

Tesis de Posgrado

La condición de los senos de Abbe en la óptica de Fourier y su aplicación al análisis de sistemas ópticos

Comastri, Silvia Ana Elba

1984

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias
Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Comastri, Silvia Ana Elba. (1984). La condición de los senos de Abbe en la óptica de Fourier y su aplicación al análisis de sistemas ópticos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1865_Comastri.pdf

Cita tipo Chicago:

Comastri, Silvia Ana Elba. "La condición de los senos de Abbe en la óptica de Fourier y su aplicación al análisis de sistemas ópticos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1984.

http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1865_Comastri.pdf

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
LABORATORIO DE ÓPTICA

"LA CONDICION DE LOS SENOS DE ABBE EN LA
OPTICA DE FOURIER Y SU APLICACION AL ANALISIS
DE SISTEMAS OPTICOS"

SILVIA A. COMASTRI

Trabajo de Tesis presentado para optar
al Título de Doctor en Ciencias Físicas

Director: Prof. Dr. J.M.Simon

- 1865 -
y.2

- 1984 -

A més hi ha

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. J.M.Simon, por su aporte fundamental a mi formación profesional y por su apoyo y comprensión.

A mi madre y a mi esposo quienes me alentaron durante la ejecución de esta Tesis.

Al Dr. Ricardo Depine por su desinteresada ayuda en el desarrollo de programas de computadora.

A la Srta. Marta Pedernera por haber realizado con cariño los dibujos de este trabajo.

A la Srta. Cecilia Capdevielle por su trabajo de mecanografiado.

Este trabajo fue realizado con el apoyo parcial de CONICET y subsidio de la Universidad de Buenos Aires.

INDICE

Página

CAPITULO I

INTRODUCCION	1
--------------	---

CAPITULO II

ANALISIS DE SISTEMAS OPTICOS. TEORIAS USUALES	9
--	---

II.1 Formación de imágenes	9
----------------------------	---

II.2 Función aberración usualmente considerada	13
--	----

II.3 Condición de los Senos a partir de teorías geométricas usuales	19
--	----

CAPITULO III

NUEVOS METODOS PARA EL ANALISIS DE SISTEMAS OPTICOS	24
--	----

III.1 Fundamentos de la teoría desarrollada por nosotros	24
---	----

III.1.1 Relación entre rayo y frecuencia espacial. Desarrollo del objeto en ondas planas.	24
--	----

III.1.2 Frecuencias espaciales en el objeto y en la imagen. Distribución de luz en la imagen	26
---	----

III.1.3 Isoplanatismo	28
-----------------------	----

III.2 Obtención de la Condición de los Senos axial a partir de la óptica de Fourier	30
--	----

III.3 Generalización de la Condición de los Senos para objetos extraaxiales	32
--	----

III.4	Cálculo de la derivada de la función aberración respecto al campo	34
III.5	Cálculo de aberraciones mediante trazado de rayos	39
III.6	Coefficientes de la función aberración y de su derivada respecto al campo. Mejor provecho de la información presente en el trazado de rayos	40
III.7	Cálculo de la función aberración en puntos desplazados del campo	45
III.8	Exploración de pupila	46
III.8.1	Sistema libre de vigneteo	48
III.8.2	Sistema con vigneteo	49

CAPITULO IV

	PRUEBAS NUMERICAS	51
IV.1	Triplete	51
IV.1.1	Triplete libre de vigneteo	54
IV.1.2	Triplete con vigneteo	61

CAPITULO V

	DISCUSION	68
--	-----------	----

APENDICE I

	OPTICA DE FOURIER	70
--	-------------------	----

APENDICE II

COORDENADAS EN LA ESFERA DE REFERENCIA Y
 FRECUENCIAS ESPACIALES 78

II.1 Relación entre coordenadas en las esferas
 de referencia y frecuencias espaciales
 generalizadas 78

II.2 Relación entre $\partial\omega/\partial\zeta'_i$ y $\partial\omega/\partial\zeta'_i u'_x$ 80

APENDICE III

RELACION ENTRE LA $\partial\omega/\partial\zeta'_i$ HALLADA POR
 NOSOTROS Y LA $\partial\omega/\partial\zeta'_i$ HALLADA POR
 H.H.HOPKINS [4] 82

APENDICE IV

PROGRAMAS DE COMPUTADORA 89

REFERENCIAS 97

CAPITULO I

INTRODUCCION

I. INTRODUCCION

La Condición de los Senos usual fue enunciada por primera vez por Abbe. Ernst Abbe (1840-1905) quien trabajaba con un fabricante de microscopios, Carl Zeiss, observó que para todos los puntos del objeto de un elemento de superficie cercano al eje óptico y para conseguir impresión uniforme en la imagen, el aumento de las distintas zonas de un objetivo de microscopio debe ser el mismo. Luego pensó que debía existir alguna relación no ambigua entre los ángulos de los rayos de un haz arbitrariamente grande en el espacio objeto y los correspondientes rayos en el espacio imagen. En 1873, Abbe encontró que para puntos conjugados el cociente de los Senos de los dos ángulos debe ser constante a lo largo de toda la abertura del sistema para que todas las zonas del objetivo formen imágenes del mismo tamaño, este requerimiento es la Condición de los Senos axial usual.

Si en un sistema óptico la imagen de un punto axial es libre de aberración esférica y si se cumple la Condición de los Senos axial usual entonces en puntos fuera de eje dicho sistema dará imágenes libres de coma. El incumplimiento de la Condición de los Senos da la coma de los puntos extraaxiales cercanos al eje y dado que esta es la primera aberración que aparece cuando nos alejamos un poco del eje óptico, en este caso resulta inmediato que la variación de la función aberración con el campo está dada por el incumplimiento de la Condición de los Senos aunque, como veremos, es posible extender este resultado al caso general de objetos extraaxiales. La relación entre incumplimiento de la Condición de los Senos y variación

de la función aberración con el campo para objeto axial fue mencionada por varios autores, por ejemplo por H.H.Hopkins [4]. En 1950, H.H.Hopkins [3] deduce una Condición de los Senos axial que el llama generalizada (que difiere de la usual en los ángulos considerados y que trataremos en el inciso II.3) a partir de exigir que se anule la coma y demuestra que de ella se obtiene la Condición usual cuando el objeto axial es libre de aberración esférica.

Usualmente se deduce la Condición de los Senos axial a partir de consideraciones de óptica geométrica. En particular para una dioptra se puede obtener a partir de la ley de Snell como veremos en el inciso II.3. Nosotros [6] mostramos en el inciso III.2 que la Condición de los Senos usual puede ser obtenida en base a consideraciones de óptica de Fourier simplemente requiriendo que las frecuencias espaciales locales en la imagen sean proporcionales a aquellas del objeto. Además, definiendo adecuadamente las frecuencias espaciales para puntos extraaxiales del campo, obtenemos en el inciso III.3 la Condición de los Senos extendida para objetos fuera de eje [7]. Por otra parte, en el Apéndice II relacionamos dichas frecuencias con las coordenadas en las pupilas.

La teoría desarrollada por nosotros se basa en tres hechos conocidos que explicamos en el inciso III.1 y que son los siguientes: 1) dado que un rayo de luz representa también una frecuencia espacial, podemos, de acuerdo con la teoría de Fourier, pensar que la distribución de luz en el objeto es una superposición lineal de ondas planas de distintas frecuencias espaciales, 2) debido a que la formación de imágenes es un fenómeno local podemos hacer la aproxi-

mación (que mostramos que en realidad no es totalmente necesaria) que cada frente de ondas plano en el espacio objeto genera un frente de ondas plano en la imagen de determinada frecuencia espacial y que la distribución de luz en la imagen es también una superposición lineal de ondas planas, 3) la condición de isoplanatismo se puede estudiar analizando el comportamiento de las frecuencias espaciales y, por ejemplo, para un objeto axial libre de aberración esférica la condición de isoplanatismo requiere que cada frecuencia espacial presente en el objeto y que pasa a través del sistema origine una frecuencia que sea igual a ella en la imagen.

Por otra parte en sistemas con aberraciones mucho mayores que el límite de Rayleigh la forma de la imagen de un punto puede obtenerse con un grado razonable de exactitud mediante óptica geométrica usando el método del diagrama de puntos que explicamos someramente en el inciso II.1. Sin embargo en el análisis de sistemas ópticos centrados usualmente las aberraciones no son tan grandes y se utilizan los métodos de Fourier los cuales tratamos en el inciso II.1 y en el Apéndice I Los fundamentos de la óptica de Fourier están (sorprendentemente) en los trabajos de E. Abbe y Lord Rayleigh (1842-1919) [13]. Abbe asocia todas las limitaciones de la difracción con el pasaje de luz desde el objeto a la pupila de entrada y de acuerdo con él sólo cierta porción de las componentes de difracción generadas por el objeto atraviesan la pupila de entrada finita, no llegando a la misma las altas frecuencias. Rayleigh asocia los efectos de difracción con el pasaje de luz desde la pupila de salida a la imagen y nosotros adoptamos su punto de vista el cual es equivalente al de Abbe

debido principalmente a que las pupilas son conjugadas.

Para utilizar los métodos de Fourier en el diseño y análisis de sistemas ópticos es necesario calcular las aberraciones. Como tratamos en el inciso II.1, las aberraciones aparecen debido a que los sistemas reales no son perfectos y, para evaluarlas, se puede desarrollar la función aberración en serie de potencias de las coordenadas en la apertura y el campo con coeficientes constantes como mostramos en el inciso II.2. Sin embargo, usualmente se evalúa la función aberración para un dado punto del campo y por lo tanto se la considera como un polinomio de las coordenadas en la apertura de modo que los coeficientes del desarrollo dependen del punto del campo en cuestión. Los coeficientes pueden ser hallados por diversos métodos que pueden ser numéricos trazando rayos a través del sistema o analíticos.

El cómputo analítico de aberraciones tiene una larga tradición en la literatura. Expresiones para los coeficientes de cuarto orden para sistemas ópticos centrados fueron dadas por Seidel (1856) y los coeficientes de sexto orden fueron calculados posteriormente por otros autores, por ejemplo Schwarzschild. La existencia de las computadoras en las últimas tres o cuatro décadas ha modificado radicalmente los métodos usados por los diseñadores. Antiguamente un diseñador debía recurrir a toda posible técnica para evitar trazar rayos ya que el trazado requería gran cantidad de tiempo y esfuerzo. Conrady (1929) por ejemplo, desarrolló métodos mediante los cuales extraía la máxima información que podía de pocos rayos trazados. Actualmente, si bien en la etapa de diseño es aún útil usar fórmulas

analíticas en función de los parámetros constructivos (posición del diafragma de apertura, índices de refracción, radios de curvatura de las dioptras y separación entre las mismas), tanto en esta etapa como en la de análisis se usa trazado de rayos ya que la computadora ha reducido el tiempo de trazado en varios órdenes de magnitud. Powell [5], por ejemplo, desarrolló un programa de computadora para diseño y análisis de sistemas ópticos, en la parte de diseño computa las aberraciones de cuarto orden analíticamente mediante trazado paraxial de los rayos marginal y principal y las de orden superior por trazado exacto y en la parte de análisis (basada en trabajos desarrollados en la Universidad de Reading bajo la supervisión de H.H. Hopkins) hace exploración de pupila, computa las aberraciones mediante trazado de rayos para ajustar un polinomio y evalúa la función transferencia óptica.

Algunos diseñadores dicen que para analizar sistemas ópticos es necesario trazar muchos rayos, por ejemplo Volosov y Zero (1969) piensan que para ciertos sistemas se deben trazar del orden de 100 rayos. Sin embargo una elección adecuada del conjunto de rayos trazados nos permite obtener un sistema de ecuaciones de los cuales se pueden obtener los coeficientes sin necesidad de trazar tantos rayos y por lo tanto sin aumentar innecesariamente los costos de computadora. Dado que generalmente se halla la función aberración para cierto punto del campo se utilizan las ecuaciones que dan la función aberración y sus derivadas respecto a la apertura en función de variables que se computan por trazado como vemos en el inciso II.2.

Nosotros, sin embargo, consideramos en un comienzo la función aberración general o sea la que depende no sólo de las coordenadas en la esfera de la pupila de salida sino también del campo. En el inciso III.4 obtenemos [7] las ecuaciones que dan las derivadas de la función aberración respecto a las coordenadas del campo cuando se mantienen constantes las coordenadas en la esfera de la pupila de salida como función de variables que pueden ser evaluadas por trazado de rayos. Demostramos también que estas derivadas están directamente relacionadas con el incumplimiento de la Condición de los Senos extendida para objeto extraaxial obtenida por nosotros. Además en el Apéndice III mostramos que estas ecuaciones coinciden con las que se pueden deducir a partir de la teoría desarrollada por H.H. Hopkins [4] aunque este autor utiliza un camino diferente al nuestro para obtenerlas y, si bien relaciona dichas derivadas con el isoplanatismo, no las aplica al cálculo de aberraciones mediante trazado de rayos ni sugiere esta aplicación.

Para evaluar las aberraciones mediante trazado de rayos tenemos en principio cinco ecuaciones (la de la función aberración y las de sus cuatro derivadas). Sin embargo demostramos que para sistemas ópticos centrados una de las ecuaciones es linealmente dependiente de las demás y en el inciso III.5 damos el sistema de cuatro ecuaciones independientes del que disponemos para cada rayo alabeado trazado. Los coeficientes constantes de la función aberración general podrían ser evaluados utilizando estas cuatro ecuaciones. Como usualmente se considera un punto fijo del campo no se evalúan estos coeficientes sino los que dependen del campo. En el inciso III.6

mostramos que si se considera un punto fijo del campo, se puede escribir no sólo la función aberración sino también su derivada respecto al campo como serie de potencias de las coordenadas en la apertura. Los coeficientes de la función aberración los hallamos como se hace usualmente y los de la derivada los hallamos con la ecuación para la derivada que obtenemos. De este modo por un lado las ecuaciones y coeficientes con los cuales tratamos están separados en dos grupos y son menos en cantidad que los necesarios para evaluar la función aberración general y por el otro aprovechamos las ecuaciones introducidas para hallar la variación de la función aberración con el campo.

Con las relaciones que obtenemos es posible conseguir un mejor provecho de la información contenida en el trazado de rayos que el que se consigue habitualmente. Para ver esto en ejemplos concretos desarrollamos programas de computadora que explicamos en el Apéndice IV mediante los cuales se trazan rayos provenientes de un dado punto del campo y se calculan los coeficientes de la función aberración y de su derivada respecto al campo. En el inciso III.7 mostramos que en base al cálculo de la función aberración y de su derivada para cierto punto del campo se puede calcular la función aberración en un punto cercano sin necesidad de hacer un trazado de rayos adicional como se hace usualmente.

Previo al cálculo de los coeficientes es necesario estudiar si el sistema óptico es o no libre de vigneteo. En el inciso III.8 damos un método mediante el cual es posible explorar la pupila. Con el fin de hallar la pupila de entrada verdadera para objeto extraaxial

definimos rayo principal a aquel que pasa por su centro y exigimos, además, que las frecuencias espaciales generalizadas de los dos rayos marginales meridionales sean iguales en módulo. Para que puedan verificarse simultáneamente las dos condiciones impuestas es necesario desplazar el plano de la pupila de entrada extraaxial respecto del plano de la pupila de entrada axial.

En el inciso IV.1 mostramos los resultados numéricos obtenidos para un triplete a partir de nuestras ecuaciones y programas cuando se desarrolla la función aberración hasta octavo orden. Primero suponemos el sistema libre de vigneteo y luego modificamos los tamaños de las lentes para introducir vigneteo. En ambos casos los coeficientes de la función aberración y de su derivada se evalúan trazando ocho rayos además del rayo principal aunque en el caso con vigneteo hacemos una exploración de pupila adicional.

CAPITULO II

ANALISIS DE SISTEMAS OPTICOS

TEORIAS USUALES

II. ANALISIS DE SISTEMAS OPTICOS. TEORIAS USUALES

En este trabajo trataremos con un grupo particular de sistemas ópticos formadores de imágenes que son los sistemas ópticos centrados refractores. Dado que se han realizado numerosos estudios concernientes a estos sistemas veremos en este capítulo algunos aspectos de las teorías usuales.

II.1 Formación de imágenes

La formación de imágenes se puede estudiar desde el punto de vista de óptica geométrica o desde el punto de vista de óptica física. Recordemos primero que significa que un sistema óptico forme una imagen perfecta y luego como se tienen en cuenta las aberraciones según estos dos puntos de vista.

Desde el punto de vista de óptica geométrica un sistema óptico perfecto da un punto imagen de un punto objeto. En términos de rayos, los rayos emergentes en el espacio imagen pasan exactamente a través del punto imagen y en términos de frentes de onda, la onda emergente es exactamente esférica. Luego los caminos ópticos desde el punto objeto al punto imagen son independientes de la zona de la abertura atravesada y todas las perturbaciones llegan en fase al punto imagen. La posición y el tamaño de la imagen que se obtendría si el sistema óptico fuese perfecto pueden ser hallados mediante la teoría de primer orden o gaussiana la cual da resultados exactos si se considera tanto en la

apertura como en el campo una región infinitesimal alrededor del eje óptico conocida como región paraxial. Fuera de la región paraxial los sistemas ópticos reales no son perfectos sino que están afectados de aberraciones. Esto significa que la imagen de un objeto puntual es una mancha en vez de un punto, o sea el frente de onda emergente está distorsionado respecto de su forma esférica ideal, luego definimos la imagen que consideraremos ideal o sea el que tomaremos como referencia. Para objeto axial diremos que el punto imagen ideal es el calculado por óptica gaussiana, quedando definido de este modo el plano imagen como aquel perpendicular al eje óptico que pasa por el punto imagen axial. Para objeto extraaxial se calculan primero la pupila de entrada y la de salida por óptica geométrica y luego diremos, como se hace a menudo, que el punto imagen es la intersección del rayo principal con el plano imagen gaussiano. Una vez definido cual es el punto imagen ideal, la esfera de referencia queda definida como aquella que tiene centro en el punto imagen ideal y radio igual a la distancia desde el centro de la pupila de salida a dicho punto imagen. Con el punto imagen y la esfera de referencia ya definidos podremos considerar las aberraciones como aberraciones del frente descritas mediante la función aberración o como aberraciones transversales de los rayos. La aberración transversal de un rayo es la distancia desde el punto imagen ideal al punto de intersección del rayo con el plano imagen. La función aberración del frente es el camino óptico desde la esfera de referencia al frente de ondas real medido a lo largo del

rayo. Acá tomaremos la función aberración como positiva si la esfera de referencia está adelante del frente de ondas real o sea en el caso de la figura 2 es negativa.

Desde el punto de vista de óptica física se puede demostrar que, dado que la apertura de los sistemas ópticos reales es finita, no se tiene una concentración infinita de energía en el punto imagen y, en el plano imagen perpendicular al eje óptico la imagen formada por un sistema óptico perfecto no es un punto sino que es una figura de difracción de Fraunhofer. En particular, para un sistema óptico que tiene una abertura circular la figura de difracción correspondiente a la imagen de una fuente puntual es la figura de Airy. Para sistemas ópticos reales las aberraciones hacen que la figura de difracción ideal se distorsione. Si la aberración es pequeña las diferencias de fase entre las perturbaciones que llegan al centro de la imagen de una fuente puntual son pequeños y la imagen retiene la forma de un máximo central fuerte (de menor intensidad en el centro que la del centro del patrón de Airy ideal) rodeado de máximos secundarios algunos de los cuales son de mayor intensidad que los del patrón ideal. De acuerdo con Rayleigh se puede decir que la imagen no estará seriamente deteriorada si las aberraciones del frente no exceden $\lambda/4$.

Para sistemas con aberraciones mucho mayores que el límite de Rayleigh se puede obtener un resultado razonable acerca de la forma de la imagen de un punto mediante óptica geométrica usando el método del diagrama de puntos. Este diagrama se consigue divi-

diendo la pupila de entrada en un gran número de áreas iguales y trazando un rayo desde el punto objeto a través del centro de cada una de estas áreas pequeñas. Luego se grafica la intersección de cada rayo con el plano imagen y como cada rayo representa la misma fracción de la energía total en la imagen, la densidad de estos puntos en el gráfico es una medida de la densidad de energía [15].

Si bien para sistemas con grandes aberraciones los diagramas de puntos dan buenos resultados, esta técnica es costosa en tiempo de cómputo. Entonces para sistemas ópticos centrados, cualesquiera sean sus aberraciones, actualmente se prefiere calcular la función aberración hasta cierto orden a partir de unos pocos rayos bien elegidos y luego usar los métodos de Fourier para hallar la distribución de luz en la imagen. Para aplicar estos métodos se puede considerar el sistema óptico como una caja negra con dos terminales: la pupila de entrada y la de salida de modo que los efectos de difracción son importantes desde el objeto a la pupila de entrada y desde la pupila de salida a la imagen. Como vemos en el Apéndice I, para sistema lineal e isoplanático la distribución de luz en la imagen es la convolución de la distribución de luz en el objeto con la función ensanchamiento siendo esta la antitransformada de Fourier de la función transferencia.

Como para evaluar la función transferencia es necesario hallar la función aberración se tiene en cuenta que esta es, en ge-

neral, una función de las coordenadas en la imagen y en la apertura. Las coordenadas en la apertura podrían ser la intersección del rayo en estudio con el plano de la pupila de salida ó con la esfera de referencia en la pupila de salida. Según H.H.Hopkins [4] es necesario que se considere la superficie de la pupila como aquella de la esfera de referencia para que las aberraciones transversales en el plano imagen estén dadas por la derivada respecto a la apertura de la función aberración y además para aplicar con validez el tratamiento de Fourier de funciones transferencia al problema de formación de imágenes. Aquí adoptamos, igual que H.H.Hopkins, como coordenadas en la apertura las correspondientes a la esfera de referencia. En el siguiente inciso veremos algunos aspectos de la teoría usual referente a la función aberración.

II.2 Función aberración usualmente considerada

Con el fin de ver como se procede habitualmente para hallar la función aberración mediante trazado de rayos, y en todo este trabajo, consideramos el sistema de coordenadas de la figura 1 donde se tiene en cuenta un rayo alabeado cualquiera. Para sistemas ópticos centrados y sin pérdida de generalidad, se puede considerar que el sistema de coordenadas en el plano objeto se elige de modo que $\eta = 0$ y si además consideramos un rayo meridional, por simplicidad en el dibujo aunque en las ecuaciones consideramos un rayo alabeado, se tiene el sistema de coordenadas de la figura 2.

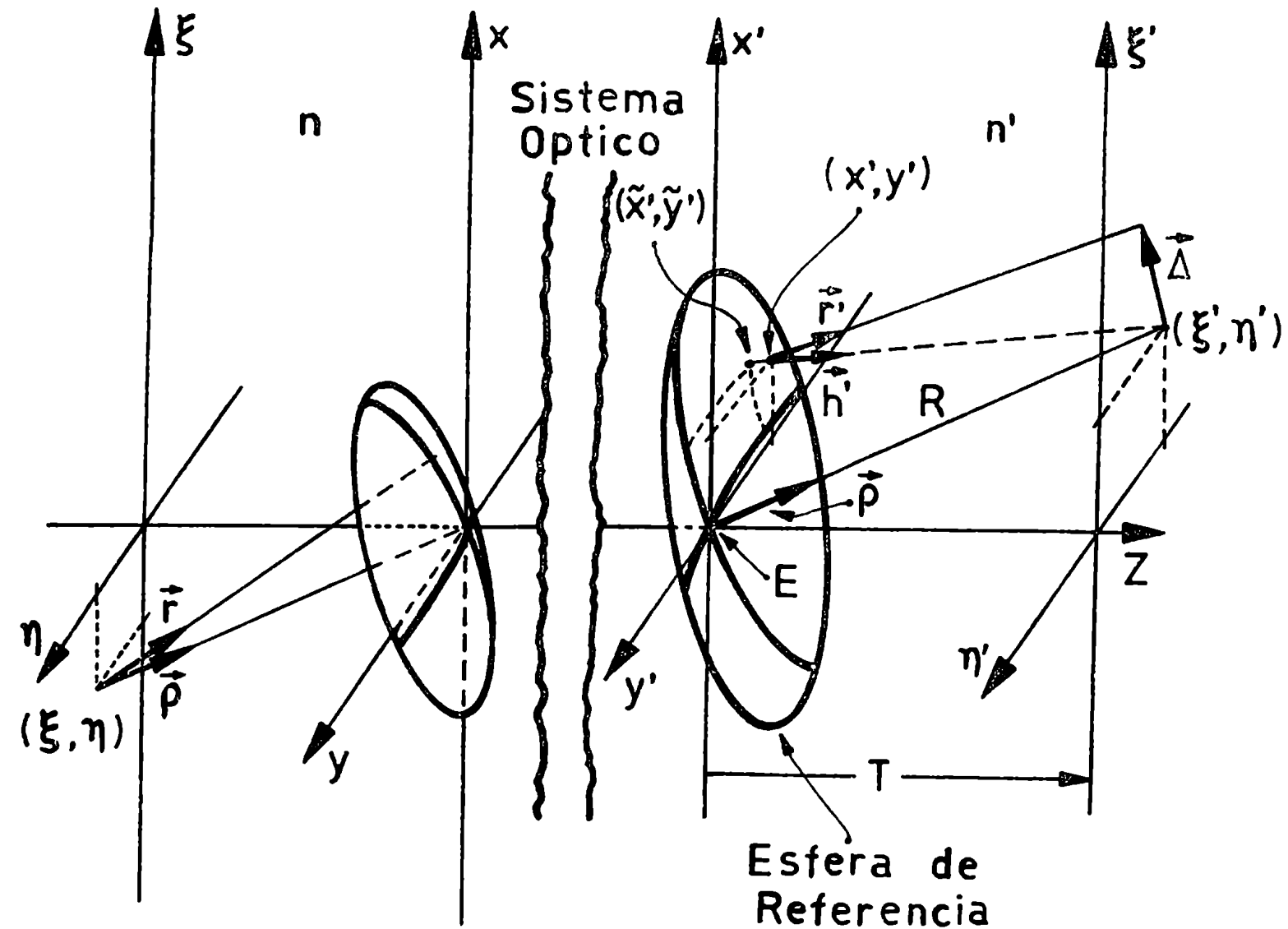


Figura 1: Sistema de coordenadas

- z : eje óptico
 (ξ, η) : coordenadas en objeto
 (x, y) : coordenadas en plano de PE
 (\tilde{x}, \tilde{y}) : coordenadas rectangulares en la esfera de referencia de PS
 R : radio de la esfera de referencia
 T : distancia desde el plano de la PS al plano imagen
 $\vec{p}, \vec{p}', \vec{r}, \vec{r}'$: vectores a lo largo de los rayos con componente unitaria según z
 $\vec{\Delta} = (\Delta\xi, \Delta\eta, 0)$: aberración transversal del rayo.
- n, n' : índices de refracción
 (ξ', η') : coordenadas en imagen
 (x', y') : coordenadas en plano PS

Como dijimos, consideramos la función aberración dependiente de la apertura y del campo que llamamos $\mathcal{W}(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi', \eta')$. Dado que \mathcal{W} es el camino óptico desde la esfera de referencia al frente de ondas real, de la figura 2a y como se hace usualmente [3], obtenemos

$$\mathcal{W} = [AB] = [OB] - [OA] \quad [OE] - [OA] \quad (1)$$

donde los corchetes en la ecuación (1) indican camino óptico y donde $[OB] = [OE]$ porque B y E pertenecen al frente de ondas real. Esto da la función aberración en función de magnitudes que pueden ser evaluadas por trazado de rayos.

Por otra parte, si V es la ecuación de la esfera de referencia y $(V + \mathcal{W}|\vec{r}'|/n')$ es la ecuación del frente real entonces de las figuras 1, 2a y 2b, teniendo en cuenta que la derivada de una función (en este caso V o $V + \mathcal{W}|\vec{r}'|/n'$) es geoméricamente la pendiente de la recta tangente a la curva que da esa función versus la variable y si se desprecia la variación de $|\vec{r}'|$ con \tilde{x}' obtenemos en el plano meridional:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{x}'} = -\frac{n'}{|\vec{r}'|} (r'_x - h'_x) \quad (2)$$

donde $\vec{h}' = (h'_x, h'_y, 1)$ es un vector a lo largo de un rayo ideal libre de aberraciones. Además de la figura 2a, la aberración transversal del rayo, por semejanza de triángulos, es:

$$\Delta \xi' = \frac{R}{|\vec{h}'|} (\tau_x' - h_x') \quad (3)$$

luego de (2) y (3), para el caso de un rayo alabeado y suponiendo como usualmente se hace $|\vec{h}'| = |\vec{r}'|$, se tiene

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \xi'} \right|_{\xi', \eta', \bar{y}'} = -\frac{n' \Delta \xi'}{R} \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \bar{y}'} \right|_{\xi', \eta', \bar{x}'} = -\frac{n' \Delta \eta'}{R}$$

Las expresiones de las derivadas dadas en (4) coinciden con las obtenidas por otros autores, por ejemplo Welford [9]. Puesto que en la deducción de (4) hemos considerado el frente de ondas correspondiente a un dado punto del objeto estas son las derivadas de W cuando se mantiene constante el punto del campo.

Por otra parte la función aberración puede ser escrita como una serie de potencias de la forma

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{ijk} a^i b^j c^k \quad (5)$$

donde $2N$ es el máximo orden de aberraciones considerado y tenemos

$$\begin{aligned}
 a &= \tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2 \\
 b &= \tilde{x}' \xi' + \tilde{y}' \eta' \\
 c &= \xi'^2 + \eta'^2
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Los A_{ijk} son los coeficientes que uno podría querer evaluar y como aquí consideramos que el rayo principal determina el punto imagen tenemos $A_{00k} = 0$ y $A_{01k} = 0$ (la distorsión se excluye del cálculo).

Además para un dado punto objeto definimos

$$B_{ij} = \sum_{k=0}^{N-(i+j)} A_{ijk} c^k
 \tag{7}$$

luego de (5) obtenemos el desarrollo de W en serie de potencias que se usa generalmente para un dado punto objeto [5] que es

$$W = \sum_i \sum_j^{0 < i+j \leq N} B_{ij} a^i b^j
 \tag{8}$$

Las derivadas de W respecto a las coordenadas en la apertura se pueden obtener de (5) y (6) usando la regla de la cadena. Además como elegimos $\eta' = 0$ resulta

$$\frac{\partial W}{\partial \tilde{x}'} = 2 \tilde{x}' \sum_i \sum_j i B_{ij} a^{i-1} b^j + \xi' \sum_i \sum_j j B_{ij} a^i b^{j-1}
 \tag{9}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tilde{y}'} = 2 \tilde{y}' \sum_i \sum_j i B_{ij} a^{i-1} b^j
 \tag{10}$$

De las ecuaciones (1) y (4) podemos calcular W y sus derivadas respecto a la apertura por trazado de rayos para cierto número de rayos que depende del orden N que queremos considerar. Luego utilizando las ecuaciones (8), (9) y (10) es posible evaluar los coeficientes B_{ij} .

II.3 Condición de los senos a partir de teorías geométricas usuales

La técnica para hallar aberraciones descrita en el inciso anterior presupone el trazado de rayos alabeados. En la época del cálculo manual o de las calculadoras mecánicas esto implicaba un enorme despliegue de cómputo y se desarrollaron dos métodos sencillos de estimar aberraciones cuando se desplaza el objeto hacia afuera del eje óptico que son la Condición de Senos de Abbe (para hallar la coma) y la ecuación de Coddington (para hallar el astigmatismo). Estos métodos requieren poco cálculo y dan información valiosa aunque incompleta acerca de las aberraciones. A pesar de que actualmente el trazado exacto de rayos puede hacerse trivialmente aún con las calculadoras programables de bolsillo, los métodos desarrollados antiguamente no pierden utilidad.

Como en este trabajo estamos interesados fundamentalmente en la Condición de los Senos y en las aplicaciones que derivan de su generalización, daremos aquí una de las formas usuales de introducirla que es mediante óptica geométrica. Habitualmente se deduce esta Condición a partir de la Relación de los Senos obtenida a su vez mediante óptica geométrica.

Mostramos primero como se puede obtener la Relación de los Senos para una dioptra [11]. Entonces sea una dioptra esférica de radio RA como la de la figura 3.

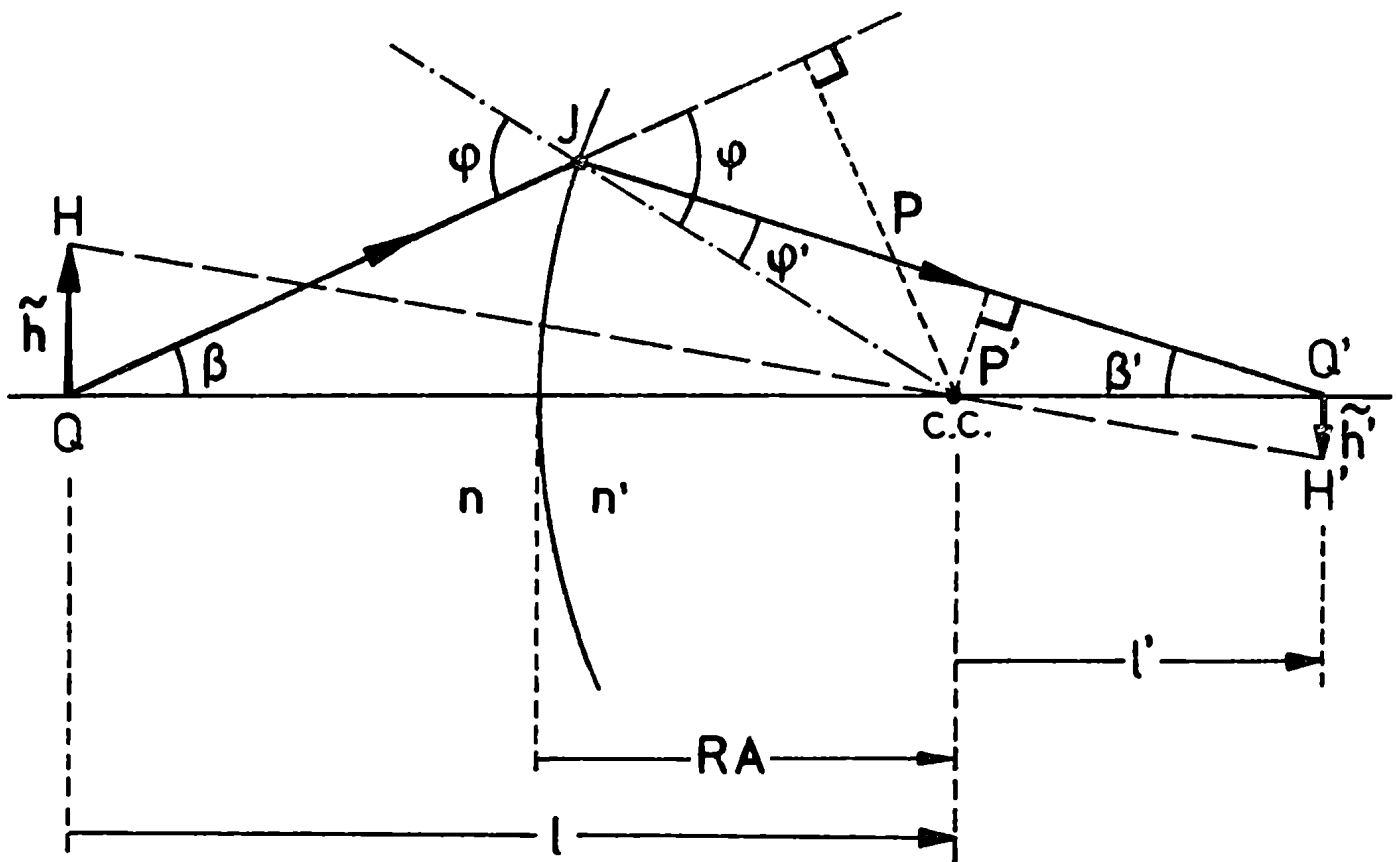


Figura 3: Condición de Senos axial para una dioptra
 h, h' : tamaño del objeto y de la respectiva imagen
 RA : radio de la dioptra
 n, n' : índices de refracción

Para el rayo QJQ' se cumple la ley de Snell

$$n \operatorname{Sen} \varphi = n' \operatorname{Sen} (\varphi') \quad (11)$$

Además de la figura 3 obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Sen } \varphi' &= \frac{h'}{RA} = \frac{l' \text{ Sen } \beta'}{lR} \\ \text{Sen } \varphi &= \frac{h}{RA} = \frac{l \text{ Sen } \beta}{lR} \end{aligned} \quad (12)$$

De (12) en (11) resulta

$$m l \text{ Sen } \beta = m' l' \text{ Sen } \beta' \quad (13)$$

Por otra parte el rayo $HCCH'$ pasa por el centro de curvatura y determina \tilde{h} y \tilde{h}' , luego para él vale

$$\frac{\tilde{h}}{l} = \frac{\tilde{h}'}{l'} \quad (14)$$

De (14) en (13) obtenemos

$$m \tilde{h} \text{ Sen } \beta = m' \tilde{h}' \text{ Sen } \beta' \quad (15)$$

La ecuación (15) es la Relación de los Senos para una dioptra. Cuando se tiene un sistema compuesto por un número arbitrario de dioptras se puede obtener la Relación de los Senos utilizando el mismo razonamiento que el usado para deducir la ecuación (15), si se considera que el objeto para cada dioptra (excepto la primera) es la imagen dada por la dioptra que la precede. Otro método mediante el cual se obtiene usualmente la Relación de los Senos para un sistema óptico es el que utiliza el concepto de rayos vecinos [2], pero, no daremos aquí esta demostración. Tanto para un sistema de dioptras como para una sola dioptra, la Condición de los Senos se deduce a partir de la Relación de los Senos (15) (donde en general β y β' son los ángulos entre el rayo y el eje óptico en los espa-

cios objeto e imagen respectivamente) en base al hecho que para que la imagen sea buena su tamaño debe ser el mismo para cada zona de la apertura, o sea, \tilde{h}'/\tilde{h} debe ser constante. Luego de (15) se debe cumplir

$$\frac{\text{Sen } \beta'}{\text{Sen } \beta} = \text{constante} \quad (16)$$

En particular una imagen del mismo tamaño debe ser formada por rayos que están en la región paraxial. Si β_0 y β'_0 se refieren a rayos paraxiales entonces de (16) resulta

$$\frac{\text{Sen } \beta'}{\beta'_0} = \frac{\text{Sen } \beta}{\beta_0} \quad (17)$$

que es la Condición de los Senos axial usual.

Como vimos en la introducción el concepto de que se debe satisfacer la Condición de los Senos axial para que el aumento para un objeto pequeño sea constante independiente de la apertura, ya estaba presente en el trabajo de Abbe.

Un sistema óptico de gran apertura y libre de Aberración Esférica dará imagen perfecta para objetos pequeños cercanos al eje óptico y en un plano perpendicular al eje si se cumple la Condición de los Senos usual. Según H.H.Hopkins [3] si el sistema no es libre de Aberración Esférica será libre de Coma si se cumple la Condición de los Senos Extendida. Dicha condición, cuya deducción no mostraremos aquí, es similar a (17) pero en lugar de considerar los ángulos β y β' hay que considerar los ángulos en el foco paraxial. Esto significa que en el espacio imagen, en lugar de β' (ángulo entre el eje óptico y el rayo) se debe considerar el ángulo

subtendido entre el eje Óptico y la recta que va desde la intersección del rayo con la esfera de referencia hasta el foco paraxial y análogamente en el espacio objeto.

CAPITULO III

NUEVOS METODOS PARA EL ANALISIS DE SISTEMAS OPTICOS

III. NUEVOS METODOS PARA EL ANALISIS DE SISTEMAS OPTICOS

Hasta aquí hemos mostrado algunos aspectos referentes a la función aberración y a la Condición de los Senos desarrollados con anterioridad por otros autores. Veremos en este capítulo la teoría que desarrollamos nosotros, la cual permite obtener la Condición de los Senos axial y su extensión a puntos fuera de eje a partir de consideraciones de óptica de Fourier (en vez de óptica geométrica) y aprovechar mejor la información presente en cada rayo cuando se calculan las aberraciones. Esta teoría puede utilizarse como complemento de la usual.

III.1 Fundamentos de la teoría desarrollada por nosotros

Para desarrollar nuestra teoría nos basamos en tres hechos ya conocidos que son los que damos a continuación.

III.1.1 Relación entre rayo y frecuencia espacial. Desarrollo del objeto en ondas planas.

En medios isotrópicos un rayo de luz es siempre perpendicular al frente de ondas y en los alrededores del rayo podemos decir que la onda está dada por

$$E_0(\xi, \eta, z) = A_0 \exp\{i(-\omega t + \phi)\} \exp\left\{\frac{i2\pi}{\lambda r_1} (\xi r_x + \eta r_y + z r_z)\right\} \quad (18)$$

donde (ξ, η, z) y $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ son los de la figura 1; λ es la longitud de onda; $(-\omega t + \phi)$ la fase temporal y A_0 la am-

plitud. Luego en las cercanías de un rayo podemos definir [10] frecuencias espaciales locales $\vec{\mu} = (2\pi/\lambda|\vec{r}|)(\tau_x, \tau_y, \tau_z)$ de modo que un rayo también representa una frecuencia espacial local $\vec{\mu}$.

Tomando en cuenta esto se puede considerar además que para cualquier punto del objeto de una distribución de campo podemos hacer un desarrollo en ondas planas. Análogamente cualquier distribución de campo puede ser pensada como una función que puede ser tratada como un desarrollo de Fourier independientemente de la forma del frente de ondas o de la coherencia o incoherencia de la iluminación. Luego podemos asociar cada componente de Fourier con cada frente de onda plano de frecuencia angular espacial:

$$u_x = \frac{2\pi m}{m_{ox} \lambda_0} \frac{\tau_x}{|\vec{r}|} \quad u_y = \frac{2\pi m}{m_{oy} \lambda_0} \frac{\tau_y}{|\vec{r}|} \quad (19)$$

donde λ_0 es la longitud de onda en vacío y (m_{ox}, m_{oy}) es el aumento lateral que se introduce en (19) por simplicidad en el cálculo posterior.

Luego si nos independizamos del factor temporal y de la dependencia en z (que desaparece al particularizar para un plano $z = \text{constante}$) obtenemos que la distribución de luz en el objeto (ver Apéndice I) está dada por

$$E(m_{ox}\xi, m_{oy}\eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{u_x}{2\pi}, \frac{u_y}{2\pi}\right) \exp\{i(u_x m_{ox}\xi + u_y m_{oy}\eta)\} du_x du_y \quad (20)$$

donde $A\left(\frac{\omega_x}{2\pi}, \frac{\omega_y}{2\pi}\right)$ es el espectro angular para la frecuencia (ω_x, ω_y) .

III.1.2 Frecuencias espaciales en el objeto y en la imagen. Distribución de luz en la imagen.

La formación de imágenes es un fenómeno local pues ocurre en un entorno relativamente pequeño de la imagen geométrica paraxial. Esto no se altera por el hecho que, cuando se estudia la formación de imágenes desde el punto de vista de la óptica de Fourier, cada frecuencia espacial cubre todo el plano.

Cada frente de ondas plano en el objeto se hace aproximadamente esférico en la imagen. Sin embargo, como la formación de imágenes es un fenómeno local estamos interesados solamente en la contribución en un entorno pequeño de la imagen geométrica y allí podemos pensar que en primera aproximación el frente de ondas es plano y le podemos asociar frecuencia espacial angular

$$\omega_x = \frac{2\pi m^1}{\lambda_0} \frac{r_x^1}{|\vec{r}^1|} \quad \omega_y = \frac{2\pi m^1}{\lambda_0} \frac{r_y^1}{|\vec{r}^1|} \quad (21)$$

donde m^1 y $\vec{r}^1 = (r_x^1, r_y^1, 1)$ son los de la figura 1).

Además aclaramos que la aproximación anterior no es en realidad necesaria. Uno puede considerar la curvatura del frente de ondas en la distribución de amplitud compleja en la imagen como un término en el cual se supone que los frentes de onda en cada punto imagen son esféricos y de la misma curvatura más términos residuales (aberraciones) que son despreciables comparados con el primero, o

sea el campo en la imagen, prescindiendo del factor temporal y de la dependencia en z , puede estar dado por

$$\tilde{E}'(\xi', \eta') = \int_{u'_{y_1}}^{u'_{y_2}} \int_{u'_{x_1}}^{u'_{x_2}} \tilde{A}'\left(\frac{u'_x}{2\pi}, \frac{u'_y}{2\pi}\right) \exp\left\{i\left[\xi' u'_x + \eta' u'_y + \varphi(\xi'^2 + \eta'^2)\right]\right\} du'_x du'_y \quad (22)$$

Aquí la amplitud compleja es $\tilde{A}'\left(\frac{u'_x}{2\pi}, \frac{u'_y}{2\pi}\right)$ y es tal que si el sistema es libre de aberraciones y la pupila es sin absorción entonces es real y constante. Además como suponemos que φ es constante, o sea que el término de curvatura no depende de las frecuencias espaciales, se tiene un factor de fase que desaparece cuando se computa la intensidad.

Los límites de la integral son las frecuencias de corte y son tales que solo en el caso de un objeto axial se tiene $u'_{x_1} = -u'_{x_2}$, $u'_{y_1} = -u'_{y_2}$. Para un objeto extraaxial podemos hacer cambio de variables en la forma

$$\omega'_x = u'_x - \frac{(u'_{x_2} + u'_{x_1})}{2} \quad \omega'_y = u'_y - \frac{(u'_{y_2} + u'_{y_1})}{2} \quad (23)$$

de modo que los límites de integración resulten simétricos. De esto se puede inferir que para un objeto extraaxial es útil definir las frecuencias espaciales del rayo en estudio referidas a aquéllas del rayo principal que llamaremos ω . Luego definiremos las frecuencias espaciales en el objeto y en la imagen respectivamente mediante

$$\omega_x = \frac{2\pi m}{\lambda_0 m_x} \left(\frac{r_x}{|\vec{r}|} - \frac{p_x}{|\vec{\rho}|} \right) \quad \omega_y = \frac{2\pi m}{\lambda_0 m_y} \left(\frac{r_y}{|\vec{r}|} - \frac{p_y}{|\vec{\rho}|} \right) \quad (24)$$

$$\omega'_x = \frac{2\pi m'}{\lambda_0} \left(\frac{r'_x}{|\vec{r}'|} - \frac{\rho'_x}{|\vec{\rho}'|} \right) \quad \omega'_y = \frac{2\pi m'}{\lambda_0} \left(\frac{r'_y}{|\vec{r}'|} - \frac{\rho'_y}{|\vec{\rho}'|} \right) \quad (25)$$

donde la notación es la misma que la de las ecuaciones (19) y (21), $\vec{\rho}$ y $\vec{\rho}'$ son los de la figura 1, y aquí tenemos (m_x, m_y) (en vez de (m_{ox}, m_{oy})) que es el aumento lateral local.

Si consideramos un rayo meridional que está en el plano (ξ, η) tenemos la situación de la figura 2 y teniendo en cuenta (24) y (25) las frecuencias espaciales son

$$\omega_x = \frac{2\pi m}{\lambda_0 m_x} (\text{Sen } \alpha - \text{Sen } \alpha_p) \quad (26)$$

$$\omega'_x = \frac{2\pi m'}{\lambda_0} (\text{Sen } \alpha' - \text{Sen } \alpha'_p)$$

donde los ángulos se miden desde el eje óptico hacia los rayos como en la figura 2b y se toman positivos si son antihorarios.

III.1.3 Isoplanatismo

Un sistema lineal es además isoplanático o espacialmente invariante si cambiando la posición de la entrada solo cambia la posición de la salida sin alterar su forma funcional. Como se ve en el Apéndice I para sistemas ópticos la entrada es la distribución de luz en el objeto y la salida lo es en la imagen. En la práctica la imagen dada por un sistema óptico verdadero no es isoplanática sobre todo el campo debido a la existencia de aberraciones, las cuales varían con el campo, aunque en general es posible considerar

zonas del objeto suficientemente pequeñas como para que el sistema sea isoplanático.

De acuerdo con H.H.Hopkins [4] la condición que la aberración sea estacionaria con respecto a la posición de la imagen es equivalente a la condición que las coordenadas canónicas (que son proporcionales a las coordenadas en las esferas de referencia respectivas) en la pupila de entrada y de salida sean iguales.

Si bien mostraremos en el Apéndice II que las coordenadas en las esferas de referencia están relacionadas con las frecuencias espaciales que nosotros definimos de modo que la condición de isoplanatismo de H.H.Hopkins podría relacionarse con nuestras frecuencias, es posible analizar la condición de isoplanatismo directamente estudiando el comportamiento de las frecuencias espaciales. Si, por ejemplo, consideramos un objeto axial y un sistema libre de aberración esférica y como podrá verse de las ecuaciones que obtendremos más adelante, la condición de isoplanatismo requiere que la fase relativa entre las componentes de Fourier no varíen de un punto a otro del campo, o sea, toda frecuencia μ_x que está presente en el objeto y pasa a través del sistema debe dar origen a una frecuencia en la imagen μ'_x que es igual a ella ($\mu_x = \mu'_x$). Usualmente esto no se verifica para sistemas ópticos reales sino que, en un entorno del punto imagen, podemos decir que μ_x da lugar a $\mu'_x = \mu_x + \delta\mu_x$. Si nos movemos una distancia $\delta\xi'$ en el plano imagen, la fase relativa entre componentes variará una cantidad $\delta\xi' \delta\mu'_x$. Si esta variación es despreciable cuando $\delta\xi'$ es mayor o igual que el ancho de la función ensanchamiento, o sea $\delta\xi' \delta\mu'_x \ll 1$, entonces podemos calcular la función de ensanchamiento por medio del desarrollo

de Fourier localmente y tenemos isoplanatismo local. En general esto se cumple para $\delta\xi'$ igual a muchas veces el ancho de la función ensanchamiento.

III.2 Obtención de la Condición de los Senos axial a partir de óptica de Fourier

En lugar de obtener la Condición de los Senos axial a partir de óptica geométrica como se hace habitualmente, aquí la obtendremos a partir de óptica de Fourier. Por simplicidad desarrollamos el análisis en una dimensión [6] aunque el razonamiento es totalmente análogo si se consideran las dos dimensiones.

Sea el sistema óptico centrado de la figura 4 y un objeto axial iluminado por luz monocromática de longitud de onda en vacío λ_0 . De acuerdo con el método de Fourier, de la ecuación (20) su amplitud compleja (excluyendo el factor temporal) es

$$E(\cos\alpha\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{\mu_x}{2\pi}\right) \exp\{i\mu_x \xi \cos\alpha\} d\mu_x \quad (27)$$

De acuerdo con (19) la frecuencia espacial angular μ_x presente en el objeto está dada por

$$\mu_x = \frac{2\pi m}{\lambda_0 \cos\alpha} \quad \text{con } \beta \quad (28)$$

y corresponde al haz que subtiende un ángulo β con el eje óptico.

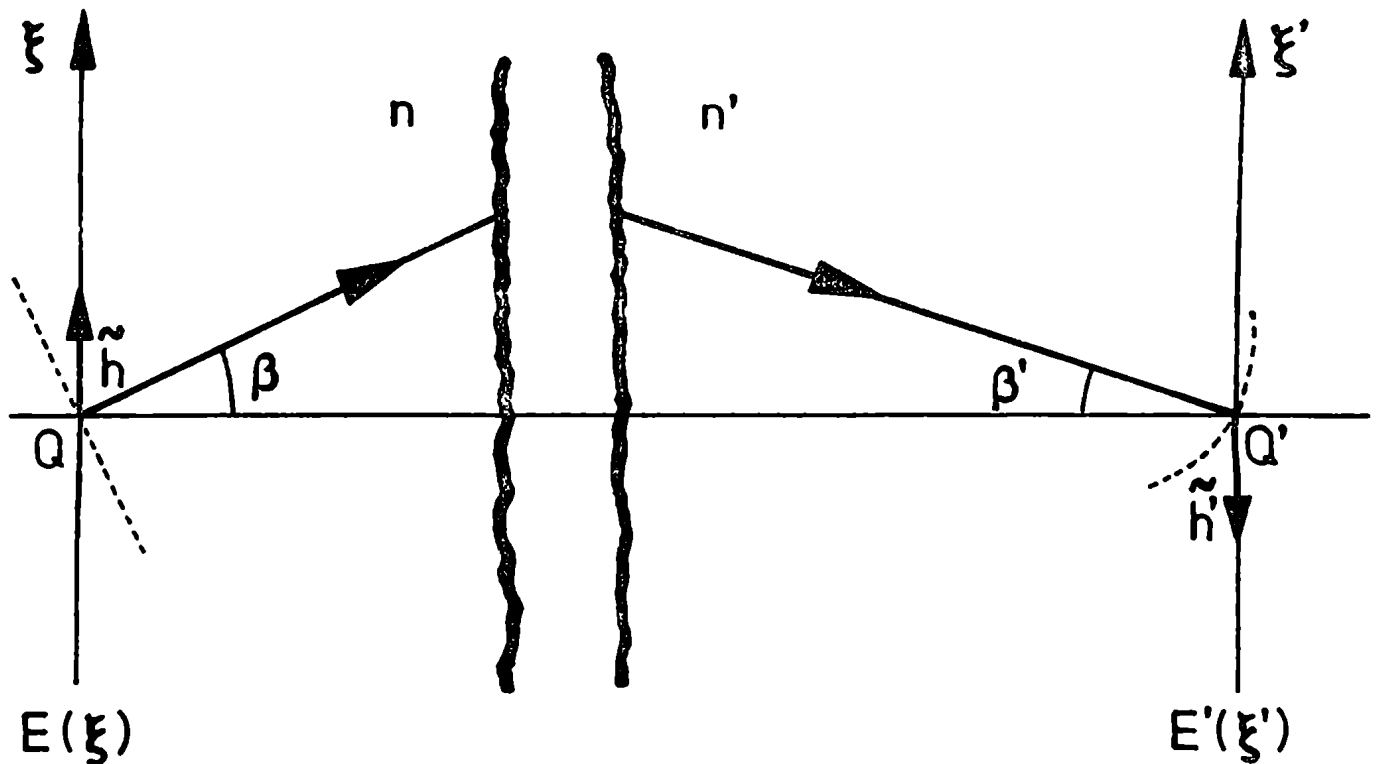


Figura 4: Sistema de coordenadas para objeto axial

QQ' : eje óptico
 \tilde{h}, \tilde{h}' : tamaño del objeto y la respectiva imagen
 n, n' : índices de refracción en el espacio objeto e imagen
 $E(\xi), E'(\xi')$: distribución de luz en el objeto y en su imagen

Siempre y cuando el objeto sea suficientemente pequeño para que se pueda suponer que ondas planas en el objeto originan ondas planas en la imagen, debido al proceso de doble difracción y de la ecuación (22) obtenemos que la distribución de luz en la imagen está dada por

$$E'(\xi') = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}'\left(\frac{u'_x}{2\pi}\right) \exp\{i u'_x \xi'\} d u'_x \quad (29)$$

donde, de acuerdo con (21) la frecuencia espacial en la imagen es

$$u'_x = \frac{2\pi n'}{\lambda_0} \text{Sen } \beta' \quad (30)$$

Si se requiere igualdad de frecuencias espaciales $\mu_x = \mu'_x$ y como $m_{ox} = \tilde{h}'/\tilde{h}$ es el aumento lateral entonces de (28) y (30) obtenemos

$$\tilde{h} m \text{ Sen } \beta = \tilde{h}' m' \text{ Sen } \beta' \quad (31)$$

Luego análogamente a lo visto en el inciso II.3, si el aumento es constante y si β_0 y β'_0 son los ángulos paraxiales se tiene la Condición de los Senos que es

$$\frac{\text{Sen } \beta}{\beta_0} = \frac{\text{Sen } \beta'}{\beta'_0} \quad (32)$$

III.3 Generalización de la Condición de los Senos para objetos extraaxiales

Solamente por simplicidad en el análisis consideramos el caso unidimensional.

Sea un objeto extraxial en ξ_0 y su imagen ideal en ξ'_0 como se muestra en la figura 5. Estudiaremos la formación de imagen gaussiana [7] en términos del espectro angular.

De la figura 5 tenemos

$$MN = -S(\alpha - \alpha_p) = \tilde{h}' \alpha' = \dots S'(\alpha' - \alpha'_p) \quad (33)$$

y como $S'm = m, m'S$ obtenemos

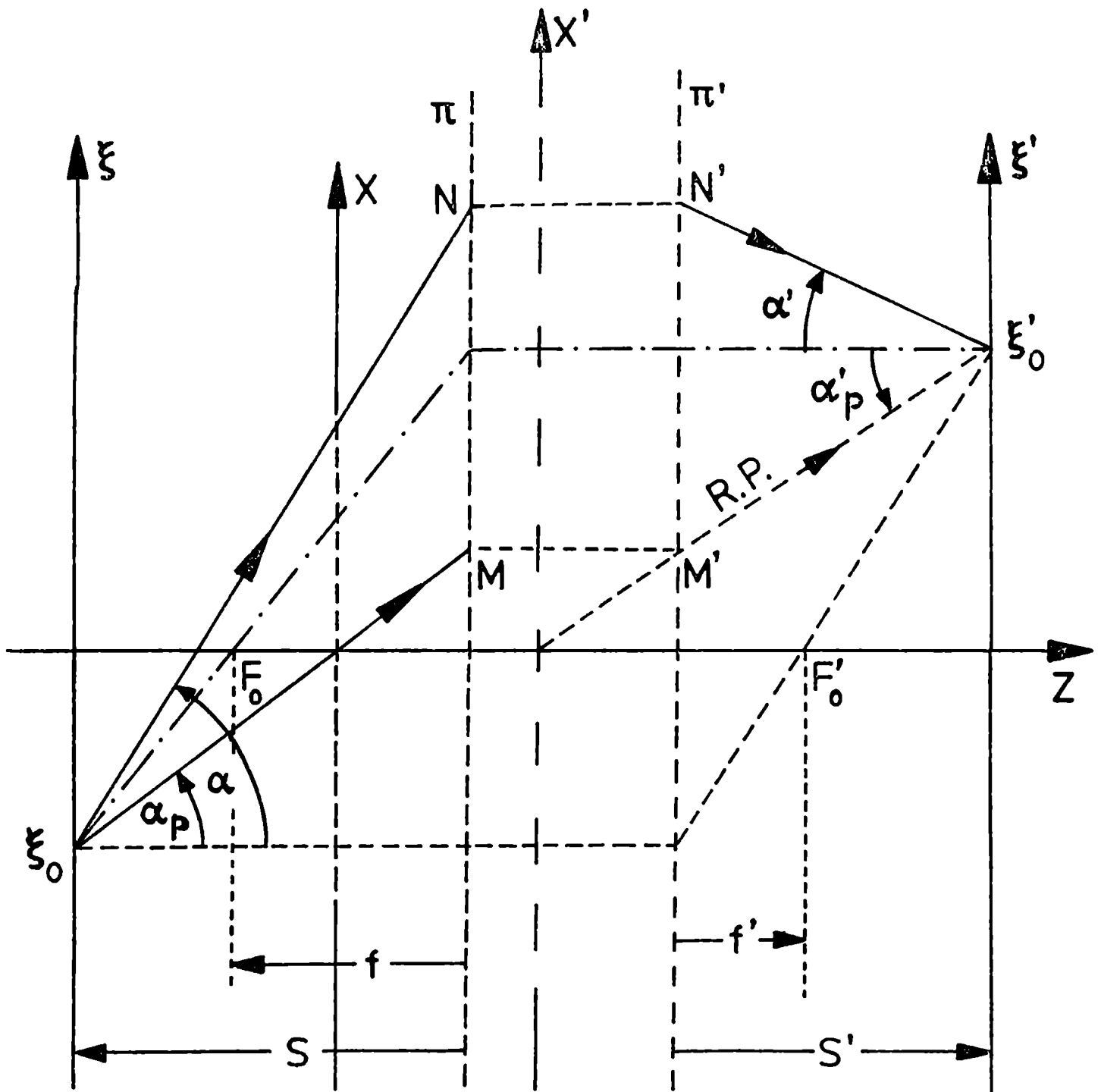


Figura 5: Formación de imagen gaussiana.

- π, π' : planos principales paraxiales
- F_0, F'_0 : puntos focales objeto e imagen
- f, f' : distancias focales en los espacios objeto e imagen
- S, S' : distancias objeto e imagen

$$\frac{2\pi m}{\lambda_0 m_x} (\alpha - \alpha_p) = \frac{2\pi m'}{\lambda_0} (\alpha' - \alpha'_p) \quad (34)$$

De las ecuaciones (26) esto significa que en el caso gaussiano tenemos $\omega_x = \omega'_x$ que es la Condición de los Senos extendida para objetos fuera de eje. Luego la Condición de los Senos es equivalente al requerimiento de proporcionalidad entre las frecuencias espaciales referidas a las del rayo principal, en el objeto y en su imagen. Además hemos mostrado que en la aproximación paraxial (34) vale para cualquier sistema óptico centrado.

Aún cuando la aproximación paraxial no valga, la Condición de los Senos será $\omega_x = \omega'_x$, que para el caso general de las ecuaciones (24) y (25) es

$$\frac{2\pi m}{\lambda_0 m_x} \left(\frac{r_x}{|\vec{r}|} - \frac{\rho_x}{|\vec{\rho}|} \right) = \frac{2\pi m'}{\lambda_0} \left(\frac{r'_x}{|\vec{r}'|} - \frac{\rho'_x}{|\vec{\rho}'|} \right) \quad (35)$$

$$\frac{2\pi m}{\lambda_0 m_y} \left(\frac{r_y}{|\vec{r}|} - \frac{\rho_y}{|\vec{\rho}|} \right) = \frac{2\pi m'}{\lambda_0} \left(\frac{r'_y}{|\vec{r}'|} - \frac{\rho'_y}{|\vec{\rho}'|} \right)$$

pero usualmente no será satisfecha por un sistema óptico real debido a la presencia de aberraciones.

III.4 Cálculo de la derivada de la función aberración respecto al campo

Usando la Condición de los Senos extendida hallada en el inciso III.3 obtendremos ahora la derivada de la función aberración respecto al campo cuando se mantienen constantes las coordenadas en la esfera de referencia de la pupila de salida.

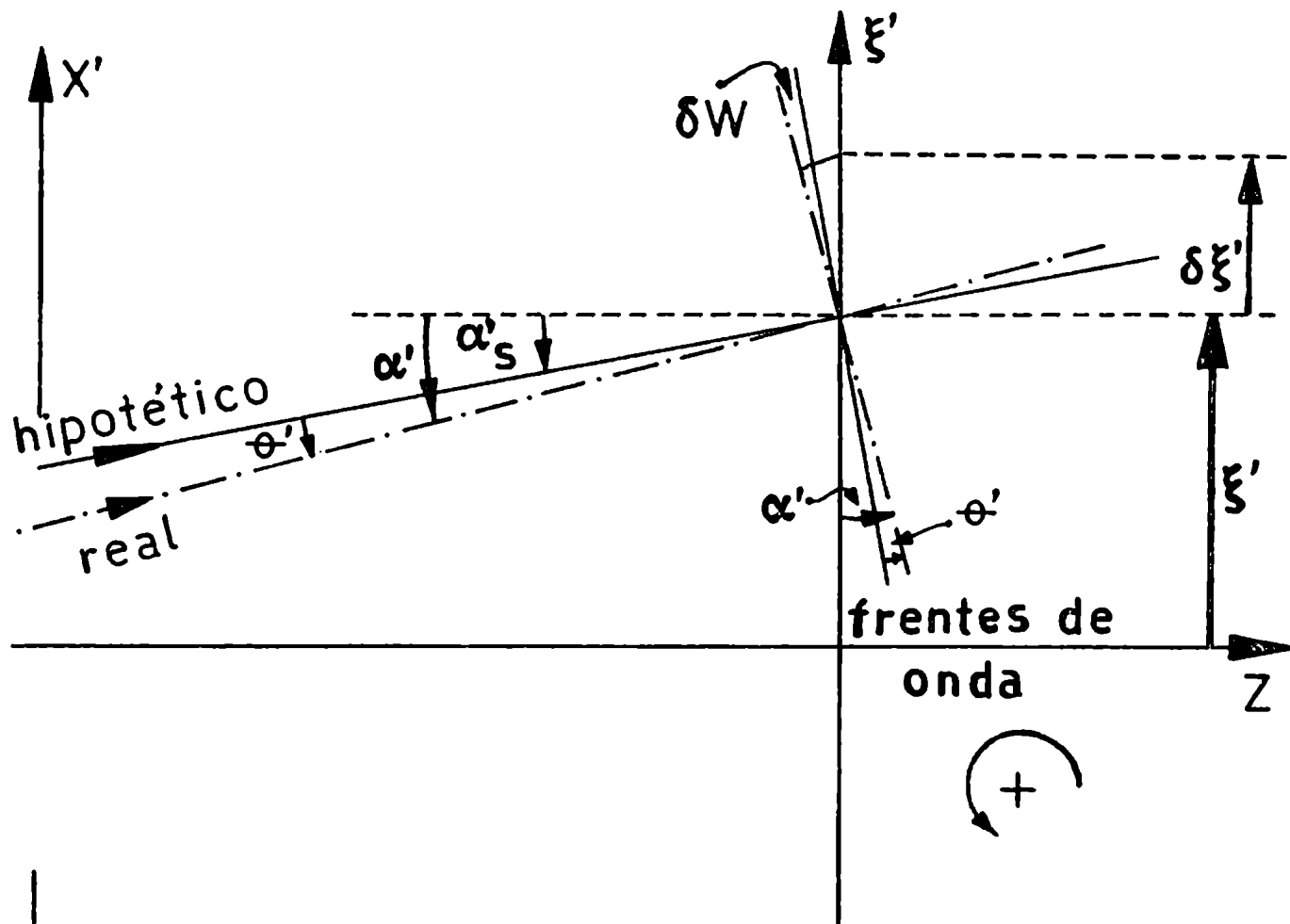


Figura 6: Ofensa a la proporcionalidad entre frecuencias espaciales locales

Para sistemas ópticos reales las frecuencias espaciales no se reproducen exactamente en la imagen sino que hay un desajuste de frecuencias de la forma $\omega'_x = \omega_x + \delta\omega'_x$, si nuevamente por simplicidad consideramos el caso unidimensional.

Consideremos la figura 6 donde hemos trazado dos rayos que se originan en un punto objeto en ξ y pasan a través de ξ' en el plano imagen: el real y uno hipotético que verifica la Condición de los Senos extendida, o sea $\omega'_{sx} = \omega_x$. Luego tenemos

$$\delta\omega'_x = \omega'_x - \omega'_{sx} = \frac{2\pi m'}{\lambda_0} (\text{Sen } \alpha' - \text{Sen } \alpha'_s) \quad (36)$$

Pero de la figura 6 $\alpha'_s = \alpha' - \theta'$ y suponiendo como es usual $\text{Cos } \theta' = 1$ y $\text{Sen } \theta' = \theta'$ (pequeñas aberraciones) obtenemos

$$\delta \omega'_x = \frac{2\pi m'}{\lambda_0} \theta' \text{Cos } \alpha' \quad (37)$$

Además si \mathcal{W} es la aberración del rayo hipotético y $\delta \mathcal{W}$ es el incremento de aberración del rayo real respecto a la del hipotético, de la figura 6 tenemos

$$\theta' = - \frac{\delta \mathcal{W}}{m' \delta f' \text{Cos } \alpha'} \quad (38)$$

De (38) en (37) y si $\delta f'$ tiende a cero obtenemos la derivada de la función aberración cuando las inclinaciones de los rayos se mantienen constantes, o sea

$$\left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial f'} \right|_{u'_x} = - \frac{\lambda_0 \delta \omega'_x}{2\pi} \quad (39)$$

De (39) vemos que, al igual que en caso axial [4], en el caso extraaxial el incumplimiento de la Condición de los Senos está relacionado con la derivada de \mathcal{W} respecto a la altura de la imagen.

Por otra parte como aquí consideramos que \mathcal{W} es función de $(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi', \eta')$, nos interesa tener una expresión para la derivada de \mathcal{W} respecto a las coordenadas en el campo cuando se mantienen constantes las coordenadas en la esfera de la pupila de salida. Como se demuestra en el Apéndice II, para el caso unidimensional, tenemos

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial \xi'} \right|_{\tilde{x}'} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial \xi'} \right|_{u_x'} - \left. \frac{\partial \omega}{\partial \tilde{x}'} \right|_{\xi'} \left. \frac{\partial \tilde{x}'}{\partial \xi'} \right|_{u_x'} \quad (40)$$

El primer término de la ecuación (40) es el de la ecuación (39) pero todavía debemos evaluar el segundo término. Para ello vemos que de la figura 2a, por semejanza de triángulos y como se muestra en el Apéndice II resulta

$$\frac{\tilde{x}'}{R} = \frac{\xi'}{R} - \frac{r_x'}{|r'|} + \frac{\Delta \xi'}{R} \left(1 - \frac{r_x'^2}{|r'|^2} \right) \quad (41)$$

Luego usando la definición de u_x' dada en (21) y como $R = \sqrt{\xi'^2 + T^2}$, de (41) se tiene

$$\tilde{x}' = \xi' + \Delta \xi' \left(1 - \left(\frac{u_x' \lambda_0}{2\pi m'} \right)^2 \right) - \frac{u_x' \lambda_0}{2\pi m'} \sqrt{\xi'^2 + T^2} \quad (42)$$

entonces despreciando la variación de $\Delta \xi'$ con ξ' resulta

$$\left. \frac{\partial \tilde{x}'}{\partial \xi'} \right|_{u_x'} = 1 - \frac{u_x' \lambda_0}{2\pi m'} \frac{1}{R} \left(\xi' + T \frac{\partial T}{\partial \xi'} \right) \quad (43)$$

Luego de (43), (21), (4) y (39) en (40), y como $\xi'/R = \rho_x'/|\dot{\rho}'|$ y $\delta \omega_x' = \dot{\omega}_x' - \omega_x'$ (donde las frecuencias están dadas por las ecuaciones (24) y (25)), tenemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \omega}{\partial \xi'} \right|_{\tilde{x}'} &= -m' \left(\frac{r_x'}{|r'|} - \frac{\rho_x'}{|\dot{\rho}'|} \right) + \frac{m}{m_x} \left(\frac{r_x}{|r|} - \frac{\rho_x}{|\dot{\rho}'|} \right) + \\ &+ \frac{m' \Delta \xi'}{R} \left[1 - \frac{r_x'}{|r'|} \left(\frac{\rho_x'}{|\dot{\rho}'|} + \frac{T}{R} \frac{\partial T}{\partial \xi'} \right) \right] \end{aligned} \quad (44)$$

En el capítulo IV mostramos una forma de calcular el término $\partial T / \partial \xi'$ el cual, como veremos en el inciso III.8, se debe exclusivamente al vigneteo si despreciamos la influencia de las aberraciones de las pupilas de entrada y salida. Para sistemas ópticos libres de vigneteo tenemos $\partial T / \partial \xi' = 0$ y luego de (44) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \xi'} = & -m' \left(\frac{r_x'}{|\vec{r}'|} - \frac{p_x'}{|\vec{p}'|} \right) + \frac{m}{m_x} \left(\frac{r_x}{|\vec{r}|} - \frac{p_x}{|\vec{p}|} \right) + \\ & + \frac{m' \Delta \xi'}{R} \left[\Delta - \frac{r_x' p_x'}{|\vec{r}'| |\vec{p}'|} \right] \end{aligned} \quad (45)$$

Es interesante puntualizar que, como mostraremos en el Apéndice III, la ecuación (45) puede ser deducida a partir de la ecuación (8) del trabajo de H.H.Hopkins [4] aunque nosotros hemos usado un razonamiento distinto al de H.H.Hopkins para obtenerla.

Por otra parte es interesante destacar que de la ecuación (41), y como mostramos en el Apéndice II, se obtiene que las coordenadas \tilde{x}' en la esfera de la pupila de salida están relacionadas con las frecuencias espaciales generalizadas ω_x' mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\tilde{x}'}{R} = - \frac{\omega_x' \lambda_0}{2\pi m'} + \frac{\Delta \xi'}{R} \left(\Delta - \frac{r_x'^2}{|\vec{r}'|^2} \right) \quad (46)$$

Luego, excepto por el término proporcional a $\Delta\xi'/R$ que es generalmente pequeño, las coordenadas en la esfera de referencia son proporcionales a las frecuencias espaciales.

III.5 Cálculo de aberraciones mediante trazado de rayos

Para hallar las aberraciones mediante trazado de rayos y para cada rayo alabeado nosotros tenemos en principio dos ecuaciones adicionales a las usadas habitualmente y que son las que dan las derivadas de \mathcal{W} respecto al campo. Sin embargo, mostraremos en el inciso III.6 que para sistemas ópticos centrados, una de las ecuaciones es linealmente dependiente de las demás de modo que para cada rayo alabeado trazado disponemos de cuatro ecuaciones. Estas ecuaciones son (1), (4) y (44) y aquí las reescribimos con el fin de tener el sistema completo de ecuaciones que es

$$\mathcal{W} = [OE] - [OA] \quad (47)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{x}_i'} \right|_{\tilde{y}_i', \xi', \eta'} = - \frac{m' \Delta \xi'}{R} \quad (48)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{y}_i'} \right|_{\tilde{x}_i', \xi', \eta'} = - \frac{m' \Delta \eta'}{R} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \xi'} \right|_{\tilde{x}_i', \tilde{y}_i', \eta'} = & -m' \left(\frac{r_x'}{|r'|} - \frac{s_x'}{|s'|} \right) + \frac{m}{m_x} \left(\frac{r_x}{|r|} - \frac{s_x}{|s|} \right) \\ & + \frac{m' \Delta \xi'}{R} \left[1 - \frac{r_x'}{|r'|} \left(\frac{s_x'}{|s'|} + \frac{T}{R} \frac{\partial T}{\partial \xi'} \right) \right] \quad (50) \end{aligned}$$

III.6 Coeficientes de la función aberración y de su derivada respecto al campo. Mejor provecho de la información presente en el trazado de rayos.

En el inciso II.2 mostramos cuales son las ecuaciones usuales que se utilizan para hallar los coeficientes de la función aberración. Ya que lo que se hace habitualmente es considerar el desarrollo en serie de \mathcal{W} en potencias de las coordenadas en la apertura (como la ecuación (8)), se hallan los coeficientes dependientes del campo, B_{ij} , y por lo tanto la función aberración local. Mostraremos ahora que no sólo la función aberración sino también su derivada con respecto a las coordenadas en la imagen se pueden escribir como serie de potencias de las coordenadas en la pupila solamente y puede ser hallada localmente.

Las derivadas de \mathcal{W} respecto a las coordenadas en el campo se obtienen de (5) y (6) usando la regla de la cadena y como consideramos $\eta' = 0$ resulta

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \xi^i} = \tilde{\alpha}'^i \sum_i \sum_j j B_{ij} a^i b^{j-1} + 2 \xi^i \sum_i \sum_j \sum_k A_{ijk} a^i b^j c^{k-1} \quad (51)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \eta^i} = \tilde{\gamma}'^i \sum_i \sum_j j B_{ij} a^i b^{j-1} \quad (52)$$

Luego si quisiéramos evaluar los coeficientes independientes del campo, A_{ijk} , tendríamos en principio cinco ecuaciones que son (8), (9), (10), (51) y (52). Sin embargo, si $\tilde{\gamma}'^i = 0$ las ecuaciones (10) y (52) no son útiles y si $\tilde{\gamma}'^i \neq 0$ de (9), (10) y (22) ve-

mos que estas tres ecuaciones no son independientes entre sí pues para cada rayo trazado tenemos

$$\frac{\partial W}{\partial \tilde{x}'} = \frac{\tilde{x}'}{\tilde{y}'} \frac{\partial W}{\partial \tilde{y}'} + \frac{\xi'}{\eta'} \frac{\partial W}{\partial \eta'} \quad (53)$$

Luego para evaluar los A_{ijk} nunca tenemos cinco ecuaciones independientes como podría parecer en principio sino que tenemos:

- para un punto extraaxial del campo y un rayo alabeado cuatro ecuaciones independientes que, por ejemplo, son (8), (9), (10) y (51);
- para un punto extraaxial del campo y un rayo meridional ($\tilde{\gamma}' = 0$) tres ecuaciones que son (8), (9) y (51);
- para el punto axial del campo ($\xi' = 0$ y $\zeta' = 0$) tres ecuaciones que, por ejemplo, son (8), (9) y (51) pues las ecuaciones (9) y (10) no son independientes una de otra y lo mismo vale para (51) y (52).

Por otra parte para hallar los coeficientes dependientes del campo B_{ij} para un punto extraaxial del campo hay tres ecuaciones, (8), (9) y (10), para cada rayo alabeado y dos ecuaciones, (8) y (9), para cada rayo meridional.

Aunque teóricamente sería más interesante calcular los coeficientes A_{ijk} que los B_{ij} , los coeficientes B_{ij} tienen la ventaja práctica que son menos en cantidad que los A_{ijk} pues, para un dado orden N tenemos $\left\{ \frac{N}{2} (N + 3) - 1 \right\}$ coeficientes B_{ij} y $\left\{ \frac{N(N+1)(N+5)}{6} - N \right\}$ coeficientes A_{ijk} (pues como dijimos $A_{00k} = A_{0k0} = 0$). Por ejemplo, para $N = 4$ tenemos veintiseis coeficientes A_{ijk} y trece coeficientes B_{ij} . Luego el cálculo de los A_{ijk} requiere el trazado de más rayos y la resolución de un sistema de ecuaciones más complicado que el del cálculo de los B_{ij} y no lo haremos aquí.

Para computar los coeficientes B_{ij} para $N = 4$ podemos trazar seis a ocho rayos adecuadamente elegidos (además del rayo principal que es el que determina el punto imagen). Powell [5], por ejemplo, traza siete rayos y ajusta un polinomio de dieciseis coeficientes (función aberración hasta orden ocho más tres términos de orden diez).

Mostraremos ahora que se puede obtener un mejor provecho de la información presente en el trazado de rayos con poco trabajo adicional al necesario para hallar los B_{ij} . O sea, si agregamos al trazado de rayos necesario para hallar los B_{ij} el trazado de unos pocos rayos más podemos obtener la derivada de la función aberración con respecto a las coordenadas en el campo para cualquier rayo originado en el punto del campo en consideración. Para ello definimos los coeficientes C_{ij} de modo que

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{N-(i+j)} A_{ijk} b^k c^{k-1} \quad (54)$$

De (54) y (51) resulta

$$\frac{\partial W}{\partial \xi^i} = \tilde{x}^i \sum_j B_{ij} a^i b^{j-1} + 2 \tilde{y}^i \sum_j C_{ij} a^i b^j \quad (55)$$

Si se conocen los coeficientes B_{ij} y si se calcula $\partial W / \partial \xi^i$ de (50) entonces podemos obtener los coeficientes C_{ij} de (55). Además para usar (50) debemos calcular el aumento local, m_x , trazando otro rayo principal originado en un punto desplazado del campo y también debemos hallar $\partial T / \partial \xi^i$.

Para un dado orden N hay $\left\{ \frac{(N-1)(N+2)}{2} - 1 \right\}$ coeficientes C_{ij} que es menor que el número de coeficientes B_{ij} pero mientras que hay tres ecuaciones para obtener los B_{ij} hay solo una para obtener los C_{ij} . Por ejemplo si $N = 4$ hay trece coeficientes B_{ij} y ocho coeficientes C_{ij} y luego para evaluar los C_{ij} a partir de un conjunto de ecuaciones simultáneas debemos trazar ocho rayos adecuadamente elegidos además del rayo principal. La configuración de rayos que nosotros usamos en este caso es la de la figura 7.

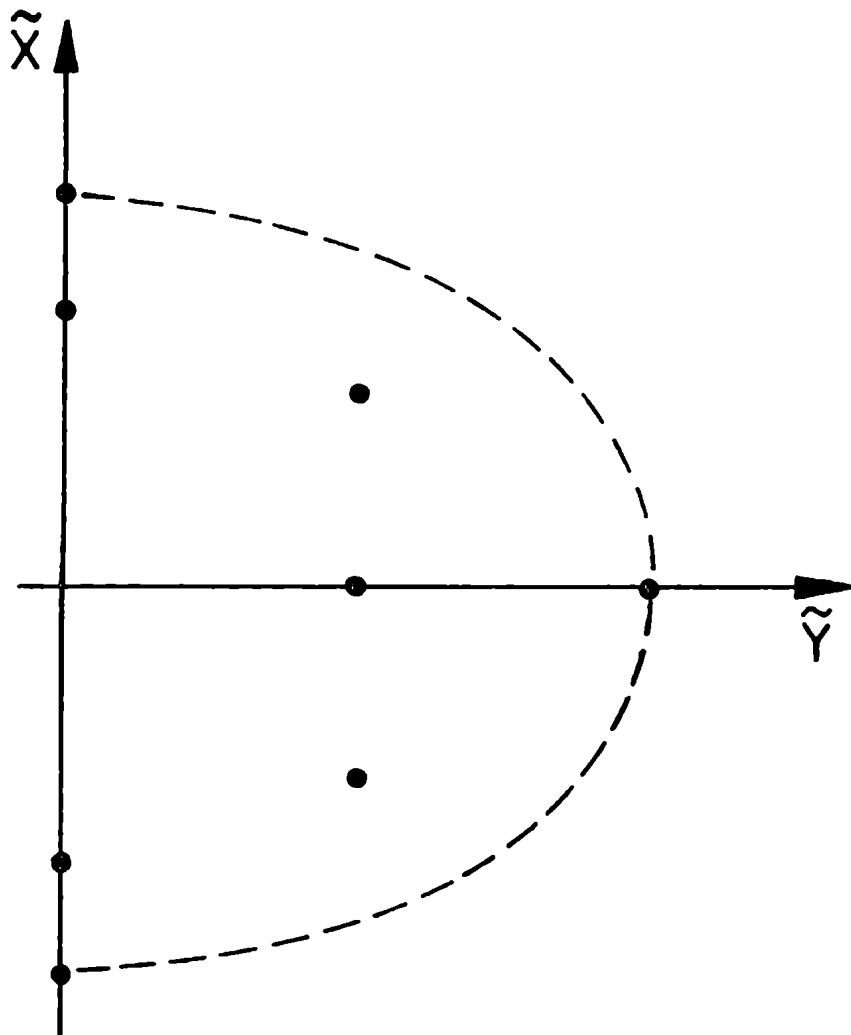


Figura 7: Configuración de rayos trazados a través de la pupila de entrada para hallar los coeficientes.

En el Apéndice IV damos las coordenadas polares en la esfera de referencia de la pupila de entrada (\tilde{r}_e, ϕ_e) de los ocho rayos trazados. Para sistemas ópticos libres de vigneteo la elipse de la figura 7 se transforma en aproximadamente un círculo. Para evaluar los coeficientes B_{ij} podemos usar parte de la información presente en estos ocho rayos y resolver un sistema de ecuaciones simultáneas o podemos usar toda la información y obtener una solución por cuadrados mínimos.

Luego en general el sistema de ecuaciones que usaremos para hallar los coeficientes B_{ij} y C_{ij} , de (8), (9), (10) y (55) es el siguiente

$$i) \quad W = \sum_i \sum_j^{0 < i+j \leq N} B_{ij} a^i b^j$$

$$ii) \quad \frac{\partial W}{\partial \tilde{x}'_1} = 2 \tilde{x}'_1 \sum_i \sum_j i B_{ij} a^{i-1} b^j + 2 \xi' \sum_i \sum_j j B_{ij} a^i b^{j-1}$$

$$iii) \quad \frac{\partial W}{\partial \tilde{y}'_1} = 2 \tilde{y}'_1 \sum_i \sum_j i B_{ij} a^{i-1} b^j$$

$$iv) \quad \frac{\partial W}{\partial \xi'} = \tilde{x}'_1 \sum_i \sum_j j B_{ij} a^i b^{j-1} + 2 \xi' \sum_i \sum_j C_{ij} a^i b^j$$

III.7 Cálculo de la función aberración en puntos desplazados del campo

Una vez calculada la función aberración y su derivada para cierto punto del campo, digamos $(\xi', 0)$, se conoce la función aberración en un entorno de ese punto. Consideremos un punto desplazado del campo, por ejemplo en $(\xi' + \delta\xi', 0)$ y hagamos un desarrollo en serie de Taylor de la función aberración en ese punto. Si $\delta\xi'$ no es demasiado grande de modo que podamos despreciar los términos de segundo y mayor orden en $\delta\xi'$ y si consideramos que las coordenadas en la esfera de referencia en la pupila de salida se mantienen constantes tenemos

$$\tilde{W}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j, \xi' + \delta\xi', 0) = \tilde{W}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j, \xi', 0) + \sum_k \left. \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi'} \right|_{\xi', 0} \delta\xi' \quad (56)$$

Como la ecuación (56) puede ser escrita en términos de coeficientes, definamos los coeficientes B'_{ij} del siguiente modo

$$B'_{ij} = \sum_{k=0}^{N-(i+j)} A_{ijk} c^k \quad (57)$$

$$\tilde{W}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j, \xi' + \delta\xi', 0) = \sum_{i,j} \sum_k \frac{a^{i+j+k}}{i! j! k!} B'_{ij} a^i b^j \quad (58)$$

$$b^j = b + \tilde{x}_j \delta\xi' \quad (59)$$

$$c^k = (\xi' + \delta\xi')^k \quad (60)$$

De las ecuaciones (58), (i) y (iv) en (56) y como $\delta\xi'$ no

es demasiado grande obtenemos

$$\sum_i \sum_j (B'_{ij} - B_{ij}) \left(1 + j \frac{\delta \xi'}{\xi'}\right) a^i b^j = 2 \xi' \delta \xi' \sum_i \sum_j C_{ij} a^i b^j \quad (61)$$

Dado que la ecuación (61) debe valer para todo a y b tenemos

$$B'_{ij} = B_{ij} + 2 \xi' \delta \xi' C_{ij} \quad (62)$$

La ecuación (62) nos permite conocer la función aberración para cualquier rayo originado en la cercanía de un dado punto del campo sin hacer un trazado adicional como sería necesario habitualmente.

III.8 Exploración de pupila

Para poder trazar rayos a través del sistema óptico que correspondan a los reales es necesario conocer la pupila. Con el fin de hallar la posición, tamaño y forma de la pupila de entrada para objeto extraaxial encontramos previamente la correspondiente pupila para objeto axial. Entonces, de acuerdo con el Apéndice IV, buscamos primero el verdadero diafragma de apertura para el punto axial del objeto y luego hallamos la pupila de entrada axial encontrando la imagen paraxial de este diafragma a través del sistema óptico que lo precede. En este caso resulta inmediato que las frecuencias de los rayos marginales son iguales en módulo puesto que, si D es el diámetro de la pupila de entrada axial, dichas frecuencias dependen de $D/2$ de idéntico modo (ver ecuación (II.2)).

Para definir la pupila de entrada verdadera correspondiente a un objeto extraaxial exigimos que se cumplan simultáneamente dos condiciones: el rayo principal debe intersectar al eje óptico en un punto perteneciente al plano de dicha pupila, o sea es tal que $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0,0)$, (lo cual está de acuerdo con las ecuaciones (24) y (II.2)) y las frecuencias generalizadas de los rayos marginales meridionales deben ser iguales en módulo (que está de acuerdo con la ecuación (23)). En general no pueden verificarse estas dos condiciones si se mantiene fija la ubicación del plano de la pupila de entrada e igual al axial y por lo tanto cuando desplazamos el objeto hacia afuera del eje óptico deberemos desplazar el plano de la pupila de entrada.

Para hacer la exploración de pupila usaremos la figura 8. Dado que las frecuencias generalizadas son directamente proporcionales a las coordenadas en la esfera de referencia correspondiente, como se ve en la ecuación (II.2) del Apéndice II, en la pupila de entrada verdadera deberemos tener $\tilde{x}\tilde{v}_1 = -\tilde{x}\tilde{v}_2$.

Por otra parte debido a que nos interesa calcular la derivada de la función aberración respecto al campo y ya que, como se ve en la ecuación (50), ésta depende de $\partial T / \partial \xi'$ entonces nos interesa conocer no solo la ubicación de la pupila de salida sino también como varía dicha ubicación con el campo. Puesto que las pupilas de entrada y salida son conjugadas si hallamos la ubicación de la pupila de entrada podemos encontrar inmediatamente la pupila de salida.

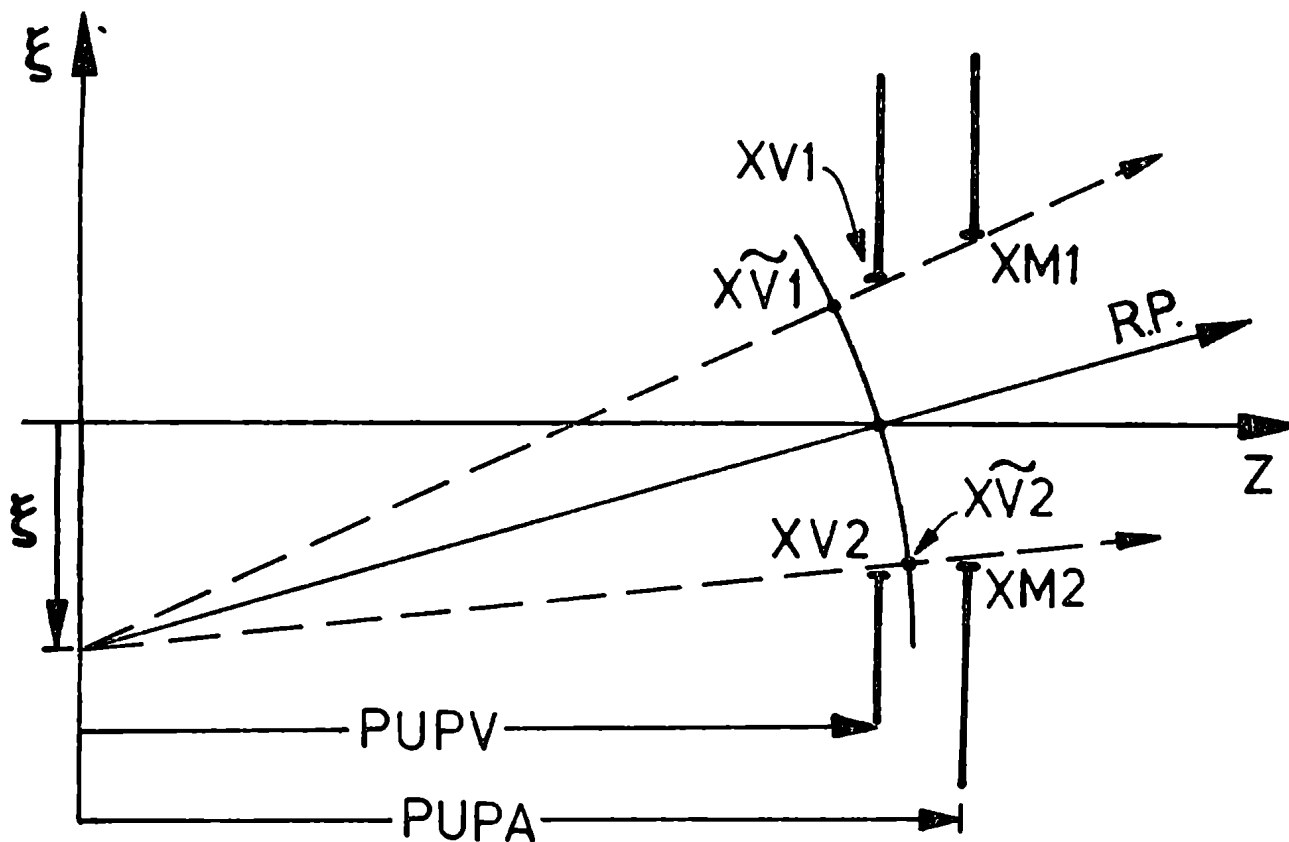


Figura 8: Exploración de pupila de entrada.

- ξ : posición del objeto
 $PUPA$: distancia desde el plano objeto hasta la PE axial
 $PUPV$: distancia desde el plano objeto hasta la PE extraaxial
 RP : rayo principal
 xM_1, xM_2, yM_3 : intersección de los rayos marginales con el plano de la PE axial (yM_3 corresponde al rayo marginal sagital que no se ha dibujado aquí).
 xV_1, xV_2, yV_3 : intersección de los rayos marginales con el plano de la PE extraaxial (yV_3 corresponde al rayo marginal sagital)
 $\tilde{x}V_1, \tilde{x}V_2, \tilde{y}V_3$: intersección de los rayos marginales con la esfera de referencia de la PE extraaxial.

Para hallar la pupila de entrada verdadera para un objeto fuera de eje debemos encontrar primero el correspondiente diafragma de apertura o ver si este existe. Luego puede suceder que el sistema sea o no libre de vigneteo.

III.8.1 Sistema libre de vigneteo

Decimos que el sistema es libre de vigneteo si el diafragma

de apertura extraaxial coincide con el axial. En este caso de acuerdo con óptica paraxial tenemos lo siguiente:

- a) La imagen del diafragma de apertura a través del sistema óptico que lo precede para objeto extraaxial coincide exactamente con el del objeto axial de modo que en el plano de la pupila de entrada axial tenemos $x_{M_1} = -x_{M_2} = D/2$.
- b) Las dos condiciones exigidas son incompatibles con el requerimiento de mantener fijo el plano de la pupila de entrada debido a la inclinación del haz originado en el objeto extraaxial y luego la ubicación del plano de la pupila de entrada verdadera debe ser distinta a la axial.
- c) Si consideramos dos puntos extraaxiales del objeto desplazados uno respecto del otro, aún en el caso en que los correspondientes diafragmas de apertura coincidan, las posiciones de las respectivas pupilas de entrada verdaderas, y en consecuencia de las pupilas de salida, no coinciden de modo que $\partial T / \partial \xi'$ no es estrictamente nula. Sin embargo, dado que la variación de T con ξ' se debe sólo a la variación de la inclinación del haz con ξ' , para desplazamientos del objeto no demasiado grandes podemos considerar con buena aproximación que $\partial T / \partial \xi' = 0$.

III.8.2 Sistema con vigneteo

Decimos que el sistema tiene vigneteo si el diafragma de apertura extraaxial es distinto del axial o no existe físicamente. En este caso de acuerdo con óptica paraxial tenemos lo siguiente:

a) En el plano de la pupila de entrada axial obtenemos

$$xM_1 \neq -xM_2 \neq D/2 .$$

b) Para que se verifiquen las dos condiciones exigidas debemos desplazar la pupila de entrada respecto de la axial debido a la inclinación del haz proveniente del objeto fuera de eje y al vigneteo.

c) La posición de la pupila de entrada verdadera y de la correspondiente pupila de salida dependen del punto del objeto que se tenga en cuenta. Luego si pensamos que la variación de τ con ξ' se debe en mayor grado al vigneteo que a la inclinación del haz tenemos $\partial\tau/\partial\xi' \neq 0$. En el Capítulo IV verificaremos esto para un triplete.

Como mostramos en el Apéndice IV nosotros hacemos la exploración de pupila extraaxial por trazado exacto de rayos en vez de usar óptica paraxial entonces las aberraciones de las pupilas influyen tanto en la posición, tamaño y forma de la pupila de entrada verdadera como en la de salida. Sin embargo en general en la etapa de análisis de sistemas ópticos las aberraciones de las pupilas son una corrección de orden superior al vigneteo y por lo tanto usar o no óptica paraxial no influye demasiado en el resultado final.

CAPITULO IV

PRUEBAS NUMERICAS

IV. PRUEBAS NUMERICAS

Para probar la validez de las ecuaciones obtenidas desarrollamos cinco programas de computadora que se detallan en el Apéndice IV y que son los siguientes:

Programa I: Cálculo de la ubicación del plano imagen y de la posición y tamaño de la pupila de entrada para un objeto axial, usando la óptica paraxial.

Programa II: Cálculo de la posición y tamaño de la pupila de entrada para un sistema óptico real y para un objeto extraaxial usando leyes de Snell no paraxiales.

Programa III: Cálculo de los coeficientes de la función aberración y de su derivada respecto al campo para un punto extraaxial del objeto.

Programa IV: Verificación de las fórmulas y de los coeficientes obtenidos.

Programa V: Cálculo de los coeficientes de la función aberración en un punto del campo a partir de los correspondientes a otro punto desplazado y chequeo.

Estos programas se utilizaron para analizar un triplete aunque en el futuro pensamos aplicarlos al estudio de sistemas de distinto tipo.

IV.1 Triplete

Mostramos aquí los resultados obtenidos cuando se utilizan los programas para el caso del triplete que se muestra en la figura 9 (diseño de Cox [12] número 4-67). Este sistema fue elegido debido

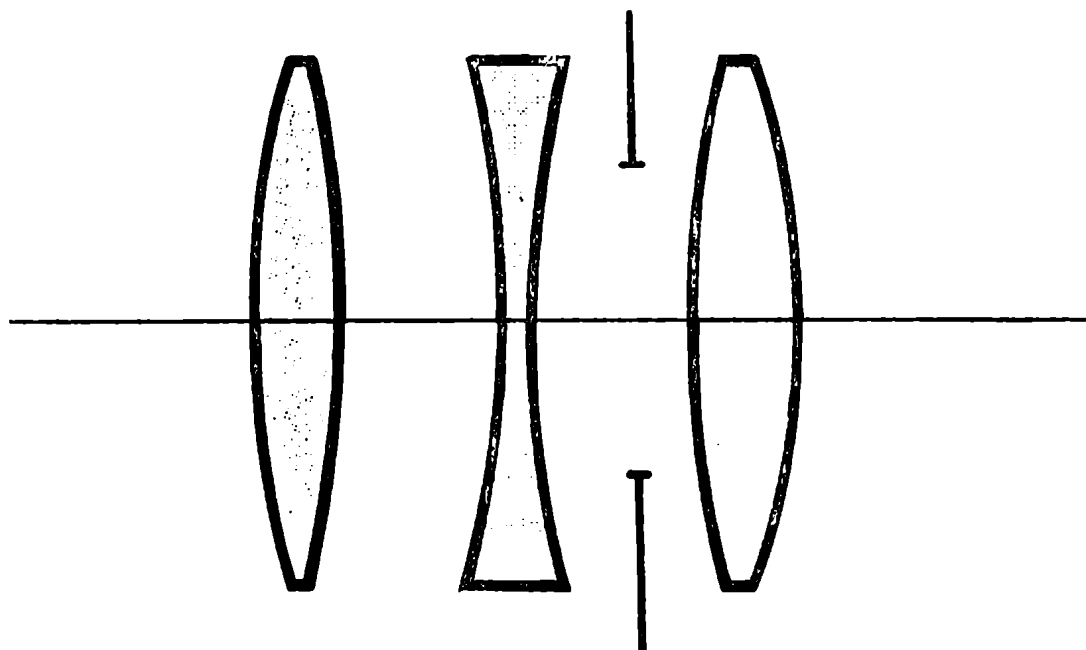


Figura 9: Triplete

a que corresponde a tener una dificultad intermedia para el ajuste del polinomio. Nosotros ajustamos las aberraciones del frente a un polinomio que tiene trece coeficientes B_{ij} ($N = 4$) y por lo tanto la derivada de la función aberración con respecto al campo se evalúa con ocho coeficientes C_{ij} .

El sistema tiene una distancia focal $f = 9.87$, una relación $f/D = 3.3$ y un ángulo de campo total de aproximadamente 24° (0.42 radianes). Para ejecutar los programas se consideran, además del punto axial del objeto, dos puntos del objeto: uno ubicado en $(\xi, 0)$ que corresponde a un ángulo de campo de 0.20 radianes y cuya imagen está ubicada en $(\xi', 0)$ y otro ubicado en $(\xi + \delta\xi, 0)$ que corresponde a un ángulo de campo de 0.21 radianes y cuya imagen está en $(\xi' + \delta\xi', 0)$.

Además se supusieron dos grupos distintos de tamaños de lentes de modo que en un caso el sistema resultase libre de vigneteo y en el otro con vigneteo. Estos tamaños así como las demás especifici-

caciones del sistema se dan en la Tabla 1 donde se utiliza la notación de la figura III.1.

Tabla 1: Especificaciones del triplete

Posición del diafragma: 0.4 antes que dioptra J=5

Tamaño del diafragma: 1.25

NSUP = 7

J	DI	n	RA	TA sin vigneteo	TA con vigneteo
1	100.00	1.000	4.05	3	1.7
2	0.60	1.638	-94.25	3	1.7
3	0.92	1.000	-5.05	3	1.6
4	0.20	1.648	4.17	3	1.6
5	0.99	1.000	24.35	3	1.9
6	0.60	1.638	-3.94	3	1.9
7	9.51	1.000	---	---	---

La distancia DI (NSUP) desde la última dioptra al plano imagen, que aparece en la Tabla 1, se halla usando el programa I. Este programa también se utiliza para encontrar el diámetro D de la pupila de entrada axial y la distancia PUPA desde el plano objeto a la pupila de entrada axial obteniéndose los siguientes resultados;

$$D = 3.05$$

$$PUPA = 102.74$$

La distancia TAX desde la pupila de salida axial al plano imagen es

$$TAX = 10.44$$

Mostraremos ahora los resultados obtenidos mediante los demás programas para los casos sin y con vigneteo.

IV.1.1 Triplete libre de vigneteo

Programa II: Usando este programa, y con los resultados del programa I, se halla primero el diafragma de apertura correspondiente al objeto ubicado en $(\xi, 0)$ y las coordenadas xM_1, xM_2, yM_3 que deben tener los rayos marginales en la pupila de entrada axial para atravesar el sistema (ver figura 8). Luego buscando la intersección del rayo principal con el eje óptico se encuentra la distancia PUPV y las coordenadas xV_1, xV_2, yV_3 de los rayos marginales en el plano de la pupila de entrada verdadera. Además se exploró la pupila para el objeto ubicado en $(\xi + \delta\xi, 0)$ al solo efecto de verificar la validez de lo dicho en el inciso III.8.1.

En la Tabla 2 mostramos los resultados numéricos obtenidos. De esta tabla vemos que aún para sistema libre de vigneteo se tiene $PUPV \neq PUPA$ pero que $\partial T / \partial \xi' = 0$ con buena aproximación.

Programa III: De acuerdo con el Apéndice IV, para evaluar los coeficientes consideramos el objeto ubicado en $(\xi, 0)$ y usamos la configuración de ocho rayos de la figura 7. Obtenemos los coeficientes B_{ij} de un conjunto de trece ecuaciones simultáneas y como los resultados obtenidos son aceptables, no probamos una optimización de la solución por cuadrados mínimos. Obtenemos los coeficientes C_{ij}

de un conjunto de ocho ecuaciones simultáneas calculando la derivada de \mathcal{W} respecto al campo para cada rayo mediante la ecuación (45) (pues $\partial T / \partial \xi' = 0$). Hallamos el aumento local trazando el rayo principal proveniente de un punto objeto desplazado en 10^{-5} veces la coordenada de campo original.

Tabla 2: Exploración de pupila en el caso libre de vigneteo

	Objeto en ($\xi, 0$)	Objeto en ($\xi + \delta\xi, 0$)
Posición del objeto	$\xi = -20$	$\xi + \delta\xi = -21$
xM_1	1.55	1.55
xM_2	-1.42	-1.42
yM_3	1.49	1.49
Diafragma de apertura	diafragma	diafragma
PUPV	102.45	102.44
xV_1	1.49	1.49
xV_2	-1.48	-1.48
yV_3	1.48	1.48
$\tilde{x}V_1$	1.43	1.43
$\tilde{x}V_2$	-1.43	-1.43
$\tilde{y}V_3$	1.48	1.48
T	10.709	10.710
Posición de la imagen	$\xi' = 2.14$	$\xi' + \delta\xi' = 2.24$

Programa IV: De acuerdo con el Apéndice IV trazamos dos conjuntos de veinticinco rayos cada uno correspondientes a la configuración de la figura 10, uno proveniente del punto del objeto ubicado en $(\xi, 0)$ y otro de $(\xi + \delta\xi, 0)$.

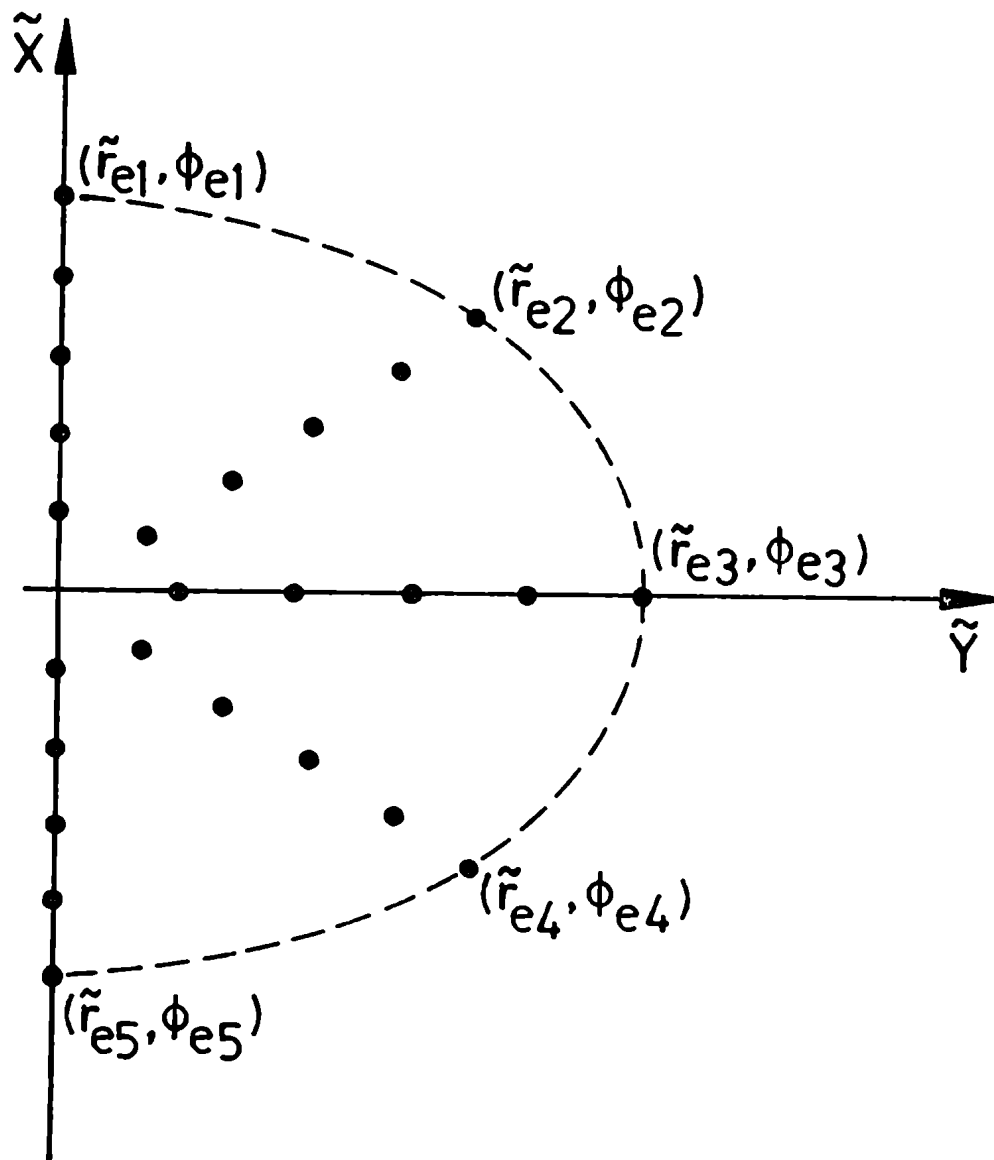


Figura 10: Configuración de rayos trazados a través de la pupila de entrada para chequear los resultados.

Para el primer conjunto de rayos calculamos $w(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}', 0)$ y $\partial w / \partial \tilde{z}' |_{\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}'}$ por trazado de rayos utilizando las ecuaciones (47) y (45) respectivamente. Para el segundo conjunto de rayos computamos $w(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}' + \delta \tilde{z}', 0)$ usando la ecuación (47).

Con los resultados obtenidos de estos trazados hacemos las siguientes verificaciones.

a) Verificación de la ecuación obtenida para $\partial w / \partial \tilde{z}'$

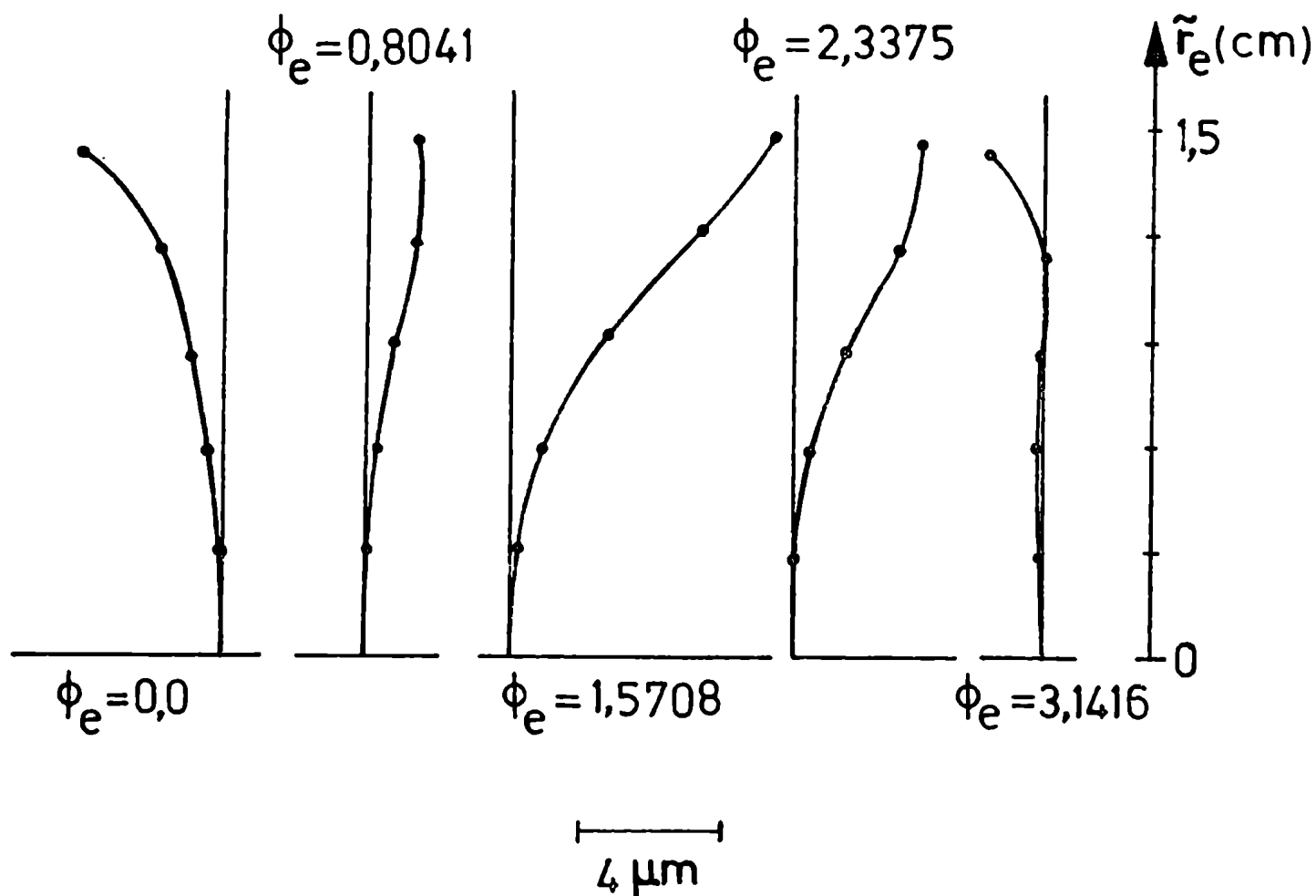


Figura 11: Función aberración en un punto imagen desplazado para el caso libre de vigneteo.

Las curvas muestran las relaciones entre \tilde{z}_e y la función aberración verdadera $w(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}' + \delta \tilde{z}', 0)$.

Los puntos representan $\tilde{w}(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}' + \delta \tilde{z}', 0)$ que es la función aberración calculada mediante el término lineal del desarrollo de Taylor y usando la ecuación previamente obtenida para la derivada de la aberración respecto a las coordenadas del campo.

Para cada rayo del primer conjunto (definido por sus coordenadas (\tilde{x}', \tilde{y}') en la esfera de la pupila de salida) se calcula mediante la ecuación (56) la función aberración $\tilde{w}(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi' + \delta\xi', 0)$ correspondiente al punto imagen ubicado en $(\xi' + \delta\xi', 0)$

En la figura 11 mostramos $w(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi' + \delta\xi', 0)$ (curvas) y $\tilde{w}(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi' + \delta\xi', 0)$ (puntos) y como la discrepancia máxima entre ambas funciones es aproximadamente 0.5% del valor de la aberración mayor, es despreciable comparada con errores de dibujo. Consecuentemente la ecuación para la derivada obtenida por nosotros puede usarse con confianza en sistemas de tipo similar al triplete.

b) Verificación del ajuste de los polinomios

Con los coeficientes B_{ij} y C_{ij} obtenidos mediante el programa III calculamos $\tilde{w}(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi', 0)$ y $\partial\tilde{w}/\partial\xi' |_{\tilde{x}', \tilde{y}', \eta}'$ usando las ecuaciones i) y iv) respectivamente. Además evaluamos diferencias finitas $\delta w / \delta\xi' = \{w(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi' + \delta\xi', 0) - w(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi', 0)\}$ donde las aberraciones son las halladas mediante el trazado.

En la figura 12 damos los resultados obtenidos cuando se compara $w(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi', 0)$ (curvas) con $\tilde{w}(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi', 0)$ (puntos) y en la figura 13 los resultados para $\partial w / \partial\xi' |_{\tilde{x}', \tilde{y}', \eta}'$ (curvas), $\partial\tilde{w} / \partial\xi' |_{\tilde{x}', \tilde{y}', \eta}'$ (curvas) y $\delta w / \delta\xi'$ (puntos). Estas figuras muestran que, para este sistema óptico, los ajustes son excelentes y la diferencia entre los polinomios y las funciones verdaderas son mucho menores que errores de dibujo.

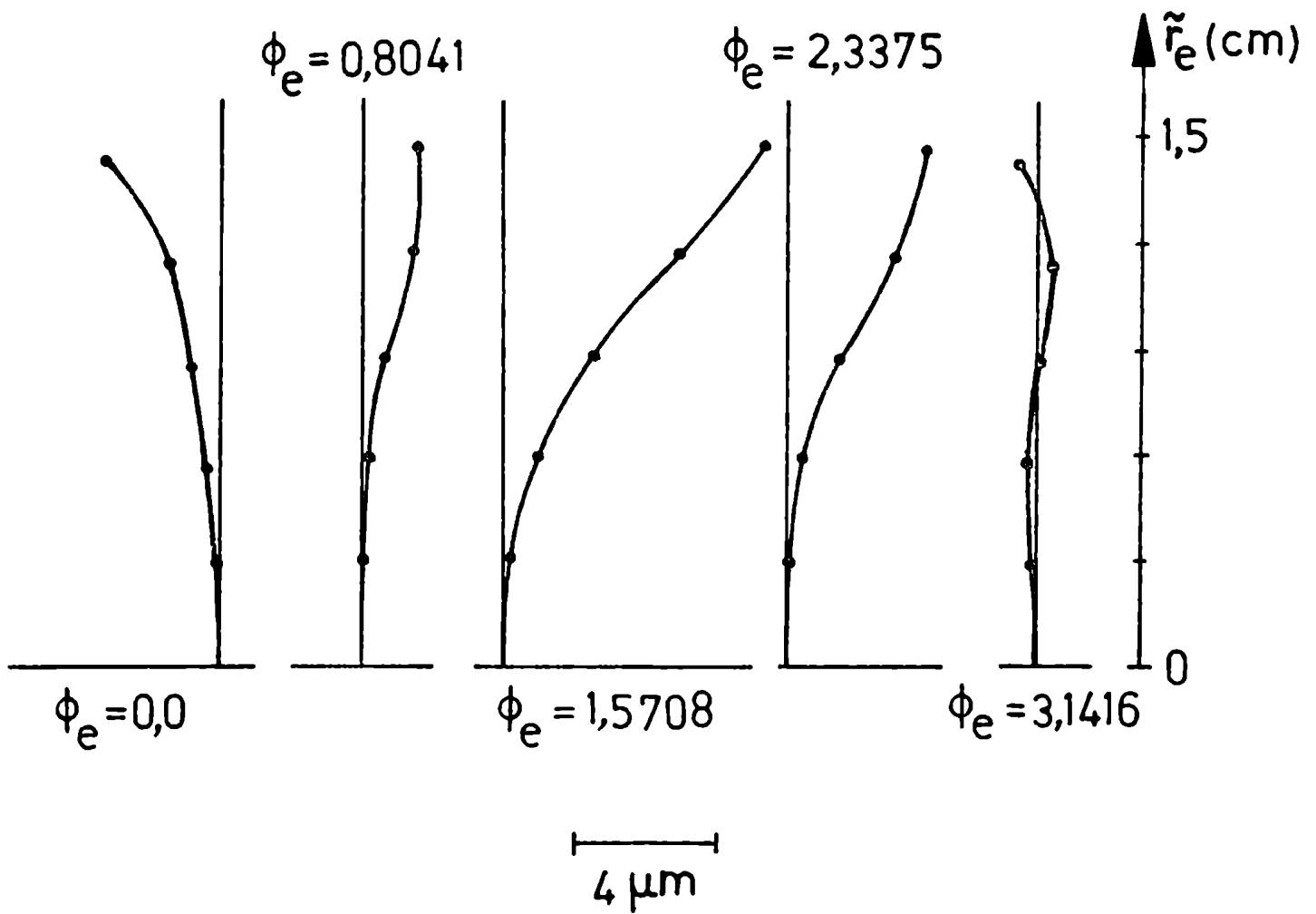


Figura 12: Ajuste del polinomio para la función aberración en el caso libre de vigneteo.
 Las curvas muestran las relaciones entre \tilde{r}_e y la función aberración verdadera $\omega(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}', 0)$.
 Los puntos representan la función aberración computada a partir del polinomio que es $\tilde{\omega}(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}', 0)$.

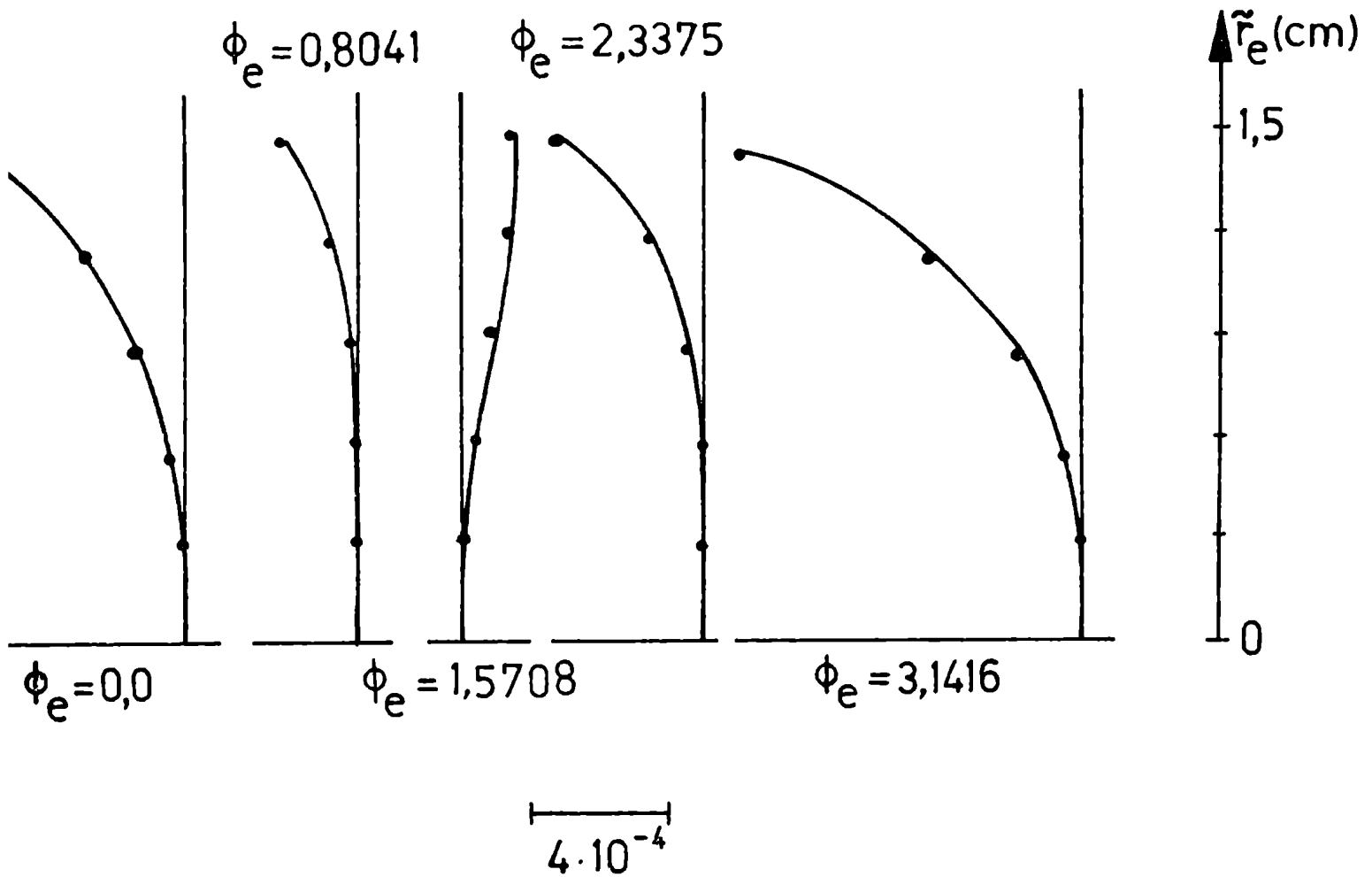


Figura 13: Ajuste del polinomio para la derivada de la función aberración y derivada computada por diferencias finitas en el caso libre de vigneteo.

$$\frac{\partial W(\bar{x}', \bar{y}', \xi', 0)}{\partial \xi'} \Big|_{\bar{x}', \bar{y}', \eta'} = \text{derivada verdadera de la función aberración (curvas)}$$

$$\frac{\partial \tilde{W}(\bar{x}', \bar{y}', \xi', 0)}{\partial \xi'} \Big|_{\bar{x}', \bar{y}', \eta'} = \text{derivada de la función aberración computada a partir del polinomio (curvas)}$$

$$\frac{\delta W(\bar{x}', \bar{y}', \xi', 0)}{\delta \xi'} = \frac{W(\bar{x}', \bar{y}', \xi' + \delta \xi', 0) - W(\bar{x}', \bar{y}', \xi', 0)}{\delta \xi'} \quad (\text{puntos})$$

Programa V: Calculamos los coeficientes \tilde{B}'_{ij} utilizando el programa III para el objeto en $(\xi + \delta \xi, 0)$ y los B'_{ij} mediante la ecuación (62) y el programa III para el objeto en $(\xi, 0)$. La Tabla 3 ilustra la validez de la ecuación (62) para calcular los B'_{ij}

Tabla 3: Coeficientes para un punto imagen desplazado en el caso libre de vigneteo

De trazado	De ecuaciones
$B'_{10} = 0.22543 \cdot 10^{-3}$	$B'_{10} = 0.22614 \cdot 10^{-3}$
$B'_{20} = 0.17002 \cdot 10^{-3}$	$B'_{20} = 0.17242 \cdot 10^{-3}$
$B'_{30} = -0.23789 \cdot 10^{-4}$	$B'_{30} = -0.24954 \cdot 10^{-4}$
$B'_{40} = -0.12791 \cdot 10^{-4}$	$B'_{40} = 0.12753 \cdot 10^{-4}$
$B'_{02} = -0.73609 \cdot 10^{-4}$	$B'_{02} = 0.74021 \cdot 10^{-4}$
$B'_{12} = -0.81357 \cdot 10^{-5}$	$B'_{12} = 0.82512 \cdot 10^{-5}$
$B'_{22} = -0.30584 \cdot 10^{-5}$	$B'_{22} = -0.29808 \cdot 10^{-5}$
$B'_{04} = 0.12448 \cdot 10^{-6}$	$B'_{04} = 0.11275 \cdot 10^{-6}$
$B'_{11} = 0.40090 \cdot 10^{-4}$	$B'_{11} = 0.40449 \cdot 10^{-4}$
$B'_{21} = -0.16433 \cdot 10^{-5}$	$B'_{21} = 0.13636 \cdot 10^{-5}$
$B'_{31} = 0.38356 \cdot 10^{-5}$	$B'_{31} = 0.37747 \cdot 10^{-5}$
$B'_{03} = 0.86249 \cdot 10^{-6}$	$B'_{03} = 0.92098 \cdot 10^{-6}$
$B'_{13} = 0.29721 \cdot 10^{-6}$	$B'_{13} = 0.27290 \cdot 10^{-6}$

Los coeficientes \tilde{B}'_{ij} se obtienen directamente del trazado de rayos para un ángulo de campo de 0.21 radianes.

Los coeficientes B'_{ij} se obtienen de la ecuación (62) y trazado de rayos para un ángulo de campo de 0.20 radianes.

Las unidades del coeficiente B'_{ij} (o \tilde{B}'_{ij}) son cm^{4-i-j} cuando las coordenadas y la función aberración están en cm.

IV.1.2 Triplete con vigneteo

Programa II: De acuerdo a lo visto en el inciso III.8.2, la derivada de la función aberración en el caso con vigneteo está dada por la ecuación (50) de modo que coincidentemente con lo dicho en el Apéndice IV debemos calcular $\partial T / \partial \xi^i$. Para ello utilizamos el programa II no sólo para el punto del objeto cuya imagen está en $(\xi^i, 0)$ sino también para aquel cuya imagen están en $(\xi^i + \delta \xi^i, 0)$ y tenemos:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi'} = T(\xi' + \delta \xi') - T(\xi') \quad (63)$$

Los resultados numéricos obtenidos mediante el programa II para los dos puntos del objeto tenidos en cuenta se muestran en la Tabla 4. Como se ve de estos resultados el sistema tiene un vigneteo de aproximadamente 10%. En el futuro se probará la validez de las ecuaciones obtenidas para sistemas con mayor porcentaje de vigneteo.

Tabla 4: Exploración de pupila en el caso con vigneteo

	Objeto en ($\xi, 0$)	Objeto en ($\xi + \delta \xi, 0$)
Posición del objeto	$\xi = -20$	$\xi + \delta \xi = -21$
xM_1	1.55	1.55
xM_2	-1.17	-1.14
yM_3	1.49	1.49
Diafragma de apertura	diafragma y dioptra J=1	diafragma y dioptra J=1
PUPV	101.79	101.77
xV_1	1.35	1.34
xV_2	-1.34	-1.33
yV_3	1.47	1.47
$\tilde{x}V_1$	1.29	1.28
$\tilde{x}V_2$	-1.29	-1.28
$\tilde{y}V_3$	1.47	1.47
T	11.38	11.41
Posición de imagen	2.14	2.24

Programa III: Los coeficientes B_{ij} y C_{ij} se evalúan de modo similar al caso libre de vigneteo aunque en este caso la derivada de la función aberración respecto al campo se calcula mediante la ecuación (50).

Programa IV: Análogamente a lo explicado en el caso libre de vigneteo se trazan dos conjuntos de veinticinco rayos y los resultados de las verificaciones son los que se muestran a continuación.

a) Verificación de la ecuación obtenida para $\partial W / \partial \xi'$

En la figura 14 mostramos $W(\bar{x}', \bar{y}', \xi' + \delta \xi', 0)$ (curvas) y $\tilde{W}(\bar{x}', \bar{y}', \xi' + \delta \xi', 0)$ (puntos). La discrepancia máxima entre ambas funciones es aproximadamente 0.8% del valor de la aberración mayor de modo que nuevamente es despreciable frente a errores de dibujo.

b) Chequeo del ajuste de los polinomios

En la figura 15 mostramos los resultados obtenidos al comparar $W(\bar{x}', \bar{y}', \xi', 0)$ (curvas) con $\tilde{W}(\bar{x}', \bar{y}', \xi', 0)$ (puntos) y en la figura 16 los resultados para $\partial W / \partial \xi' |_{\bar{x}', \bar{y}', \eta'}$ (curvas), $\partial \tilde{W} / \partial \xi' |_{\bar{x}', \bar{y}', \eta'}$ (curvas) y $\delta W / \delta \xi'$ (puntos).

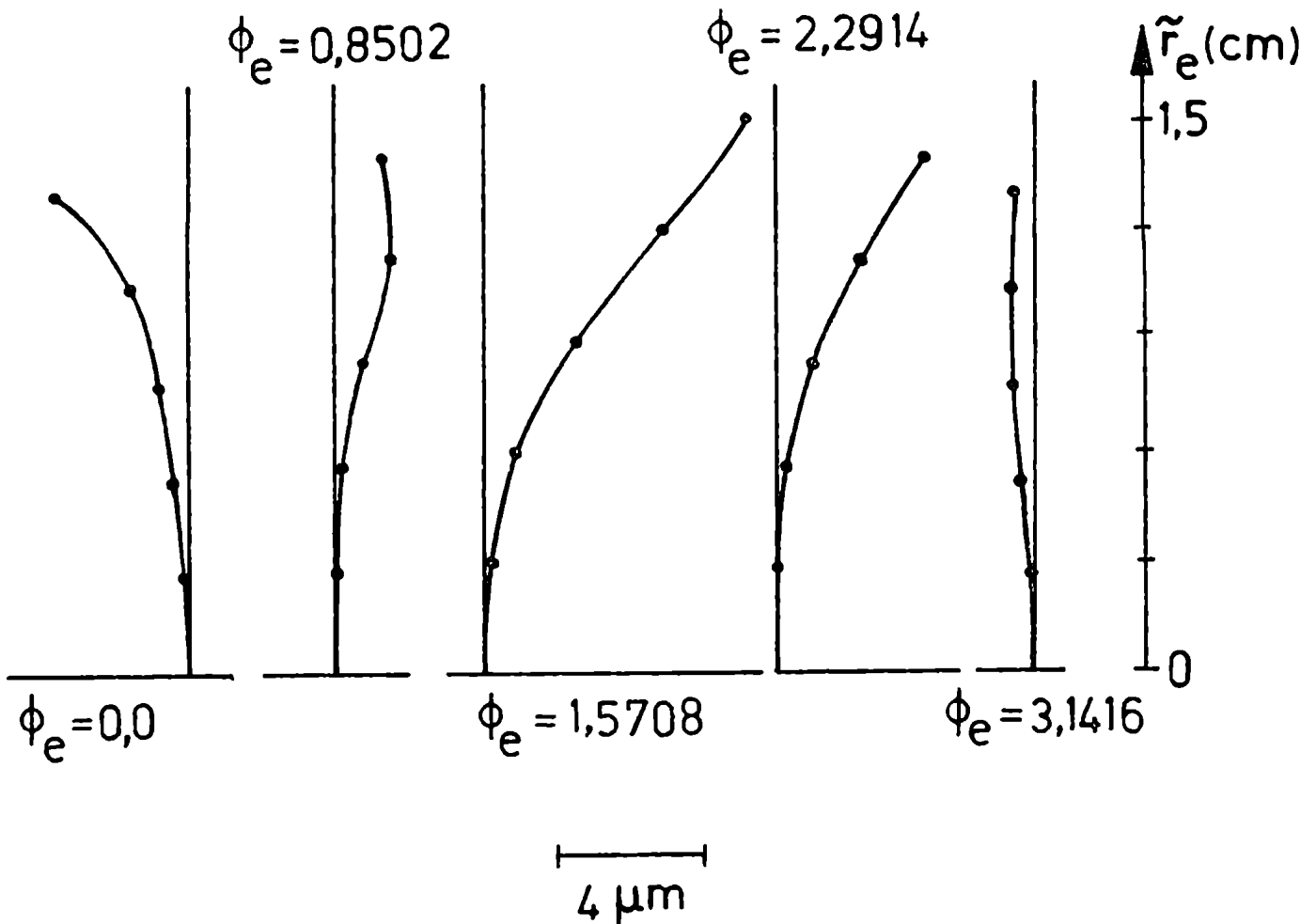


Figura 14: Función aberración en un punto imagen desplazado para el caso con vigneteo.

Las curvas muestran las relaciones entre \tilde{r}_e y la función aberración verdadera $\mathcal{W}(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi' + \delta\xi', 0)$.

Los puntos representan $\tilde{\mathcal{W}}(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi' + \delta\xi', 0)$ que es la función aberración calculada mediante el término lineal del desarrollo de Taylor y usando la ecuación previamente obtenida para la derivada de la aberración respecto a las coordenadas del campo.

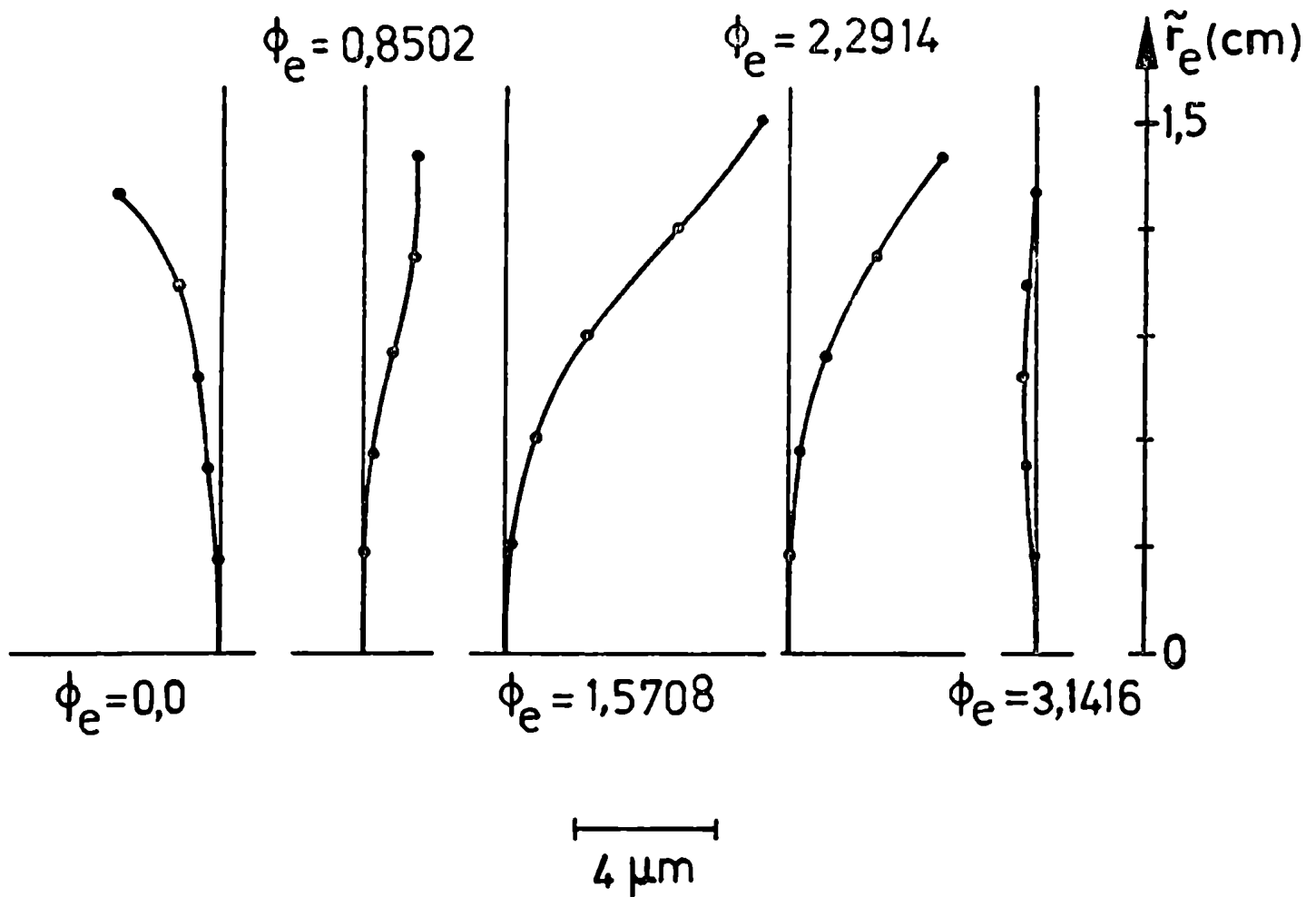


Figura 15: Ajuste del polinomio para la función aberración en el caso con vigneteo.

Las curvas muestran las relaciones entre $\tilde{\zeta}_e$ y la función aberración verdadera $\mathcal{W}(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{\xi}', 0)$.

Los puntos representan la función aberración computada a partir del polinomio que es $\tilde{\mathcal{W}}(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{\xi}', 0)$.

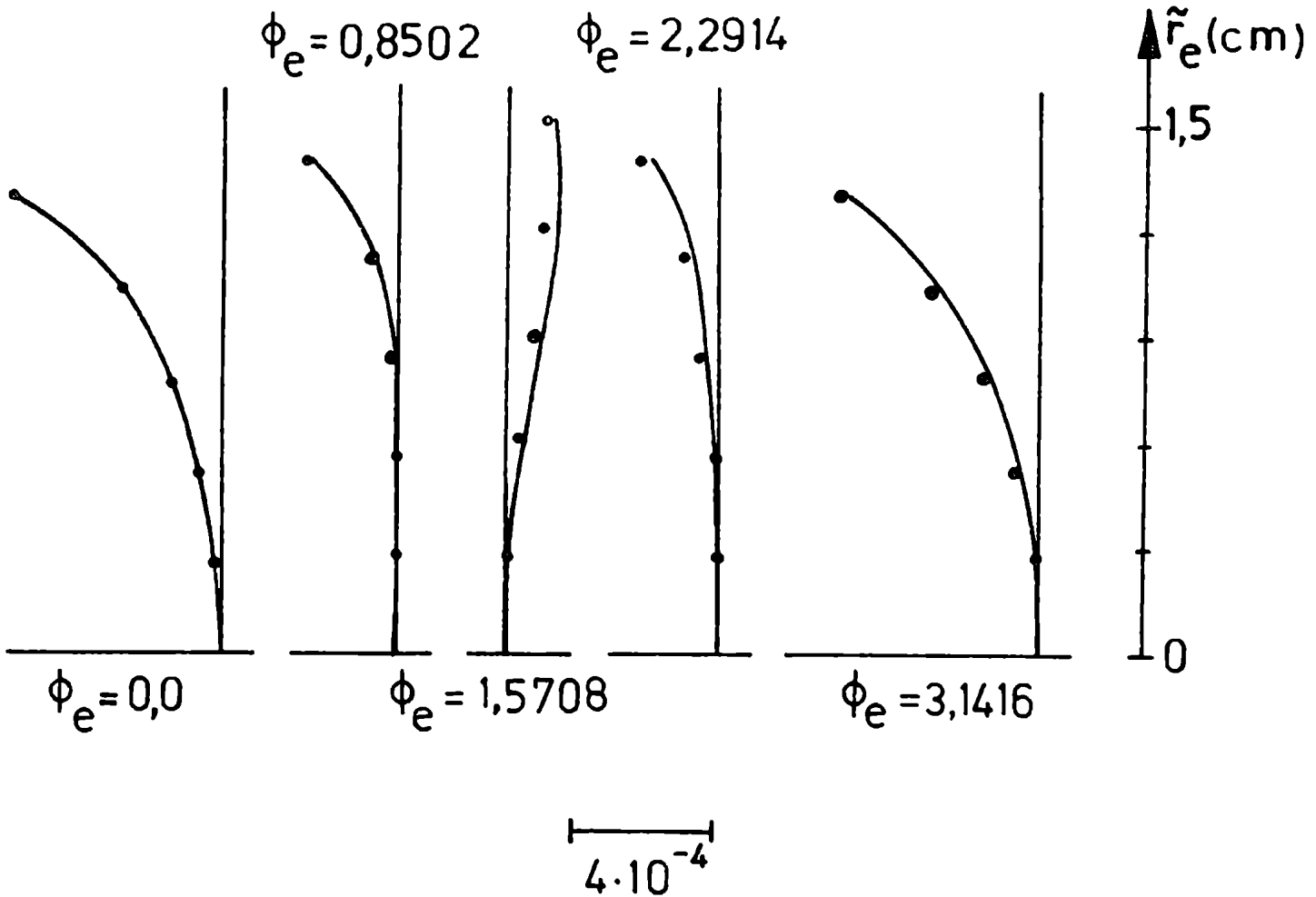


Figura 16: Ajuste del polinomio para la derivada de la función aberración y derivada computada por diferencias finitas en el caso con vigneteo.

$$\text{curvas: } \frac{\partial w(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi', 0)}{\partial \xi'} \Big|_{\tilde{x}', \tilde{y}', \eta'} = \text{derivada verdadera de la función aberración}$$

$$\text{curvas: } \frac{\partial w(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi', 0)}{\partial \xi'} \Big|_{\tilde{x}', \tilde{y}', \eta'} = \text{derivada de la función aberración computada a partir del polinomio}$$

$$\text{puntos: } \frac{\delta w}{\delta \xi'} \quad \frac{w(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi' + \delta \xi', 0) - w(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi', 0)}{\delta \xi'}$$

De estas figuras se ve que, también en el caso con vigneteo, los ajustes de los polinomios son excelentes.

Programa V: Los coeficientes B'_{ij} y \tilde{B}'_{ij} se hallan de forma análoga a la del caso libre de vigneteo y los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5: Coeficientes para un punto imagen desplazado en el caso con vigneteo

De trazado	De ecuaciones
$\tilde{B}'_{10} = 0.19349 \quad 10^{-1}$	$B'_{10} = 0.19538 \quad 10^{-3}$
$\tilde{B}'_{20} = 0.13140 \quad 10^{-3}$	$B'_{20} = 0.13357 \quad 10^{-3}$
$\tilde{B}'_{30} = -0.16225 \quad 10^{-4}$	$B'_{30} = -0.16961 \quad 10^{-4}$
$\tilde{B}'_{40} = -0.78561 \quad 10^{-5}$	$B'_{40} = -0.79749 \quad 10^{-5}$
$\tilde{B}'_{02} = -0.66843 \quad 10^{-4}$	$B'_{02} = -0.67581 \quad 10^{-4}$
$\tilde{B}'_{12} = -0.82082 \quad 10^{-5}$	$B'_{12} = -0.82484 \quad 10^{-5}$
$\tilde{B}'_{22} = -0.17461 \quad 10^{-5}$	$B'_{22} = -0.16938 \quad 10^{-5}$
$\tilde{B}'_{04} = -0.88863 \quad 10^{-7}$	$B'_{04} = -0.80277 \quad 10^{-7}$
$\tilde{B}'_{11} = -0.48610 \quad 10^{-5}$	$B'_{11} = -0.54955 \quad 10^{-5}$
$\tilde{B}'_{21} = -0.75446 \quad 10^{-5}$	$B'_{21} = -0.77376 \quad 10^{-5}$
$\tilde{B}'_{31} = -0.21387 \quad 10^{-5}$	$B'_{31} = -0.19877 \quad 10^{-5}$
$\tilde{B}'_{03} = -0.51378 \quad 10^{-6}$	$B'_{03} = -0.49663 \quad 10^{-6}$
$\tilde{B}'_{13} = -0.41813 \quad 10^{-7}$	$B'_{13} = -0.22529 \quad 10^{-7}$

Los coeficientes \tilde{B}'_{ij} se obtienen directamente del trazado de rayos para un ángulo de campo de 0.21 radianes.

Los coeficientes B'_{ij} se obtienen de la ecuación (62) y trazado de rayos para un ángulo de campo de 0.20 radianes.

Las unidades del coeficiente B'_{ij} (o \tilde{B}'_{ij}) son $\text{cm}^{1-2(i+j)}$ cuando las coordenadas y la función aberración están en cm.

CAPITULO V

DISCUSION

V. Discusión

La Condición de los Senos axial usual puede obtenerse a partir de consideraciones de óptica de Fourier asociando cada frecuencia espacial presente en el objeto y en la imagen con su respectivo frente de ondas plano. Además definiendo adecuadamente las frecuencias espaciales en el espacio objeto y en el espacio imagen es posible extender dicha Condición para objetos fuera de eje.

Por otra parte mostramos que el incumplimiento de la Condición de los Senos extendida para objetos extraaxiales está directamente relacionado con la variación de la función aberración con el campo y, basándonos en este hecho, obtenemos una expresión para la derivada de la función aberración respecto a las coordenadas en el campo cuando se mantienen constantes las coordenadas en la esfera de la pupila de salida. Esta derivada puede utilizarse en el análisis de sistemas ópticos formadores de imágenes para aprovechar mejor la información presente en cada rayo.

Para evaluar las aberraciones mediante trazado de rayos se obtienen ecuaciones y se desarrollan programas de computadora que permiten hallar localmente no sólo la función aberración sino también su derivada respecto al campo con poco trabajo adicional al necesario para encontrar la función aberración solamente.

Las ecuaciones y programas desarrollados se probaron para un sistema de dificultad intermedia, el triplete, para el cual dieron resultados excelentes tanto para el caso libre de vigneteo como para el caso con vigneteo. En el caso con vigneteo necesitamos hacer dos

exploraciones de pupila, una para el punto del campo original y otra para el punto desplazado. Sin embargo, pensamos que será posible superar este inconveniente.

Por otra parte trataremos de analizar mediante nuestras ecuaciones y programas otros tipos de sistemas ópticos que presenten mayor dificultad como por ejemplo el caso del Gauss doble simétrico y sus derivados.

Además es interesante destacar que intentamos estudiar en el futuro la aplicación de las ecuaciones obtenidas en la evaluación de calidad de imágenes mediante funciones transferencia óptica. A este respecto resulta inmediato que el tamaño de la zona isoplanática puede calcularse directamente a partir de la derivada de la función aberración respecto al campo que obtuvimos. Por otra parte podría calcularse la derivada de la función transferencia óptica respecto al campo cuando nos alejamos de la zona isoplanática con el fin de obtener un análisis más completo del sistema óptico.

Silvia Cavatti

Y. L. G.

APENDICE I

OPTICA DE FOURIER

I. OPTICA DE FOURIER

Con el fin de obtener una expresión para la distribución de luz en el objeto y en su imagen podemos usar dos puntos de vista de los cuales uno consiste en pensar que se tiene una superposición lineal de ondas planas, como vimos en el inciso III.1, y el otro es el método usual de Fourier, que trataremos aquí.

a) Tratamiento generalizado para sistemas ópticos [13]

Consideramos un sistema óptico que produce una imagen real (si es necesario el ojo forma parte de este sistema) y un objeto pequeño axial. Llamaremos "entrada" a la distribución de luz en el plano objeto en el cual tenemos coordenadas (ξ, η) y "salida" a la distribución de luz en el correspondiente plano imagen en el cual las coordenadas son (ξ', η') . Según el tipo de iluminación la entrada, $E(\xi, \eta)$, y la salida, $E'(\xi', \eta')$, pueden ser funciones del espacio reales (intensidad) o complejas (perturbación). No nos interesa analizar acá cual de estas funciones debemos considerar de modo que en lo que sigue $E(\xi, \eta)$ y $E'(\xi', \eta')$ representan la intensidad o la perturbación.

Para especificar las propiedades del sistema óptico podemos pensar en este como una caja negra con dos terminales: la pupila de entrada y la pupila de salida, las cuales se encuentran usualmente por óptica geométrica y son conjugadas. La óptica geométrica describe adecuadamente el pasaje de luz desde la pupila de entrada a la de salida. Los efectos de difracción son importantes desde el objeto a

la pupila de entrada y desde la pupila de salida a la imagen y se puede pensar que son causados por la pupila de entrada finita (Abbe) o por la pupila de salida finita (Rayleigh). Nosotros adoptamos el punto de vista de Rayleigh.

Igual que Goodman [13] consideramos que una representación conveniente de un sistema es un operador matemático $\mathcal{H}\{\}$ que opera a la entrada para producir la salida, de modo que por definición de $\mathcal{H}\{\}$ tenemos

$$E'(\xi', \eta') = \mathcal{H}\{E(\xi, \eta)\} \quad (\text{I.1})$$

b) Sistema lineal [13]

Se dice que un sistema es lineal si para cualesquiera funciones de entrada $E_1(\xi, \eta)$ y $E_2(\xi, \eta)$ y para todas las constantes complejas s_1 y s_2 se cumple

$$\mathcal{H}\{s_1 E_1(\xi, \eta) + s_2 E_2(\xi, \eta)\} = s_1 \mathcal{H}\{E_1(\xi, \eta)\} + s_2 \mathcal{H}\{E_2(\xi, \eta)\} \quad (\text{I.2})$$

La ventaja que ofrece la propiedad de linealidad es que es posible expresar la respuesta del sistema a una entrada arbitraria en términos de las respuestas a ciertas funciones "elementales" en las cuales se puede descomponer la entrada.

c) Integral de superposición [13]

Si δ_D es la función delta de Dirac entonces tiene las siguientes propiedades fundamentales

$$\delta_D(\xi, \eta) = \begin{cases} \infty & \text{si } \xi = \eta = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

$$\iint_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_D(\xi, \eta) d\xi d\eta = 1 \quad \text{para todo } \varepsilon > 0 \quad (\text{I.4})$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \delta_D(\xi - x, \eta - y) dx dy = E(\xi, \eta) \quad (\text{I.5})$$

Podemos considerar que (I.5) expresa $E(\xi, \eta)$ como combinación lineal de funciones delta desplazadas y ponderadas. Las funciones elementales de la descomposición son las funciones δ_D las cuales se pueden considerar como fuentes puntuales. Sea $e(\xi', \eta', x, y)$ la función ensanchamiento o respuesta del sistema en el punto (ξ', η') de la salida, a la función δ_D ubicada en el punto (x, y) de la entrada, o sea

$$e(\xi', \eta', x, y) = \mathcal{S} \{ \delta_D(\xi - x, \eta - y) \} \quad (\text{I.6})$$

Para hallar la salida correspondiente a $E(\xi, \eta)$ reemplazamos (I.5) en (I.1), consideramos el número $E(x, y)$ como un simple factor de peso, usamos la propiedad de linealidad (I.2) para que $\mathcal{S}\{\}$ opere en cada función elemental, usamos (I.6) y obtenemos

$$E'(\xi', \eta') = \iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y) e(\xi', \eta', x, y) dx dy \quad (\text{I.7})$$

La expresión (I.7) es la integral de superposición y demuestra el importante hecho que un sistema lineal está completamente caracterizado

por su respuesta a impulsos unitarios ubicados en todos los puntos posibles del plano de entrada.

d) Sistemas lineales espacialmente invariantes o isoplanáticos [13]

En el caso de un sistema eléctrico este es temporalmente invariante si su respuesta de impulso $e(t, \tau)$ (o sea su respuesta al tiempo t a un impulso unitario aplicado al tiempo τ) depende sólo de la diferencia de tiempos $(t - \tau)$. Los sistemas eléctricos compuestos de resistores, capacitores e inductores fijos son temporalmente invariantes pues sus características no varían con el tiempo.

Análogamente un sistema óptico lineal será espacialmente invariante (o isoplanático) si su respuesta de impulso $e(\xi', \eta', x, y)$ depende sólo de las distancias $(\xi' - m_x x)$ y $(\eta' - m_y y)$ donde m es el aumento y $(m_x x, m_y y)$ da la ubicación del punto imagen geométrico. O sea

$$e(\xi', \eta', x, y) = e(\xi' - m_x x, \eta' - m_y y) \quad (I.8)$$

Luego un sistema óptico es espacialmente invariante si la imagen de una fuente puntual cambia solo de lugar pero no de forma funcional cuando la fuente puntual explora el campo objeto. En la práctica los sistemas ópticos raramente son isoplanáticos sobre todo el campo objeto, debido a la existencia de las aberraciones dependientes del campo. Sin embargo, generalmente es posible dividir el campo objeto en pequeñas regiones (zonas isoplanáticas) dentro de las cuales el sistema es aproximadamente invariante. Esto implica

que la aberración del sistema ω será constante hasta una pequeña fracción de longitud de onda λ' para todos los puntos en una región de la imagen geométrica que es grande comparada con el tamaño de la imagen de difracción de una fuente puntual formada por el sistema. Sea $(\delta\xi'_e, \delta\eta'_e)$ tal que $\delta\xi'_e$ y $\delta\eta'_e$ dan el tamaño de la función ensanchamiento en los ejes ξ' y η' respectivamente. Luego podemos decir que cierta zona alrededor del punto imagen geométrica $(\xi', \eta') = (m_x \xi, m_y \eta)$ es isoplanática si para todo $(\delta\xi', \delta\eta') > (\delta\xi'_e, \delta\eta'_e)$ que esté dentro de la zona tenemos

$$\omega(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi' + \delta\xi', \eta' + \delta\eta') - \omega(\tilde{x}', \tilde{y}', \xi', \eta') = \frac{\lambda'}{g} \quad (\text{I.9})$$

donde g es un número grande.

Si M es una constante y si por comodidad definimos

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= m_x X & \tilde{\eta} &= m_y Y \\ \tilde{E}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) &= \frac{M}{m_x m_y} (X, Y) \\ \tilde{e}(\xi', \eta') &= \frac{e(\xi', \eta')}{M} \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

de (I.10) y (I.8) para sistemas isoplanáticos obtenemos

$$E'(\xi', \eta') = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \tilde{e}(\xi' - \tilde{\xi}, \eta' - \tilde{\eta}) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \quad (\text{I.11})$$

que es una convolución bidimensional de la función objeto con la función ensanchamiento.

Los sistemas lineales invariantes tienen asociada una estr

tura matemática más simple que los lineales variantes. La simplicidad de los sistemas invariantes comienza a hacerse evidente cuando hacemos la transformada de Fourier de la relación (I.11)

e) Función transferencia óptica

Si u_x y u_y son las frecuencias espaciales angulares definimos las siguientes transformadas de Fourier

$$\mathcal{A}\left(\frac{u_x}{2\pi}, \frac{u_y}{2\pi}\right) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \exp\{-i(u_x \tilde{\xi} + u_y \tilde{\eta})\} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} = \mathcal{F}\{\tilde{E}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})\} \quad (\text{I.12})$$

$$\mathcal{A}'\left(\frac{u_x}{2\pi}, \frac{u_y}{2\pi}\right) = \iint_{-\infty}^{\infty} E'(\xi', \eta') \exp\{-i(u_x \xi' + u_y \eta')\} d\xi' d\eta' = \mathcal{F}\{E'(\xi', \eta')\} \quad (\text{I.13})$$

$$H\left(\frac{u_x}{2\pi}, \frac{u_y}{2\pi}\right) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \exp\{-i(u_x \tilde{\xi} + u_y \tilde{\eta})\} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} = \mathcal{F}\{\tilde{e}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})\} \quad (\text{I.14})$$

Aplicando transformada de Fourier a la expresión (I.11) y usando el teorema de convolución, resulta

$$\mathcal{A}'\left(\frac{u_x}{2\pi}, \frac{u_y}{2\pi}\right) = \mathcal{A}\left(\frac{u_x}{2\pi}, \frac{u_y}{2\pi}\right) H\left(\frac{u_x}{2\pi}, \frac{u_y}{2\pi}\right) \quad (\text{I.15})$$

Luego los espectros $\mathcal{A}\left(\frac{u_x}{2\pi}, \frac{u_y}{2\pi}\right)$ y $\mathcal{A}'\left(\frac{u_x}{2\pi}, \frac{u_y}{2\pi}\right)$ de la entrada y salida respectivamente están relacionados mediante una ecuación simple. La transformada de Fourier de la función ensanchamiento, H , es la función transferencia óptica del sistema e indica los

efectos del sistema en el dominio de frecuencias.

Aplicando antitransformada de Fourier en (I.12) y (I.13) tenemos las siguientes relaciones para sistemas isoplanáticos

$$\tilde{E}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}\left(\frac{u_x}{2\pi}, \frac{u_y}{2\pi}\right) \exp\{i(u_x \tilde{\xi} + u_y \tilde{\eta})\} du_x du_y \quad (\text{I.16})$$

$$E'(\xi', \eta') = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}'\left(\frac{u_x}{2\pi}, \frac{u_y}{2\pi}\right) \exp\{i(u_x \xi' + u_y \eta')\} du_x du_y \quad (\text{I.17})$$

Para sistemas lineales invariantes podemos considerar que la ecuación (I.16) expresa que la entrada puede ser descompuesta en funciones elementales más convenientes que las δ_D de la ecuación (I. 5) y que son las exponenciales complejas de diversas frecuencias espaciales. Dado que las ecuaciones (I.16) y (20) son iguales entre sí resulta equivalente obtener la distribución de luz en el objeto mediante la teoría de Fourier o como superposición de ondas planas.

De acuerdo con la teoría de Fourier, el espectro de salida \mathcal{A}' se obtiene multiplicando el espectro de la entrada, \mathcal{A} , por la función transferencia, $\dagger\dagger$, de modo que se tienen en cuenta los efectos del sistema en cada función elemental. Estos efectos están limitados a un cambio de amplitud y a un corrimiento de fase pues se multiplica el espectro de entrada por un número complejo $\dagger\dagger\left(\frac{u_x}{2\pi}, \frac{u_y}{2\pi}\right)$ para cada (u_x, u_y) . En la ecuación (I.17) se ve que la transformada inversa del espectro de salida $\mathcal{A}'\left(\frac{u_x}{2\pi}, \frac{u_y}{2\pi}\right)$ sintetiza la salida

$E'(\xi', \eta')$ sumando todas las funciones elementales modificadas.

Las ecuaciones (I.17) y (22) son equivalentes entre sí y a cada frecuencia espacial le corresponde una onda plana y viceversa.

APENDICE II

COORDENADAS EN LAS ESFERAS DE
REFERENCIA Y FRECUENCIAS ESPACIALES

II. COORDENADAS EN LAS ESFERAS DE REFERENCIA Y FRECUENCIAS ESPACIALES

Si por simplicidad tenemos en cuenta el caso de un rayo meridional entonces nosotros consideramos (como se hace usualmente) que la función aberración y sus derivadas dependen de las coordenadas \tilde{x}' y ξ' . Puesto que en el inciso III.4, hemos obtenido la derivada de la función aberración respecto al campo cuando se mantienen constantes las inclinaciones de los rayos en función de las frecuencias espaciales generalizadas (ecuación (39)), primero mostraremos en este apéndice como se relacionan dichas frecuencias con las coordenadas en las esferas de referencia, tanto en el espacio imagen como en el espacio objeto. Por otra parte dado que las frecuencias espaciales generalizadas ω'_x están relacionadas con las frecuencias usuales ω_x mediante las ecuaciones (25) y (21), mostraremos que se puede pensar que \tilde{x}' es una función de ξ' y de ω'_x de modo que se puede considerar que la función aberración depende en definitiva de ω'_x y ξ' . Como la expresión para la derivada de \mathcal{W} con respecto a las coordenadas en el campo varía de acuerdo con que variable se mantenga constante veremos cual es la relación entre $\left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \xi'} \right|_{\tilde{x}'}$ y $\left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \xi'} \right|_{\omega'_x}$.

II.1 Relación entre coordenadas en las esferas de referencia y frecuencias espaciales generalizadas

Si R_0 es el radio de la esfera de referencia en la pupila de entrada, de la figura 2, se obtiene

$$\frac{\tilde{x}}{R_0} = \frac{r_x}{|\vec{r}|} - \frac{\rho_x}{|\vec{\rho}|} \quad (\text{II.1})$$

Luego de (24) y (II.1) se obtiene la relación entre coordenada en la esfera de referencia y frecuencia espacial generalizada en el espacio objeto, que es

$$\frac{\tilde{x}}{R_0} = \omega_x \frac{\lambda_0 m_x}{2\pi m} \quad (\text{II.2})$$

Además de la figura 2 por semejanza de triángulos resulta

$$\frac{\xi' - \tilde{x}' + \Delta\xi'}{\overline{AP}} = \frac{r_x'}{|\vec{r}'|} \quad (\text{II.3})$$

Pero

$$\overline{AP}^2 = R^2 + 2\Delta\xi' (\xi' - \tilde{x}') + (\Delta\xi')^2 \quad (\text{II.4})$$

luego para $\Delta\xi' \ll R$ haciendo un desarrollo en serie de Taylor, de (II.4) se tiene

$$\overline{AP} = R \left(1 + \frac{\Delta\xi'}{R^2} (\xi' - \tilde{x}') \right) \quad (\text{II.5})$$

De (II.5) en (II.3), y como $\Delta\xi' \ll R$, podemos despejar \tilde{x}' de modo que resulta

$$\frac{\tilde{x}'}{R} = \frac{\xi'}{R} - \frac{r_x'}{|\vec{r}'|} + \frac{\Delta\xi'}{R} \left(1 - \frac{r_x'^2}{|\vec{r}'|^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

Como $\xi'/R = S'_x / |\vec{r}'|$ de (II.6) y (25) obtenemos directamente la relación entre la frecuencia espacial generalizada y la coordenada en la esfera de la pupila de salida en el espacio imagen que es

$$\frac{\tilde{x}'}{R} = - \frac{\omega'_x \lambda_0}{2\pi m'} + \frac{\Delta \xi'}{R} \left(1 - \frac{r_x'^2}{|\vec{r}'|^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

II.2 Relación entre $\partial W / \partial \xi' |_{\tilde{x}'}$ y $\partial W / \partial \xi' |_{u'_x}$

Como se ve de las ecuaciones (II.6) y (21) podemos pensar que \tilde{x}' es una función de ξ' y u'_x de la forma $\tilde{x}' = \tilde{x}'(\xi', u'_x)$ y luego para la función aberración tenemos

$$W(\tilde{x}', \xi') = W(\tilde{x}'(\xi', u'_x), \xi') \quad (\text{II.8})$$

Hallando el diferencial de la función aberración y usando la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} dW &= \frac{\partial W}{\partial \tilde{x}'} \Big|_{\xi'} d\tilde{x}' + \frac{\partial W}{\partial \xi'} \Big|_{\tilde{x}'} d\xi' = \\ &= \left(\frac{\partial W}{\partial \xi'} \Big|_{\tilde{x}'} + \frac{\partial W}{\partial \tilde{x}'} \Big|_{\xi'} \frac{\partial \tilde{x}'}{\partial \xi'} \Big|_{u'_x} \right) d\xi' + \frac{\partial W}{\partial \tilde{x}'} \Big|_{\xi'} \frac{\partial \tilde{x}'}{\partial u'_x} \Big|_{\xi'} du'_x \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Luego debe ser

QW
QF

(II.10)

de donde resulta la expresión (40) del texto la cual también puede obtenerse del libro de Rey Pastor [14] II, página 158.

APENDICE III

RELACION ENTRE LA $\alpha\text{v}/\alpha\text{E}'$ HALLADA POR NOSOTROS
Y LA $\alpha\text{v}/\alpha\text{E}'$ HALLADA POR H.H.HOPKINS (4)

III. RELACION ENTRE LA $\partial W / \partial \xi' | \bar{x}'$ HALLADA POR NOSOTROS Y
LA $\partial W / \partial \xi'$ HALLADA POR H.H.HOPKINS [4]

H.H.Hopkins [4] ha obtenido una expresión para la $\partial W / \partial \xi'$ en función de las coordenadas en las esferas de las pupilas de entrada y de salida utilizando el concepto de rayos vecinos. Si bien este autor no utiliza ni sugiere la posibilidad de usar dicha expresión en el análisis de sistemas ópticos mediante trazado de rayos como lo hacemos nosotros, nuestra ecuación para la $\partial W / \partial \xi' | \bar{x}'$ puede obtenerse a partir de ella y aquí mostraremos como hacerlo.

Consideremos la figura III.1 que es similar a la figura 2 del trabajo de H.H.Hopkins [4] pero con nuestra notación y en el plano (ξ, z) . En la ecuación (8) de su trabajo, H.H.Hopkins obtiene el incremento en aberraciones del frente para un rayo proveniente de Q que pasa por B' relativa a la del rayo $\bar{Q}BB'$. Si tomamos $R_0 > 0$ y si por simplicidad consideramos rayos meridionales, podemos escribir esa ecuación como

$$\delta W_H = [D'B'] - [DB] = \frac{m' \bar{x}' \delta \xi'}{R} + \frac{m \bar{x} \delta \xi}{R_0} \quad (\text{III.1})$$

Dado que el aumento local se define mediante $m_x = \delta \xi' / \delta \xi$, esta ecuación puede ponerse en la forma

$$\delta W_H = \frac{m' \bar{x}' \delta \xi'}{R} + \frac{m \bar{x} \delta \xi'}{m_x R_0} \quad (\text{III.2})$$

Ahora veremos como obtener nuestra ecuación para $\partial W / \partial \xi' | \bar{x}'$ a partir de la ecuación de Hopkins (III.2). De las ecuaciones

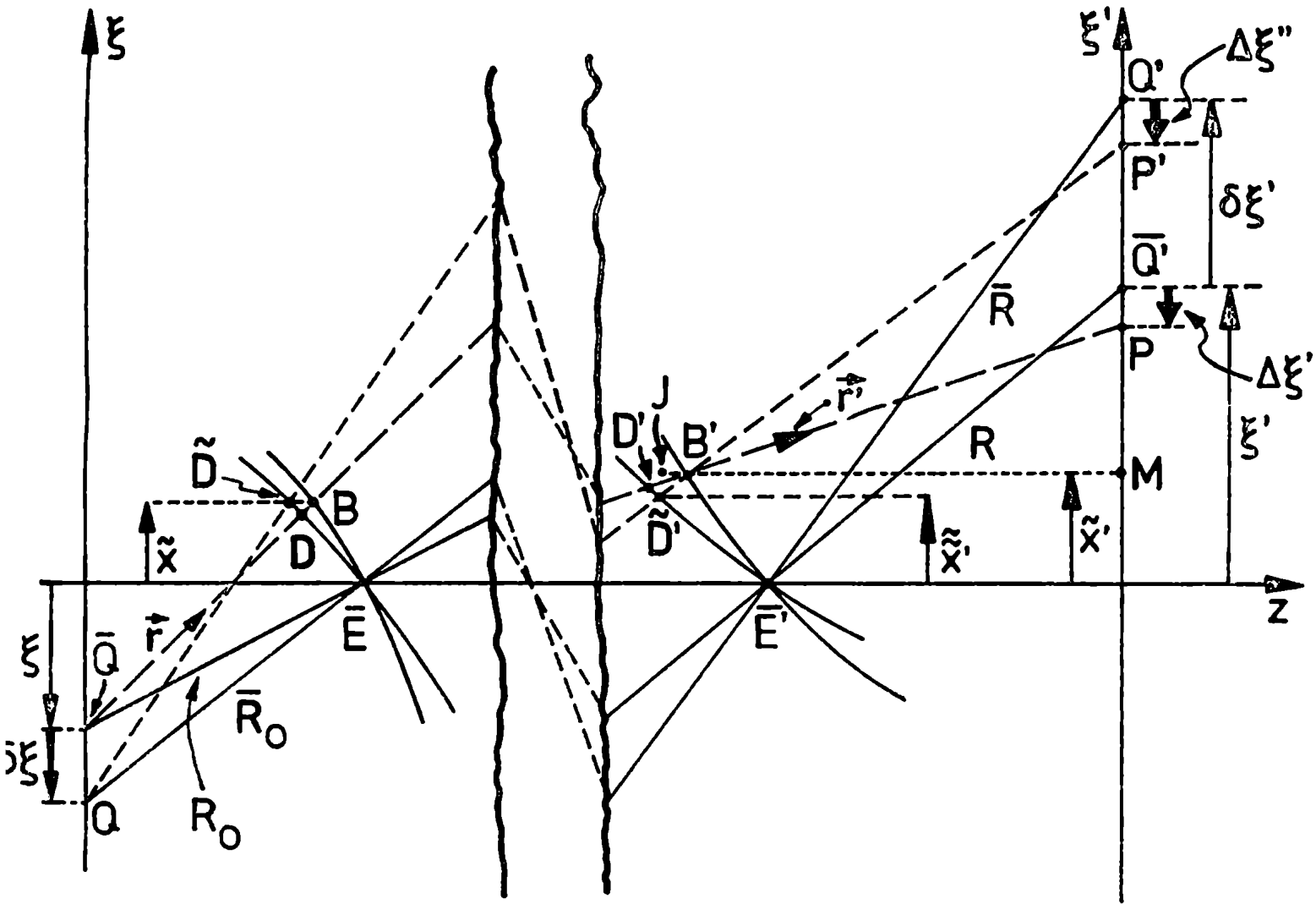


Figura III.1: Sistema de coordenadas para obtener $\partial\omega/\partial\xi'|\tilde{x}$ a partir de la ecuación de H.H.Hopkins.

- \bar{E}, \bar{E}' : puntos centrales de la PE y PS respectivamente
- \bar{R}_0 : radio de la esfera de referencia en la PE correspondiente al objeto en ξ .
- \bar{R}_0 : radio de la esfera de referencia en la PE correspondiente al objeto en $\xi + \delta\xi$
- R : radio de la esfera de referencia en la PS correspondiente al objeto en ξ
- \bar{R} : radio de la esfera de referencia en la PS correspondiente al objeto en $\xi + \delta\xi$

(II.1) y (II.6) del Apéndice II en (II.2) y como $\xi'/R = \rho_x'/|\bar{S}'|$

se obtiene

$$\delta W_H = m' \delta \xi' \frac{\Delta \xi'}{R} \left(1 - \frac{r_x'^2}{|\bar{r}'|^2} \right) + m' \delta \xi' \left(\frac{\rho_x'}{|\bar{\rho}'|} - \frac{r_x'}{|\bar{r}'|} \right) + \frac{m \delta \xi'}{m_x} \left(\frac{r_x}{|\bar{r}|} - \frac{\rho_x}{|\bar{\rho}|} \right) \quad (\text{III.3})$$

Definimos una variable auxiliar G mediante

$$G = -m' \delta \xi' \left(\frac{r_x'}{|\bar{r}'|} - \frac{\rho_x'}{|\bar{\rho}'|} \right) + \frac{m \delta \xi'}{m_x} \left(\frac{r_x}{|\bar{r}|} - \frac{\rho_x}{|\bar{\rho}|} \right) \quad (\text{III.4})$$

luego de (III.4) en (III.3) resulta

$$\delta W_H = G + m' \delta \xi' \frac{\Delta \xi'}{R} \left(1 - \frac{r_x'^2}{|\bar{r}'|^2} \right) \quad (\text{III.5})$$

Mientras que nosotros hallamos $\partial W / \partial \xi'$ cuando se mantiene constante la coordenada \tilde{x}' en la correspondiente esfera de referencia (o sea para el punto del campo en $\xi' + \delta \xi'$ tenemos \tilde{x}' en la esfera de referencia de radio \bar{R} y para el punto en ξ' tenemos \tilde{x}' en la esfera de referencia de radio R), H.H.Hopkins halla $\partial W / \partial \xi'$ cuando la coordenada en la apertura del rayo que va hacia $\xi' + \delta \xi'$ es \tilde{x}' en la esfera de referencia de radio R . Luego, si δW_N es lo que queremos hallar nosotros, tenemos

$$\delta W_N = \delta W_H + \Delta W \quad (\text{III.6})$$

donde, si $\Delta \tilde{x}' = \tilde{x}' - \tilde{x}'$, debe ser

$$\Delta W = \left\{ \frac{W(\tilde{x}', \xi' + \delta \xi') - W(\tilde{x}' - \Delta \tilde{x}, \xi' + \delta \xi')}{\Delta \tilde{x}} \right\} \Delta \tilde{x} \quad (\text{III.7})$$

Como para $\delta \xi'$ pequeño también $\Delta \tilde{x}$ debe ser pequeño tenemos

$$\Delta W = \left. \frac{\partial W}{\partial \tilde{x}'} \right|_{\xi' + \delta \xi'} \Delta \tilde{x} \quad (\text{III.8})$$

Además de la figura III.1 se obtiene

$$\bar{R}^2 = R^2 + 2\xi' \delta \xi' + (\delta \xi')^2 \quad (\text{III.9})$$

Si suponemos que la aberración transversal no varía mucho al desplazarnos en el campo de modo que podemos tener $\Delta \xi'' = \Delta \xi'$ y si despreciamos $(\delta \xi')^2$ frente a R^2 entonces de (4) y (III.9) obtenemos

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \tilde{x}'} \right|_{\xi' + \delta \xi'} \approx -\frac{m' \Delta \xi'}{\bar{R}} \approx -\frac{m' \Delta \xi'}{R} \left(1 - \frac{\xi' \delta \xi'}{R^2} \right) \quad (\text{III.10})$$

De (III.10) en (III.8) para $\delta \xi' \ll R$ se tiene

$$\Delta W = -\frac{m' \Delta \xi'}{R} \Delta \tilde{x} \quad (\text{III.11})$$

Para hallar $\Delta \tilde{x}$ vemos que de la figura III.1 se obtiene

$$\frac{\Delta \tilde{x}}{JB'} = \frac{P'M}{B'M} \quad (\text{III.12})$$

$$P'M = \xi' - \tilde{x}' + \delta\xi' + \Delta\xi' \quad (\text{III.13})$$

$$B'M^2 = R^2 - (\xi' - \tilde{x}')^2 = R^2 \left(1 - \frac{(\xi' - \tilde{x}')^2}{R^2} \right) \quad (\text{III.14})$$

$$JB' = JM - B'M \quad (\text{III.15})$$

$$JM^2 = \bar{R}^2 - (\xi' + \delta\xi' - \tilde{x}')^2 \quad (\text{III.16})$$

luego de (III.9) en (III.16) y haciendo cuentas, resulta

$$JM^2 = B'M^2 \left\{ 1 + \frac{2}{B'M^2} \left[\Delta\tilde{x}' (\tilde{x}' - \xi') + \tilde{x}' \delta\xi' \right] \right\} \quad (\text{III.17})$$

de (III.17), desarrollando en serie y haciendo aproximaciones tenemos

$$JM = B'M \left\{ 1 + \frac{1}{B'M^2} \left[\Delta\tilde{x}' (\tilde{x}' - \xi') + \tilde{x}' \delta\xi' \right] \right\} \quad (\text{III.18})$$

de (III.18) en (III.15) obtenemos

$$JB' = \frac{\Delta \tilde{x} (\tilde{x}' - \xi') + \tilde{x}' \delta \xi'}{B'M} \quad (\text{III.19})$$

De (III.13), (III.19) y (III.14) en (III.12) queda

$$\Delta \tilde{x} (R^2 - (\xi' - \tilde{x}')^2) = (\xi' - \tilde{x}' + \delta \xi' + \Delta \xi') [\Delta \tilde{x} (\tilde{x}' - \xi') + \tilde{x}' \delta \xi'] \quad (\text{III.20})$$

De (III.20) despreciando términos de segundo orden, resulta

$$\Delta \tilde{x} = \frac{(\xi' - \tilde{x}') \tilde{x}' \delta \xi'}{R^2} \quad (\text{III.21})$$

En (III.21) reemplazamos $\xi' - \tilde{x}'$ y \tilde{x}' usando la ecuación (II.6) del Apéndice II y, despreciando términos de segundo orden obtenemos

$$\Delta \tilde{x} = \delta \xi' \left[\frac{r'_x}{|\tilde{r}'|^2} \frac{s'_x}{|\tilde{\sigma}'|^2} - \frac{r_x'^2}{|\tilde{r}'|^4} \right] \quad (\text{III.22})$$

De (III.22), (III.11) y (III.5) en (III.6) se tiene

$$\delta \omega_N = G + m' \delta \xi' \frac{\Delta \xi'}{R} \left(1 - \frac{r_x'^2}{|\tilde{r}'|^2} \right) + \frac{m' \Delta \xi' \delta \xi'}{R} \left[\frac{r_x'^2}{|\tilde{r}'|^2} - \frac{r'_x s'_x}{|\tilde{r}'| |\tilde{\sigma}'|} \right] \quad (\text{III.23})$$

luego de (III.4) en (III.23) resulta

$$\frac{\delta W/N}{\delta \xi'} = -m' \left(\frac{\tau_x^i}{|\tau'|} - \frac{\rho_x^i}{|\rho'|} \right) + \frac{m}{m_x} \left(\frac{\tau_x}{|\tau'|} - \frac{\rho_x}{|\rho'|} \right) + \frac{m}{R} \Delta \xi' \left(\Delta \frac{\tau_x^i \rho_x^i}{|\tau'| |\rho'|} \right) \quad (\text{III.24})$$

Como (III.24) coincide con la ecuación (45) para $\partial^2 W / \partial \xi'^2 |_{x_0}$ que obtuvimos nosotros, dicha ecuación puede también obtenerse a partir de la teoría desarrollada por H.H.Hopkins [4] aunque usando un camino diferente. Mientras que H.H.Hopkins parte del concepto de rayos vecinos, nosotros partimos de la relación existente entre el incumplimiento de la Condición de los Senos y la variación de la función aberración con el campo.

APENDICE IV

PROGRAMAS DE COMPUTADORA

IV. PROGRAMAS DE COMPUTADORA

Aquí mostramos brevemente en que consisten los programas de computadora que hemos desarrollado para obtener las pruebas numéricas y que son los siguientes:

Programa I: Cálculo de la ubicación de plano imagen y de la posición y tamaño de la pupila de entrada para un objeto axial, usando óptica paraxial.

Programa II: Cálculo de la posición y tamaño de la pupila de entrada para un sistema óptico real y un objeto extraaxial.

Programa III: Cálculo de los coeficientes de la función aberración y de su derivada respecto al campo para un punto extraaxial del objeto.

Programa IV: Verificación de las fórmulas y de los coeficientes obtenidos.

Programa V: Cálculo de los coeficientes de la función aberración en un punto del campo a partir de los correspondientes a otro punto desplazado y chequeo.

En los programas II, III y IV se usa una subrutina para trazado de rayos la cual usa las leyes de Snell vectoriales no paraxiales. Esta subrutina calcula la ubicación e inclinación de cualquier rayo en el espacio imagen si se le dan los respectivos datos en el espacio objeto. En esta subrutina y en todos los programas se utiliza la notación de la figura IV.1.

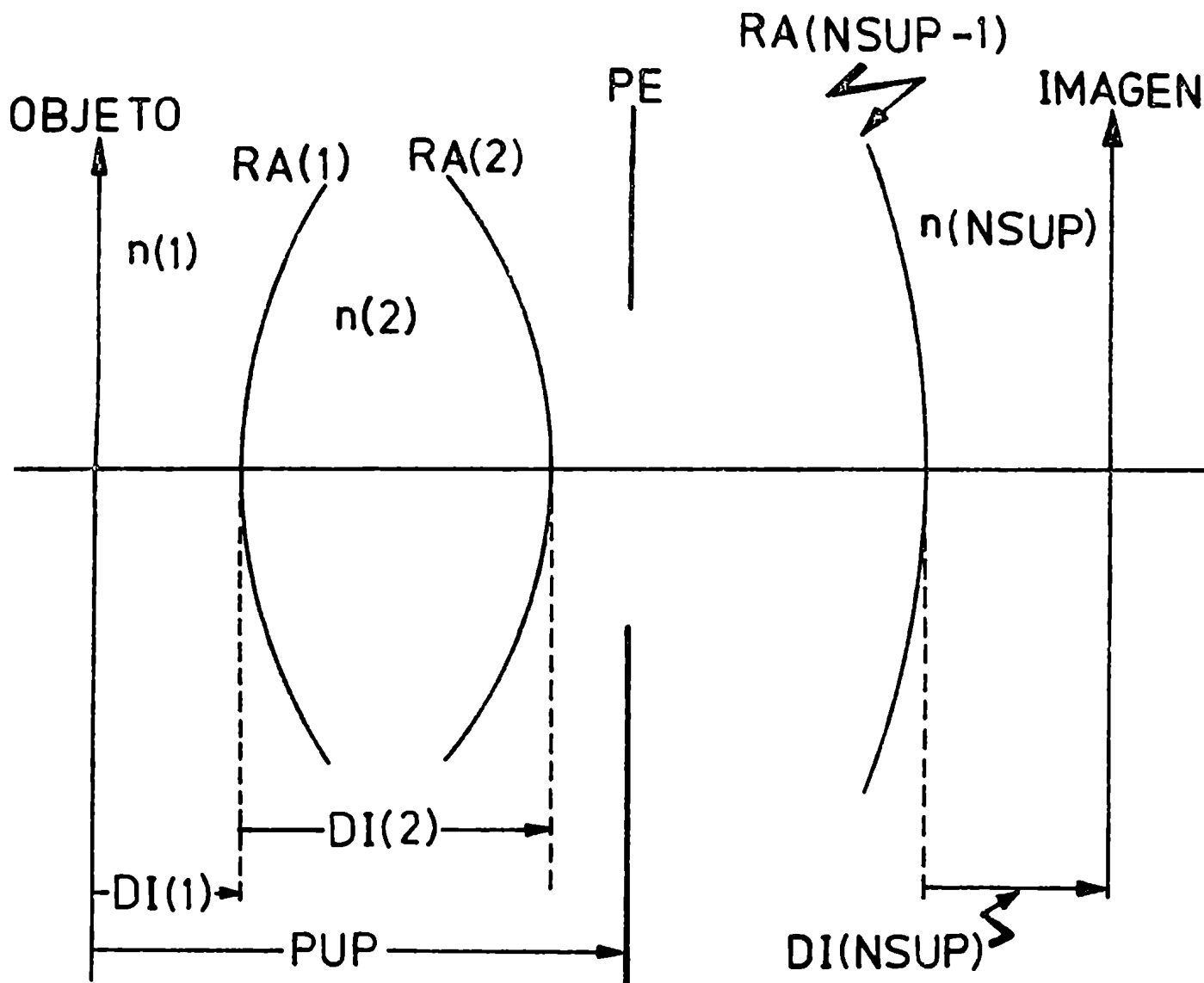


Figura IV.1: Notación para programas de computadora

- $RA(J)$ = radio de la dioptra J
- $TA(J)$ = tamaño de la dioptra J
- $n(J)$ = índice de refracción para el espacio J
- $NSUP$ = número de dioptras + 1
- PUP = distancia desde el plano objeto a la pupila de entrada
- D = diámetro de la pupila de entrada
- PE = pupila de entrada.

Mostramos ahora en que consiste cada uno de los programas.

Programa I: Trazando a través del sistema un rayo paraxial proveniente de un objeto axial se encuentra el plano imagen. Luego se halla el diafragma de apertura verdadero encontrando cual es la dioptra o diafragma que más limita el pasaje de este rayo a través del sistema

y por trazado inverso paraxial se calcula la posición PUPA y el diámetro D de la pupila de entrada para el punto axial del objeto.

Programa II: Usando la subrutina para trazado exacto de rayos se trazan cuatro rayos provenientes de un objeto extraaxial y cuyas coordenadas polares de partida en el plano de la pupila de entrada axial son $(\tilde{r}, \phi) : (D/2, 0); (D/2, \pi); (D/2, \pi/2); (0, 0)$. Luego se encuentran las coordenadas que deberían tener los tres rayos marginales en la pupila de entrada axial, que llamamos x_{M1}, x_{M2}, y_{M3} y que se muestran en la figura 8, para pasar por todas las dioptras y por el borde del o los correspondientes diafragmas, iterando hasta disminuir el error de este cálculo a un valor deseado. Como en este programa no se usa óptica paraxial, debido a aberraciones de las pupilas en general no se obtiene $x_{M1} = -x_{M2}$ ni aún en el caso libre de vigneteo. Además se hallan el o los diafragmas de apertura para el objeto extraaxial.

Después se encuentra la posición de la pupila de entrada verdadera para el objeto extraaxial, PUPV, definiendo como rayo principal a aquel que hace que las frecuencias espaciales generalizadas de los rayos marginales meridionales sean iguales y hallando la intersección del rayo principal con el eje óptico. De acuerdo con el inciso III.8 y la ecuación (II.2) esto significa que sobre la esfera de la pupila de entrada tenemos $\tilde{x}_{V1} = -\tilde{x}_{V2}$ y además el rayo principal es tal que $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$.

Una vez obtenida PUPV, este programa calcula las coordenadas x_{V1}, x_{V2}, y_{V3} de los rayos marginales sobre el plano de la pupila de entrada verdadera. Como se ve de la figura 8 las coordena-

das de cualquier rayo sobre el plano y sobre la esfera de la pupila de entrada están relacionadas mediante

$$\tilde{X} = \xi + (x - \xi) \sqrt{\frac{PUPV^2 + \xi^2}{PUPV^2 + (x - \xi)^2}} \quad (\text{IV.1})$$

$$\tilde{Y} = \frac{y PUPV}{\sqrt{PUPV^2 + y^2}} \quad (\text{IV.2})$$

de modo que conocidas xV_1 y xV_2 , se hallan de (IV.1) \tilde{xV}_1 y \tilde{xV}_2 y verificamos que se cumpla que $\tilde{xV}_1 = -\tilde{xV}_2$ con una aproximación aceptable, y además conocida yV_3 se calcula de (IV.2) \tilde{yV}_3 . Además asignamos al rayo marginal "sagital" una ordenada que está dada por

$$\tilde{xV}_3 = \frac{\tilde{xV}_1 + \tilde{xV}_2}{2} \quad (\text{IV.3})$$

aunque como obtenemos que \tilde{xV}_1 y \tilde{xV}_2 son iguales en módulo con una aproximación muy buena, en realidad tenemos que \tilde{xV}_3 es prácticamente nula. Luego conocemos las coordenadas de los tres rayos marginales que son $(\tilde{xV}_1, 0)$; $(\tilde{xV}_2, 0)$; $(\tilde{xV}_3, \tilde{yV}_3)$.

Finalmente verificamos los resultados obtenidos trazando cuatro rayos (los tres marginales y el principal) y viendo si efectivamente pasan por todas las dioptros y diafragmas y por el borde de los correspondientes diafragmas de apertura. Hallamos además la posición, T , de la pupila de salida verdadera calculando en el espacio imagen la intersección del rayo principal con el eje óptico

y encontramos el punto imagen el cual corresponde a la intersección del rayo principal con el plano imagen.

Programa III: Para un objeto extraaxial ubicado en $(\xi, 0)$ se traza primero el rayo principal y se halla el radio de la esfera de referencia en la pupila de salida, el camino óptico desde el objeto hasta el frente de ondas en la pupila de salida y nuevamente la posición $(\xi', 0)$ del punto imagen (que coincide con la hallada mediante el programa II). Luego para un desarrollo en serie de \mathcal{W} hasta orden $N = 4$ se trazan ocho rayos (cuatro merdionales y cuatro alabeados) que corresponden a la configuración de la figura 7, donde (\tilde{x}, \tilde{y}) son coordenadas en la esfera de la pupila de entrada. Si definimos coordenadas polares de modo que $\tilde{r}_e = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}$ y $\phi_e = \arctg \tilde{y}/\tilde{x}$ entonces las coordenadas (\tilde{r}_e, ϕ_e) de los ocho rayos son $(\tilde{x}\tilde{v}_1, 0)$; $(\tilde{x}\tilde{v}_1/\sqrt{2}, 0)$; $(\tilde{x}\tilde{v}_2/\sqrt{2}, \pi)$; $(\tilde{x}\tilde{v}_2, \pi)$; $(\sqrt{(\tilde{x}\tilde{v}_3/2)^2 + (\tilde{y}\tilde{v}_3/2)^2}, \arctg \tilde{y}\tilde{v}_3/\tilde{x}\tilde{v}_3)$; $(\sqrt{(\tilde{x}\tilde{v}_1/2)^2 + (\tilde{y}\tilde{v}_3/2)^2}, \arctg \tilde{y}\tilde{v}_3/\tilde{x}\tilde{v}_1)$; $(\sqrt{(\tilde{x}\tilde{v}_2/2)^2 + (\tilde{y}\tilde{v}_3/2)^2}, \arctg \tilde{y}\tilde{v}_3/\tilde{x}\tilde{v}_2)$; $(\sqrt{(\tilde{x}\tilde{v}_3)^2 + (\tilde{y}\tilde{v}_3)^2}, \arctg \tilde{y}\tilde{v}_3/\tilde{x}\tilde{v}_3)$. En la figura 7 hemos supuesto $\tilde{x}\tilde{v}_3 = 0$ debido a que en la práctica esto se verifica con muy buena aproximación.

Hallando para los ocho rayos el camino óptico hasta la esfera de referencia y la intersección con el plano imagen y usando las ecuaciones (47), (48) y (49) se calculan \mathcal{W} y sus dos derivadas respecto a la apertura de modo que se obtienen veinte ecuaciones disponibles (ecuaciones i), ii) y iii) para cada rayo alabeado y ecuaciones i) y ii) para cada rayo meridional) para calcular los trece

coeficientes B_{ij} . De estas veinte ecuaciones se eligen trece y se define una relación matricial $\overline{W}^b = \overline{MA} * \overline{B}$ donde \overline{W}^b es un vector de trece elementos que son ∇V o sus dos derivadas; \overline{B} es un vector de trece elementos que son los coeficientes B_{ij} a determinar y \overline{MA} es una matriz de dimensión 13 x 13 cuyos elementos son la combinación de coordenadas que resultan de las ecuaciones i), ii) y iii). Luego los coeficientes B_{ij} se calculan hallando la matriz inversa de \overline{MA} .

Para evaluar los ocho coeficientes C_{ij} se utiliza un método análogo aunque previamente es necesario hacer dos cálculos auxiliares: hallar el aumento local trazando otro rayo principal proveniente de un punto del campo cercano al que está en consideración y hallar $\Delta T / \Delta \xi$ utilizando el programa II para dos puntos del campo, cuyas imágenes están, una en ξ^1 y otra en $\xi^1 + \delta \xi^1$ y calculando $\{T(\xi^1 + \delta \xi^1) - T(\xi^1)\}$ lo cual resulta prácticamente nulo en el caso libre de vigneteo. Mediante la ecuación (50) se computa $\partial T / \partial \xi^1$ para cada rayo y además, como ya se conocen los coeficientes B_{ij} , se calcula otro de los términos de la ecuación iv) que es

$$SB = \sum_i \sum_j B_{ij} a^i b^{j-1} \quad (\text{IV.4})$$

Luego se define un vector \overline{W}^b de ocho elementos que son del tipo $\{\partial \nabla V / \partial \xi^1 - \partial T / \partial \xi^1\}$ y se tiene una relación matricial $\overline{W}^b = \overline{MC} * \overline{C}$. De acuerdo con la ecuación iv), \overline{MC} es una matriz de dimensión 8 x 8 cuyos elementos son las combinaciones de coordenadas resultantes y \overline{C} es un vector de ocho elementos que son los C_{ij} . Encontrando la matriz inversa de \overline{MC}

se obtienen los coeficientes C_{ij} .

Programa IV: La red de puntos en la esfera de la pupila de entrada considerada para la verificación es la de la figura 10 (esta configuración es similar a la usada por Powell [5] cuando chequea). Se toman cinco puntos equiespaciados sobre cada una de las cinco rectas que pasan por el origen y por los siguientes puntos marginales respectivos:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\tau}_{e1}, \phi_{e1}) & \quad (\tilde{XV}_1, 0) \\
 (\tilde{\tau}_{e2}, \phi_{e2}) & = \left(\sqrt{\frac{\tilde{XV}_1^2 + \tilde{YV}_2^2}{2}}, \arctg \frac{\tilde{YV}_2}{\tilde{XV}_1} \right) \\
 (\tilde{\tau}_{e3}, \phi_{e3}) & = \left(\sqrt{\frac{\tilde{XV}_2^2 + \tilde{YV}_3^2}{2}}, \arctg \frac{\tilde{YV}_3}{\tilde{XV}_2} \right) \\
 (\tilde{\tau}_{e4}, \phi_{e4}) & = \left(\sqrt{\frac{\tilde{XV}_3^2 + \tilde{YV}_4^2}{2}}, \arctg \frac{\tilde{YV}_4}{\tilde{XV}_3} \right) \\
 (\tilde{\tau}_{e5}, \phi_{e5}) & \quad (\tilde{XV}_4, \pi)
 \end{aligned} \tag{IV.5}$$

Se consideran dos puntos del objeto uno ubicado en $(\xi, 0)$ y otro en $(\xi + \delta\xi, 0)$ de modo que para cada uno de ellos se trazan veinticinco rayos pertenecientes a las respectivas configuraciones definidas mediante las ecuaciones (IV.5). Para cada rayo originado en $(\xi, 0)$ se calcula $\sqrt{(\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2)}$, $(\tilde{X}', \tilde{Y}', \xi', 0)$ y sus tres derivadas mediante dos métodos: el de trazado de rayos (usando las ecuaciones (47), (48), (49) y (50) y el del desarrollo en serie de potencias (ecuaciones i), ii), iii) y iv)) usando los coeficientes hallados con el

programa III y se comparan los resultados obtenidos por ambos métodos. Para cada rayo originado en $(\xi + \delta\xi, 0)$ se itera hasta que sus coordenadas (ξ', η') en la respectiva esfera de referencia en la pupila de salida se hagan aproximadamente iguales a las del correspondiente rayo proveniente de $(\xi, 0)$ y luego se calcula

$\nabla V(\xi', \eta', \xi' + \delta\xi', 0)$ usando la ecuación (47). Después se encuentran las diferencias finitas $\frac{\nabla V(\xi', \eta', \xi' + \delta\xi', 0) - \nabla V(\xi', \eta', \xi')}{\delta\xi'}$ y se las compara con la derivada $\frac{\partial \nabla V(\xi', \eta', \xi')}{\partial \xi'}$ previamente obtenida. También se calcula

$\nabla V(\xi', \eta', \xi' + \delta\xi', 0)$ para cada rayo usando la ecuación (56) y se la compara con $\nabla V(\xi', \eta', \xi' + \delta\xi', 0)$.

Programa V: Utilizando el programa III se calculan los coeficientes $P_{ij}^{(0)}$ correspondientes al punto desplazado del objeto (ubicado en $(\xi + \delta\xi, 0)$). Luego se calculan los coeficientes $P_{ij}^{(1)}$ utilizando la ecuación (62) y los coeficientes $P_{ij}^{(0)}$ y $S_{ij}^{(0)}$ previamente obtenidos con el programa III para el objeto ubicado en $(\xi, 0)$. Finalmente se compara $P_{ij}^{(1)}$ con $P_{ij}^{(0)}$ para todo i y j .

Silviano Cavallotti

J. B. F.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

- [1] E.Heacht y A.Zajac, "Optica", Fondo Educativo Iiteramericano.
- [2] R.S.Longhurst, "Geometrical and Physical Optics", Longman.
- [3] H.H.Hopkins, "Wave Theory of Aberrations", Oxford (1950).
- [4] H.H.Hopkins, "Canonical Pupil Coordinates in Geometrial and Diffraction Image Theory", Jap.J.Applied Phys., Vol. 4, Sup.1 (1965).
- [5] Ian Powell, "Optical design and analysis program", Ap.Optics, Vol.17, N° 21 (1978).
- [6] J.M.Simon, J.O.Ratto and Silvia A.Comastri, "Sine Condition derivation via Fourier Optics", Ap.Optics, Vol.18, N°17 (1979).
- [7] Silvia A.Comastri and J.M.Simon, "Ray tracing, aberration function and spatial frequencies", Optik, 66 n°2 (1984).
- [8] Silvia A.Comastri and J.M.Simon, "Aberration function dependence on field. A way to obtain better profit from ray tracing", Optik (en prensa).
- [9] W.T.Welford, Encyclopedia of Physics, Vol.29 (1967).
- [10] Born and Wolf, "Principles of Optics", Pergamon Press, Oxford (1975).
- [11] R.Kingslake, "Lens Design Fundamentals", Academic Press, N.Y. (1978).
- [12] Cox, "A system of optical design", Focal, N.Y. (1964).

- [13] J.W.Goodman, "Introduction to Fourier Optics", Mc Graw Hill, New York (1968).
- [14] J.Rey Pastor, P. Pi Calleja, C.Trejo, "Análisis Matemático", Vol. II, p.158, Ed. Kapelusz (1957).
- [15] W.J.Smith, "Modern Optical Engineering", Mc Graw Hill (1966).