ldots,H_n,g) \in U_{n+1}(A)$, luego existen $b_1,\ldots,b_n$ en A tales que

$$(H_1 + b_1 g,\ldots,H_n + b_n g) \in U_n(A),$$

y ésta es la F buscada, puesto que

$$F_j/K = (H_j + b_j\, g)|_K = H_j/K = f_j \ .$$

Estabilidad en álgebras de Banach conmutativas.

En lo que sigue estudiaremos las nociones de estabilidad en el contexto de álgebras conmutativas, aquí la transformada de Gelfand y algunas conocidas relaciones entre el álgebra y su espectro jugarán un papel crucial. Como ya sabemos, $sr(A) \leq n$ si y solo si la aplicación $U_n(A) \to U_n(A/I)$ inducida por la proyección natural $A \to A/I$, es sobreyectiva para todo ideal $I \subset A$ (o para

todo ideal principal), más podemos decir en la situación que nos ocupa. De aquí en más, y salvo que se especifique lo contrario, A y B serán álgebras de Banach complejas conmutativas.
Por lema 1.20 obtenemos la igualdad $U_n(A) + (\mathrm{rad}\, A)^n = U_n(A)$ para todo n natural, de lo cual se deduce mediante una fácil cuenta que $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$ es reducible si y sólo si lo es $(\tilde{a},\tilde{\alpha}) \in U_{n+1}(A/\mathrm{rad}\, A)$, y consecuentemente $\mathrm{sr}\, A = \mathrm{sr}(A/\mathrm{rad}\, A)$, por lo que el estudio del rango estable de un álgebra cualquiera se reduce inmediatamente al de un álgebra semisimple.

Lema 2.21: Son equivalentes

(i) $\mathrm{sr}\, A \leqslant n$

(ii) Para todo ideal cerrado $I \subset A$, $\theta : U_n(A) \to U_n(A/I)$ es sobreyectiva.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii) es obvio.

(ii) $\Rightarrow$ (i) dado $(a_1,\ldots,a_{n+1}) \in U_{n+1}(A)$, tomemos $I = \langle a_{n+1}\rangle^-$, luego podemos encontrar $(b_1,\ldots,b_n) \in U_n(A)$ tales que $b_i - a_i \in I$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Como $U_n(A)$ es abierto, existe $\epsilon < 0$ con la propiedad de que si $c \in A^n$ y $\|b_i - c_i\| < \epsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ entonces $c \in U_n(A)$. Así, existen $x_1,\ldots,x_n \in A$ con $\|b_i - a_i - x_i\, a_{n+1}\| < \epsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, y por lo tanto

$$c = (a_1 + x_1\, a_{n+1},\ldots,a_n + x_n\, a_{n+1}) \in U_n(A) .$$

Notemos que de la demostración se desprende que basta tomar idea_ les cerrados generados por un elemento.

Lo mismo que en el lema pasa con las versiones más localizadas de reducibilidad y de n-estabilidad, es decir $(a_1,\ldots,a_{n+1}) \in U_{n+1}(A)$ es reducible si y sólo si la clase de $(a_1,\ldots,a_n)$ pertenece a la imagen de $\theta : U_n(A) \to U_n(A/\langle a_{n+1}\rangle^-)$.

En lo que sigue, $\pi_0(U)$ notará el conjunto de componentes conexas de U, y $[u]$ será la componente conexa de $u \in U$; obviamente una aplicación continua $h : U \to U'$ induce una función $\pi_0(h) : \pi_0(U) \to \pi_0(U')$. En este trabajo aplicaremos este funtor sólo a subconjuntos abiertos de espacios de Banach, con lo que $\pi_0(U)$ coincide con las componentes arco conexas de U.

Tomemos $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$, queremos saber si es reducible, lo que equivale a que la clase de a en $A/\langle\alpha\rangle^-$ (notemosla $\tilde{a}$), pertenezca a la imagen de la aplicación $\theta : U_n(A) \to U_n(A/\langle\alpha\rangle^-)$, luego por las propiedades de fibración de esta función (ver lema 1.6), resulta que $\tilde{a} \in \operatorname{im}\theta$ si y sólo si existe $\tilde{b} \in \operatorname{im}\theta$ que esté en la misma componente conexa que $\tilde{a}$ (en $U_n(A/\langle\alpha\rangle^-)$), es decir si $[\tilde{a}] \in \operatorname{im}\pi_0(\theta)$.

Obtenemos entonces una versión homotópica de la proposición 2.12 que resultará de suma utilidad más adelante (comparar con corolario 2.16).

<u>Teorema 2.22</u>: Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Luego

(i) $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$ es reducible si y sólo si $[\tilde{a}]$ pertenece a la imagen de $\pi_0(\theta) : \pi_0(U_n(A)) \to \pi_0(U_n(A/\langle\alpha\rangle^-))$.

(ii) A es n-estable en α si y sólo si la aplicación $\pi_0(U_n(A)) \to \pi_0(U_n(A/\langle\alpha\rangle^-))$ es suryectiva.

(iii) $sr(A) \leq n$ si y sólo si $\pi_0(U_n(A)) \to \pi_0(U_n(A/I))$ es suryectiva para todo ideal de la forma $\langle\alpha\rangle^-$. En particular, si $U_n(A/I)$ es conexo para todo tal ideal, $sr(A) \leq n$.

De esta forma, el problema de reducibilidad se transforma en un problema de homotopía concerniente a las componentes conexas de los conjuntos de elementos unimodulares, y de aplicaciones entre ellos. Lo destacable de este punto de vista es que el funtor π_0, vía los trabajos de Novodvorkii, Taylor y Roeburn no depende en realidad del álgebra en cuestión sino del tipo de homotopía de su espectro. Como ya se dijo, la transformada de Gelfand induce una biyección natural entre $\pi_0(U_n(A))$ y $[X(A), C_*^n]$.
Es inmediato que C_*^n es homotópicamente equivalente a $S^{2n-1} = \{z \in C^n : |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\}$, y por lo tanto hay una equivalencia homotópica $C(X(A), C_*^n) \approx C(X(A), S^{2n-1})$, hecho éste que aparece veladamente en corolario 1.22; en particular $[X(A), C_*^n]$ se puede identificar con $[X(A), S^{2n-1}]$, de modo que si $f \in C(X, C_*^n)$, $[f]$ lo vamos a pensar indistintamente en $[X, C_*^n]$ o en $[X, S^{2n-1}]$.
Ahora, si $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$, la aplicación θ junto con la transformada de Gelfand nos dan el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U_n(A) & \longrightarrow & U_n(A/\langle\alpha\rangle^-) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(X(A),C^n_*) & \longrightarrow & C(Z_\alpha,C^n_*) \end{array}$$

con $Z_\alpha = \text{hull}\langle\alpha\rangle^- = X(A/\langle\alpha\rangle^-)$, donde en virtud de la discusión previa, las flechas horizontales son fibraciones de Serre y las flechas verticales son equivalencias homotópicas. A su vez este diagrama induce a nivel de los π_0 otro diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(U_n(A)) & \longrightarrow & \pi_0(U_n(A/\langle\alpha\rangle^-)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [X(A),C^n_*] & \longrightarrow & [Z_\alpha,C^n_*] \end{array}$$

con biyecciones en las flechas verticales.

A partir de lo dicho, si por $\hat{}$ notamos la transformada de Gelfand, y haciendo todas las identificaciones necesarias, tendremos que $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$ es reducible si y sólo si la clase de homotopía $[\hat{a}|Z_\alpha]$ en $[Z_\alpha,C^n_*]$ proviene de la restricción de algún elemento de $[X(A),C^n_*]$. Hagamos aquí un alto para hacer un breve comentario, el teorema de Borsuk ([34],pág.56) nos dice que una función dada $u \in [\hat{a}|Z_\alpha]$ se puede extender a un elemento de $C(X(A),C^n_*)$ si y sólo si la clase $[u] = [\hat{a}|Z_\alpha]$ se puede extender a un elemento de $[X(A),C^n_*]$; de esto y lo anterior resulta que (a,α) es reducible si y sólo si $\hat{a}|Z_\alpha$ se puede extender a $X(A)$, es decir si existe $f \in C(X(A),C^n_*)$ tal que $f|Z_\alpha = \hat{a}|Z_\alpha$. En realidad, el teorema de Borsuk es un caso particular del lema 1.16, tomando $A = C(X(A))$ y $B = C(Z_\alpha)$; su mención aquí responde únicamente a la intención de destacar cómo el problema de reducibilidad se transforma en un problema clásico de extensión de funciones continuas.

Es inmediata la siguiente

<u>Proposición 2.23</u>: $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$ es reducible en A si y sólo si $(\hat{a},\hat{\alpha})$ es reducible en $C(X(A))$.

<u>Dem.</u>: Existe $f \in C(X(A),C^n_*)$ tal que $f|Z_\alpha = \hat{a}|Z_\alpha$ si y sólo si existe $f \in C(X(A),C^n_*)$ tal que $f|Z_{\hat{\alpha}} = \hat{a}|Z_{\hat{\alpha}}$, pues $Z_\alpha = Z_{\hat{\alpha}}$.

<u>Corolario 2.24</u>: $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$ es reducible en A si y sólo si para todo álgebra de Banach $B \supset A$ tal que $X(A) = X(B)$, (a,α) es reducible en B .

Para nociones más globales tenemos

<u>Proposición 2.25</u>: 1) A es n-estable en α si y sólo si ρ_α: $[X(A),S^{2n-1}] \to [Z_\alpha,S^{2n-1}]$ es suryectiva.

2) $\mathrm{sr}\, A \leq n$ si y sólo si ρ_α es suryectiva para todo $\alpha \in A$.

<u>Corolario 2.26</u>: Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $U_n(A/I)$ es conexo para todo ideal cerrado I ;

ii) $[Z_\alpha,S^{2n-1}]$ es trivial para todo $\alpha \in A$;

iii) $\mathrm{sr}\, A < n$ y $U_n(A)$ es conexo;

iv) $\mathrm{sr}\, A < n$ y $[X(A),S^{2n-1}]$ es trivial.

Corolario 2.27: $\operatorname{sr} A \leq \operatorname{sr} C(X(A))$.

A estas alturas uno podría preguntarse qué tipo de invariante es el rango estable en un álgebra de Banach conmutativa A . De todo lo dicho hasta ahora se desprende que el rango estable, una noción a priori meramente algebraica, en realidad depende sólo del tipo de homotopía de los pares $(X(A), \text{hull } I)$, donde I es un ideal cerrado, que puede tomarse de la forma $(A\alpha)^{-}$.
Pero antes de pasar al concepto global, detengámonos un poco en la versión más localizada que se asocia naturalmente a este tipo de estabilidad, es decir, la noción de reducibilidad. La siguiente proposición, de carácter puramente práctico, nos provee una serie de formas explícitas de chequear si un unimodular dado es reducible o no.

Proposición 2.28: Sea A un álgebra de Banach. Las siguientes condiciones para $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$ son equivalentes:
1) (a,α) es reducible;
2) existe $b \in U_n(A)$ y $\beta \in A$ tales que $\Sigma b_i a_i + \beta\alpha = 1$;
3) existe $b \in U_n(A)$ tal que $\widehat{b.a}(Z_\alpha) \subset \{z \in C^n : \Sigma z_i = 1\}$ (donde $b.a = (b_1a_1, \ldots, b_na_n) \in A^n$);
4) existe $b \in U_n(A)$ tal que $\widehat{b.a}(Z_\alpha)$ no separa el "0" del ∞ (en C^n);
5) existe $c \in U_n(A)$ tal que $\hat{a} = \hat{c}$ en Z_α ;
6) existe $f_m \in C(X(A), C_*^n) = U_n(C(X(A))$ tal que $\|f_m - \hat{a}\|_{Z_\alpha} \to 0$ cuando $m \to \infty$ (donde $\|f\|_{Z_\alpha} = \sup\{\|f(h)\| : h \in Z_\alpha\}$).

<u>Dem.</u>: 1) $\Rightarrow$ 2). Existe $x \in A^n$ tal que $a + x\alpha \in U_n(A)$, por eso alcanza con tomar $b \in U_n(A)$ tal que $\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + x_i\alpha) = 1$ y $\beta = \Sigma b_i x_i$.

2) $\Rightarrow$ 3). Si $\Sigma b_i a_i + \beta\alpha = 1$, se tiene que para $h \in Z_\alpha$: $1 = \Sigma\, h(b_i)h(a_i) + h(\beta)h(\alpha) = \Sigma h(b_i)h(a_i) = \widehat{b.a}(h)$.

3) $\Rightarrow$ 4). Trivial.

4) $\Rightarrow$ 1). Sea $r = \sup\{\|z\|;\ z \in \widehat{b.a}(Z_\alpha)\} + 1$, y elijamos φ : $[1/2,1] \to C^n - \widehat{b.a}(Z_\alpha)$ continua tal que $\varphi(1/2) = (r,0,\ldots,0)$ y $\varphi(1) = (0,\ldots,0)$. Definamos ahora las siguientes curvas γ_1 : $[0,1] \to C$, $\gamma_2 : [0,1] \to C^n$ dadas por:

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} 2t\ , & t \in [0,1/2] \\ 1\ , & t \in [1/2,1] \end{cases} \qquad , \quad \gamma_2(t) = \begin{cases} (r,0,\ldots,0)\ , & t \in [0,1/2] \\ \varphi(t)\ , & t \in [1/2,1] \end{cases}$$

Debemos probar que $(b.a,\alpha)$ es reducible en A , y por la discusión previa basta con mostrar que $\widehat{b.a}/Z_\alpha$ es homotópicamente nulo en $C(Z_\alpha, C^n_*)$. Para esto, definimos $F(h,t) = \gamma_1(t)\,\widehat{b.a}(h) - \gamma_2(t)$; es claro que F es una homotopía entre $\widehat{b.a}$ y la constante $(r,0,\ldots,0)$, por lo que sólo falta ver que $F(h,t) \in C^n_*$ para todo $t \in [0,1]$: si $0 < t \leq 1/2$, $F(h,t) = 2t\,\widehat{b.a}(h) - (r,0,\ldots,0)$ y $r = \|(r,0,\ldots,0)\| > \|\widehat{b.a}(h)\|$ para todo $h \in Z_\alpha$; si $1/2 < t \leq 1$, $F(h,t) = \widehat{b.a}(h) - \varphi(t)$ y $\varphi(t) \notin \widehat{b.a}(Z_\alpha)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Notemos que $\beta = \Sigma\, b_i c_i$ para algunos $c_i \in A$, por lo cual $\Sigma\, b_i(a_i + c_i\alpha) = 1$.

1) $\Rightarrow$ 5). Tomemos $x \in A^n$ tal que $c = a + x\alpha \in U_n(A)$, claramente $\hat{a} = \hat{c}$ en Z_α .

5) $\Rightarrow$ 6). Basta tomar $f_m = \hat{c}$ $(m \in N)$.

6) $\Rightarrow$ 1). Por proposición 2.23 es suficiente con ver que $(\hat{a},\hat{\alpha})$ es reducible en $C(X(A))$. De 6) es claro que $F_t = \hat{a} + t(f_m - \hat{a})$ define una curva en $H_n(C(X(A));\hat{\alpha})$ para m suficientemente grande, pues $F_t(h) \neq 0$ en C^n si $h \in Z_\alpha$ y m es tal que $\| f_m - \hat{a} \|_{Z_\alpha} < \min \{\| h(a) \| ;\ h \in Z_\alpha\}$. Así resulta que $F_0 = \hat{a}$ está en la componente conexa del unimodular f_m en $H_n(C(X(A));\hat{\alpha})$, lo que significa que $[\hat{a}]$ está en la imagen de $U_n(C(X(A))) \rightarrow U_n(C(X(A))/I)$, donde I es el ideal cerrado generado por $\hat{\alpha}$; luego $(\hat{a},\hat{\alpha})$ es reducible.

Cuando el álgebra en estudio es $C(X)$, con X un compacto separado, el rango estable está completamente caracterizado por la dimensión topológica de X. Hay varias formas de definir dimensiones en un espacio topológico normal, no todas ellas equivalentes entre sí; quizá la más conocida es la dada mediante el uso de cubrimientos con ciertas propiedades especiales, derivada de una conjetura de Lebesgue que inicialmente probó Brouwer; es esa dimensión la que vamos a tomar aquí, con una definición que, aunque distinta, resulta ser equivalente. Diremos además que varias de las dimensiones usuales coinciden si X es un espacio métrico separable.

<u>Definición 2.29</u>: Sea X un compacto separado.

La dimensión de X (dim X) es el menor número natural n tal que para todo cerrado $Z \subset X$, y toda función continua $f : Z \rightarrow S^n$, existe una función continua $F : X \rightarrow S^n$ tal que $F|Z = f$. O lo que es igual, el mínimo n tal que la restricción

$$[X,S^n] \to [Z,S^n]$$

es suryectiva para todo cerrado $Z \subset X$.
Si tal número no existe diremos que $\dim X = \infty$.

Para un sistemático desarrollo de la teoría de la dimensión el lector puede recurrir a [25], [33], ó [34]. Aquí enunciaremos unos pocos resultados, someramente y a medida que los vayamos usando; por ejemplo, es fácil ver que si existe n tal que $[X,S^n]\to[Z,S^n]$ es suryectiva para todo cerrado $Z \subset X$, entonces lo mismo pasa con cualquier $m > n$.

El siguiente teorema es hasta donde yo sé, el primer resultado que relaciona el rango estable de un álgebra de Banach conmutativa con la topología de su espectro.

<u>Teorema 2.30</u> (Vasershtein): Si X es un compacto separado, $\mathrm{sr}\, C(X) = [\dim X/2]+1$ y $\mathrm{sr}\, C_R(X) = \dim X + 1$, donde $C_R(X)$ es el álgebra de funciones continuas a valores reales con norma supremo, y $C(X)$ es como siempre, lo mismo pero a valores complejos. Aquí $[q]$ denota la parte entera de q .

<u>Dem.</u>: Primero tomemos $C(X)$, por proposición 2.25 $\mathrm{sr}\, C(X)\leq n$ si y sólo si $[X,S^{2n-1}] \to [Z_\alpha,S^{2n-1}]$ es suryectiva $\forall\alpha \in C(X)$, pero como cualquier cerrado de X es el conjunto de ceros de algún $\alpha \in C(X)$, esto equivale a que $\dim X = d \leq 2n - 1$, o lo

que es igual $[d/2] + 1 \leq n$; luego $\operatorname{sr} C(X) = [d/2] + 1$.
La demostración es completamente análoga para $C_R(X)$, observando que para éste álgebra real en particular, subsiste mucho de lo dicho hasta el momento para álgebras complejas, simplemente cambiando C_*^n por R_*^n y S^{2n-1} por S^{n-1} . De modo que $\operatorname{sr} C_R(X) \leq n$ si y sólo si $d \leq n-1$, y entonces $\operatorname{sr} C_R(X) \leq d+1$.

Recordamos que los ceros de los ideales de A son los cerrados de $X(A)$ en la llamada topología hull - kernel, y que A se dice regular si la topología de Gelfand y la topología hull - kernel coinciden.

Corolario 2.31: Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces $\operatorname{sr} A \leq [\dim X(A)/2] + 1$, y si A es regular vale la igualdad.

Dem.: ($\leq$) sale combinando corolario 2.27 con el teorema anterior. Para la otra desigualdad en el caso regular, notemos que por la misma definición de dimensión, existe un cerrado $Z \subset X(A)$ tal que $[X(A), S^{2n-1}] \to [Z, S^{2n-1}]$ no es suryectiva para $n < [\dim X(A)/2] + 1$; como existe un ideal $I \subset A$ tal que hull $I = Z$, obtenemos así que $U_n(A) \to U_n(A/I)$ no es suryectiva, y consecuentemente $\operatorname{sr} A \geq n$.

Otros de los resultados clásicos de teoría de la dimensión que usaremos, son los siguientes: si Z es un cerrado de X y $\dim X \leq$

n , entonces $\dim Z < n$; y si $\dim X < n$, entonces $[X, S^m] = *$ (es trivial) para todo $m > n$.

Corolario 2.32: Sea $\alpha \in A$. Luego, A es n-estable en α para todo $n \geq [(d + 1)/2] + 1$, donde $d = \dim Z_\alpha$.

Dem: La desigualdad anterior equivale a $d < 2n - 1$, lo que implica la trivialidad de $[Z_\alpha, S^{2n-1}]$.

Como hemos visto en proposición 2.11, si A es n-estable en α para todo $\alpha \in A$, entonces A es $(n+1)$-estable en α para todo $\alpha \in A$. Veremos con un ejemplo que esto no se sostiene en general si las palabras para todo son omitidas. Tomemos $A = C(S^{13})$, y $f \in A$ tal que $Z_f = S^{11} \subset S^{13}$, entonces A es 4-estable en f , porque $[Z_f, S^7] = [S^{11}, S^7]$ es trivial. Pero A no es 5-estable en f , pues $[X(A), S^9] = [S^{13}, S^9] = 0$, y $[Z_f, S^9] = [S^{11}, S^9] = Z_2$, luego $[X(A), S^9] \to [Z_f, S^9]$ no puede ser suryectiva (ver [24], último capítulo, para los detalles).

Teorema 2.33: Sea R un espacio compacto separado y $E \subset R$ un subconjunto cerrado. Si $\dim(R - E) \leq n$, toda $f : E \to S^n$ continua se puede extender a R .

La demostración se puede encontrar en [34, pág.54] . En teorema 2.18 demostramos que si X es un compacto de C , sr $P(X) =$ sr $R(X) = 1$; lo mismo vale para $A(X)$ cuando X es un compacto adecuado. En [2] Arens prueba, entre otras cosas, que el espectro de $A(X)$ es X .

Teorema 2.34: Si $X \subset \mathbb{C}$ es un compacto de interior conexo, sr $A(X) = 1$.

Dem.: Supongamos primero que X es conexo. Dado $(f,g) \in U_2(A(X))$, veremos que (f,g) es reducible en $C(X)$. Si $g \equiv 0$, f es inversible y no hay nada que probar. Si $g \not\equiv 0$, y por X^0 notamos el interior de X , tenemos que $Z_g \cap \overline{X^0}$ es cero dimensional; por teorema 2.30 $C(\overline{X^0})$ es 1 - estable en $g|\overline{X^0}$, luego existe una extensión continua $F : \overline{X^0} \to \mathbb{C}_*$ de $f|Z_g \cap \overline{X^0}$. Es claro que la función $H : \overline{X^0} \cup Z_g \to \mathbb{C}_*$ definida como

$$H(x) = \begin{cases} F(x) & , \text{ si } \quad x \in \overline{X^0} \\ \\ f(x) & , \text{ si } \quad x \in Z_g \end{cases}$$

es continua.

La dimensión de $X-(\overline{X^0} \cup Z_g)$ es a lo sumo 1 , pues si fuera 2 tendría interior no vacío [34. pág.98], lo cual es obviamente falso. Entonces $H \in C(\overline{X^0} \cup Z_g, \mathbb{C}_*)$ tiene una extensión $K \in C(X,\mathbb{C}_*)$ por el teorema anterior.

Si X es disconexo, sólo debemos notar que $a \in U_{n+1}(C(X))$ es reducible si y sólo si $a|_{X_0} \in U_{n+1}(C(X_0))$ es reducible para toda componente conexa $X_0 \subset X$, y que si $X_0^0 = \phi$, $\dim X_0 \leq 1$.

Este tipo de técnicas que hacen fuerte uso de teoría de la dimensión son típicas de la situación que nos ocupa; el siguiente teorema, el cual puede tomarse como la versión n dimensional de teorema 2.20, es un claro ejemplo de lo dicho.

Consideremos $B_n = \{z \in C^n : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq 1\}$. Si D es un subconjunto de C^n , ∂D notará el borde de D con respecto a C^n .

Teorema 2.35: Si $X = \bar{\Delta}^n$ ó B_n , sr $P(X) \leq n$.

Dem.: Vamos a hacer la demostración para $\bar{\Delta}^n$, pues salvo algún detalle técnico menor, la demostración para B_n es exactamente la misma.

Tomemos $(f,\alpha) \in U_{n+1}(P(\bar{\Delta}^n))$; si $\alpha \equiv 0$ se tiene que $f \in U_n(P(\bar{\Delta}^n))$ y no hay nada que probar, por lo que podemos suponer $\alpha \not\equiv 0$. Veamos que $\dim Z_\alpha \leq 2n-2$, sabemos por [22] que $\dim(Z_\alpha \cap \Delta^n) \leq 2n-2$, por lo que basta con probar que $\dim(Z_\alpha \cap \partial\Delta^n) \leq 2n-2$. Sea $T = Z_\alpha \cap \partial\Delta^n$, si $\dim T = 2n-1 = \dim \partial\Delta^n$, por ser $\partial\Delta^n$ una variedad topológica, tendríamos que el interior de T respecto de $\partial\Delta^n$, int T sería no vacío (ver [25], pág.46); luego existen $z^0 \in T$ y $\delta > 0$ tales que $V_\delta \cap \partial\Delta^n \subset T$, donde $V_\delta = \{z \in C^n : |z_i - z_i^0| < \delta , 1 \leq i \leq n\}$.

Como $z^0 \in \partial\Delta^n$, existe un K tal que $|z_K^0| = 1$, entonces si $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{K-1}, \omega_{K+1}, \dots, \omega_n) \in \bar{\Delta}^{n-1}$ es tal que $|\omega_j - z_j^0| < \delta$ para todo j entre 1 y n distinto de K , definimos

$$L_\omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_{K-1}, z, \omega_{K+1}, \dots, \omega_n) : |z| \leq 1\}$$

Entonces $\alpha|_{L_\omega}$ se puede pensar como un elemento del álgebra del disco, el cual verifica que si $z \in S^1$ y $|z - z_K^0| < \delta$, $\alpha(\omega_1,\ldots$ $\ldots,\omega_{K-1},z,\omega_{K+1},\ldots,\omega_n) = \alpha|_{L_\omega}(z) = 0$, de donde $\dim(Z_{\alpha|_{L_\omega}}) \geq 1$, y como todo elemento no nulo del álgebra del disco tiene un conjunto de ceros de dimensión cero, resulta que $\alpha|_{L_\omega} \equiv 0$. Esto nos dice que si $z \in \bar{\Delta}^n$ y $|z_j - z_j^0| < \delta$, $1 \leq j \leq n$, $j \neq K$ se tiene que $\alpha(z_1,\ldots z_n) = 0$ sin ninguna restricción sobre z_K .
Luego $Z_\alpha^0 \neq \phi$, lo que es falso pues $\alpha \not\equiv 0$.
Corolario 2.32 nos dice entonces que $P(\bar{\Delta}^n)$ es m - estable en α , para todo $m \geq [\frac{2n-2+1}{2}] + 1 = n$, y como α es arbitrario, obtenemos que $\mathrm{sr}\,(P(\bar{\Delta}^n)) \leq n$.

También vale la otra desigualdad, como establecemos en una forma ligeramente más general, en el siguiente teorema.

<u>Teorema 2.36</u>: Sea $X \subset C^n$ un compacto polinomialmente convexo de interior no vacío. Entonces $\mathrm{sr}\, P(X) \geq [n/2] + 1$.

<u>Dem.</u>: Sin perder generalidad podemos suponer que $X \supset B_n$, pongamos $L = [n/2]$. Luego, afirmamos que

$$(z_1,z_3,\ldots z_{2L-1},z_1z_2 + z_3z_4 + \ldots + z_{2L-1}\, z_{2L} - 1) \in U_{L+1}(P(X))$$

no es reducible (donde z_i son las funciones coordenadas).
Que es unimodular es claro, pues si $g(z) = (\sum_{k=1}^{L} z_{2K-1}\, z_{2K}) - 1$

$$\sum_{k=1}^{L}(-z_{2K})z_{2K-1} + g(z) = -1 .$$

Si fuera reducible, $z/_{Z_g} = (z_1,z_3,\ldots,z_{2L-1})/_{Z_g}$ se podría extender a una función continua $F \in C(X,C_*^L)$; para ver que esto no puede pasar, restrinjámonos al conjunto $T = \{z \in B_n : z_{2K} = \bar{z}_{2K-1}$ para $1 \leq K \leq L\}$, entonces $(z,g)/_T$ queda $(z_1,z_3,\ldots,z_{2L-1},|z_1|^2 + |z_3|^2 + \ldots + |z_{2L-1}|^2 - 1)$, y $F/_T \in C(T,C_*^L)$ con $F/_{T\cap Z_g} = z/_{T\cap Z_g}$; pero $T \cap Z_g = Z_{g/T} \cong S^{2L-1}$ y $z/_{T\cap Z_g}$ es la inclusión de S^{2L-1} en C_*^L que por teoría general de homotopía,no se puede extender a todo

$$\{(z_1,z_3,\ldots,z_{2L-1}) \in C^L : \sum_{k=1}^{L}|z_{2K-1}|^2 \leq 1\} \cong T$$

($\cong$ denota homeomorfismo).

<u>Corolario 2.37</u>: Si $X = \bar{\Delta}^n$ o B_n , entonces $[n/2] + 1 \leq \text{sr}\, P(X) \leq n$.

<u>Dem.</u>: Es una simple combinación de los teoremas anteriores.

<u>Corolario 2.38</u>: Si A es un álgebra uniforme con $X(A) \subset C^n$, $X(A)^0 \neq \phi$ y $A \supset P(X(A))$, entonces $\text{sr}\, A \geq [n/2] + 1$.

<u>Dem.</u>: Sale del teorema notando que $z_i \in A$, $1 \leq i \leq n$.

Funciones holomorfas acotadas.

En [12] conjeturamos que el álgebra H^∞ de funciones holomorfas y acotadas en el disco abierto Δ tiene rango estable uno, es decir que si $f,g \in H^\infty$ y $|f| + |g| > \delta_1$, para algún $\delta_1 > 0$, existe $h \in H^\infty$ tal que $|f + hg| > \delta_2$ para algún $\delta_2 > 0$. Este problema, que aún permanece abierto, no parece nada fácil, pues en cierto sentido es un refinamiento del muy difícil teorema de la corona (ver [18], pág.201, o [21], pág.323). El teorema de la corona afirma que $(f_1,\ldots,f_n) \in U_n(H^\infty)$ si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que $|f_1| + \ldots + |f_n| > \delta$ (notar que H^∞ con norma supremo es un álgebra de Banach). Uno de los motivos que nos lleva a creer que $sr(H^\infty) = 1$ es el siguiente teorema.

Teorema 2.39: Sea $(f,g) \in U_2(H^\infty)$ y supongamos que f pertenece al álgebra del disco. Entonces, (f,g) es reducible.
La demostración de este teorema está fuertemente basada en un trabajo de D.J.Newman usado por L.Carleson para probar su famoso teorema de la corona, y en ciertos hechos generales sobre la teoría de rango estable en álgebras uniformes.
Recordemos un par de fáciles resultados que han aparecido a lo largo de este trabajo:
Si A es un álgebra de Banach conmutativa, se tiene
(i) $(\alpha,\beta) \in U_2(A)$ es reducible si y sólo si $\alpha \in A^\cdot + A\beta$;
(ii) si (α,β) y $(\alpha',\beta') \in U_2(A)$ son reducibles, entonces $(\alpha\alpha',\beta) \in U_2(A)$, y es reducible.

Lema 2.40: Sea A un álgebra uniforme y $\alpha \in A$, si $F \in R(sp\alpha)$ entonces $F(\alpha) = F \circ \alpha \in A$.

Dem.: Existe una sucesión de funciones racionales sin polos en $sp\,\alpha$ tal que $f_n \to F$ en $R(sp\,\alpha)$, luego $f_n(\alpha) \in A$ y $\|f_n(\alpha) - f_m(\alpha)\|_A = \sup_{x \in X(A)} |f_n(\alpha(x)) - f_m(\alpha(x))| = \sup_{y \in sp\,\alpha} |f_n(y) - f_m(y)| < \epsilon$ si $n, m > N$. Por lo tanto, existe f en A tal que $f_n(\alpha) \to f$ en A, y si $x \in X(A)$,

$$f(x) = \lim_n f_n(\alpha(x)) = F(\alpha(x)), \quad \text{o sea} \quad f = F(\alpha).$$

Proposición 2.41: Sea A un álgebra uniforme, $\alpha, \beta \in A$, y sean D_i $(i \in I)$ las componentes conexas de $C - \hat{\alpha}(Z_\beta)$.
Supongamos que para cada $i \in I$ existe $z_i \in D_i$ tal que $(\alpha - z_i, \beta) \in U_2(A)$ es reducible.
Entonces, para todo $F \in R\,(sp\,\alpha)$ tal que $(F(\alpha), \beta) \in U_2(A)$ se tiene que $(F(\alpha), \beta)$ es reducible.

Dem.: Para todo $z \in C - \hat{\alpha}(Z_\beta)$, $(\alpha - z, \beta)$ es reducible. Efectivamente, si $\gamma : [0,1] \to D_i \subset C - \hat{\alpha}(Z_\beta)$ es un arco que une z_i y z, es claro que

$$(\alpha - \gamma(t), \beta) \in U_2(A) \qquad \forall t \in [0,1],$$

y así tenemos que $\alpha - z_i$ y $\alpha - z$ están en la misma componente de $H_1(A,\alpha)$ (ver [14]), luego como $(\alpha - z_i, \beta)$ es reducible, lo afirmado se deduce de teorema 2.15.

Entonces, para todo $z \in C - \hat{\alpha}(Z_\beta)$ existe $\mu \in A^{\cdot}$ tal que $\hat{\alpha} - z = \hat{\mu}$ en Z_β .

Si $F \in R(\mathrm{sp}\,\alpha)$ es tal que $(F(\alpha),\beta) \in U_2(A)$ entonces $Z_F \cap \hat{\alpha}(Z_\beta) = \phi$, puesto que $(F(\alpha),\beta) \in U_2(A)$ equivale a $Z_{F(\alpha)} \cap Z_\beta = \phi$. En particular,podemos encontrar funciones racionales f_n con polos fuera de $\mathrm{sp}\,\alpha$ y ceros fuera de $\hat{\alpha}(Z_\beta)$ tales que (f_n) converja uniformemente a F en $\mathrm{sp}\,\alpha$. Luego $f_n(\alpha) \to F(\alpha)$ y $(f_n(\alpha),\beta)$ es reducible por (ii), o lo que es igual $f_n(\alpha) \in A^{\cdot} + A\beta$. Pero $A^{\cdot} + A\beta$ es cerrado en $H_1(A,\beta)$ por lema 2.13, lo que implica que $F(\alpha) \in A^{\cdot} + A\beta$, es decir, $(F(\alpha),\beta)$ es reducible.

<u>Corolario 2.42</u>: La misma conclusión de la proposición es cierta si toda componente de $C - \hat{\alpha}(Z_\beta)$ contiene un elemento de $C - \mathrm{sp}\,\alpha$.

<u>Dem.</u>: Para toda componente D_i de $C - \hat{\alpha}(Z_\beta)$, sea $z_i \in (C - \mathrm{sp}\,\alpha) \cap D_i$. Luego, $\alpha - z_i \in A^{\cdot}$ y por lo tanto $(\alpha - z_i,\beta) \in U_2(A)$ es reducible, lo que prueba que las hipótesis de la proposición son satisfechas.

<u>Corolario 2.43</u>: Sea $(\alpha,\beta) \in U_2(A)$, si $C - \hat{\alpha}(Z_\beta)$ es conexo, (α,β) es reducible.

<u>Dem.</u>: En virtud de la proposición, tomando $F(\omega) = \omega$ $\forall \omega \in \mathrm{sp}\,\alpha$, es suficiente exhibir $z \in C - \hat{\alpha}(Z_\beta)$ con $(\alpha - z,\beta)$ reducible.

Para esto tomemos $z = \|\alpha\| + 1 : z \in C - \mathrm{im}\,\hat{\alpha} \subset C - \hat{\alpha}(Z_\beta)$ y $\alpha - z \in A^{\cdot}$, en particular $(\alpha - z, \beta)$ es reducible.

Sobre el espectro de H^∞ es mucho lo que se sabe y mucho lo que se ignora, por ejemplo, el teorema de la corona asegura que el disco abierto Δ es denso en $X(H^\infty)$, a más de ser abierto; sin embargo, no debe pensarse por esto que la "corona" $X(H^\infty)\setminus\Delta$ es una cosa pequeña o de fácil manejo, baste mencionar un conocido resultado para tener una idea de la magnitud de esta corona: si $\omega \in S^1$, definimos la fibra de ω como $M_\omega = \{\phi \in X(H^\infty) : \hat{z}(\phi) = \omega\}$, donde $\hat{z}$ es la transformada de Gelfand de la función coordenada, entonces M_ω contiene una imagen homeomorfa de $X(H^\infty)$. De modo que cada fibra contiene un conjunto homeomorfo a $X(H^\infty)$, que a su vez contiene fibras, y así siguiendo hasta el infinito.

La demostración del teorema, la cual se basa en ([18], capitulo 12) necesita de los siguientes lemas ([18], págs.203-205).

<u>Lema A</u>: Sea $B(z) = \prod_{k=1}^{s} (z - a_K)/(1 - \bar{a}_K z)$ un producto de Blaschke finito con ceros distintos $a_1, \ldots, a_s$. Para $\delta < 1/2$, sea F una función analítica en $\{z \in \Delta : |B(z)| < \delta\}$ y tal que allí $|F(z)| < 1$.
Entonces existe $f \in H^\infty$ con $f(a_K) = F(a_K)$ $(1 \leq K \leq s)$ y $\|f\| \leq \delta^{-\alpha}$, donde α es una constante absoluta.

<u>Lema B:</u> Sea f una función del álgebra del disco tal que $0 <$

$|f(z)| \leq 1$ en $(|z| = 1)$, y $E = \{z \in S^1 : |f(z)| < 1\}$ es no vacío.

Entonces, existe una sucesión (B_n) de productos de Blaschke finitos con ceros simples, tal que $|B_n(z)| \to |f(z)|$ uniformemente en cada subconjunto cerrado de $\bar{\Delta} \setminus \bar{E}$, y $B_n(z) \to f(z)$ uniformemente en cada cerrado de Δ.

Demostración del teorema 2.39: Mediante una transformación de Möbius y una homotecia, podemos suponer que $g(0) \neq 0$ y $\|g\| = 1$. De la proposición 2.41 se deduce que basta con probar que (z,g) es reducible (donde z nota la función coordenada), en efecto

$$\hat{z}(Z_g) = \{\omega \in S^1 \; ; \text{ existe } \phi \in M_\omega \text{ tal que } \phi(g) = 0\} \cup$$

$$\cup \{\omega \in \Delta \; ; \; g(\omega) = 0\},$$

por lo que $C - \hat{z}(Z_g)$ tiene una o dos componentes conexas; en el primer caso la afirmación se sigue del corolario 2.43; en el segundo caso, $(z - \omega, g)$ es reducible si $|\omega| > 1$, pues $z - \omega$ es inversible, luego tomando $\omega = 0$, si probamos que (z,g) es reducible, el teorema sigue de la proposición observando que $R(\mathrm{sp}\, \hat{z})$ es el álgebra del disco.

Sea $0 < \delta_0 < 1$ tal que $|z| + |g(z)| > \delta_0$ para todo $z \in \Delta$. Existe $E \subset S^1$ de medida lineal 2π tal que g tiene límite no tangencial en todo $z \in E$ (ver [18]); la función límite será notada también por g.

Sea $V = \{z_0/|z_0| \; ; \; z_0 \in \Delta, \; g(z_0) = 0\} \cup \{z \in E \; ; \; g(z) = 0\}$. Luego $E\setminus V$ tiene medida 2π . Si $z_1 \in E\setminus V$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|g(r\, z_1)| > \delta_1$ para $0 \leq r < 1$. Sea

$$R = \{r\, z_1 : \; 0 \leq r < 1\} \qquad y \qquad \delta = \text{mín}\{\delta_0, \delta_1\} .$$

Luego $|z| + |g(z)| > \delta$ para todo $z \in \Delta$ y $|g(z)| > \delta$ para todo $z \in R$.

Para $h \in H^\infty$, consideremos $S_\delta(h) = \{z \in \Delta : |h(z)| < \delta/2\}$, y tomemos $g_\rho(z) = g(\rho\, z)$ para aquellos $\rho < 1$ tales que $g(\rho\, z) \neq 0$ en S^1 . Luego

$$R \subset \Delta \setminus S_\delta(g_\rho) \qquad y \qquad |z| + |g_\rho(z)| > \delta \; , \text{ pues}$$

$$|z| + |g_\rho(z)| > |\rho\, z| + |g_\rho(z)| > \delta \qquad \text{si} \quad z \in \Delta .$$

Sea ϕ_ρ una función nunca nula en el álgebra del disco tal que $|\phi_\rho(z)| = \text{mín}\,\{3/\delta, 1/|g_\rho(z)|\}$ para $z \in S^1$, y definamos $\psi_\rho(z) = \phi_\rho(z)\, g_\rho(z)$. Entonces se verifican los siguientes hechos:

(i) $|\phi_\rho(z)| \geq 1$ y $|\psi_\rho(z)| \leq 1$ $\forall z \in \bar{\Delta}$;

(ii) para $z \in S^1$, $|\psi_\rho(z)| = 1 \Leftrightarrow |\phi_\rho(z)| = 1/|g_\rho(z)| \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |g_\rho(z)| \geq \delta/3$;

(iii) para cada ρ , existe una sucesión (B_n) de productos de Blaschke finitos con ceros simples,tal que $B_n \to \psi_\rho$ uniformemente sobre los compactos de Δ , y
$|B_n(z)| > |\psi_\rho(z)| - \delta/4$ para n suficientemente grande si $|g_\rho(z)| \geq \delta/2$ (Lema B);

iv) $|z| + |B_n(z)| > \delta/2$ para $z \in \Delta$,

(efectivamente, $|z| + |B_n(z)| > |z| + |\psi_\rho(z)| - \delta/4 \geq$
$\geq |z| + |g_\rho(z)| - \delta/4 > \delta/2$ para $|g_\rho(z)| \geq \delta/2$, y $|z| > \delta/2$ para $|g_\rho(z)| < \delta/2$);

v) $|B_n(z)| \geq \delta/4 \quad \forall z \in R$,

(porque $R \subset \{z : |g_\rho(z)| \geq \delta/2\}$ y por (iii) $|B_n(z)| >$
$> |\psi_\rho(z)| - \delta/4 \geq |g_\rho(z)| - \delta/4 \geq \delta/4$).

Fijando ρ y n , tenemos que $|B_n(z)| + |z| > \delta/2$ para todo z y $|B_n(z)| \geq \delta/4$ en R ; luego $S_{\delta/2}(B_n) = \bigcup_{i \in I} D_i$, donde cada D_i es una componente conexa (que por el principio de módulo máximo son simplemente conexas), y existe una rama logarítmica $\ln z$ en $\Delta \setminus R$ tal que,poniendo $\ln_i z = \ln z$ para $z \in D_i$ obtendremos

$$|\ln_i z| \leq [(\ln \delta/4)^2 + (2\pi)^2]^{1/2} = T_\delta$$

(notemos que $|z| \geq \delta/4$ en $S_{\delta/2}(B_n)$).

Entonces, por Lema A , existe $r_n \in H^\infty$ tal que

$$r_n(a_K^i) = \ln_i a_K^i \quad \text{para todo} \quad a_K^i \in Z_{B_n} \cap D_i \ , \text{ y}$$

$\|r_n\| \leq T_\delta (\delta/4)^{-\alpha} = s$, donde α es una constante absoluta. Luego $z - e^{r_n}$ se anula en cada a_K^i , por lo que existe $h_n \in H^\infty$ tal que $z - e^{r_n(z)} = h_n(z) B_n(z)$, y así $|h_n(z)| = |z - e^{r_n(z)}|$ en casi todo punto de S^1 en el sentido de función límite no tangencial, en particular $\|h_n\| \leq 1 + e^{\|r_n\|} \leq 1 + e^s$. Esto muestra que (r_n) y (h_n) son familias normales (ρ permanece fijo) y por tanto, existen subsucesiones que convergen uniformemente sobre los compactos de Δ , $h_n \to h_\rho$ y $r_n \to r_\rho$ para algunos h_ρ, r_ρ en H^∞. Más aún

$$\|h_\rho\| < 1 + e^s \ , \ \|r_\rho\| \leq s \ , \ y \quad z - h_\rho(z)\ \phi_\rho(z)\ g_\rho(z) \ = e^{r_\rho(z)} .$$

Por la definición de ϕ_ρ , $\|\phi_\rho\| < 3/\delta$. Esas tres desigualdades muestran que (ϕ_ρ), (h_ρ) y (r_ρ) forman familias normales, y tomando $\rho \to 1$ (manteniendo $g_\rho(z) \neq 0$ en S^1), a través de una sucesión adecuada, obtendremos que

$$h_\rho \to h, \quad \phi_\rho \to \phi, \quad r_\rho \to r \ , \ y \quad g_\rho \to g$$

uniformemente en los compactos de Δ , para algunos h, ϕ y r en H^∞ con

$$\|h\| \leq 1 + e^s \ , \ \|r\| \leq s \ , \ \|\phi\| < 3/\delta \quad y$$

$$z - h(z)\phi(z)g(z) = e^{r(z)} .$$

Esto muestra que (z,g) es reducible, como queríamos.

Observación: En realidad, no sólo probamos que (f,g) es reducible, sino que además lo es a un elemento de la componente conexa del uno en los inversibles de H^∞.

Generalizaciones.

En las situaciones que hemos estudiado hasta ahora, uno tiene por lo general un epimorfismo de álgebras de Banach $\phi : A \to B$ que, como vimos, induce aplicaciones con ciertas propiedades de fibración,

$$GL_n(A) \to GL_n(B) \quad , \quad y \quad U_n(A) \to U_n(B) \ .$$

En la teoría de álgebras de Banach frecuentemente aparecen morfismos que si bien no son suryectivos, son "casi" suryectivos, en el sentido de que su imagen es densa; aquí no podemos aplicar las técnicas anteriores sin algún tipo de modificación, sin embargo veremos que podemos aplicar casi las mismas técnicas, donde el casi se puede entender como que muchas de las que antes eran igualdades, ahora serán aproximaciones; esto es una evidente analogía con el hecho de que un morfismo sea suryectivo o denso, ya que en el primer caso todo $b \in B$ es $\phi(a)$ para algún $a \in A$, y en el segundo es aproximadamente un tal $\phi(a)$. La cuestión primordial que podremos estudiar es cuándo un unimodular de B se puede aproximar arbitrariamente por imágenes de unimodulares de A, en obvia analogía con la noción de reducibilidad en los casos ya vistos, en que el morfismo es suryectivo. En realidad, más que el análogo aproximado de todo el trabajo previo, y teniendo en cuenta que todo epimorfismo es denso, ésta es una auténtica generalización; como veremos más adelante.

Nuestra segunda dirección de generalización es hacia las álgebras de Fréchet, entreabriendo la puerta a la posible extensión de toda esta teoría a tales álgebras; finalizando con una aplicación a cierto problema de interpolación en álgebras de funciones analíticas, cuya demostración es lo suficientemente simple, como para sugerir la fuerza de los resultados que nos permitieron llegar hasta allí.

Esta sección es esencialmente expositiva, por lo que se han eliminado la mayoría de los detalles técnicos, salvo en los primeros tres resultados, de quienes deriva gran parte de la discusión posterior.

Como ya hemos visto, las fibraciones de Serre son una herramienta fundamental de este trabajo, para definiciones y resultados sobre el tema, uno puede remitirse a [24]; en esta sección necesitamos ante todo definir la propiedad de ser "aproximadamente" una fibración de Serre.

Definición 2.44: Sean E, B, X espacios topológicos separados, con B métrico y X compacto, y sea $p : E \to B$ una aplicación continua. Diremos que $p : E \to B$ tiene la propiedad (H) respecto de X, si cada vez que existan f y $\hat{f}$ continuas que hagan conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ I\times X & \xrightarrow[\hat{f}]{} & B \end{array} \qquad (I = [0,1],\ i(x)=(0,x)),$$

y para todo $\epsilon > 0$,

existe $f^* : I \times X \to E$ continua tal que

i) $f^* i = f$

ii) $\sup_{(t,x)\in I\times X} d_B(pf^*(t,x), \hat{f}(t,x)) \leq \epsilon$

Definición 2.45: Diremos que $p : E \to B$ es una fibración de Serre aproximada si tiene la propiedad (H) con respecto a todo cubo I^m (aquí $I^0 = \{0\}$).

Digamos solamente que si en definición 2.44 tomamos $\epsilon = 0$, definición 2.45 resulta ser la definición de una fibración de Serre en el sentido clásico ([24],págs.61 a 64).

Proposición 2.46: Sean A y B álgebras de Banach, y $\phi : A \to B$ un morfismo con imagen densa. Entonces,el morfismo de grupos inducidos $\phi_n : GL_n(A) \to GL_n(B)$,tiene la propiedad de que $b \in (\text{im } \phi_n)^-$ (la clausura tomada en $GL_n(B)$) si y sólo si existe $b' \in \text{im } \phi_n$, con b' en igual componente conexa que b .

Dem.: ($\Rightarrow$) $b \in (\text{im } \phi_n)^-$, o sea que existe $a \in GL_n(A)$ tal que $\|\phi_n(a) - b\| < \|b^{-1}\|^{-1}$, y por lo tanto $b + t(\phi_n(a) - b)$ $(t \in I)$ es un arco entre b y $\phi_n(a)$ en $GL_n(B)$, puesto que

$$b^{-1}[b + t(\phi_n(a) - b)] = 1 + t\, b^{-1}(\phi_n(a) - b) \text{ , y}$$

$$\|b^{-1}(\phi_n(a) - b)\| \leq \|b^{-1}\| \|\phi_n(a) - b\| < 1 \text{ .}$$

($\Leftarrow$) Primero demostremos que $\phi_n(GL_n(A)_0)$ es densa en $GL_n(B)_0$ donde estas son las respectivas componentes conexas de las identidades; si $y \in GL_n(B)_0$, $y = e^{b_1},\ldots,e^{b_s}$ con $b_1,\ldots,b_s \in M_n(B)$, por lo que se puede aproximar, en virtud de la continuidad de la exponencial y la densidad de $\phi(A)$, por $e^{\phi(a_1)} \ldots e^{\phi(a_s)} \in \phi_n(GL_n(A)_0)$, donde $a_1,\ldots,a_s \in M_n(A)$ y ϕ se entiende en el sentido obvio.

Sea G_1 una componente conexa cualquiera de $GL_n(B)$, notemos $G_0 = GL_n(B)_0$; se tiene que si $u \in G_1$, la función $f : G_0 \to G_1$ definida por $f(x) = x\,u$ es un homeomorfismo, con inversa $g(y) = y\,u^{-1}$. Entonces si $b \in G_1$ y $b' \in G_1 \cap \operatorname{im} \phi_n$, tenemos que $b(b')^{-1} \in G_0 \subset (\operatorname{im} \phi_n)^-$, y como $b' \in (\operatorname{im} \phi_n)^-$, que es un subgrupo de $GL_n(B)$, vemos que $b = b(b')^{-1}b'$ también está en $(\operatorname{im} \phi_n)^-$, como queríamos demostrar.

<u>Teorema 2.47</u>: Si $\phi : A \to B$ es como en la proposición anterior, entonces $\phi_n : GL_n(A) \to GL_n(B)$ es una fibración de Serre aproximada.

<u>Dem.</u>: Demostremos primero que ϕ_n tiene la propiedad (H) con respecto a $I^0 = \{0\}$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{f} & GL_n(A) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_n} \\ I\times\{0\} & \xrightarrow[\hat{f}]{} & GL_n(B) \end{array} \qquad i(0) = (0,0)$$

y queremos ver la existencia de una función $f^* : I \times \{0\} \to GL_n(A)$ tal que $f_0^*(0) = f(0)$ y $\|\phi_n f^* - \hat{f}\| < \epsilon$, dado un $\epsilon > 0$.
Podemos considerar $\hat{f}$ y $\hat{f}_0$ como elementos de $GL_n(C(I,B))$, los cuales se pueden unir por una homotopía $F_s(t) = \hat{f}_{s.t}$, $(s,t) \in I^2$, ya que $F_0 = \hat{f}_0$ y $F_1 = \hat{f}$.
$\phi : A \to B$ induce un morfismo de álgebras denso $\varphi : C(I,A) \to C(I,B)$, el que a su vez induce un morfismo de grupos φ_n : $GL_n(C(I,A)) \to GL_n(C(I,B))$; es claro que $\hat{f}_0 = \phi_n(f(0))$ está en la imagen de φ_n , luego por lo dicho más arriba y la proposición anterior,se deduce que existe un elemento $a \in GL_n(C(I,A))$ tal que $\|\varphi_n(a) - \hat{f}\| < \epsilon'$, cualquiera sea $\epsilon' > 0$, que por el momento mantendremos como parámetro libre.
Volvamos hacia atrás y miremos "a" como una función de $I \approx I \times \{0\}$ en $GL_n(A)$. Afirmamos entonces que si ϵ' es suficientemente pequeño, $f^* = f(0)a(0)^{-1}a$ será nuestra función buscada. Evidentemente $f^*(0) = f(0)$, para verificar la segunda condición debemos hacer una serie de acotaciones. Fijando un $t \in I$ arbitrario, las funciones que siguen se considerarán evaluadas en ese t , y consiguientemente la norma es la de $M_n(B)$.

$$\|\phi_n(f(0)a(0)^{-1}a) - \hat{f}\| \leq \|\phi_n(f(0)a(0)^{-1}a) - \phi_n(a)\| + \|\phi_n(a) - \hat{f}\|$$

$$\leq \|\phi_n(f(0)a(0)^{-1}) - 1\| (\|\phi_n(a) - \phi_n(\hat{f})\| + \|\phi_n(\hat{f})\|) + \epsilon'$$

$$\leq \|\phi_n(f(0)a(0)^{-1}) - 1\| (\|\phi_n(\hat{f})\| + \epsilon') + \epsilon' \qquad (1).$$

El primer miembro entre barras es menor o igual que

$\|\phi_n(f(0))\|\|\phi_n(a(0)^{-1}) - \phi_n(f(0)^{-1})\|$, llamemos $\beta =$ $\|\phi_n(a(0)^{-1}) - \phi_n(f(0)^{-1})\|$, entonces

$$\beta \leqslant \|\phi_n(a(0)^{-1})\|\|\phi_n(f(0)^{-1})\|\|\phi_n(a(0)) - \phi_n(f(0))\|$$

$$\leqslant (\beta + \|\phi_n(f(0)^{-1})\|)\ \|\phi_n(f(0)^{-1})\|\epsilon' \text{ , de donde}$$

$$\beta \leqslant \frac{\|\phi_n(f(0)^{-1})\|^2\ \epsilon'}{1 - \|\phi_n(f(0)^{-1})\|\epsilon'} \qquad \text{si} \quad \epsilon' < 1/\|\phi_n(f(0)^{-1})\|$$

Volviendo a (1), queda:

$$(1) \leqslant \left\{ \|\phi_n(f(0))\| \frac{\|\phi_n(f(0)^{-1})\|^2}{1 - \|\phi_n(f(0))^{-1}\|\epsilon'} (\|\phi_n(\hat{f})\| + \epsilon') + 1 \right\} \epsilon'$$

Como $\|\phi_n(\hat{f})\|$ se puede acotar superiormente por una cota que no depende de t , es evidente que se puede tomar un $\epsilon' > 0$ de modo que la última expresión, se haga menor que un cierto $\epsilon > 0$ dado, para todo $t \in I$.

El caso general se reduce al caso anterior, ya que el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} I^m \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & GL_n(A) \arrow[d, "\phi_n"] \\ I \times I^m \arrow[r, "\hat{f}"'] & GL_n(B) \end{tikzcd} \qquad i(q) = (0,q)$$

se puede transformar en

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & GL_n(C(I^m,A)) \arrow[d, "\varphi_n"] \\ I\times\{0\} \arrow[r, "\hat{g}"'] & GL_n(C(I^m,B)) \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} g(0) = f \\ \hat{g}_t(0) = \hat{f}_t \end{array}$$

Evidentemente, este resultado es análogo al del teorema 1,15, de la misma manera, el lema 1.16 tiene su versión en este contexto aproximado.

Proposición 2.48: Sean A y B álgebras de Banach, y ϕ : $A \to B$ un morfismo con imagen densa; luego, la función inducida $\tilde{\varphi}_n : U_n(A) \to U_n(B)$ es una fibración de Serre aproximada.

Dem.: Como antes, el caso general se reduce a la propiedad de levantamiento de curvas, es decir, que basta probar que $\tilde{\phi}_n$ tiene la propiedad (H) con respecto a $I^0 = \{0\}$.

Tomemos $a \in U_n(A)$ y sean $b = \tilde{\phi}_n(a)$ y $\gamma : I \to U_n(B)$ una curval tal que $\gamma(0) = b$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \tau \arrow[d, mapsto] & GL_n(A) \arrow[r, "\phi_n"] \arrow[d, "t_a"'] & GL_n(B) \arrow[d, "t_b"] & \sigma \arrow[d, mapsto] \\ \tau.a & U_n(A) \arrow[r, "\tilde{\phi}_n"'] & U_n(B) & \sigma.b \\ & I \arrow[ur, "\gamma"'] & & \end{tikzcd}$$

Como t_b es una fibración de Serre (corolario 1.13), γ se puede levantar a una curva $\gamma_1 : I \to GL_n(B)$, con $\gamma_1(0) = 1$, y como ϕ_n es una fibración de Serre aproximada, existe una curva $\gamma_2 : I \to GL_n(A)$, tal que $\gamma_2(0) = 1$ y $\|\phi_n\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\| < \epsilon/\|b\|$ para todo $t \in I$, dado un $\epsilon > 0$. Si $\hat{\gamma}(t) = t_a\gamma_2(t)$, resulta que $\hat{\gamma}(0) = a$ y además

$$\|\tilde{\phi}_n\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)\| = \|\tilde{\phi}_n t_a\gamma_2(t) - \gamma(t)\| = \|\tilde{\phi}_n t_a\gamma_2(t) - t_b\gamma_1(t)\| =$$

$$= \|t_b\phi_n\gamma_2(t) - t_b\gamma_1(t)\| =$$

$$= \|(\phi_n\gamma_2(t) - \gamma_1(t))b\| \leq \|\phi_n\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\|\|b\| < \epsilon$$

(aquí,entre varias normas equivalentes elegimos una que verifique la penúltima desigualdad, por ejemplo la euclídea).

Si en los tres últimos resultados se cambia la hipótesis $\phi(A)$ densa en B por $\phi(A) = B$; con casi las mismas demostraciones, aunque más sencillas, ya que se pueden obviar las acotaciones hechas con la norma, se deduce que $\phi_n : GL_n(A) \to GL_n(B)$ y $\tilde{\phi}_n : U_n(A) \to U_n(B)$ son fibraciones de Serre, hechos estos que aparecen ya en el Capítulo I con pruebas menos detalladas; de modo que esta es una clara generalización de la teoría desarrollada anteriormente, y así, podemos seguir hasta llegar a los problemas de extensión que son el principal interés de este capítulo. Un corolario inmediato de la proposición 2.48 es que,

bajo las mismas hipótesis, im $\tilde{\phi}_n$ interseca una componente conexa de $U_n(B)$ si y sólo si es densa en esa componente conexa. En vista de la mencionada proposición, el problema de reducibilidad, que como ya vimos es equivalente a un problema de extensión a nivel de las componentes conexas de $U_n(A)$ y $U_n(B)$, se puede plantear vía esa equivalencia, en un contexto más generalizado (aproximado) y atacar con las mismas técnicas.
Explícitamente, si $\phi : A \to B$ es un morfismo denso y $b \in U_n(B)$, entonces b se podrá aproximar arbitrariamente por elementos de $\tilde{\phi}_n(U_n(A))$ si y sólo si $[b] \in \mathrm{im}\ \pi_0(\tilde{\phi}_n)$, donde $\pi_0(\tilde{\phi}_n)$: $\pi_0(U_n(A)) \to \pi_0(U_n(B))$. O la versión más global, $\tilde{\phi}_n : U_n(A) \to U_n(B)$ tiene imagen densa si y sólo si $\pi_0(\tilde{\phi}_n)$ es suryectiva; lo que en el caso conmutativo equivale a la suryectividad de $[X(A), C_*^n] \to [X(B), C_*^n]$, por el teorema de Novodvorskii. Hagamos aquí una breve observación, como $\phi : A \to B$ es densa, su traspuesta $\phi^* : X(B) \to X(A)$ es inyectiva (teorema 1.25, parte 1), y por lo tanto $[X(A), C_*^n] \to [X(B), C_*^n]$ se puede definir naturalmente sin mayor problema.

Veamos lo dicho con un ejemplo, el cual es análogo al de la página 49. Supongamos que $X \subset \bar{\Delta}$ es un compacto polinomialmente convexo, entonces la restricción a X induce un morfismo de álgebras uniformes con imagen densa $r : P(\bar{\Delta}) \to P(X)$, y dado $v \in P(X)^{\bullet}$ nos preguntamos si existe $u \in P(\bar{\Delta})^{\bullet}$ con $\|r(u) - v\| < \epsilon$, para un $\epsilon > 0$ arbitrario; por lo dicho recién, el problema se reduce a estudiar la aplicación que resulta de restringir, $[\bar{\Delta}, S^1] \to [X, S^1]$, y aquí tenemos que $[X,S^1] = *$,es trivial por ser X un compacto polinomialmente convexo de C , por lo que la flecha es suryectiva (en realidad, biyectiva), y así, efectivamente existe el $u \in P(\bar{\Delta})^{\cdot}$ de arriba. Es decir, que todo inversible de $P(X)$ se puede aproximar arbitrariamente,por restricciones de inversibles de $P(\bar{\Delta})$.

Miremos el caso conmutativo. Si $\phi(A)$ además de densa,es plena en B , y ϕ es inyectivo, proposición 1.27 nos dice que es también n-plena para todo n natural, y entonces claramente todo $b \in U_n(B)$ puede aproximarse por un $\phi(a)$ con $a \in U_n(A)$, luego,el problema antes planteado puede mirarse como un estudio de estas cuestiones bajo hipótesis más restringidas del morfismo ϕ ; por ejemplo, teorema 1.25 nos dice que si $\phi(A)$ es densa y plena en B , entonces la traspuesta $\phi^* : X(B) \to X(A)$ es un homeomorfismo, pero como se deduce de todo lo expuesto, para la aproximación de unimodulares arbitrarios,bastaría con que fuera un equivalencia homotópica.
En particular, esto puede ser de suma utilidad en la extensión a álgebras de Fréchet,de algunos resultados conocidos para álgebras de Banach, vía mirar las álgebras de Banach de las cuales es un límite proyectivo. El principal problema en generalizar toda la teoría a álgebras de Fréchet, es que el grupo de inversibles no tiene por qué ser abierto, sin embargo, los pocos resultados obtenidos hasta ahora en esa dirección,parecen confirmar la hipótesis de que gran parte de lo expuesto en este tra-

bajo, sigue valiendo en el contexto más amplio de álgebras de Fréchet. Como ejemplo veamos el siguiente teorema, y una aplicación analítica que sugiere ser especialmente interesante.

Teorema 2.49: Sean A y B álgebras de Fréchet conmutativas, y $f : A \to B$ un epimorfismo. Entonces, la aplicación inducida $f^{\cdot}: A^{\cdot} \to B^{\cdot}$ es una fibración de Serre.

Dem.: Sin extendernos demasiado en la demostración, digamos solamente que imitando algunos de los razonamientos hechos en esta sección, el problema se reduce a ver que la aplicación $A_0^{\cdot} \to B_0^{\cdot}$ es suryectiva, donde $A_0^{\cdot}$ y $B_0^{\cdot}$ son las componentes arco-conexas en $A^{\cdot}$ y $B^{\cdot}$ de sus respectivas identidades; pero eso es una inmediata consecuencia de un resultado de Davie ([16]) que afirma que $A_0^{\cdot} = \exp A$, y $B_0^{\cdot} = \exp B$.

En [16] Davie generaliza a álgebras de Fréchet el teorema de Arens-Royden, y más generalmente: si A y B son álgebras de Fréchet con A conmutativa, entonces $(A \hat{\otimes} B)^{\cdot}$, es mediante la transformada de Gelfand, homotópicamente equivalente a $C(X(A), B^{\cdot})$ (aquí $A \hat{\otimes} B$ es el producto tensorial completado convenientemente, para que siga siendo un álgebra de Fréchet).
Para ver la teoría general de álgebras de Fréchet, el lector puede remitirse a [30]. Aquí sólo mencionaremos unos pocos resultados que vamos a necesitar, algo más se verá en el próximo capítulo. Si A es un álgebra de Fréchet conmutativa, y J es

un ideal de A, se definen $X(A)$ y hull J de igual forma que para álgebras de Banach; si J es cerrado, A/J es naturalmente un álgebra de Fréchet y $X(A/J) \cong$ hull J. En vista del ya citado trabajo de Davie, $\pi_0(A^{\bullet}) = [X(A), C_*]$. Vamos a necesitar estos hechos para demostrar el siguiente teorema, el cual es una generalización de un resultado de Rubel ([42]) sobre funciones enteras, demostrado vía un clásico teorema de interpolación.

Si V es un abierto de C, $O(V)$ notará el álgebra de funciones analíticas en V dotada de la topología compacto-abierta, con la que resulta ser de Fréchet.

<u>Teorema 2.50</u>: sr $O(V) = 1$.

<u>Dem.</u>: Se sabe que $X(O(V)) = V$, y del argumento que vamos a usar se desprende que basta suponer V conexo. Alcanzará con mostrar que si g es un elemento no idénticamente nulo de $O(V)$, entonces $O(V)$ es 1-estable en g. El ideal generado por g, $J = O(V).g$ es cerrado, y hull $J = Z_g$ tiene dimensión cero, luego $[\text{hull } J, S^1]$ es trivial y $[V, S^1] \to [\text{hull } J, S^1]$ es suryectiva. Entonces, en virtud de teorema 2.49, $O(V)^{\bullet} \to (O(V)/J)^{\bullet}$ es suryectiva.

Cuando uno trabaja con álgebras de funciones analíticas se hace evidente la conexión que hay entre interpolación, extensión y rango estable; nuestro último teorema dice en particular que si $f,g \in O(V)$ y no tienen ceros comunes, entonces existe $F \in O(V)$ sin ceros, tal que $F = f$ en Z_g ; más aún, si V es conexo y $g \not\equiv 0$, se tiene que Z_g es a lo sumo numerable, y así, si $Z_g = \{\omega_K ; K \in N\}$ cada uno con su respectiva multiplicidad m_K , resulta que F se puede elegir de modo tal que las derivadas $F^{j_K}(\omega_K) = f^{j_K}(\omega_K)$, para $0 \leq j_K \leq m_{K-1}$ y todo K natural.

Además, este teorema aporta una razón más para creer que sr $H^{\infty} = 1$, pues como $H^{\infty} \subset O(\Delta)$, si $(f,g) \in U_2(H^{\infty})$, entonces (f,g) se puede reducir en $O(\Delta)$.

Capítulo III. RANGO ESTABLE TOPOLOGICO, O APROXIMACION UNIMODULAR

Caracterización espectral.

Entre las varias definiciones de "dimensión" que se pueden dar para un anillo topológico (ver [39]), se destacan el rango estable algebraico, el cual hemos tratado en el capítulo anterior, y el rango estable topológico, del que nos ocuparemos en este capítulo. Esta noción de estabilidad es introducida por Rieffel en [39], si bien ya estaba implícita en el trabajo de varios autores (ver [10], [40]); y está motivada principalmente en dos hechos, en primer lugar, en álgebras de Banach provee una cota superior para el rango estable, siendo en muchos casos más fácil de calcular; en segundo lugar, generaliza la noción clásica de dimensión para espacios paracompactos, a un álgebra C^* cualquiera.

Definición 3.1: Sea A un anillo topológico. Diremos que el rango estable topológico a izquierda de A es menor o igual que n ($\mathrm{ltsr}\, A \leq n$), si $U_n(A)$ es denso en A^n.
Evidentemente, si $U_n(A)$ es denso en A^n, también lo es $U_{n+1}(A)$ en A^{n+1}, puesto que $U_{n+1}(A) \supset U_n(A) \times A$. Si no existe un tal n, diremos que $\mathrm{ltsr}\, A = \infty$.
De igual forma se define el rango estable topológico a derecha ($\mathrm{rtsr}\, A$).

Lema 3.2: Si A es un álgebra de Banach,

$$\mathrm{sr}\, A \leq \min\{\mathrm{ltsr}\, A, \mathrm{rtsr}\, A\} .$$

Dem.: Sea $n = \mathrm{rtsr}\, A$, tomemos $(a,\alpha) \in U_{n+1}(A)$, existe entonces $(b,\beta) \in A^n \times A$ tal que $\langle b,a \rangle + \beta\alpha = 1$, luego, por hipótesis hay un $b' \in {}_nU(A)$ lo suficientemente cerca de b , como para que $\langle b',a \rangle + \beta\alpha \in A^\cdot$, pero $\beta = \langle b',c \rangle$ para algún $c \in A^n$. Así,

$$\langle b',a \rangle + \langle b',c \rangle\alpha = \langle b',a + c\alpha \rangle \in A^\cdot ,$$

es decir que $a + c\alpha \in U_n(A)$. Esto dice que el rango estable de A es menor o igual que $\mathrm{rtsr}\, A$ (recordemos que los rangos estables algebraicos a izquierda y a derecha coinciden). De igual forma, $\mathrm{sr}\, A \leq \mathrm{ltsr}\, A$.

No se sabe en general, si $\mathrm{ltsr}\, A = \mathrm{rtsr}\, A$, si bien para un álgebra con una involución continua (por ejemplo C^*) , la igualdad es clara, pues la involución intercambia $U_n(A)$ con ${}_nU(A)$.

Definición 3.3: Sea A un álgebra topológica compleja, y $a \in A^n$; definimos el espectro a izquierda de a , como

$$\mathrm{sp}_i\, a = \{\lambda \in C^n : a - \lambda \notin U_n(A)\} .$$

Igualmente se define el espectro a derecha con ${}_nU(A)$.

En todo lo que resta de este trabajo, las nociones espectrales y de estabilidad consideradas, serán las dadas a izquierda, aunque obviamente lo mismo valdrá para las nociones a derecha. De manera que, a título de simplificar la notación, tomaremos la siguiente convención: $sp\ a = sp_i\ a$, y $tsr\ A = ltsr\ A$.

Poco se ha escrito sobre estabilidad en álgebras de Fréchet, en particular, no se sabe si el rango estable topológico acota al rango estable algebraico, no obstante, considerando que el rango estable topológico tiene interés en si mismo, y dado que todos los resultados siguientes valen en un contexto más amplio que el de las álgebras de Banach, vamos a desarrollar la teoría para álgebras de Fréchet. Todos los espacios vectoriales serán complejos. Un álgebra de Fréchet A es un espacio vectorial localmente convexo completo, con un producto que hace de A un álgebra, y tal que existe una sucesión creciente de seminormas $(\| \|_K)_{K \leq 1}$ definiendo la topología de A , satisfaciendo $\|xy\|_K \leq \|x\|_K \|y\|_K$, si $x , y \in A$, y $\|1_A\|_K = 1$, para todo K natural.

Para cada K definimos un álgebra de Banach A_K completando el álgebra normada A/N_K , donde N_K es el núcleo de $\| \|_K$. Hay morfismos naturales $\pi_K : A \to A_K$, $\pi_{K,j} : A_K \to A_j$ si $K \geq j$ $(\| \|_K \geq \| \|_j)$, verificando $\pi_{K,j} \circ \pi_{j,s} = \pi_{K,s}$ y $\pi_{K,j}\, \pi_K = \pi_j$. Es claro que $\pi_{K,j}(A_K)$ y $\pi_K(A)$ son densos en A_j . π_j y $\pi_{K,j}$ inducen morfismos de espacios vectoriales $A^n \to A_j^n$ y $A_K^n \to A_j^n$ respectivamente, los cuales llamaremos también π_j y $\pi_{K,j}$.

Un álgebra topológica multiplicativa localmente convexa, es de Fréchet si y sólo si es métrica y completa (ver [30]), así, todo álgebra de Banach es un álgebra de Fréchet. Finalmente, digamos que en [1], Arens demuestra que si $a \in A^n$, $a \in U_n(A)$ si y sólo si $\pi_K(a) \in U_n(A_K)$ para todo K.

<u>Proposición 3.4</u>: Sea A un álgebra de Fréchet y $a \in A^n$, entonces $sp_A(a) = \bigcup_{K\geq 1} sp_{A_K}(\pi_K(a))$.

<u>Dem.</u>: ($\supset$) Si $\lambda \in \bigcup_{K\geq 1} sp_{A_K}(\pi_K(a))$, implica que existe K_0 tal que $\pi_{K_0}(a) - \lambda \notin U_n(A_{K_0})$, luego $a - \lambda \notin U_n(A)$ y $\lambda \in sp_A(a)$.
($\subset$) Esta inclusión equivale a decir que si $\pi_K(a) \in U_n(A_K)$ para todo K, entonces $a \in U_n(A)$, que es justamente el comentario previo a la proposición.

Si A es un álgebra de Fréchet y V es un subconjunto de C^n, definimos

$$A^V = \{a \in A^n : sp\ a \subset V\} ,$$

de la proposición obtenemos que $A^V = \bigcap_{K\geq 1} \{a \in A^n : sp_{A_K}(\pi_K(a)) \subset V\}$, luego si V es abierto, o más generalmente si V es un G_δ, A^V es un G_δ. En efecto, supongamos que $V = \bigcap_{s\geq 1} V_s$, con V_s abierto para todo $s \geq 1$, luego

$$A^V = \bigcap_{K\geq 1} \{a \in A^n : sp_{A_K}(\pi_K(a)) \subset V_s \ , \ \forall s \geq 1\} =$$

$$= \bigcap_{K\geq 1} \bigcap_{s\geq 1} \{a \in A^n: \ sp_{A_K}(\pi_K(a)) \subset V_s\} =$$

$$= \bigcap_{K\geq 1} \bigcap_{s\geq 1} \pi_K^{-1}(A_K^{V_s}) \ , \quad \text{y como} \quad A_K^{V_s} \quad \text{es abierto para}$$

todo K y s, resulta lo afirmado. Un corolario inmediato es que $U_n(A)$ es un G_δ , pues $U_n(A) = A^{C_*^n}$.

Veamos como se relaciona el rango estable topológico de A con los de A_K , para eso primero notemos que la sucesión $(\text{tsr } A_K)_{K\geq 1}$ es creciente, pues si $U_n(A_{K+1})$ es denso en A_{K+1}^n , también lo es $\pi_{K+1,K}(U_n(A_{K+1}))$ en A_K^n , y como este conjunto está contenido en $U_n(A_K)$, se sigue que el último también es denso en A_K^n . Necesitaremos explicitar que normas y distancias usaremos, si $\| \ \|_K$ nota la norma en A_K , entonces:

i) si $\alpha, \beta \in A$, $d(\alpha,\beta) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \dfrac{\|\pi_j(\alpha) - \pi_j(\beta)\|_j}{1 + \|\pi_j(\alpha) - \pi_j(\beta)\|_j}$,

ii) si $a,b \in A^n$, $d(a,b) = \max_{1\leq i\leq n} d(a_i,b_i)$,

iii) si $a \in A_K^n$, $\|a\|_K^{(n)} = \max_{1\leq i\leq n} \|a_i\|_K$.

<u>Teorema 3.5</u>: $\text{tsr } A = \sup \text{tsr } A_K$.

<u>Dem.</u>: $(\geq)$ Si $n = \text{tsr } A$, podemos suponer $n < \infty$, luego $U_n(A)$ es denso en A^n y $\pi_K(U_n(A))$ es denso en A_K^n ; como $U_n(A_K) \supset \pi_K(U_n(A))$, resulta $\text{tsr } A_K \leq n$.

($\leq$) Sea $n = \sup \operatorname{tsr} A_K$, como antes, se puede suponer $n < \infty$, entonces $U_n(A_K)$ es denso en A_K^n para todo K . Como ya sabemos, $U_n(A) = \bigcap_{K\geq 1} \pi_K^{-1}(U_n(A_K))$, donde cada $L_K = \pi_K^{-1}(U_n(A_K))$ es abierto, por lo que si probamos que además es denso, el teorema de Baire nos dice que también lo es $U_n(A)$.

Fijemos K y probemos que L_K es denso. Dados $a \in A^n$ y $\epsilon > 0$, podemos hallar un $s > K$ tal que $\sum_{j\geq s+1} 2^{-j} < \epsilon/2$, y como $U_n(A_s)$ es denso en A_s^n , existe $b_s \in U_n(A_s)$ tal que $\|\pi_s(a) - b_s\|_s^{(n)} < \epsilon/4$.

Dado que $U_n(A_s)$ es abierto, hay un $\delta > 0$ tal que cualquier elemento de A_s^n que diste de b_s en menos de δ, también es unimodular; elijamos entonces $b \in A^n$ tal que $\|\pi_s(b) - b_s\|_s^{(n)} < \min\{\epsilon/4, \delta\}$, es claro que $\pi_s(b) \in U_n(A_s)$. Luego, $\pi_K(b) = \pi_{s,K} \circ \pi_s(b) \in \pi_{s,K}(U_n(A_s)) \subset U_n(A_K)$, es decir, $b \in \pi_K^{-1}(U_n(A_K)) = L_K$, y $\|\pi_s(a) - \pi_s(b)\|_s^{(n)} < \epsilon/2$.

Nos resta ver que $d(a,b) < \epsilon$:

$$d(a,b) = \max_{1\leq i\leq n} \left\{ \sum_{j=1}^{s} 2^{-j} \frac{\|\pi_j(a_i) - \pi_j(b_i)\|_j}{1 + \|\pi_j(a_i) - \pi_j(b_i)\|_j} + \sum_{j=s+1}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|\pi_j(a_i) - \pi_j(b_i)\|_j}{1 + \|\pi_j(a_i) - \pi_j(b_i)\|_j} \right\}$$

$$< \sum_{j=1}^{s} 2^{-j} \frac{\|\pi_j(a) - \pi_j(b)\|_j^{(n)}}{1 + \|\pi_j(a) - \pi_j(b)\|_j^{(n)}} + \epsilon/2$$

$$< \frac{\|\pi_s(a) - \pi_s(b)\|_s^{(n)}}{1 + \|\pi_s(a) - \pi_s(b)\|_s^{(n)}} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} + \epsilon/2 < \epsilon .$$

Tomemos $a \in A^m$, haciendo la identificación natural entre C^m y R^{2m} , podemos mirar al conjunto sp a como incluido indistintamente en cualquiera de los dos. Si $K \leq 2m$, sea

$$M_K^{2m} = \{\lambda \in R^{2m}: \lambda \text{ tiene a lo sumo } K \text{ coordenadas racionales}\},$$

un resultado clásico de teoría de la dimensión dice que $\dim M_K^{2m} \leq K$ (ver [25],pág.29).

<u>Definición 3.6</u>: Sea A un álgebra de Fréchet y $K \leq 2m$. Definimos

$$D_K^m(A) = \{a \in A^m: \ \text{sp } a \subset M_K^{2m}\}.$$

Veamos algunas propiedades de estos conjuntos:

i) $D_{2m}^m(A) = A^m$;

ii) $D_K^m(A)$ es un G_δ para todo $K \leq 2m$. Esto sale del hecho de que M_K^{2m} es un G_δ ;

iii) Si el espectro tiene la propiedad de la proyección: si $a \in A^m$, $a = (a_1,\ldots,a_m)$ y $n < m$, sp $p_n(a)$ = sp $(a_1,\ldots,a_n)$ = p_n(sp a); entonces para todo $K \leq 2n \leq 2m$ se tiene que $p_n(D_K^m(A)) \subseteq D_K^n(A)$. Por ejemplo A conmutativa.

iv) Si $K_1 \leq K_2 \leq 2n$, $D_{K_1}^n(A) \subseteq D_{K_2}^n(A)$.

<u>Lema 3.7</u>: Sea A un álgebra de Fréchet, si $D \subset A^n$ es un conjunto G_δ denso, y $m \geq n$, existe un G_δ denso $L \subset A^m$ tal que si $a \in L$,

$$(a_{j1},\ldots,a_{jn}) \in D \quad \forall \quad 1 \leq j_1,\ldots,j_n \leq m \ , \ j_i \neq j_K \ \text{si} \ \ i \neq K.$$

<u>Dem.</u>: Si $I_n = \{1,2,\ldots,n\}$, numeremos las funciones biyectivas $\ell : I_{2n} \to I_{2n}$, cada una de las cuales corresponde a una permutación de $(1,2,\ldots,n)$, y definamos $\phi_j : A^n \to A^n$, $1 \leq j \leq n!$ como

$$\phi_j(a_1,\ldots,a_n) = (a_{\ell(1)},\ldots,a_{\ell(n)}) \ ,$$

donde $\ell : I_n \to I_n$ es la j-ésima permutación.
Entonces ϕ_j es un homeomorfismo, pues la continuidad es obvia, y para cada j , existe un j' tal que $\phi_j \circ \phi_{j'} = \phi_{j'} \circ \phi_j = id_{A^n}$. Luego $\phi_j(D)$ es un G_δ denso, por lo que también lo es $\Lambda = \cap_{j=1}^{n!} \phi_j(D)$.
El conjunto Λ está formado por las n-uplas tales que todas sus permutaciones están en D .
Ahora bien, llamemos J_K , $1 \leq K \leq \binom{m}{n}$, a los subconjuntos de I_m cuyo cardinal es exactamente n ; a cada K le podemos asociar una proyección $\nu_K : A^m \to A^n$, definida por

$$\nu_K(a_1,\ldots,a_m) = (a_{j1},\ldots,a_{jn}) \quad (j_i \in J_K \ , \ j_i < j_r \ \text{si} \ \ i < r \ ),$$

ν_K es un epimorfismo de espacios de Fréchet, de donde $\Lambda_K = \nu_K^{-1}(\Lambda)$ es G_δ y denso. Efectivamente, que es un G_δ es claro pues $\nu_K^{-1}(\cap V_i) = \cap \nu_K^{-1}(V_i)$; para ver que es denso tomemos un abierto no vacío $V \subset A^m$, si fuera disjunto de Λ_K , tendríamos que $\nu_K(V) \cap \Lambda = \phi$, pero por el teorema de la aplicación abierta, $\nu_K(V)$ es un abierto de A^n, luego por la densidad de Λ, $\nu_K(V) \cap \Lambda \neq \phi$, lo que contradice lo anterior. Obtenemos entonces el G_δ denso $L = \cap_{K=1}^{\binom{m}{n}} \Lambda_K$. Es fácil ver que este es el conjunto buscado.

<u>Teorema 3.8</u>: Si A es un álgebra de Fréchet, y $n = \operatorname{tsr} A$ es finito, entonces para todo $m \geq n$, $D^m_{n+m-1}(A)$ es G_δ y denso en A^m.

<u>Dem.</u>: $U_n(A)$ es un G_δ, y por hipótesis es denso; luego si $(p_s)_{s \in N}$ es una numeración de los racionales de C^n, es claro que $D = \bigcap_{s \in N}(U_n(A) + p_s)$ también es G_δ y denso.
Por lema 3.7 sabemos que existe un conjunto G_δ denso $L \subset A^m$, tal que si $a \in L$: $(a_{j1},\ldots,a_{jn}) \in D$ cualesquiera sean $1 \leq j_1,\ldots,j_n \leq m$ con $j_i \neq j_K$ si $i \neq K$. Si probamos que $L \subset D^m_{n+m-1}(A)$ ya estaría, pues en ese caso $D^m_{n+m-1}(A)$ es denso, y que es G_δ ya lo sabemos de la propiedad ii) (en realidad $L = D^m_{n+m-1}(A)$).
Tomemos $a \in L$ y veamos que $\operatorname{sp} a \subset M^{2m}_{n+m-1}$; si no fuera así, habría un $\lambda \in \operatorname{sp} a$, $\lambda = (\lambda_1 + i\lambda_1', \ldots, \lambda_m + i\lambda_m')$ con λ_i, λ_i' $\in R$, y tal que al menos $n + m$ de los λ_i y λ_j' son racionales; es más o menos evidente que en esta situación podemos extraer n pares $(\lambda_{j1},\lambda_{j1}'),\ldots,(\lambda_{jn},\lambda_{jn}')$, donde ninguna de sus coordenadas es irracional; estos pares corresponden a una n-upla sacada de las coordenadas de a, $(a_{j1},\ldots,a_{jn})$, que por una "reordenación" de a, podemos suponer son las primeras

n . De modo que tenemos $\lambda \in$ sp a , donde $\mu = (\lambda_1+i\lambda_1',\dots,\lambda_n+i\lambda_n')$ es un racional de C^n ; ahora como

$$\text{sp } a \subset \text{sp}(a_1,\dots,a_n) \times \text{sp}(a_{n+1},\dots,a_m) \quad \text{si} \quad m > n \ ,$$

y $\qquad \text{sp } a = \text{sp}(a_1,\dots,a_m) \quad \text{si} \quad m = n$,

en ambos casos resulta que $\mu \in \text{sp}(a_1,\dots,a_n)$, es decir que $(a_1,\dots,a_n)-(\lambda_1+i\lambda_1',\dots,\lambda_n+i\lambda_n') \notin U_n(A)$. Pero por otro lado, de la forma que tiene el conjunto L , se desprende que $(a_1,\dots,a_n) \in D$, así, $(a_1,\dots,a_n) \in U_n(A) + \mu$, lo que es una contradicción.

<u>Corolario 3.9</u>: Cualquiera sea m natural, existe un denso $L_m \subset A^m$ tal que si $a \in L_m$, $\dim(\text{sp } a) - m < \text{tsr } A - 1$.

<u>Dem.</u>: Sea $n = \text{tsr } A$, si $n = \infty$ no hay nada que probar, luego $n < \infty$; si $m < n$ resulta que $\dim(\text{sp } a) - m \leq 2m - m = m < n$. Si $m \geq n$, el teorema nos dice que $D^m_{n+m-1}(A)$ es denso en A^m , y si $a \in D^m_{n+m-1}(A)$, $\dim(\text{sp } a) \leq n+m-1$, o sea $\dim(\text{sp } a) - m \leq n - 1$.

<u>Corolario 3.10</u>: $\text{tsr } A \leq n < \infty$ si y sólo si existe $D \subset A^n$ denso, tal que para todo $b \in D$, $(\text{sp } b)^0 = \phi$.

<u>Dem.</u>: $(\Rightarrow)$ si $n = \text{tsr } A$, por el corolario anterior, existe $D \subset A^n$ denso, tal que si $a \in D$, $\dim(\text{sp } a) - n < n - 1$, es decir, $\dim(\text{sp } a) \leq 2n - 1 < 2n$, luego $(\text{sp } a)^0 = \phi$.

($\Leftarrow$) Si $a \in A^n$, existe una sucesión $(b_K) \subset D$ con $b_K \to a$, y como $(\mathrm{sp}\, b_K)^0 = \phi$ para todo K, resulta que hay una sucesión $(\lambda_K) \subset C^n$ que tiende a cero, y tal que $\lambda_K \notin \mathrm{sp}\, b_K$. Luego, $b_K - \lambda_K \in U_n(A)$ y $b_K - \lambda_K \to a$.

El último corolario provee una caracterización espectral del rango estable topológico en álgebras de Fréchet, en él queda claro que si $b \in A^n \setminus U_n(A)^-$, todo elemento suficientemente cerca de b tendrá un espectro que contiene algún entorno del cero. Especifiquemos de qué entorno se trata en el caso en que A es un álgebra de Banach.
En A^n tomamos la norma euclídea asociada a la norma de A, y lo mismo en C^n ; $d(a,U_n(A))$ nota la distancia de a al conjunto $U_n(A)$.

<u>Lema 3.11</u>: Si $a \in A^n$, $d(a,U_n(A)) = \inf_{b\in A^n}\{\|a - b\| + r(b)\}$, donde $r(b) = \inf\{|\lambda|, \lambda \in C^n \setminus \mathrm{sp}\, b\}$.

<u>Dem.</u>: $d(a,U_n(A)) = \inf_{b\in U_n(A)} \|a - b\| = \inf_{b\in U_n(A)} \{\|a - b\| + r(b)\}$

$\geq \inf_{b\in A^n} \{\|a - b\| + r(b)\} = s$.

Si la desigualdad fuera estricta, tendríamos que existe $b \in A^n$, tal que $\|a - b\| + r(b) < s - \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$; luego, si $\lambda \notin \mathrm{sp}\, b$, y $|\lambda| < r(b) + \epsilon$, se obtiene que $b - \lambda \in U_n(A)$ y $\|a - (b - \lambda)\| \leq \|a - b\| + |\lambda| < \|a - b\| + r(b) + \epsilon < s$, lo que que es absurdo.

Corolario 3.12: Sean $a,b \in A^n$, si $d(a,U_n(A)) = s$ y $\|a-b\| = k < s$, entonces $sp\, b \supset \{z \in C^n : |z| < s-k\}$.

Dem.: $s \leq \|a-b\| + r(b)$, o sea $s - k \leq r(b)$, que es precisamente lo afirmado.

Aproximación unimodular y homotopía.

En su trabajo introductorio del rango estable topológico, Rieffel demuestra que si $I = [0,1]$ y A es un álgebra C^* , $\operatorname{tsr} C(I,A) \leq 1 + \operatorname{tsr} A$; en realidad, como veremos a continuación, esta desigualdad vale para cualquier álgebra de Banach. Esta misma desigualdad para el rango estable (algebraico) es obtenida en [11] por Corach y Larotonda.

En A^n tomaremos la siguiente norma:

$$\|(a_1,\ldots,a_n)\| = \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|$$

Teorema 3.13: Sea A un álgebra de Banach. Entonces, $\operatorname{tsr} C(I,A) \leq 1 + \operatorname{tsr} A$.

Dem.: Sea $n - 1 = \operatorname{tsr} A$, si $\gamma : I \to A^n$ es una función continua, podemos partir el intervalo I en T intervalos de longitud $1/T$, de modo tal que $\|\gamma(\alpha) - \gamma(\beta)\| < \epsilon$ si $|\alpha - \beta| \leq 1/T$; llamémoslos $[t_j, t_{j+1}]$, $0 \leq j \leq T-1$. Consideremos la

$n(T+1)$-upla $a = (\gamma(t_0);\gamma(t_1);\ldots;\gamma(t_T)) = (a_1^0,\ldots,a_n^0;a_1^1,\ldots,a_n^1;\ldots;a_1^T,\ldots,a_n^T)$.

Por hipótesis $U_{n-1}(A)$ es denso en A^{n-1}, luego por lema 3.7 existe $b \in A^{n(T+1)}$ tal que

i) $\|b - a\| < \epsilon$

ii) $(b_{j1},\ldots,b_{jn-1}) \in U_{n-1}(A)$ para todos $1 \leq j_1,\ldots,j_{n-1} \leq n(T+1)$, con $j_i \neq j_K$ si $i \neq K$; por razones de demostración notemos

$$b = (b^0;\ldots;b^T) = (b_1^0,\ldots,b_n^0;\ldots;b_1^T,\ldots,b_n^T) .$$

Tomemos $\gamma_j = \gamma/_{[t_j,t_{j+1}]}$, $0 \leq j \leq T-1$, y veamos que podemos aproximar γ_j en menos de ϵ' por una función $\mu_j : [t_j,t_{j+1}] \to U_n(A)$, tal que $\mu_j(t_j) = b^j$ y $\mu_j(t_{j+1}) = b^{j+1}$, $0 \leq j \leq T-1$; si logramos esto, habríamos demostrado el teorema, pues definiendo $\mu : I \to A^n$ como $\mu(t) = \mu_j(t)$, si $t \in [t_j,t_{j+1}]$, es evidente que $\mu \in C(I,U_n(A)) = U_n(C(I,A))$, y que $\|\mu(t) - \gamma(t)\| = \|\mu(t) - \gamma_j(t)\| < \epsilon'$ para el j que verifique $t \in [t_j,t_{j+1}]$.

Para ver que γ_j puede ser aproximada por una μ_j en las condiciones dichas, basta verlo para $j = 0$, y aunque γ_0 sale del intervalo $[t_0,t_1] = [0,1/T]$, mediante una reparametrización podemos suponer que sale del $[0,1]$, no olvidando que la función reparametrizada, que notaremos Γ , verifica que para todo $\alpha,\beta \in I$, $\|\Gamma(\alpha) - \Gamma(\beta)\| < \epsilon$.

En A^n tomemos la base canónica $\{e_j,\ 1 \leq j \leq n\}$, y con ayuda de ella construyamos una función $\nu : I \to A^n$ lineal de a trozos, de la siguiente forma: en primer lugar dividamos el intervalo $[0, 1]$ en n intervalos iguales $[\frac{s-1}{n}, \frac{s}{n}]$ $(1 \leq s \leq n)$, y si $(s-1)/n \leq t \leq s/n$,

$$\nu(t) = \sum_{j=1}^{s-1} b_j^1 e_j + [b_s^0 + n(t - \frac{s-1}{n})(b_s^1 - b_s^0)] e_s + \sum_{j=s+1}^{n} b_j^0 e_j .$$

Pese a su complicada escritura, esta función en realidad es muy simple, se trata solamente de una curva que une b^0 y b^1, mandando en cada intervalito $[\frac{s-1}{n}, \frac{s}{n}]$, la coordenada b_s^0 en b_s^1. Esta función será la μ_0 buscada, es claro que ν es continua, y además $\nu(t) \in U_n(A)$ para todo t, pues si $t \in [\frac{s-1}{n}, \frac{s}{n}]$, se tiene que $\nu(t) = (b_1^1, b_2^1, \ldots, b_{s-1}^1, b_s^0 + n(t - \frac{s-1}{n})(b_s^1 - b_s^0), b_{s+1}^0, \ldots, b_n^0)$, donde en virtud de la forma en que se eligió b, $(b_1^1, b_2^1, \ldots, b_{s-1}^1, b_{s+1}^0, \ldots b_n^0) \in U_{n-1}(A)$.

Para terminar, veamos que ν aproxima Γ en menos de un cierto ϵ' tan pequeño como se quiera, con tal de que ϵ sea suficientemente pequeño.

$$\|\nu(t) - \Gamma(t)\| \leq \|\nu(t) - \nu(0)\| + \|\nu(0) - \Gamma(0)\| + \|\Gamma(0) - \Gamma(t)\| ,$$

el último sumando se hace menor que ϵ por hipótesis sobre Γ, para el segundo sumando tenemos que $\Gamma(0) = \gamma_0(0) = (a_1^0, \ldots, a_n^0)$, mientras que $\nu(0) = (b_1^0, \ldots, b_n^0)$, luego por la elección de b, distan menos que ϵ. Analicemos el primer sumando

$$\nu(t) - \nu(0) = \sum_{j-1}^{s-1} (b_j^1 - b_j^0) e_j + [n(t - \frac{s-1}{n})(b_s^1 - b_s^0)] e_s ,$$

si $t \in [\frac{s-1}{n}, \frac{s}{n}]$,

por lo que

$$\|\nu(t)-\nu(0)\| \leqslant \sum_{j=1}^{s-1} \|b_j^1 - b_j^0\| + n(t-\frac{s-1}{n})\|b_s^1 - b_s^0\|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{s} \|b_j^1 - b_j^0\| \leqslant \|b^1 - b^0\| < \|b^1 - \gamma(1/T)\| + \|\gamma(1/T) - \gamma(0)\| +$$

$$+ \|\gamma(0) - b^0\| < 3\epsilon \quad \text{(recordemos que } 0 = t_0 \text{ y } 1/T = t_1\text{)}.$$

De las acotaciones previas se deduce que $\|\nu(t) - \Gamma(t)\| < 5\epsilon = \epsilon'$, cualquiera sea $t \in [0,1]$.

<u>Corolario 3.14</u>: tsr $C(I^K,A) \leqslant K +$ tsr A.

<u>Dem.</u>: Por inducción, para $K = 1$ es el teorema, supongámoslo cierto para $K-1$, luego como $C(I^K,A) \cong C(I,C(I^{K-1},A))$, tsr $C(I^K,A) \leqslant 1 +$ tsr $C(I^{K-1},A) \leqslant 1 + K - 1 +$ tsr A.

<u>Proposición 3.15</u>: Sea A un álgebra de Banach; si tsr $C(I^K,A) \leqslant n$, entonces $[S^{K-1}, U_n(A)]$ es trivial.

<u>Dem.</u>: Identifiquemos S^{K-1} con el borde de I^K; si $f : \partial I^K \to U_n(A)$, por un teorema de Dugundji [17] existe una extensión de f, $F : I^K \to A^n$, y como $U_n(C(I^K,A)) = C(I^K,U_n(A))$ es denso en $C(I^K,A^n)$, existe $G : I^K \to U_n(A)$ tal que $\|G(x) - F(x)\| < \epsilon$ para todo $x \in I^K$; luego si ϵ es suficientemente peque-

ño, $F_t(x) = f(x) + t(G/_{\partial I^K}(x) - f(x))$ con $0 \leq t \leq 1$, es una homotopía en $C(\partial I^K, U_n(A))$ entre f y $G/_{\partial I^K}$. Claramente $G/_{\partial I^K}$ es homotópica a una constante, y por lo tanto también lo es f .

<u>Corolario 3.16</u>: Si $m = \text{tsr } A$, $[S^{K-1}, U_{K+m+h}(A)] = *$ $\forall h \geq 0$.

<u>Relación entre tsr A y X(A)</u>.

Parece ser que el rango estable topológico de un álgebra de Banach conmutativa,guarda una íntima relación con la topología de su espectro, hecho éste que puede intuirse a partir de las secciones anteriores; si bien aún no hay un resultado definitivo a ese respecto, los hechos que se exponen a continuación cubren muchos ejemplos interesantes. Cuando el álgebra en cuestión es del tipo $C(X)$, su rango estable topológico queda perfectamente caracterizado por la dimensión de X .

Comencemos entonces por el estudio de estas álgebras. Todas las álgebras que aparecen en esta sección son complejas.

<u>Notación</u>: Sea X un compacto Hausdorff, y consideremos $C(X)$. En $C(X)^n$ tomamos el módulo $|f_1| + \ldots + |f_n|$ y la norma supremo asociada a este módulo (todo lo que viene a continuación, sigue valiendo si se toma otro de los módulos equivalentes a éste,y su norma asociada).

Si $f \in C(X)^n$, notaremos

$$(|f| \leq \epsilon) = \{x \in X : |f(x)| \leq \epsilon\}$$

y lo mismo para la otra desigualdad, igualdad, etc.

Si $Y \subset X$ es compacto y $f \in C(X,C_*^n)$, la restricción inducirá una aplicación $\rho : [X,C_*^n] \to [Y,C_*^n]$; por razones de simplicidad identificaremos f con su clase de homotopía, así $\rho(f) = f/Y$ se entenderá indistintamente que pertenece a $C(Y,C_*^n)$ ó $[Y,C_*^n]$.

<u>Definición 3.17</u>: Si $f \in C(X)^n$, definimos $\tau(f) = \inf\{\epsilon > 0 \ / \ f \in \mathrm{Im}\,\rho$, donde $\rho : [(|f| < \epsilon),C_*^n] \to [(|f| = \epsilon),C_*^n]\}$.

Hay varias formas alternativas de definir $\tau(f)$:

1) $\tau(f) = \inf\{\epsilon > 0 \ / \ f \in \mathrm{Im}\,\rho$, donde $\rho : [X,C_*^n] \to [(|f| = \epsilon), C_*^n]\}$.

2) $\tau(f) = \inf\{\epsilon > 0 \ / \exists F \in C(X,C_*^n)$ con $F|_{(|f| = \epsilon)} = f|_{(|f|=\epsilon)}\}$.

3) $\tau(f) = \inf\{\epsilon > 0 \ / \exists F \in C(X,C_*^n)$ con $F|_{(|f| \geq \epsilon)} = f|_{(|f| \geq \epsilon)}\}$.

<u>Lema 3.18</u>: $\tau(f) = \inf\{\epsilon > 0 \ / \ (f_1,\ldots,f_n, \sum_{i=1}^{n} |f_i| - \epsilon)$ es reducible$\}$

<u>Dem.</u>: Si $g = \sum_{i=1}^{n} |f_i| - \epsilon$, se observa que $Z_g = \{z \in X \ / |f(z)| = \epsilon\} = (|f| = \epsilon)$. Ahora, que (f,g) sea reducible equivale a que $f \in \mathrm{Im}\,\rho$, donde $\rho : [X,C_*^n] \to [Z_g,C_*^n]$. Lo que prueba el lema.

Teorema 3.19: $d(f,U_n(C(X))) = \tau(f)$.

Dem.: ($\leq$) Sea $\alpha > \tau(f)$, entonces existe $F \in U_n(C(X))$, tal que $F|_{(|f|\geq \alpha)} = f|_{(|f|\geq \alpha)}$; consideremos el conjunto $(|F-f| \geq \delta > 0)$, este es un compacto que obviamente está metido en $(|f| < \alpha)$, y por lo tanto está separado de $(|f|\geq \alpha)$, luego por el lema de Urysohn, existe una función

$\varphi : X \to [\delta/\|F\|,1]$ tal que $\varphi((|F - f|\geq \delta)) = \delta/\|F\|$ y $\varphi((|f|\geq \alpha)) = 1$; entonces $\varphi.F \in U_n(C(X))$ y

$$|\varphi F - f| = \begin{cases} 0 & , \text{ en } (|f|\geq \alpha) \\ \leq |\varphi F| + |f| \leq \delta + \alpha & , \text{ en } (|F-f| \geq \delta) \\ \leq |\varphi F - \varphi f| + |\varphi f - f| \leq |\varphi||F-f| + |f||\varphi - 1| & \\ \quad < \delta + |f| < \delta + \alpha & , \text{ en } (|F-f| < \delta) \cap (|f| < \alpha) \end{cases} .$$

Así, $d(f,U_n(C(X))) \leq \alpha + \delta$, para todo $\delta > 0$ y todo $\alpha > \tau(f)$, lo que implica $d(f,U_n(C(X))) \leq \tau(f)$.

($\geq$) Sea $\alpha > d(f,U_n(C(X)))$, veremos que $f \in \operatorname{Im}\rho$, donde $\rho : [X,C^n_*] \to [(|f| \geq \alpha),C^n_*]$. Si $u \in U_n(C(X))$ verifica que $d(f,u) < \alpha$, tenemos que $F_t = f + t(u - f)$ es una homotopía en $C((|f|\geq \alpha),C^n_*)$ entre f y u , pero $u \in U_n(C(X))$, lo que implica (por el teorema de Borsuk [34]) que $f \in \operatorname{Im}\rho$.

Corolario 3.20: Si $f \in C(X)^n$, son equivalentes:

i) $f \in U_n(C(X))^-$

ii) $(f, \sum_{i=1}^{n} |f_i| - \epsilon)$ es reducible $\forall \epsilon > 0$

iii) (f,β) es reducible cada vez que sea unimodular $(\beta \in C(X))$.

Dem.: i) $\Rightarrow$iii) está en la demostración de lema 3.2,

iii) $\Rightarrow$ii) es obvio,

ii) $\Rightarrow$i) , por ii), $\tau(f) = 0$ y luego se aplica el teorema .

Corolario 3.21: Si $X \subset C^n$ es un compacto de interior no vacío,y $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in X^0$, entonces $f(z) = (z_1-\lambda_1,\ldots,z_n-\lambda_n) \notin U_n(C(X))^-$.

Dem.: Debemos ver que si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño, (f,g) no es reducible , donde $g(z) = \sum_{i=1}^{n} |z_i - \lambda_i| - \epsilon$; existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\lambda) = \{z \in C^n : \Sigma |z_i-\lambda_i| \leq \epsilon\} \subset X$, y así $Z_g = \{z \in C^n : \Sigma |z_i-\lambda_i| = \epsilon\}$; si (f,g) fuera reducible, tendríamos que $f/_{Z_g}$ se podría extender a $F \in C(X,C^n_*)$, y en particular, se extendería a una función de $B_\epsilon(\lambda)$ en C^n_* , lo que obviamente es falso.

Corolario 3.22: tsr $C(X)$ = sr $C(X) = [\dim X/2] + 1$.

Dem.: Es claro a partir de corolario 3.20.

En [23] Herman y Vasershtein demuestran la primera igualdad de este corolario, en el contexto más general de álgebras C^* , usando una técnica similar a la aquí utilizada. Como veremos más adelante, este resultado no se puede generalizar a cualquier álgebra de Banach.

Una interesante aplicación de teorema 3.19 es la siguiente:

Proposición 3.23: Si $f \in C(X)$ y n es un número natural, entonces $d(f^n, C(X)^{\cdot}) \leq d(f, C(X)^{\cdot})^n$.

Dem.: En virtud del teorema, debemos demostrar que $\tau(f^n) \leq \tau(f)^n$; tomemos $r > \tau(f)$, por definición existe $F \in C(X)^{\cdot}$ tal que $F/_{(|f|=r)} = f/_{(|f|=r)}$, luego $F^n \in C(X)^{\cdot}$ y $F^n/_{(|f|=r)} = f^n/_{(|f|=r)} = f^n/_{(|f^n|=r^n)}$, de lo cual $\tau(f^n) \leq r^n$.

Este resultado no es trivial, en el siguiente sentido, si $f \in C(X)$ y $u \in (C(X)^{\cdot})^-$ son tales que $d(f,u) = d(f, C(X)^{\cdot})$, no siempre es cierto que $d(f^s, u^s) = d(f^s, C(X)^{\cdot})$, veámoslo con un ejemplo, consideremos $f(z) = (z - 1/2) \in C(\bar{\Delta})$; $d(f, C(\bar{\Delta})^{\cdot}) = 1/2$, ya que si fuera menor, tendríamos que hay un $v \in C(\bar{\Delta})^{\cdot}$ tal que $|z - 1/2 - v(z)| < 1/2 \quad \forall z \in \bar{\Delta}$, y entonces $F_t(z) = (z - 1/2) + t[z - 1/2 - v(z)]$, restringida a S^1 sería una homotopía de S^1 en C_* entre $(z - 1/2)$ y v ; como $v(z) \neq 0$ $\forall z \in \bar{\Delta}$, de la teoría de homotopías se deduce que el grado de v es cero, mientras que el grado de $z - 1/2$ es uno, por lo que no pueden ser homotópicas. Por otra parte, $u(z) = z - 1 \in (C(\bar{\Delta})^{\cdot})^-$ y $|(z - 1/2) - (z - 1)| = 1/2$. Veamos entonces que pasa con $|(z - 1/2)^s - (z - 1)^s|$, tomando $z = -1$ queda $|f(-1)^s - u(-1)^s| = |(-1)^s (3/2)^s - (-1)^s 2^s| = 2^s - (3/2)^s =$

$\frac{4^s - 3^s}{2^s} > \frac{1}{2^s}$ si $s > 1$, mientras que el corolario nos dice que $d(f^s, C(\bar{\Delta})^\bullet) \leq (1/2)^s$.

Al igual que pasaba con el rango estable, el estudio del rango estable topológico de un álgebra de Banach conmutativa se reduce inmediatamente al de un álgebra semisimple.

Proposición 3.24: Sea A un álgebra de Banach conmutativa, si $J = \text{rad } A$, entonces $\text{tsr } A = \text{tsr } A/J$.

Dem.: Sea $\pi : A^n \to (A/J)^n$ la proyección natural, si $u \in A^n$, de la igualdad $\text{sp } u = \text{sp } \pi(u)$, es fácil ver que $\pi(U_n(A)^-) = U_n(A/J)^-$ y $U_n(A)^- = \pi^{-1}(U_n(A/J)^-)$, luego si $n = \text{tsr } A$, $(A/J)^n = U_n(A/J)^-$, y si $n = \text{tsr } A/J$, $A^n = U_n(A)^-$.

Si A tiene n elementos que la generan como álgebra de Banach unitaria, diremos que A es n-generada; llamaremos entonces $\text{gen } A$ al mínimo natural n tal que A es n-generada, si no existe ningún tal n , $\text{gen } A = \infty$.

Teorema 3.25: Si A es un álgebra de Banach conmutativa, finitamente generada, entonces

$$\dim X(A) - \text{gen } A < \text{tsr } A .$$

Dem.: Sean $n = \text{gen } A$ y $s = \text{tsr } A$. Decir que $\dim X(A) < n+s$

equivale a decir que para todo $\epsilon > 0$ y toda función continua $f : X(A) \to R^{n+s}$, existe una función continua $F : X(A) \to R_*^{n+s}$ tal que $\| F(\varphi) - f(\varphi) \| < \epsilon$ para todo $\varphi \in X(A)$ (ver [25], pág.83). Supongamos entonces que están dados un $\epsilon > 0$, y una f como arriba. Si $\{a_j, 1 \leq j \leq n\}$ genera A , tomemos $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y definamos $\mu : X(A) \to \mathrm{sp}\ a$ como $\mu(\varphi) = (\hat{a}_1(\varphi), \ldots, \hat{a}_n(\varphi))$, por teorema 2.4, μ es un homeomorfismo. Tenemos entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X(A) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu"'] & R^{n+s} \\ \mathrm{sp}\ a \arrow[ur, "c"'] & \end{tikzcd} \qquad c(z) = f \circ \mu^{-1}(z)$$

Por el teorema de Stone - Weierstrass, c se puede aproximar uniformemente en menos de $\epsilon/4$ por una función polinomial $p = p(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n)$, y como $\mathrm{sp}\ a$ es compacto, existe un $\delta > 0$ tal que si $\omega_0 \in \mathrm{sp}\ a$ y $\omega_1 \in C^n$, verifican $\| \omega_0 - \omega_1 \| < \delta$, entonces $\| p(\omega_0) - p(\omega_1) \| < \epsilon/4$.

Ahora, por corolario 3.9, existe $b \in A^n$ tal que $\| b - a \| < \delta$ (aquí la norma en A^n es la norma dos asociada a $\| \ \|_A$) , y $\dim(\mathrm{sp}\ b) < n + s$. Si definimos $\mu' : X(A) \to \mathrm{sp}\ b$ como $\mu'(\varphi) = (\hat{b}_1(\varphi), \ldots, \hat{b}_n(\varphi))$, es claro que $\| \mu(\varphi) - \mu'(\varphi) \|_{C^n} < \delta$ para todo $\varphi \in X(A)$. Luego

$$\| p \circ \mu'(\varphi) - f(\varphi) \| \leq \| p \circ \mu'(\varphi) - p \circ \mu(\varphi) \| + \| p \circ \mu(\varphi) - c \circ \mu(\varphi) \|$$
$$< \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon/2 .$$

Bastará entonces con aproximar $p\circ\mu'$ en menos de $\epsilon/2$ por una función cuya imagen no contenga al cero, para eso notemos que podemos pensar a p como saliendo de $\mathrm{sp}\, b$, y dado que $\dim(\mathrm{sp}\, b) < n+s$, existe una función continua $q : \mathrm{sp}\, b \to R_*^{n+s}$ tal que $\|p(z) - q(z)\| < \epsilon/2$, para todo $z \in \mathrm{sp}\, b$; así $\|p\circ\mu'(\varphi) - q\circ\mu'(\varphi)\| < \epsilon/2$ para todo $\varphi \in X(A)$ y $q\circ\mu' : X(A) \to R_*^{n+s}$, como queríamos probar.

Observación: Si bien en la demostración del teorema "aproximamos" $\mathrm{sp}\, a$ por un conjunto de dimensión menor que $\mathrm{tsr}\, A + \mathrm{gen}\, A$, como $\mathrm{sp}\, a$ es homeomorfo a $X(A)$, en realidad, de la demostración concluimos que también para $\mathrm{sp}\, a$ vale esa desigualdad.

Proposición 3.26: Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Si A tiene n generadores y $X(A) \subset M \subset C^n$, con M una subvariedad diferenciable sumergida (real o compleja), de dimensión $m \leq 2n$; entonces $\mathrm{tsr}\, A \leq [m/2] + 1$.

Dem.: Llamemos $s = [m/2] + 1$ y tomemos $f \in A^s$, si $h_1, \ldots, h_n$ generan A , entonces f se puede aproximar por polinomios en los h_j, $1 \leq j \leq n$, $p(h) = (p_1(h), \ldots, p_s(h))$, y por teoría espectral $\mathrm{sp}\, p(h) = p(\mathrm{sp}\, h) = p(X(A))$.
Consideremos $p : C^n \to C^s$, esta función restringida a M es diferenciable, por lo que $\dim p(M) \leq m < 2[m/2] + 2 = 2s$, de aquí tenemos que $p(M)^0 = \phi$ (el interior tomado en C^s) , y

como $p(X(A)) \subset p(M)$, el resultado se sigue del corolario 3.10.

Desgraciadamente, la hipótesis de que M sea una subvariedad sumergida,no se puede remover manteniendo igual demostración, ya que una función polinomial puede aumentar la dimensión de un compacto polinomialmente convexo; por ejemplo, si $f : I \to I^2 \subset C$ es una función continua suryectiva, y consideramos $X = \{(t,f(t)),t \in I\} \subset C^2$, es claro que $X \cong I$, y por lo tanto $\dim X = 1$, además X es polinomialmente convexo, pues es fácil ver que $P(X) = C(X)$; pero el polinomio $p(z) = z_2$ tiene por imagen I^2 , que obviamente tiene dimensión 2 . No obstante, como $P(X) = C(X)$, también aquí $\operatorname{tsr} P(X) = [\dim X/2] + 1 = 1$. Esto nos conduce a la cuestión de si $\operatorname{tsr} A$ es un invariante de $\dim X(A)$, ¿será cierto que $\operatorname{tsr} A = [\dim X(A)/2] + 1$?, si bien ninguna de las dos desigualdades ha sido probada, en todos los ejemplos conocidos por el autor vale la igualdad.

<u>Lema 3.27</u>: Si A y B son álgebras de Banach conmutativas, y $f : A \to B$ es un morfismo con imagen densa; entonces $\operatorname{tsr} B \leq \operatorname{tsr} A$.

<u>Dem.</u>: Si $n = \operatorname{tsr} A$, $U_n(A)$ es denso, lo que implica que $f(U_n(A))$ es denso en $f(A^n)$, que es denso en B^n . Luego, $U_n(B)^- \supset f(U_n(A))^- = B^n$.

<u>Corolario 3.28</u>: Si A es n-generada y $X(A)^0 \neq \phi$ (en C^n), entonces $\operatorname{tsr} A = n + 1$.

Dem.: Si $\hat{}: A \to C(X(A))$ es la transformada de Gelfand, es claro que $\hat{A}$ es densa en $P(X(A))$, luego tsr $P(X(A)) = n + 1$, y por el lema, tsr $A \geq n + 1$; la otra desigualdad es la proposición 3.26.

La primera desigualdad de este corolario sigue valiendo bajo hipótesis más generales. Si A es un álgebra de Banach conmutativa y $E \subset X(A)$ es un conjunto compacto, consideremos la clausura en $C(E)$ de las restricciones $\hat{A}|_E$, y llamemos A_E a este álgebra, la cual resulta ser un álgebra uniforme, cuyo espectro es la cápsula A-convexa de E :

$$\hat{E} = \{x \in X(A) \;/\; |\hat{f}(x)| \leq \|\hat{f}\|_E \quad \forall f \in A\}$$

Para una exposición detallada de estas álgebras y otras cuestiones relacionadas, se pueden consultar [38] y [45].

Teorema 3.29: Sea A un álgebra de Banach conmutativa, y sea $E \subset X(A)$ compacto. Si existe $\phi \in A_E^n$, tal que ϕ es un homeomorfismo entre E y $\phi(E)$, y $\phi(E)^0 \neq \phi$ (con respecto a C^n); entonces tsr $A \geq n + 1$.

Dem.: Como la transformada de Gelfand, compuesta con la restricción forma un morfismo de A en A_E de imagen densa, por lema 3.27, basta con ver que tsr $A_E \geq n + 1$.
Mediante una traslación y una dilatación, podemos suponer que

$\phi(E) \supset B = \{z \in C^n : \Sigma|z_i| \leqslant 1\}$. Luego, por hipótesis existe $h : B \to E$ tal que $\phi \circ h = id_B$, o sea $\phi_K(h(z_1,\ldots,z_n)) = z_K$. Si ϕ se puede aproximar por unimodulares de A_E , existe una sucesión $(v_j) \subset U_n(A_E)$, tal que $v_j \to \phi$ en A_E^n ; luego , $\sup\limits_{\omega\in B} |v_j(h(\omega)) - \phi(h(\omega))|$ tiende a cero cuando j tiende a infinito, y además, $v_j \circ h \in U_n(C(B))$. Esto último es falso, ya que en virtud del corolario 3.21, la función coordenada $\omega = \phi(h(\omega))$ no se puede aproximar por unimodulares de $C(B)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.Arens: Dense inverse limit rings, Michigan Math.J.5 (1958), 169-182.

[2] ——— : The maximal ideals of certain function algebras, Pacific J.Math.8 (1958), 641-648.

[3] ——— : The group of invertible elements of a commutative Banach algebra, Studia Math.Zeszyt 1 (1963), 21-23.

[4] H.Bass: Algebraic K-theory, Benjamin, New York (1968).

[5] N.Bourbaki: Elements de Mathematiques, Varietés, fascicule de résultats. Hermann, París (1967).

[6] L.Carleson: On bounded analytic functions and closure problems, Ark.Math.2 (1952), 283-291.

[7] C.Chevalley: Theory of Lie Groups, Vol.I, Princeton University Press, Princeton (1946).

[8] P.J.Cohen: A note on constructive methods in Banach algebras, Proc.Amer.Math.Soc.12 (1961), 159-163.

[9] G.Corach - A.R.Larotonda: Unimodular rows in Banach algebras, Trabajos de Matemática,IAM,N°39 (1982).

[10] ——————— : Stable range in Banach algebras, J.Pure Appl.Algebra,32 (1984) 289-300.

[11] ——————————— : A stabilization theorem for Banach algebras, Trabajos de Matemática,IAM,N°54 (1983).

[12] G.Corach - F.D.Suárez: Stable range in holomorphic function algebras, Ill.J.Math. (por aparecer).

[13] ———————————— : Extension problems and stable rank in commutative Banach algebras, Top.and its Appl.(por aparecer).

[14] ———————————— : On the stable range of uniform algebras and H^{∞}, trabajo no publicado. (por aparecer en P.A.M.S.)

[15] I.G.Craw: A condition equivalent to the continuity of characters on a Fréchet algebra, Proc.London Math.Soc.(3) 22 (1971), 452-464.

[16] A.M.Davie: Homotopy in Fréchet algebras, Proc.London Math. Soc.(3)23 (1971), 31-52.

[17] J.Dugundji: An extension of Tietze's theorem, Pacific J. Math.1 (1951), 175-186.

[18] P.L.Duren: Theory of H^{p} Spaces, Academic Press,New York(1970).

[19] F.Forelli: A note on ideals in the disc algebra, Proc.Amer. Math.Soc.3 (1982), 389-392.

[20] O.Forster: Functiontheoretische Hilfsmittel im der Theorie der kommutativen Banach-Algebren, Iber.Deutsch Math.Verein 76 (1974), 1-17.

[21] J.B.Garnett: Bounded Analytic Functions, Academic Press,New York (1981).

[22] R.C.Gunning - H.Rossi: Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall,Englewood Cliffs,N.J.(1965).

[23] R.Herman - L.N.Vasershtein: The stable range of C*-algebras, Invent.Math.77 (1984), 553-555.

[24] S.T.Hu: Homotopy Theory, Academic Press (1959).

[25] W.Hurewicz - H.Wallman: Dimension Theory, Princeton (1941).

[26] P.Jones - D.Marshall - T.Wolff: Stable rank of the disc algebra,Proc.Amer.Math.Soc. (por aparecer).

[27] S.Lang: Differential Manifolds, Addison Wesley, Reading, Mass. (1972).

[28] A.Mallios: On the spectrum of a topological tensor product of locally convex algebras, Math.Annalen 154(1964),171-180.

[29] A.I.Markushevich: Theory of Functions of a Complex Variable, Prentice Hall,Englewood Cliffs, New York (1967).

[30] E.Michael: Locally multiplicatively - convex topological algebras, Mem.Amer.Math.Soc. N°11.

[31] ———— : Convex structures and continuous selections, Can. J.Math. 4 (1959), 556-575.

[32] ———— : Three mapping theorems, Proc.Amer.Math.Soc. 15 (1964), 410-415.

[33] K.Nagami: Dimension Theory, Academic Press, New York (1970).

[34] J.Nagata: Modern Dimension Theory, North-Holland, Amsterdam, (1965).

[35] I.Novodvorskii: Some homotopy invariants of the space of maximal ideals, Math.Notes 1 (1967), 321-325.

[36] R.Palais: Homotopy theory of infinite dimensional manifolds, Topology 5 (1966), 1-16.

[37] I.Raeburn: The relationship between a commutative Banach algebra and its maximal ideal space, J.Funct.Anal.25 (1977), 366-390.

[38] C.E.Rickart: Analytic phenomena in general function algebras, Pacific.J.Math.,18 (1966), 361-377.

[39] M.A.Rieffel: Dimension and stable rank in the K-theory of C*-algebras, Proc.London Math.Soc.(3) 46 (1983), 301-333.

[40] A.G.Robertson: On the density of the invertible group in C*-algebras, Proc.Edinburgh Math.Soc.,20 (1976).

[41] H.L.Royden: Function algebras, Bull.Am.Math.Soc.69 (1963), 281-298.

[42] L.A.Rubel: Solution to problem 6117, Amer.Math.Monthly, 85 (1978), 505-506.

[43] G.E.Shilov: On descomposition of a commutative normed ring in a direct sum of ideals, Math.Sb. 32 (1953), 353-364; Am. Math.Soc.Transl. 1 (1955), 37-48.

[44] M.R.Stein: Stability theorems for K_1, K_2 and related functions modeled on Chevalley group, Japanese J.Math.4 (1978),77-108.

[45] E.L.Stout: The Theory of Uniform Algebras, Bogden and Quigley, Belmont, California (1971).

[46] J.L.Taylor: Topological invariants of the maximal ideal space of a Banach algebra, Adv.in Math.19 (1976), 149-206.

[47] ———— : Twisted products of Banach algebras and third Čech cohomology,Lecture Notes in Mathematics 575, Springer, Berlin (1977), 157-174.

[48] L.N.Vasershtein: On the stabilization of the general linear group over a ring, Math.USSR-Sb.,8 (1969), 383-400.

[49] ———————— : Stable rank of rings and dimensionality of topological spaces, Functional Anal.Appl.,5 (1971), 102-110.

[50] C.Watts: Alexander - Spanier cohomology and rings of continuous functions, Proc.Nat.Acad.Sci.USA 54 (1965), 1027-1028.

[51] I.M.Zalduendo: Conjuntos espectrales, tesis de doctorado, FCEyN-UBA, (1983).