

Tesis de Posgrado

Geometría integral del plano y del espacio hiperbólico : Mosaicos aleatorios

Gutiérrez Giusti, Flora Mercedes

1985

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Gutiérrez Giusti, Flora Mercedes. (1985). Geometría integral del plano y del espacio hiperbólico : Mosaicos aleatorios. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1897_GutierrezGiusti.pdf

Cita tipo Chicago:

Gutiérrez Giusti, Flora Mercedes. "Geometría integral del plano y del espacio hiperbólico : Mosaicos aleatorios". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1985. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1897_GutierrezGiusti.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

GEOMETRIA INTEGRAL DEL PLANO Y DEL ESPACIO HIPERBOLICO:

MOSAICOS ALEATORIOS

Lic. Flora Mercedes Gutiérrez Giusti.

Tesis para optar al título de Doctor en Matemáticas

1975

DIRECTOR: Dr. Luis A. Santaló

- 1897 -

INTRODUCCION

En este trabajo se estudian algunos problemas de la Geometría Integral del plano hiperbólico y su generalización al espacio hiperbólico de tres dimensiones. Esto último es prácticamente todo nuevo, existiendo escasa literatura.

Algunos de los problemas que se estudian son los siguientes:

- a) Se extienden al plano hiperbólico las fórmulas integrales del plano euclidiano que vinculan los momentos de la distancia entre dos puntos dados al azar en un dominio convexo y los momentos de las longitudes de las cuerdas, que rectas al azar determinan en el mismo (I.3).
- b) En [1] R. Cowan estudia mosaicos aleatorios en el plano euclidiano hallando, para el caso de un círculo que es dividido por un proceso de Poisson de rectas, los valores medios de ciertas variables aleatorias como por ejemplo: el número de polígonos interiores; la longitud total de las cuerdas; el número de puntos de intersección de las rectas, que son interiores al círculo, etc. Aquí se extienden estos resultados al plano hiperbólico para el caso de un sistema de Poisson de rectas y un dominio convexo cualquiera, lo que se resume en el Cuadro I.
- c) También en el plano hiperbólico, se halla la medida de conjuntos de segmentos de recta que cortan o están contenidos en un dominio convexo (I.4). Esto permite mostrar que la diferencia de lo que ocurre en el plano euclidiano- el "efecto de contorno" al pasar de una figura acotada a todo el plano no es despreciable.
- d) Por último, en los Capítulos IV y V, se estudia un sistema de Poisson de planos en un espacio de dimensión 3 y curvatura constante $k < 0$. Se hallan, entre otros, los valores medios de primer y segundo orden del volumen, el área de las caras, la longitud de las aristas y el número de vértices de

los poliedros determinados por los planos al azar. Estos valores medios se resumen en el Cuadro IV, donde haciendo $k = -1$ se obtienen los correspondientes al espacio hiperbólico y haciendo $k = 0$ los del espacio euclidiano que coinciden con los calculados por R. Miles en [5].

INDICE

CAPITULO I

1.- El plano hiperbólico.	1
2.- Primeras fórmulas integrales y problemas de probabilidades geométricas.	4
3.- Fórmulas integrales sobre cuerdas y distancias mutuas.	14
4.- Medida de conjuntos de segmentos de recta que cortan o están contenidas en un dominio convexo.	19

CAPITULO II

1.- Procesos de Poisson de rectas en el plano hiperbólico.	24
2.- Dominio convexo cortado por rectas al azar: valores medios de primer orden.	25
3.- Valores medios de segundo orden.	26
4.- Dominio convexo dividido por un proceso de rectas de Poisson.	29
5.- Las relaciones de Cowan para dominios convexos del plano hiperbólico.	30

CAPITULO III

1.- Geometría integral del espacio hiperbólico de dimensión 3.	34
2.- Algunos problemas de probabilidades geométricas.	40
3.- Cuerpo convexo cortado por planos al azar: valores medios de primer orden.	42
4.- Valores medios de segundo orden.	47
5.- Algunos cocientes de valores medios.	56

CAPITULO IV

1.- Procesos de Poisson de planos.	60
------------------------------------	----

2.- Cuerpos convexos y procesos de Poisson de planos: valores medios de primer orden.	63
3.- Valores medios de segundo orden: cuadro de Cowan para el espacio.	65
4.- Cocientes de valores medios.	71

CAPITULO V

1.- Mosaicos de Poisson. Valores medios para poliedros determinados por un proceso de Poisson de planos.	73
2.- Relaciones entre valores medios.	84
3.- Algunas identidades y valores medios de segundo orden.	89

CAPITULO I

1.- EL PLANO HIPERBOLICO.

La definición y primeras propiedades del plano hiperbólico se pueden ver en cualquier libro de Geometría no-euclidea como por ejemplo [2] y [8]. Para nuestro objeto nos referiremos casi siempre al libro de L. A. Santaló [10] .

Localmente se puede considerar el plano hiperbólico como una superficie de curvatura constante igual a -1. Entonces, el elemento de arco en — coordenadas polares se expresa por

$$ds^2 = d\rho^2 + \operatorname{sh}^2 \rho \, d\phi^2 \quad (1.1.1)$$

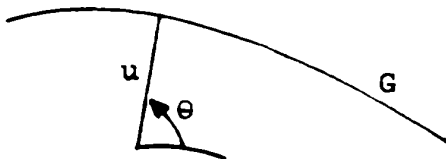
donde ϕ es el ángulo polar y ρ la distancia al origen de coordenadas. De (1.1.1) se deduce que para un círculo geodésico ($\rho = \text{constante}$) la longitud y el área valen

$$L = 2 \pi \operatorname{sh} \rho \quad , \quad F = 2 \pi (\operatorname{ch} \rho - 1) \quad (1.1.2)$$

El elemento de área o densidad dP para conjuntos de puntos, según (1.1.1) es

$$dP = \operatorname{sh} \rho \, d\rho \wedge d\phi \quad (1.1.3)$$

Para medir conjuntos de rectas (geodésicos) se demuestra que la densidad invariante por movimientos vale



$$dG = \operatorname{ch} u \, du \wedge d\theta \quad (1.1.4)$$

siendo u la distancia del origen a la recta G y θ el ángulo de giro de la normal a G por el origen O . Ver Santaló [10].

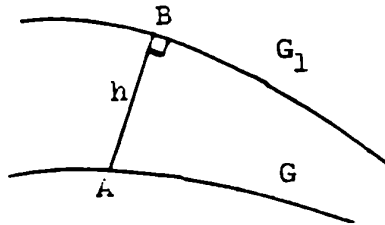
Si C es una curva de longitud L y n es el número de puntos de intersección de C con la recta G , vale

$$\int n \, dG = 2 L \quad (1.1.5)$$

donde la integral está extendida a todas las rectas del plano, siendo $n = 0$ para las que no corten a C .

Angulo de paralelismo.

Dada una recta G y un punto B que diste de ella h , se llama ángulo de paralelismo en B , al ángulo B que forma con la normal BA la recta G_1 , que es la posición límite de las secantes a G por B . Se demuestra (Ver Coxeter [2]) que



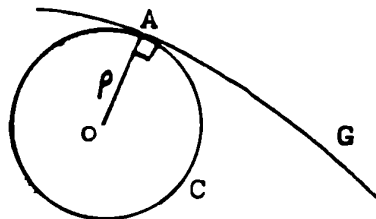
$$\operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{sh} h} \quad (1.1.6)$$

de donde

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = e^{-h} \quad (1.1.7)$$

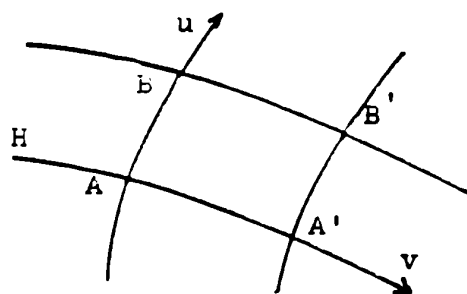
Horaciclos.

Si C es un círculo geodésico de radio ρ que es tangente en A a la recta G , cuando $\rho \rightarrow \infty$ manteniéndose fijos A y G , la posición límite de C se llama horiciclo tangente en A a la recta G .



Si se toma un sistema de coordenadas ortogonales tales que las curvas v

($u = \text{constante}$) sean horiciclos con el mismo punto impropio y las curvas u ($v = \text{constante}$) las tangentes ortogonales, el elemento de arco se escribe



$$ds^2 = du^2 + e^{2u} dv^2 \quad (1.1.8)$$

De aquí se deduce, por ejemplo, que los arcos BB' , AA' de dos horiciclos paralelos a distancia u , determinados por dos rectas normales a los mismos, cumplen la condición

$$\frac{BB'}{AA'} = e^u \quad (1.1.9)$$

La densidad para horiciclos, se demuestra que vale

$$dH = e^u du \wedge d\phi \quad (1.1.10)$$

de la cual se deduce que vale la fórmula análoga a (1.1.4)

$$\int n dH = 2 L \quad (1.1.11)$$

ver L. A. Santaló [9].

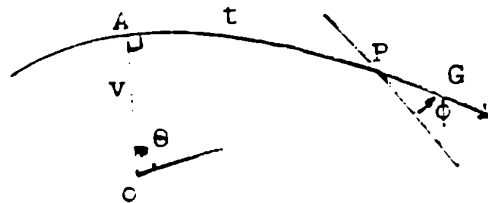
Densidad cinemática.

La densidad cinemática en el plano hiperbólico, invariante por movimientos, que sirve para medir conjuntos de figuras congruentes tiene la misma forma que en el plano euclidiano, a saber

$$dK = dP \wedge d\phi \quad (1.1.12)$$

siendo dP el elemento de área (1.1.3) y $d\phi$ el elemento de ángulo alrededor de P .

Se puede demostrar que (1.1.12) es equivalente a



$$dK = dG \wedge dt \quad (1.1.13)$$

Siendo G la recta orientada que contiene la dirección por P y t el arco de geodésica desde P al pie A de la normal por O . (Ver L. A. Santaló [10]).

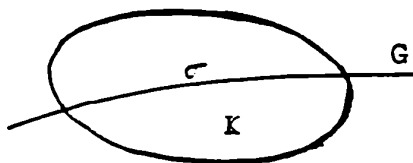
Si en lugar de la recta G que contiene al elemento (P, ϕ) , consideramos el horiciclo H que lo contiene, según (1.1.8) es $dP = e^u du \wedge dv$ y aplicando (1.1.12) resulta que también vale

$$dK = dH \wedge dv \quad (1.1.14)$$

fórmula análoga a la (1.1.13) para el caso de rectas.

2.- PRIMERAS FORMULAS INTEGRALES Y PROBLEMAS DE PROBABILIDADES GEOMETRICAS.

De (1.1.12) y (1.1.13) se deduce que



$$\int \sigma dG = \pi F \quad (1.2.1)$$

Siendo σ la longitud de la cuerda que la recta G determina en un conjunto convexo K , de área F . Si L es el perímetro de K , la medida de las rectas que lo cortan, según (1.1.4) es igual a L . Por tanto el valor medio

de σ vale

$$E(\sigma) = \frac{\pi F}{L} \quad (1.2.2)$$

Esta fórmula tiene la misma forma que para el plano euclidiano. Sin embargo, hay una diferencia esencial, para el caso de dominios convexos que tienden a cubrir todo el plano.

En efecto, suponiendo una familia $K(t)$ de dominios convexos, tal que para todo punto P del plano hay un valor t_p tal que para todo $t \geq t_p$ es $P \in K(t)$, para el plano euclidiano vale $\lim (F/L) = \infty$ y por lo tanto $E(\sigma) \rightarrow \infty$, de acuerdo con la intuición.

En cambio en el plano hiperbólico se puede demostrar que en las condiciones dichas es $\lim (F/L) = 1$. Por tanto, en el plano hiperbólico

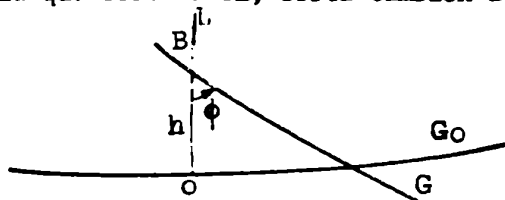
$$E(\sigma) = 1 \quad (1.2.3)$$

La demostración de que $F/L \rightarrow 1$ está en [11] para conjuntos h-convexos (convexos respecto de horiciclo) y ha sido hecha para convexos por E. Gallego Gómez [3] .

Según (1.1.10) y (1.1.11) las mismas fórmulas valen para cuerdas determinadas por horiciclos, en vez de rectas.

Vamos a aplicar los resultados anteriores a algunos problemas de probabilidades geométricas en el plano hiperbólico.

- 1.- Dado un segmento de recta OL , de longitud L y la recta G_0 perpendicular al mismo por el extremo O , se desea la probabilidad de que una recta arbitraria que corta a OL , corta también a G_0 .



La densidad de la recta G, puede expresarse $dG = \text{sen } \phi \, d\phi \cdot dh$, siendo ϕ el ángulo que forma con OL y h la abscisa del punto B de intersección (distancia a O).

Por tanto, llamando B al ángulo de paralelismo del punto B, según (1.1.6), la medida de los casos favorables es

$$\begin{aligned} 2 \int_0^L dh \int_0^B \text{sen } \phi \, d\phi &= 2 \int_0^L (1 - \cos B) \, dh = \\ &= 2 \int_0^L (1 - \text{tgh } h) \, dh = \\ &= 2L - 2 \log \text{ch } L. \end{aligned}$$

Por tanto, como la medida total de las rectas que cortan a OL es $2L$, la probabilidad buscada resulta ser

$$p = 1 - L^{-1} \log \text{ch } L \quad (1.2.4)$$

para $L \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$.

2.- Schmidt y Mattheiss en [12] demuestran que en el espacio euclidiano de n dimensiones, la probabilidad de que para N hiperplanos equidistantes del origen, dados independientemente al azar, el poliedro por ellos formados que contiene al origen, sea acotado, vale

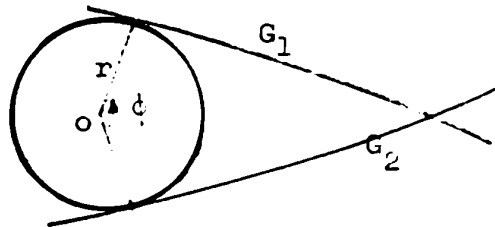
$$P_{n,N} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{N-1}{k} 2^{-N+1} \quad (1.2.5)$$

En particular, para el plano euclidiano, la probabilidad de que el triángulo formado por tres tangentes al azar que contiene al origen, sea acotado es ($n = 2, N = 3$)

$$P_{2,3} = \frac{1}{4} \quad (1.2.6)$$

Queremos tratar el mismo problema para el plano hiperbólico. Si C_r es la circunferencia de radio r , se trata de hallar la probabilidad de que el triángulo que contiene al origen O de C_r , formado por tres rectas tangentes dadas independientemente al azar, sea acotado. Como se verá esta probabilidad depende de r (lo que no ocurre en el caso euclidiano) por lo que la notaremos P_r .

Sean G_1, G_2 dos rectas tangentes a C_r y sea ϕ ($\leq \pi$) el ángulo entre las perpendiculares a dichas rectas por el centro O de C_r .



Si $\phi_r/2$ es el ángulo de paralelismo a distancia r , según (1.1.7) es $\phi_r = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{-r}$. Esto quiere decir que si $\phi > \phi_r$ las rectas G_1, G_2 no son secantes.

Dado $r > 0$, si $\phi_r < \frac{2}{3} \pi$, cualquiera que sean las posiciones de las tres tangentes el triángulo no será acotado, o sea

$$P_r = 0 \quad \text{para} \quad r > -\log \operatorname{tg} \pi/6 = 0,549306 \dots$$

Supongamos que sea $\phi_r \geq \frac{2}{3} \pi$, o sea $r < -\log \operatorname{tg} \pi/6$

la probabilidad buscada será

$$\begin{aligned}
 p_r &= \frac{1}{4\pi^2} \left[2 \int_{2\pi-2\phi_r}^{\phi_r} (x + 2\phi_r - 2\pi) dx \right] = \\
 &= \frac{(3\phi_r - 2\pi)^2}{4\pi^2}
 \end{aligned}
 \tag{1.2.7}$$

En el caso euclidiano, es $\phi_r = \pi$ y el resultado coincide con el (1.2.6).

Se puede pensar el problema de otra manera. La probabilidad p_r es la probabilidad de cubrir la circunferencia unidad con 3 arcos de longitud ϕ_r dados al azar sobre ella. Así planteado, el problema fue resuelto por W. L. Stevens (ver [10] pág. 25). De esta manera, el resultado de Stevens (que se refiere a arcos que cubren la circunferencia unidad) puede enunciarse de la siguiente manera para el plano hiperbólico:

Dadas al azar N tangentes a la circunferencia de radio r , la probabilidad de que el polígono que ellas forman, que contiene al origen, sea a-cotado vale

$$p_{r,N} = 0 \quad \text{si} \quad N \phi_r < 2\pi$$

y vale

$$p_{r,N} = 1 - \binom{N}{1} \left(1 - \frac{\phi_r}{2\pi} \right)^{N-1} + \binom{N}{2} \left(1 - \frac{2\phi_r}{2\pi} \right)^{N-1} + \dots + (-1)^h \binom{N}{h} \left(1 - \frac{h\phi_r}{2\pi} \right)^{N-1}$$

si $N\phi_r \geq 2\pi$, siendo ϕ_r el ángulo de paralelismo a distancia r y h el mayor entero tal que $h\phi_r \leq 2\pi$

Para $\phi_r = \pi$ se tiene que $p_{r,N} = 1 - N \left(\frac{1}{2} \right)^{N-1}$ de acuerdo con (1.2.5)

Para $N = 3$, resulta

$$p_{r,3} = 1 - 3 \left[1 - \frac{\phi_r}{2\pi} \right]^2 + \binom{3}{2} \left[1 - \frac{\phi_r}{\pi} \right]^2 = \frac{(3\phi_r - 2\pi)^2}{4\pi^2}$$

de acuerdo con (1.2.7).

3.- Dado un dominio convexo K , la probabilidad de que dos rectas que cortan a K dadas al azar de manera independiente, se cortan en el interior de K vale $p_1 = \frac{2\pi F}{L^2}$.

En efecto aplicando (1.1.5), la medida de los casos favorables es

$$\int_{G_1 \cap G_2 \in K} dG_1 dG_2 = 2 \int_{G_1 \uparrow K} \sigma_1 dG_1 = 2\pi F \quad (1.2.8)$$

y como la medida total de los pares de rectas G_1, G_2 que cortan a K vale L^2 , resulta lo enunciado. Indicamos $G \neq K$, como es costumbre, que la recta G corta al convexo K .

Si K tiende a cubrir todo el plano, puesto que $F/L \rightarrow 1$, resulta que $p_1 \rightarrow 0$

Por otra parte queremos calcular la probabilidad de que las rectas se corten fuera de K . Se sabe que $dG_1 \wedge dG_2 = \text{sen } |\phi_1 - \phi_2| d\phi_1 \wedge d\phi_2 \wedge dP$ siendo $P = G_1 \cap G_2$ y ϕ_1 y ϕ_2 los ángulos que forman G_1 y G_2 con una dirección fija en P .

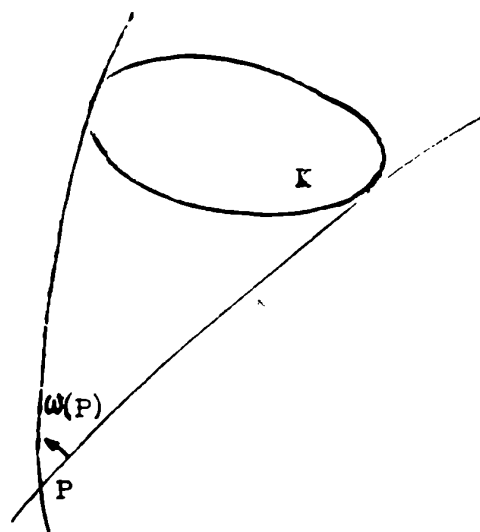
Por tanto, la medida de los casos favorables es

$$I = \int_{P \notin K} dG_1 \wedge dG_2 = \int_{P \notin K} dG \int \text{sen } |\phi_1 - \phi_2| d\phi_1 \wedge d\phi_2 =$$

(1.2.9)

$$= \int_{P \notin K} 2 [\omega(P) - \text{sen } \omega(P)] dP.$$

siendo $\omega(P) = |\theta_2 - \theta_1|$



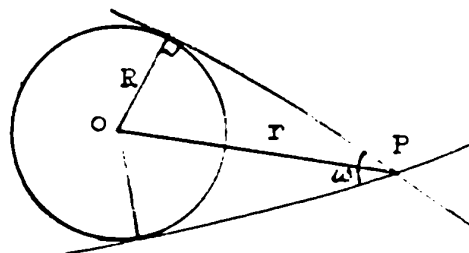
De manera que la probabilidad buscada será

$$p_2 = \frac{2}{L^2} \int_{P \notin K} (\omega(P) - \text{sen } \omega(P)) dP \quad (1.2.10)$$

Así de (1.2.8) y (1.2.10) se obtiene que la probabilidad de que dos rectas dadas al azar y de manera independiente que intesequen a un convexo K sean rectas secantes es

$$p_2 = 1 - \frac{2}{L^2} \left[\pi F + \int (\omega(P) - \text{sen } \omega(P)) dP \right] \quad (1.2.11)$$

Como la integral (1.2.9) no parece que tenga una expresión simple para un K en general, vamos a calcular para un círculo de radio R.



Es inmediato que $\text{sen } \frac{\omega}{2} = \frac{\text{sen } R}{\text{sh}(r+R)}$ y que

$$\frac{2 \text{ sh } R (\text{ch}^2 (r+R) - \text{ch}^2 R)^{1/2}}{\text{sh}^2 (R+r)} = \text{sen } \omega$$

Por tanto considerando como origen de coordenadas al centro del círculo y usando que $dP = \text{sh } r dr$, da obtenemos que la medida de los casos favorable cuando K es un círculo de radio R es:

$$8\pi \left[\int_R^{\infty} \arcsen \frac{\operatorname{sh} R}{\operatorname{sh}(r+R)} \operatorname{shr} dr - \int_R^{\infty} \frac{(\operatorname{ch}^2(r+R) - \operatorname{ch}^2 R)^{1/2}}{\operatorname{sh}^2(r+R)} \operatorname{shr} \operatorname{sh} R dr \right]$$

(1.2.12)

De modo que siendo:

$$\begin{aligned} & \int \arcsen \left(\frac{\operatorname{sh} R}{\operatorname{sh}(r+R)} \right) \operatorname{sh} r dr = \\ & = \operatorname{sh} R \operatorname{ch} R \operatorname{arg} \operatorname{cth} \left[\frac{\operatorname{ch}(r+R)}{(\operatorname{sh}^2(r+R) - \operatorname{sh}^2 R)^{1/2}} \right] - \\ & - \operatorname{ch} R \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\operatorname{sh} R \operatorname{ch}(r+R)}{(\operatorname{sh}^2(r+R) - \operatorname{sh}^2 R)^{1/2}} \right] + \\ & + \operatorname{ch} R \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left[\frac{\operatorname{sh} R}{\operatorname{shr}(r+R)} \right] - \\ & - \operatorname{sh}^2 R \operatorname{arg} \operatorname{ch} \left[\frac{\operatorname{sh}(r+R)}{\operatorname{sh} R} \right] \end{aligned}$$

(1.2.13)

y

$$\int \frac{[\text{ch}^2(r+R) - \text{ch}^2 R]^{1/2}}{\text{sh}^2(r+R)} \text{shr ShR} \, dr =$$

$$= \text{shR} \cdot \text{chR} \operatorname{arg th} \left[\frac{(\text{sh}^2(r+R) - \text{sh}^2 R)^{1/2}}{\text{ch}(r+R)} \right] +$$

$$+ \frac{\text{sh}^2 R [\text{sh}^2(r+R) - \text{sh}^2 R]^{1/2}}{\text{sh}(r+R)} -$$

(1.2.14)

$$- \text{sh}^2 R \operatorname{chR} \operatorname{arc tg} \left[\frac{(\text{sh}^2(r+R) - \text{sh}^2 R)^{1/2}}{\text{shR} \operatorname{ch}(r+R)} \right] -$$

$$- \text{sh}^2 R \operatorname{arg ch} \left[\frac{\operatorname{sh}(r+R)}{\operatorname{sh} R} \right]$$

resulta que la medida buscada es

$$8 \pi \left[\frac{\operatorname{sh} R}{\operatorname{ch} R + \operatorname{sh} R} + \text{sh}^2 R \left(\frac{(4 \operatorname{ch}^2 R - 1)^{1/2}}{2 \operatorname{ch} R} - 1 \right) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{ch} R \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2 \operatorname{ch} R} \right) + \operatorname{ch} R \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{sh} R) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\operatorname{ch} 2R}{(4 \operatorname{ch}^2 R - 1)^{1/2}} \right] \right] + \right.$$

$$\left. + \text{sh}^2 R \operatorname{ch} R \left[\operatorname{arg} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} R} \right) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{(4 \operatorname{ch}^2 R - 1)^{1/2}}{\operatorname{ch} 2R} \right) \right] \right]. \quad (1.2.15)$$

De donde, siendo $L^2 = 4\pi^2 \operatorname{sh}^2 R$, obtenemos que la probabilidad vale

$$\begin{aligned}
 p_2 = & \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\operatorname{sh}R(\operatorname{ch}R+\operatorname{sh}R)} + \frac{(4\operatorname{ch}^2R - 1)^{1/2}}{2 \operatorname{ch} R} - 1 - \right. \\
 & - \frac{\operatorname{ch}R}{\operatorname{sh}^2R} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2 \operatorname{ch}R} \right) + \frac{\operatorname{ch}R}{\operatorname{sh}^2R} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sh}R) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{ch} 2 R}{(4 \operatorname{ch}^2R - 1)^{1/2}} \right) \right] + \\
 & \left. + \operatorname{ch}R \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}R} \right) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{(4 \operatorname{ch}^2R - 1)^{1/2}}{\operatorname{ch} 2 R} \right) \right] \right] - \quad (1.2.16)
 \end{aligned}$$

Si $R \rightarrow \infty$, es decir si el círculo tiende a cubrir todo el plano, de (1.2.16) resulta que $p_2 \rightarrow 0$. Como se vio que también $p_1 \rightarrow 0$ resulta que la probabilidad de que las rectas sean secantes (1.2.11) $p_3 \rightarrow 1$ cuando $R \rightarrow \infty$.

3.- FORMULAS INTEGRADAS SOBRE CUERDAS Y DISTANCIAS MEDIAS.

Sean dos puntos P_1, P_2 del plano hiperbólico. Ellos pueden determinarse por la recta que los une y sus abscisas t_1, t_2 sobre G .

Se sabe entonces que vale la fórmula diferencial

$$dP_1 \wedge dP_2 = \operatorname{sh} |t_2 - t_1| dt_1 \wedge dt_2 \wedge dG \quad (1.3.1)$$

(ver [10] pág. 316)

Poniendo $|t_2 - t_1| = r =$ distancia entre P_1 y P_2 , de (1.3.1) se deduce

$$\operatorname{sh}^{m-1} r dP_1 \wedge dP_2 = \operatorname{sh}^m |t_2 - t_1| dt_1 \wedge dt_2 \wedge dG_2 \quad (1.3.2)$$

Si σ es la longitud de la cuerda que G determina en un dominio convexo K , tendremos así:

$$\int_{P_i \in K} \text{sh}^{m-1}(r) dP_1 \wedge dP_2 = \int_{G+K} dG \int_0^\sigma \int_0^\sigma \text{sh}^m(t_2 - t_1) dt_1 \wedge dt_2 \quad (1.3.3)$$

Para aplicar esta fórmula debemos calcular la integral:

$$\phi_m(\sigma) = \int_0^\sigma \int_0^\sigma \text{sh}^m |t_2 - t_1| dt_1 \wedge dt_2 \quad (1.3.4)$$

resultando

$$\begin{aligned} \phi_m = \frac{2}{m^2} \text{sh}^m \sigma + \frac{2}{m} \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} (-1)^j \frac{(m-1)\dots(m+1-2j)}{(m-2)(m-4)\dots(m-2j)^2} \text{sh}^{m-2j} \sigma + \\ + \frac{(m-1)(m-3)\dots 1}{m(m-2)\dots 2} (-1)^{\frac{m}{2}} \sigma^2 \quad \text{para } m \text{ par} \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

y

$$\begin{aligned} \phi_m = \frac{2}{m^2} \text{sh}^m \sigma + \frac{2}{m} \sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^j \frac{(m-1)(m-3)\dots(m+1-2j)}{(m-2)(m-4)\dots(m-2j)} \text{sh}^{m-2j} \sigma + \\ + 2 \frac{(m-1)\dots 2}{m(m-2)\dots 1} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sigma, \quad \text{para } m \text{ impar } (m \neq 1) \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Para $m = 1$ vale

$$\phi_1 = 2 (\text{sh } \sigma - \sigma) \quad (1.3.7)$$

Aplicando (1.3.5) y (1.3.6) resultan

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \frac{1}{2} (\text{sh}^2 \sigma - \sigma^2) \\ \phi_3 &= \frac{2}{9} (\text{sh}^3 \sigma - 6 \text{sh} \sigma + 6 \sigma) \\ \phi_4 &= \frac{1}{8} (\text{sh}^4 \sigma - 3 \text{sh}^2 \sigma + 3 \sigma^2)\end{aligned}\tag{1.3.8}$$

Con estos resultados, de (1.3.3) se deducen las siguientes fórmulas integrales:

a) Para $m=0$ se obtiene

$$\int_{P_i \in K} \frac{dP_1 dP_2}{\text{sh } r} = \int_{G+K} \sigma^2 dG\tag{1.3.9}$$

b) Para $m=1$

$$\int_{G+K} (\text{sh } \sigma - \sigma) dG = \frac{1}{2} F^2\tag{1.3.10}$$

y, recordando (1.2.1) resulta también

$$\int_{G+K} \text{sh } \sigma dG = \pi F + \frac{1}{2} F^2\tag{1.3.11}$$

c) Para $m=2$

$$\int_{P_i \in K} \text{sh } r dP_1 dP_2 = \frac{1}{2} \int_{G+K} (\text{sh}^2 \sigma - \sigma^2) dG\tag{1.3.12}$$

d) Para $m=3$

$$\int_{P_i \in K} \text{sh}^2 r \, dP_1 \, dP_2 = \frac{2}{9} \int_{G+K} (\text{sh}^3 \sigma - 6 \text{sh} \sigma + 6 \sigma) \, dG \quad (1.3.13)$$

o sea, teniendo en cuenta (1.3.10)

$$\int_{P_i \in K} \text{sh}^2 r \, dP_1 \, dP_2 = \frac{2}{9} \int_{G+K} \text{sh}^3 \sigma \, dG - \frac{2}{3} F^2 \quad (1.3.14)$$

e) Para $m=4$

$$\int_{P_i \in K} \text{sh}^3 r \, dP_1 \, dP_2 = \frac{1}{8} \int_{G+K} (\text{sh}^4 \sigma - 3 \text{sh}^2 \sigma + 3 \sigma^2) \, dG \quad (1.3.15)$$

lo que, junto con (1.3.12), resulta:

$$\int_{G+K} \text{sh}^4 \sigma \, dG = 2 \int_{P_i \in K} (4 \text{sh}^3 r + 3 \text{sh} r) \, dP_1 \, dP_2 \quad (1.3.16)$$

observando que:

$$\int_0^\sigma \int_0^\sigma |t_1 - t_2| \text{sh} |t_1 - t_2| \, dt_1 \, dt_2 = 4 - \text{ch} \sigma + 2\sigma \text{sh} \sigma$$

resulta también

$$\int_{P_i \in K} r \, dP_1 \, dP_2 = 4 L - \int_{G+K} (4 \text{ch} \sigma - \sigma \text{sh} \sigma) \, dG \quad (1.3.17)$$

de manera que la distancia media $E(r)$ entre dos puntos de K se puede expresar en la forma:

$$\begin{aligned}
 E(r) &= \frac{1}{F^2} \int_{P_i \in K} r \, dP_1 \, dP_2 = \\
 &= 4 \frac{L}{F^2} - \frac{1}{F^2} \int_{G+K} (4 \operatorname{ch} \sigma - \sigma \operatorname{sh} \sigma) \, dG . \quad (1.3.18)
 \end{aligned}$$

La integral del cuadrado de las cuerdas.

Dado un dominio convexo K , en muchas ocasiones aparece la integral de los cuadrados de las cuerdas que una recta G determina en K .

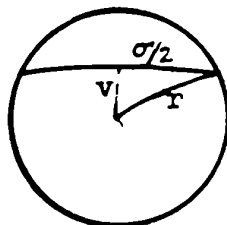
Hemos visto (1.3.9) que esta integral se puede escribir

$$I_2(K) = \int_{G+K} \sigma^2 \, dG = \int_{P_i \in K} \frac{dP_1 \, dP_2}{\operatorname{sh} r} \quad (1.3.19)$$

siendo r la distancia entre los puntos P_1 y P_2 .

Este invariante $I_2(K)$ es una característica de K que no admite ser expresado en función de L , F . Para cada K hay que calcularla.

Si K es un círculo de radio r , siendo



$$\operatorname{ch} \frac{\sigma}{2} = \frac{\operatorname{ch} r}{\operatorname{ch} v}$$

resulta .

$$I_2(C) = 8\pi \int_0^r (\text{arc ch } \frac{\text{ch } r}{\text{ch } v})^2 \text{ch } v \, dv.$$

O bien, por el cambio de variable $\text{ch } \theta = \frac{\text{ch } r}{\text{ch } v}$

$$I_2(C) = 8\pi \text{ch}^2 r \int_0^{\theta^r} \frac{\text{sh } \theta}{\text{ch}^2 \theta \sqrt{\text{ch}^2 r - \text{ch}^2 \theta}} \, d\theta .$$

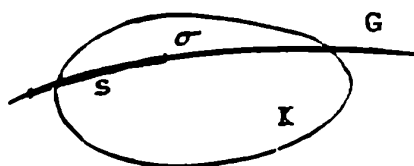
Por el cambio de variables $\text{ch } \theta = \lambda \text{ch } r$, se puede escribir también en la forma:

$$I_2(C) = 8\pi \int_{1/\text{ch } r}^1 \frac{(\text{arc ch } (\lambda \text{ch } r))^2}{\lambda^2 \sqrt{1 - \lambda^2}} \, d\lambda .$$

4. Medida de conjuntos de segmentos de recta que cortan o están contenidos en un dominio convexo.

Sea K un dominio convexo del plano hiperbólico y S un segmento de recta de longitud a . Para medir conjuntos de segmentos congruentes, se toma la densidad cinemática en sus formas equivalentes (1.1.12) y (1.1.13).

La medida del conjunto de segmentos que tienen punto común en K , tomando la expresión (1.1.13), resulta ser



$$\int_{S+K} dS = \int_{S+K} d\tau \cdot d\vec{G} = \int_{S+K} (\sigma+a) \, d\vec{G} \quad (1.4.1)$$

aplicando (1.2.1) y (1.1.4) resulta, teniendo en cuenta que consideramos segmentos no orientados pero que en (1.4.1) G es orientada:

$$m(S; S \neq \phi) = \int_{S+K} dS = 2\pi F + 2aL \quad (1.4.2)$$

siendo, como siempre, F el área y L el perímetro de K .

Llamando m_0 a la medida de los segmentos S totalmente contenidos en K , m_1 a la medida de los que tienen un sólo punto en común con el contorno ∂K y m_2 a la medida de los que cortan a ∂K en dos puntos, la última igualdad se escribe

$$m_0 + m_1 + m_2 = 2\pi F + 2aL \quad (1.4.3)$$

Por otra parte, aplicando la fórmula de Poincaré (ver [10], pág. 323) vale también

$$m_1 + 2m_2 = 4aL \quad (1.4.4)$$

Tenemos dos ecuaciones, (1.4.3) y (1.4.4), para hallar m_0, m_1 y m_2 . Si se puede medir directamente alguna de ellas, entonces (1.4.3) y (1.4.4) darán las otras de manera simple.

Estas medidas m_i dependen de la fórmula del dominio convexo K . Para el caso en que K es el círculo de radio R , se puede hallar explícitamente la medida m_0 .

Calculemos $m_0 = \int_{S \subset C} dS$, siendo C el círculo de radio R y S un segmento de longitud a .

Sea G la recta que contiene al segmento S y sea σ la longitud de la cuerda $G \cap C$. Consideremos la expresión de la densidad cinemática (1.1.13) y tomemos al centro O del círculo C como origen de coordenadas polares geodésicas (v, θ) , de modo que $dG = ch v dv d\theta$ como en (1.1.4).

Por otra parte vale que

$$\sigma = 2 \operatorname{arg} \operatorname{ch} \left(\frac{\operatorname{ch} R}{\operatorname{ch} r} \right)$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{2} &= \int_{\sigma \geq a} dG \int_0^{\sigma-a} dt = \int_{a \leq \sigma \leq 2R} (\sigma-a) dG = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{v_a} (2 \operatorname{arg} \operatorname{ch} \left(\frac{\operatorname{ch} R}{\operatorname{ch} r} \right) - a) \operatorname{ch} v \, dv \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

donde v_a es el valor de v cuando σ es igual a a y se obtiene $\frac{m_0}{2}$ pues \vec{G} es orientada.

$$v_a = \operatorname{arg} \operatorname{ch} \left(\frac{\operatorname{ch} R}{\operatorname{ch} \frac{a}{2}} \right) = \operatorname{arg} \operatorname{sh} \left[\frac{(\operatorname{ch}^2 R - \operatorname{ch}^2 a/2)^{1/2}}{\operatorname{ch} a/2} \right]$$

$$\text{Así } m_0 = 4\pi \left[\int_0^{v_a} 2 \operatorname{arg} \operatorname{ch} \left(\frac{\operatorname{ch} R}{\operatorname{ch} r} \right) \operatorname{ch} v \, dv - a \int_0^{v_a} \operatorname{ch} v \, dv \right] =$$

$$= 8\pi \left[\operatorname{sh} v \ln \left[\frac{\operatorname{ch} R + (\operatorname{ch}^2 R - \operatorname{ch}^2 v)^{1/2}}{\operatorname{ch} v} \right] + \operatorname{ch} R \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\operatorname{sh} v}{(\operatorname{ch}^2 R - \operatorname{ch}^2 v)^{1/2}} \right] - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{ch} R \operatorname{sh} v}{(\operatorname{ch}^2 R - \operatorname{ch}^2 v)^{1/2}} \right) \right] \Big|_0^{v_a} - a \operatorname{sh} v_a =$$

$$= 8\pi \left(\operatorname{ch} R \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{(\operatorname{ch}^2 R - \operatorname{ch}^2 a/2)^{1/2}}{\operatorname{ch} R \operatorname{sh} a/2} \right) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{(\operatorname{ch}^2 R - \operatorname{ch}^2 a/2)^{1/2}}{\operatorname{sh} a/2} \right) \right).$$

Usando las identidades

$$\operatorname{arc\,tg} \left[\frac{(\operatorname{ch}^2 R - \operatorname{ch}^2 a/2)^{1/2}}{\operatorname{ch} R \operatorname{sh} a/2} \right] = \pi/2 - \operatorname{arc\,sen} \frac{\operatorname{th} a/2}{\operatorname{th} R}$$

$$\operatorname{arc\,tg} \left[\frac{(\operatorname{ch}^2 R - \operatorname{ch}^2 a/2)^{1/2}}{\operatorname{sh} a/2} \right] = \pi/2 - \operatorname{arc\,sen} \frac{\operatorname{sh} a/2}{\operatorname{sh} R}$$

resulta finalmente

$$m_0 = 8\pi \left[\frac{\pi}{2} (\operatorname{ch} R - 1) + \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\operatorname{sh} a/2}{\operatorname{sh} R} \right) - \operatorname{ch} R \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\operatorname{th} a/2}{\operatorname{th} R} \right) \right] \quad (1.4.6)$$

Así de (1.4.1) y (1.4.2) resultan

$$m_1 = 8\pi \left[2 \operatorname{ch} R \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\operatorname{th} a/2}{\operatorname{th} R} \right) - \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{a}{2}}{\operatorname{sh} R} \right) \right] \quad (1.4.7)$$

y

$$m_2 = 8\pi \left[\frac{a}{2} \operatorname{sh} R + \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{a}{2}}{\operatorname{sh} R} \right) - \operatorname{ch} R \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\operatorname{th} \frac{a}{2}}{\operatorname{th} R} \right) \right] \quad (1.4.8)$$

Consideremos ahora los límites de los cocientes $\frac{m_i(R)}{F(R)}$ ($i=0,1,2$) cuando $R \rightarrow \infty$ siendo $F(R)$ el área del círculo de radio R , o sea $F(R) = 2\pi (\operatorname{ch} R - 1)$.

Es conocido que en el caso euclidiano tanto m_1/F como m_2/F tienden a cero cuando $R \rightarrow \infty$. Esto no ocurre en el caso hiperbólico, donde los límites dependen de la longitud del segmento S . En efecto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{m_0}{F} = 2\pi - 4 \operatorname{arc} \operatorname{sen} (\operatorname{th} a/2)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{m_1}{F} = 8 \operatorname{arc} \operatorname{sen} (\operatorname{th} a/2) \quad (1.4.9)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{m_2}{F} = 2a - 4 \operatorname{arc} \operatorname{sen} (\operatorname{th} a/2)$$

Esto es importante, pues hace ver que para el plano hiperbólico el "efecto de contorno" cuando se quiere pasar de una figura acotada a todo el plano, influye mucho, lo que no ocurre en el caso euclidiano en que dicho efecto es despreciable.

Podemos notar también, que si para cualquier dominio convexo K , representamos por m^* a la medida de los segmentos orientados S cuyo origen O es interior a K , vale $m^* = 2\pi F$. Por tanto, para una familia de dominios convexos que tienden a cubrir todo el plano, como $L/F \rightarrow 1$, según (1.4.2) resulta

$$\lim \frac{m}{m^*} = 1 + \frac{a}{\pi} \quad (1.4.10)$$

Para el plano euclidiano es $\lim \frac{m}{m^*} = 1$.

CAPITULO II

1.- PROCESO DE POISSON DE RECTAS EN EL PLANO HIPERBOLICO.

Los procesos de Poisson de rectas en el plano euclidiano han sido estudiados por R.E. Miles [6] y en el plano hiperbólico por Santaló-Yañez [11] . Vamos a recordar brevemente en que consiste en este último caso.

Sea K_0 un dominio convexo del plano hiperbólico de área F_0 y perímetro L_0 . Sea $K \subset K_0$ un dominio convexo de área F y perímetro L . Dada al azar una recta G que corta a K_0 , la probabilidad de que corte a K (medida con la densidad (1.1.4)), vale $p = L/L_0$, puesto que la medida de las rectas que cortan a un dominio convexo es igual a su perímetro.

Sean ahora n rectas G_i ($1 \leq i \leq n$) dadas al azar, que cortan a K_0 . La probabilidad de que exactamente m de ellas corten a K , será (ley binomial)

$$P_m^* = \binom{n}{m} \left(\frac{L}{L_0} \right)^m \left(1 - \frac{L}{L_0} \right)^{n-m}$$

Consideremos una familia $K_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, de dominios convexos tal que $K_0(t_1) \subset K_0(t_2)$ si $t_1 < t_2$ y para todo punto P del plano existe t_p tal que si $t > t_p$, entonces $P \in K_0(t)$. Es decir, $K_0(t)$ se expande hasta cubrir todo el plano cuando $t \rightarrow \infty$. Si al mismo tiempo, el número $n = n(t)$ de rectas al azar (independientes) que cortan a K_0 tiende también a ∞ de modo tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n}{L_0} = \lambda \tag{2.1.1}$$

siendo λ una constante positiva, entonces la probabilidad de que exactamente m rectas corten a K , resulta

$$P_m = \lim_{t \rightarrow \infty} P_m^* = \frac{(\lambda L)^m}{m!} e^{-\lambda L} \quad (2.1.2)$$

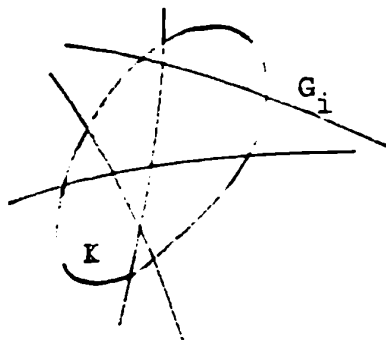
Este es la clásica ley de probabilidad de Poisson. Se dice entonces que se tiene sobre el plano un proceso de Poisson de rectas de intensidad λ .

Es sabido que los momentos sucesivos de esta ley de probabilidad son:

$$\begin{aligned} E(m) &= \lambda L \\ E(m^2) &= \lambda L + (\lambda L)^2 \\ E(m^3) &= \lambda L + 3(\lambda L)^2 + (\lambda L)^3 \\ E(m^4) &= \lambda L + 7(\lambda L)^2 + 6(\lambda L)^3 + (\lambda L)^4 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

2.- DOMINIO CONVEXO CORTADO POR RECTAS AL AZAR: VALORES MEDIOS DE PRIMER ORDEN.

Supongamos el dominio convexo K cortado por m rectas G_i ($i=1,2,\dots,m$) dadas independientemente al azar



a) Si σ_i es la longitud de la cuerda que G_i determina en K , y representamos por S a la suma de todas las σ_i , será

$$\int_{G_i \uparrow K} S \, dG_1 \dots dG_m = m L^{m-1} \int_{G_i \uparrow K} \sigma_i \, dG_i = m \pi F \cdot L^{m-1}$$

donde hemos aplicado (1.2.1). Por lo tanto

$$E(S/m) = m \frac{\pi F}{L} \quad (2.2.1)$$

b) Si N es el número de puntos de intersección de las m rectas G_i que son -- interiores a K , se sabe, (ver [11] , pág. 147) que

$$E(N/m) = m(m-1) \frac{\pi F}{L^2} \quad (2.2.2)$$

c) Si a es el número de arcos o lados de los polígonos en que las m rectas -- dividen a K , es claro que $a = 2N + 3m$, y por lo tanto

$$E(a/m) = 2m(m-1) \frac{\pi F}{L^2} + 3m \quad (2.2.3)$$

Si M es el número de arcos contenidos en el interior de K es $M = 2N + m$ y por lo tanto

$$E(M/m) = 2m(m-1) \frac{\pi F}{L^2} + m \quad (2.2.4)$$

d) Si c es el número de polígonos en que las m rectas cortan a K , la fórmula de Euler nos dice que vértices - aristas + caras = 1, y como el número total de vértices es $N + 2m$, resulta $c = 1 - N - 2m + a = 1 + N + m$ y por lo tanto

$$E(c/m) = m(m-1) \frac{\pi F}{L^2} + m + 1 \quad (2.2.5)$$

3.- VALORES MEDIOS DE SEGUNDO ORDEN

Supongamos, como en el caso anterior, un dominio convexo K , de área F y perímetro L , cortado por m rectas dadas al azar independientemente.

a) Llamando S la suma de las longitudes de las cuerdas se tiene

$$\int S^2 dG_1 \dots dG_m = \int \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 dG_1 \dots dG_m + 2 \int \sum_{j < k} \sigma_j \sigma_k dG_1 \dots dG_m$$

$$= m L^{m-1} \int_{G+K} \sigma^2 dG + 2 L^{m-2} \binom{m}{2} \int \sigma_j dG_j \int \sigma_k dG_k$$

Recordando que $\int \sigma dG = \pi F$ e introduciendo la notación

$$I_2 = \int_{G+K} \sigma^2 dG \quad (2.3.1)$$

que ya fué considerada en (1.3.19), resulta

$$\int S^2 dG_1 \dots dG_m = m L^{m-1} I_2 + 2 \binom{m}{2} L^{m-2} \pi^2 F^2$$

Dividiendo por $\int dG_1 \dots dG_m = L^m$, resulta

$$E(S^2/m) = m \frac{I_2}{L} + m(m-1) \frac{\pi^2 F^2}{L^2} \quad (2.3.2)$$

b) En Santaló-Yañez [11] se encuentra calculado el valor medio

$$E(N^2/m) = \pi m(m-1) \frac{F}{L^2} + 24\pi^2 \binom{m}{4} \frac{F^2}{L^4} + 24 \binom{m}{3} \frac{I_2}{L^3} \quad (2.3.3)$$

c) Queremos calcular E (N.S/m). Poniendo $\delta_{ij} = 1$ si G_i, G_j se cortan interiormente a K y $\delta_{ij} = 0$ en el caso contrario, tenemos

$$\int N.S \, dG_1 \dots dG_m = \int \left(\sum_{i < j} \delta_{ij} \right) \left(\sum_{h=1}^m \sigma_h \right) dG_1 \dots dG_m =$$

$$= 3 \binom{m}{3} L^{m-3} \int \delta_{ij} \sigma_h \, dG_i \, dG_j \, dG_h +$$

$$+ 2 \binom{m}{2} L^{m-2} \int \delta_{ij} \sigma_j \, dG_i \, dG_j =$$

$$= 3 \binom{m}{3} L^{m-3} 2 \int \sigma_i \, dG_i \int \sigma_h \, dG_h +$$

$$+ 2 \binom{m}{2} L^{m-2} 2 \int \sigma^2 \, dG =$$

$$= 6 \binom{m}{3} L^{m-3} \pi^2 F^2 + 2m(m-1) L^{m-2} I_2$$

de donde

$$E (NS/m) = 6 \binom{m}{3} \frac{\pi^2 F^2}{L^3} + 2m(m-1) \frac{I_2}{L^2} \quad (2.3.4)$$

d) A partir de los valores (2.2.1) y (2.2.2) resulta inmediatamente

$$E(m.S/m) = m^2 \frac{\pi F}{L} \quad ; \quad E(m N/m) = \frac{m^2 (m-1) \pi F}{L^2} \quad (2.3.5)$$

4.- DOMINIO CONVEXO DIVIDIDO POR UN PROCESO DE RECTAS DE POISSON.

Sea un dominio convexo K colocado en el plano hiperbólico donde actúa un proceso de Poisson de intensidad λ . Con el dominio K quedará determinado un conjunto de variables aleatorias (m,S,N,a,C) cuyos momentos de primero y segundo orden queremos determinar. Utilizando las igualdades (2.1.3) y la relación fundamental

$$E(X) = E(E(X/m)) \quad (2.4.1)$$

de (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) y (2.2.4)

se deduce

$$E(S) = \frac{\pi F}{F} \quad E(m) = \lambda \pi F$$

$$E(N) = \frac{\pi F}{L^2} \left[E(m^2) - E(m) \right] = \lambda^2 \pi F \quad (2.4.2)$$

$$E(a) = 2 \lambda^2 \pi F + 3 \lambda L$$

$$E(M) = 2 \lambda^2 \pi F + \lambda L$$

Análogamente de (2.3.5) se deducen

$$E (m.N) = 2 \lambda^2 \pi F + \lambda^3 \pi FL \quad (2.4.3)$$

$$E (m.S) = \lambda \pi F + \lambda^2 \pi FL$$

De (2.3.2), (2.3.3) y (2.3.4) se deduce

$$E (N^2) = \lambda^2 F \pi + 4 \lambda^3 I_2 + \lambda^4 \pi^2 F^2$$

$$E (S^2) = \lambda I_2 + \lambda^2 \pi^2 F^2 \quad (2.4.4)$$

$$E (N.S) = 2 \lambda^2 I_2 + \lambda^3 \pi^2 F^2$$

5.- LAS RELACIONES DE COWAN PARA EL PLANO HIPERBOLICO.

Para el plano euclidiano Cowan [1] dió un cuadro con los momentos de primero y segundo orden para las variables C,M,N,S y m que un proceso de Poisson de intensidad λ determinan sobre un círculo dado. Nosotros vamos a generalizar sus resultados al plano hiperbólico, y para un dominio convexo cualquiera, no sólo para el círculo.

El cuadro que queremos demostrar es el siguiente

CUADRO I: Valores medios de primer y segundo orden para un dominio convexo de plano hiperbólico.

C	$1+3\lambda L+\lambda^2(L^2+7\pi F) +$ $+\lambda^3(4I_2+2\pi FL) +$ $+ \lambda^4 \pi^2 F^2$				
M	$2\lambda L+\lambda^2(L^2+10\pi F) +$ $+\lambda^3(3\pi FL+8I_2) +$ $+ 2\lambda^4 \pi^2 F^2$	$\lambda L+\lambda^2(L^2+12\pi F) +$ $+\lambda^3(16I_2+4\pi FL) +$ $+ 4\lambda^4 \pi^2 F^2$			
N	$4\lambda^2\pi F+\lambda^3(\pi FL+4I_2) +$ $+ \lambda^4 \pi^2 F^2$	$4 \lambda^2\pi F+\lambda^3(\pi FL+8I_2) +$ $+ 2\lambda^4 \pi^2 F^2$	$\lambda^2\pi F+4\lambda^3I_2+\lambda^4 \pi^2 F^2$		
S	$2\lambda\pi F+\lambda^2(\pi FL+2I_2) +$ $+ \lambda^3 \pi^2 F^2$	$\lambda\pi F+\lambda^2(\pi FL+4I_2) +$ $+ 2\lambda^3 \pi^2 F^2$	$2\lambda^2I_2+\lambda^3 \pi^2 F^2$	$\lambda I_2+\lambda^2\pi^2 F^2$	
m	$2\lambda L+\lambda^2(L^2+2\pi F) +$ $+ \lambda^3 \pi FL$	$\lambda L+\lambda^2(L^2+4\pi F)+2\lambda^3\pi FL$	$2\lambda^2\pi F+\lambda^3\pi FL$	$\lambda\pi F+\lambda^2\pi FL$	$\lambda L+\lambda^2L^2$
i	$1+\lambda L+\lambda^2\pi F$	$\lambda L+2\lambda^2\pi F$	$\lambda^2\pi F$	$\lambda\pi F$	λL
	C	M	N	S	m

Vemos, uno por uno, los valores indicados en el cuadro:

1. E (C^2). Para obtener (2.2.5) vimos que el número de caras es: $C = 1 + N + m$ por lo tanto

$$C^2 = 1 + N^2 + m^2 + 2N + 2m + 2m N$$

aplicando (2.1.3), (2.4.2), (2.4.3) y (2.4.4) resulta

$$E(C^2) = 1 + 3 \lambda L + \lambda^2 (7 \pi F + L^2) + \lambda^3 (4I_2 + 2 \pi FL) + \lambda^4 \pi^2 F^2$$

2. E (C.M). Siendo $C = 1 + N + m$ y $M = 2N + m$ resulta

$$CM = 2N + m + 2N^2 + 3m N + m^2, \text{ y por lo tanto}$$

$$E(CM) = 2 \lambda L + \lambda^2 (10 \pi F + L^2) + \lambda^3 (3 \pi FL + 8I_2) + 2 \lambda^4 \pi^2 F^2$$

3. E (C.N). Siendo $CN = N + N^2 + m N$ se tiene que

$$E(CN) = 4 \lambda^2 \pi F + \lambda^3 \left[\pi FL + 4I_2 \right] + \lambda^4 \pi^2 F^2$$

4. E (C.S.). Como $CS = S + NS + mS$, de (2.4.2), (2.4.3), (2.4.4) se obtiene

$$E(C.S) = 2 \lambda \pi F + \lambda^2 \left[\pi FL + 2I_2 \right] + \lambda^3 \pi^2 F^2$$

5. E (C.m). Siendo $Cm = m + m N + m^2$, resultará de (2.1.3) y (2.4.3)

$$E(Cm) = 2 \lambda L + \lambda^2 \left[2\pi F + L^2 \right] + \lambda^3 \pi FL$$

6. E (M^2). Siendo $M = 2N + m$ entonces $M^2 = 4N^2 + m^2 + 4Nm$ y por lo tanto de (2.1.3), (2.4.3) y (2.4.4) se tiene

$$E(M^2) = \lambda L + \lambda^2 \left[12\pi F + L^2 \right] + \lambda^3 \left[16I_2 + 4\pi FL \right] + 4 \lambda^4 \pi^2 F^2$$

7. E (NM). Siendo $M = 2N + m$ se tendrá que $NM = 2N^2 + Nm$, así que de (2.4.3) y (2.4.4) resulta

$$E (NM) = 4\lambda^2 \pi F + \lambda^3 (\pi FL + 8I_2) + 2 \lambda^4 \pi^2 F^2$$

8. E (S.M). Siendo $SM = 2SN + Sm$ de (2.4.3) y (2.4.4) resulta

$$E (S.M) = \lambda \pi F + \lambda^2 \left[\pi FL + 4I_2 \right] + 2 \lambda^3 \pi^2 F^2$$

9. E (m.M). Siendo $mM = 2mN + m^2$ resulta

$$E (mM) = \lambda L + \lambda^2 \left[L^2 + 4 \pi F \right] + 2 \lambda^3 \pi FL$$

CAPITULO III

1.- GEOMETRIA INTEGRAL DEL ESPACIO HIPERBOLICO DE 3 DIMENSIONES.

En lo que sigue trabajaremos en el espacio de 3 dimensiones y curvatura constante $k \leq 0$ que notaremos $H(k)$. Para $k=0$ tendremos el espacio euclídeo y para $k=-1$ el espacio hiperbólico. El elemento de arco en coordenadas polares está dado por

$$ds^2 = d\rho^2 + \left(\frac{\operatorname{sen} k^{1/2} \rho}{k^{1/2}} \right)^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2) \quad (3.1.1)$$

siendo ρ, θ, ϕ las coordenadas geodésicas polares.

De (3.1.1) se deduce que la esfera de radio ρ tiene en $H(k)$ los siguientes valores para el volumen V , el área F e integral de curvatura media M

$$\begin{aligned} V &= 2\pi k^{-3/2} (k^{1/2} \rho - \operatorname{sen} k^{1/2} \rho \cos k^{1/2} \rho) \\ F &= 4\pi \left(\frac{\operatorname{sen} k^{1/2} \rho}{k^{1/2}} \right)^2 \\ M &= 4\pi \frac{\operatorname{sen} k^{1/2} \rho \cos k^{1/2} \rho}{k^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

De aquí se deducen los siguientes límites para $\rho \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{F}{V} &= 2|k|^{1/2} \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{M}{F} &= |k|^{1/2} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$\lim \frac{M}{V} = 2|k|^{1/2}$$

Sería interesante demostrar que éstos límites valen lo mismo para el caso de un cuerpo convexo cualquiera K que se expande hasta cubrir todo el espacio. Pero para nuestro objeto son suficientes los límites (3.1.3) para el caso de la esfera. Recordamos que para el caso euclidiano los tres límites son iguales a cero.

Para el espacio hiperbólico es $k=-1$. En este caso son útiles las fórmulas $\cos ix = \cosh x$, $\sin ix = i \sinh x$

Densidad y medida para puntos, planos y rectas.

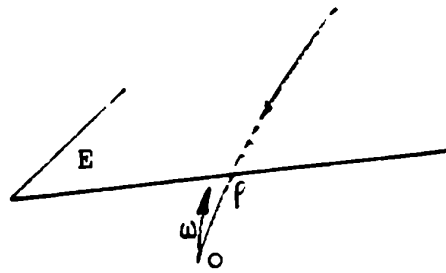
Vamos a recordar las fórmulas fundamentales en que intervienen las medidas de conjuntos de puntos, planos y rectas. Ellas pueden verse en [10] capítulo 17.

Para conjuntos de puntos, la densidad es igual al elemento de volumen del espacio, que según (3.1.1) vale

$$dP = \left(\frac{\sin k^{1/2} \rho}{k^{1/2}} \right)^2 d\rho \wedge d\omega \quad (3.1.4)$$

siendo ρ la distancia al origen y $d\omega$ el elemento de área la esfera euclidiana unidad correspondiente a la dirección θP en el origen O .

Para conjuntos de planos, si ρ es la distancia del plano E al origen O y $d\omega$ el elemento de área de la esfera unidad euclidiana correspondiente a la dirección de la normal a E por O (en el punto O), vale



$$dE = \left(\cos k^{1/2} \rho \right)^2 d\rho \wedge d\omega \quad (3.1.5)$$

De aquí se deduce que la medida de los planos E que cortan a un --
cuerpo convexo K es

$$m(E; E + K) = M + k V \quad (3.1.6)$$

siendo M la integral de curvatura media y V el volumen de K .

Si K se reduce a un segmento S de longitud ℓ , resulta

$$m(E; E + S) = \pi \cdot \ell \quad (3.1.7)$$

Si \underline{n} es el número de puntos de intersección de E con una curva C
de longitud L, vale

$$\int_{E+C} n dE = \pi \cdot L \quad (3.1.8)$$

Llamando u a la longitud de la intersección $E \cap \partial K$, vale

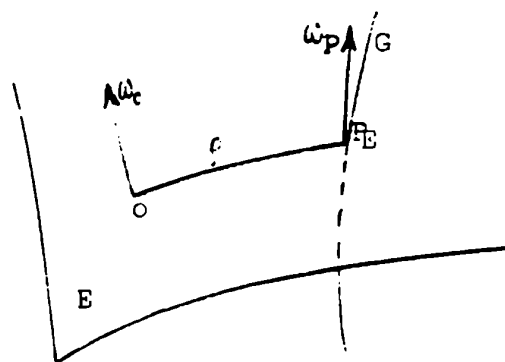
$$\int_{E+\partial K} u dE = \frac{\pi^2}{2} F \quad (3.1.9)$$

siendo F el área de ∂K (también se dice que es el área de K).

Si σ es el área de la intersección $E \cap K$, vale

$$\int_{E+K} \sigma \, dE = 2\pi V \quad (3.1.10)$$

Para las rectas G , supuesto un plano E ortogonal a G por O y siendo dP_E la densidad del punto de intersección P_E con G , y ω_p la dirección de G en P_E , es



$$\begin{aligned} dG &= dP_E \wedge d\omega_p = \\ &= \cos k^{1/2} \rho \, dP_E \wedge d\omega_0 \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

siendo ω_0 la dirección de la normal a E en O .

La medida de las rectas que cortan a K es

$$\int_{G+K} dG = \frac{\pi}{2} F \quad (3.1.12)$$

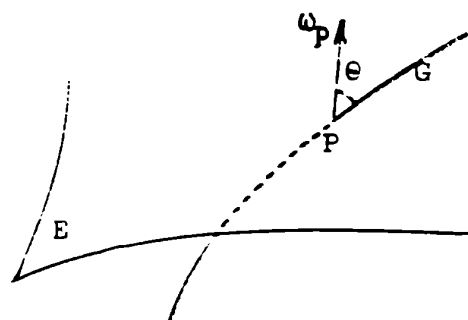
y si σ_1 es la longitud de la cuerda $G \cap K$, vale

$$\int_{G+K} \sigma_1 \, dG = 2\pi V \quad (3.1.13)$$

En general, si G corta a una superficie de área F en \underline{n} puntos, es

$$\int_{G+K} n \, dG = \pi F \quad (3.1.14)$$

Observemos también que si en (3.1.11) en lugar del elemento de área dP_E de un plano ortogonal a G , se quiere introducir el elemento de área dP de un plano oblicuo cuya normal forme un ángulo θ con la recta G , será



$$\begin{aligned} dG &= |\cos \theta| \, dP \wedge d\omega_p = \\ &= |\cos \theta| \, \text{sen } \theta \, d\theta \wedge d\phi \wedge dp \end{aligned}$$

(3.1.15)

De aquí se deduce que para el ángulo θ en que una recta al azar corta a un plano fijo, valen los siguientes valores medios

$$E(\theta) = \frac{\int_0^\pi \theta \, \text{sen } \theta \, |\cos \theta| \, d\theta}{\int_0^\pi \text{sen } \theta \, |\cos \theta| \, d\theta} = \frac{\pi}{2}$$

(3.1.16)

$$E\left(\frac{1}{\text{sen } \theta}\right) = \frac{\int_0^\pi |\cos \theta| \, d\theta}{\int_0^\pi \text{sen } \theta \, |\cos \theta| \, d\theta} = 2$$

$$E \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) = \frac{\int_0^\pi \text{sen } \theta \cdot d\theta}{\int_0^\pi \text{sen } \theta |\cos \theta| d\theta} = 2$$

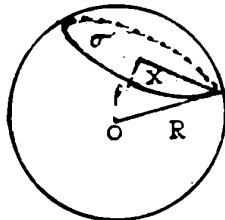
Dado un dominio convexo K , en algunos de los valores medios que calculamos más adelante, aparecerá la integral del cuadrado de la sección que un plano E determina en K , es decir

$$\int_{E \uparrow K} \sigma^2 dE \quad (3.1.17)$$

y también la integral del cuadrado de la cuerda determinada por la intersección de dos planos al cortar a K , lo que notamos

$$\int_{E_i \uparrow K} L_{12}^2 dE_1 dE_2 \quad (3.1.18)$$

Calcularemos la integral (3.1.17) para el caso en que K es una esfera de radio R ; en el espacio hiperbólico. Tenemos que



$$\text{ch } x = \frac{\text{ch } R}{\text{ch } \rho} \quad y$$

$$\sigma = 2\pi \left(\frac{\text{ch } R}{\text{ch } \rho} - 1 \right)$$

Queda entonces

$$\begin{aligned}
 I_2(K) &= \int_0^R 4\pi^2 \left(\frac{\text{ch } R}{\text{ch } \rho} - 1 \right)^2 \text{ch}^2 \rho \, d\rho \wedge d\omega = \\
 &= 16\pi^3 \int_0^R (\text{ch}^2 R - 2 \text{ch } R \text{ch } \rho + \text{ch}^2 \rho) \, d\rho = \\
 &= 16\pi^3 \left[R \text{ch}^2 R - \frac{3}{2} \text{sh } R \text{ch } R + \frac{1}{2} R \right].
 \end{aligned}$$

2.- ALGUNOS PROBLEMAS DE PROBABILIDADES GEOMETRICAS.

1 - Sean K y K_0 ($K \subset K_0$) dominios convexos del espacio $H(k)$ cuyas integral de curvatura media, área y volumen son respectivamente M, F, V y M_0, F_0, V_0 . Entonces, la probabilidad de que un plano al azar que corte a K_0 , corte también a K es

$$P = \frac{M+kV}{M_0+kV_0} \quad (3.2.1)$$

Ello es una consecuencia de la medida (3.1.6) de los planos que cortan a un cuerpo convexo.

2 - Dados 2 planos al azar E_1, E_2 , independientes, que cortan a K , la probabilidad de que su recta de intersección corte también a K será

$$\begin{aligned}
 p(E_1 \cap E_2 \cap K \neq \emptyset) &= \frac{\int_{(E_1 \cap E_2) \cap K} dE_1 \wedge dE_2}{\int_{E_1 \cap K} dE_1 \wedge dE_2} = \frac{\frac{\pi}{2} \int u_1 dE_1}{(M+kV)^2} = \\
 &= \frac{\pi^3}{4} \frac{F}{(M+kV)^2} \quad (3.2.2)
 \end{aligned}$$

Obsérvese que si $K(t)$ es una familia de cuerpos convexos que tiende a cubrir todo el espacio, por lo menos para el caso de la esfera y conjeturamos que para todo cuerpo convexo, el límite de la probabilidad anterior es cero, lo que no ocurre en el caso euclidiano.

3 - Dados tres planos E_1, E_2, E_3 que cortan a K ¿cuál es la probabilidad de que su punto de intersección pertenezca a K ? Si $P = E_1 \cap E_2 \cap E_3$ se tiene, de (3.1.7), (3.1.9) y (3.1.10)

$$p(P \in K) = \frac{\int_{P \in K} dE_1 \wedge dE_2 \wedge dE_3}{\int_{E_1 \cap K} dE_1 \wedge dE_2 \wedge dE_3} =$$

$$= \frac{\int dE_1 \int \pi \cdot \sigma_2 dE_2}{(M+kV)^3} = \frac{\pi^{3/2} \int \sigma_1 dE_1}{(M+kV)^3} = \frac{\pi^4 V}{(M+kV)^3} \quad (3.2.3)$$

4 - Dadas al azar un plano E y una recta G que cortan a un cuerpo convexo la probabilidad de que $G \cap E \in K$ será, si $P = G \cap E$

$$p(E \cap G \in K) = \frac{\int_{P \in K} dG \wedge dE}{\int_{\substack{E \in K \\ G \in K}} dG \wedge dE} = \frac{4\pi V}{F(M+kV)} \quad (3.2.4)$$

De (3.1.10), (3.1.6), (3.1.12) y (3.1.13) se obtuvieron los siguientes valores medios

$$E(\sigma) = \frac{2\pi V}{M+kV} \quad (3.2.5)$$

$$E(\sigma_1) = \frac{4V}{F}$$

3.- CUERPO CONVEXO CORTADO POR PLANO AL AZAR, VALORES MEDIOS DE PRIMER ORDEN.

Sea K un dominio convexo del espacio $H(k)$ y supongamos que se interseque por n planos E_i ($i = 1, 2, \dots, n$) dados al azar, e independientemente unos de otros. Las posiciones de los E_i en las cuales pasan más de 3 por un mismo punto o más de 2 por una recta son de medida nula, de manera que K --

quedará en general dividido en poliedros cuyas caras pertenecen a los planos E_i . Se trata de hallar algunos valores medios relativos a los poliedros en que queda dividido K .

Sea N_I el número de vértices interiores a K . Su valor medio será

$$E(N_I/n) = \frac{\int_{E_i \uparrow K} N_I dE_1 \dots dE_n}{\int_{E_i \uparrow K} dE_1 \dots dE_n} \quad (3.3.1)$$

El denominador vale $(M+kV)^n$. Debemos calcular el numerador. Para esto definimos la función N_{hjs} de los planos E_h, E_j y E_s como igual a 1 si $E_h \cap E_j \cap E_s \in K$ e igual a uno en los otros casos. Así $N_I = \sum_{h < j < s} N_{hjs}$ y tenemos como en (3.2.3)

$$\begin{aligned} \int N_I dE_1, \dots, dE_n &= \binom{n}{3} (M+kV)^{n-3} \int N_{hjs} dE_h dE_j dE_s = \\ &= \binom{n}{3} (M+kV)^{n-3} \pi^4 V \end{aligned}$$

Por lo cual

$$E(N_I/n) = \binom{n}{3} \frac{\pi^4 V}{(M+kV)^3} \quad (3.3.2)$$

Sea ahora N_S el número de vértices en ∂K , es decir N_S es el número de puntos de intersección de dos de los planos E_i y ∂K .

Llamando N_{h_1, h_2} a la función de E_{h_1}, E_{h_2} que vale cero si

$E_{h_1} \cap E_{h_2} \cap K = \emptyset$ e igual al número de puntos de intersección de

$E_{h_1} \cap E_{h_2}$ con ∂K en caso contrario, resulta de (3.1.8) y (3.19)

$$\begin{aligned} \int N_S dE_1, \dots, dE_n &= \int \sum_{\substack{h_1 < h_2 \\ 1 \leq h_1, h_2 \leq n}} N_{h_1, h_2} dE_1, \dots, dE_n = \\ &= \binom{n}{2} (M+kV)^{n-2} \int N_{h_1, h_2} dE_{h_1} dE_{h_2} = \\ &= \binom{n}{2} (M+kV)^{n-2} \int \tau \cdot \ell_{h_1} dE_{h_1} = \\ &= \binom{n}{2} (M+kV)^{n-2} \frac{\tau^3 F}{2} \end{aligned}$$

donde ℓ_{h_1} es la longitud de $E_{h_1} \cap \partial K$.

Por lo tanto

$$E(N_S/n) = \binom{n}{2} \frac{\tau^3 F}{2(M+kV)^2} \quad (3.3.3)$$

Si llamamos R al número de regiones en las que queda dividido K por

los n planos, (según Santaló, L.A. [7] , pág. 101) se tiene

$$R = N_I + \frac{1}{2} N_S + n + 1 \quad (3.3.4)$$

y por tanto, teniendo en cuenta (3.3.2) y (3.3.3)

$$E(R/n) = \binom{n}{3} \frac{\pi^4 V}{(M+kV)^3} + \binom{n}{2} \frac{\pi^3 F}{4(M+kV)^2} + n + 1 \quad (3.3.5)$$

Sea S el área total de los polígonos planos, caras de las regiones R , que están totalmente contenidas en K . Llamando σ_i al área de $E_i \cap K$ ($1 \leq i \leq n$) resulta

$$S = \sum_{1 \leq i \leq n} \sigma_i \quad (3.3.6)$$

y por tanto de (3.1.10)

$$\begin{aligned} \int S \, dE_1 \dots dE_n &= \int \sum_{1 \leq i \leq n} \sigma_i \, dE_1 \dots dE_n = \\ &= n (M+kV)^{n-1} \int \sigma \, dE = \\ &= 2\pi n V (M+kV)^{n-1} \end{aligned}$$

de donde

$$E(S/n) = \frac{2\pi n V}{M+kV} \quad (3.3.7)$$

Sea ahora L la longitud total de los segmentos de recta

$G_{ij} = E_i \cap E_j$ que son interiores a K , o sea que si ℓ_{ij} es la longitud de $E_i \cap E_j \cap K$ se tiene

$$L = \sum_{i < j} \ell_{ij} \quad (3.3.8)$$

Por lo tanto, de (3.1.9) y (3.1.10)

$$\begin{aligned} \int L dE_1, \dots, dE_n &= \int \sum_{i < j} \ell_{ij} dE_1, \dots, dE_n = \\ &= \binom{n}{2} (M+kV)^{n-2} \int \ell_{ij} dE_i dE_j = \\ &= \binom{n}{2} (M+kV)^{n-2} \frac{\pi^2}{2} \int \sigma_i dE_i = \\ &= \binom{n}{2} (M+kV)^{n-2} \pi^3 V \end{aligned}$$

Resultando

$$E(L/n) = \binom{n}{2} \frac{\pi^3 V}{(M+kV)^2} \quad (3.3.9)$$

Finalmente si A_I es el número de segmentos que constituyen las aristas de las regiones R_i , interiores a K , como por cada vértice interior pasan 6 aristas y por cada vértice de ∂K para sólo una, se tendrá

$$A_I = \frac{6N_I + N_S}{2} \quad (3.3.10)$$

ya que cada arista está contada dos veces. Por consiguiente de (3.3.2) y (3.3.3)

$$E(A_I/n) = \binom{n}{3} \frac{3\pi^4 V}{(M+kV)^3} + \binom{n}{2} \frac{\pi^3 F}{4(M+kV)^2} \quad (3.3.11)$$

4.- VALORES MEDIOS DE SEGUNDO ORDEN.

Con las mismas notaciones anteriores, vamos a calcular algunos valores de 2° orden

a) Para $S^2 = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \sigma_i \right)^2$ se tiene

$$\int S^2 dE_1 \dots dE_n = \int \sum \sigma_i^2 dE_1 \dots dE_n + 2 \int \sum_{i < j} \sigma_i \sigma_j dE_1 \dots dE_n =$$

$$= n (M+kV)^{n-1} \int \sigma^2 dE + 2 \binom{n}{2} (M+kV)^{n-2} \left[\int \sigma dE \right]^2 =$$

$$= n (M+kV)^{n-1} \cdot I_2(K) + 2 \binom{n}{2} (M+kV)^{n-2} (2\pi V)^2. \quad (3.4.1)$$

donde I_2 se definió en (3.1.17)

Luego

$$E(S^2/n) = \frac{n I_2}{(M+kV)} + n(n-1) \left(\frac{2\pi V}{M+kV} \right)^2 \quad (3.4.2)$$

$$\text{donde } I_2 = I_2(K) = \int_{E+K} \sigma^2 dE \text{ siendo } \sigma \text{ el área de } E \cap K. \quad (3.4.3)$$

b) Queremos calcular ahora $E(S.N_I)$. Tenemos

$$\int S N_I dE_1 \dots dE_n = \left(\sum \sigma_i \right) \left(\sum N_{jkl} \right) dE_1 \dots dE_n$$

Para el cálculo consideremos los siguientes casos:

i) el índice i es distinto de j, k, ℓ . Entonces por (3.1.10) y (3.2.3)

$$\begin{aligned} \int \sigma_i N_{jkl} dE_1 \dots dE_n &= (M+kV)^{n-4} \int \sigma_i dE_i \int N_{jkl} dE_j dE_k dE_\ell \\ &= (M+kV)^{n-4} (2\pi V) (\pi^4 V) = \\ &= 2\pi^5 V^2 (M+kV)^{n-4} \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

ii) El índice i coincide con j, k ó ℓ . Usando (3.1.8) y (3.1.9) tenemos

$$\begin{aligned}
\int \sigma_i N_{ikl} dE_i dE_k dE_l &= (M+kV)^{n-3} \int \sigma_i dE_i \int_{E_l + (E_k \cap E_i \cap K)} dE_k dE_l \\
&= (M+kV)^{n-3} \pi \int \sigma_i dE_i \int L_{ik} dE_k \\
&= (M+kV)^{n-3} \frac{\pi^3}{2} \int \sigma_i^2 dE_i \\
&= (M+kV)^{n-3} \frac{\pi^3}{2} I_2(K)
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

siendo L_{ik} la longitud de $E_i \cap E_k \cap K$.

En $\int N_I \cdot S dE_1, \dots, dE_n$ hay $\binom{n}{3} (n-3)$ sumandos iguales al cálculo hecho en (3.4.4) y 3 $\binom{n}{3}$ sumandos como en (3.4.5), de manera que

$$E(S \cdot N_I / n) = \frac{2 \binom{n}{3} (n-3) \pi^5 V^2}{(M+kV)^4} + \frac{3 \binom{n}{3} \pi^3 I_2}{2(M+kV)^3} \tag{3.4.6}$$

c) Hallemos ahora el valor medio de N_I^2 . Será

$$N_I^2 = \left(\sum_{i < j < k} N_{ijk} \right)^2 = \sum_{i < j < k} N_{ijk}^2 + \sum_{\substack{i < j < k \\ l < h < S}} N_{ijk} N_{l h S}$$

Necesitamos calcular las integrales

$$\begin{aligned}
 \text{i) } \int \sum_{i < j < k} N_{ijl} dE_1, \dots, dE_n &= \binom{n}{3} (M+kV)^{n-3} \int N_{ijk} dE_i dE_j dE_k = \\
 &= \binom{n}{3} (M+kV)^{n-3} \pi^4 V \quad (3.4.7)
 \end{aligned}$$

ii) Si los índices i, j, k son todos diferentes de los índices l, h, S entonces

$$\begin{aligned}
 \int N_{ijk} N_{l h S} dE_1, \dots, dE_n &= (M+kV)^{n-6} \int dE_i dE_j dE_k \int dE_l dE_h dE_S = \\
 &= (M+kV)^{n-6} (\pi^4 V)^2 \quad (3.4.8)
 \end{aligned}$$

iii) Si coincide sólo uno de los índices

$$\begin{aligned}
 \int N_{ijk} N_{i h S} dE_1, \dots, dE_n &= (M+kV)^{n-5} \int dE_i \int N_{ijk} dE_j dE_k \int N_{i h S} dE_h dE_S = \\
 &= (M+kV)^{n-5} \left(\frac{\pi^2}{-2} \sigma_i \right)^2 dE_i = \\
 &= (M+kV)^{n-5} \frac{\pi^4}{4} I_2 (K) \quad (3.4.9)
 \end{aligned}$$

iv) Si coinciden 2 índices, de modo que $E_i \cap E_j \cap E_k \in K$ y $E_i \cap E_j \cap E_S \in K$.

$$\int N_{ijk} N_{ijs} dE_1, \dots, dE_n = (M+kV)^{n-4} \int dE_i \int dE_j \int dE_k dE_S =$$

$$= (M+kV)^{n-4} \int dE_i \int (\pi \ell_{ij})^2 dE_j =$$

$$= (M+kV)^{n-4} \pi^2 \int \ell_{ij} dE_i dE_j =$$

$$= (M+kV)^{n-4} \pi^2 J_2 (K) \quad (3.4.10)$$

$$\text{donde } J_2 = J_2 (K) = \int \ell_{ij}^2 dE_i dE_j \quad (3.4.11)$$

siendo ℓ_{ij} la longitud de $E_i \cap E_j \cap K$, como se definió en (3.1.18)

Como $\left(\sum_{i < j < k} N_{ijk} \right)^2$ hay $\binom{n}{3} \binom{n-3}{3}$ sumandos iguales a (3.4.8)

3 $\binom{n}{3} \binom{n-3}{2}$ sumandos iguales a (3.4.9) y 3 $\binom{n}{3} (n-3)$ sumandos iguales a

(3.4.10) tenemos:

$$E \left(\frac{N_I^2}{n} \right) = \binom{n}{3} \binom{n-3}{3} \frac{(\pi^4 V)^2}{(M+kV)^6} + \binom{n}{3} \binom{n-3}{2} \frac{3 \pi^4 I_2}{4 (M+kV)^5} +$$

$$+ \binom{n}{3} \frac{3 \pi^2 J_2}{(M+kV)^4} + \binom{n}{3} \frac{\pi^4 V}{(M+kV)^3} \quad (3.4.12)$$

donde I_2 está dado en (3.4.3) y J_2 en (3.4.11).

d) Pasemos ahora al cálculo del valor medio de

$$L^2 = \left(\sum_{i < j} l_{ij} \right)^2 = \sum_{i < j} l_{ij}^2 + \sum_{\substack{i < j \\ h < k}} l_{ij} l_{hk}$$

Para calcular la integral de la segunda sumatoria consideramos dos

casos:

i) las $\binom{n}{2} \binom{n-2}{2}$ sumandos en los que todos los índices son distintos. En este caso tendremos

$$\int l_{ij} l_{hk} dE_1 \dots dE_n = (M+kV)^{n-4} \int l_{ij} dE_i dE_j \int l_{hk} dE_h dE_k =$$

$$= (M+kV)^{n-4} (\pi^3 V)^2 \quad (3.4.13)$$

ii) los $2 \binom{n}{2} (n-2)$ sumandos en los cuales coincide uno de los índices, resultando

$$\begin{aligned}
\int \ell_{ij} \ell_{ik} dE_1, \dots, dE_n &= (M+kV)^{n-3} \int dE_i \int \ell_{ij} dE_j \int \ell_{ik} dE_k = \\
&= (M+kV)^{n-3} \int \left(\frac{\pi^2 \sigma_i}{2} \right)^2 dE_i = \\
&= (M+kV)^{n-3} \frac{\pi^4}{4} I_2 \qquad (3.4.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Por otra parte } \int \ell^2_{ij} dE_1, \dots, dE_n &= \\
&= \binom{n}{2} (M+kV)^{n-2} \int \ell^2_{ij} dE_i dE_j = \\
&= \binom{n}{2} (M+kV)^{n-2} J_2(K) \qquad (3.4.15)
\end{aligned}$$

Recordemos que $J_2(K) = \int \ell^2 dE_1 dE_2$ (ver (3.1.18))

Por tanto de (3.4.13), (3.4.14) y (3.4.15) obtenemos

$$E(L^2/n) = \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \frac{(\pi^3 V)^2}{(M+kV)^4} + \binom{n}{2} \frac{(n-2) \pi^4 I_2}{2(M+kV)^3} + \binom{n}{2} \frac{J_2}{(M+kV)^2} \qquad (3.4.16)$$

e) Usando la notación dada en (3.3.6) y (3.3.8) tendremos que

$$\begin{aligned}
 \int L S dE_1, \dots, dE_n &= \int \sum_{i < j} \ell_{ij} \cdot \sum_k \sigma_k dE_1, \dots, dE_n = \\
 &= \binom{n}{2} (n-2) (M+kV)^{n-3} \int \ell_{ij} \sigma_k dE_i dE_j dE_k + \\
 &+ 2 \binom{n}{2} (M+kV)^{n-2} \int \sigma_i dE_i \int \ell_{ij} dE_j = \\
 &= \binom{n}{2} (n-2) (M+kV)^{n-3} (2\pi V) (\pi^3 V) + \\
 &+ 2 \binom{n}{2} (M+kV)^{n-2} \frac{\pi^2}{2} \int \sigma_i^2 dE_i \quad (3.4.17)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$E (LS/n) = \binom{n}{2} \frac{2(n-2)\pi^4 V^2}{(M+kV)^3} + \binom{n}{2} \frac{\pi^2 I_2}{(M+kV)^2} \quad (3.4.18)$$

f) De igual manera para N_I L tendremos

$$\begin{aligned}
& \int N_I L dE_1, \dots, dE_n = \int \sum_{i < j < k} N_{ijk} \sum_{h < s} \epsilon_{hs} dE_1, \dots, dE_n = \\
& = \binom{n}{3} \binom{n-3}{2} (M+kV)^{n-5} \int N_{ijk} dE_i dE_j dE_k \int \epsilon_{hs} dE_R dE_S + \\
& + 3 \binom{n}{3} (n-3) (M+kV)^{n-4} \int N_{ijk} dE_i \int \epsilon_{is} dE_S \int dE_k dE_j + \\
& + 3 \binom{n}{3} (M+kV)^{n-3} \int N_{ijk} dE_i \int \epsilon_{ij} dE_j \int dE_k = \\
& = \binom{n}{3} \binom{n-3}{2} (M+kV)^{n-5} (\pi^4 V) (\pi^3 V) + \\
& = 3 \binom{n}{3} (n-3) (M+kV)^{n-4} \pi \int dE_i \int \epsilon_{is} \frac{\pi^2}{2} \sigma_i dE_S + \\
& + 3 \binom{n}{3} (M+kV)^{n-3} \pi \int \epsilon^2_{ij} dE_i dE_j = \\
& = \binom{n}{3} \binom{n-3}{2} (M+kV)^{n-5} \pi^7 V^2 + 3 \binom{n}{3} (n-3) (M+kV)^{n-4} \frac{\pi^3}{2} \int \sigma_i^2 \frac{\pi^2}{2} dE_i + \\
& + 3 \binom{n}{3} (M+kV)^{n-3} \pi^3 J_2(K). \tag{3.4.19}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$E(N_I L/n) = \binom{n}{3} \binom{n-3}{2} \frac{\pi^7 V^2}{(M+kV)^5} + \binom{n}{3} \frac{3(n-3)\pi^5 I_2}{4(M+kV)^4} + \binom{n}{3} \frac{3\pi^3 J_2}{(M+kV)^3} \quad (3.4.20)$$

5.- ALGUNOS COCIENTES DE VALORES MEDIOS

Sea K un cuerpo convexo del espacio $H(k)$ y sea R el número de regiones poliédricas en que queda dividido K por n planos dados independientemente al azar. Sea N_R el número de vértices de cada región. Como cada vértice interior pertenece a 8 regiones y cada vértice de ∂K a 4 regiones entonces el número medio de vértices de cada región es

$$\frac{8 N_I + 4 N_S}{R} \quad (3.5.1)$$

y por tanto, representando por $E^*(N_R/n)$ el cociente de los valores medios -- del numerador y denominador de (3.5.1) resulta

$$E^*(N_R/n) = \frac{32 \binom{n}{2} \pi^4 V + 8 \binom{n}{2} \pi^3 F(M+kV)}{4 \binom{n}{3} \pi^4 V + \binom{n}{2} \pi^3 F(M+kV) + 4(n+1)(M+kV)^3} \quad (3.5.2)$$

Sea ahora A_R el número de aristas de cada región. Como cada arista interior pertenece a 4 regiones y cada arista de ∂K pertenece a 2 regiones entonces el número medio de aristas de cada región es

$$A_R = \frac{4 A_I + 2 A_S}{R} \quad (3.5.3)$$

Por cada vértice de ∂K pasan 4 aristas de K pero así cada arista resulta contada dos veces de modo que $4N_S = 2A_S$, y de (3.3.10) obtenemos

$$4 A_I + 2 A_S = 12 N_I + 6 N_S \quad (3.5.4)$$

De modo que

$$E^*(A_R/n) = \frac{48 \binom{n}{3} \pi^{4V} + 12 \binom{n}{2} \pi^3 F(M+kV)}{4 \binom{n}{3} \pi^{4V} + \binom{n}{2} \pi^3 F(M+kV) + 4(n+1)(M+kV)^3} \quad (3.5.5)$$

Llamemos ahora C_R al número de caras de cada región. La fórmula de Euler nos dice que

$$N_R = A_R + C_R = 2 \quad (3.5.6)$$

Por lo tanto, de (3.5.1) y (3.5.3) resulta

$$C_R = \frac{2 R + 4 N_I + 2 N_S}{R} \quad (3.5.7)$$

teniendo por (3.3.4)

$$\begin{aligned}
 E^*(C_R/n) &= \frac{E(2 R + 4 N_I + 2 N_S)}{E(R)} = \\
 &= \frac{E(6 N_I + 3 N_S + 2(n+1))}{E(R)} = \\
 &= \frac{.24 \binom{n}{3} \pi^4 V + 6 \binom{n}{2} \pi^3 F(M+kV) + 8(n+1) (M+kV)^3}{4 \binom{n}{3} \pi^4 V + \binom{n}{2} \pi^3 F(M+kV) + 4(n+1) (M+kV)^3} \quad (3.5.8)
 \end{aligned}$$

Notando con S_R al **área** de cada región; como cada cara interior pertenece a dos regiones y las caras de ∂K tienen como área total a F , tenemos

$$\begin{aligned}
 E^*(S_R/n) &= \frac{E(2S + F)}{E(R)} = \\
 &= \frac{16\pi nV(M+kV)^2 + 4F(M+kV)^3}{4 \binom{n}{3} \pi^4 V + \binom{n}{2} \pi^3 F(M+kV) + 4(n+1) (M+kV)^3} \quad (3.5.9)
 \end{aligned}$$

Por último si llamamos V_R al volumen medio de cada región

$$E^*(V_R/n) = \frac{V}{E(R)} = \frac{4 (M+kV)^3 V}{4 \binom{n}{3} \pi^4 V + \binom{n}{2} \pi^3 F(M+kV) + 4(M+kV)^3 (n+1)} \quad (3.5.10)$$

CAPITULO IV

Procesos de Poisson de planos en $H(k)$

1.- PROCESO DE POISSON DE PLANOS

Supongamos en el espacio $H(k)$ una esfera de radio ρ que representamos por $K_0(\rho)$. Sean M_0 , F_0 , V_0 la integral de curvatura media el área y el volumen de K_0 , dados por (3.1.2). Si K es un cuerpo convexo contenido en K_0 cuyas características anteriores son M , F y V , sabemos que la probabilidad de que un plano al azar que corte también a K , vale $p = \frac{M+kV}{M_0+kV_0}$

Supongamos ahora n planos al azar que corten a K_0 . La probabilidad de que exactamente m de ellos corten a K (ley binomial) será

$$P_m(\rho) = \binom{n}{m} \left(\frac{M+kV}{M_0+kV_0} \right)^m \left(1 - \frac{M+kV}{M_0+kV_0} \right)^{n-m} \quad (4.1.1)$$

Supuesto que $\rho \rightarrow \infty$ y al mismo tiempo $n \rightarrow \infty$ de manera tal que

$$\frac{n}{M_0+kV_0} \longrightarrow \frac{\lambda}{\pi} \quad (4.1.2)$$

resulta

$$P_m = \lim_{\rho \rightarrow \infty} P_m(\rho) = \left(\frac{\lambda}{\pi} (M+kV) \right)^m \frac{e^{-\frac{\lambda}{\pi} (M+kV)}}{m!} \quad (4.1.3)$$

Se dice entonces que se tiene en el espacio $H(k)$ un proceso de Poisson

de planos de parámetro o intensidad λ .

El valor medio de m es $E(m) = \frac{\lambda}{\pi} (M+kV)$. Por tanto, para m segmento de longitud l siendo $M = \pi \cdot l$ y $V = 0$, resulta $E(m) = \lambda l$; lo que nos dice que el parámetro λ es igual al valor medio del número de planos del proceso que intersecan a un segmento de longitud unidad.

Dado al azar un punto P del espacio y una recta G por P la probabilidad de que el primer punto de intersección de G con un plano del proceso esté entre ρ y $\rho + d\rho$ será igual a la probabilidad de que en el segmento de longitud ρ no haya ningún punto de intersección (que según (4.1.3) para $m = 0$) vale $e^{-\lambda\rho}$, por la probabilidad de que en el segmento $d\rho$ haya un sólo punto de intersección, que según la misma (4.1.3) vale $\lambda d\rho$, o sea

$$\lambda e^{-\lambda\rho} d\rho \quad (4.1.4)$$

En consecuencia la probabilidad de que la distancia de P al primer punto de intersección con uno de los planos del proceso, varíe entre 0 y ρ será

$$\int_0^{\rho} \lambda e^{-\lambda\rho} d\rho = 1 - e^{-\lambda\rho} \quad (4.1.5)$$

Será importante, para lo que sigue, observar que, sobre un plano E dado al azar en el espacio, los planos del sistema de Poisson determinan rectas que forman un proceso de Poisson de parámetro λ . Pues si consideramos un convexo K contenido en dicho plano, tendremos que $M = \frac{\pi}{2} L$ y $V = 0$, siendo L el perímetro de K , de donde obtenemos la ley inducida en E

$$p_m(\text{rectas}) = \left(\frac{\lambda}{2} L \right)^m \frac{e^{-\frac{\lambda}{2} L}}{m!} \quad (4.1.6)$$

que es la que corresponde en el plano hiperbólico para un proceso de Poisson de parámetro λ . (Ver [11] (2.11))

De igual modo sobre una recta del espacio los planos determinan un proceso de Poisson de puntos, con λ puntos en promedio sobre un segmento unidad. Es decir que para un segmento de longitud l se tiene

$$p_m(\text{puntos}) = (\lambda l)^m \frac{e^{-\lambda l}}{m!} \quad (4.1.7)$$

Siendo la probabilidad de que la distancia entre dos puntos consecutivos de una recta esté entre x y $x + dx$ es $\lambda e^{-\lambda x} dx$, tendremos que el valor medio de la distancia de un punto al siguiente es

$$\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \quad (4.1.8)$$

Por otra parte, de (4.1.3) se deducen los conocidos valores de los momentos de m , a saber, notando

$$\tau = \frac{\lambda}{\pi} (M+kV) \quad (4.1.9)$$

$$E(m) = \tau$$

$$E(m^2) = \tau + \tau^2$$

$$E(m^3) = \tau + 3\tau^2 + \tau^3$$

(4.1.10)

$$E(m^4) = \tau + 7\tau^2 + 6\tau^3 + \tau^4$$

$$E(m^5) = \tau + 15\tau^2 + 25\tau^3 + 10\tau^4 + \tau^5$$

$$E(m^6) = \tau + 31\tau^2 + 90\tau^3 + 65\tau^4 + 15\tau^5 + \tau^6$$

2.- CUERPOS CONVEXOS Y PROCESOS DE POISSON DE PLANOS: VALORES MEDIOS DE PRIMER ORDEN.

Las relaciones (4.1.6) nos permiten obtener algunos valores medios correspondientes a las figuras que un dado proceso de Poisson determina sobre un cuerpo convexo K del espacio, análogamente a lo que se hizo en el plano en el capítulo II.

De (3.3.2) resulta

$$E(N_I) = E(E(N_I/m)) = E\left[\binom{m}{3}\right] \frac{\pi^4 V}{(M+kV)^3} =$$

$$= \frac{\tau^3 \pi^4 V}{6(M+kV)^3} = \frac{\lambda^3}{6} \pi V \quad (4.2.1)$$

De (3.3.3) resulta

$$E(N_S) = E \left[\binom{m}{2} \right] \cdot \frac{\pi^3 F}{2(M+kV)^2} =$$

$$= \frac{\tau^2 \pi^3 F}{4(M+kV)^2} = \frac{\lambda^2}{4} \pi F \quad (4.2.2)$$

De (3.3.5)

$$E(R) = E \left[\binom{m}{3} \right] \frac{\pi^4 V}{(M+kV)^3} + E \left[\binom{m}{2} \right] \frac{\pi^3 F}{4(M+kV)^2} + E(m) + 1 =$$

$$= \frac{\tau^3 \pi^4 V}{6(M+kV)^3} + \frac{\tau^2 \pi^3 F}{8(M+kV)^2} + \tau + 1 =$$

$$= \frac{\lambda^3 \pi V}{6} + \frac{\lambda^2}{8} \pi F + \frac{\lambda}{\pi} (M+kV) + 1 \quad (4.2.3)$$

De (3.3.7)

$$E(S) = E(m) \cdot \frac{2 \pi V}{M+kV} =$$

$$= \tau \cdot \frac{2 \pi V}{M+kV} = 2 \lambda V \quad (4.2.4)$$

De (3.3.9) resulta

$$\begin{aligned}
 E(L) &= E \left[\binom{m}{2} \right] \frac{\pi^3 V}{(M+kV)^2} = \\
 &= \frac{\tau^2 \pi^3 V}{2(M+kV)^2} = \frac{\lambda^2}{2} \pi V \quad (4.2.5)
 \end{aligned}$$

De (3.3.11)

$$\begin{aligned}
 E(A_I) &= E \left[\binom{m}{3} \right] \frac{3 \pi^4 V}{(M+kV)^3} + E \left[\binom{m}{2} \right] \frac{\pi^3 F}{4(M+kV)^2} = \\
 &= \frac{\tau^3 \pi^4 V}{2(M+kV)^3} + \frac{\tau^2 \pi^3 F}{8(M+kV)^2} = \\
 &= \frac{\lambda^3}{2} \pi V + \frac{\lambda^2}{8} \pi F \quad (4.2.6)
 \end{aligned}$$

3. - VALORES MEDIOS DE SEGUNDO ORDEN: CUADRO DE COWAN PARA EL ESPACIO.

De (3.4.2) resulta

$$\begin{aligned}
 E(S^2) &= E(m) \cdot \frac{I_2}{(M+kV)} + E(m^2 - m) \left(\frac{2 \pi F}{M+kV} \right)^2 = \\
 &= \frac{\tau I_2}{M+kV} + \left(\tau \cdot \frac{2 \pi V}{M+kV} \right)^2 =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi} I_2 + 4 \lambda^2 V^2 \quad (4.3.1)$$

De (3.4.6) resulta

$$E(S.N_I) = \frac{\tau^2 \pi^5 V}{3(M+kV)^4} + \frac{\tau^3 \pi^3 I_2}{4(M+kV)^5} =$$

$$= \frac{\lambda^4 \pi V}{3} + \frac{\lambda^3}{4} I_2 \quad (4.3.2)$$

De (3.4.12)

$$E(N_I^2) = \frac{\tau^6 (\pi^4 \cdot V)^2}{36(M+kV)^6} + \frac{\tau^5 \pi^4 I_2}{16(M+kV)^5} +$$

$$+ \frac{\tau^4 \pi^2 J_2}{2(M+kV)^4} + \frac{\tau^3 \pi^4 V}{6(M+kV)^3} =$$

$$= \frac{\lambda^6}{36} \pi^2 \cdot V^2 + \frac{\lambda^5 I_2}{16 \cdot \pi} + \frac{\lambda^4 J_2}{2 \pi^2} + \frac{\lambda^3 \pi V}{6} \quad (4.3.3)$$

de (3.4.16) resulta

$$E(L^2) = \frac{\tau^2 J_2}{2(M+kV)^2} + \frac{\tau^2 \pi^4 I_2(K)}{4(M+kV)^3} + \frac{\tau^4 (\pi^3 V)^2}{4(M+kV)^4} =$$

$$= \frac{\lambda^2 J_2}{2 \pi^2} + \frac{\lambda^3 \pi I_2}{4} + \frac{\lambda^4 \pi^2 V^2}{4} \quad (4.3.4)$$

De (3.4.18) resulta

$$\begin{aligned}
 E(L.S) &= \frac{\tau^3 \pi^4 V^2}{(M+kV)^5} + \frac{\tau^2 \pi^2 I_2}{2(M+kV)^2} = \\
 &= \lambda^3 \pi V^2 + \frac{\lambda^2}{2} I_2
 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

De (3.4.20)

$$\begin{aligned}
 E(N_I L) &= \frac{\tau^5 \pi^7 V^2}{12(M+kV)^5} + \frac{\tau^4 \pi^5 I_2}{2(M+kV)^4} + \frac{\tau^3 \pi^3 J_2}{2(M+kV)^3} = \\
 &= \frac{\lambda^5}{12} \pi^2 V^2 + \frac{\lambda^4}{2} \pi I_2 + \frac{\lambda^3}{2} J_2
 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Del mismo modo de (3.3.2)

$$\begin{aligned}
 E(N_I \cdot M) &= \frac{\tau^3 \pi^4 V}{2(M+kV)^3} + \frac{\tau^4 \pi^3 V}{6(M+kV)^3} = \\
 &= \frac{\lambda^3 \pi V}{2} + \frac{\lambda^4}{6\pi} V \cdot (M+kV)
 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

de (3.3.7)

$$\begin{aligned} E(\text{S.m}) &= \frac{\tau \cdot 2\pi V}{(M+kV)} + \frac{\tau^2 2\pi V}{(M+kV)} = \\ &= 2\lambda V + \frac{2\lambda^2}{\pi} V (M+kV) \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

de (3.3.9)

$$\begin{aligned} E(\text{L.m}) &= \frac{\tau^2 \pi^3 V}{(M+kV)^2} + \frac{\tau^3 \pi^3 V}{2(M+kV)^2} = \\ &= \lambda^2 \pi V + \frac{\lambda^2}{2} V (M+kV) \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

En resumen, se puede escribir el siguiente cuadro:

CUADRO II: Valores medios de primer y segundo orden para un cuerpo convexo en II(k).

N_I	$\frac{\lambda^3}{6} \pi V + \frac{\lambda^4}{2\pi^2} J_2 + \frac{\lambda^5}{16\pi} I_2 + \frac{\lambda^6}{36} \pi^2 V^2$			
S	$\frac{\lambda^3}{4} I_2 + \frac{\lambda^4}{3} \pi V$	$\frac{\lambda}{\pi} I_2 + 4\lambda^2 V^2$		
L	$\frac{\lambda^3}{2} J_2 + \frac{\lambda^4}{2} \pi I_2 + \frac{\lambda^3}{12} \pi^2 V^2$	$\frac{\lambda^3}{2} J_2 + \frac{\lambda^4}{2} \pi I_2 + \frac{\lambda^5}{12} \pi^2 V$	$\frac{\lambda^2 J_2}{2\pi^2} + \frac{\lambda^3}{4} J_2 + \frac{\lambda^4}{4} \pi^2 V^2$	
m	$\frac{\lambda^3}{2} V + \frac{\lambda^4}{6\pi} V(M+kV)$	$2\lambda V + \frac{2\lambda^2}{\pi} V(M+kV)$	$\lambda^2 \pi V + \frac{\lambda^3 V}{2} (M+kV)$	$\frac{\lambda}{\pi} (M+kV) + \frac{\lambda^2}{\pi^2} (M+kV)^2$
1	$\frac{\lambda^3}{6} \pi V$	$2\lambda V$	$\frac{\lambda^2}{2} \pi V$	$-\frac{\lambda}{\pi} (M+kV)$
	N_I	S	L	m

CUADRO III: Valores medios de primer y segundo orden para un cuerpo convexo en el espacio euclidiano.

N_I	$\frac{\lambda^3}{6} \pi V + \frac{\lambda^4 J_2}{2\pi^2} + \frac{\lambda^5}{16\pi} I_2 + \frac{\lambda^6}{36} \pi^2 V^2$				
S	$\frac{\lambda^3}{4} I_2 + \frac{\lambda^4}{3} \pi V$	$\frac{\lambda}{\pi} I_2 + 4 \lambda^2 V^2$			
L	$\frac{\lambda^3}{2} J_2 + \frac{\lambda^4}{2} \pi I_2 + \frac{\lambda^5}{12} \pi^2 V^2$	$\frac{\lambda^3}{2} J_2 + \frac{\lambda^4}{2} \pi I_2 + \frac{\lambda^5}{12} \pi^2 V$	$\frac{\lambda^2 J_2}{2\pi^2} + \frac{\lambda^3}{4} \pi J_2 + \frac{\lambda^4}{4} \pi^4 V^2$		
m	$\frac{\lambda^3}{2} \pi V + \frac{\lambda^4}{6\pi} V M$	$2\lambda V + 2 \frac{\lambda^4}{\pi} M V$	$\lambda^2 \pi V + \frac{\lambda^3}{2} V M$	$\frac{\lambda M}{\pi} + \frac{\lambda^2 M^2}{\pi^2}$	
f	$\frac{\lambda^3}{6} \pi V$	$2 \lambda V$	$\frac{\lambda^2}{2} \pi V$	$\frac{\lambda M}{\pi}$	
	N_I	S	L	m	

El cuadro II generaliza a espacios de curvatura constante $k \leq 0$ o el cuadro de Cowan del plano euclidiano. Para el espacio euclidiano de 3 dimensiones ($k = 0$) se obtiene el cuadro III.

4.- COCIENTE DE VALORES MEDIOS.

Sea $K_0(\rho)$ una esfera de radio ρ con $\rho \rightarrow \infty$ junto con la condición

$$\frac{n}{M_0 + kV_0} \longrightarrow \frac{\lambda}{\pi}. \text{ Hallando los límites de los cocientes de los valores}$$

medios hallados en (III.5) obtenemos los cocientes de los valores medios para poliedros formados por un proceso de Poisson de planos de intensidad λ .

Luego usando los límites (3.1.3) resulta que:

a) Número medio de vértices de cada región

$$\begin{aligned} E^*(N_R) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} E^*(N_R/n) = \\ &= \frac{16\lambda^2\pi^2 + 24\lambda\pi^2|k|^{1/2}}{2\lambda^2\pi^2 + 3\lambda\pi^2|k|^{1/2} + 12|k|} \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

b) Número medio de aristas de cada región

$$E^*(A_R) = \frac{24\lambda^2\pi^2 + 36\lambda\pi^2|k|^{1/2}}{2\lambda^2\pi^2 + 3\lambda\pi^2|k|^{1/2} + 12|k|} \quad (4.4.2)$$

c) Número medio de caras de cada región

$$E^*(C_R) = \frac{12\lambda^2\pi^2 + 18\lambda\pi^2|k|^{1/2} + 24|k|}{2\lambda^3\pi^2 + 3\lambda^2\pi^2|k|^{1/2} + 12|k|} \quad (4.4.3)$$

d) Area media de cada cara

$$E^*(S_R) = \frac{48\lambda\pi + 24\pi|k|^{1/2}}{2\lambda^3\pi^2 + 3\lambda^2\pi^2|k|^{1/2} + 12\lambda|k|} \quad (4.4.4)$$

e) Volumen medio de cada región

$$E^*(V_R) = \frac{12\pi}{2\lambda^3\pi^2 + 3\lambda^2\pi^2|k|^{1/2} + 12\lambda|k|} \quad (4.4.5)$$

CAPITULO V

1.- MOSAICOS DE POISSON. VALORES MEDIOS PARA POLIEDROS DETERMINADOS EN EL ESPACIO $H(k)$ POR UN PROCESO DE POISSON DE PLANOS.

Consideremos en $H(k)$ un sistema de Poisson de planos. Para hallar los valores medios para los poliedros usaremos un método similar al utilizado por L.A. Santaló y I. Yañez para el caso del plano en [11] .

Para ello calculamos los valores medios del volumen V , el área S , la longitud de las aristas L , y el número de vértices N dependiendo de la manera de seleccionar un poliedro al azar. Consideremos cuatro formas de hacerlo:

- (a) elegir al azar un punto P en el espacio y luego el poliedro que lo contiene. A estos valores medios los notaremos $E(V)$, $E(S)$, etc.
- (b) elegir al azar un punto P en uno de los planos del sistema y con probabilidad $1/2$ uno de los poliedros que contienen a dicho punto en una de sus caras. Usaremos aquí la notación $E_S(V)$, $E_S(S)$, etc.
- (c) elegir al azar un punto en una de las rectas de intersección de los planos y con probabilidad $1/4$ uno de los cuatro poliedros que contienen a dicho punto en una de sus aristas. Notaremos con $E_L(V)$, etc. a estos valores medios.
- (d) elegir al azar un punto en la intersección de tres planos y con probabilidad $1/8$ uno de los ocho poliedros que tienen a dicho punto como vértice. Notaremos a estos valores medios con $E_N(V)$, etc.

Por tanto

(a) Valores medios cuando el poliedro tipo se obtiene eligiendo al azar un punto interior al mismo.

Sea P el punto elegido que puede ser el origen de coordenadas. De (4.1.4) la probabilidad que la distancia de P al primer punto de intersección con un plano esté entre ρ y $\rho + d\rho$ es igual a $\lambda e^{-\lambda\rho} d\rho$. Pero, por otra parte, de (3.1.4) el volumen del poliedro que contiene a P es

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{\rho} \left(\frac{\operatorname{sen} k^{1/2} \rho}{k^{1/2}} \right)^2 d\rho = \\
 &= \frac{1}{|k|} \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{\rho} \operatorname{sh}^2 |k|^{1/2} \rho d\rho = \\
 &= \frac{1}{2|k|} \int_{\Omega} (\operatorname{sh} |k|^{1/2} \rho \operatorname{ch} |k|^{1/2} \rho - \rho) d\Omega \quad (5.1.1)
 \end{aligned}$$

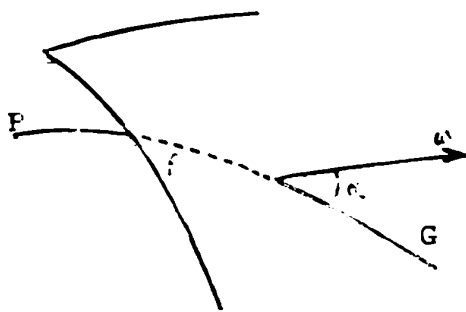
Por tanto, si $\lambda > 2 |k|^{1/2}$

$$\begin{aligned}
 E_V(V) &= \frac{1}{2|k|} \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda\rho} (\operatorname{sh} |k|^{1/2} \rho \operatorname{ch} |k|^{1/2} \rho - \rho) d\rho = \\
 &= \frac{2\pi\lambda}{|k|} \left(\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda\rho}}{2} \operatorname{sh} 2 |k|^{1/2} \rho d\rho - \int_0^{\infty} e^{-\lambda\rho} \rho d\rho \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \pi \lambda}{|k|} \left(\frac{1}{4|k|^{1/2}} \left(\frac{e^{-(\lambda-2|k|^{1/2})\rho}}{\lambda-2|k|^{1/2}} + \frac{e^{-(\lambda+2|k|^{1/2})\rho}}{(\lambda+2|k|^{1/2})} \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{e^{-\lambda\rho}(\lambda+1)}{\lambda^2} \int_0^\infty \right) = \\
&= \frac{8 \pi}{\lambda (\lambda^2+4k)} \qquad (5.1.2)
\end{aligned}$$

En el caso en que $\lambda < 2 |k|^{1/2}$ E (V) $\rightarrow \infty$.

Para el cálculo de $E_V(S)$, si la recta G forma un ángulo α con la normal a la cara del poliedro en su punto de intersección, y siendo el elemento de área de la esfera de radio ρ igual a $d\omega = \left(\frac{\text{sen } k^{1/2} \rho}{k^{1/2}} \right)^2 d\Omega$ resulta que



$$dS = \frac{d\omega}{\cos \alpha}$$

de donde se obtiene

$$S = \int_{\Omega} \left(\frac{\text{sen } k^{1/2} \rho}{k^{1/2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos \alpha} d\Omega \qquad (5.1.3)$$

Como ρ y α son independientes resulta ($k < 0$)

$$E_V(S) = \frac{1}{|k|} \int_{\Omega} E(\text{sh}^2 |k|^{1/2} \rho) E\left(\frac{1}{\cos \alpha}\right) d\Omega \quad (5.1.4)$$

Por lo tanto de (3.1.16) y siendo $\lambda e^{-\lambda\rho}$ la probabilidad de que el radio vector esté entre ρ y $\rho + d\rho$ (4.1.4) será

$$\begin{aligned} E_V(S) &= \frac{1}{|k|} \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{\infty} 2\lambda e^{-\lambda\rho} \text{sh}^2 |k|^{1/2} \rho \, d\rho = \\ &= \frac{8\pi\lambda}{|k|} \int_0^{\infty} e^{-\lambda\rho} \text{sh}^2 |k|^{1/2} \rho \, d\rho = \\ &= \frac{16\pi}{\lambda^2 + 4k} \quad \text{si } \lambda > 2|k|^{1/2} \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

y en caso contrario diverge

También puede calcularse $E_V(S)$ usando resultados del capítulo IV §2. Para esto consideramos la variable aleatoria $f(dV(Q))$ asociada a cada elemento de volumen $dV(Q)$ de $H(k)$, que se define como 1 si el elemento de volumen dV contiene puntos del sistema de Poisson de planos y el segmento PQ no interseca a ningún plano y cero en los otros casos. Siendo por (4.1.3) la probabilidad de que un segmento PQ de longitud ρ no contenga a ningún punto del proceso de planos de parámetro λ igual a $e^{-\lambda\rho}$ y por otra parte de (4.2.4) el valor medio del área que contiene un elemento de volumen dV dados al azar es $2\lambda dV$ obtenemos

$$\begin{aligned}
E_V(S) &= \int_{Q \in H(k)} e^{-\lambda \rho} 2 \lambda \, dV = \\
&= \frac{2\lambda}{|k|} \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{\infty} e^{-\lambda \rho} \operatorname{sh}^2 |k|^{1/2} \rho \, d\rho = \\
&= \frac{16 \pi}{\lambda^2 + 4k} \quad \text{si } \lambda > 2|k|^{1/2} \qquad (5.1.6)
\end{aligned}$$

que coincide con lo hallado en (5.1.5)

De la misma forma calculamos $E_V(L)$ siendo por (4.2.5) que el valor medio de la longitud de las aristas de los poliedros para un elemento de volumen dado al azar es igual a

$$\frac{\pi}{2} \lambda^2 \, dV$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
E_V(L) &= \int_{Q \in H(k)} e^{-\lambda \rho} \frac{\pi}{2} \lambda^2 \, dV = \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{\Omega} d\Omega \frac{\lambda^2}{|k|} \int_0^{\infty} e^{-\lambda \rho} \operatorname{sh}^2 |k|^{1/2} \rho \, d\rho =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2 \pi^2 \lambda^2}{|k|} \left(\frac{2 |k|}{(\lambda^2 + 4k)\lambda} \right) = \frac{4 \pi^2 \lambda}{(\lambda^2 + 4K)} \quad (5.1.7)$$

si $\lambda > 2|k|^{1/2}$, y en caso contrario $E_V(L) \rightarrow \infty$.

Similarmente, usando que el número medio de vértices que contiene un elemento de volumen dado al azar en el espacio con un sistema de Poisson de planos de parámetro λ es según (4.2.1) igual a

$$\frac{\lambda^3}{6} \pi dV$$

resultará que

$$\begin{aligned} E_V(N) &= \int e^{-\lambda \rho} \frac{\lambda^3 \pi}{6} dV = \\ &= \frac{\lambda^3 \pi}{6 |k|} \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{\infty} e^{-\lambda \rho} \text{sh} |k|^{1/2} \rho d\rho = \\ &= \frac{2 \lambda^3 \pi^2}{3 |k|} \left(\frac{2 |k|}{(\lambda^2 + 4k)\lambda} \right) = \\ &= \frac{4 \lambda^2 \pi^2}{3(\lambda^2 + 4k)} \quad \text{si} \quad \lambda > 2|k|^{1/2} \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

y en caso contrario diverge.

Para los otros casos seguiremos un método indicado por R.E. Miles - para el plano como se menciona en [11]. Observemos que si elegimos un vértice del sistema de poliedros, llamémoslo A, tendremos 8 poliedros que tienen a A como uno de sus vértices. Sean P_i ($1 \leq i \leq 8$) esos poliedros, así que $P = \bigcup_1^8 P_i$ es un poliedro elegido según el método (a).

Pero si consideramos $P_\alpha = \bigcup_{1 \leq i \leq 4} P_{\sigma i}$, $P_\beta = \bigcup_{5 \leq i \leq 8} P_{\sigma i}$ siendo P_α y P_β poliedros convexos que tienen en común una cara (que contiene al punto A), entonces P_α y P_β resultarán poliedros elegidos según el método (b).

Si hacemos $P_{12} = P_1 \cup P_2$; $P_{34} = P_3 \cup P_4$; $P_{56} = P_5 \cup P_6$ y $P_{78} = P_7 \cup P_8$ de modo tal que cada P_{ij} es un poliedro convexo y todos ellos tienen una arista en común (con A perteneciente a dicha arista) entonces tenemos cuatro poliedros elegidos según el método (c).

Por último cada P_i ($1 \leq i \leq 8$) es un poliedro que tiene al punto A como uno de sus vértices, de modo que serán ocho poliedros elegidos según el método (d).

Como se vio en (4.1.6) el proceso de planos de parámetro λ induce sobre un plano arbitrario un proceso de rectas del mismo parámetro. Entendemos por parámetros el valor medio del número de puntos que el proceso de planos o de rectas determina sobre un segmento unidad fijo. En [11] L.A. Santaló y I. Yañez calculan para este caso los valores medios correspondientes a elegir un polígono eligiendo un punto del plano o un punto en una recta o un punto en un vértice. Notaremos estos valores medios $E_S^{(2)}$, $E_L^{(2)}$ y $E_N^{(2)}$ respectivamente.

Según [11] tenemos los valores

$$E_S^{(2)}(S) = \frac{2\pi}{\lambda^2+k} ; E_S^{(2)}(L) = \frac{\pi^2 L}{\lambda^2+k}$$

$$E_S^{(2)}(N) = \frac{\pi^2 \lambda^2}{2(\lambda^2+k)}$$

$$E_L^{(2)}(S) = \frac{\pi^2}{\lambda^2+k} , E_L^{(2)}(L) = \frac{(\pi^2+4)\lambda^2+4k}{2\lambda(\lambda^2+k)}$$

(5.1.9)

$$E_L^{(2)}(N) = \frac{(\pi^2+8)\lambda^2+8k}{4(\lambda^2+k)}$$

$$E_N^{(2)}(S) = \frac{\pi}{2(\lambda^2+k)} , E_N^{(2)}(L) = \frac{(\pi^2+8)\lambda^2+8k}{4\lambda(\lambda^2+k)}$$

$$E_N^{(2)}(N) = \frac{(\pi^2+24)\lambda^2+24k}{8(\lambda^2+k)}$$

Siempre para $\lambda > |k|^{1/2}$, en caso contrario los valores medios valen ∞ . También según (4.1.8) tenemos que $E^{(1)}(L) = 1/\lambda$.

Volvamos ahora a considerar los casos b), c) y d).

b) Valores medios cuando el poliedro tipo se obtiene eligiendo un punto al azar en una de las caras.

Según lo dicho anteriormente obtenemos

$$\begin{aligned}
E_S(V) &= \frac{1}{2} E_V(V) \\
E_S(S) &= \frac{1}{2} E_V(S) + E_S^{(2)}(S) \\
E_S(L) &= \frac{1}{2} E_V(L) + E_S^{(2)}(L) \\
E_S(N) &= \frac{1}{2} E_V(N) + E_S^{(2)}(N)
\end{aligned}
\tag{5.1.10}$$

donde los sumandos $E_S^{(2)}$ corresponden a los respectivos valores medios de la cara común a los poliedros P_α y P_β .

Reemplazando en (5.1.10) para $\lambda > 2|k|^{1/2}$ se tienen

$$\begin{aligned}
E_S(V) &= \frac{4 \pi}{\lambda(\lambda^2+4k)} \\
E_S(S) &= \frac{8 \pi}{\lambda^2+4k} + \frac{2 \pi}{\lambda^2+k} = \frac{2\pi(5\lambda^2+8k)}{(\lambda^2+4k)(\lambda^2+k)} \\
E_S(L) &= \frac{2 \tau^2 \lambda}{(\lambda^2+4k)} + \frac{\tau^2 \lambda}{\lambda^2+k} = \frac{3\tau^2 \lambda [\lambda^2+2k]}{(\lambda^2+4k)(\lambda^2+k)} \\
E_S(N) &= \frac{2 \tau^2 \lambda^2}{3(\lambda^2+4k)} + \frac{\tau^2 \lambda^2}{2(\lambda^2+k)} = \frac{\tau^2 \lambda^2 [7\lambda^2+16k]}{6(\lambda^2+4k)(\lambda^2+k)}
\end{aligned}
\tag{5.1.11}$$

c) Valores medios cuando el poliedro tipo se obtiene eligiendo un punto al azar en una de las rectas.

Tenemos en este caso

$$\begin{aligned}
E_V(V) &= \frac{1}{4} E_V(V) \\
E_V(S) &= \frac{1}{4} E_V(S) + 2 E_L^{(2)}(S) \\
E_V(L) &= \frac{1}{4} E_V(L) + 2 \left[E_L^{(2)}(L) - E^1(L) \right] \\
E_V(N) &= \frac{1}{4} E_V(N) + 2 \left[E_L^{(2)}(N) - 1 \right]
\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

donde los segundos sumandos corresponden a los valores medios de las dos caras poligonales que tienen en común a la arista que contiene al punto A, dados por (5.1.9)

Se obtienen así, si $\lambda > 2 |k|^{1/2}$

$$\begin{aligned}
E_L(V) &= \frac{2 \pi}{\lambda(\lambda^2+4k)} \\
E_L(S) &= \frac{4 \pi}{\lambda^2+4k} + \frac{2 \cdot \pi}{\lambda^2+k} = \frac{6\pi[\lambda^2+2k]}{(\lambda^2+4k)(\lambda^2+k)} \\
E_L(L) &= \frac{\pi^2 \lambda}{\lambda^2+4k} + 2 \left(\frac{(\pi^2+4)\lambda^2+4k}{2\lambda(\lambda^2+k)} - \frac{1}{\lambda} \right) = \\
&= \frac{2\lambda^4(\pi^2+1)+k(5\lambda^2(\pi^2+2)+8k)}{\lambda(\lambda^2+4k)(\lambda^2+k)} \\
E_L(N) &= \frac{\lambda^2 \pi^2}{3(\lambda^2+4k)} + 2 \left(\frac{(\pi^2+8)\lambda^2+8k}{4(\lambda^2+k)} - 1 \right) =
\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

$$= \frac{\lambda^4(5\pi^2+12)+2k(\lambda^2(7\pi^2+30)+24k)}{6(\lambda^2+4k)(\lambda^2+k)}$$

d) Valores medios cuando el poliedro tipo se obtiene eligiendo al azar uno de los v\u00e9rtices.

En este caso se tiene

$$\begin{aligned} E_N(V) &= \frac{1}{8} E_V(V) \\ E_N(S) &= \frac{1}{8} E_V(S) + 3 E_N^{(2)}(S) \\ E_N(L) &= \frac{1}{8} E_V(L) + 3 (E_N^{(2)}(L) - E^{(1)}(L)) \\ E_N(N) &= \frac{1}{8} E_V(N) + (3 E_N^{(2)}(N) - 5) \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

donde los segundos sumandos corresponden a los valores medios de las 3 caras que tienen en com\u00fan el v\u00e9rtice A.

De modo que si $\lambda > 2 |k|^{1/2}$

$$\begin{aligned} E_N(V) &= \frac{\pi}{\lambda(\lambda^2+4k)} \\ E_N(S) &= \frac{2\pi}{\lambda^2+4k} + \frac{3\pi}{2(\lambda^2+k)} = \frac{\pi(7\lambda^2+16k)}{2(\lambda^2+4k)(\lambda^2+k)} \\ E_N(L) &= \frac{\pi^2 \lambda}{2(\lambda^2+4k)} + \frac{3((\pi^2+8)\lambda^2+8k)}{4\lambda(\lambda^2+k)} - \frac{3}{\lambda} = \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

$$= \frac{\lambda^4 (5\pi^2 + 12) + 2k(\lambda^2 (7\pi^2 + 30) + 24k)}{4\lambda(\lambda^2 + 4k)(\lambda^2 + k)}$$

$$E_N(N) = \frac{\lambda^2 \pi^2}{6(\lambda^2 + 4k)} + \frac{3(\pi^2 + 24)\lambda^2 + 24k}{8(\lambda^2 + k)} - 5 =$$

$$= \frac{\lambda^4 (13\pi^2 + 96) + 8k(\lambda^2 (5\pi^2 + 60) + 48k)}{24(\lambda^2 + 4k)(\lambda^2 + k)}$$

En todos los casos si $\lambda < 2 |k|^{1/2}$ los valores medios divergen.

2.- RELACIONES ENTRE VALORES MEDIOS.

Llamemos $(\pi_i)_{i \in I}$ a los poliedros formados en $H(k)$ por un sistema de Poisson de planos de parámetro λ . Sea $K_0(t)$ una esfera de radio t , de modo - que para t fijo tenemos una familia finita de poliedros - sean π_i ($1 \leq i \leq h(t)$) - que verifican que $\pi_i \cap K_0(t) \neq \emptyset$.

Notemos $dF_t(V, S, L, N)$ a la probabilidad de que un poliedro, elegido al azar entre los $(\pi_i)_{1 \leq i \leq h(t)}$, tenga volumen comprendido entre V y $V+dV$, área entre S y $S+dS$, longitud de sus aristas entre L y $L+dL$ y N vértices.

Supongamos ahora que cuando $t \rightarrow \infty$ y por lo tanto $K_0(t)$ se expande - hasta cubrir todo el espacio, existe el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} dF_t = dF(V, S, L, N)$$

siendo $dF(V, S, L, N)$ la probabilidad de que un poliedro elegido al azar tenga volumen comprendido entre V y $V+dV$, área entre S y $S+dS$, longitud de aristas

entre L y $L+dL$ y N vértices.

Es decir que en dF se consideran a todos los $(\pi_i)_{i \in I}$ como igualmente probables, independientemente de cual sea su volumen, el área de sus caras, la longitud de sus aristas o el número de vértices que posea.

Por otra parte notemos dF_V , dF_S , dF_L , dF_N a la probabilidad de que eligiendo un poliedro según el método a), b), c) y d) respectivamente, éste tenga volumen entre V y $V+dV$, área entre S y $S+dS$, longitud de sus aristas entre L y $L+dL$ y N vértices.

Recordemos que elegir un poliedro según el método (a) es dar un punto $A \in H(k) = \bigcup_j E_j$ de modo que el poliedro seleccionado es el que verifica que $A \in \pi$. Como a mayor volumen de un poliedro hay mayor probabilidad de que resulte seleccionado, tendremos

$$dF_V = \frac{V}{E(V)} dF \quad (5.2.1)$$

Ver [11]

De igual manera se obtienen

$$dF_S = \frac{S}{E(S)} dF$$
$$dF_L = \frac{L}{E(L)} dF$$
$$dF_N = \frac{N}{E(N)} dF \quad (5.2.2)$$

Si en (5.2.1) multiplicamos por V,S,L y N e integramos sobre todos los valores de V,S,L y N respectivamente obtendremos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
 E(V) E_V(V) &= E(V^2) \\
 E(V) E_V(S) &= E(V.S) \\
 E(V) E_V(L) &= E(V.L) \\
 E(V) E_V(N) &= E(V.N)
 \end{aligned}
 \tag{5.2.3}$$

De igual forma de (5.2.2) se tiene

$$\begin{aligned}
 E(S) E_S(V) &= E(S.V) \\
 E(S) E_S(S) &= E(S^2) \\
 E(S) E_S(L) &= E(SL) \\
 E(S) E_S(N) &= E(S.N)
 \end{aligned}
 \tag{5.2.4}$$

$$\begin{aligned}
 E(L) E_L(V) &= E(L.V) \\
 E(L) E_L(S) &= E(L.S) \\
 E(L) E_L(L) &= E(L^2) \\
 E(L) E_L(N) &= E(LN)
 \end{aligned}
 \tag{5.2.5}$$

$$E(N) \cdot E_N(V) = E(NV)$$

$$E(N) \cdot E_N(S) = E(NS)$$

$$E(N) \cdot E_N(L) = E(NL)$$

$$E(N) \cdot E_N(N) = E(N^2)$$

(5.2.6)

De estas igualdades obtenemos las ecuaciones siguientes

$$E(V) E_V(S) = E(S) E_S(V) \quad (i)$$

$$E(V) E_V(L) = E(L) E_L(V) \quad (ii)$$

$$E(V) E_V(N) = E(N) E_N(V) \quad (iii)$$

$$E(S) E_S(L) = E(L) E_L(S) \quad (iv)$$

$$E(S) E_S(N) = E(N) E_N(S) \quad (v)$$

$$E(L) E_L(N) = E(N) E_N(L) \quad (vi)$$

(5.2.7)

de las que surgen las identidades

$$E_V(S) E_S(N) E_N(V) = E_S(V) E_V(N) E_N(S)$$

$$E_S(N) E_N(L) E_L(S) = E_N(S) E_S(L) E_L(N)$$

$$E_V(S) E_S(L) E_L(V) = E_S(V) E_V(L) E_L(S)$$

$$E_V(N) E_N(L) E_L(V) = E_N(V) E_V(L) E_L(N)$$

(5.2.8)

De (5.2.8) resulta que sólo tres de las ecuaciones dadas en (5.2.7) son independientes, luego para poder hallar los valores medios buscados necesitaremos una nueva relación entre ellos.

Para ésto recurrimos a la fórmula de Gauss-Bonnet.

Sea $(\Pi_i)_{i=1}^{h(t)}$ la subfamilia finita de poliedros del sistema de Poisson de planos que intersecan a $K_0(t)$.

Notemos con S_{ij} , N_{ij} y $\sum_{h=1}^{N_{ij}} \alpha_h^{ij}$, donde $1 \leq j \leq c_i$, al área, al número de vértices y a la suma de los ángulos interiores de la j -ésima cara del poliedro Π_i ($1 \leq i \leq h(t)$) siendo c_i el número de caras de dicho poliedro.

Luego la fórmula de Gauss-Bonnet para poliedros aplicada a cada cara de Π_i , $|10|$ dice que

$$\sum_{h=1}^{N_{ij}} \alpha_h^{ij} = k \cdot S_{ij} + (N_{ij} - 2) \pi \quad (5.2.9)$$

$$\sum_{\substack{1 \leq h \leq N_{ij} \\ 1 \leq j \leq c_i}} \alpha_h^{ij} = k \cdot S_i + 2\pi (A_i - c_i) \quad (5.2.10)$$

siendo S_i el área y A_i el número de aristas del poliedro Π_i .

De acuerdo a la fórmula de Euler-Poincaré $A_i - c_i = N_i - 2$, por lo tanto de (5.2.10) tenemos

$$k \cdot S_i + 2\pi N_i - \sum_{k,j} \alpha_h^{ij} = 4\pi \quad (5.2.11)$$

Pero si sumamos sobre todos los poliedros $\sum_{i=1}^{h(t)} \sum_{h,j} \alpha_h^{ij}$ resulta equi

valente a $\frac{6}{4} \pi \sum_{i=1}^{h(t)} N_i$ y por lo tanto haciendo $t \rightarrow \infty$ se tiene que

$$2k \cdot E(S) + \pi E(N) = 8\pi \quad (5.2.12)$$

3.- VALORES MEDIOS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN.

Las ecuaciones obtenidas en (5.2.7) y la ecuación (5.2.12) junto con los cálculos hechos en §1 nos permitirán calcular los valores medios para poliedros obtenidos por un sistema de Poisson de planos.

Por tanto de (5.2.7)(v), de (5.1.11) y (5.1.15) se obtiene que

$$E(N) = \frac{\pi}{3} \lambda^2 E(S) \quad (5.3.1)$$

y entonces de la igualdad obtenida por Gauss-Bonnet (5.2.12) resulta

$$E(S) = \frac{24\pi}{\lambda^2 \pi^2 + 6k} \quad (5.3.2)$$

$$E(N) = \frac{8\pi^2 \lambda^2}{(\pi^2 \lambda^2 + 6k)} \quad (5.3.3)$$

De los valores medios calculados en (5.1.11) y (5.1.13) y la ecuación (5.2.7)(iv) obtenemos

$$\frac{\pi}{2} \lambda E(S) = E(L) \quad (5.3.4)$$

de donde se obtiene que

$$E(L) = \frac{12 \pi^2 \lambda}{\lambda^2 \pi^2 + 6k} \quad (5.3.5)$$

Por último obtenemos de la ecuación (5.2.7)(i)

$$E(V) = \frac{E(S)}{4 \lambda} \quad (5.3.6)$$

de donde resulta

$$E(V) = \frac{6 \pi}{\lambda (\lambda^2 \pi^2 + 6k)} \quad (5.3.7)$$

Podemos también hallar el valor medio $E(A)$ del número de aristas A y el valor medio $E(c)$ del número de caras C de un poliedro típico.

Para ello, puesto que en cada vértice concurren exactamente 3 aristas (los casos que más de tres planos pasan por un mismo punto son de medida nula) es $3N = 2A$ y por lo tanto

$$E(A) = \frac{3}{2} E(N) = \frac{12\pi^2 \lambda^2}{\pi^2 \lambda^2 + 6k} \quad (5.3.8)$$

Por otra parte para el número de caras vale la relación de Euler $N - A + C = 2$ y por lo tanto

$$E(C) = 2 - E(N) + E(A) = \frac{6\pi^2 \lambda^2 + 12k}{\pi^2 \lambda^2 + 6k} \quad (5.3.9)$$

Para los valores medios de segundo orden de (5.2.3) resulta que

$$\begin{aligned} E(V^2) &= E(V) \cdot E_V(V) = \\ &= \frac{48 \pi^2}{\lambda^2 (\lambda^2 \pi^2 + 6k) (\lambda^2 + 4k)} \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

De (5.2.4)

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E(S) E_S(S) = \\ &= \frac{48 \pi^2 (5\lambda^2 + 8k)}{(\lambda^2 \pi^2 + 6k) (\lambda^2 + 4k) (\lambda^2 + k)} \end{aligned} \tag{5.3.11}$$

de (5.2.5)

$$\begin{aligned} E(L^2) &= E(L) E_L(L) = \\ &= \frac{12\pi^2 (2\lambda^4 (\pi^2 + 1) + k(5\lambda^2 (\pi^2 + 2) + 8k))}{(\lambda^2 \pi^2 + 6k) (\lambda^2 + 4k) (\lambda^2 + k)} \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

de (5.2.6)

$$\begin{aligned}
E(N^2) &= E(N) E_N(N) = \\
&= \frac{\pi^2 \lambda^2 (\lambda^4 (13\pi^2 + 96) + 8k(\lambda^2 (5\pi^2 + 60) + 48k))}{3(\lambda^2 + 4k)(\lambda^2 + k)(\pi^2 \lambda^2 + 6k)} \quad (5.3.13)
\end{aligned}$$

de (5.2.3)

$$\begin{aligned}
E(V.S) &= E(V) \cdot E_V(S) = \\
&= \frac{96 \pi^2}{\lambda (\lambda^2 \pi^2 + 6k) (\lambda^2 + 4k)} \quad (5.3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(V.L) &= E(V) \cdot E_V(L) = \\
&= \frac{24 \pi^2}{(\lambda^2 + 4k) (\lambda^2 \pi^2 + 6k)} \quad (5.3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(V.N) &= E(V) E_V(N) = \\
&= \frac{8 \pi^3 \lambda}{(\lambda^2 + 4k) (\lambda^2 \pi^2 + 6k)} \quad (5.3.16)
\end{aligned}$$

De (5.2.4) obtenemos

$$E(S.L) = E(S) \cdot E_S(L) =$$

$$= \frac{72 \pi^2 \lambda (\lambda^2 + 2k)}{(\lambda^2 + 4k) (\lambda^2 + k) (\lambda^2 \pi^2 + 6k)} \quad (5.3.17)$$

$$E(S.N) = E(S) \cdot E_S(N) =$$

$$= \frac{4 \pi^2 \lambda^2 (7\lambda^2 + 16k)}{(\lambda^2 + 4k) (\lambda^2 + k) (\lambda^2 \pi^2 + 6k)} \quad (5.3.18)$$

Finalmente de (5.2.5)

$$E(LN) = E(L) \cdot E_L(N) =$$

$$= \frac{2\pi^2 \lambda (\lambda^4 (5\pi^2 + 12) + 2k(\lambda^2 (7\pi^2 + 30) + 24k))}{(\lambda^2 + 4k) (\lambda^2 + k) (\lambda^2 \pi^2 + 6k)} \quad (5.3.19)$$

Estos son los valores medios para $\lambda > 2|k|^{1/2}$, en caso contrario divergen. Pueden resumirse en el siguiente cuadro:

CUADRO IV: Valores medios de primer y segundo orden para un poliedro tipo en $II(k)$.

V	$\frac{48 \pi^2}{\lambda^2 (\lambda^2 \pi^2 + 6k) (\lambda^2 + 4k)}$					
S	$\frac{96 \pi^2}{\lambda (\lambda^2 \pi^2 + 6k) (\lambda^2 + 4k)}$	$\frac{48 \pi^2 (5\lambda^2 + 8k)}{(\lambda^2 \pi^2 + 6k) (\lambda^2 + 4k) (\lambda^2 + k)}$				
L	$\frac{24 \pi^2}{(\lambda^2 + 4k) (\lambda^2 \pi^2 + 6k)}$	$\frac{72 \pi^2 \lambda (\lambda^2 + 2k)}{(\lambda^2 + 4k) (\lambda^2 + k) (\lambda^2 \pi^2 + 6k)}$	$\frac{12 \pi^2 (2\lambda^4 (\pi^2 + 1) + k (5\lambda^2 (\pi^2 + 2) + 8k))}{(\lambda^2 \pi^2 + 6k) (\lambda^2 + 4k) (\lambda^2 + k)}$			
N	$\frac{8 \pi^3 \lambda}{(\lambda^2 + 4k) (\lambda^2 \pi^2 + 6k)}$	$\frac{4 \pi^2 \lambda^2 (7\lambda^2 + 16k)}{(\lambda^2 + 4k) (\lambda^2 + k) (\lambda^2 \pi^2 + 6k)}$	$\frac{2 \pi^2 \lambda (\lambda^4 (5\pi^2 + 12) + 2k (\lambda^2 (7\pi^2 + 30) + 24k))}{(\lambda^2 + 4k) (\lambda^2 + k) (\lambda^2 \pi^2 + 6k)}$	$\frac{\pi^2 \lambda^2 (\lambda^4 (13\pi^2 + 96) + 8k (\lambda^2 (5\pi^2 + 60) + 48k))}{3 (\lambda^2 + 4k) (\lambda^2 + k) (\lambda^2 \pi^2 + 6k)}$		
1	$\frac{6 \pi}{\lambda (\lambda^2 \pi^2 + 6k)}$	$\frac{24 \pi}{\lambda^2 \pi^2 + 6k}$	$\frac{12 \pi^2 \lambda}{\lambda^2 \pi^2 + 6k}$	$\frac{8 \pi^2 \lambda^2}{(\pi^2 \lambda^2 + 6k)}$		
	V	S	L	N		

Haciendo $k = 0$ resultan los valores medios para el caso euclidiano, que coinciden con los dados en [10] pág. 297 por L.A. Santaló y que fueron obtenidos por R.E. Miles en [5] .

BIBLIOGRAFIA

- 1.- COWAN, R.: "Properties of ergodic random mosaics", Math. Nachr. 97, (1980), pág. 89-102.
- 2.- COXETER, H.S.M.: "Non euclidean geometry". University of Toronto Press. Toronto, (1957).
- 3.- GALLEGO GOMEZ, E.: "Tesis de licenciatura de la Universidad Politécnica de Barcelona" (1984).
- 4.- MATHERON, G.: "Random sets and integral geometry". J. Wiley, New York, (1975).
- 5.- MILES, R.E.: "The random division of the space" Adv. in Applied Prob. Suppl. (1972), pág. 243-266.
- 6.- MILES, R.E.: "The various aggregates of random polugons determined by random lines in a plane", Advances in Math. 10 (1973), pág. 256-290.
- 7.- SANTALO, L.A.: "Valor medio del número de regiones que un cuerpo del espacio es dividido por n planos arbitrarios" Rev. UMA, 10, (1945) pág. 101-108.
- 8.- SANTALO, L.A.: "Geometría no-euclidiana". Cuaderno de Eudeba, Buenos Aires (1961).
- 9.- SANTALO, L.A.: "Horocycles and convex sets in the hyperbolic plane", Arch. Math., Basel, (1967) pág. 529-533.
- 10.- SANTALO, L.A.: "Integral geometry and geometric probability". Addison Wesley, Reading (1976).

- 11.- SANTALO, L.A. and YANEZ, L.: "Averages for polygons formed by random lines in euclidean and hyperbolic plane" Journal of App.Prob. 9 N° 4, (1972) 140-157.
- 12.- SCHMIDT, B. and H. MATHEISS: "The probability that a random polytope is bounded" Math. of Oper. Research Vol. 2 N° 3 (1977) pág. 292-296.

L. Santalo

~~Yanez~~