Integrales singulares sobre superficies rectificables

Urciuolo, Marta Susana

1985

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

"Integrales Singulares sobre Superficies Rectificables"

Director de Tesis:

Dr. Alberto P. Calderón

Lugar de Trabajo:

Departamento de Matemática

Marta Urciuolo

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Matemática

1985

a mi padre

Quiero agradecer, en primer lugar a la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (Universidad Nacional de Córdoba); a sus autoridades, profesores y compañeros por el apoyo y estímulo brindado en la realización de este trabajo.

A mi director de tesis, Dr. Alberto P. Calderón, por todo lo que me enseñó.

Al profesor Guy David (Université de Paris - Sud - Francia) por haberme enviado copias de sus trabajos relacionados estrechamente con mi tema de investigación, aún antes de ser publicados.

A los profesores Roberto Macías y Horacio Porta por el estímulo y la confianza que me brindaron.

Al Dpto de Impresiones del IMAF por la ayuda en el mecanografiado de este trabajo.

A mi marido, mis hijos y mis padres por su comprensión y ayuda.

INTRODUCCION:

Nos proponemos estudiar operadores integrales singulares sobre ciertas superficies rectificables.

En 1977, A.P. Calderón [1] demostró el resultado siguiente: Sea Γ una curva en el plano complejo dada por la ecuación $z(t) = t + i\varphi(t)$ donde $\varphi(t)$ es una función a valores reales, de la recta real con derivada acotada y sea $A_{\varphi,\epsilon} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-t|>\epsilon} \frac{f(s)}{z(s)-z(t)}\, dz(s) \quad \epsilon > 0$. Entonces existe α tal que $\|\varphi'\|_\infty < \alpha$ implica que el operador $\sup_{\epsilon>0} |A_{\varphi,\epsilon} f|$ es de tipo débil (1-1) y acotado en L^p, $1 < p < \infty$.

R.R. Coifman, Mc Intosch e Y. Meyer, [3], mostraron en 1981 que se puede reemplazar el núcleo de Cauchy por todo núcleo $K(z(x) - z(y))$ donde K es una función impar, positivamente homogénea de grado -1 e indefinidamente derivable en $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$.

En 1983, Guy David [6] extendió este resultado a un caso más general donde Γ es una curva *casi lipschitziana* , basándose en los dos trabajos anteriormente citados.

Ahora nosotros estudiaremos operadores similares en $\mathbf{R}^n$, donde K es un núcleo impar, homogéneo de grado $-k (k < n)$ e indefinidamente derivable en $\mathbf{R}^n - \{0\}$.

Dada una medida μ que cumpla $\mu(B(x_0, r)) \leq c\, r^k \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}^n$, definimos

$$T_\mu^* f(x) = \sup_{\epsilon>0} \left| \int_{|y-x|>\epsilon} K(x-y)\, f(y)\, d\mu \right|$$

Dada una superficie rectificable Σ , de dim k en $\mathbf{R}^n$, que cumpla ciertas propiedades, definimos la medida σ, con soporte en Σ que da la noción de área de la superficie.

El teorema principal, que probamos en el parágrafo IV, es que $T_\mu^* : L^p(d\mu) \to L^p(d\sigma)$ es contínuo cuando σ es la medida soportada sobre una superficie que generaliza la noción de curva *casi-lipschitz*. En el parágrafo V estudiamos la continuidad del operador maximal T_σ^* cuando σ es la medida "elemento de área" de una superficie "arco-cuerda" con una parametrización adecuada.

Estos resultado se basan fuertemente en un teorema probado en el parágrafo III que dice que $T_\sigma^* : L^p(d\sigma) \to (d\sigma)$ es contínuo cuando σ es la medida en $\mathbf{R}^n$ asociada a una superficie Σ que es gráfica de una función de Lipschitz de $\mathbf{R}^k$ en $\mathbf{R}^{n-k}$.

Esta es una generalización a más dimensiones de lo probado por Coifman, Mc Intosch y Y. Meyer [3], en el caso unidimensional.

En los parágrafos I y II damos las definiciones y herramientas básicas para poder acceder a los resultados antes mencionados.

I. Desigualdades Maximales

En esta primera parte, definimos funciones maximales destinadas a reemplazar aquellas de Hardy-Littlewood en un contexto geométrico un poco diferente.

La proposición 1 es una generalización de la desigualdad clásica y la demostración es una adaptación a nuestro caso particular de la anterior.

Definición 1: Se denota T la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ y Δ_α el conjunto de medidas de Radon positivas $\mu: T \to [0,\infty]$ tales que existe una constante $c = c(\mu) \geqslant 0$ tal que $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\forall r > 0$, se tiene

$$\mu\{x \in \mathbb{R}^n \;/\; |x - x_0| \leqslant r\} \leqslant c r^\alpha \quad (1 \leqslant \alpha \leqslant n)$$

Definición 2: Sea $\mu \in \Delta_\alpha$ y sea $f \in L^1(d\mu)$. Se denota $M_\mu f: \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ la función definida por

$$(1) \qquad M_\mu f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^\alpha} \int_{|y-x| \leqslant r} |f(y)|\, d\mu(y)$$

Proposición 1: Sean μ_1 y μ_2 dos elementos de Δ_α. Entonces $\forall p \in (1,\infty]$ existe $c = c(\mu_1, \mu_2; p)$ tal que $\forall f \in L^p(d\mu_1)$ se tiene:

$$\| M_{\mu_1} f \|_{p,\mu_2} \leqslant c \, \| f \|_{p,\mu_1}$$

Demostración:

1°) $p = \infty$ $\qquad f \in L^\infty(\mu_1) \to |f(x)| \leqslant \|f\|_{\infty,\mu_1}$ salvo un conjunto de medida μ_1 cero

$$M_{\mu_1} f(x_0) = \sup_r \frac{1}{r^\alpha} \int_{|y-x_0| \leqslant r} |f(y)|\, d\mu_1(y) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_r \left\{ \frac{1}{r^\alpha} \|f\|_{\infty,\mu_1} \cdot \mu_1\{ y \;/\; |y - x_0| \leqslant r\} \leqslant \frac{1}{r^\alpha} \|f\|_{\infty,\mu_1} c(\mu_1)\, r^\alpha \right.$$

Entonces (2)

$$\| M_{\mu_1} f \|_{\infty,\mu_2} \leqslant c(\mu_1)\, \|f\|_{\infty,\mu_1}$$

2°) (debil 1-1)

Sea $O = \{x \in \mathbb{R}^n \;/\; M_{\mu_1} f(x) > \lambda\}$

O es abierto pues fijado un r_0, la función

$$x \to \frac{1}{r_0^\alpha} \int_{|y-x| \leq r_0} |f(y)|\,d\mu_1(y) \quad \text{es contínua.}$$

Consideramos los discos $D_r = \{y \,/\, |y-x_0| < r\}$ con $x_0 \in O$ y r tal que

$$\frac{1}{r^\alpha} \int_{|y-x_0|<r} |f(y)|\,d\mu_1(y) > \lambda$$

Entonces $r^\alpha \lambda \leq \int_{|y-x_0|<r} |f(y)|\,d\mu_1(y) \leq \|f\|_{1,\mu_1}$

Por lo tanto los radios son acotados.

Por el lema de Besicovitch [7] existe una subfamilia numerable $\{D_{r_i}\}_{i=1}^{\infty}$

tal que $O \subset \bigcup D_{r_i}$ y $\sum_i \chi_{D_{r_i}}(x) \leq k(n)$

Por lo tanto

$$|O|_{\mu_2} \leq \sum_i |D_{r_i}|_{\mu_2} \leq c\,(\mu_2) \sum_i r_i^\alpha \leq \frac{c(\mu_2)}{\lambda} \sum_i \int_{D_{r_i}} |f|\,d\mu_1 =$$

$$= \frac{c(\mu_2)}{\lambda} \sum_i \int_{R^n} |\chi_{D_{r_i}} f(x)|\,d\mu_1 \leq \frac{c(\mu_2)}{\lambda} \int_{R^n} (\sum_i \chi_{D_{r_i}}(x))\, |f(x)|\,d\mu_1(x) \leq$$

$$\leq \frac{c(\mu_2)k(n)}{\lambda} \|f\|_{1,\mu_1} \quad \therefore$$

$$(3) \qquad \mu_2\{x \,/\, M_{\mu_1} f(x) > \lambda\} \leq \frac{c(\mu_2)k(n)}{\lambda} \|f\|_{1,\mu_1}$$

3°) $1 < p < \infty$. Se hace interpolación.

Sea $f \in L^p(\mu_1)$ $1 < p < \infty$. Dado $\lambda > 0$, escribimos

$$f(x) = g_\lambda(x) + h_\lambda(x) \quad \text{con} \quad g_\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| < \dfrac{\lambda}{2c(\mu_1)} \\ 0 & \text{si } |f(x)| \geq \dfrac{\lambda}{2c(\mu_1)} \end{cases}$$

De la definición resulta $|g_\lambda(x)| \leqslant \frac{\lambda}{2c(\mu_1)}$ $\forall x \varepsilon \mathbf{R}^n$

y por tanto es:

$$\|g_\lambda\|_{\infty,\mu_1} \leqslant \frac{\lambda}{2c(\mu_1)} \quad \text{y} \quad \|M_{\mu_1} g_\lambda\|_{\infty,\mu_2} \leqslant \frac{c(\mu_1)\lambda}{2\,c(\mu_1)} = \frac{\lambda}{2}$$

Además $h_\lambda \varepsilon L'(\mu_1)$ y

$$M_{\mu_1} f(x) \leqslant M_{\mu_1} g_\lambda(x) + M_{\mu_1} h_\lambda(x) \leqslant \frac{\lambda}{2} + M_{\mu_1} h_\lambda(x)$$

Entonces si $M_{\mu_1} f(x) > \lambda$, resulta $M_{\mu_1} h_\lambda(x) > \frac{\lambda}{2}$

Por tanto:

$$\mu_2\{x \,/\, M_{\mu_1} f(x) > \lambda\} \leqslant \mu_2\{x \,/\, M_{\mu_1} h_\lambda(x) > \frac{\lambda}{2}\}$$

Y entonces, de acuerdo a lo probado en el punto 2°)

$$\mu_2\{x \,/\, M_{\mu_1} h_\lambda(x) > \frac{\lambda}{2}\} \leqslant \frac{2\,\tilde{c}}{\lambda} \|h_\lambda\|_{1,\mu_1} = \frac{2\,\tilde{c}}{\lambda} \int_{\{x / |f(x)| > \frac{\lambda}{2c}\}} |f(x)|\,d\mu_1 =$$

$$= \frac{2\,\tilde{c}}{\lambda} \int_{\lambda/2c}^{\infty} \mu_1\{x \,/\, |f(x)| > s\}\,ds$$

Resumiendo:

$$\mu_2\{x / M_{\mu_1} f(x) > \lambda\} \leqslant \frac{2\,\tilde{c}}{\lambda} \int_{\lambda/2c}^{\infty} \mu_1\{x / |f(x)| > s\}\,ds$$

De esto resulta:

$$\|M_{\mu_1} f\|_{p,\mu_2}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_2\{x / M_{\mu_1} f(x) > \lambda\} dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\,p\tilde{c} \int_0^\infty \lambda^{p-2} \left(\int_{\lambda/2c}^\infty \mu_1\{x / |f(x)| > s\} ds \right) d\lambda =$$

$$= 2\,p\tilde{c} \int_0^\infty \mu_1\{x / |f(x)| > s\} \left(\int_0^{2cs} \lambda^{p-2}\,d\lambda \right) ds \;=$$

$$= 2\, p\tilde{c} \int_0^\infty \mu_1\{x / |f(x)| > s\} \frac{2\, cs^{p-1}}{p-1}\, ds =$$

$$= cp \int_0^\infty \mu_1\{x / |f(x)| > s\}\, s^{p-1}\, ds = c\, \|f\|^p_{p,\mu_1}$$

Por tanto

(4) $$\|M_{\mu_1} f\|_{p,\mu_2} \leqslant c\, \|f\|_{p,\mu_1} \quad c \text{ depende sólo de } n \text{ y } p$$

II. Operadores Maximales

Sea $K:\mathbf{R}^n - \{0\} \to \mathbf{C}$ una función C^∞, impar y homogénea de grado $-\alpha$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant n)$

$\forall\, \mu \in \Delta_\alpha$ y $\forall\, \epsilon > 0$ se define el operador T^ϵ_μ sobre $L^2(d\mu)$ así:

(5) $$T^\epsilon_\mu f(x) = \int_{|x-y| \geqslant \epsilon} K(x-y)\, f(y)\, d\mu(y)$$

y

(6) $$T^*_\mu f(x) = \sup_{\epsilon > 0} |T^\epsilon_\mu f(x)|$$

Definición 3: Para toda medida de Radon $\sigma \in \Delta_\alpha$, se dice que $\sigma \in \Sigma$ si existe una constante $\gamma > 0$ tal que $\forall\, r > 0$ y $\forall\, x_0$ perteneciente al soporte de σ se tiene

(7) $$\sigma\{x / |x - x_0| \leqslant r\} \geqslant \gamma\, r^\alpha$$

Con estas definiciones, enunciamos el siguiente teorema, cuya prueba ocupará el resto de este parágrafo.

Teorema 1: Sea $\sigma \in \Sigma$ y $\mu \in \Delta_\alpha$. Sea $K \in C^\infty(\mathbf{R}^n - \{0\})$ impar y homogéneo de grado $-\alpha$. Supongamos que $\forall p \in (1,\infty)$, T^*_σ sea acotado de $L^p(d\sigma)$ en $L^p(d\sigma)$. Entonces $\forall p \in (1,\infty)$ se tiene

$$T^*_\sigma : L^p(d\sigma) \to L^p(d\mu) \tag{8}$$

y

$$T^*_\mu : L^p(d\mu) \to L^p(d\sigma) \tag{9}$$

son acotados.

Lema 1: Si $\mu \in \Delta_\alpha$, entonces

$$r \int_{|x-x_0|\geq r} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^{\alpha+1}}\, d\mu(x) \leq c\, M_\mu f(x_0) \qquad (c = 2^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}) \tag{10}$$

Demostración:

$$r \int_{|x-x_0|\geq r} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^{\alpha+1}}\, d\mu(x) = r \sum_{k=0}^{\infty} \int_{r2^k \leq |x-x_0| \leq r2^{k+1}} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^{\alpha+1}}\, d\mu(x) \leq$$

$$\leq r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^{\alpha+1} 2^{k(\alpha+1)}} \int_{|x-x_0| \leq r2^{k+1}} |f(x)|\, d\mu(x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-\alpha}} M_\mu f(x_0) =$$

$$= (2^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k})\, M_\mu f(x_0)$$

Lema 2: Si $\sigma \in \Sigma$, entonces existe una constante c tal que

$$T^*_\sigma f(x_0) \leq c\,[M_\sigma(T^*_\sigma f)(x_0) + M_\sigma f(x_0)] \tag{11}$$

Demostración: Sea $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Estimaremos $T^\epsilon_\sigma f(x_0)$ independiente de ϵ. Sea D_ϵ la bola de radio ϵ, centrada en x_0.

Sea $f = f_1 + f_2$ $\quad f_1 = f\chi_{D_\epsilon}$ $\quad f_2 = f\chi_{(D_\epsilon)^c}$ $\quad$ Sea $x \in D_{\epsilon/2}$

$$T_\sigma^\epsilon f(x_0) = T_\sigma^\epsilon f_2(x_0) = (T_\sigma^\epsilon f_2(x_0) - T_\sigma^0 f_2(x)) + T_\sigma^0 f_2(x)$$

$$|T_\sigma^\epsilon f_2(x_0) - T_\sigma^0 f_2(x)| = \left| \int_{|y-x_0| \geqslant \epsilon} K(x_0 - y)\, f_2(y) d\sigma(y) - \int_{|y-x|>0} K(x-y) f_2(y) d\sigma(y) \right.$$

$$= \int_{|y-x_0| \geqslant \epsilon} |K(x_0 - y) - K(x-y)|\ |f(y)| d\sigma(y) \leqslant \int_{|y-x_0| \geqslant \epsilon} \frac{|x_0 - x|}{|y-x_0|^{\alpha+1}} |f(y)| d\sigma(y)$$

$$\leqslant c\,\epsilon \int_{|y-x_0| \geqslant \epsilon} |f(y)| \frac{d\sigma(y)}{|y-x_0|^{\alpha+1}} \leqslant c\, M_\sigma f(x_0)$$

La última desigualdad se deduce de (10)

Por tanto

$$(12) \qquad |T_\sigma^\epsilon f(x_0)| \leqslant c\, M_\sigma f(x_0) + |T_\sigma^0 f_2(x)|$$

Estimaremos ahora $T_\sigma^0 f_2(x)$. Para ello tomamos $\epsilon_1 > 0$ igual al radio de la bola centrada en x que sea tangente a D_ϵ

$$\epsilon_1 \geqslant \frac{\epsilon}{2}$$

$$|T_\sigma^0 f_2(x)| \leqslant |T_\sigma^{\epsilon_1} f(x)| + |T_\sigma^{\epsilon_1} f(x) - T_\sigma^0 f_2(x)| \leqslant$$

$$\leqslant T_\sigma^* f(x) + |T_\sigma^{\epsilon_1} f(x) - T_\sigma^0 f_2(x)| \leqslant T_\sigma^* f(x) + \left| \int_{\substack{|y-x_0| \leqslant \epsilon \\ |y-x| \geqslant \epsilon_1}} K(x-y) f(y) d\sigma(y) \right|$$

$$\leqslant T_\sigma^* f(x) + c \int_{\substack{|x-y| \geqslant \epsilon_1 \\ |x_0 - y| \leqslant \epsilon}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha} d\sigma(y) \leqslant T_\sigma^* f(x) + \frac{c}{\epsilon_1^\alpha} \int_{|y-x_0| \leqslant \epsilon} |f(y)| d\sigma(y)$$

$$\leq T_\sigma^* f(x) + \frac{2^\alpha c}{\epsilon^\alpha} \int_{|y-x_0|\leq\epsilon} |f(y)|d\sigma(y) \leq T_\sigma^* f(x) + cM_\sigma f(x_0)$$

De (12) y la estimación recién obtenida, se deduce

$$(13) \qquad |T_\sigma^\epsilon f(x_0)| \leq cM_\sigma f(x_0) + T_\sigma^* f(x) \quad , \; x \in D_{\epsilon/2}(x_0)$$

Si $d(x_0) = d(x_0, \text{sop } \sigma) \leq \epsilon/2$, promediando en (13) con respecto a x y σ, resulta

$$(14) \qquad |T_\sigma^\epsilon f(x_0)| \leq \frac{1}{\sigma(D_{\epsilon/2})} \int_{|x-x_0|\leq\epsilon/2} T_\sigma^* f(x) d\sigma(x) + c\, M_\sigma f(x_0)$$

1er. Caso: $x_0 \in \text{sop } \sigma$. Como $\sigma \in \Sigma$, $\sigma(D_{\epsilon/2}) \geq c(\epsilon/2)^\alpha$

De (14) se sigue:

$$|T_\sigma^\epsilon f(x_0)| \leq \frac{c\, 2^\alpha}{\epsilon^\alpha} \int_{|x-x_0|\leq\epsilon/2} T_\sigma^* f(x)\, d\sigma(x) + c\, M_\sigma f(x_0) \leq$$

$\leq c\, M_\sigma (T_\sigma^* f)(x_0) + c\, M_\sigma f(x_0)$ y ésta es la estimación (11) que queríamos probar.

2do. caso: $d(x_0, \text{sop } \sigma) = d(x_0) \leq \frac{\epsilon}{4}$

Sea $x_1 \in \text{sop } \sigma$ el punto que realiza la distancia.

Sea D_1 la bola $\{x / |x - x_1| \leq \frac{\epsilon}{2} - d(x_0)\}$. Entonces $D_1 \subset D_{\epsilon/2}(x_0)$

$\sigma(D_{\epsilon/2}) \geq \sigma(D_1) \geq c(\frac{\epsilon}{2} - d(x_0))^\alpha \geq c(\frac{\epsilon}{4})^\alpha$ y de (14) se deduce

$$|T_\sigma^\epsilon f(x_0)| \leq c\, M_\sigma (T_\sigma^* f)(x_0) + c\, M_\sigma f(x_0)$$

y ésta es la estimación (11) que queríamos probar.

3er. caso: $d(x_0) \leqslant \epsilon < 4\, d(x_0)$

$$|T_\sigma^\epsilon f(x_0) \leqslant |T_\sigma^{4d(x_0)} f(x_0)| + |T_\sigma^\epsilon f(x_0) - T_\sigma^{4d(x_0)} f(x_0)|$$

Por el 2do. caso

$$(15) \qquad |T_\sigma^{4d(x_0)} f(x_0)| \leqslant c\, M_\sigma (T_\sigma^* f)(x_0) + c\, M_\sigma f(x_0)$$

$$(16) \qquad |T_\sigma^\epsilon f(x_0) - T_\sigma^{4d(x_0)} f(x_0)| = \Big| \int_{\epsilon \leqslant |y - x_0| \leqslant 4d(x_0)} K(y - x_0) f(y)\, d\sigma(y) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant c \int_{\epsilon \leqslant |y - x_0| \leqslant 4\, d(x_0)} \frac{|f(y)|}{|y - x_0|^\alpha}\, d\sigma(y) \quad \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{\epsilon^\alpha} \int_{|y - x_0| \leqslant 4d(x_0)} |f(y)|\, d\sigma(y) \quad \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{2^\alpha 4^\alpha \epsilon^\alpha} \int_{|y - x_0| \leqslant 4\epsilon} |f(y) d\sigma|(y) \leqslant c\, M_\sigma f(x_0)$$

De las desigualdades (15) y (16) se deduce la estimación (11) que que queríamos probar.

Sólo debemos considerar $\epsilon \geqslant d(x_0, \text{sop}\, \sigma)$ pues si $\epsilon < d(x_0, \text{sop}\, \sigma)$,
$T_\sigma^\epsilon f(x_0) = T_\sigma^{d(x_0)} f(x_0)$ y es el 3er. caso.

Demostración del Teorema 1:

Primero demostraremos la afirmación (8):

Si $T_\sigma^*: L^p(\sigma) \to L^p(\sigma)$, $1 < p < \infty$, $\sigma \in \Sigma$. Entonces

$T_\sigma^*: L^p(\sigma) \to L^p(\mu)\ \forall \mu \in \Delta$

Por lema 2 $\|T_\sigma^* f\|_{p,\mu} \leqslant c(\|M_\sigma T_\sigma^* f\|_{p,\mu} + \|M_\sigma f\|_{p,\mu})$

Por la proposición 1:

$$\|T_\sigma^* f\|_{p,\mu} \leqslant c(c_1\|T_\sigma^* f\|_{p,\sigma} + c_2\|f\|_{p,\sigma}) \leqslant c\,\|f\|_{p,\sigma}$$

por la hipótesis hecha sobre T_σ^* .

Ahora demostraremos la afirmación (9).

Sabemos por (8) que $\forall\ 1 < p < \infty$, $T_\sigma^*: L^p(\sigma) \to L^p(\mu)$ es contínuo.

Entonces sea $q/ \frac{1}{p} + 1/_q = 1$

$$(17) \qquad \left| \int \int_{|y-x|\geqslant\epsilon} K(y-x)f(y)\, g(x)\, d\sigma(y)\, d\mu(x) \right| \leqslant$$

$$\left|\int T_\sigma^\epsilon f(x)\, g(x)\, d\mu(x)\right| \leqslant \|T_\sigma^\epsilon f(x)\|_{p,\mu}\, \|g\|_{q,\mu} \leqslant$$

$$\leqslant \|T_\sigma^* f(x)\|_{p,\mu}\|g\|_{q,\mu} \leqslant c_p\|f\|_{p,\sigma}\|g\|_{q,\mu}$$

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \forall\, f \in L^p(d\sigma) \quad \forall\, g \in L^q(d\mu)$$

Dada $g \in L^q(d_\mu)$, definimos $T_\mu^\epsilon g \in (L^p(d\sigma))^* \simeq L^q(d\sigma)$ por

$$(T_\mu^\epsilon g, f) = \int \int_{|y-x|\geqslant\epsilon} K(x-y)\, f(y)\, g(x)\, d\sigma(y)\, d\mu(x) \qquad \forall f \in L^p(d\sigma)$$

(17) dice que $T_\mu^\epsilon: L^q(d\mu) \to L^q(d\sigma)$ es contínuo y

$\|T_\mu^\epsilon\| \leqslant c_p \quad \forall\, \epsilon > 0$. Por lo tanto existe una sucesión ϵ_j tal que la sucesión de operadores $T_\mu^{\epsilon_j} : L^q(d\mu) \to L^q(d\sigma)$ converge débilmente a un operador llamado T_μ y $\therefore\ \|T_\mu\| \leqslant c_p$.

Estimemos $(T_\mu^\epsilon f)\ (x_0)$ $x_0 \in \operatorname{sop} \sigma$, $\epsilon > 0$ $f \in C_0^\infty$

Sea D_ϵ el disco de radio ϵ centrado en x_0 ,

$f = f_1 + f_2$, $f_1 = f \chi_{D_\epsilon}$ $f_2 = f - f_1$ Sea $x \in D_{\epsilon/2}(x_0)$

$|T_\mu^\epsilon f(x_0)| = T_\mu f_2(x_0) = [T_\mu f_2(x_0) - T_\mu f_2(x)] + T_\mu f_2(x)$

$[T_\mu f_2(x_0) - T_\mu f_2(x)]$ se estima igual que en el lema 2 y resulta

$$|T_\mu f_2(x_0) - T_\mu f_2(x)| \leqslant c M_\mu f(x_0)$$

Por tanto

$$|T_\mu^\epsilon f(x_0)| \leqslant |T_\mu f_2(x)| + c M_\mu f(x_0) \leqslant |T_\mu f(x)| + |T_\mu f_1(x)| + c M_\mu f(x_0)$$

Promediamos en $D_{\epsilon/2}(x_0)$

$$|T_\mu^\epsilon f(x_0)| \leqslant \underbrace{\frac{1}{\sigma(D_{\epsilon/2})} \int_{D_{\epsilon/2}} |T_\mu f(x)| \, d\sigma(x)}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{\sigma(D_{\epsilon/2})} \int_{D_{\epsilon/2}} |T_\mu f_1(x)| \, d\sigma(x)}_{(2)}$$

$$+ c M_\mu f(x_0)$$

$$(1) \leqslant \frac{2^\alpha}{\epsilon^\alpha} \int_{D_{\epsilon/2}} |T_\mu f(x)| \, d\sigma(x) \leqslant c M_\sigma(T_\mu f)(x_0)$$

$$(2) = \frac{1}{\sigma(D_{\epsilon/2})} \int \chi_{D_{\epsilon/2}}(x) |T_\mu(f_1)|(x) \leqslant \frac{1}{\sigma(D_{\epsilon/2})} \sigma(D_{\epsilon/2})^{1/r'} \left(\int |T_\mu f_1|^r \right)^{1/r} =$$

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1 \right)$$

$$= \frac{1}{\sigma(D_{\epsilon/2})^{1-\frac{1}{r'}}} \left(\int |T_\mu f_1|^r \, d\sigma \right)^{1/r} = \left[\frac{1}{\sigma(D_{\epsilon/2})} \int |T_\mu f_1|^r \, d\sigma \right]^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant c \left[\frac{1}{\epsilon^\alpha} \int_{D_\epsilon} |f|^r \, d\mu \right]^{1/r} \leqslant c (M_\mu |f|^r (x_0))^{1/r}$$

Entonces

$$T_\mu^* f(x_0) \leqslant c\, M_\sigma(T_\mu f)(x_0) + c_r\, [M_\mu(|f|^r)(x_0)]^{1/r}$$

y esto implica la continuidad de

$$T_\mu^* : L^p(d\mu) \to L^p(d\sigma)$$

III. Operadores Maximales sobre superficies dadas por "gráficas" de funciones de Lipschitz

Ahora demostraremos un resultado básico para la prueba de los teoremas 3 y 4 que es la continuidad del operador maximal $T_\sigma^* : L^p(d\sigma) \to L^p(d\sigma)$ donde σ es la medida "integración sobre Σ" y Σ es una superficie dada por la gráfica de una función de Lipschitz $\psi : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^{n-k}$.

En el caso unidimensional y σ la longitud de arco sobre una curva γ, este resultado fue probado por R.R. Coifman, A. Mc Intosch e Y. Meyer en [3] y [4].

Ahora damos una demostración basándonos en el método usado por R.R. Coifman, G. David e Y. Meyer en [5] que es a su vez una aplicación del método de rotaciones de A. P. Calderón [2].

Sea $\phi : \mathbf{R}^k \to R^n$ definida por

$\phi\ (x_1,\ldots,\ x_k) = (x_1,\ldots,\ x_k,\ \varphi_1(x_1,\ldots,\ x_k),\ldots,\ \varphi_{n-k}(x_1,\ldots,\ x_k))$

con $\varphi_j \in \overset{1}{\mathrm{Lip}}$ y constante de Lipschitz M_j .

Sea $M = \sqrt{(n-k)M_\theta^2 + 1}$ con $M_0 = \max\limits_j |M_j|$, entonces $\phi \in \mathrm{Lip}^1$ con constante de Lipschitz $\leqslant M$

ϕ define una superficie S de dim k en $\mathbf{R}^n$

Se quiere definir una medida σ que generalice la noción de área de una superficie regular:

Si $f \in C_0(\mathbf{R}^n)$, sea $\Lambda(f) = \int_{R^k} f\circ\phi\ (x_1,\ldots,\ x_k) \sqrt{\det(J\phi^t.\, J\phi\ )}\ dx_1\ldots dx_k$

con $J\phi$ denotamos la matriz jacobiana de ϕ .

Esta funcional Λ es positiva entonces, por el teorema de Riez, existe una σ - álgebra de Borel y una medida σ definida sobre esa σ - álgebra, tal que

(19) $\Lambda(f) = \int_{R^n} f\ d\ \sigma\ \ \forall\ f \in C_0(\mathbf{R}^n)$

<u>*Proposición 2:*</u> La medida σ definida arriba, pertenece a Σ

1°) $\sigma \in \Delta_k$: Como ϕ es de Lipschitz con constante M, las derivadas parciales son acotadas y por tanto

$\sqrt{\det\ J\phi^t(\ J\phi)} \leqslant C$

Entonces:

$$\sigma\ (B(x_0,r)) = \int_{\phi^{-1}(B(x_0,r)\cap S)} \sqrt{\det\ J\phi^t.\, J\phi}\ dx_1\ldots dx_k \leqslant C \int_{\phi^{-1}(B(x_0,r)\cap S)} dx_1\ldots dx_k$$

pero

$\phi^{-1}(B(x_0,r) \cap S) \subset B(\pi_1(x_0),r)$ (π_1 = proyección sobre las primeras k

componentes) pues

$y \in \phi^{-1}(B(x_0,r) \cap S) \to \phi(y) \in B(x_0,r) \to$

$|(y_1,\dots y_k, \varphi_1(y_1\dots y_k),\dots, \varphi_{n-k}(y_1,\dots, y_k) - (x_0^1,\dots,x_0^k, x_0^{k+1},\dots x_0^n)| \leqslant r$

$\to |(y_1\dots y_k) - (x_0^1,\dots x_0^k)| \leqslant r \to y \in B(\pi_1(x_0),r)$

Entonces

$$\int_{\phi^{-1}(B(x_0,r) \cap S)} dx_1\dots dx_k \leqslant \int_{B(\pi_1(x_0),\, r)} dx_1\dots dx_k = c\, r^K$$

Por tanto $\sigma(B(x_0,r)) \leqslant c\, r^k$ o sea $\sigma \in \Delta_K$.

2°) $\sigma(B(x_0,r)) \geqslant \tilde{c}\ r^k$ para $x_0 \in \operatorname{sop} \sigma$ pues

$$J\phi(J\phi)^t = \begin{vmatrix} 1 & 0\dots 0 & \varphi_{11}\dots\varphi_{n-k,1} \\ 0 & 1\dots 0 & \varphi_{12}\dots\varphi_{n-k,2} \\ \vdots & & \\ 0 & 0\dots 1 & \varphi_{1k}\dots\ \varphi_{n-k,k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots\dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & & \varphi_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n-k,1} & \varphi_{n-k,2} & & \varphi_{n-k,k} \end{vmatrix} =$$

$$= I + B B^t \qquad \text{con } B = \begin{vmatrix} \varphi_{11}\dots\varphi_{n-k,1} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \varphi_{1k} \quad \varphi_{n-k,k} \end{vmatrix}$$

Sea $P = B B^t$ entonces P es simétrica y definida positiva. Por tanto P diagonaliza.

Sea $\{v_i\}$ la base de autovectores y λ_i los autovalores.

Por ser P definida positiva, los autovalores son mayores o iguales a cero.

$(I + P)\ v_i = (1 + \lambda_i)\ v_i$ Por tanto $I + P$ diagonaliza en la misma base con autovalores mayores o iguales que 1

$$\det(I + P) = \prod_{i=1}^{k} (1 + \lambda_i) \geqslant 1 .$$

y como $J\phi^t J\phi = I + P$, $\det\ (J\phi\ J\phi^t) \geqslant 1$

Sea $x_0 \in \operatorname{sop} \sigma$. Tomo $B(x_0, r)$.

$y \in B(\pi(x_0),\ r/_M)$ se cumple que

$$|\phi(y) - \phi(\pi(x_0))| \leqslant M\ |y - \pi(x_0)| \leqslant M\ r/_M = r$$

Por tanto $\phi(y) \in B(x_0, r)$ o sea $\phi^{-1}(B(x_0, r)) \supset B(\pi(x_0),\ r/_M)$

Entonces

$$\sigma(B(x_0, r)) = \int_{\phi^{-1}(B(x_0, r))} \sqrt{\det\ J\phi^t J\phi}\ dx_1 \ldots dx_k \geqslant \int_{B(\pi(x_0), r/_M)} dx_1 \ldots dx_k = \frac{c\ r^k}{M^k} =$$

$= \tilde{c}\ r^k$ donde $\tilde{c}$ depende de k y M.

De 1°) y 2°) se deduce $\sigma \in \Sigma$ que es lo que se quería probar.

Teorema 2: Sea $K \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n - \{0\})$ impar y homgénea de grado-k. Sea $\phi : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ definida por

$\phi(x_1 \ldots x_k) = (x_1, \ldots\ x_k,\ \varphi_1(x_1 \ldots x_k), \ldots\ \varphi_{n-k}(x_1 \ldots x_k))$ con $\varphi_j \in \mathrm{Lip}^1$ y $\|\phi'\|_\infty \leqslant M$ y sea S una superficie dada por

$S = \{(x_1 \dots x_n) \ / \ x_{k+1} = \varphi_1(x_1 \dots x_k), \dots, \ x_n = \varphi_{n-k}(x_1 \dots x_k)\}$ y

σ la medida definida en (19). Entonces

$\forall \ p \in (1,\infty)$ existe una constante $C = C(p,M,k)$ tal que

(20) $\|T^*_\sigma f\|_{p,\sigma} \leqslant C \ \|f\|_{p,\sigma}$

poniendo $T^*_\sigma f(x) = \sup\limits_{\epsilon > 0} \left| \int_{|x-y| \geqslant \epsilon} K(x-y) \ f(y) \ d\sigma(y) \right|$

Antes de demostrar este teorema, probaremos un resultado muy similar en un contexto un poco diferente. Es la siguiente

Proposición 3: Sea $K \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n - \{0\})$ impar y homogénea de grado-k. Sea S una superficie en $\mathbf{R}^n$ definida por $S = \{(x_1 \dots x_n) / \ x_k = \varphi_1(x_1 \dots, x_k), \dots, x_n = \varphi_{n-k}(x_1 \dots x_k)\}$ con $\varphi_j \in \mathrm{Lip}^1$ con constantes M_j. Entonces el núcleo

$$N(x,y) = K(x_1 - y_1, \dots, \ x_k - y_k, \ \varphi_1(x) - \varphi_1(y), \dots, \ \varphi_{n-k}(x) - \varphi_{n-k}(y) \ )$$

es un núcleo de Calderón-Zygmund sobre $\mathbf{R}^k$ (ver [4]).

Si esta proposición es cierta, entonces definiendo

$T^* f(x) = \sup\limits_{\epsilon > 0} \left| \int_{|x-y| > \epsilon} N(x,y) \ f(y) dy \right|$ resulta

T^* acotado de $L^p(R^k)$ en $L^p(R^k)$ y de tipo débil $1-1$. (Esto fue probado por Calderón-Cottar-Zygmund en [5] cap IV).

Lema 3: Sea $K(x,y) \in L^\infty \ (R^k \times R^k)$ una función tal que para una cierta constante $c > 0$, para todo $x_0 \in R^k$ y $\forall \nu \in S^{k-1}$, el núcleo

$K(x_0 + \nu s,\ x_0 + \nu t)\ |s - t|^{k-1} \in L^\infty(R^k \times R^k)$

define un operador acotado sobre $L^2(R)$ de norma $\leq C$.

Entonces la norma del operador $T : L^2(R^k) \to L^2(R^k)$ definida por el núcleo $K(x,y)$ no pasa de $\frac{c\,\omega_{k-1}}{2}$ donde ω_{k-1} es la superficie de la esfera S_{k-1}

Este lema está enunciado en [4]. La demostración es una aplicación del método de rotaciones.

<u>*Demostración de Proposición 3:*</u>

Sean $x,y \in \mathbf{R}^k$ sean $\epsilon > 0$ y $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k})$ y

$N_\epsilon(x,y) = K(x-y,\ \varphi(x) - \varphi(y))\ \chi_{|x-y| \geq \epsilon}$ entonces

1) $N_\epsilon(x,y) \in L^\infty(R^k \times R^k)$

2) $N_\epsilon(x_0 + \nu s,\ x_0 + \nu t)\ |s - t|^{k-1} = N_\epsilon(s,t)$ define un operador acotado sobre $L^2(R)$ de norma $\leq C$.

Veamos 1): $N_\epsilon(x,y) = \chi_{|x-y| \geq \epsilon} |\, K(x - y,\ \varphi(x) - \varphi(y) | \leq$

$$\leq |\chi_{|x-y|} \geq \epsilon \ \frac{1}{|x-y|^k}\ |\ |K\ (\frac{x-y}{|x-y|}\ ,\ \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|})\ |\ \leq \frac{1}{\epsilon^k}\ .\ A$$

donde A es la cota de K en el compacto $S_{k-1} \times B(0,M)$ con $M = \text{máx}(M_i)$.

Veamos 2): $N(s,t) = |s - t|^{k-1}\ N(x_0 + \nu s,\ x_0 + \nu t) =$

$$= \frac{|s-t|^{k-1}}{|s-t|^k}\ K\ (\nu\ \frac{(s-t)}{|s-t|}\ ,\ \frac{\varphi(x_0 + \nu s) - \varphi(x_0 + \nu t)}{|s - t|}\ )\ =$$

$$= \frac{1}{s-t} \; K \left(v, \frac{\varphi(x_0+\nu s) - \varphi(x_0+\nu t)}{s-t}\right)$$

Sea $\psi(s) = \varphi(x_0 + xs)$ ψ es de Lipschitz con constante M. Sea $F : R^{n-k} \to \mathbf{C}$ C^{∞} definida por $F(\mu) = K(\nu,\mu)$ entonces

$$F \left(\frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t}\right) = K \left(\nu, \frac{\varphi(x_0+\nu s) - \varphi(x_0+\nu t)}{s-t}\right)$$

y estamos en las condiciones del teorema 2, pag. 3 de [4]. Entonces $N(s,t)$ define un operador acotado sobre $L^2(R)$ por:

$$Tf(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|s-t| \geq \epsilon} N(s,t)f(s)ds$$

Además

$$|N(s,t)| \leq c \; |s-t|^{-1}$$

$$\left|\frac{\delta}{\delta s} N(s,t)\right| \leq c \; |s-t|^{-2} \quad \text{p.p.}$$

Esto vale usando que K es homogénea de grado-K y que si φ es de Lipschitz, φ es absolutamente contínua, entonces es derivable p.p. y $\frac{\delta}{\delta s} N(s,t)$ se calcula con la regla de la cadena como distribuciones. Entonces $N(s,t)$ es un núcleo de Calderón-Zygmund y N^* resulta acotado en $L^2(\mathbf{R})$. Pero de esto resulta $\|N_\epsilon f\|_2 \leq \|N^* f\|_2 \leq c\|f\|_2$ con c independiente de ϵ y por el lema 3 , $N_\epsilon(x , y)$ define un operador acotado sobre $L^2(R^k)$ de norma no superior que $\frac{c\omega_{k-1}}{2}$. Lo denotamos T_ϵ y luego 2)

Por tanto

$\|T_\epsilon\| \leq \frac{c\omega_{k-1}}{2}$. Entonces existe una subsucesión $\{\epsilon_j\}$ tal que T_{ϵ_j}

converge débilmente a un operador T o sea $T_{\epsilon_j} f \to Tf$ en L^2 $\forall$ $f \in L^2$

Por tanto $\forall f$ continua, de soporte compacto y p.p. $x \notin \mathrm{sop}\, f$,

$$T f(x) = \lim_{\epsilon_j \to 0} T_{\epsilon_j} f(x) = \lim_{\epsilon_j \to 0} \int_{\substack{|x-y| > \epsilon_j \\ y \in \mathrm{sop}\, f}} N(x,y)\, f(y)\, dy =$$

$$= \int_{y \in \mathrm{sop}\, f} N(x,y)\, f(y)\, dy = \int N(x,y)\, f(y)\, dy$$

Para que $N(x,y)$ sea un núcleo de Calderón Zygmund, sólo falta probar las acotaciones:

a) $|N(x,y)| \leq \dfrac{c}{|x-y|^k}$ y

b) $|\nabla_x N(x,y)| \leq \dfrac{c}{|x-y|^{k+1}}$ y $|\nabla_y N(x,y)| \leq \dfrac{c}{|x-y|^{k+1}}$

Prueba de a):

$$|N(x,y)| = |K(x-y, \varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{1}{|x-y|^k} \; k\left(\frac{x-y}{|x-y|}, \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|}\right)$$

y K es acotada en el compacto $S^{k-1} \times B(0,M)$

b) $K \in C^\infty(R^n \times R^n - \{0\})$ y φ es de Lipschitz por tanto derivable p.p. con derivada acotada por M. Vale la regla de la cadena para derivar la distribución composición y entonces:

$$\left| \frac{\delta}{\delta x_1} N(x,y) \right| = \left| \nabla k(x-y, \varphi(x) - \varphi(y)) \;.\; \left(1,0,..0, \frac{\delta\varphi}{\delta x_1}\right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{c}{|x-y|^{k+1}} \left| \nabla k \left(\frac{x-y}{|x-y|} \; \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|}\right) \right| \leq \frac{\tilde{c}}{|x-y|^{k+1}}$$

y esto pues las derivadas parciales de K son homogéneas de grado-(k+1).

Demostración del Teorema 2:

Sea $f \in L^p_\sigma(R^n)$ sea $x \in \operatorname{sop} \sigma = S$ $x = \phi(x_k)$

$$T^*_\sigma f(x) = \sup_{\epsilon > 0} \left| \int_{|x-y| \geq \epsilon} K(x-y)\, f(y)\, d\sigma y \right| =$$

$$= \sup_{\epsilon > 0} \left| \int_{\phi^{-1}(B^c(x,\epsilon))} K(x_k - y_k,\ \varphi(x_k) - \varphi(y_k))\ f(y_k,\ \varphi(y_k)) \sqrt{\det J\phi^t J\phi}\ dy_k \right| =$$

$$= \sup_{\epsilon > 0} \left| \int_{B^c(x_k,\epsilon)} K(x_k - y_k), \varphi(x_k) - \varphi(y_k))\ f(y_k, \varphi(y_k)) \sqrt{\det J\phi^t J\phi}\ dy_k \right| +$$

$$+ \sup_{\epsilon > 0} \left| \int_{\phi^{-1}(B^c(x,\epsilon)) - B^c(x_k,\epsilon)} K(x_k - y_k, \varphi(x_k) - \varphi(y_k)\ f(y_k, \varphi(y_k) \sqrt{\det J\phi^t J\phi}\ dy_k \right| \leq$$

$$\leq T^*(f \circ \phi \,.\, \sqrt{\det J\phi^t J\phi})\,(x_k) + C\, M\,(f \circ \phi)\,(x_k)$$

$$\| T^*_\sigma f \|_{p,\sigma} = \left[\int_{R^k} |T^*_\sigma f(\phi(x))|^p \sqrt{\det J\phi^t J\phi}\ dx_k \right]^{1/p} \leq$$

$$\leq c \left[\int_{R^k} (T^*(f \circ \phi \,.\sqrt{\det J\phi^t J\phi})\,(x_k) + C\, M\,(f \circ \phi)\,(x_k)|^p \right]^{1/p} =$$

$$= c\, [\| T^*(f \circ \phi \,.\, \sqrt{\det J\phi^t J\phi})\|_p + \|M(f \circ \phi)\|_p \leq c \| f \circ \phi \,.\, \sqrt{\det J\phi^t J\phi}\ \|_p + \| f \circ \phi \|_p \leq$$

$$\leq c\, \| f \circ \phi \|_p = c\left(\int_{R^k} |f \circ \phi\ (x_k)|^p\, dx_k \right)^{1/p} \leq c\left(\int_{R^k} |f \circ \phi\ (x_k)| \sqrt{\det J\phi^t J\phi}\ dx_k \right)$$

$$= \| f \|_{p,\sigma}$$

La letra c no siempre denota la misma constante.

Ahora haremos una generalización del teorema 2, a un caso más general, donde la medida σ está soportada sobre una superficie S que se obtiene aplicando un movimiento rígido a una superficie $\tilde{S}$ que es gráfica de una función de Lipschitz.

Sea $A(x) = x_o + Tx$, $A: R^n \to R^n$, $x_o \in R^n$, T lineal tal que $T^t\, T = I$

$$\phi(x_1,\ldots, x_k) = (\varphi_1(x_1,\ldots, x_k),\ldots, \varphi_n(x_1,\ldots, x_k) =$$
$$= A(x_1,\ldots, x_k , \psi_1(x_1,\ldots, x_k),\ldots, \psi_{n-k}(x_1,\ldots, x_k)) \text{ con } \psi_j \in Lip^1$$

y constante M_j. Entonces ϕ es Lipschitz con constante $\leq M = \sqrt{(n-K)M_o^2 + 1}$ $M_o = \max_j |M_j|$ pues $|A(x) - A(y)| = |x-y|$ (T preserva módulo).

Sea S_A la superficie de dim k en $\mathbf{R}^n$ definida por ϕ y σ_A la medida construída como en (19) soportada sobre S_A.

Proposición 2': σ_A definida arriba pertenece a Σ . La demostración sigue igual que la demostración de la proposición 2 usando el hecho que

$$J\phi^t(x)\; J\phi(x) = J\Psi^t(x)\; J\Psi(x) \qquad \Psi(x) = (x, \Psi_1(x),\ldots, \Psi_{n-k}(x))$$
$$\Psi : R^k \to R^n$$

y que $\phi^{-1}(B(x_o, r) \cap S) \subset B(\pi_1(A^{-1}x_o), r)$.

Teorema 2': Sea $K \in c^\infty(R^n \times R^n - \{0\})$ impar y homogénea de grado -k, ϕ y σ_A definidas como antes, entonces

$$\|T^*_{\sigma_A} f\|_{p,\sigma_A} \leq c \;\|f\|_{p,\sigma_A} \qquad \text{donde}$$

$$T^*_{\sigma_A} f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|x-y|} K(x-y)\, f(y)\, d\sigma_A \right|$$

Demostración: Sea $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{n-k})$

$$T^*_{\sigma_A} f(\phi(x)) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} K(\phi(x)-y)\ f(y)\ d_{\sigma_A}(y) \right| =$$

$$= \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{\phi^{-1}(B^c(\phi(x),\varepsilon))} K(\phi(x) - \phi(y))\ f(\phi^{\cdot}(y))\ \sqrt{\det J\phi^t J\phi}\ dy = \right.$$

$$= \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{\phi^{-1}(B^c\ (\phi(x),c))} K\circ\tilde{T}\ (x-y,\ \psi(x) - \psi(y))\ f\circ A(\Psi y)\ \sqrt{\det J\Psi^t J\Psi}\ dy == \right.$$

$$= \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{\Psi^{-1}(B^c(\Psi(x),\varepsilon)} K\circ\tilde{T}\ (\Psi(x) - \Psi(y)\ f\circ A(\Psi(y))\ \sqrt{J\Psi^t J\Psi}\ dy \right.$$

$= \tilde{T}^*_\sigma\ (f\circ A)\ (\Psi(x))$ donde $\tilde{T}^*$ tiene como núcleo a $K\circ T$ que es impar, homogéneo de gr-k y $c^\infty(R^n - \{0\})$ y σ la medida soportada sobre la gráfica de ψ .

Entonces $T^*_{\sigma_A}\ f(\phi(x)) = \tilde{T}^*_\sigma\ (f\circ A)\ (\Psi(x))$.

$$\int_{R^k} |T^*_{\sigma_A}\ f(\phi(x))|^p\ \sqrt{\det J\phi^t J\phi}\ dx = \int_{R^k} |\tilde{T}^*_\sigma\ (f\circ A)\ (\Psi(x))\ \sqrt{\det J\Psi^t J\Psi} dy$$

$= \| \tilde{T}^*_\sigma\ (f\circ A)\|^p_{p,\sigma} \leqslant c\ \| f\circ A\|^p_{p,\sigma}$ por el teorema 2.

Pero $\| f\circ A\|^p_{p,\sigma} = \int_{R^k} |f\circ A(\Psi(x))|^p\ \sqrt{\det J\Psi^t J\Psi}\ dx =$

$= \int_{R^k} | f(\phi(x)|^p\ \sqrt{\det J\phi^t J\phi}\ dx = \| f\|^p_{p,\sigma_A}$ resulta

$T^*_{\sigma_A} \| f\|_{p,\sigma_A} \leqslant c\ \| f\|^p_{p,\sigma_A}$

IV. Operadores Maximales sobre superficies más generales

Ahora probaremos la continuidad del operador maximal $T_\mu^* : L^p(d\mu) \to L^p(d\sigma)$ $\mu \in \Delta$ y σ medida "integración" sobre una superficie que cumple ciertas propiedades que generalizan las que satisfacen las curvas *"casi lipschitzianas"* definidas por Guy David en [6].

Para probar este resultado, usamos fuertemente el teorema 2) y desigualdades del tipo "buenas λ" de Burkholder y Gundy.

Por último, damos un ejemplo de una superficie que cumple todas las hipótesis impuestas en el teorema 3) y que no se la puede definir globalmente como la gráfica de una función de Lipschitz.

Teorema 3: Sea S una superficie definida por $\varphi : R^k \to R^n$ $k < n$, φ satisfaciendo las hipótesis (1). σ la medida "integración sobre S", $\mu \varepsilon \Delta_k$ y K un núcleo satisfaciendo las hipótesis del teorema 2.

Entonces el operador maximal asociado T^*_μ es acotado de $L^p(d\mu)$ en $L^p(d\sigma)$ $\forall$ $p \varepsilon (1,\infty)$.

Hipótesis (1):

i) $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ es de Lipschitz, propia, es de rango k y $|\det J\varphi J\varphi^t (x)| \geq M$ p.p.

ii) $\sigma \varepsilon \Delta_k$

iii) $\forall$ Q cubo de R^k, existe K_Q compacto contenido en Q, con área $K_Q \geq$ $\geq \nu$. área Q. $\nu \varepsilon (0,1)$, tal que $\varphi(K_Q)$ está contenida en la imagen de una función ψ: $R^k \to R^n$ de la forma

$$\psi(x) = A \circ L(x)$$

A: $R^n \to R^n$ $A(x) = x_o + Tx$, T lineal y $T^t\, T = I$

L: $R^k \to R^n$ $L(x) = (x, \ell(x))$ $\ell : R^k \to R^{n-k}$ de Lipschitz con constante $\leq M$ (independiente de Q).

Lema 4: Sea σ_k la medida definida sobre la σ-álgebra de los conjuntos de Borel de R^k por

$$|A|_\sigma = \int_A \sqrt{\det J\varphi\ J\varphi^t}\ dx_1 \ldots dx_k$$

Sea $u : R^k \to [0,\infty]$ una función (σ_k medible) que coincide, fuera de un compacto con una función de $L^p(R^k, d\sigma_k)$ y $v : R^k \to [0,\infty]$ del $L^p(R^k, d\sigma_k)$.

Se supone la existencia de un número real $\nu \varepsilon (0,1)$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, exis te $\gamma(\epsilon) > 0$ tq $\forall\ \lambda > 0$ se tiene

$$(21)\quad \sigma_k\{u(x) > \lambda + \epsilon\lambda \ \text{y}\ v(x) \leqslant \gamma(\epsilon)\lambda\} \leqslant (1-\nu)\,\sigma_k\{u(x) > \lambda\}$$

Entonces $u \in L^p(R^k, d\sigma_k)$ y $\|u\|_{p,\sigma_k} \leqslant c(\epsilon,\nu)\ \|v\|_{p,\sigma_k}$

Proposición 4: Con las notaciones del teorema 3, existe $\nu \in (0,1)$ y $\forall\ r \in (1,\infty)$ una constante $\gamma = \gamma(\epsilon, r) > 0$ tal que $\forall f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ contínua, a soporte compacto, poniendo

$$(22)\qquad u(x) \doteq (T^*_\mu f)(\varphi(x)) \quad x \in \mathbf{R}^k \quad \text{y}$$

$$(23)\qquad v(x) = [M_\mu(|f|^r)(\varphi(x))]^{1/r} \quad \text{se tiene}$$

$$\sigma_k\{x \in R^k \ / \ u(x) > \lambda + \epsilon\lambda \ \text{y}\ v(x) \leqslant \gamma\lambda\} \leqslant (1-\nu)\sigma_k\{x \in R^k \ / \ u(x) > \lambda\}$$

Demostración del teorema 3:

Para poder aplicar el lema 4) a las funciones $u(x)$ y $v(x)$ definidas por (22) y (23), sólo falta probar que $u(x) \in L^p(R^k, \sigma_k)$ fuera de un compacto:

Si sop $f \subset \{x/\ |x| < R\}$ sea $x\ /\ |\varphi(x)| > 2R$ entonces

$$(24)\qquad (T^*_\mu f)\,\varphi(x) \leqslant c(M_\mu f)\,\varphi(x) \qquad \text{y entonces}$$

$$\int_{\{x/\ |\varphi(x)| > 2R\}} |T^*_\mu f(\varphi(x))|^p \sqrt{\det J\varphi^t J\varphi}\ dx \leqslant c \int_{R^k} (M_\mu f)^p_\varphi(x) \sqrt{\det J\varphi^t J\varphi}\ dx \leqslant$$

$\leqslant c\,\|f\|^p_{p,\sigma_k} < \infty$ pues tiene soporte compacto y es contínua.

Ahora demostraremos la desigualdad (24)

$$T_\mu^* f(\varphi(x)) \leqslant \sup_{\epsilon>0} \int_{\substack{|y-\varphi(x)|>\epsilon \\ y \in \operatorname{sop} f}} |K(\varphi(x)-y)|\ |f(y)|\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\operatorname{sop} f} |K(\varphi(x)-y)|\ |f(y)|\,d\mu \leqslant \int_{B(\varphi(x),\frac{3}{2}|\varphi(x)|)} |K(\varphi(x)-y)|\ |f(y)|\,d\mu$$

La última desigualdad vale pues $\operatorname{sop} f \subset B(\varphi(x), |\varphi(x)|+R)$ y

$$R < \frac{|\varphi(x)|}{2}$$

Además

$$|\varphi(x)-y| \geqslant |\varphi(x)|-|y| \geqslant |\varphi(x)|-R \geqslant |\varphi(x)| - \frac{|\varphi(x)|}{2} = \frac{|\varphi(x)|}{2}$$

y entonces

$$T_\mu^* f(\varphi(x)) \leqslant \int_{B(\varphi(x),\frac{3}{2}|\varphi(x)|)} \frac{c}{|y-\varphi(x)|^k}\,|f(y)|\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^k\, 3^k\, c}{|\varphi(x)|^k\, 3^k} \int_{B(\varphi(x),\frac{3}{2}|\varphi(x)|)} |f(y)|\,d\mu \leqslant c\, 3^k M_\mu f(\varphi(x))$$

y por tanto vale (24).

Ahora estamos en las hipótesis del lema 4 y resulta $\|u\|^p_{p,\sigma_k} \leqslant c\,\|v\|^p_{p,\sigma_k}$.

Tomando $1<r<p$, esto se traduce en $\|T_\mu^* f\|_{p,\sigma} \leqslant c\,\|f\|_{p,\mu}$

Demostración del lema 4:

$$\sigma_k\{x \,/\, u(x) > (\epsilon+1)\lambda\} \leqslant (1-\nu)\ \sigma_k\{x \,/\, u(x) > \lambda\} + \sigma_k\{x \,/\, v(x) > \gamma\lambda\}$$

Por tanto

$$\int_0^N p\,\lambda^{p-1}\,\sigma_k\{x\,/\,u(x) > (\epsilon+1)\,\lambda\}\,d\lambda \leq p(1-\nu)\int_0^N \lambda^{p-1}\,\sigma_k\{u(x)>\lambda\}\,d\lambda \;+$$

$$+\;p\int_0^N \lambda^{p-1}\,\sigma_k\{v(x)>\gamma\,\lambda\}\,d\lambda$$

$$\int_0^{N(\epsilon+1)} p(\epsilon+1)^{-p}\,\lambda^{p-1}\,\sigma_k\{u(x)>\lambda\}\,d\lambda \leq p(1-\nu)\int_0^N \lambda^{p-1}\,\sigma_k\{x\,/\,u(x)>\lambda\} \;+$$

$$+\;p\int_0^{N\gamma}\lambda^{p-1}\,\gamma^{-p}\,\sigma_k\{x\,/\,v(x)>\lambda\}\,d\lambda$$

Pero $\sigma_k\ \{x/u\ (x) > \lambda\} \leq \sigma_k(K) + \sigma_k\ \{x/u\ (x) > \lambda \cap CK\}$

En CK, μ coincide con una f del $L^p(\sigma_k)$ $\therefore$

$$\int_0^N \lambda^{p-1}\,\sigma_k\,\{u(x)>\lambda\}\,d\lambda \quad \leq \quad \int_0^N \lambda^{p-1}\sigma_k(K) + \int_0^N \lambda^{p-1}\sigma_k\,\{f(x)>\lambda\} < \infty.$$

Restando resulta

$$p\,[(\varepsilon+1)^{-p}-(1-\nu)] \int_0^N \lambda^{p-1}\sigma_k\,\{x/u\ (x)>\lambda\}\,d\lambda + p(\varepsilon+1)^{-p}\int_N^{N(1+\varepsilon)} \lambda^{p-1}(\varepsilon+1)\,\sigma_k\{x/u(x)>\lambda\}d\lambda$$

$$\leq \gamma^{-p}\,p\int_0^{N\gamma}\lambda^{p-1}\sigma_k\,\{x/v(x)>\lambda\}\quad d\lambda\ .$$ Por tanto

$$p\,[(\varepsilon+1)^{-p} - (1-\nu)]\int_0^{N\gamma}\lambda^{p-1}\sigma_k\,\{x/u(x)>\lambda\} \leq \gamma^{-p}\,p\int_0^{N\gamma}\lambda^{p-1}\sigma_k\,\{x/v(x)>\lambda\}d\lambda$$

Tomando lím para $N\to\infty$ resulta $u \in L^p(d\sigma_k)$ y .

$[(\epsilon+1)^{-p} - (1-\nu)]\ \|u\|^p_{p,\sigma_k} \leq \gamma^{-p}\ \|v\|^p_{p,\sigma_k}$ tomando ε tal que $(1+\varepsilon)^{-p} > (1-\nu)$ resulta

$$\|u\|_{p,\sigma_k} \leq \gamma^{-1}\,[(\epsilon+1)^{-p} - (1-\nu)]^{-1/p}\ \|v\|_{p,\sigma_k}\ .$$

Demostración de la proposición 4:

Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^k\ /\ u(x)>\lambda\}$ Ω abierto y acotado .

$\Omega = \cup Q_j$ Q_j cubos disjuntos tales que $3d(Q_j) \geq d(Q_j, C\Omega) \geq d(Q_j)$

$d(Q_j)$ designa el diámetro de Q_j

Sea $E_j = \{x \varepsilon Q_j \ / \ u(x) > \lambda + \epsilon\lambda\}$ y tomamos j tal que exista

$\xi \varepsilon Q_j$ con $v(\xi) \leqslant \gamma\lambda$. Se quiere ver que

$$(25) \qquad \sigma_k(E_j) \leqslant (1-\nu)\,\sigma_k(Q_j)$$

porque entonces

$$\sigma_k\{x / u(x) > \lambda + \epsilon\lambda \ \ y \ \ v(x) \leqslant \gamma\lambda\} = \sum_j \sigma_k(E_j) \leqslant (1-\nu)\ \Sigma\ \sigma_k(Q_j) =$$

$= (1-\nu)\ \sigma_k(\Omega)$ que es lo que queríamos demostrar

Tomamos Q_j Sea $x_j \varepsilon \partial\Omega$ que realiza la distancia de Q_j al $C\Omega$. Sea l_j tal que $\varphi(Q_j) \subset B(\varphi(x_j), l_j)$ l_j mínimo.

$f = f_1 + f_2 \qquad f_1 = f\chi_{B(\varphi(x_j), 2l_j)}$

$$(26) \qquad T^*_\mu f_2(\varphi(x)) \leqslant T^*_\mu f(\varphi(x_j)) + c\,M_\mu f(\varphi(y))$$

$\forall$ x,y tales que $|\varphi(x) - \varphi(x_j)| \leqslant l_j$ $\quad |\varphi(y) - \varphi(x_j)| \leqslant l_j$

Esto resulta de la misma forma que en la demostración del lema 1

Tomamos $y = \xi \varepsilon Q_j$ y $x \varepsilon Q_j$. Resulta

$\forall x \varepsilon Q_j \quad T^*_\mu f_2(\varphi(x)) \leqslant T^*_\mu f(\varphi(x_j)) + c\,M_\mu f(\varphi(\xi))$

Por tanto

$$(27) \qquad \forall\ x \varepsilon Q_j\ ,\ T^*_\mu f_2(\varphi(x)) \leqslant \lambda + c\gamma\lambda$$

Ahora queremos calcular $T^*_\mu\ f_1(\varphi(x))$.

Por la hipótesis (1), dado Q_j, existe K_j tal que $|K_j|_\sigma \geq \nu |Q_j|_\sigma$ tal que $\varphi(K_j)$ está contenida en la imagen de $\psi = A \circ L$.

$$\int_{R^K} [T^*_\mu\ (f_1(A \circ L(x))]^r\ \sqrt{\det JL^t\ JL}\ \ dx \leq c_r^r\ \int_{R^n} |f_1|^r\ d\mu$$

pues $T^*_{\sigma_A}$ es acotado de $L^r(d\sigma_A)$ en $L^r(d\sigma_A)$ por teorema 2' y por tanto el teorema 1 nos dice que

$$T^*_\mu : L^r(d\mu) \longrightarrow L^r(d\sigma_A) \quad \text{es acotado}$$

sea $D_j = \{x /\ |x-\varphi(x_j)| \leq 2\ell_j$

$$\int_{R^n} |f_1|^r\ d\mu = \int_{D_j} |f|^r \leq c_r^r\ \ell_j^k\ \ M\mu\ (|f|^r)(\varphi(\xi))$$

Entonces

$$\int_{\varphi(K_j)} [T^*_\mu\ \ f_1(y)]^r\ d\sigma = \int_{\psi^{-1}(\varphi(K_j))} [T^*_\mu\ f_1(\psi(x))]^r \sqrt{\det J\psi^t\ J\psi}\ dx \leq$$

$$\leq \int_{R^k} (T^*_\mu\ f_1\ \ (A \circ L(x)))^r\ \ \sqrt{\det JL^t\ JL}\ dx \leq c_r^r\ \ell_j^k\ M_\mu(|f|^r)(\varphi(\xi)) \leq$$

$$\leq c_r^r\ \ell_j^k\ \gamma^r\ \lambda^r = (28)$$

Por las hipótesis (1) hechas sobre φ y la elección de l_j,

$|\varphi(y) - \varphi(x_j)| \leqslant c\,|y - x_j| \leqslant c\,4 d_j \;\forall y \in Q_j \; (d_j = \text{diám } Q_j)$

Como l_j es el mínimo radio tq $\varphi(Q_j) \subset B(\varphi(x_j), l_j)$, debe ser de la forma

$$l_j = |\varphi(y_0) - \varphi(x_j)| \quad \text{para } y_0 \in \overline{Q}_j \;.\quad \text{Por tanto,}$$

$$l_j \leqslant c\,4\,d_j \to l_j^k \leqslant c^k 4^k d_j^k = \tilde{c} \int_{Q_j} 1\,dx = \frac{\tilde{c}}{M} \int_{Q_j} M\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tilde{c}}{M} \int_{Q_j} \sqrt{\det J\varphi^t J\varphi}\; dx = \frac{\tilde{c}}{M} |Q_j|_{\sigma_k} = c|Q_j|_{\sigma_k} \;.$$

O sea

$$l_j^k \leqslant c|Q_j|_{\sigma_k} \;.\quad \text{Volviendo a (28),}$$

$$(28) \qquad \leqslant c_r^r\; c\,|Q_j|_{\sigma_k} \gamma^r \lambda^r = \tilde{c}_r^r\,|Q_j|_\sigma\; \gamma^r \lambda^r$$

Sea γ suficientemente chico para que $c\gamma \leqslant \frac{\epsilon}{2}$ y $\tilde{c}_r \gamma \leqslant (\frac{\nu}{2})^{1/r} \frac{\epsilon}{2}$

Sea $R_j \subset K_j$ $\quad R_j = \{x \in K_j \,/\, T_\mu^* f_1(\varphi(x)) \geqslant \lambda \frac{\epsilon}{2}\}$. Entonces

$$|R_j|_{\sigma_k} = \int_{R_j} \sqrt{\det J\varphi^t J\varphi}\; dx \leqslant \frac{2^r}{\lambda^r \epsilon^r} \int_{R_j} [T_\mu^* f_1 \varphi(x)] \sqrt{\det J\varphi^t J\varphi}\; dx$$

$$\leqslant \frac{2^r}{\lambda^r \epsilon^r}\; \tilde{c}_r^r\, |Q_j|_{\sigma_k} \gamma^r \lambda^r \leqslant \frac{\nu}{2}\, |Q_j|_{\sigma_k}$$

Entonces

$$\forall\, x \in K_j\,,\, R_j \qquad T^*_\mu f_1(\varphi(x)) \leq \lambda \frac{\epsilon}{2}$$

$$T^*_\mu f_2(\varphi(x)) \leq \lambda + \frac{\lambda\epsilon}{2}$$

Por tanto $\quad T^*_\mu f \;(\varphi(x)) \leq \lambda + \epsilon\lambda$

Pero $E_j \subset Q_j \setminus (K_j \setminus R_j)$ y entonces

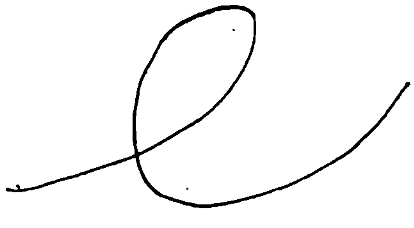
$$|E_j|_{\sigma_k} \leq |Q_j|_{\sigma_k} - |(K_j - R_j)|_{\sigma_k} = |Q_j|_{\sigma_k} - (|K_j|_{\sigma_k} - |R_j|_{\sigma_k}) \leq$$

$$\leq |Q_j|_{\sigma_k} - (\nu |Q_j|_{\sigma_k} - \frac{\nu}{2} |Q_j|_{\sigma_k}) = |Q_j|_{\sigma_k} - \frac{\nu}{2} |Q_j|_{\sigma_k} =$$

$= |Q_j|_{\sigma_k} \;(1 - \frac{\nu}{2})$ que es lo que queríamos probar cambiando ν por $\frac{\nu}{2}$.

<u>Ejemplo</u>: De una superficie que cumple las hipótesis (1) del teorema 3 y que no es globalmente la gráfica de una función de Lipschitz de $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$:

Sea $\gamma(s)$ parametrizado por longitud de arco *casi lipschitziana*, [6], con un punto doble



$\gamma(s) = (x(s),\; y(s))$

Sea S una superficie de dim 2 en $\mathbf{R}^3$ definida paramétricamente por

$(t,s) \overset{\varphi}{\to} (t,\ x(s),\ y(s))$

$\varphi_1(s,t) = t$

$\varphi_2(s,t) = x(s)$ $\qquad \varphi_j$ son de Lipschitz, con constante 1

$\varphi_3(s,t) = y(s)$

det $J\varphi\, J\varphi^t = 1$

La medida inducida por S pertenece a Δ pues la medida inducida por $\gamma \varepsilon \Delta$

No se puede obtener S como la gráfica de una Lipschitz de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^3$ pues tiene puntos dobles.

Dado Q cubo de $\mathbf{R}^2$, $Q = I_1 \times I_2$. Como γ es *casi Lipschitz* dado I_2, existe $\tilde{I}_2$ compacto con $|\tilde{I}_2| \geq \nu\, |\tilde{I}_2|$ $\nu \varepsilon (0,1)$ y una $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Lipschitz tal que sobre $\tilde{I}_2$ $\psi(s) = \gamma(s)$ ψ parametrizada por longitud de arco

Sea $K_j = I_1 \times \tilde{I}_2 \;\to\; |K_j| \geq \nu\, |Q_j|$

Sobre K_j $\varphi(s,t) = (t,s,\psi(s))$ gráfica de una Lipschitz.

V. Operadores Maximales sobre superficies "arco cuerda":

Análogamente a lo hecho en el parágrafo IV, ahora estudiaremos la continuidad del operador maximal $T^*_\sigma : L^p(d\sigma) \to L^p(d\sigma)$ donde σ es la medida "integración" sobre una superficie que cumple una condición "arco-cuerda" y otras propiedades enunciadas en el lema 5.

Por las condiciones impuestas a la superficie, resulta $\sigma \varepsilon \Sigma$ y por tanto, se deduce del teorema 1 que $T^*_\sigma : L^p(d\sigma) \to L^p(d\mu)$ y $T^*_\mu : L^p(d\mu) \to L^p(d\sigma)$ son contínuos.

Definición 4: Dada una superficie $S\subset\mathbf{R}^n$, se dice que satisface una condición *arco-cuerda* si existe $\epsilon>0$ tal que si x_0 y $x_1\in S$, $\epsilon d(x_0,x_1)\leqslant$ $\leqslant|x_0-x_1|$ donde $d(x_0,x_1)$ denota el ínfimo de las longitudes de las curvas sobre S que unen x_0 con x_1 .

Lema 5: Sea φ $\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^n$, $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ que satisface

1) $\varphi_j\in\mathrm{Lip}_1$ $1\leqslant j\leqslant n$

2) φ es propia, $1\leqslant j\leqslant n$ inyectiva
$1\leqslant i\leqslant k$ y $J\varphi(x)$ es de rango k,p.p.x

3) La superficie S definida por φ $(S=\varphi(\mathbf{R}^k))$ satisfacen una condición *arco-cuerda.*

4) Existe $c_1>0$ tal que $c_1<|\frac{d\varphi}{dt}(x_0+\alpha t)|$ $\forall\,\alpha$ tal que $|\alpha|=1$

Entonces la medida σ definida como en (19) pertenece a Σ .

Demostración: $\operatorname{sop}\sigma=S$ sea $y_0\in S$ $y_0=\varphi(x_0)$

$\sigma(B(\varphi(x_0),r))=\int_{B(\varphi(x_0),r)}d\sigma=\int_{\varphi^{-1}(B(\varphi(x_0),r))}\sqrt{\det J\varphi^t J\varphi}\,dx$. Por la

hipótesis 4) $\sqrt{\det J\varphi^t J\varphi}\geqslant c_1$. Entonces

$$(29)\quad \sigma(B(\varphi(x_0),r)\geqslant c_1\ |\varphi^{-1}(B(\varphi(x_0),r))|$$ (las barras indican medida de Lebesgue en $\mathbf{R}^k$).

Si c es la constante de Lipschitz de φ , $|\varphi(x_0)-\varphi(y)|\leqslant c\,|x_0-y|$

Por tanto si $|x_0 - y| < \frac{r}{c}$, entonces $|\varphi(x_0) - \varphi(y)| \leqslant r$ o sea

$B(x_0, \frac{r}{c}) \subset \varphi^{-1}(B(\varphi(x_0), r))$

Volviendo a (29)

$$\sigma(B(\varphi(x_0), r)) \geqslant c_1 |B(x_0, \tfrac{r}{c})| \geqslant \gamma r^k \tag{30}$$

Por otro lado, hay que ver que $\sigma \in \Delta$

Primero veamos que φ satisface

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| \geqslant c_1 |x_1 - x_0| \tag{31}$$

En efecto, por la hipótesis 3)

$\epsilon |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| > \int_a^b |\frac{d\varphi}{dt}(x(t))| dt$ para alguna curva $x(t)$ parametrizada por longitud de arco tal que $x(a) = x_0$ y $x(b) = x_1$

Por la hipótesis 4) $|\frac{d\varphi}{dt}(x(t))| \geqslant c_1$. Entonces

$|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| \geqslant c_1 (b - a) \geqslant c_1 |x_0 - x_1|$ pues $(b - a)$ es la longitud del arco de x_0 a x_1 que es mayor o igual que la cuerda y resulta (31).

Para ver que $\sigma \in \Delta$. Tomamos $B(y_0, r)$. Si $B(y_0, r) \cap S = \phi$, $\sigma(B(y_0, S)) = 0$. Si existe $y_1 \in B(y_0, r) \cap S$ entonces $y_1 = \varphi(x_1)$ y $B(y_0, r) \subset B(\varphi(x_1), 2r)$. Por tanto

$$\sigma(B(y_0, r)) \leqslant \sigma(B(\varphi(x_1), 2r) = \int_{\varphi^{-1}(B(\varphi(x_1), 2r)} \sqrt{\det J\varphi^t J\varphi}\, dx \leqslant$$

$\leq c\,|\varphi^{-1}(B(\varphi(x_1),\ 2r))|$ Por (31)

$\varphi^{-1}(B(\varphi(x_1),\ 2r)) \subset B(x_1,\frac{2r}{c_1})$. Entonces

(32) $\sigma(B(y_0,r)) \leq c\,|B(x_1,\frac{2r}{c_1})| \leq \tilde{c}\ r^k \ \therefore\ \sigma\in\Delta$

(30) y (32) implican que $\sigma\in\Sigma$

Teorema 4: Sea $\varphi:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^n$ que satisface las hipótesis del lema 5. σ es la medida definida como en (19) con soporte en $S=\varphi(\mathbf{R}^k)$ $K\in c^\infty(\mathbf{R}^n-\{0\})$ impar y homogéneo de grado-k. Entonces, definiendo

$$T^*_\sigma f(x) = \sup_{\epsilon>0} \left| \int_{|x-y|>\epsilon} K(x-y)\ f(y)\ d\sigma y \right| \quad \text{resulta}$$

(33) $$T^*_\sigma : L^p(d\sigma) \to L^p(d\sigma) \qquad \text{es contínuo } \forall\ 1<p<\infty .$$

Además, $\forall\ \mu\in\Delta_k$ resulta $T^*_\sigma : L^p(d\sigma)\to L^p(d\mu)$ y $T^*_\mu : L^p(d\mu)\to L^p(d\sigma)$ son contínuos.

Demostración: Sólo hay que demostrar (33) pues la otra parte del enunciado es consecuencia inmediata del lema 5 y del teorema 1.

Sea $\tilde{\varphi}(x) = (x,\varphi(x))$ y si $\omega = (x,y) \in R^{k+n}$, $\tilde{k}(\omega) = k(y)$

$\tilde{f}(\omega) = f(y)$ y sea $\eta(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t\geq c_1 \\ 0 \text{ si } t<\frac{c_1}{2}\end{cases}$ y $c^\infty(\mathbf{R})$

$\Omega(\omega) = \eta\,(|\frac{y}{x}|)$

y $\tilde{k}(\omega_1-\omega_2) = \tilde{k}(\omega_1-\omega_2)\quad \Omega(\omega_1-\omega_2)$

$\bar{k}$ es impar, homogénea de $-k$ y $C^{\infty}(R^{k+n}-\{0\})$.

Además $\int_{\tilde{\varphi}(R^k)} \tilde{K}(\omega_1-\omega_2)\ \tilde{f}(\omega_2)\, d\sigma\omega_2 = \int_{\tilde{\varphi}(R^k)} \bar{K}(\omega_1-\omega_2)\ \tilde{f}(\omega_2)\, d\sigma\omega_2$

si $\omega_1 = \tilde{\varphi}(x_1)$: pues sobre sup $d\sigma\omega_2\ \Omega\ (\tilde{\varphi}(x_1) - \tilde{\varphi}(x_2)) = 1$.

Sea $x = \varphi(x_K)$

$$T^*_\sigma f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x-y)\ f(y)\, d\sigma_y \right| = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{\varphi^{-1}(|x-y|>\varepsilon)} K(\varphi(x_k)-\varphi(y_k))\, f(\varphi(y_k))\,. \right.$$

$$\left. . \sqrt{\det J\varphi^t\, J\varphi}\ dy_K \right| = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{\varphi^{-1}(|x-y|>\varepsilon)} \bar{K}(x_k-y_k,\ \varphi(x_k)-\varphi(y_k))\, \bar{f}(y_k, \varphi(y_k)) \sqrt{\det J\varphi^t\ J\varphi}\, dy_k \right|$$

$$= \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{\varphi^{-1}(|x-y|>\varepsilon)} \bar{K}(x_k-y_k,\ (x_k)-\varphi(y_k))\ \bar{f}(y_k, \varphi(y_k)) \frac{\sqrt{\det J\varphi^t\ J\varphi}}{\sqrt{\det y\varphi^t y\varphi}} .. \sqrt{\det J\varphi^{-t}\ J\varphi}\ dy_k \right| =$$

$$= \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{\varphi^{-1}(|x-y|>\varepsilon)} \bar{K}(\tilde{\varphi}(x_k)-\tilde{\varphi}(y_k))\ \bar{f}(\tilde{\varphi}(y_k)) \frac{\sqrt{\det J\varphi^t\ J\varphi}}{\sqrt{\det J\tilde{\varphi}^t\ J\tilde{\varphi}}} . \sqrt{\det J\tilde{\varphi}^t\ J\varphi}\ dy_k \right|$$

pero $\varphi^{-1}(B(\varphi(x_k),\varepsilon)) \subset \tilde{\varphi}^{-1}(B(\tilde{\varphi}(x_k)), \sqrt{c_1^2+1}\,.\varepsilon)$ pues:

$$|\tilde{\varphi}(y_k)-\tilde{\varphi}(x_k)|^2 = |y_k - x_k|^2 + |\varphi(y_k) - \varphi(x_k)|^2 \leqslant$$

$\leqslant c_1^2\ |\varphi(y_k) - \varphi(x_k)|^2 + |\varphi(y_k) - (x_k)|^2 = (c_1^2+1)\ |\varphi(x_k)-\varphi(y_k)|$. La desigualdad es consecuencia de 31).

Por tanto $\varphi^{-1}(B(\varphi(x_k),\varepsilon)^c) = [\varphi^{-1}(B(\varphi(x_k),\varepsilon)]^c = \tilde{\varphi}^{-1}(B(\tilde{\varphi}(x_k), \sqrt{c_1^2+1}\,\varepsilon)^c\ \cup$

$\cup\ [\tilde{\varphi}^{-1}(B(\tilde{\varphi}(x_k),\ c_1^2+1.\varepsilon)\ \ \varphi^{-1}(B(\varphi(x_k),\varepsilon)]$.

Entonces

$$T^{*}_{\sigma} f(\varphi(x_k)) \leqslant \sup_{\varepsilon > o} \Big| \underbrace{\int_{\tilde{\varphi}^{-1}(B(\tilde{\varphi}(x_k),\ \sqrt{c_1^2+1},\varepsilon)^c} K(\tilde{\varphi}(x_k) - \tilde{\varphi}(y_k))\ \tilde{f}(\varphi(y_k))}_{A}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{\det J\varphi^t\ J\varphi}}{\sqrt{\det J\varphi^t\ J\varphi}} \cdot \sqrt{\det J\tilde{\varphi}^t\ J\tilde{\varphi}} + \sup_{\varepsilon > o} \Big| \int_B \Big| =$$

$$= \tilde{T}^{*}_{\tilde{\sigma}} \left(\tilde{f}\ \frac{\sqrt{\det J\varphi^t\ J\varphi o}\ \tilde{\varphi}^{-1}}{\sqrt{\det J\tilde{\varphi}^t J\tilde{\varphi}}} \right) (\tilde{\varphi}(x_k)) +$$

$$+ \sup_{\varepsilon > o} \int_B |\tilde{K}(\tilde{\varphi}(y_k) - \tilde{\varphi}(x_k)|\ |\tilde{f}(\tilde{\varphi}(y_k))| \frac{\sqrt{\det J\varphi^t\ \varphi y}}{\sqrt{\det J\varphi^t\ J\varphi}} \cdot \sqrt{\det J\tilde{\varphi}^t\ J\tilde{\varphi}}\ dy_k$$

$$\leqslant \tilde{T}^{*}_{\tilde{\alpha}} \left(\tilde{f} . \frac{\sqrt{\det\ \varphi^t\ J\varphi}}{\sqrt{\det J\tilde{\varphi}^t\ J\tilde{\varphi}}} \right) (\tilde{\varphi}(x_k)) + c\ M_{\tilde{\sigma}}\ (\tilde{f})\ (\tilde{\varphi}(x_k))$$

de esta desigualdad y las acotaciones que cumple

$\sqrt{\det J\varphi^t\ J\varphi}$ y $\sqrt{\det J\tilde{\varphi}^t J\tilde{\varphi}}$, resulta

$$\| T^{*}_{\sigma} f \|_{p,\alpha} \leqslant c\ \| f \|_{p,\sigma}$$

Alberto P. Calderón

Alberto P. Calderón

Marta Urciuolo

Marta Urciuolo

Bibliografía

[1] Calderón A.P. Conmutators, singular integrals on Lipschitz curves and applications. Proceedings I.C.M. Helsinski, 1978, Vol 1, 85-96.

[2] Coifman R.R., Meyer Y. Le théorème de Calderón par les méthodes de variables réelle. C R Acad. Sc. Paris 289 (1979), 425-428.

[3] Coifman R.R., Mc Intosh A., Meyer Y. L'integrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes. Será publicado en Annals of Mathematics.

[4] Coifman R.R., David G., Meyer Y. "La solution des conjectures de Calderón". Será publicado en "Advances in Mathematics".

[5] Coifman R.R., Meyer Y. Au delà des opérateurs pseudo-differentiels. Astérisque 57, Soc. Math. France (1978).

[6] David G. Operateurs integraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe. Centre de Mathématiques de L'Ecole Polytechnique Laboratoire de Recherche Associé au CNRS, n° 169.

[7] De Guzmán Miguel. Lecture Notes 481.