Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Productos multiplicativos y de convolución de distribuciones

Aguirre, Manuel Antonio

1984

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Aguirre, Manuel Antonio. (1984). Productos multiplicativos y de convolución de distribuciones. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1860_Aguirre.pdf

Cita tipo Chicago:
Aguirre, Manuel Antonio. "Productos multiplicativos y de convolución de distribuciones". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1984.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1860_Aguirre.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS Y DE CONVOLUCION DE DISTRIBUCIONES

Manuel Antonio Aguirre

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO
DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

Buenos Aires, octubre 22 de 1984.-

A mis hijos Eloy Manuel y Emilio Andrés.

Es mi deseo dedicar estas primeras líneas al recordado Doctor Alberto González Domínguez, quien fuera uno de los iniciadores del tema que trata este trabajo y de quien tuve la suerte de recibir no sólo el consejo profesional y certero, sino también su ejemplo de hombre de bien.

Quisiera dejar expresado mi más profundo agradecimiento a la Doctora Susana Elena Trione, no sólo por la dirección de esta tesis, sino también por haber recibido sus invalorables enseñanzas.

Asimismo, quisiera agradecer al Doctor Manuel Balanzat, maestro y amigo, por su constante estímulo y apoyo durante casi diez años.

PREFACIO I

CAPITULO I

PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DE LA FAMILIA DE FUNCIONES DISTRIBUCIONALES $H_\alpha(P\pm i0,n)$

RESUMEN 1

I.1. INTRODUCCION 3

La distribución $H_\alpha(P\pm i0,n)$ 3

Propiedades de las distribuciones $H_\alpha(P\pm i0,n)$ 4

Residuo de la distribución $H_\alpha(P\pm i0,n)$ 5

I.2. EL PRODUCTO MULTIPLICATIVO $H_\alpha(P\pm i0,n).H_\beta(P\pm i0,n)$ 6

I.3. CONSECUENCIAS DEL PRODUCTO MULTIPLICATIVO $H_\alpha(P\pm i0,n).H_\beta(P\pm i0,n)$ 8

El producto multiplicativo $H_{n-2m}(P\pm i0,n).H_{-2\ell}(P\pm i0,n)$ 11

El producto multiplicativo $H_{-2k}(P\pm i0,n).H_{-2\ell}(P\pm i0,n)$ 13

El producto multiplicativo $H_{2k}(P\pm i0,n).\delta(x)$ 14

El producto multiplicativo $(P\pm i0)^{-m}.L^{\ell}\{\delta(x)\}$ 15

El producto multiplicativo $(P)^{-m}.L^{\ell}\{\delta(x)\}$ 17

Los productos multiplicativos $P_{\pm}^{-m}.L^{\ell}\{\delta(x)\}$ 17

El producto multiplicativo $(P\pm i0)^{m}.L^{\ell}\{\delta(x)\}$ 18

El producto multiplicativo $P^{m}\ L^{\ell}\{\delta(x)\}$ 20

Los productos multiplicativos $P_{\pm}^{m}.L^{\ell}\{\delta(x)\}$ 20

CAPITULO II

PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DEL NUCLEO SINGULAR ELIPTICO DE MARCEL RIESZ

RESUMEN 21

II.1. INTRODUCCION 22

Propiedades 22

II.2. EL PRODUCTO MULTIPLICATIVO $R_\alpha(x).R_\beta(x)$ 24

El producto multiplicativo $R_{n-2m}(x).R_{-2\ell}(x)$ 26

El producto multiplicativo $R_{2k}(x).R_{-2\ell}(x)$ 28

El producto multiplicativo $(|x|^2)^{-m}.\Delta^{\ell}\{\delta(x)\}$ 28

El producto multiplicativo $(|x|^2)^{m}.\Delta^{\ell}\{\delta(x)\}$ 29

CAPITULO III

PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DEL NUCLEO SINGULAR HIPERBOLICO DE MARCEL RIESZ

RESUMEN 31

III.1. INTRODUCCION 32

El núcleo singular hiperbólico $R_\alpha(S)$ 32

Propiedades de $R_\alpha(S)$ 32-33

III.2. PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DEL NUCLEO SINGULAR HIPERBOLICO $R_\alpha(S)$ 35

El producto multiplicativo $R_\alpha(S) \cdot R_\beta(S)$ 36

El producto multiplicativo $R_{-2\ell}(S) \cdot R_{2m+n}(S)$ 37

El producto mulriplicativo $(S^2)^m \cdot \Box^\ell \{\delta(x)\}$ 10

El producto multiplicativo $R_{2k}(S) \cdot R_{-2\ell}(S)$ 40

El producto multiplicativo $R_{n-2m}(S) \cdot R_{-2\ell}(S)$ 41

El producto multiplicativo $R_{-2k}(S) \cdot R_{-2\ell}(S)$ 43

El producto multiplicativo $\Box^k \{\delta(x)\} \cdot \Box^\ell \{\delta(x)\}$ 43

CAPITULO IV

PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DE LA FAMILIA DE FUNCIONES DISTRIBUCIONALES $\omega(t,\alpha,m,n)$

RESUMEN 44

IV.1. INTRODUCCION 45

Definición de $\omega(t,\alpha,m,n)$ 45

Funciones de Bessel de primera clase 45

Equivalencia de $\omega(t,\alpha,m,n)$ y $R_\alpha(S)$ 46

Propiedades de la familia de funciones distribucionales $\omega(t,\alpha,m,n)$ 47

IV.2. PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DE LA FAMILIA DE FUNCIONES DISTRIBUCIONALES $\omega(t,\alpha,m,n)$ 48

El producto multiplicativo $\omega(t,\alpha,m,n) \cdot \omega(t,\beta,m,n)$ 49

El producto multiplicativo $\omega(t,-2k,m,n) \cdot \omega(t,-2\ell,m,n)$ 50

El producto multiplicativo $(\Box + m^2)^k\{\delta(x)\} \cdot (\Box + m^2)^\ell\{\delta(x)\}$ 53

CAPITULO V

PRODUCTOS DISTRIBUCIONALES RELACIONADOS CON LA DISTRIBUCION $(m^2+P)^\lambda$

RESUMEN 54

V. 1. INTRODUCCION 56

Las distribuciones $(m^2+P)^\lambda$ 56-57

Residuo de $(m^2+P)^\lambda$ 57

V.2. EL PRODUCTO MULTIPLICATIVO $(m^2+P)^{\ell} \cdot \delta^{(k)}(m^2+P)$ 58

El producto multiplicativo $(m^2+P)^{\ell} \cdot \delta^{(k)}(m^2+P)$ 59

El producto multiplicativo $(m^2+P)^{\ell}_{+} \cdot \delta^{(k)}(m^2+P)$ 61

El producto multiplicativo $(m^2+P)^{\ell}_{-} \cdot \delta^{(k)}(m^2+P)$ 61

El producto multiplicativo $P^{\ell} \cdot \delta^{(k)}(P)$ 61

Los productos multiplicativos $P^{\ell}_{\pm} \cdot \delta^{(k)}(P)$ 61-62

El producto multiplicativo $P^{\ell} \cdot \delta^{(\ell)}(P)$ 62

Los productos multiplicativos $P^{\ell}_{\pm} \cdot \delta^{(\ell)}(P)$ 63

V.3. EL PRODUCTO MULTIPLICATIVO $(m^2+P)^{\lambda}_{+} \cdot (m^2+P)^{-1-\lambda}_{-}$ 63

El producto multiplicativo $x^{\lambda}_{+} \cdot x^{-\lambda-1}_{-}$ 63

El producto multiplicativo $P^{\lambda}_{+} \cdot P^{-\lambda-1}_{-}$ 63

El producto multiplicativo $(m^2+P)^{\lambda}_{+} \quad (m^2+P)^{-\lambda-1}_{-}$ 63-64

CAPITULO VI

FORMULAS DE INTERCAMBIO DE LA CONVOLUCION CON EL PRODUCTO VIA LA TRANSFORMADA DE FOURIER

RESUMEN 66

VI.1. INTRODUCCION 67

VI.2. FORMULAS DE INTERCAMBIO DE LA CONVOLUCION CON EL PRODUCTO VIA LA TRANSFORMADA DE FOURIER 68

La fórmula $\{(m^2+P)^{\ell} \cdot \delta^{(k)}(m^2+P)\}^{\wedge} = \{(m^2+P)^{\ell}\}^{\wedge} * \{\delta^{(k)}(m^2+P)\}^{\wedge}$ 69

La fórmula $\{H_{\alpha}(P\pm i0,n) \cdot H_{\beta}(P\pm i0,n)\}^{\wedge} = \{H_{\alpha}(P\pm i0,n)\}^{\wedge} * \{H_{\beta}(P\pm i0,n)\}^{\wedge}$ .. 72

La fórmula $\{R_{\alpha}(x) \cdot R_{\beta}(x)\}^{\wedge} = \{R_{\alpha}(x)\}^{\wedge} * \{R_{\beta}(x)\}^{\wedge}$ 77

APENDICE

A.1. Fórmula de Leray 80

A.2. Residuo y parte finita $\Gamma(z)$ 81-82

A.3. La distribución $(S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}$ 83

BIBLIOGRAFIA 87

GLOSARIO DE SIMBOLOS

P	3
$(P\pm i0)^{\lambda}$	3
$H_{\alpha}(P\pm i0,n)$	3
L^{k}	4
$\Box^{k}$	17
$R_{\alpha}(x)$	22
Δ^{k}	22
$R_{\alpha}(S)$	32
$\omega(t,\alpha,m,n)$	45
$J_{\nu}(x)$	45
${}_{o}F_{1}(\nu+1;\ -\frac{z^{2}}{4})$	45-46
$(\Box+m^{2})^{k}$	46
$(m^{2}+P)_{+}^{\lambda}$	56
$(m^{2}+P\pm i0)^{\lambda}$	56
$m^{2}+P$	58
$\mathcal{E}$	58-60
O_{M}	60
$G_{\alpha}(P\pm i0,m,n)$	67
$K_{\nu}(z)$	67
$I_{\nu}(z)$	67

K^{ρ}		68
O'_c		73
$\delta^{(k)}(m^2+P)$		81
S^2		83
Γ^+		84
ε	es un elemento de	
	producto de convolución	
	transformada de Fourier	
$\Box$	operador de las ondas generalizado	
Δ	operador de Laplace (laplaciano)	
L	operador ultrahiperbólico	
K^k	operador ultrahiperbólico de Klein-Gordon generalizado iterado k veces	
D	espacio de funciones de prueba	
D'	espacio de distribuciones	

PREFACIO

Es conocido que el producto de dos distribuciones arbitrarias no es posible. Esta situación fue mostrada por L. Schwartz (c.f. [27]). Sin embargo, se pueden obtener fórmulas de productos de distribuciones usando distintos métodos, por ejemplo, el método que consiste esencialmente en aproximar ambos factores del producto por familia de funciones distribucionales, multiplicando y dividiendo por términos adecuados que permitan obtener nuevamente elementos de la misma familia de funciones distribucionales y el resultado final se obtiene por pasaje al límite. Entre otros métodos se encuentran, los de A.González Domínguez y R.Scarfiello (c.f. [14]), J.Mikusinski (c.f. [23]), S.E.Trione (c.f. [28]), B.Fisher (c.f. [10]) y K. Keller (c.f. [20]).

Los resultados principales de este trabajo, se refieren a los siguientes productos:

$$H_\alpha(P\pm i0,n) \cdot H_\beta(P\pm i0,n) \qquad (1)$$

$$R_\alpha(x) \cdot R_\beta(x) \qquad (2)$$

$$R_\alpha(S) \cdot R_\beta(S) \qquad (3)$$

$$\omega(t,\alpha,m,n) \cdot \omega(t,\beta,m,n) \qquad (4)$$

$$(m^2+P)^\ell \cdot \delta^{(k)}(m^2+P) \qquad (5)$$

$$(m^2+P)_+^\lambda \cdot (m^2+P)_-^{-1-\lambda} \qquad (6)$$

que corresponden a las fórmulas (I,2,3), (II,2,1), (III,2,1), (IV,2,1), (V,2,3) y (V,3,5), respectivamente.

Los productos (1), (2), (3), (4) y (6) son heterodoxos de acuerdo con [33] , pág. 23, fórmula (I,3,16), es decir que no se les puede asignar el mismo significado del que se establece en la definición (7) (vale decir "ortodoxos"),

$$\langle \alpha.T, \varphi \rangle \overset{def}{=} \langle T, \alpha.\varphi \rangle \qquad (7)$$

con $\alpha \in \mathcal{E}$ (c.f. [26], pág. 88) y $\varphi \in D$ (c.f. [26], pág. 64) -

dada por L.Schwartz en [26] , pág. 117, fórmula (V,1,1).

El término heterodoxo fue introducido por A.González Domínguez (c.f.[13],pág. 180) para indicar todos aquellos productos que se pueden obtener sin usar la definición (7).

El producto multiplicativo (1), $H_\alpha(P\pm i0,n).H_\beta(P\pm i0,n)$ obtenido en el capítulo I, fórmula (I,2,3), generaliza los siguientes resultados:

i) El producto $(G\pm i0)^{-m} . L^k \{\delta(x)\}$ dado por A.González Domínguez en [13] , teorema 12, pág. 192, que genereliza la fórmula de Guerra (c.f. [13] , pág. 193, fórmula 9.6), - fundamental en la teoría cuántica de campos.

ii) Los productos $H_{2k}(P\pm i0,n) . \delta(x)$ y $H_{2k}(P\pm i0,n).H_{-2\ell}(P\pm i0,n)$ dados por S.E.Trione en [33] , págs. 72-78.

iii) El producto $(x^2)^{-m} . \Box^\ell \{\delta(x)\}$ dado por Klauss Keller en [20] , pág. 32, fórmula 2.56 donde,

$$x = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 ,$$

$$\Box = \{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \sum_{i=2}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\} \qquad y$$

$(x^2)^{-m}$ significa parte finita ([33] , pág. 16).

El producto multiplicativo (2), $R_\alpha(x) . R_\beta(x)$ obtenido en el capítulo II, fórmula (II,2,1) generaliza los productos $(|x|^2)^m . \Delta^\ell\{\delta(x)\}$ y $\Delta^k\{\delta(x)\}. \Delta^\ell \{\delta(x)\}$, dados por - Klauss Keller en [20] , pág. 68, apéndice B, grupo B.7, donde,

$$|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \qquad y \qquad \Delta^\ell = \{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\}^\ell$$

El resultado (3), $R_\alpha(S). R_\beta(S)$ dado en el capítulo - III, fórmula (III,2,1) en mi opinión es independiente de los resultados previos, su interés radica, entre otros, en que en el caso particular de que $\alpha = -2\ell$, $\ell = 0,1,2,\ldots$, y $\beta=2m+n$, dado en la proposición 2, fórmula (III,2,7) suministra una fórmula relacionada con el operador de las ondas generalizado ite

II.

rado k veces.

El producto (4), $\omega(t,\alpha,m,n) \cdot \omega(t,\beta,m,n)$ dado en el capítulo IV, fórmula (IV,2,1) es una generalización del producto (III,2,1) del capítulo III.

Si en el prodcuto (5), $(m^2+P)^{\ell} \cdot \delta^{(k)}(m^2+P)$ hacemos $\ell = 1$, se obtiene,

$$(m^2+P) \cdot \delta^{(k)}(m^2+P) + k\,\delta^{(k-1)}(m^2+P) = 0,$$

que generaliza fórmulas del Gelfand-Shilov (c.f. [12], pág. 349) y es considerada por ejemplo por Bollini, Giambiagi y Tiomno para la teoría de regularización analítica en las ecuaciones clásicas de Yang-Mills y sus aplicaciones en el potencial singular (c.f.[3]). Además este prodcuto generaliza fórmulas usadas por D.W.Bresters (c.f. [5], pág. 573, renglón 15 y pág. 574, renglón 21), las que permiten obtener la fórmula,

$$(m^2+P\pm i0)^{-k} = (m^2+P)^{-k} \mp \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,\pi i\,\delta^{(k-1)}(m^2+P).$$

El producto (6), $(m^2+P)_+^{\lambda} \cdot (m^2+P)_-^{-1-\lambda}$ dado en el capítulo V (proposición 1, fórmula (V,3,5)) es una extensión multidimensional de la fórmula $x_+^{\lambda} \cdot x_-^{-1-\lambda}$ dada por B.Fisher en [10], pág. 296.

En el capítulo VI se demuestra la validez de fórmulas que intercambian la transformada de Fourier de los productos (1), (2) y (5) con la convolución de las transformadas.

CAPITULO I

PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DE LA FAMILIA DE FUNCIONES DISTRIBUCIONALES $H_\alpha(P\pm i0,n)$

RESUMEN:

Se estudian productos multiplicativos relacionados con la familia de funciones distribucionales $H_\alpha(P\pm i0,n)$, fórmula (I,1,5).

Usando el resultado $(P\pm i0)^\lambda . (P\pm i0)^\mu = (P\pm i0)^{\lambda+\mu}$, λ, μ y $\lambda+\mu \neq -\frac{n}{2}-k$, $k = 0,1,2,\ldots$, (c.f.[33], pág. 23), se obtiene el producto multiplicativo $H_\alpha(P\pm i0,n).H_\beta(P\pm i0,n)$ (proposición 1, fórmula (I,2,3)), que es heterodoxo de acuerdo con lo establecido en el prefacio de esta tesis.

Variando los parámetros α y β a partir del resultado $H_\alpha . H_\beta$ se obtienen los siguientes productos multiplicativos;

$H_{n-2m} . H_{-2\ell}$ (proposición 2, con $\frac{n}{2} > m$, fórmula (I,3,9)),

$H_{n-2m} . H_{-2\ell}$ (fórmula (I,3,18), para $\frac{n}{2} \leq m$, con n par),

$H_{n-2m} . H_{-2\ell}$ (fórmula (I,3,19), para $\frac{n}{2} \leq m$, con n impar),

$H_{-2k} . H_{-2\ell}$ (fórmula (I,3,20)), $H_{2k} . H_{-2\ell}$ (fórmula (I,3,21)),

$H_{2k}\ \delta(x)$ (fórmula (I,3,24)),

$(P\pm i0)^{-m} . L^\ell\{\delta(x)\}$ (fórmula (I,3,27), para $\frac{n}{2} > m$),

$(P\pm i0)^{-m} . L^\ell\{\delta(x)\}$ (fórmula (I,3,29), para $\frac{n}{2} \leq m$, con n par),

$(P\pm i0)^{-m} . L^\ell\{\delta(x)\}$ (fórmula (I,3,30), para $\frac{n}{2} \leq m$, con n impar),

$P^{-m} . L^\ell\{\delta(x)\}$ (fórmula (I,3,38)),

$P_\pm^{-m} . L^\ell\{\delta(x)\}$ (fórmulas (I,3,35) y (I,3,36)),

$(P\pm i0)^m . L^\ell\{\delta(x)\}$ (fórmula (I,3,40)),

$P_\pm^m . L^\ell\{\delta(x)\}$ (fórmulas (I,3,51) y (I,3,52)),

$P^m . L^\ell\{\delta(x)\}$ (fórmula (I,3,50)),

dando fórmulas relacionadas con el operador ultrahiperbólico iterado k veces.

En la sección I.1., se obtiene el residuo de H_α en $\alpha = n + 2h$, $h = 0,1,2,\ldots,$ (fórmula (I,1,14)) que generaliza el teorema 3, dado por S.E.Trione en [32],pág. 94, fórmula (II,3,11).

I.- PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DE LA FAMILIA DE FUNCIONES DISTRIBUCIONALES H $(P \pm i0, n)$

I.1. INTRODUCCION

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un punto en el espacio n-dimensional R^n.

Con $P = P(x)$ designaremos una forma cuadrática de n variables, no degenerada,

$$P \overset{\text{def}}{=} x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 \qquad (I,1,1)$$

donde $p+q = n$ (dimensión del espacio), p es el número de cuadrados positivos de P, q es el número de cuadrados negativos de P y def es la abreviatura que indica definición.

Con $|x|^2$ indicaremos la forma cuadrática

$$|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \qquad (I,1,2)$$

Consideremos ahora la forma cuadrática

$$G_{\pm}(x,\varepsilon) = P(x) \pm i\,\varepsilon\,|x|^2 \qquad (I,1,3)$$

con ε número real mayor que cero, $|x|^2$ definida en (I,1,2) y $P(x)$ en (I,1,1).

Para $\lambda \in C$ (números complejos), escribimos,

$$(P \pm i0)^{\lambda} = \lim_{\varepsilon \to 0} (G_{\pm}(x,\varepsilon))^{\lambda} \qquad (I,1,4)$$

Se demuestra en [12], pág. 284, que el límite que figura en el segundo miembro de (I,1,4), existe y que $(P \pm i0)^{\lambda}$ son funciones distribucionales - analíticas de λ, salvo en los puntos $\lambda = \frac{-n}{2} - k$, $k = 0,1,2,\ldots$, donde tiene polos simples.

Asociada a $(P \pm i0)^{\lambda}$, se define en [33], pág. - 39, la familia de funciones distribucionales $H_{\alpha}(P \pm i0, n)$,

$$H_{\alpha}(P \pm i0, n) \overset{\text{def}}{=} \frac{(P \pm i0)^{\frac{\alpha - n}{2}}}{K_n(\alpha, q)} \qquad (I,1,5)$$

donde $\alpha \in C$ (números complejos), índice de la familia, n dimensión del espacio y

$$K_n(\alpha,q) = \frac{2^{\alpha}\ \pi^{n/2}\ \Gamma(\alpha/2)}{e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}\ e^{\frac{\pm q\pi i}{2}}\ \Gamma(\frac{n-\alpha}{2})} \qquad (I,1,6)$$

$H_\alpha(P\pm i0,n)$, verifica las siguientes propiedades:

$$H_0(P\pm i0,n) = \delta(x) \qquad (I,1,7)$$

$$H_{-2k}(P\pm i0,n) = L^k\{\delta(x)\} \qquad (I,1,8)$$

$$L^k\{H_\alpha(P\pm i0,n)\} = H_{\alpha-2k}(P\pm i0,n) \qquad (I,1,9)$$

donde L^k es el operador ultrahiperbólico,

$$L^k = \left\{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}\right\}^k \qquad (I,1,10)$$

iterado k veces y δ es la distribución delta de Dirac.

Las ~~propiedades~~ (I,1,7), (I,1,8) y (I,1,9) fueron obtenidas por S.E. Trione en [33], pág. 40, fórmulas (II,3,7); (II,3,8) y (II,3,9) usando la transformada de Fourier de $H_\alpha(P\pm i0,n)$ y a la que también se puede arribar por

(#) <u>métodos directos</u>, es decir, calculando el residuo del cociente de una distribución paramétrica dividida por un coeficiente variable respecto del parámetro de analiticidad cuando numerador y denominador tienen los mismos polos simples.

Si se hace $\alpha = 2k$ en (I,1,9) y usando (I,1,7), se obtiene,

$$L^k\{H_{2k}(P\pm i0,n)\} = \delta(x) \qquad (I,1,11)$$

propiedad esencial de la familia de funciones distribucionales $H_\alpha(P\pm i0,n)$, pues expresa que $H_\alpha(P\pm i0,n)$ para $\alpha = 2k$ es solución elemental del operador ultrahiperbólico L^k iterado k veces.

Por otra parte, en los puntos $\alpha = n + 2h$, $h=0,1,\ldots$ $H_\alpha(P\pm i0,n)$ tiene polos simples debido a la función Γ (gamma) que figura en el denominador de (I,1,6). En este sentido, un resultado que no aparece en la lite-

ratura habitual sobre $H_\alpha(P\pm i0,n)$ es el residuo en $\alpha = n + 2h$; $h = 0,1,2,\ldots$

Utilizando propiedades de la función $\Gamma(\alpha/2)$, vamos a obtener en forma explícita el residuo de $H_\alpha(P\pm i0,n)$ en $\alpha = n + 2h$; $h = 0,1,2,\ldots$ el cual se puede formalizar en el siguiente lema.

<u>Lema</u>: Sea $h = 0,1,2,\ldots$, vale la siguiente fórmula,

$$\operatorname*{Res}_{\alpha = n+2h} \{ H_\alpha(P\pm i0,n) \} = A(n,h,q)\ (P\pm i0)^h \qquad \text{(I,1,12)}$$

donde

$$A(n,h,q) = \frac{(-1)\ e^{\frac{\pi i}{2}(n\pm q)}}{h!\ 2^{n+2h-1}\ \pi^{n/2}\ \Gamma(\frac{n}{2}+h)} \qquad \text{(I,1,13)}$$

Demostración:

El desarrollo en serie de Laurent de $H_\alpha(P\pm i0,n)$ alrededor de $\alpha = n+2h$, $h = 0,1,2,\ldots$ está dado por,

$$H_\alpha(P\pm i0,n) = \frac{A_{-1}}{\alpha - n - 2h} + A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu (\alpha-n-2h)^\nu$$

luego

$$A_{-1} = \operatorname*{Res}_{\alpha = n+2h} \{H_\alpha(P\pm i0,n)\} =$$

$$= \lim_{\alpha\to n+2h} \left[(\alpha-n-2h)\ H_\alpha(P\pm i0,n)\right] =$$

$$= \lim_{\alpha\to n+2h} \left[(\alpha-n-2h)\ \frac{(P\pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2}}}{K_n(\alpha,q)} \right] =$$

$$= \lim_{\alpha\to n+2h} \left[(\alpha-n-2h)\Gamma(\tfrac{n-\alpha}{2})\right] . \lim_{\alpha\to n+2h} \left[\frac{e^{\frac{\pm q\pi i}{2}}\ e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}}{2^\alpha\ \pi^{n/2}} \right] .$$

$$\lim_{\alpha\to n+2h} \left[\frac{(P\pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2}}}{\Gamma(\alpha/2)} \right] \qquad \text{(I,1,14)}$$

Según [12], pág. 273, la distribución $(P\pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2}}$ para $\alpha = n+2h$, $h = 0,1,2,\ldots$ es analítica y puesto

que la función $\Gamma(\alpha/2)$ también es analítica en $\alpha = n+2h$; $h = 0,1,2,\ldots$, se tiene,

$$\lim_{\alpha \to n+2h} \frac{(P\pm i0)^{(\alpha-n)/2}}{\Gamma(\alpha/2)} = \frac{(P\pm i0)^h}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+h\right)} \qquad (I,1,15)$$

Asimismo, usando (A,2,3),

$$\lim_{\alpha \to n+2h} \left[(\alpha-n-2h)\ \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\right] = \frac{-2\ (-1)^h}{h!} \qquad (I,1,16)$$

Reemplazando (I,1,16) y (I,1,15) en (I,1,14), obtenemos,

$$A_{-1} = \operatorname*{Res}_{\alpha = n+2h} \{H_\alpha(P\pm i0,n)\} =$$

$$= \frac{(-1)\ e^{\frac{\pi i}{2}(n\pm q)}}{h!\ 2^{n+2h-1}\ \pi^{(n/2)}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}+h\right)} (P\pm i0)^h$$

que coincide con (I,1,12).

I.2. EL PRODUCTO MULTIPLICATIVO $H_\alpha(P\pm i0,n).H_\beta(P\pm i0,n)$

Nuestro objeto es obtener el producto multiplicativo $H_\alpha \cdot H_\beta$ cuando α, β, $\alpha+\beta-n \neq n+2h$, con h - entero no negativo y α, β números complejos.

Este producto es heterodoxo de acuerdo con lo establecido en la introducción de este trabajo y se va a obtener por cambio de índice en la familia de funciones distribucionales H_γ((I,1,5)), usando el resultado:

$$(P\pm i0)^\lambda \cdot (P\pm i0)^\mu = (P\pm i0)^{\lambda+\mu} \qquad (I,2,1)$$

con λ, μ, $\lambda+\mu \neq -\frac{n}{2} - k$, $k = 0,1,2,\ldots$ dado por S.E.Trione en [33], pág. 23, fórmula (I,3,1), donde $(P\pm i0)^\gamma$ es definida en (I,1,4).

Proposición 1: Sean α, β números complejos tales que α, β, $\alpha+\beta-n \neq n+2h$; $h = 0,1,2,\ldots$, $H_\alpha(P\pm i0,n)$ la familia de funciones distribucionales definida en (I,1,5), entonces vale la siguiente fórmula,

$$H_\alpha(P\pm i0,n).H_\beta(P\pm i0,n) = C(\alpha,\beta,n,q).H_{\alpha+\beta-n}(P\pm i0,n) \qquad (I,2,2)$$

donde

$$C(\alpha,\beta,n,q) = \frac{K_n(\alpha+\beta-n,q)}{K_n(\alpha,q)K_n(\beta,q)} \qquad (I,2,3)$$

y $K_n(\gamma,q)$ está definida en (I,1,6).

Demostración:

De la definición de $H_\alpha(P\pm i0,n)$ dada en (I,1,5) y usando el resultado (I,2,1), se tiene,

$$H_\alpha(P\pm i0,n) \cdot H_\beta(P\pm i0,n) = \frac{(P\pm i0)^{(\alpha-n)/2}}{K_n(\alpha,q)} \cdot \frac{(P\pm i0)^{(\beta-n)/2}}{K_n(\beta,q)} =$$

$$= \frac{(P\pm i0)^{(\alpha+\beta-n-n)/2}}{K_n(\alpha,q).K_n(\beta,q)} \qquad (I,2,4)$$

para $\alpha \neq n+2h$, $\beta \neq n+2h$ y $\alpha+\beta-n \neq -2m$, $h=0,1,2,\ldots$, $m = 0,1,2,\ldots$

Multiplicando y dividiendo el término de la derecha de la expresión (I,2,4) por $K_n(\alpha+\beta-n,q)$ (donde $K_n(\gamma,q)$ es definida en (I,1,6)) y usando de nuevo la definición de $H_\gamma(P\pm i0,n)$ dada en (I,1,5), se tiene,

$$H_\alpha(P\pm i0,n).H_\beta(P\pm i0,n) = C(\alpha,\beta,n,q)\, H_{\alpha+\beta-n}(P\pm i0,n) \qquad (I,2,5)$$

donde

$$C(\alpha,\beta,n,q) = \frac{K_n(\alpha+\beta-n,q)}{K_n(\alpha,q)K_n(\beta,q)}$$

De (I,2,5) se concluye el resultado (I,2,2).

Por otra parte, la cantidad $C(\alpha,\beta,n,q)$ definida en (I,2,3), usando (I,1,6) puede expresarse como,

$$C(\alpha,\beta,n,q) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\beta}{2}\right) e^{(n\pm q)(\pi i)/2}}{2^n \pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)\Gamma(\beta/2)\Gamma\left(\frac{n-\alpha+n-\beta}{2}\right)} \qquad (I,2,6)$$

El producto (I,2,2) es una generalización del resultado (III,1,5) dado por S.E.Trione (cf. [29], pág. 28).

I.3. CONSECUENCIAS DEL PRODUCTO MULTIPLICATIVO $H_\alpha(P\pm i0,n).H_\beta(P\pm i0,n)$

Se pretenden obtener productos especiales de la familia de funciones distribucionales $H_\alpha(P\pm i0,n)$ ((I,1,5)) a partir del resultado (I,2,2) dado en la sección I.2, variando α y β.

Dentro de los mismos se deducirán resultados obtenidos por A. González Domínguez en [13], pág. 192, fórmula 9.1, por S.E.Trione en [33], pág. 72-75 y por K.Keller en [20], pág. 68, apéndice B, grupo B.7.

Indicaremos en lo que sigue,

$$H_\alpha = H_\alpha(P\pm i0,n) \qquad (I,3,1)$$

En la obtención de estos productos el criterio general que se seguirá para evaluar la cantidad $C(\alpha,\beta,n,q)$ definida en (I,2,6), para determinados valores de α y β es el siguiente:

Criterio I.3 : Se buscarán fómulas que transformen las funciones gamma que aparecen en el numerador y denominador de $C(\alpha,\beta,n,q)$ ((I,2,6)) con el objeto de evitar expresiones del tipo:

$$\frac{\Gamma(-\ell)}{\Gamma(-k)} \quad \text{para } \ell = 0,1,2,\ldots;\ k = 0,1,2,\ldots$$

Naturalmente, se puede trabajar con estas expresiones si se tiene presente que son operaciones -

netamente formales y que se interpretan como un límite, pero se ha optado por evitarlas y primero buscar fórmulas que transformen las funciones gamma antes de tomar el límite.

Por ejemplo, para resolver el siguiente límite,

$$\lim_{\beta \to -2\ell} \frac{\Gamma(\frac{\beta}{2} - m)}{\Gamma(\beta/2)} \qquad (I,3,2)$$

se puede efectuar directamente,

$$\lim_{\beta \to -2\ell} \frac{\Gamma(\frac{\beta}{2} - m)}{\Gamma(\beta/2)} = \frac{\Gamma(-\ell - m)}{\Gamma(-\ell)} \qquad (I,3,3)$$

Pero para evitar expresiones del tipo (I,3,3), primero se busca una fórmula que permita transformar

$$\frac{\Gamma(\frac{\beta}{2} - m)}{\Gamma(\beta/2)}$$

Si se usa la fórmula (A,2,8), se tiene,

$$\frac{\Gamma(\frac{\beta}{2} - m)}{\Gamma(\beta/2)} = \frac{\Gamma(1 - \frac{\beta}{2})}{(-1)^m\ \Gamma(-\frac{\beta}{2}+m+1)} \qquad \text{por tanto,}$$

$$\lim_{\beta \to -2\ell} \frac{\Gamma(\frac{\beta}{2}-m)}{\Gamma(\beta/2)} = \lim_{\beta \to -2\ell} \frac{\Gamma(1 - \frac{\beta}{2})}{(-1)^m \Gamma(-\frac{\beta}{2}+m+1)} =$$

$$= \frac{\Gamma(1 + \ell)}{(-1)^m\ \Gamma(\ell+m+1)} \qquad (I,3,4)$$

fómula que también se obtiene directamente del término de la derecha de (I,3,3) usando (A,2,8) para $z = -\ell$.

En cuanto a la familia de funciones distribucionales $H_\alpha(P \pm i0,n)$ la propiedad $H_{\neg 2k}$ dada en (I,1,8) es esencial en la obtención de estos productos, porque en $\alpha = -2k$, $k = 0,1,2,\ldots$ se

obtienen derivadas de la medida de Dirac. Por tanto, usaremos el método directo dado en (#) sección I.2., pág. 4 , para obtener esta propiedad, aunque S.E.Trione (cf. [33] , pág. 40, fórmula (II,2,7)) la obtiene usando la transformada de Fourier.

Las singularidades de H_α no ocurren en los puntos $\alpha = -2k$, $k = 0,1,2,\ldots$, sin embargo, usaremos el proceso del límite ya que en esos puntos se cae en los polos de la distribución $(P\pm i0)^{(\alpha-n)/2}$ ([12] , pág. 275) que se compensan con los polos de la función $\Gamma(\alpha/2)$, es decir,

$$H_{-2k} = \lim_{\alpha\to -2k} H_\alpha = \lim_{\alpha\to -2k} \frac{e^{\frac{\alpha\pi i}{2}} e^{\pm\frac{q\pi i}{2}} \Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{2^\alpha \pi^{(n/2)}}$$

$$\lim_{\alpha\to -2k} \left[\frac{(P\pm i0)^{(\alpha-n)/2}}{\Gamma(\alpha/2)}\right] \qquad (I,3,5)$$

De acuerdo con [12] , pág.353, se tiene

$$\operatorname*{Res}_{\gamma=-\frac{n}{2}-k} (P\pm i0)^\gamma = \frac{2\,\pi^{(n/2)}\, e^{\pm\frac{q\pi i}{2}}}{4^k\, k!\ \Gamma(\frac{n}{2}+k)} L^k\{\delta(x)\} \qquad (I,3,6)$$

donde L^k está definida en (I,1,10).

Como $(P\pm i0)^{(\alpha-n)/2}$ y $\Gamma(\alpha/2)$ tienen polos simples en los puntos $\alpha = -2k$, $k = 0,1,2,\ldots$, usando (A,2,3) y (I,3,6),

$$\lim_{\alpha\to -2k} \left[\frac{(P\pm i0)^{(\alpha-n)/2}}{\Gamma(\alpha/2)}\right] = \frac{\operatorname*{Res}_{\alpha=-2k} (P\pm i0)^{(\alpha-n)/2}}{\operatorname*{Res}_{\alpha=-2k} \Gamma(\alpha/2)} =$$

$$= \frac{(-1)^k\, e^{\pm\frac{q\pi i}{2}}\, \pi^{(n/2)}}{2^{2k}\, \Gamma(\frac{n}{2}+k)} L^k\{\delta(x)\} \qquad (I,3,7)$$

Por otra parte, $\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})$ es analítica cuando $\alpha=-2k$, $k = 0,1,2,\ldots$, por tanto,

$$\lim_{\alpha\to -2k}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\, e^{\frac{\pm q\pi i}{2}}\, e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}}{2^{\alpha}\,\pi^{(n/2)}}\right]=$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\,(-1)^{k}\, e^{\frac{\pm q\pi i}{2}}}{2^{2k}\,\pi^{(n/2)}} \qquad (I,3,8)$$

luego reemplazando (I,3,8), (I,3,7) en (I,3,5) se obtiene la propiedad (I,1,8) y para k = 0, el caso particular (I,1,7).

En lo que sigue, obtendremos los productos especiales a partir del resultado (I,2,2), para determinados valores de α y β , los cuales se formalizarán mediante proposiciones.

<u>Proposición 2</u> : Sean m entero positivo, ℓ entero no negativo, n dimensión del espacio tal que $\frac{n}{2} > m$, entonces,

$$H_{n-2m}\cdot H_{-2\ell} = A(m,n,\ell,q)\; L^{\ell+m}\;\{\delta(x)\} \qquad (I,3,9)$$

donde H_{α} es la familia de funciones distribucionales definida en (I,1,5), L^{k} es el operador ultrahiperbólico iterado k veces definido en (I,1,10) y

$$A(m,n,\ell,q) = \frac{e^{\frac{\pi i(n\pm q)}{2}}\;\Gamma(\ell+1)\;\Gamma(m)\Gamma((n/2)+\ell)}{2^{n}\pi^{(n/2)}\;\Gamma\left(\frac{n}{2}-m\right)\;(-1)^{m}\Gamma(\ell+m+1)\Gamma\left(m+\frac{n}{2}+\ell\right)} \qquad (I,\ 10)$$

Demostración:

De (I,2,2) se tiene,

$$H_{n-2m}\cdot H_{-2\ell} = \lim_{\alpha\to n-2m}\left\{\lim_{\beta\to -2\ell} C(\alpha,\beta,n,q)H_{\alpha+\beta-n}\right\} =$$

De acuerdo con el criterio establecido al co - mienzo de esta sección, página 8 , de (I,3,4) se tiene,

$$\lim_{\beta \to -2\ell} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{\beta}{2} - m)}{\Gamma(\frac{\beta}{2})} \right\} = \frac{\Gamma(\ell + 1)}{(-1)^m \Gamma(\ell+m+1)} \qquad (I,3,12)$$

luego, tomando límite en (I,2,6) y reemplazando (I,3,12), se tiene,

$$\lim_{\alpha \to n-2m} \left\{ \lim_{\beta \to -2\ell} \left[C(\alpha,\beta,n,q) \right] \right\} =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi i}{2}(n \pm q)} \quad \Gamma(\ell+1) \quad \Gamma(m) \quad \Gamma(\frac{n}{2} + \ell)}{2^n \pi^{(n/2)} \Gamma(\frac{n}{2}-m)(-1)^m \Gamma(\ell+m+1)\Gamma(m+\frac{n}{2}+\ell)} \qquad (I,3,13)$$

Por otra parte, usando la propiedad (I,1,8), se tiene,

$$\lim_{\alpha \to n-2m} \left\{ \lim_{\beta \to -2\ell} \left[H_{\alpha+\beta-n} \right] \right\} = L^{m+\ell} \{\delta(x)\} \qquad (I,3,14)$$

luego reemplazando (I,3,12) y (I,3,14) en (I,3,11) se obtiene el resultado (I,3,9).

Por procedimiento similar pero para $\alpha = -2\ell$ y $\beta = n-2m$, se obtiene también que,

$$H_{-2\ell} \cdot H_{n-2m} = A(m,n,\ell,q)\, L^{m+\ell} \{\delta(x)\} \qquad (I,3,15)$$

donde $A(m,n,\ell,q)$ está dada en (I,3,10), luego de (I,3,9) y (I,3,15) se concluye que estos productos especiales conmutan, es decir,

$$H_{n-2m} \cdot H_{-2\ell} = H_{-2\ell} \cdot H_{n-2m} \qquad (I,3,16)$$

La hipótesis $\frac{n}{2} > m$ permite asegurar, entre otras propiedades que el valor $\Gamma(\frac{n}{2}-m)$ está definido. Modificando esta hipótesis y usando el mismo procedimiento con que se obtiene el producto (I,3,9), también se arriba a los produc-

tos(I,3,9) y (I,3,15) con la diferencia de que ahora se distinguirán dos casos, es decir,

sea $\frac{n}{2} \leq m$, entonces, (I,3,17)

1) Si n es par, de (I,3,9) y (I,3,15), se tiene,

$$H_{n-2m} \cdot H_{-2\ell} = H_{-2\ell} \cdot H_{n-2m} = 0 \qquad (I,3,18)$$

puesto que $\lim\limits_{\alpha \to n-2m} \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} = 0.$

2) Si n es impar, usando la fórmula (A,2,11), se tiene,

$$\lim_{\alpha \to n-2m} \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2} - m)} =$$

$$= \frac{\Gamma(1-(\frac{n}{2} - m)) \quad \operatorname{sen}(\frac{n}{2} - m)\pi}{\pi} =$$

$$= \frac{(-1)^{(n-1)/2} (-1)^m \quad \Gamma(m - \frac{n}{2} + 1)}{\pi},$$

luego de (I,3,9) y (I,3,15), se obtiene en este caso que,

$$H_{n-2m} \cdot H_{-2\ell} = H_{-2\ell} \cdot H_{n-2m} =$$

$$= B(m,\ell,n,q) \; L^{m+\ell} \{\delta(x)\} \qquad (I,3,19)$$

donde

$$B(m,\ell,n,q) =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{2} i(n \pm q)} \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad \Gamma(\ell+1)\Gamma(m)\Gamma(\frac{n}{2}+\ell)\Gamma(m+\frac{n}{2}+1)}{2^n \quad \pi^{(n/2)} \pi \; \Gamma(\ell+m+1) \; \Gamma(m+\frac{n}{2}+\ell)}$$

Si hacemos $m = \frac{n}{2} + k$, k entero no negativo en (I,3,18),

$$H_{-2k} \quad H_{-2\ell} = H_{-2\ell} \cdot H_{-2k} = 0 \qquad (I,3,20)$$

Haciendo $k = \ell = 0$ en (I,3,20) y usando la propiedad (I,1,7), se tiene,

$$\delta(x) \cdot \delta(x) = (\delta(x))^2 = 0$$

propiedad que coincide con la fórmula (II,5,7) dada por S.E. Trione (cf. [33], pág. 46).

El producto (I,3,20) ya ha sido obtenido por S.E.Trione en [33] como consecuencia de la fórmula (IV,3,1), pág. 78 y de la fórmula (II,7,11), pág. 49.

Por otra parte, si hacemos $m = \frac{n}{2} - k$ entero positivo, con n entero positivo par en la proposición 2, fórmula (I,3,9), se tiene,

$$H_{2k} \cdot H_{-2\ell} = A(\tfrac{n}{2} - k, n, \ell, q)\, L^{\frac{n}{2}-k+\ell}\{\delta(x)\} \qquad \text{(I,3,21)}$$

donde L^k es el operador ultrahiperbólico definido en (I,1,10) y

$$A(\tfrac{n}{2} - k, n, \ell, q) = \frac{e^{\frac{\pi i}{2}(n \pm q)}\, \Gamma(\ell+1)\, \Gamma(\frac{n}{2} - k)\, \Gamma(\frac{n}{2} + \ell)}{2^n\, \pi^{(n/2)}\, \Gamma(k)\, (-1)^{((n/2)-k)}\, \Gamma(\ell + \frac{n}{2} - k + 1)\, \Gamma(n - k + \ell)} \qquad \text{(I,3,22)}$$

De acuerdo con (I,3,15) también vale la propiedad conmutativa para el producto (I,3,21), es decir,

$$H_{2k} \cdot H_{-2\ell} = H_{-2\ell} \cdot H_{2k} \qquad \text{(I,3,23)}$$

Haciendo $\ell = 0$ en (I,3,21), usando (I,1,7) y la propiedad (I,3,23), se tiene,

$$H_{2k} \cdot \delta(x) = \delta(x) \cdot H_{2k} = A(\tfrac{n}{2} - k, n, q)\, L^{\frac{n}{2}-k}\{\delta(x)\} \qquad \text{(I,3,24)}$$

donde

$$A(\tfrac{n}{2} - k, n, q) = \frac{(-1)^k\, e^{\frac{\pm q \pi i}{2}}\, \Gamma(\frac{n}{2})}{2^{n-1}\, \pi^{\frac{n}{2}}\, \Gamma(k)\, (n-2k)\, \Gamma(n-k)}$$

Los productos (I,3,21) y (I,3,24) los ha obtenido S.E.Trione en [3], pág. 75, fórmula (IV,2,1) y en pág. 72, fórmula (IV,1,4), respectivamente.

Si se hace $n = 4$, $k = 1$ y $q = 1$ en (I,3,24), se tiene,

$$H_2 \cdot \delta(x) = \delta(x) \cdot H_2 =$$

$$= \frac{(-1)\, e^{\frac{\pm\pi i}{2}}\, \Gamma(4/2)}{2^3\, \pi^2\, \Gamma(1)\, (4-2)\Gamma(4-1)}$$

$$\cdot\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \right\} \delta(x)$$

y usando las fórmulas (I,1,5), (I,1,6) y (I,1,10), se obtiene,

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \pm i0)^{-1} \cdot \delta(x) =$$

$$= \delta(x) \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \pm i0)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{8} \Box \{\delta(x)\} \qquad \text{(I,3,25)}$$

donde,

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \qquad \text{(I,3,26)}$$

La fórmula (I,3,25), es conocida como la fórmula de Guerra la cuál es de mucha importancia en la mecánica cuántica (cf. [16], pág. 530).

De la proposición 2, fórmula (I,3,9), utilizando (I,1,5), (I,1,6) y (I,1,8), para $m \leq \frac{n}{2}$, se tiene,

$$(P \pm i0)^{-m} \cdot L^{\ell} \{\delta(x)\} =$$

$$= \frac{4^{-m}\, \Gamma(\ell+1)\Gamma(\frac{n}{2}+\ell)}{\Gamma(\ell+m+1)\, \Gamma(m+\frac{n}{2}+\ell)}\, L^{\ell+m} \{\delta(x)\} \qquad \text{(I,3,27)}$$

Usando la fórmula (A,2,7), de (I,3,27), se concluye,

$$(P \pm i0)^{-m} \cdot L^{\ell}\{\delta(x)\} =$$

$$= \left[4^m \cdot (\ell+1) \ldots (\ell+m) \cdot (\tfrac{n}{2}+\ell) \ldots (\tfrac{n}{2}+\ell+m-1) \right]^{-1} \cdot L^{\ell+m}\{\delta(x)\} \qquad \text{(I,3,28)}$$

El producto (I,3,28) es obtenido por A.González Domínguez en [13] , pág. 192, fórmula 9.1. y permite generalizar directamente la fórmula de Guerra - dada en (I,3,25).

Similarmente, usando la condición (I,3,17), de (I,3,18) y (I,3,19), se comcluye,

$$(P\pm i0)^{-m} \cdot L^{\ell}\{\delta(x)\} = 0 \text{ si } \frac{n}{2} \leq m, \text{ para n par} \qquad (I,3,29)$$

y

$$(P\pm i0)^{-m} \cdot L^{\ell}\{\delta(x)\} =$$

$$= \left[4^m (\ell+1)\ldots(\ell+m)(\tfrac{n}{2}+\ell)\ldots(\tfrac{n}{2}+\ell+m-1)\right]^{-1} L^{\ell+m}\{\delta(x)\} \qquad (I,3,30)$$

si $\frac{n}{2} \leq m$, para n impar.

Según [5] , pág.577, fórmula 4.1.,

$$(P\pm i0)^{-m} = P^{-m} \mp \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \pi i \, \delta^{(m-1)}(P) \qquad (I,3,31)$$

válida para $m \neq \frac{n}{2} + k$, $k = 0,1,2,\ldots,$
donde $\delta^{(m-1)}(P)$ es definida en [12] , pág. 249.

Luego usando (I,3,31), de (I,3,27) para $m \neq \frac{n}{2}+k$, $k = 0,1,2,\ldots$, se obtiene,

$$P^{-m} \cdot L^{\ell}\{\delta(x)\} = C(m,n,\ell)\, L^{\ell+m}\{\delta(x)\} \qquad (I,3,32)$$

donde

$$C(m,n,\ell) = \frac{4^{-m}\, \ell!\, \Gamma(\frac{n}{2}+\ell)}{(\ell+m)!\, \Gamma(\frac{n}{2}+\ell+m)} \qquad (I,3,33)$$

y P^{-m} significa parte finita (c.f. [33] , pág. 16).

Por otra parte, de [13] , pág. 189, fórmula 6.9, se tiene,

$$P^{-m} = P_+^{-m} + (-1)^m P_-^{-m} \qquad (I,3,\ )$$

donde $P_{\pm}^{\lambda}$ son definidas en [12] , pág. 276, luego, de (I,3,32), para $m \neq \frac{n}{2} + k$, $k = 0,1,2,\ldots$ con n par, usando (I,3,34), se obtiene,

$$P_{+}^{-m} \cdot L^{\ell}\{\delta(x)\} = \frac{1}{2} C(m,n,\ell)\, L^{\ell+m}\{\delta(x)\} \qquad (I,3,35)$$

$$P_{-}^{-m} \cdot L^{\ell}\{\delta(x)\} = \frac{1}{2} (-1)^{m} C(m,n,\ell)\, L^{\ell+m}\{\delta(x)\} \qquad (I,3,36)$$

donde $C(m,n,\ell)$ es definida por (I,3,33).

Haciendo $q = 1$ en (I,3,35), usando (I,1,10), (I,1,1) y (I,3,33), se tiene,

$$(\sigma^2)_{+}^{-m} \cdot \Box^{\ell}\{\delta(x)\} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{4^{-m}\, \ell!\, \Gamma(\frac{n}{2} + \ell)}{(\ell+m)!\, \Gamma(\frac{n}{2} + \ell + m)} \Box^{\ell+m}\{\delta(x)\} \qquad (I,3,37)$$

donde

$$\sigma^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2 \qquad (I,3,38)$$

y

$$\Box^{\ell} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right\}^{\ell} \qquad (I,3,39)$$

La fórmula (I,3,37) generaliza el producto dado por K.Keller en [20] , pág.31, fórmula 2.56.

Con el resultado (I,3,9) se ha pretendido agrupar una cantidad de productos, algunos conocidos tales como (I,3,20), (I,3,21), (I,3,24), (I,3,28), destacando la conmutatividad de los mismos y se han introducido otros nuevos: (I,3,18), (I,3,19), (I,3,29), (I,3,30) y (I,3,35).

De (I,2,2), se pueden deducir otros productos para el caso en que $\alpha = n + 2m$ y $\beta = -2\ell$, con m y ℓ enteros no negativos.

Proposición 3 : Sean m y ℓ enteros no negativos tales que $\ell \geq m$, entonces,

$$(P\pm i0)^m \cdot L^{\ell}\{\delta(x)\} = M(n,\ell,m)\, L^{\ell-m}\{\delta(x)\} \qquad (I,3,40)$$

donde $(P\pm i0)^{\lambda}$ es definida en (I,1,4), L^{ℓ} en (I,1,10) y

$$M(n,\ell,m) = \frac{4^m\, \ell!\, \Gamma(\frac{n}{2}+\ell)}{(\ell-m)!\,\Gamma(\frac{n}{2}+\ell-m)} \qquad (I,3,41)$$

Demostración:

La familia de funciones distribucionales $H_{\alpha}(P\pm i0,n)$, definida en (I,1,5), tiene polos simples en los puntos $\alpha = n + 2m$, $m = 0,1,2,\ldots$ luego, simplificando $K_n(\alpha,q)$ ((I,1,6)) en ambos términos del producto (I,2,2), se tiene,

$$(P\pm i0)^{(\alpha-n)/2} \cdot H_{\beta} =$$

$$= \frac{K_n(\alpha+\beta-n,\, q)}{K_n(\beta,q)}\, H_{\alpha+\beta-n} \qquad (I,3,42)$$

Como la distribución paramétrica $(P\pm i0)^{(\alpha-n)/2}$ (cf. [12], pág 284) es analítica en $\alpha = n + 2m$, entonces, para este valor de α,

$$(P\pm i0)^m \cdot H_{\beta} = \frac{K_n(\beta+2m,q)}{K_n(\beta,q)}\, H_{\beta+2m} \qquad (I,3,43)$$

Por otra parte, aplicando el criterio I.3., usando (I,1,6) y las fórmulas (A,2,7) y (A,2,9), se tiene,

$$\lim_{\beta\to -2\ell}\left[\frac{K_n(\beta+2m,q)}{K_n(\beta,q)}\right] = \frac{4^m\, \ell!\, \Gamma(\frac{n}{2}+\ell)}{(\ell-m)!\,\Gamma(\frac{n}{2}+\ell-m)} \qquad (I,3,44)$$

Según la propiedad (I,1,8), tenemos,

$$\lim_{\beta\to -2\ell} H_{\beta+2m} = H_{-2\ell+2m} = H_{-2(\ell-m)} =$$

$$= L^{\ell-m}\{\delta(x)\} \qquad (I,3,45)$$

donde L^k es el operador ultrahiperbólico definido en (I,1,10), por tanto, usando (I,3,43), (I,3,44), (I,3,45) y la propiedad (I,1,8), se tiene,

$$(P\pm i0)^m \cdot L^{\ell}\{\delta(x)\} = (P\pm i0)^m \cdot H_{-2\ell} =$$

$$= (P\pm i0)^m \lim_{\beta\to -2\ell} H_\beta = \lim_{\beta\to -2\ell} (P\pm i0)^m \cdot H_\beta =$$

$$= \lim_{\beta\to -2\ell}\left\{ \frac{K_n(\ell+2m,q)}{K_n(\ell,q)} H_{\beta+2m}\right\} =$$

$$= \lim_{\beta\to -2\ell} \frac{K_n(\ell+2m,q)}{K_n(\ell,q)} \cdot \lim_{\beta\to -2\ell} H_{\beta+2m} =$$

$$= \frac{\ell!\, 4^m\, \Gamma(\frac{n}{2}+\ell)}{(\ell-m)!\, \Gamma(\frac{n}{2}+\ell-m)} L^{\ell-m}\{\delta(x)\}$$ que coincide

con (I,1,40).

Si se hace $\ell = m$ en (I,3,40), se obtiene,

$$(P\pm i0)^m \cdot L^m\{\delta(x)\} = \frac{4^m\, m!\, \Gamma(\frac{n}{2}+m)}{\Gamma(n/2)}\, \delta(x) \qquad \text{(I,3,46)}$$

Usando las fórmulas:

$$(P+i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\lambda\pi i} P_-^\lambda \qquad \text{(I,3,47)}$$

$$(P-i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{-\lambda\pi i} P_-^\lambda \qquad \text{(I,3,48)}$$

dadas en [12], pág.276, se deduce que cuando $\lambda = m$, m entero no negativo,

$$(P+i0)^m = (P-i0)^m = P^m \quad \text{para } m=0,1,2,\ldots \qquad \text{(I,3,)}$$

donde

$$P^m = (x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2)^m$$

con $p+q = n$ dimensión del espacio.

Luego, utilizando la fórmula (I,3,49), el producto heterodoxo (I,3,40), para $\ell \geq m$, también se puede escribir,

$$P^m \cdot L^\ell \{\delta(x)\} = M(n,\ell,m)\, L^{\ell-m} \{\delta(x)\}. \qquad (I,3,50)$$

De (I,3,50), utilizando las fórmulas (I,3,47), (I,3,48) y (I,3,49) se deducen los siguientes - productos:

$$P_+^m \cdot L^\ell \{\delta(x)\} = \frac{1}{2} M(n,\ell,m)\, L^{\ell-m} \{\delta(x)\} \qquad (I,3,51)$$

$$P_-^m \cdot L^\ell \{\delta(x)\} = \frac{1}{2} (-1)^m M(n,\ell,m)\, L^{\ell-m} \{\delta(x)\} \qquad (I,3,52)$$

donde $M(n,\ell,m)$ está definida en (I,3,41).

CAPITULO II

PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DEL NUCLEO SINGULAR ELIPTICO DE MARCEL RIESZ

RESUMEN:

Trata este capítulo de productos multiplicativos relacionados con el núcleo singular elíptico de Marcel Riesz, $R_\alpha(x)$, definido en (II,1,1).

En la sección II.2 se obtiene en primer lugar, el producto multiplicativo $R_\alpha(x) \cdot R_\beta(x)$ (proposición 1, fórmula (II,2,1)), el cual es heterodoxo de acuerdo con el criterio establecido en el prefacio de este trabajo, luego variando α y β, a partir del resultado $R_\alpha(x) \cdot R_\beta(x)$, se obtienen los siguientes productos multiplicativos:

$R_\alpha(x) \cdot R_\beta(x)$ (proposición 1, fórmula (II,2,1)),

$R_{n-2m}(x) \cdot R_{-2\ell}(x)$ (proposición 2, para $\frac{n}{2} > m$, fórmula (II,2,8)),

$R_{n-2m}(x) \cdot R_{-2\ell}(x)$ (fórmula (II,2,15), para $\frac{n}{2} \leq m$, con n par),

$R_{n-2m}(x) \cdot R_{-2\ell}(x)$ (fórmula (II,2,17), para $\frac{n}{2} \leq m$, con n impar),

$R_{-2k}(x) \cdot R_{-2\ell}(x)$ (fórmula (II,2,19)),

$(|x|^2)^{-m} \cdot \Delta^\ell\{\delta(x)\}$ (fórmula (II,2,21)),

$(|x|^2)^{m} \cdot \Delta^\ell\{\delta(x)\}$ (fórmula (II,2,22)), los cuales dan fórmulas vinculadas con el operador de Laplace iterado k veces.

II.- PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DEL NUCLEO SINGULAR ELIPTICO DE MARCEL RIESZ

II.1. INTRODUCCION

Sea $x = (x_1,\ldots,x_n)$ un punto del espacio n-dimensional R^n.

El núcleo singular elíptico definido por,

$$R_\alpha(x) = \frac{(|x|^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}}{D_n(\alpha)} \qquad \text{(II,1,1)}$$

donde $|x|^2$ está definida en (I,1,2),

$$D_n(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \; 2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})} \qquad \text{(II,1,2)}$$

y $\alpha \in C$ (número complejo), índice del núcleo, fue introducido por Marcel Riesz (cf. [25] , páginas 16-21).

$R_\alpha(x)$, verifica las siguientes propiedades:

$$R_o(x) = \delta(x) \qquad \text{(II,1,3)}$$

$$R_{-2k}(x) = (-1)^k \; \Delta^k \{\delta(x)\} \qquad \text{(II,1,4)}$$

$$\Delta^k\{R_\alpha(x)\} = (-1)^k \; R_{\alpha-2k}(x) \qquad \text{(II,1}$$

donde Δ^k es el operador de Laplace iterado k veces, definido por:

$$\Delta^k = \{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\}^k \qquad \text{(II,1,6)}$$

Las propiedades (II,1,4) y (II,1,5) son demostradas en [32] , pág. 92 y pág. 101, usando métodos directos en el sentido expresado en el capítulo I, página 4 .

La propiedad (II,1,3) se deduce de (II,1,4) haciendo $k = 0$.

Haciendo $\alpha = 2k$ en (II,1,5) y usando (II,1,3), se obtiene,

$$\Delta^k \{R_{2k}(x)\} = (-1)^k \delta(x)$$

propiedad esencial del núcleo singular elíptico $R_\alpha(x)$, pues expresa que $e^{(\alpha\pi i/2)} R_\alpha(x)$ para $\alpha = 2k$ es solución elemental del operador de Laplace iterado k veces.

Por otra parte, de acuerdo con [12], páginas 71-74, $(|x|^2)^{(\alpha-n)/2}$ es una distribución paramétrica analítica de α, con polos simples en los puntos $\alpha = -2k$, $k = 0,1,2,\ldots$, entonces,

$$\frac{(|x|^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}}{\Gamma(\alpha/2)}$$

es una distribución paramétrica entera de α, por consiguiente el núcleo singular elíptico $R_\alpha(x)$ tiene polos simples en los puntos $\alpha = n+2h$, $h = 0,1,2,\ldots$, debido a la función Γ (gamma) que figura en el denominador de (II,1,2); luego para $\alpha \neq n + 2h$, $h = 0,1,2,\ldots$, usando la fórmula 2 de [12], pág. 124, se obtiene,

$$\{R_\alpha(x)\}^\wedge = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |y|^{-\alpha}$$

donde $R_\alpha(x)$ está definido en (II,1,1), $|y| = (y_1^2 + \ldots + y_n^2)^{1/2}$ y $\wedge$ indica transformada de Fourier.

II.2. PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DEL NUCLEO SINGULAR ELIPTICO DE MARCEL RIESZ

Se pretende obtener, en primer lugar, el producto multiplicativo $R_\alpha(x) . R_\beta(x)$ cuando α, β,

$\alpha + \beta - n \neq n + 2h$, con h entero no negativo y α, β, números complejos, donde $R_\alpha(x)$ es el núcleo singular elíptico definido en (II,1,1), luego para valores particulares de α y β se deducirán productos multiplicativos que están relacionados con el operador de Laplace iterado k veces, definido en (II,1,6). Estos productos son heterodoxos de acuerdo con lo establecido en el prefacio de esta tesis.

<u>Proposición 1</u>: Sean α, β números complejos tales que α, β, $\alpha+\beta-n \neq n + 2h$, $h = 0,1,2,\ldots$, $R_\alpha(x)$ el núcleo singular elíptico de Marcel Riesz definido en (II,1,1), vale entonces la siguiente fórmula:

$$R_\alpha(x) \cdot R_\beta(x) = I(\alpha,\beta,n)\, R_{\alpha+\beta-n}(x) \qquad \text{(II,2,1)}$$

donde

$$I(\alpha,\beta,n) = \frac{D_n(\alpha+\beta-n)}{D_n(\alpha)D_n(\beta)} \qquad \text{(II,2,2)}$$

y $D_n(\gamma)$ está definida en (II,1,2).

Demostración:

Es claro que para Real $(\alpha) > n$ y Real$(\beta) > n$, se tiene,

$$(|x|^2)^{\frac{\alpha-n}{2}} \quad (|x|^2)^{\frac{\beta-n}{2}} = (|x|^2)^{\frac{\alpha+\beta-n-n}{2}} \qquad \text{(II,2,3)}$$

donde $|x|^2$ está definida en (I,1,2). Luego, por prolongación analítica en el sentido ([12], páginas 71-74) se extiende la fórmula (II,2,3) para los valores $\alpha \neq -2k$, $\beta \neq -2\ell$ y $\alpha+\beta-n \neq -2m$, con k, ℓ y m enteros no negativos.

De la definición (II,1,1), usando (II,2,3) se tiene,

$$R_\alpha(x) \cdot R_\beta(x) = \frac{(|x|^2)^{\frac{\alpha+\beta-n-n}{2}}}{D_n(\alpha)D_n(\beta)} \qquad (II,2,4)$$

para $\alpha \neq n + 2h$, $\beta \neq n + 2h$ y $\alpha+\beta-n \neq -2m$, $h = 0,1,2,\ldots$ y $m = 0,1,2,\ldots$

Multiplicando y dividiendo el término de la derecha de (II,2,4) por $D_n(\alpha+\beta-n)$, donde $D_n(\gamma)$ está definida en (II,1,2) y usando de nuevo (II,1,1), se tiene,

$$R_\alpha(x) \cdot R_\beta(x) = I(\alpha,\beta,n) R_{\alpha+\beta-n}(x) \qquad (II,2\ \ )$$

para α, β, $\alpha+\beta-n \neq n+2h$, $h = 0,1,2,\ldots$

donde

$$I(\alpha,\beta,n) = \frac{D_n(\alpha+\beta-n)}{D_n(\alpha)\, D_n(\beta)}$$

De (II,2,5) se concluye el resultado (II,2,1).

La cantidad $I(\alpha,\beta,n)$ definida en (II,2,2), usando (II,1,2) puede escribirse como,

$$I(\alpha,\beta,n) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha+\beta-n}{2})\ \Gamma(\frac{n-\alpha}{2})\ \Gamma(\frac{n-\beta}{2})}{2^n\ \pi^{(n/2)}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\beta}{2})\Gamma(\frac{n-\alpha}{2}+\frac{n-\beta}{2})}, \qquad (II,2,6)$$

además,

$$I(\alpha,\beta,n) = e^{-(n\pm q)(\pi i)/2}\, C(\alpha,\beta,n,q) \qquad (II,2,7)$$

donde $C(\alpha,\beta,n,q)$ está definida en (I,2,6), capítulo I, pág. 8 .

En lo que sigue se obtendrán productos particulares del núcleo singular elíptico $R_\alpha(x)$ ((II,1,1)) a partir del resultado (II,2,1) para algunos valores de α y β , los cuales se formalizarán a través

de proposiciones.

En la obtención de estos productos, de acuerdo con la fórmula (II,2,7), usaremos el mismo criterio I.3. dado en la sección I.3., capítulo I, pág. 8, utilizado en la evaluación de los productos especiales de la familia de funciones distribucionales $H_\alpha(P\pm i0,n)$ definida en (I,1,5).

<u>Proposición 2</u>: Sean, m entero positivo, ℓ entero no negativo, n dimensión del espacio tal que $\frac{n}{2} > m$, entonces,

$$R_{n-2m}(x) \cdot R_{-2\ell}(x) = a(m,n,\ell)\ \Delta^{\ell+m}\ \{\delta(x)\} \qquad \text{(II,2,8)}$$

donde $R_\alpha(x)$ es el núcleo singular elíptico definido en (II,1,1), Δ^k es el operador de Laplace iterado k veces, definido en (II,1,7) y

$$a(m,n,\ell) = \frac{\Gamma(\ell+1)\ \Gamma(m)\ \Gamma(\frac{n}{2}+\ell)\ (-1)^{\ell+m}}{2^n\ \pi^{(n/2)}\ \Gamma(\frac{n}{2}-m)\ (-1)^m\ \Gamma(\ell+m+1)\ \Gamma(m+\frac{n}{2}+\ell)} \qquad \text{(II,2,9)}$$

Demostración:

De (II,2,1), se tiene,

$$R_{n-2m}(x) \cdot R_{-2\ell}(x) =$$

$$= \lim_{\alpha\to n-2m}\{\lim_{\beta\to -2\ell}\left[I(\alpha,\beta,n)\ R_{\alpha+\beta-n}(x)\right]\} =$$

$$= \lim_{\alpha\to n-2m}\{\lim_{\beta\to -2\ell}\left[I(\alpha,\beta,n)\right]\}\cdot \lim_{\alpha\to n-2m}\{\lim_{\beta\to -2\ell} R_{\alpha+\beta-n}(x)\} \qquad \text{(II,2,10)}$$

De acuerdo con (II,2,7) y usando la fórmula (I,3,13) dada en el capítulo I, pág. 12, se tiene,

$$\lim_{\alpha\to n-2m}\{\lim_{\beta\to -2\ell} I(\alpha,\beta,n)\} =$$

$$= e^{-(n\pm q)(\pi i)/2} \lim_{\alpha\to n-2m}\{\lim_{\beta\to -2\ell}\left[C(\alpha,\beta,n,q)\right]\} =$$

$$= a(m,n,\ell) \qquad \text{(II,2,1}$$

donde $a(m,n,\ell)$ está definida en (II,2,9).

Por otra parte, usando la propiedad (II,1,4), se tiene,

$$\lim_{\alpha\to n-2m} \left\{ \lim_{\beta\to -2\ell} \left[R_{\alpha+\beta-n}(x) \right] \right\} =$$

$$= (-1)^{\ell+m} \Delta^{\ell+m} \{\delta(x)\} \qquad \text{(II,2,12)}$$

luego, reemplazando (II,2,11) y (II,2,12) en (II,2,10), se obtiene el resultado (II,2,8).

Por procedimiento similar pero para $\alpha = -2\ell$ y $\beta = n-2m$, se obtiene también que,

$$R_{-2\ell}(x) \cdot R_{n-2m}(x) = a(m,n,\ell)\ \Delta^{m+\ell} \{\delta(x)\} \qquad \text{(II,2,13)}$$

donde $a(m,n,\ell)$ está dada por (II,2,9).

De (II,2,8) y (II,2,13) se concluye que estos dos productos especiales conmutan, es decir,

$$R_{n-2m}(x) \cdot R_{-2\ell}(x) = R_{-2\ell}(x) \cdot R_{n-2m}(x) \qquad \text{(II,2,14)}$$

Tal como se ha indicado en el capítulo I, pág. 12 , la hipótesis $\frac{n}{2} > m$ asegura que la función $\Gamma(\frac{n}{2} - m)$ está definida, modificando esta hipótesis y usando el mismo procedimiento con que se obtiene el producto (II,2,8) también se llega a los productos (II,2,8) y (II,2,14), con la diferencia de que ahora se distinguirán dos casos, es decir:

Sea $\frac{n}{2} \leq m$, entonces,

1) Si n es par, de (II,2,8) y (II,2,14), se tiene,

$$R_{n-2m}(x) \cdot R_{-2\ell}(x) = R_{-2\ell}(x) \cdot R_{n-2m}(x) = 0 \qquad \text{(II,2,15)}$$

puesto que $\lim_{\alpha\to n-2m} \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} = 0.$

2) Si n es impar, de acuerdo con (capítulo I, pág. 13), se tiene,

$$\lim_{\alpha \to n-2m} \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} (-1)^m \Gamma(m-\frac{n}{2}+1)}{\pi} \qquad \text{(II,2,16)}$$

luego en este caso se tiene,

$$R_{n-2m}(x) \cdot R_{-2\ell}(x) = R_{-2\ell}(x) \cdot R_{n-2m}(x) =$$

$$= b(m,\ell,n) \quad \Delta^{m+\ell} \{\delta(x)\} \qquad \text{(II,2,17)}$$

donde $b(m,\ell,n) =$

$$= \frac{(-1)^{(n-1)/2} \Gamma(\ell+1)\Gamma(m)\Gamma(\frac{n}{2}+\ell)\Gamma(m-\frac{n}{2}+1)(-1)^{\ell+m}}{2^n \pi^{(n/2)} \pi \Gamma(\ell+m+1) \Gamma(m+\frac{n}{2}+\ell)} \qquad \text{(II,2,18)}$$

Si se hace $m = \frac{n}{2} + k$, k entero no negativo en (II,2,15), se obtiene,

$$R_{-2k}(x) \cdot R_{-2\ell}(x) = R_{-2\ell}(x) \cdot R_{-2k}(x) = 0 \qquad \text{(II,2,19)}$$

Usando la propiedad (II,1,4), el producto (II,2,19), también puede escribirse como,

$$\Delta^k \{\delta(x)\} \cdot \Delta^\ell \{\delta(x)\} = 0 \qquad \text{(II,2,20)}$$

donde Δ^m es el operador de Laplace iterado m veces, definido en (II,1,6).

Por otra parte, de la proposición 2, fórmula (II,2,8), utilizando (II,1,1), (II,1,2) y (II,1,4) para $m < \frac{n}{2}$, se tiene,

$$(|x|^2)^{-m} \cdot \Delta^\ell \{\delta(x)\} =$$

$$= \frac{4^{-m} \Gamma(\ell+1) \Gamma(\frac{n}{2}+\ell)}{\Gamma(\ell+m+1) \Gamma(m+\frac{n}{2}+\ell)} \Delta^{\ell+m} \{\delta(x)\} \qquad \text{(II,2,21)}$$

donde $(|x|^2)^{-m}$ significa parte finita (c.f. [33], pág.19, fórmula (I,2,12))

Proposición 3: Sean m y ℓ enteros no negativos tales que $\ell \geq m$, entonces,

$$\cancel{(|x|^2)^m}\ \Delta^{\ell}\{\delta(x)\} = d(n,\ell,m)\,\Delta^{\ell-m}\{\delta(x)\} \qquad \text{(II,2,22)}$$

donde $|x|^2$ está definida en (I,1,2), Δ^k es el operador de Laplace iterado k veces, definido en (II,1,6) y

$$d(n,\ell,m) = \frac{4^m \quad \ell! \quad \Gamma(\frac{n}{2} + \ell)}{(\ell - m)!\ \Gamma(\frac{n}{2} + \ell - m)} \qquad \text{(II,2,23)}$$

Demostracion:

El núcleo singular elíptico $R_\alpha(x)$, definido en (II,1,1), tiene polos simples en los puntos $\alpha = n + 2m$, $m = 0,1,2,\ldots$, luego, simplificando $D_n(\alpha)$ ((II,1,2)) en ambos términos del producto (II,2,1), se tiene,

$$(|x|^2)^{\frac{\alpha-n}{2}} \cdot R_\beta(x) = \frac{D_n(\alpha+\beta-n)}{D_n(\beta)} R_{\alpha+\beta-n}(x) \qquad \text{(II,2,24)}$$

Como la distribución paramétrica $(|x|^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}$ (c.f. [12] , páginas 71-74) es analítica en $\alpha = n + 2m$, entonces para estos valores de α, se tiene,

$$(|x|^2)^m \cdot R_\beta(x) = \frac{D_n(\beta + 2m)}{D_n(\beta)} R_{\beta+2m}(x) \qquad \text{(II,2,25)}$$

Por otra parte,

$$D_n(\alpha) = e^{-(\alpha\pi i)/2}\, e^{\mp(q\pi i)/2}\, K_n(\alpha,q) \qquad \text{(II,2,26)}$$

donde $K_n(\alpha,q)$ está definida en (I,1,6), capítulo I y $D_n(\alpha)$ en (II,1,2).

Usando (II,2,26), tenemos,

$$\lim_{\beta \to -2\ell} \frac{D_n(\beta + 2m)}{D_n(\beta)} = \lim_{\beta \to -2\ell} (-1)^m \left[\frac{K_n(\beta+2m,q)}{K_n(\beta,q)}\right] \qquad \text{(II,2,27)}$$

Usando la fórmula (I,3,44) dada en el capítulo I, pág. 18 , se tiene,

$$\lim_{\beta\to -2\ell} \frac{D_n(\beta+2m)}{D_n(\beta)} = \frac{(-1)^m\, 4^m\, \ell!\, \Gamma(\frac{n}{2}+\ell)}{(\ell-m)!\, \Gamma(\frac{n}{2}+\ell-m)} . \qquad \text{(II,2,28)}$$

Según propiedad (II,1,4), tenemos,

$$\lim_{\beta\to -2\ell} R_{\beta+2m}(x) = R_{-2(\ell-m)}(x) =$$

$$= (-1)^{\ell-m}\, \Delta^{\ell-m}\{\delta(x)\} \qquad \text{(II,2,29)}$$

donde Δ^k está definido en (II,1,6), por tanto, usando (II,2,28), (II,2,29) y la propiedad (II,1,4), se tiene,

$$(|x|^2)^m \,.\, \Delta^{\ell}\{\delta(x)\} = (|x|^2)^m .\, R_{-2\ell}(x) =$$

$$= (|x|^2)^m \,.\, \lim_{\beta\to -2\ell} R_\beta(x) = \lim_{\beta\to -2\ell} (|x|^2)^m . R_\beta(x) =$$

$$= \lim_{\beta\to -2\ell} \frac{D_n(\beta+2m)}{D_n(\beta)} R_{\beta+2m}(x) =$$

$$\lim_{\beta\to -2\ell} \frac{D_n(\beta+2m)}{D_n(\beta)} \lim_{\beta\to -2\ell} R_{\beta+2m}(x) =$$

$$= \frac{\ell!\; 4^m\, \Gamma(\frac{n}{2}+\ell)}{(\ell-m)!\, \Gamma(\frac{n}{2}+\ell-m)} \Delta^{\ell-m}\{\delta(x)\} \quad \text{que}$$

coincide con (II,2,22).

El producto (II,2,22) coincide con una de los productos dados por K.Keller en [20] , pág.68, apéndice B, grupo B.7.

CAPITULO III

PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DEL NUCLEO SINGULAR HIPERBOLICO DE MARCEL RIESZ

RESUMEN:

Este capítulo trata productos multiplicativos vinculados con el núcleo singular hiperbólico $R_\alpha(S)$ (III,1,1)) de Marcel Riesz.

En primer lugar se obtiene el producto multiplicativo $R_\alpha(S) \cdot R_\beta(S)$ (proposición 1, fórmula (III,2,1)) el cual es heterodoxo, de acuerdo con el criterio establecido en el prefacio de este trabajo.

Variando los parámetros α y β a partir del resultado $R_\alpha(S) \cdot R_\beta(S)$, se obtienen los siguientes productos multiplicativos:

$R_{-2\ell}(S) \cdot R_{2m+n}(S)$ (proposición 2, fórmula (III,2,7)),

$(S^2)^m \cdot \Box^\ell\{\delta(x)\}$ (fórmula (III,2,17)),

$R_{-2\ell}(S) \cdot R_{2k}(S)$ (fórmula (III,2,18)),

$R_{-2\ell}(S) \cdot R_{n-2m}(S)$ (fórmula (III,2,20)),

$R_{-2k}(S) \cdot R_{-2\ell}(S)$ (fórmula (III,2,31)),

los que dan fórmulas relacionadas con el operador generalizado de las ondas iterado k veces ((III,1,8)).

III.- PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DEL NUCLEO SINGULAR HIPERBOLICO DE MARCEL RIESZ

III.1. INTRODUCCION

El núcleo singular hiperbólico definido por,

$$R_\alpha(S) = \begin{cases} \dfrac{(S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}}{C_n(\alpha)} & \text{si } t \in \Gamma^+ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \text{(III,1,1)}$$

donde S es la forma métrica de Lorentz ((A,3,2)), Γ^+ es el semicono positivo: $\Gamma^+ = \{ (t_o,\vec{t}) \in R^n : S^2 \geq t_o , t_o > 0\}$, α número complejo y

$$C_n(\alpha) = 2^{\alpha-1} \pi^{\frac{n-2}{2}} \Gamma(\tfrac{\alpha}{2}) \Gamma(\tfrac{\alpha-n}{2} + 1) , \qquad \text{(III,1,2)}$$

fue introducido por Marcel Riesz (C.f. [25], pág. 31).

La función $C_n(\alpha)$ (c.f. [1], vol. 1, pág. 2, fórmulas (7) y (8)) tiene dos grupos de singularidades,

$$\alpha = -2k , \quad k = 0,1,2,... \qquad \text{(III,1,3)}$$

$$\alpha = n - 2k , \quad k = 1,2,... \qquad \text{(III,1,4)}$$

en estos mismos puntos ocurren las singularidades de $\{(S^2)^{(\alpha-n)/2)}\}$ (apéndice A.3, fórmulas (A,3,13) y (A,3,14)), por consiguiente, $R_\alpha(S)$ es una distribución paramétrica entera de α.

$R_\alpha(S)$, verifica las siguientes propiedades:

$$R_o(S) = \delta(x) \qquad \text{(III,1,5)}$$

$$R_{-2k}(S) = \Box^k \{\delta(x)\} \qquad \text{(III,1,6)}$$

$$\Box^k \{ R_\alpha(S) \} = R_{\alpha-2k}(S) \qquad \text{(III,1,7)}$$

donde $\Box^k$ es el operador de las ondas generalizado iterado k veces,

$$\Box^k = \{ \frac{\partial^2}{\partial t_o^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial t_{n-1}^2} \}^k \qquad \text{(III,1,8)}$$

Usaremos el mismo símbolo $\Box^k$ para designar el operador definido en (I,3,39) y en (III,1,6) aunque difieran en $(-1)^k$.

La fórmula (III,1,7) fue dada por Marcel Riesz en [25] y la (III,1,6) por L.Schwartz (c.f. [26] , pág. 50, fórmula (II,3,32)).

Si se Hace $\alpha = 2k$ en (III,1,7) y usando (III,1,5), se obtiene,

$$\Box^k \{ R_{2k}(S) \} = \delta(x) \qquad \text{(III,1,9)}$$

propiedad esencial de $R_\alpha(S)$, porque indica que este núcleo singular hiperbólico, para $\alpha = 2k$, es solución elemental del operador de las ondas generalizado iterado k veces definido en (III,1,8).

Las propiedades (III,1,5), (III,1,6) y (III,1,7) son demostradas en [15] , páginas 11 y 12, aplicando la transformada de Laplace de funciones retardadas invariantes Lorentz, a las que también se puede arribar por métodos directos en el sentido expresado en el capítulo I, pág. 4

Para obtener la propiedad (III,1,6), esencial en este capítulo, se utilizará el mismo método con que se demostró la propiedad (I,1,8), en la sección I.3. del capítulo I.

De (III,1,1), usando (III,1,2), se tiene,

$$R_{-2k}(S) = \lim_{\alpha \to -2k} R_\alpha(S) = \lim_{\alpha \to -2k} \frac{(S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}}{C_n(\alpha)} =$$

$$= \lim_{\alpha \to -2k} \frac{1}{2^{\alpha-1} \pi^{(n-2)/2} \Gamma(\frac{\alpha-n}{2} + 1)}$$

$$\lim_{\alpha \to -2k} \frac{(S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}$$

De acuerdo con (A,3,14), $(S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}$ tiene polos simples en los puntos $\alpha = -2k$, $k = 0,1,2,\ldots$, y según fórmula (A,2,3), $\Gamma(\frac{\alpha}{2})$ también tiene polos simples en los mismos puntos, por tanto,

$$\lim_{\alpha \to -2k} \frac{(S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} = \frac{\operatorname*{Res}_{\alpha=-2k} (S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}}{\operatorname*{Res}_{\alpha=-2k} \Gamma(\frac{\alpha}{2})}$$

Usando la fórmula (A,3,12) y siguiendo [12], páginas 253-260, se tiene, para el caso en que la dimensión (n) sea impar,

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-2k} (S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}} = a'(n,\pi,k) \Box^k \{\delta(x)\}$$

donde

$$a'(n,\pi,k) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k} k! \Gamma(\frac{n}{2}+k)}$$

y $\Box^k$ es definido en (III,1,8).

Para el caso en que la dimensión (n) sea par, se obtienen fórmulas que no interesan directamente a este trabajo, (c.f. [12], pág. 256,268).

Por otra parte, si la dimensión (n) es impar la función $\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1)$ es analítica cuando $\alpha=-2k$, $k = 0,1,2,\ldots$, luego, usando la fórmula (A,2,11 y la condición de que la dimensión es impar, se tiene,

$$= \frac{\pi}{\Gamma(\frac{n}{2} + k)\ (-1)^k\ (-1)^{(n-1)/2}} \qquad \text{(III,1,14)}$$

en consecuencia,

$$\lim_{\alpha \to -2k} \frac{1}{2^{\alpha-1}\ \pi^{(n-2)/2}\ \Gamma(\frac{\alpha-n}{2} + 1)} =$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + k)\ (-1)^k\ (-1)^{(n-1)/2}}{2^{-2k-1}\ \pi^{(n/2)}} \qquad \text{(III,1,15)}$$

Reemplazando (III,1,12) y (III,1,15) en (III,1,11) y usando (III,1,13), se tiene,

$$R_{-2k}(S) = \Box^k \{\delta(x)\}$$, que coincide

con la propiedad (III,1,6).

III.2. PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DEL NUCLEO SINGULAR HIPERBOLICO DE MARCEL RIESZ

Nuestro objeto es obtener en primer lugar el producto multiplicativo $R_\alpha(S) \cdot R_\beta(S)$, para α, β, tales que $\alpha + \beta - n \neq -2k$, $k = 0,1,2,\ldots$, y $\alpha + \beta - n \neq n-2\ell$, $\ell = 1,2,\ldots$, donde α, β, son números complejos, n dimensión del espacio y $R_\alpha(S)$ el núcleo singular hiperbólico de Marcel Riesz, definido en (III,1,1). Luego, para valores particulares de α y β se deducirán productos multiplicativos que están relacionados con el operador de las ondas generalizado iterado k veces.

Todos los productos que se obtienen en este capítulo son heterodoxos, de acuerdo con lo establecido en el prefacio de esta tesis.

<u>Proposición 1</u>: Sea $R_\alpha(S)$ ((III,1,1)), entonces para $\alpha+\beta-n \neq 2k$, $k = 0,1,2,\ldots$ y $\alpha+\beta-n \neq n-2\ell$, $\ell = 1,2,\ldots$, vale la siguiente fórmula,

$$R_\alpha(S) \cdot R_\beta(S) = N(\alpha,\beta,n)\, R_{\alpha+\beta-n}(S) \qquad \text{(III,2,1)}$$

donde

$$N(\alpha,\beta,n) = \frac{C_n(\alpha+\beta-n)}{C_n(\alpha)\, C_n(\beta)} \qquad \text{(III,2,2)}$$

y $C_n(\gamma)$ está definida en (III,1,2).

Demostración:

Es claro que para Real$(\alpha) > n$, Real$(\beta) > n$, se tiene,

$$(S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}} \quad (S^2)^{\frac{\beta-n}{2}} = (S^2)^{\frac{\alpha+\beta-n-n}{2}} \qquad \text{(III,2,3)}$$

donde (S^2) es definida en (A,3,2), luego, por prolongación analítica en el sentido ([12], pág. 253-255) se extiende la fórmula (III,2,3) para los valores,

$$\frac{\alpha-n}{2} \quad \frac{\beta-n}{2} \quad \frac{\alpha+\beta-n-n}{2} \neq -\frac{n}{2} - k \ , \ k = 0,1,2,\ldots$$

y

$$\frac{\alpha-n}{2} \quad \frac{\beta-n}{2} \quad \frac{\alpha+\beta-n-n}{2} \neq -\ell \ , \ \ell = 1,2,3,\ldots$$

De (III,1,1), aplicando (III,2,3) para $\alpha+\beta-n \neq -2k$, $k = 0,1,2,\ldots$ y $\alpha+\beta-n \neq n-2\ell$, $\ell = 1,2,\ldots$, se tiene,

$$R_\alpha(S) \cdot R_\beta(S) = \frac{(S^2)^{\frac{\alpha+\beta-n-n}{2}}}{C_n(\alpha)\, C_n(\beta)} \qquad \text{(III,2,4)}$$

multiplicando y dividiendo el término de la derecha de (III,2,4) por $C_n(\alpha+\beta-n)$ donde $C_n(\gamma)$ está

definida en (III,1,2) y usando de nuevo (III,1,1), se tiene,

$$R_\alpha(S) \cdot R_\beta(S) = \frac{C_n(\alpha+\beta-n)}{C_n(\alpha)C_n(\beta)} \cdot R_{\alpha+\beta-n}(S) \qquad \text{(III,2,5)}$$

para $\alpha + \beta - n \neq -2k$, $k = 0,1,2,\ldots$, y $\alpha+\beta-n \neq n-2\ell$, $\ell = 1,2,\ldots$, que coincide con (III,2,1).

Por otra parte, de (III,2,2) y usando (III,1,2), tenemos,

$$N(\alpha,\beta,n) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha+\beta-n}{2}) \quad \Gamma(\frac{\alpha+\beta-n-n}{2}+1)}{2^{n-1}\pi^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma(\frac{\alpha}{2})\,\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1)\,\Gamma(\frac{\beta}{2})\,\Gamma(\frac{\beta-n}{2}+1)} \qquad \text{(III,2,6)}$$

Las hipótesis impuestas al producto (III,2,1) son esenciales y están vinculadas con la cantidad (III,2,6), por ejemplo, haciendo $n = 4$, $k = 1$, $\alpha = 3$ y $\beta = 3$ en (III,2,6), tenemos,

$$N(3,3,4) = \left[\frac{\Gamma(1)}{2^3\,\pi\Gamma(\frac{3}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}\right]\Gamma(0)$$

la cual, de acuerdo con el apéndice A.2., diverge.

En lo que sigue, seleccionando algunos valores de α y β, y de acuerdo con el criterio establecido en pág. 8, buscamos fórmulas de la función gamma que permitan escribir $N(\alpha,\beta,n)$ como función analítica de α y β en dichos puntos.

<u>Proposición 2</u>: Sean m y ℓ enteros no negativos, tales que $\ell \geq m$, entonces,

$$R_{-2\ell}(S) \cdot R_{2m+n}(S) = N(m,\ell,n)\Box^{\ell-m}\{\delta(x)\} \qquad \text{(III,2,7)}$$

donde $R_\gamma(S)$ es el núcleo singular hiperbólico

de Marcel Riesz, definido en (III,1,1), $\square^k$ es el operador de las ondas generalizado iterado k veces, definido en (III,1,8) y

$$N(m,\ell,n) = \frac{\Gamma(\ell+\frac{n}{2})\ \Gamma(\ell+1)}{2^{n-1}\ \pi^{\frac{n-2}{2}}\ \Gamma(\ell-m+\frac{n}{2})\,\Gamma(m+\frac{n}{2})\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(\ell-m+1)} \qquad \text{(III,2,8)}$$

Demostración:

De (III,2,1), se tiene,

$$R_{-2\ell}(S) \cdot R_{2m+n}(S) = \lim_{\alpha\to -2\ell} R_\alpha(S) \cdot \lim_{\beta\to 2m+n} R_\beta(S) =$$

$$= \lim_{\alpha\to -2\ell} \{ \lim_{\beta\to 2m+n} \left[R_\alpha(S) \cdot R_\beta(S) \right] \} =$$

$$= \lim_{\alpha\to -2\ell} \{ \lim_{\beta\to 2m+n} \left[N(\alpha,\beta,n)\ R_{\alpha+\beta-n}(S) \right] \} \qquad \text{(III,2,9)}$$

De acuerdo con el criterio I.3., dado en el capítulo I, pág. 8 , y usando las fórmulas - (A,2,7) y (A,2,9), se tiene,

$$\lim_{\alpha\to -2\ell} \{ \lim_{\beta\to 2m+n} \frac{\Gamma(\frac{\alpha+\beta-n}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \} =$$

$$= \lim_{\alpha\to -2\ell} \{ \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + m)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \} =$$

$$= \lim_{\alpha\to -2\ell} \{ (\frac{\alpha}{2})\ (\frac{\alpha}{2} + 1)\ \ldots\ (\frac{\alpha}{2} + m - 1) \} =$$

$$= \frac{(-1)^m\ \Gamma(\ell+1)}{\Gamma(\ell+m-1)} \qquad \text{(III,2,10)}$$

Similarmente, usando (A,2,7) y (A,2,8), tenemos,

$$\lim_{\alpha\to -2\ell} \left\{ \lim_{\beta\to 2m+n} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta-n-n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2} + 1\right)} \right] \right\} =$$

$$= \lim_{\alpha\to -2\ell} \left[\left(\frac{\alpha-n}{2} +1\right) \dots \left(\frac{\alpha-n}{2} + m\right) \right] =$$

$$= \frac{(-1)^m \; \Gamma(\ell+ m)}{\Gamma\left(\ell+ \frac{n}{2} - m\right)} \qquad \text{(III,2,11)}$$

Luego, de (III,2,9), usando (III,2,6), (III,2,10) y (III,2,11), se tiene,

$$R_{-2\ell}(S) \cdot R_{2m+n}(S) =$$

$$= \frac{\Gamma(\ell+ 1) \quad \Gamma\left(\ell+ \frac{n}{2}\right)}{2^{n-1} \; \pi^{\frac{n-2}{2}} \; \Gamma\left(\frac{n}{2} +m\right) \; \Gamma(\ell-m+1) \, \Gamma\left(\ell+\frac{n}{2} -m\right) \; \Gamma(m+1)} R_{2m-2\ell}(S)$$

(III,2,12)

Por hipótesis $\ell \geq m$, entonces, $\ell - m$ es un entero no negativo, luego aplicando la propiedad (III,1,6), tenemos,

$$R_{2m-2\ell}(S) = R_{-2(\ell-m)}(S) = \Box^{\ell-m} \{\delta(x)\} \qquad \text{(III,2,13)}$$

Finalmente, reemplazando (III,2,13) en (III,2,12), se obtiene (III,2,7).

Por procedimiento similar pero para $\alpha = 2m+n$, y $\beta = -2\ell$, se obtiene,

$$R_{2m+n}(S) \cdot R_{-2\ell}(S) = N(m,\ell,n) \; \Box^{\ell-m} \{\delta(x)\} \qquad \text{(III,2,14)}$$

donde $N(m,\ell,n)$ está dado por (III,2,8), luego, de (III,2,7) y (III,2,14), se concluye que el produc-

to $R_{-2\ell}(S) \cdot R_{2m+n}(S)$ es conmutativo, es decir,

$$R_{-2\ell}(S) \cdot R_{2m+n}(S) = R_{2m+n}(S) \cdot R_{-2\ell}(S) \qquad \text{(III,2,15)}$$

Por otra parte, de (III,1,1), usando (III,1,2), tenemos,

$$R_{2m+n}(S) = \frac{(S^2)^m}{\pi^{\frac{n-2}{2}} \, 2^{2m+n-1} \, \Gamma(m+\frac{n}{2}) \, \Gamma(m+1)} \qquad \text{(III,2,16)}$$

Reemplazando (III,2,16) en (III,2,7), usando la propiedad (III,1,6) y efectuando simplificaciones, se obtiene,

$$(S^2)^m \cdot \Box^{\ell} \{\delta(x)\} =$$

$$= \frac{4^m \quad \ell! \quad \Gamma(\ell+\frac{n}{2})}{(\ell-m)! \quad \Gamma(\ell-m+\frac{n}{2})} \Box^{\ell-m} \{\delta(x)\} \qquad \text{(III,2,17)}$$

el cual, de acuerdo con (III,2,15) es conmutativo.

Haciendo $m = k - \frac{n}{2}$ en (III,2,15), para n dimensión par del espacio y usando (III,2,7), se tiene,

$$R_{-2\ell}(S) \cdot R_{2k}(S) = R_{2k}(S) \cdot R_{-2\ell}(S) =$$

$$= N(k,\ell,n) \Box^{\ell-k+\frac{n}{2}} \{\delta(x)\} \qquad \text{(III ,18)}$$

con $k \geq \frac{n}{2}$, $\ell \geq k - \frac{n}{2}$ y

$$N(k,\ell,n) =$$

$$= \frac{\Gamma(\ell+1) \quad \Gamma(\ell+\frac{n}{2})}{2^{n-1} \, \pi^{\frac{n-2}{2}} \, \Gamma(\ell-k+\frac{n}{2}+1) \, \Gamma(\ell+n-k) \, \Gamma(k) \, \Gamma(k-\frac{n}{2}+1)} \qquad \text{(III,2,19)}$$

Proposición 3: Sean m entero positivo, ℓ entero no negativo, n dimensión del espacio, vale entonces la siguiente fórmula:

$$R_{-2\ell}(S) \cdot R_{n-2m}(S) = R_{n-2m}(S) \cdot R_{-2\ell}(S) = 0 \qquad \text{(III,2,20)}$$

donde $R_\gamma(S)$ está definido en (III,1,1)

Demostración:

Aplicando el mismo procedimiento con el que se obtiene la expresión (III,2,9), de (III,2,1), tenemos,

$$R_{-2\ell}(S) \cdot R_{n-2m}(S) =$$

$$= \lim_{\alpha \to -2\ell} \left\{ \lim_{\beta \to n-2m} \left[N(\alpha,\beta,n)\, R_{\alpha+\beta-n}(S) \right] \right\} \qquad \text{(III, ,21)}$$

De acuerdo con (III,2,6),

$$\lim_{\alpha \to -2\ell} \left\{ \lim_{\beta \to n-2m} \left[N(\alpha,\beta,n) \right] \right\} =$$

$$= \lim_{\alpha \to -2\ell} \left\{ \lim_{\beta \to n-2m} \left[V(\alpha,\beta,n) \frac{1}{\Gamma(\frac{\beta}{2})\Gamma(\frac{\beta-n}{2}+1)} \right] \right\} \qquad \text{(III,2,22)}$$

donde

$$V(\alpha,\beta,n) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha+\beta-n}{2})\ \Gamma(\frac{\alpha+\beta-n-n}{2}+1)}{2^{n-1}\ \pi^{\frac{n-2}{2}}\ \Gamma(\frac{\alpha}{2})\ \Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1)} \qquad \text{(III,2,23)}$$

Por procedimiento similar con el que se obtiene la fórmula (III,2,10), usando la fórmula (A,2,8), se tiene,

$$\lim_{\alpha \to -2\ell} \left\{ \lim_{\beta \to n-2m} \left[V(\alpha,\beta,n) \right] \right\} =$$

$$\lim_{\alpha \to -2\ell} \left\{ \frac{1}{2^{n-1}\ \pi^{\frac{n-2}{2}}} \left[\frac{\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1-m)}{\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1)} \right] \left[\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2}-m)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}\,\pi^{\frac{n-2}{2}}} \lim_{\alpha \to -2\ell} \left\{ \left[\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{(-1)^m\,\Gamma(\frac{n-\alpha}{2}+m)} \right] \cdot \left[\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{(-1)^m\,\Gamma(\frac{-\alpha}{2}+m+1)} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}\,\pi^{\frac{n-2}{2}}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+\ell)}{\Gamma(\ell+\frac{n}{2}+m)} \cdot \frac{\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(\ell+n+1)} \qquad \text{(III,2,24)}$$

Por tanto $V(\alpha,\beta,n)$ es una función analítica en $\alpha = -2\ell$ y $\beta = n-2m$.

Por otra parte,

$$\lim_{\beta \to n-2m} \frac{1}{\Gamma(\frac{\beta-n}{2}+1)} = 0 \qquad \text{(III,2,25)}$$

y

$$\lim_{\beta \to n-2m} \frac{1}{\Gamma(\frac{\beta}{2})} = 0 \text{ si } n \text{ es par y} \qquad \text{(III,2,26)}$$

$\frac{n}{2} \leq k$ y distinto de cero en otro caso.

En consecuencia, de (III,2,22), usando (III,2,24), (III,2,25) y (III,2,26), se deduce que,

$$\lim_{\alpha \to -2\ell} \left\{ \lim_{\beta \to n-2m} \left[N(\alpha,\beta,n) \right] \right\} = 0 \qquad \text{(III,2,27)}$$

Por propiedad (III,1,6),

$$\lim_{\alpha \to -2\ell} \left\{ \lim_{\beta \to n-2m} \left[R_{\alpha+\beta-n}(S) \right] \right\} =$$

$$= R_{-2(\ell+m)}(S) = \Box^{\ell+m} \{\delta(x)\} \qquad \text{(III,2,28)}$$

De (III,2,27) y (III,2,28), se concluye,

$$R_{-2\ell}(S) \cdot R_{n-2m}(S) = 0 \qquad \text{(III,2,29)}$$

Similarmente, para $\alpha = n-2m$, y $\beta = -2\ell$, se obtiene,

$$R_{n-2m}(S) \quad R_{-2\ell}(S) = 0 \qquad \text{(III,2,30)}$$

De (III,2,29) y (III,2,30), se concluye el resultado (III,2,20).

Si se hace $m = \frac{n}{2} + k$ en (III,2,20), con n dimensión par del espacio y k entero no negativo, se tiene,

$$R_{-2k}(S) \quad R_{-2\ell}(S) = R_{-2\ell}(S) \cdot R_{-2k}(S) = 0 \qquad \text{(III,2,31)}$$

Usando la propiedad (III,1,6), de (III,2,31), tenemos,

$$\Box^{k}\{\delta(x)\} \cdot \Box^{\ell}\{\delta(x)\} = \Box^{\ell}\{\delta(x)\} \cdot \Box^{k}\{\delta(x)\} = 0 \qquad \text{(III,2,32)}$$

CAPITULO IV

PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DE LA FAMILIA DE FUNCIONES DISTRIBUCIONALES $\omega(t,\alpha,m,n)$

RESUMEN:

Se tratan productos multiplicativos relacionados con la familia de funciones distribucionales $\omega(t,\alpha,m,n)$ introducida por Marcel Riesz (c.f. [25] , pág. 89, fórmula 22).

En la sección IV.2., se obtienen los productos $\omega_\alpha \cdot \omega_\beta$ (fórmula (IV,2,1)) y $\omega_{-2k} \cdot \omega_{-2\ell}$ (fórmula (IV,2,7) que generalizan los resultados (III,2,1) y (III,2,31) del capítulo III de esta tesis.

IV.- PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DE LA FAMILIA DE FUNCIONES DISTRIBUCIONALES $\omega(t,\alpha,m,n)$

IV.1. INTRUDUCCION

La familia de funciones distribucionales $\omega(t,\alpha,m,n)$ definida por la fórmula

$$\omega(t,\alpha,m,n) = \begin{cases} A_\alpha(m,n)\ S^{\frac{\alpha-n}{2}}\ J_{\frac{\alpha-n}{2}}\{\sqrt{m^2S^2}\} \text{ si } t \in \Gamma^+ \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \qquad (IV,1,1)$$

donde Γ^+ es definida en (A,3,4) y

$$A_\alpha(m,n) = \frac{m^{\frac{n-\alpha}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\ \Gamma(\frac{\alpha}{2})\ 2^{\frac{n+\alpha-2}{2}}}$$

fue introducida por Marcel Riesz ([25], pág.89, fórmula 21).

En (IV,1,1), S^2 es el cuadrado de la distancia lorentziana, definido en (A,3,2), α es un número complejo, m es un número real no negativo, n dimensión del espacio y $J_\nu(x)$ es la función de Bessel de orden ν definida por

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\ (x/2)^{2k+\nu}}{k!\ \Gamma(k+\nu+1)} \qquad (IV,1,2)$$

La función $J_\nu(x)$, de acuerdo con [1], vol.II, pág.4, fórmula 3, puede expresarse,

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\ {}_0F_1(\nu+1;\ \frac{-x^2}{4}) \qquad (IV,1,3)$$

donde ${}_0F_1(\nu+1;\ \frac{-x^2}{4})$ es la función hipergeométrica generalizada.

De acuerdo con [1], vol. I, pág.203, fórmula 2, ${}_0F_1(\nu+1; -\frac{x^2}{4})$, también puede escribirse como,

$$ {}_0F_1(\nu+1;-\frac{x^2}{4}) = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(-x^2/4)^k}{k!\,(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)} \qquad (IV,1,4) $$

Llamando $\omega_\alpha = \omega(t,\alpha,m,n)$, haciendo $\nu = \frac{\alpha-n}{2}$ en (IV,1,3) y reemplazando en (IV,1,1), se tiene,

$$ \omega_\alpha = \omega(t,\alpha,m,n) = R_\alpha(S)\ {}_0F_1(\frac{\alpha-n}{2}+1; -\frac{m^2S^2}{4}) \qquad (IV,1,5) $$

donde $R_\alpha(S)$ es el núcleo singular hiperbólico de Marcel Riesz, definido en (III,1,1) y

$$ {}_0F_1(\frac{\alpha-n}{2}+1; -\frac{m^2S^2}{4}) = $$

$$ = 1 + \sum_{p\geq 1} \frac{(-m^2S^2/4)^p}{p!\,(\frac{\alpha-n}{2}+1)\dots(\frac{\alpha-n}{2}+p)} \qquad (IV,1,6) $$

Haciendo m = 0 en (IV,1,5) y usando (IV,1,6), se tiene,

$$ \omega(t,\alpha,0,n) = R_\alpha(S) \qquad (IV,1,7) $$

La familia de funciones distribucionales $\omega(t,\alpha,m,n)$, verifica las siguientes propiedades:

$$ \omega_0 = \omega(t,0,m,n) = \delta(x) \qquad (IV,1,8) $$

$$ (\Box + m^2)^k\ \omega(t,\alpha,m,n) = \omega(t,\alpha-2k,m,n) \qquad (IV,1,9) $$

$$ (\Box + m^2)^k\ \{\delta(x)\} = \omega(t,-2k,m,n) \qquad (IV,1,10) $$

donde $$ (\Box + m)^k = \{\frac{\partial^2}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial t_{n-1}^2} + m^2\}^k \qquad (IV,1,11) $$

Si se hace $\alpha = 2k$ en (IV,1,9), usando (IV,1,8), se tiene,

$$ (\Box + m^2)^k\ \{\omega(t,2k,m,n)\} = \delta(x) \qquad (IV,1,12) $$

La propiedad (IV,1,12) significa que la familia de funciones distribucionales $\omega(t,\alpha,m,n)$ para $\alpha = 2k$, es solución elemental del operador de Klein-Gordon generalizado iterado k veces, definido en (IV,1,11).

Las propiedades (IV,1,8), (IV,1,9) y (IV,1,10) son demostradas por A.González Domínguez y S.E. Trione en [15], pág. 10 y 11, usando la transformada de Laplace de funciones retardadas invariantes-Lorentz y pueden ser demostradas por métodos directos en el sentido indicado en el capítulo I, pág. 4.

Usando este último método demostraremos la propiedad (IV,1,9). En efecto, según [25], pág.90, fórmula 23 y usando (IV,1,1), se tiene,

$$\omega(t,\alpha,m,n) = \omega_\alpha = \sum_{p\geq 0}\binom{-\alpha/2}{p}(m^2)^p \frac{S^{\alpha-n+2p}}{C_n(\alpha+2p)} =$$

$$= \sum_{p\geq 0} \frac{(-m^2)^p\ \Gamma(\frac{\alpha}{2}+p)}{p!\ \Gamma(\frac{\alpha}{2})} R_{\alpha+2p}(S)$$

Por otra parte, desde que,

$$\frac{(\frac{\alpha-n}{2}+1)+\ldots+(\frac{\alpha-n}{2}+p)}{p!} \to 1$$

si $p \to \infty$, entonces la serie dada en (IV,1,4) converge a $e^{(-m^2S^2/4)}$. Como $R_\alpha(S)$ es una distribución paramétrica entera de α, entonces, de (IV,1,5) se sigue que ω_α define una familia de funciones distribucionales paramétricas enteras con respecto a α, por tanto, de (IV,1,13) se tiene,

$$\omega_{-2k} = \lim_{\alpha\to -2k} \omega_\alpha =$$

$$= \sum_{p\geq 0}\binom{k}{p} (m^2)^p R_{-2(k-p)}(S)$$

Usando la propiedad (III,1,6) dada en el capítulo III, tenemos,

$$\omega_{-2k} = \sum_{p\geq 0} \binom{k}{p} (m^2)^p \Box^{k-p} \{\delta(x)\} \qquad \text{(IV,1,15)}$$

Por otra parte, de [25] , pág. 90, simbólicamente se tiene,

$$(\Box + m^2)^{(-\alpha/2)} = \sum_{p\geq 0} \binom{-\frac{\alpha}{2}}{p} (m^2)^p \Box^{-\frac{\alpha}{2}-p} \qquad \text{(IV,1,16)}$$

donde $\Box$ es el operador de las ondas definido en (III,1,8) para el caso k = 1.

Si el operador definido en (IV,1,16) lo aplicamos a la medida de Dirac ($\delta(x)$) en los puntos $\alpha = -2k$, se tiene,

$$(\Box + m^2)^k \{\delta(x)\} =$$

$$= \sum_{p\geq 0} \binom{k}{p} (m^2)^p \Box^{k-p} \{\delta(x)\} \qquad \text{(IV,1,17)}$$

Luego, de (IV,1,15) y (IV,1,17), se concluye la propiedad (IV,1,9).

IV.2. PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DE LA FAMILIA DE FUNCIONES DISTRIBUCIONALES $\omega(t,\alpha,m,n)$

Nuestro objeto es obtener el producto multiplicativo $\omega_\alpha \cdot \omega_\beta$, cuando $\alpha+\beta-n \neq n - 2k$, $k = 1,2,\ldots$ y $\alpha+\beta-n \neq -2k$, $k = 0,1,2,\ldots$. Donde α, β son números complejos, n dimensión del espacio y ω_γ es la familia de funciones distribucionales definida en (IV,1,1).

El resultado $\omega_\alpha \cdot \omega_\beta$ se va a obtener usando la fórmula (IV,1,5) y el producto $J_\nu(x).J_\mu(x)$ dado en [36] , pág.147, fórmula 1, no se reproduce la familia de funciones distribucionales

ω_α , pero lo que se pretende es que cuando $m = 0$, de acuerdo con la propiedad (IV,1,7), se obtenga la fórmula (III,2,1) dada en el capítulo III.

<u>Proposición 1</u>: Sean α , β números complejos tales que $\alpha+\beta-n \neq n-2k$, $k=1,2,\ldots$ y $\alpha+\beta-n \neq -2\ell$, $\ell = 0,1,2,\ldots$, $\omega(t,\alpha,m,n)$ la familia de funciones distribucionales definida en (IV,1,1), vale entonces la siguiente fórmula,

$$\omega_\alpha \cdot \omega_\beta = N(\alpha,\beta,n)\ R_{\alpha+\beta-n}(S)\ U_{\alpha,\beta}(m,n,S^2) \qquad \text{(IV,2,1)}$$

donde $\omega_\alpha = \omega(t,\alpha,m,n)$, (IV,2,2)

$N(\alpha,\beta,n)$, está definida en (III,2,2) (capítulo III), $R_\alpha(S)$ es el núcleo singular hiperbólico de Marcel Riesz, definido en (III,1,1) (capítulo III) y $U_{\alpha,\beta}(m,n,S^2)$ es la función definida por:

$$U_{\alpha,\beta}(m,n,S^2) =$$

$$= \Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta-n}{2}+1\right) \sum_{\ell\geq 0} \frac{(-1)^\ell\ \Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}+\frac{\beta-n}{2}+2\ell+1\right)\ \left(\frac{m^2S^2}{4}\right)^\ell}{\ell!\ \Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}+\ell+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta-n}{2}+\ell+1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}+\frac{\beta-n}{2}+\ell+1\right)}$$

(IV,2,3)

Demostración:

De (IV,1,5), usando la fórmula (III,2,1), dada en el capítulo III, se tiene,

$$\omega_\alpha \cdot \omega_\beta = R_\alpha(S)\,{}_0F_1\left(\frac{\alpha-n}{2}+1;\frac{-m^2S^2}{4}\right) . R_\beta(S)\,{}_0F_1\left(\frac{\beta-n}{2}+1;-\frac{m^2S^2}{4}\right) =$$

$$= N(\alpha,\beta,n)\ R_{\alpha+\beta-n}(S)\,{}_0F_1\left(\frac{\alpha-n}{2}+1;-\frac{m^2S^2}{4}\right)\,{}_0F_1\left(\frac{\beta-n}{2}+1;\frac{m\,S}{4}\right)$$

(IV,2,4)

De (IV,1,3) y usando [36], pág.147, fórmula 1, se tiene,

$$ {}_0F_1\left(\frac{\alpha-n}{2}+1;-\frac{m^2S^2}{4}\right)\cdot {}_0F_1\left(\frac{\beta-n}{2}+1;-\frac{m^2S^2}{4}\right) = $$

$$ = \Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta-n}{2}+1\right)\sum_{\ell\geq 0}\frac{(-1)^{\ell}\Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}+\frac{\beta-n}{2}+2\ell+1\right)\left(\frac{m^2S^2}{4}\right)^{\ell}}{\ell!\,\Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}+\ell+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta-n}{2}+\ell+1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}+\frac{\beta-n}{2}+\ell+1\right)} = $$

$$ = U_{\alpha,\beta}(m,n,S^2) \qquad \text{(IV,2,5)} $$

De (IV,2,4) y (IV,2,5), se concluye el resultado (IV,2,1).

Haciendo m = 0 en (IV,2,1) y usando la propiedad (IV,1,7), se tiene,

$$ R_{\alpha}(S)\cdot R_{\beta}(S) = N(\alpha,\beta,n)\,R_{\alpha+\beta-n}(S) \qquad \text{(IV,2 6)} $$

puesto que de (IV,2,3), $U_{\alpha,\beta}(0,n,S^2) = 1$, por tanto $\omega_{\alpha}\cdot\omega_{\beta} = R_{\alpha}\cdot R_{\beta}$ cuando m = 0, en consecuencia, el resultado (IV,2,1) es una generalización de la fórmula (III,2,1) dada en el capítulo III.

<u>Proposición 2</u>: Sean k,ℓ enteros no negativos, n dimensión par del espacio, entonces,

$$ \omega_{-2k}\cdot\omega_{-2\ell} = 0 \qquad \text{(IV,2,7)} $$

donde $\omega_{\alpha} = \omega(t,\alpha,m,n)$, está definida en (IV,1,1).

Demostración:

De (IV,2,1), se tiene,

$$ \omega_{-2k}\cdot\omega_{-2\ell} = \lim_{\alpha\to -2k}\omega_{\alpha}\ \lim_{\beta\to -2\ell}\omega_{\beta} = $$

$$ = \lim_{\alpha\to -2k}\left\{\lim_{\beta\to -2\ell}\left[\omega_{\alpha}\cdot\omega_{\beta}\right]\right\} = $$

$$= \lim_{\alpha \to -2k} \left\{ \lim_{\beta \to -2\ell} \left[N(\alpha,\beta,n)\ R_{\alpha+\beta-n}(S)\ U_{\alpha,\beta}(m,n,S^2) \right] \right\} \qquad \text{(IV. 8)}$$

En (IV,2,8), se distinguen tres factores,

1) $\lim_{\alpha \to -2k} \lim_{\beta \to -2\ell} \left[N(\alpha,\beta,n) \right]$

2) $\lim_{\alpha \to -2k} \lim_{\beta \to -2\ell} \left[R_{\alpha+\beta-n}(S) \right]$

3) $\lim_{\alpha \to -2k} \lim_{\beta \to -2\ell} U_{\alpha,\beta}(m,n,S^2)$

Usando las propiedades (III,2,25), (III,2,26) y (III,2,27) del capítulo III, se deduce que,

$$\lim_{\alpha \to -2k} \lim_{\beta \to -2\ell} \left[N(\alpha,\beta,n) \right] = 0. \qquad \text{(IV,2,9)}$$

Por propiedad (III,1,6),

$$\lim_{\alpha \to -2k} \lim_{\beta \to -2\ell} R_{\alpha+\beta-n}(S) = \Box^{\frac{n}{2}+k+\ell} \{\delta(x)\} \qquad \text{(IV,2,10)}$$

donde $\Box^k$ es definido en (III,1,6)

En la propiedad (IV,2,10), se usa la hipótesis de que n sea par, para asegurar que $\frac{n}{2}+k+\ell$ sea un entero.

Por otra parte, de [36] , pág. 44,

$$J_\gamma(z) = \frac{(z/2)^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} (1+\Theta) \qquad \text{(IV,2,11)}$$

$$\text{donde } |\Theta| < \exp\left\{ \frac{(1/4)|z|^2}{|\gamma_0+1|} \right\} - 1 \qquad \text{(IV, 12)}$$

y $|\gamma_0+1|$ es el menor número $\{|\gamma+1|, |\gamma+2|, \ldots\}$.

De (IV,1,3) y (IV,2,11),

$$= 1 + \Theta \qquad \text{(IV,2,13)}$$

por tanto,

$$ {}_0F_1(\gamma+1; -\frac{z^2}{4}) = 1 + \Theta \qquad \text{(IV,2,14)}$$

$$\text{donde} \quad 1 + |\Theta| < \exp\left\{ \frac{|z|^2}{4(|\gamma_0 + 1|)} \right\} \qquad \text{(IV,2,15)}$$

De (IV,2,14) y (IV,2,15), se establece que el producto

$$ {}_0F_1(\gamma+1; -\frac{z^2}{4}) \cdot {}_0F_1(\mu+1; -\frac{z^2}{4}) \qquad \text{(IV,2,16)}$$

es una función acotada en un dominio cerrado y acotado. En efecto,

$$ {}_0F_1(\gamma+1; -\frac{z^2}{4}) = 1 + \Theta_1 \text{ ,donde } 1+|\Theta_1| < \exp\left\{\frac{|z|^2}{4|\gamma_0+1|}\right\} \qquad \text{(IV,2,17)}$$

$$ {}_0F_1(\mu+1; -\frac{z^2}{4}) = 1 + \Theta_2 \text{ ,donde } 1+|\Theta_2| < \exp\left\{\frac{|z|^2}{4|\mu_0+1|}\right\} \qquad \text{(IV,2,18)}$$

De la convergencia absoluta de la serie (IV,1,4), si $|z| < \Delta$, con $\Delta > 0$ y $|\gamma_0| \leq N_1$, para algún $N_1 > 1$ fijo, de (IV,2,17), se tiene,

$$|\Theta_1| < \exp\left\{ \frac{\Delta^2}{4(1 - N_1)} \right\} - 1 \qquad \text{(IV,2,19)}$$

Similarmente, de (IV,2,18), se tiene,

$$|\Theta_2| < \exp\left\{ \frac{\Delta^2}{4(1 - N_2)} \right\} - 1 \qquad \text{(IV,2,20)}$$

En consecuencia, de (IV,2,19) y (IV,2,20), se tiene,

$$\left|[(1+\Theta_1)\cdot(1+\Theta_2)]\right| \leq (1+|\Theta_1|)\cdot(1+|\Theta_2|) \leq$$

$$\leq \exp\left\{\frac{\Delta^2}{4(1-N_1)}\right\}\cdot \exp\left\{\frac{\Delta^2}{4(1-N_2)}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\Delta^2}{4}\left[\frac{(2-N_1-N_2)}{(1-N_1)(1-N_2)}\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{-\Delta^2}{4}\left[\frac{(N_1+N_2-2)}{(1-N_1)(1-N_2)}\right]\right\} \qquad \text{(IV,2,21)}$$

como $\Delta > 0$, N_1 y N_2 son números fijos mayores que 1 y el cociente,

$\dfrac{(N_1+N_2-2)}{(1-N_1)(1-N_2)}$ es positivo, la expresión

(IV,2,21) es una cota superior de (IV,2,16).

Luego, de acuerdo con (IV,2,16), la función $U_{\alpha,\beta}(m,n,S^2)$ es acotada, por consiguiente,

$$\lim_{\alpha\to -2k}\ \lim_{\beta\to -2\ell} U_{\alpha,\beta}(m,n,S^2) = g \neq \infty \qquad \text{(IV,2,22)}$$

Por tanto, de (IV,2,9), (IV,2,10) y (IV,2,22) se concluye el resultado (IV,2,1).

Usando la propiedad (IV,1,10), el producto - (IV,2,7), también puede escribirse como,

$$(\Box + m^2)^k\{\delta(x)\}.\ (\Box + m^2)^\ell\{\delta(x)\} = 0 \qquad \text{(IV,2,23)}$$

y haciendo $m = 0$ en (IV,2,23) se obtiene,

$\Box^k\{\delta(x)\}\ .\ \Box^\ell\{\delta(x)\} = 0$, que coincide con el producto (III,2,32) dado en el capítulo III.

CAPITULO V

PRODUCTOS DE DISTRIBUCIONES RELACIONADOS CON LA DISTRIBUCION $(m^2+P)^\lambda$

RESUMEN:

Se extienden productos unidimensionales dados por B.Fisher en [10] y L.Schwartz en [26] , pág. 122, a distribuciones n-dimensionales de la forma $(m^2+P)^\lambda$, donde $P(x)$ es una forma cuadrática en n-variables introducida en pág. 3 , m número real distinto de cero y λ número complejo.

En la sección V.2., el sentido de la multiplicación es ortodoxo, según se ha dicho en el prefacio de este trabajo, fórmula (6), obteniéndose los siguientes resultados;

$(m^2+P)^\ell \cdot \delta^{(k)}(m^2+P)$ (fórmula (V,2,3)),

$(m^2+P)^\ell_\pm \cdot \delta^{(k)}(m^2+P)$ (fórmulas (V,2,13) y (V,2,14)),

$P^\ell \cdot \delta^{(k)}(P)$ (corolario 1, fórmula (V,2,17)),

$P^\ell_\pm \cdot \delta^{(k)}(P)$ (corolario 1, fórmulas (V,2,18) y (V,2,19)), que generalizan productos dados por S.E.Trione en [28] , pág. 10, fórmulas (I,5,4), (I,5,6) y (I,5,7).

Si en el producto $(m^2+P)^\ell . \delta^{(k)}(m^2+P)$ ((V,2,3)), hacemos $\ell = 1$, se obtiene:

$$(m^2+P) \cdot \delta^{(k)}(m^2+P) + k\, \delta^{(k-1)}(m^2+P) = 0$$

que generaliza fórmulas del Gelfand-Shilov (c.f. [12] , pág. 349) y es considerada por ejemplo por Bollini, Giambiagi y Tiomno para la teoría de regularización analítica en las ecuaciones clásicas de Yang-Mills y sus aplicaciones en el potencial singular. Además, este producto, generaliza fórmulas usadas por D.W.Bresters (c.f. [5], pág. 573, renglón 15 y pág. 574, renglón 21) las que permiten obtener la fórmula,

$$(m^2+P\pm i0)^{-k} = (m^2+P)^{-k} \mp \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\pi i\ \delta^{(k-1)}(m^2+P)$$

En la sección V.3., multiplicamos en el sentido heterodoxo de acuerdo con lo establecido en el prefacio de este trabajo, obteniéndose el producto $(m^2+P)_+^{\lambda} \cdot (m^2+P)_-^{-1-\lambda}$ (proposición 1, fórmula (V,3,5)), que es una extensión multidimensional de la fórmula $x_+^{\lambda} \cdot x_-^{-1-\lambda}$ dada por B.Fisher en [10] , pág. 296.

V.- PRODUCTOS DE DISTRIBUCIONES RELACIONADOS CON LA DISTRIBUCION $(m^2 + P)^\lambda$

V.1. INTRODUCCION

Sean m, ε , números reales tales que $m \neq 0$ y $\varepsilon > 0$. Con $T_\pm(x,\varepsilon,m)$ designaremos la forma cuadrática,

$$T_\pm(x,\varepsilon,m) = m^2 + P(x) \pm i\,\varepsilon\,|x|^2$$

donde $P(x)$ está definido en (I,1,1,) y $|x|^2$ en (I,1,2).

Para λ número complejo arbitrario, escribimos,

$$(m^2 + P \pm i0)^\lambda \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} (T_\pm(x,\varepsilon,m))^\lambda$$

Se demuestra en [12] , pág.289, que el límite del término de la derecha de (V,1,2) existe y además que $(m^2 + P \pm i0)^\lambda$ son funciones distribucionales enteras de λ , debido a la ausencia de puntos singulares de la hipersuperficie $m^2 + P = 0$.

De [5] , pág. 566, se tiene,

$$(m^2 + P \pm i0)^\lambda = (m^2 + P)_+^\lambda + e^{\pm\lambda\pi i}(m^2 + P)_-^\lambda$$

donde

$$(m^2 + P)_+^\lambda = \begin{cases} (m^2 + P)^\lambda & \text{si } (m^2+P) \geq 0 \\ 0 & \text{si } (m^2+P) < 0 \end{cases}$$

y

$$(m^2 + P)_-^\lambda = \begin{cases} [-(m^2 + P)]^\lambda & \text{si } (m^2+P) \leq 0 \\ 0 & \text{si } (m^2+P) > 0 \end{cases}$$

Usando (V,1,3), se tiene,

$$(m^2 + P)_+^\lambda = \frac{i}{2\,\text{sen}\lambda\pi}\left[e^{-\lambda\pi i}(m^2+P+i0)^\lambda - \right.$$

$$- \; e^{\lambda\pi i} \; (m^2+P-i0)^{\lambda} \;] \qquad (V,1,6)$$

y

$$(m^2+P)^{\lambda}_{-} = \frac{-i}{2 \operatorname{sen}\lambda\pi} \left[(m^2+P+i0)^{\lambda} - (m^2+P-i0)^{\lambda}\right] \qquad (V,1,7)$$

De (V,1,6) y (V,1,7) se deduce que $(m^2+P)^{\lambda}_{\pm}$ son funciones distribucionales analíticas de λ, excepto en los puntos $\lambda = -k$ donde tienen polos simples.

Haciendo $\lambda = k$, entero positivo, en (V,1,3), se tiene,

$$(m^2+P+i0)^k = (m^2+P-i0)^k = (m^2+P)^k \qquad (V,1,8)$$

Por otra parte, para todo $\varphi \in D$ (espacio de funciones de prueba, [26] , pág.64), tenemos,

$$<(m^2+P)^{\lambda}_{+}, \varphi> = \int_{m^2+P\geq 0} \left[m^2+P \right]^{\lambda} \varphi(x) \; dx \qquad (V,1,9)$$

con $dx = dx_1 \ldots dx_n$ y

$$<(m^2+P)^{\lambda}_{-}, \varphi> = \int_{m^2+P\leq 0} \left[-(m^2+P)\right]^{\lambda} \varphi(x) \; dx \qquad (V,1,10)$$

con $dx = dx_1 \ldots dx_n$.

Las integrales (V,1,9) y (V,1,10) convergen y son funciones analíticas respecto del parámetro complejo λ, si $\operatorname{Real}(\lambda) > 0$. Para $\operatorname{Real}(\lambda) < 0$, se definen por prolongación analítica.

De [5] , pág. 566, se tiene,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-k} (m^2+P)^{\lambda}_{+} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \; \delta^{(k-1)}(m^2+P) \qquad (V,1,11)$$

y

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-k} (m^2+P)^{\lambda}_{-} = \frac{1}{(k-1)!} \; \delta^{(k-1)}(m^2+P) \qquad (V,1,12)$$

donde $\delta^{(\ell)}(m^2+P)$ está definida en (A,1,6)

Por otra parte, como $(m^2+P)_+^{\alpha-1}$ son funciones distribucionales paramétricas de α, con polos simples en $\alpha = -k$, $k = 0,1,2,\ldots$, y la función $\Gamma(\alpha)$, según apéndice A.2., también tiene polos simples en $\alpha= -k$, $k = 0,1,2,\ldots$, entonces, llamando

$$B_\alpha(m^2+P) = \frac{(m^2+P)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \qquad (V,1,13)$$

y usando las fórmulas (V,1,11) y (A,2,2), se obtiene,

$$\lim_{\alpha\to -k} B_\alpha(m^2+P) = \delta^{(k)}(m^2+P) \qquad (V,1,14)$$

V.2. EL PRODCUTO $(m^2+P)^\ell \cdot \delta^{(k)}(m^2+P)$

Nuestro objeto es obtener explícitamente el producto $(m^2+P)^\ell \cdot \delta^{(k)}(m^2+P)$, con k, ℓ, enteros no negativos tales que $k \geq \ell$,

$$m^2 + P = m^2 + x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{P+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 \qquad (V,2,.)$$

$p+q = n$ dimensión del espacio y $\delta^{(k)}(m^2+P)$ está definida en (A,1,6). Para lograrlo, usaremos la fórmula de Leray dada en el apédice A.1.

El sentido de la multiplicación se obtiene de [26] , pág.117.

Para toda φ que pertenece al espacio D (c.f. [26] , pág. 64),

$$< \alpha.T , \varphi > \overset{def}{=} < T, \alpha.\varphi > \qquad (V,2,2)$$

que hemos llamado ortodoxo, donde $\alpha \in \mathcal{E}$ (c.f. [26] , pág. 88) y $T \in D'$ espacio de distribuciones [26] , pág. 71 .

Teorema: Sean ℓ , k, enteros no negativos, vale entonces la siguiente fórmula:

$$(m^2+P)^{\ell} \cdot \delta^{(k)}(m^2+P) = \begin{cases} V_{\ell,k}\ \delta^{(k-\ell)}(m^2+P) & \text{si } k \geq \ell \\ 0 & \text{si } k < \ell \end{cases}$$

donde (m^2+P) es definida por (V,2,1), $\delta^{(k)}(m^2+P)$ está dada por (A,1,6) y

$$V_{\ell,k} = \frac{(-1)^{\ell}\, k!}{(k-\ell)!} \qquad (V,2,')$$

Demostración:

Usando la definición (V,2,2) y la fórmula de Leray ((A,1,1)), para $\alpha \in \mathcal{C}$ y $\varphi \in D$, se tiene,

$$\alpha(m^2+P) \cdot \delta(m^2+P) = \alpha(0) \cdot \delta(m^2+P) \qquad (V,2,5)$$

en forma más general, aplicando la regla de Leibniz, se obtiene,

$$\alpha(m^2+P) \cdot \delta^{(k)}(m^2+P) =$$

$$= \sum_{\nu \leq k} (-1)^{|k-\nu|} \frac{k!}{\nu!(k-\nu)!} D^{k-\nu}\{\alpha(0)\}\, \delta^{(\nu)}(m^2+P) \qquad (V,2,6)$$

Por otra parte, haciendo $\lambda=\ell$ entero no negativo en (V,1,3), tenemos,

$$(m^2+P+i0)^{\ell} = (m^2+P-i0)^{\ell} = (m^2+P)^{\ell} \qquad (V,2,7)$$

De acuerdo con [33] , pág.36 y 37, $(m^2+P)^{\ell}$ es la transformada de Fourier de una distribución que pertenece al espacio O_C' ([26] , pág. 245), por tanto usando el teorema XV de [26] , pág.268, fórmula (VII,8,5), se tiene que,

$$(m^2+P)^{\ell} \in O_M \qquad (V,2,8)$$

donde O_M es el espacio de funciones indefinidamente derivables y de crecimiento lento ([26] , pág. 243). Como O_M está incluido en el espacio $\mathcal{E}$, con $\mathcal{E}$ espacio de funciones indefinidamente derivables a soporte arbitrario ([26] , pág. 88), se concluye,

$$(m^2 + P)^{\ell} \in \mathcal{E} \qquad (V,2,9)$$

para $\ell = 0,1,2,\ldots$

Luego, haciendo $\alpha(m^2+P) = (m^2+P)^{\ell}$ en (V,2,6) y $k - \nu = \ell$, entero no negativo, se tiene,

$$\frac{(m^2+P)^{\ell}.\delta^{(k)}(m^2+P)}{k!} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\ell}\ \ell!}{\ell!\ (k-\ell)!}\ \delta^{(k-\ell)}(m^2+P) & \text{si } \ell \leq k \\ 0 & \text{si } \ell > k \end{cases} \qquad (V,2,10)$$

De (V,2,10) se deduce el resultado (V,2,3).

Asimismo, haciendo $\ell = 1$ en (V,2,3) y usando (V,2,4), se obtiene,

$$(m^2+P)^{\ell}.\delta^{(k)}(m^2+P) + k\ \delta^{(k-1)}(m^2+P) = 0 \qquad (V,2,11)$$

$k = 0,1,2,\ldots$, que generaliza fórmulas del Gelfand-Shilov (c.f. [12] , pág. 349) y es considerada por ejemplo por Bollini, Giambiagi y Tiomno para la teoría de regularización analítica en las ecuaciones clásicas de Yang-Mills y sus aplicaciones en el potencial singular (c.f. [3]).

De (V,2,3) y usando

$$(m^2+P)^{\ell} = (m^2+P)_+^{\ell} + (-1)^{\ell}\ (m^2+P)_-^{\ell} \qquad (V,2,12)$$

y las fórmulas (V,1,4) y (V,1,5), se tiene,

$$(m^2+P)_+^{\ell} \cdot \delta^{(k)}(m^2+P) = \begin{cases} \frac{1}{2} V_{\ell,k}\, \delta^{(k-\ell)}(m^2+P) & \text{si } k \geq \ell \\ 0 & \text{si } k < \ell \end{cases} \qquad (V,2,13)$$

y

$$(m^2+P)_-^{\ell} \cdot \delta^{(k)}(m^2+P) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{\ell} V_{\ell,k}\, \delta^{(k-\ell)}(m^2+P) & \text{si } k \geq \ell \\ 0 & \text{si } k < \ell \end{cases} \qquad (V,2,14)$$

donde $V_{\ell k}$ es definida en (V,2,4).

Si se hace $k = \ell$ en (V,2,13) y (V,2,14), se tiene,

$$(m^2+P)_+^{\ell} \cdot \delta^{(\ell)}(m^2+P) = \frac{1}{2}(-1)\, \ell!\, \delta(m^2+P) \qquad (V,2,15)$$

$$(m^2+P)_-^{\ell} \cdot \delta^{(\ell)}(m^2+P) = \frac{1}{2}\, \ell!\, \delta(m^2+P) \qquad (V,2,16)$$

que corresponden a extensiones multidimensionales de fórmulas dadas por B.Fisher en [10] , pág. 296 y 298.

Los resultados (V,2,3), (V,2,13) y (V,2,14) generalizan las fórmulas 13, 14 y 16 dadas por S.E. Trione en [29] , pág. 4 y 5.

<u>Corolario 1</u>: Sean n dimensión del espacio, k y ℓ enteros no negativos tales que $k < \frac{n}{2} - 1$ y $k-\ell < \frac{n}{2} - 1$, valen entonces las siguientes fórmulas:

$$P_+^{\ell} \cdot \delta^{(k)}(P) = \begin{cases} V_{\ell,k}\, \delta^{(k-\ell)}(P) & \text{si } k \geq \ell \\ 0 & \text{si } k < \ell \end{cases} \qquad (V,2,17)$$

$$P_+^{\ell} \cdot \delta^{(k)}(P) = \begin{cases} \frac{1}{2} V_{\ell,k}\, \delta^{(k-\ell)}(P) & \text{si } k \geq \ell \\ 0 & \text{si } k < \ell \end{cases} \qquad (V,2,18)$$

$$P_-^{\ell} \cdot \delta^{(k)}(P) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{\ell} V_{\ell,k}\, \delta^{(k-\ell)}(P) & \text{si } k \geq \ell \\ 0 & \text{si } k < \ell \end{cases} \qquad (V,2,19)$$

donde P es la forma cuadrática definida en (I,1,1), $V_{\ell,k}$ está dada en (V,2,4), $\delta^{(k)}(P)$ es definida en [12] , pág. 249-250 y

$$P_+^{\lambda} = \begin{cases} P^{\lambda} & \text{si } P > 0 \\ 0 & \text{si } P \leq 0 \end{cases} \qquad (V,2,20)$$

$$P_-^{\lambda} = \begin{cases} (-P)^{\lambda} & \text{si } P < 0 \\ 0 & \text{si } P \geq 0 \end{cases} \qquad (V,2,21)$$

Haciendo m tender a cero en (V,2,3), (V,2,13), (V,2,14) y usando la condición (A,1,9), se obtienen las fórmulas (V,2,17),(V,2,18) y (V,2,19) respectivamente.

El corolario 1 generaliza los productos dados por S.E.Trione en [28] , pág.10, fórmulas (I,5,4), (I,5,6) y (I,5,7). En efecto, haciendo $k = \ell$ en (V,2,17), (V,2,18) y (V,2,19) para $\ell < \frac{n}{2} - 1$ y $0 < \frac{n}{2} - 1$, se tiene,

$$P^{\ell} \cdot \delta^{(\ell)}(P) = (-1)^{\ell} \ell!\ \delta(P) \qquad (V,2,22)$$

$$P_+^{\ell} \cdot \delta^{(\ell)}(P) = \frac{1}{2}(-1)^{\ell} \ell!\ \delta(P) \qquad (V,2,23)$$

$$P_-^{\ell} \cdot \delta^{(\ell)}(P) = \frac{1}{2}\ell!\ \delta(P) \qquad (V,2,24)$$

que coinciden con los productos (I,5,4),(I,5,6) y (I,5,7) antes citados.

Obsérvese que la condición $0 < \frac{n}{2} - 1$, indica que estos productos valen para $n \neq 2$.

El resultado (V,2,17) generaliza fórmulas dadas en el Gelfand and Shilov (c.f. [12] , pág. 349) las cuales son consideradas por ejemplo por Bollini, Giambiagi y Tiomno para la teoría

de reguralización analítica en las ecuaciones clásicas de Yang-Mills y sus aplicaciones en el potencial singular (c.f. [3]).

V.3. EL PRODUCTO $(m^2+P)_+^{\lambda} \cdot (m^2+P)_-^{-1-\lambda}$

Brian Fisher en [10], pág. 296, fórmula 1, obtiene el producto:

$$x_+^{\lambda} \cdot x_-^{-1-\lambda} = -\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{cosec}(\lambda\pi) \cdot \delta(x) \qquad (V,3,1)$$

para $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, donde $x_\pm^{\lambda}$ son definidas en [12], pág.48.

S.E.Trione en [28], fórmula (I,4,9), pág. 9, extiende el resultado (V,3,1) trabajando con las distribuciones $P_\pm^{\lambda}$ definidas en (V,2,20) y (V,2,21):

$$P_+^{\lambda} \cdot P_-^{-1-\lambda} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{cosec}(\lambda\pi)\, \delta(P) \qquad (V,3,2)$$

$\lambda, -\lambda-1 \neq -\frac{n}{2} - k$, $k = 0,1,2,\ldots$ y $n \neq 2$

En esta sección se pretende extender la fórmula (V,3,1) a las distribuciones $(m^2+P)_\pm^{\lambda}$ que son definidas en (V,1,4) y (V,1,5). Para lograrlo usaremos el producto:

$$(m^2+P \pm i0)^{\lambda} \cdot (m^2+P \pm i0)^{\mu} = (m^2+P \pm i0)^{\lambda+\mu} \qquad (V,3,3)$$

(c.f. [33], pág.23, fórmula (I,3,6)), válido para todo λ,μ números complejos, y la fórmula:

$$(m^2+P \pm i0)^{-k} = (m^2+P)^{-k} \mp \frac{\pi\, i\, (-1)^{k-1}}{(k-1)!}\, \delta^{(k-1)}(m^2+P) \qquad (V,3,4)$$

dada en [5], pág. 565, fórmula 1.6, donde $(m^2+P \pm i0)^{\lambda}$ es definida por (V,1,2).

<u>Proposición 1</u>: Sea λ número complejo tal que $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, vale entonces

la siguiente fórmula:

$$(m^2+P)_+^{\lambda} \cdot (m^2+P)_-^{-1-\lambda} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \operatorname{cosec}(\lambda\pi)\ \delta(m^2+P) \qquad (V,3,5)$$

donde $(m^2+P)_\pm^{\lambda}$ están definidas en (V,1,4), (V,1,5) y $\delta(m^2+P)$ está dada por (A,1,6) en el caso en que $k = 0$.

Demostración:

Usando (V,3,3), tenemos,

$$(m^2+P+i0)^{-1} = (m^2+P+i0)^{\lambda} \cdot (m^2+P+i0)^{-1-\lambda} \qquad (V,3,6)$$

aplicando la fórmula (V,1,3) en cada uno de los factores del término de la derecha de (V,3,6), se tiene,

$$(m^2+P+i0)^{-1} = \left[(m^2+P)_+^{\lambda} + e^{\lambda\pi i}(m^2+P)_-^{\lambda}\right] \cdot$$

$$\cdot \left[(m^2+P)^{-\lambda-1} + e^{\pi i(-1-\lambda)}(m^2+P)_-^{-1-\lambda}\right] \qquad (V,3$$

Como el resultado (V,3,3) vale para todo λ, μ números complejos y $(m^2+P+i0)^{\gamma}$ son distribuciones paramétricas enteras con respecto a γ, entonces el producto (V,3,7) es distributivo fuera de las singularidades de $(m^2+P)_\pm^{\gamma}$, luego para λ, $-1-\lambda \neq k$, $k = 0,1,2,\ldots$, haciendo,

$$f_\pm^{\gamma} = (m^2+P)_\pm^{\gamma} \qquad (V,3,8)$$

de (V,3,7), se tiene,

$$(m^2+P\pm i0)^{-1} = f_+^{\lambda} \cdot f_+^{-\lambda-1} - f_-^{\lambda} \cdot f_-^{-\lambda-1} -$$

$$- \cos\lambda\pi\ f_+^{\lambda} \cdot f_-^{-\lambda-1} + \cos\lambda\pi\ f_-^{\lambda} \cdot f_+^{-\lambda-1} +$$

$$+ i\ \{ f_+^{\lambda} \cdot f_-^{-\lambda-1} \operatorname{sen}\lambda\pi + f_+^{-\lambda-1} f_-^{\lambda} \operatorname{sen}\lambda\pi \} \qquad (V,3$$

Es claro que para $\mathrm{Real}(\lambda) > -1$, $\mathrm{Real}(\mu) > -1$, se tiene,

$$f_{\pm}^{\lambda} \cdot f_{\pm}^{\mu} = f_{\pm}^{\lambda+\mu} \qquad (V,3,10)$$

luego por prolongación analítica en el sentido de ([12] , pág. 253-255) se extiende la fórmula (V,3,10) para los valores λ, μ, $\lambda+\mu \neq -k$, $k = 0,1,2,\ldots$

Por otra parte, haciendo $k = 1$ en (V,3,4), se tiene,

$$(m^2+P+i0)^{-1} = (m^2+P)_{-}^{-1} - \pi i\, \delta(m^2+P) \qquad (V,3,11)$$

donde de acuerdo con [13] , pág. 189, fórmula 6.9,

$$(m^2+P)^{-1} = (m^2+P)_{+}^{-1} - (m^2+P)_{-}^{-1} \qquad (V,3,12)$$

Por tanto, separando parte real e imaginaria entre (V,3,9) y (V,3,11), usando (V,3,10) y (V,3,12), se concluye:

$$(m^2+P)_{+}^{\lambda} \cdot (m^2+P)_{+}^{-1-\lambda} - (m^2+P)_{-}^{\lambda} \cdot (m^2+P)_{-}^{-1-\lambda} =$$

$$= (m^2+P)^{-1} \qquad (V,3,13)$$

y

$$(m^2+P)_{+}^{\lambda} \cdot (m^2+P)_{-}^{-1-\lambda} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{cosec}(\lambda\pi)\, \delta(m^2+P) \qquad (V,3,14)$$

De (V,3,14) se deduce el resultado (V,3,5).

CAPITULO VI

FORMULAS DE INTERCAMBIO DE LA CONVOLUCION CON EL PRODUCTO VIA LA TRANSFORMADA DE FOURIER

RESUMEN:

Se pretende demostrar la validez de fórmulas que intercambian la transformada de Fourier de los productos, $H_\alpha(P\pm i0,n)\cdot H_\beta(P\pm i0,n)$ (capítulo I, fórmula (I,2,2)), $R_\alpha(x)\cdot R_\beta(x)$ (capítulo II, fórmula (II,2,1)) y $(m^2+P)^\ell\cdot\delta^{(k)}(m^2+P)$ (capítulo V, fórmula (V,2,3), con la convolución de las transformadas.

VI. FORMULAS DE INTERCAMBIO DE LA CONVOLUCION CON EL PRODUCTO VIA LA TRANSFORMADA DE FOURIER

VI.1. INTRODUCCION

La familia de funciones distribucionales definida por,

$$G_\alpha(P\pm i0,m,n) = \gamma_\alpha(m,n)(P\pm i0)^{\frac{\alpha-n}{4}} K_{\frac{n-\alpha}{2}}(\sqrt{m^2(P\pm i0)}) \qquad (VI,1,1)$$

donde

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\operatorname{sen}\nu\pi}, \quad \nu \neq \text{entero}, \qquad (VI,1,2)$$

$$I_\nu(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2\ell}}{\ell!\,\Gamma(\nu+\ell+1)}, \qquad (VI,1,3)$$

$$\gamma_\alpha(m,n) = \frac{e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}\, 2^{1-\frac{\alpha}{2}}\, e^{\frac{\pm q\pi i}{2}}\,(m^2)^{\frac{n-\alpha}{4}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \qquad (VI,1,4)$$

y $(P\pm i0)^\lambda$ está definida en (I,1,4) es introducida por S.E.Trione en [33], pág. 34, fórmula (II,1,1).

De [33], pág. 35, fórmula (II,1,8) y pág. 36, fórmula (II,2,5), se tiene,

$$\{G_\alpha(P\pm i0,m,n)\}\hat{} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}\,(m^2+Q\mp i0)^{-\frac{\alpha}{2}} \qquad (VI,1,5)$$

y

$$\{K^\ell\{\delta(x)\}\}\hat{} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\,(-1)^\ell\,(m^2+Q)^\ell \qquad (VI,1,6)$$

respectivamente; donde

$$Q = Q(y) = y_1^2+\ldots+y_p^2-y_{p+1}^2-\ldots-y_{p+q}^2, \qquad (VI,1,7)$$

$$K^{\ell} = \{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \}^{\ell} , \quad \text{(VI,1,8)}$$

operador ultrahiperbólico de Klein-Gordon iterado ℓ veces, con $p+q = n$ dimensión del espacio y $\hat{}$ que indica transformada de Fourier.

$G_\alpha(P \pm i0, m, n)$, verifica las siguientes propiedades,

$$G_0(P \pm i0, m, n) = \delta(x) \quad \text{(VI 1,9)}$$

$$G_{-2\ell}(P \pm i0, m, n) = K^{\ell}\{ \delta(x) \} \quad \text{(VI 1,10)}$$

$$K^{\ell}\{G_\alpha(P \pm i0, m, n)\} = G_{\alpha-2\ell}(P \pm i0, m, n) \quad \text{(VI,1,11)}$$

Las propiedades (VI,1,9), (VI,1,10) y (VI,1,11) son demostradas por S.E.Trione en [33] , páginas 37 y 38.

Haciendo $\alpha = 2\ell$ en (VI,1,11) y usando (VI,1,9), se tiene,

$$K^{\ell}\{G_{2\ell}(P \pm i0, m, n)\} = \delta(x) \quad \text{(VI,1,12)}$$

propiedad que indica que la familia de funciones distribucionales $G_\alpha(P \pm i0, m, n)$ para $\alpha = 2\ell$ es solución elemental del operador ultrahiperbólico de Klein-Gordon iterado ℓ veces, definido en (VI,1,8).

VI.2. FORMULAS DE INTERCAMBIO DE LA CONVOLUCION CON EL PRODUCTO VIA LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Nuestro objeto es demostrar la validez de fórmulas que intercambian la transformada de Fourier de los productos:

$(m^2+P)^{\ell} \cdot \delta^{(k)}(m^2+P)$ (cap. V, fórmula (V,2,3)),

$H_\alpha(P\pm i0,n) \cdot H_\beta(P\pm i0,n)$ (cap. I, fórmula (I,2,2))

$R_\alpha(x) \cdot R_\beta(x)$ (cap. II, fórmula (II,2,1))

con la convolución de las transformadas, donde m^2+P está definido en (V,2,1), $H_\alpha(P\pm i0,n)$ es la familia de funciones distribucionales definida en (I,1,5), $R_\alpha(x)$ es el núcleo singular elíptico de Marcel Riesz ((II,1,1)) y $\delta^{(k)}(m^2+P)$ está definida en (A,1,6).

<u>Teorema 1</u>: Sean ℓ, y k enteros no negativos tales que $k \geq \ell$, vale entonces la siguiente fórmula:

$$\{(m^2+P)^\ell \cdot \delta^{(k)}(m^2+P)\}^\wedge = \{(m^2+P)\}^\wedge * \{\delta^{(k)}(m^2+P)\}^\wedge \qquad \text{(VI,2,1)}$$

donde $\wedge$ indica transformada de Fourier y $*$ convolución.

Demostración:

Haciendo $\lambda = \alpha-1$ en (V,1,6), usando (A,2,11), (V,1,13) y la fórmula (VI,1,5), se tiene,

$$B_\alpha(m^2+P) = \frac{\Gamma(1-\alpha)(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi i)} \{\{G_{-2\alpha+2}(Q-i0,m,n)\}^\wedge - e^{2\pi i(\alpha-1)}\{G_{-2\alpha+2}(Q+i0,m,n)\}^\wedge\} \qquad \text{(VI,2,2)}$$

por otra parte, usando (VI,1,5), se verifica,

$$\lim_{\alpha\to -k} \{G_{-2\alpha+2}(Q-i0,m,n)\}^\wedge = \{G_{2k+2}(Q-i0,m,n)\}^\wedge \qquad \text{(VI,2,3)}$$

y

$$\lim_{\alpha\to -k} \{G_{-2\alpha+2}(Q+i0,m,n)\}^\wedge = \{G_{2k+2}(Q+i0,m,n)\}^\wedge \qquad \text{(VI,2,4)}$$

De (V,I,14), usando (VI,2,3) y (VI,2,4), se tiene,

$$\delta^{(k)}(m^2+P) = \lim_{\alpha\to -k} B_\alpha(m^2+P) =$$

$$= \frac{k!\ (2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi i)} \left[\{ G_{2k+2}(Q-i0,m,n)\}^\wedge - \right.$$

$$\left. - \{ G_{2k+2}(Q+i0,m,n)\}^\wedge\right] \qquad \text{(VI,2,5)}$$

Luego, usando (VI,1,6) y (VI,2,5), se obtiene,

$$\{(m^2+P)^\ell\}^\wedge * \{\delta^{(k)}(m^2+P)\}^\wedge =$$

$$= (-1)^\ell K^\ell\{\delta(x)\} * \frac{k!}{2\pi i}\{G_{2k+2}(Q-i0,m,n) -$$

$$G_{2k+2}(Q+i0,m,n)\} \qquad \text{(VI,2,6)}$$

Según [33], pág.37, $K^\ell\{\delta(x)\}$ es un convolutor y al aplicar la fórmula (VI,1,11) en el término de la derecha de (VI,2,6), se tiene,

$$\{(m^2+P)^\ell\}^\wedge * \{\delta^{(k)}(m^2+P)\}^\wedge =$$

$$= \frac{k!\ (-1)^\ell}{2\pi i}\left[G_{2k-2\ell+2}(Q-i0,m,n) - \right.$$

$$\left. - G_{2k-2\ell+2}(Q+i0,m,n)\right] \qquad \text{(VI,2,7)}$$

Por otra parte, usando el resultado (V,2,3), dado en la sección V.2., y las fórmulas (V,1,14), (VI,2,2), (VI,2,3) y (VI,2,4), se deduce,

$$\{(m^2+P)^\ell\}.\{\delta^{(k)}(m^2+P)\} = \frac{(-1)^\ell\ k!}{(k-\ell)!}\{\delta^{(k-\ell)}(m^2+P)\}^\wedge$$

$$= \frac{(-1)^\ell\ k!}{(k-\ell)!}\ \frac{\Gamma(1+(k-\ell))}{2\pi i}\left[G_{2k-2\ell+2}(Q-i0,m,n) - \right.$$

$$\left. - G_{2k-2\ell+2}(Q+i0,m,n)\right] =$$

$$= \frac{(-1)^{\ell}\ k!}{2\pi i} \left[G_{2k-2\ell+2}(Q-i0,m,n) - \right.$$

$$\left. - G_{2k-2\ell+2}(Q+i0,m,n) \right] \qquad (VI,2,8)$$

De (VI,2,7) y (VI,2,8) se concluye el resultado (VI,2,1).

<u>Corolario 1</u>: Sean n dimensión del espacio, k y ℓ enteros no negativos tales que $k < \frac{n}{2} - 1$, $k-\ell < \frac{n}{2} - 1$, $k \leq \ell$, vale entonces la siguiente fórmula:

$$\{ P^{\ell} \cdot \delta^{(k)}(P)\}^{\wedge} = \{P^{\ell}\}^{\wedge} * \{\delta^{(k)}(P)\}^{\wedge} \qquad (VI,2,9)$$

donde P es la forma cuadrática definida en (I,1,1).

La fórmula (VI,2,9), se obtiene de (VI,2,1) usando la condición (A,1,9) y haciendo tender m^2 a cero.

Trabajando con la familia de funciones distribucionales $H_{\alpha}(P \pm i0,n)$ definida en (I,1,5), usando las propiedades (I,1,8), (I,1,9) y la fórmula (3), de [12] , pág. 277, también obtenemos la fórmula (VI,2,9).

Usando la fórmula (II,3,6), de [33] , pág. 40, la fórmula (VI,2,9), se puede escribir,

$$\{P^{\ell} \cdot \delta^{(k)}(P)\}^{\wedge} = (-1)^{k}(2\pi)^{\frac{n}{2}} L^{\ell}\{[\delta^{(k)}(P)]^{\wedge}\} \qquad (VI.2,10)$$

donde L^{ℓ} es el operador ultrahiperbólico definido en (I,1,10).

<u>Teorema 2</u>: Sean α, β , números complejos tales que α, β, $\alpha+\beta-n \neq n+2h$, $h=0,1,2,\ldots$, $H_{\alpha}(P \pm i0,n)$ la familia de funciones distribucionales definida en (I,1,5), vale entonces la siguiente fórmula,

$$\{H_\alpha(P\pm i0,n)\ .\ H_\beta(P\pm i0,n)\}^\wedge =$$

$$= \{H_\alpha(P\pm i0,n)\}^\wedge \ * \ \{H_\beta(P\pm i0,n)\}^\wedge \qquad \text{(VI,2,11)}$$

donde con $\wedge$ indicamos transformada de Fourier y con * convolución.

Demostración:

La transformada de Fourier de $H_\alpha(P\pm i0,n)$ de acuerdo con [33] , pág. 39, fórmula (II,3,3), está dada por,

$$\{H_\alpha(P\pm i0,n)\}^\wedge = \frac{e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \quad (Q \mp i0)^{-\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{(VI,2,12)}$$

donde $Q = Q(y)$ está definida en (VI,1,7), $p+q = n$ dimensión del espacio, $(Q\mp i0)^\lambda$ es es definido en (I,1,4) y $\alpha \neq n+2h$, $h=0,1,2...$

Si en el término de la derecha de (VI,2,12) se hace $\alpha = n-\lambda$, con λ número complejo diferente de $-2h$, $h = 0,1,2,...$, se multiplica y se divide por $K_n(\lambda,q)$. ((I,1,6)) y se aplica la fórmula (I,1,5), se tiene,

$$\{H_\alpha(P\pm i0,n)\}^\wedge = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{(n-\lambda)(\pi i/2)} K_n(\lambda,q)\ .$$

$$.\ H_\lambda(Q\mp i0,n) \qquad \text{(VI,2,13)}$$

De (VI,2,13), para $\beta = n-\mu$, obtenemos,

$$\{H_\alpha(P\pm i0,n)\}^\wedge \ * \ \{H_\beta(P\pm i0,n)\}^\wedge =$$

$$= \frac{e^{\frac{n\pi i}{2}}}{(2\pi)^n} e^{(n-(\lambda+\mu))(\pi i/2)} K_n(\lambda,q)\ K_n(\mu,q)\ .$$

$$.\ [H_\lambda(Q\mp i0,n) \ * \ H_\mu(Q\mp i0,n)] \qquad \text{(VI,2,14)}$$

En [33], pág. 41, fórmula (II,3,11), S.E. Trione demuestra la siguiente fórmula de convolución,

$$H_\alpha(P\pm i0,n) * H_\beta(P\pm i0,n) = H_{\alpha+\beta}(P\pm i0,n) \qquad \text{(VI,2,15)}$$

para α, β, $\alpha+\beta \neq n + 2h$, $h = 0,1,2,\ldots$

Vamos a demostrar la propiedad (VI,2,15) para $(Q \mp i0)$ en el caso en que $\alpha = n - \lambda$ y $\beta = n - \mu$ a través del siguiente lema,

<u>Lema 1</u>: Sean λ, μ, números complejos tales que λ, μ, $\lambda+\mu \neq n + 2h$, $h=0,1,2,\ldots$, vale entonces la siguiente fórmula,

$$H_\lambda(Q \mp i0,n) * H_\mu(Q \mp i0,n) =$$

$$= \frac{e^{\pm q\pi i}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} H_{\lambda+\mu}(Q \mp i0,n) \qquad \text{(VI,2,16)}$$

donde

$$H_\gamma(Q \mp i0,n) = \frac{(Q \mp i0)^{\frac{\gamma-n}{2}}}{K_n(\gamma,q)} \qquad \text{(VI, 17)}$$

$K_n(\gamma,q)$ está definida en (I,1,6) y $*$ indica operación de convolución.

Demostración del lema:

De [26], pág. 248, usando la fórmula (II,1,6) dada en [33], pág. 35, se deduce,

$$G_\lambda(Q \mp i0,m,n) \in O'_c , \qquad \text{(VI,2,18)}$$

donde O'_c es el espacio de distribuciones de decrecimiento rápido (c.f. [26], pág. 244) y $G_\lambda(Q \mp i0,m,n)$ es la familia de funciones distribucionales definida en (VI,1,1).

Utilizando la propiedad,

$G_\lambda(Q\mp i0,0,n) = H_\lambda(Q\mp i0,n)$ (c.f. [33] , pág. 49, fórmula (II,7,1)), se concluye,

$$H_\lambda(Q\mp i0,n) \in O'_c \quad \text{para } \lambda \neq n+2h,\ h=0,1,2,\ldots \qquad (VI,2,19)$$

Luego, aplicando el teorema XV de [26], pág. 268, fórmula (VII,8,5), para $\lambda,\mu \neq n + 2h$, $h = 0,1,2,\ldots$, se tiene,

$$\{H_\lambda(Q \mp i0,n) * H_\mu(Q \mp i0,n)\}^\wedge =$$

$$=\{H_\lambda(Q \mp i0,n)\}^\wedge \cdot \{H_\mu(Q \mp i0,n)\}^\wedge \qquad (VI,2,20)$$

Por otra parte, según [12] , pág. 284, fórmula (3) y (3'), tenemos,

$$\{(Q\mp i0)^{\frac{\lambda-n}{2}}\}^\wedge = \frac{e^{\frac{\lambda\pi i}{2}}\, e^{q\pi i}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot K_n(\lambda,q).(P\pm i0)^{-\frac{\lambda}{2}} \qquad (VI,2,21)$$

donde $K_n(\lambda,q)$ está definida en (I,1,6).

Reemplazando (VI,2,17) en (VI,2,20), usando (VI,2,21) y aplicando el producto (I,2,1), se tiene,

$$\{ H_\lambda(Q\mp i0,n) * H_\mu(Q\mp i0,n)\}^\wedge =$$

$$= \frac{e^{(\lambda+\mu)(\pi i/2)}\, e^{\pm q\pi i}\, e^{\pm q\pi i}}{(2\pi)^n} (P\pm i0)^{-\frac{(\lambda+\mu)}{2}} \qquad (VI,2,22)$$

con λ, μ, $\lambda+\mu \neq n + 2h$, $h = 0,1,2,\ldots$

Multiplicando y dividiendo por $K_n(\lambda+\mu,q)$ en el término de la derecha de (VI,2,22) y usando nuevamente la fórmula (VI,2,21) se obtiene,

$$\{H_\lambda(Q \mp i0,n) \quad * \quad H_\mu(Q \mp i0,n)\}^\wedge \quad =$$

$$= \frac{e^{\pm q\pi i}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \{H_{\lambda+\mu}(Q \mp i0,n)\}^\wedge \qquad \text{(VI,2,23)}$$

para λ, μ, $\lambda + \mu \neq n+2h$, $h = 0,1,2,\ldots$

Luego, aplicando el teorema de la unicidad de la transformada de Fourier, se concluye de (VI,2,23) la demostración del lema 1, fórmula (VI,2,16).

Si se reemplaza (VI,2,16) en (VI,2,14), tenemos,

$$\{H_\alpha(P \pm i0,n)\}^\wedge \quad * \quad \{H_\beta(i0,n)\}^\wedge \quad =$$

$$= \frac{e^{\frac{n\pi i}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\pm q\pi i} e^{(n-(\lambda+\mu))(\pi i/2)}$$

$$\frac{K_n(\lambda,q)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{K_n(\mu,q)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} H_{\lambda+\mu}(Q \mp i0,n) \qquad \text{(VI, ,24)}$$

Si se multiplica y divide, el término de la derecha de (VI,2,24), por $K_n(\lambda+\mu,q)$ teniendo presente que $\lambda = n - \alpha$, $\mu = n - \beta$ y se usa la propiedad (VI,2,12), se obtiene,

$$\{H_\alpha(P\pm i0,n)\}^\wedge \;*\; \{H_\beta(P\pm i0,n)\}^\wedge =$$

$$= \frac{e^{\frac{n\pi i}{2}}\, e^{\pm q\pi i}}{(2\pi)^n} \; \frac{K_n(n-\alpha,q)K_n(n-\beta,q)}{K_n(n-\alpha+n-\beta,q)}$$

$$\cdot\; \{H_{\alpha+\beta-n}(P\pm i0,n)\}^\wedge \qquad \text{(VI,2,25)}$$

para α, β, $\alpha+\beta \neq n+2h$, $h = 0,1,2,\ldots$

Asimismo, usando (I,1,6), se tiene,

$$\frac{K_n(n-\alpha,q)\;.\;K_n(n-\beta,q)}{K_n(n-\alpha+n-\beta,q)} =$$

$$= (2\pi)^n\, e^{\frac{-n\pi i}{2}}\; \frac{e^{\mp q\pi i}\;\; K_n(\alpha+\beta-n,q)}{K_n(\alpha,q)\;\; K_n(\beta,q)} \qquad \text{(VI,2,26)}$$

Reemplazando (VI,2,26) en (VI,2,25), se concluye,

$$\{H_\alpha(P\pm i0,n)\}^\wedge \;*\; \{H_\beta(P\pm i0,n)\}^\wedge =$$

$$= \frac{K_n(\alpha+\beta-n,q)}{K_n(\alpha,q)K_n(\beta,q)} \; \{H_{\alpha+\beta-n}(P\pm i0,n)\}^\wedge \qquad \text{(VI,2,27)}$$

para α, β, $\alpha+\beta \neq n+2h$, $h = 0,1,2,\ldots$

Por otra parte, aplicando la transformada de Fourier en ambos términos del producto (I,2,2) y usando (I,1,6), se obtiene,

$$\{H_\alpha(P\pm i0,n)\;.\;H_\beta(P\pm i0,n)\}^\wedge =$$

$$= \frac{K_n(\alpha+\beta-n,q)}{K_n(\alpha,q)K_n(\beta,q)} \; \{H_{\alpha+\beta-n}(P\pm i0,n)\}^\wedge \qquad \text{(VI,2,28)}$$

para α,β, $\alpha+\beta \neq n+2h$, $h = 0,1,2,\ldots$

donde $K_n(\gamma,q)$ está definido en (I,1,6).

Por tanto de (VI,2,27) y (VI,2,28), se concluye el resultado (VI,2,11).

Nota: Trabajando con la forma cuadrática $P(x) = x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2$, es decir, cuando $p = 1$ (número de cuadrados positivos), la propiedad (VI,2,11) es demostrada en [29], pág. 27, fórmula (III,1,1). Sin embargo, la igualdad $D(\alpha,\beta,n) = E(\alpha,\beta,n)$ (c.f. [29], pág. 30, fórmula (III,1,4)) que sustenta la validez de la propiedad, se verifica si la cantidad $E(\alpha,\beta,n)$ se multiplica por $e^{\pm q\pi i}$, este término en nuestra fórmula (VI,2,25) se obtiene utilizando el lema 1, fórmula (VI,2,16), de este trabajo.

<u>Teorema 3</u>: Sean α, β, números complejos tales que α, β, $\alpha+\beta \neq n+2h$, $h = 0,1,2,\ldots$, $R_\alpha(x)$ el núcleo singular elíptico de Marcel Riesz definido en (II,1,1), vale entonces la siguiente fórmula,

$$\{R_\alpha(x) \quad R_\beta(x)\}^\wedge = \{R_\alpha(x)\}^\wedge * \{R_\beta(x)\}^\wedge \qquad \text{(VI,2,29)}$$

donde con $\wedge$ indicamos transformada de Fourier y con * convolución.

Demostración:

La transformada de Fourier de $R_\alpha(x)$ según (II,1,10), está dada por,

$$\{R_\alpha(x)\}^\wedge = \frac{1}{(2\pi)^{(n/2)}} |y|^{-\alpha} \qquad \text{(VI,2,30)}$$

Si en el término de la derecha de (VI,2,30) se hace $\alpha = n - \lambda$, con λ número complejo diferente de $-2h$, $h = 0,1,2,\ldots$, se multiplica y divide por $D_n(\lambda)$ ((II,1,3)) y se aplica

la fórmula (II,1,1), se tiene,

$$\{R_\alpha(x)\}^\wedge = D_n(\lambda) \quad R_\lambda(y) \qquad \text{(VI,2,31)}$$

De (VI,2,31) para $\beta = n - \mu$, obtenemos,

$$\{R_\alpha(x)\}^\wedge * \{R_\beta(x)\}^\wedge = D_n(\lambda).D_n(\mu)\left[R_\lambda(y)*R_\mu(y)\right] \qquad \text{(VI,2,32)}$$

Por otra parte, para λ, μ, $\lambda+\mu \neq n+2h$, $h = 0,1,2,\ldots$, se tiene,

$$R_\lambda(x) * R_\mu(x) = R_{\lambda+\mu}(x) \qquad \text{(VI,2,33)}$$

(c.f. [32], pág. 97, fórmula (II,4,4)).

Si se reemplaza (VI,2,33) en (VI,2,32), tenemos,

$$\{R_\alpha(x)\}^\wedge * \{R_\beta(x)\}^\wedge = D_n(\lambda).D_n(\mu) \; R_{\lambda+\mu}(y) \qquad \text{(VI,2,34)}$$

Si se multiplica y divide el término de la derecha de (VI,2,34) por $D_n(\lambda+\mu)$, teniendo presente que $\lambda = n - \alpha$, $\mu = n - \beta$ y se usa la propiedad (VI,2,30), se obtiene,

$$\{R_\alpha(x)\}^\wedge * \{R_\beta(x)\}^\wedge =$$

$$= \frac{D_n(n-\alpha) \; D_n(n-\beta)}{D_n(n-\alpha+n-\beta)} \quad \{R_{\alpha+\beta-n}(x)\}^\wedge \qquad \text{(VI,2,35)}$$

para α, β, $\alpha + \beta \neq n + 2h$, $h = 0,1,2,\ldots$

Asimismo, usando (II,1,3), se tiene,

$$\frac{D_n(n-\alpha) \; D_n(n-\beta)}{D_n(n-\alpha+n-\beta)} = \frac{(2\pi)^n \; D_n(\alpha+\beta-n)}{D_n(\alpha) \; D_n(\beta)} \qquad \text{(VI,2,36)}$$

Reemplazando (VI,2,36) en (VI,2,35), se concluye,

$$\{R_\alpha(x)\}^\wedge \quad * \quad \{R_\beta(x)\}^\wedge =$$

$$= \frac{D_n(\alpha+\beta-n)}{D_n(\alpha)\ D_n(\beta)} \quad \{R_{\alpha+\beta-n}(x)\}^\wedge \qquad \text{(VI,2.37)}$$

para α, β, $\alpha + \beta \neq n + 2h$, $h = 0,1,2,\ldots$

Por otra parte, aplicando la transformada de Fourier en ambos términos del producto, (II,2,1) y usando (II,1,3), se obtiene,

$$\{R_\alpha(x) \quad R_\beta(x)\}^\wedge =$$

$$= \frac{D_n(\alpha+\beta-n)}{D_n(\alpha)\ D_n(\beta)} \quad \{R_{\alpha+\beta-n}(x)\}^\wedge \qquad \text{(VI,2,38)}$$

para α, β, $\alpha + \beta \neq n + 2h$, $h = 0,1,2,\ldots$, donde $D_n(\alpha)$ está definido en (II,1,3).

Por tanto, de (VI,2,37) y (VI,2,38) se concluye el resultado (VI,2,29).

APENDICE

A.1. FORMULA DE LERAY

Sea $\Phi(t)$ la distribución de una variable t y sea $U(x) \in C^{\infty}(R^n)$, tal que la variedad (n-1)dimensional $U(x_1,\ldots,x_n) = 0$ no tiene puntos críticos; $\Phi(U(x))$, denota la distribución definida en R^n, por medio de la fórmula (llamada fórmula de Leray, [22] , pág. - 102),

$$<\Phi(U(x)),f> = \int_{R^n} \Phi(U(x))\ f(x)\ dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\ dt \int_{U(x)=t} f(x)\ W_U(x,dx) = <\Phi(t),\psi(t)> \qquad (A,1,1)$$

donde

$$\psi(t) = \int_{U(x)=t} f(x)\ W_U(x,dx) \qquad (A,1,2)$$

y W_U es una forma diferencial (n-1) dimensional definida como sigue:

$dU \wedge dW = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$ y la orientación de la variedad $U(x) = t$ es tal que $W_U(x,dx) > 0$.

$$\text{Si } U(x) = P(x) + m^2 = x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_{p+q}^2+m^2 \qquad (A\ 1,3)$$

con p+q = n dimensión del espacio, y $m \neq 0$, entonces para toda $\varphi \in D$ (espacio de funciones de prueba, [26] , pág. 64), se tiene,

$$<\Phi(P+m^2),\varphi> = \int_{R^n} \Phi(P+m^2)\ \varphi(x)\ dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)\ dt \int_{P+m^2=t} \varphi(x)\ W_{P+m^2}(x,dx) =$$

$$= <\Phi(t),\psi(t)> \qquad (A,1,4)$$

donde

$$\psi(t) = \int_{P+m^2 = t} \varphi(x)\, W_{P+m^2}(x;dx) \qquad (A,1,5)$$

Usando (A,1,1), tenemos,

$$<\delta^{(k)}(m^2+P), \varphi(x)> = <\delta^{(k)}(t), \psi(t)> = (-1)^k \psi^{(k)}(0) \qquad (A,1,6)$$

donde $\psi(t)$ es definida en (A,1,2).

La fórmula (A,1,1) puede no ser cierta. Por ejemplo, si

$$U(x) = P(x) \qquad (A,1,7)$$

donde $P(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$ (A,1,8)

con $p+q = n$, dimensión del espacio, porque $P(x)=0$ tiene un punto crítico en el origen, como consecuencia de este hecho la distribución $\delta^{(k)}(P)$ existe solamente si $k < \frac{n}{2} - 1$ ([12], pág. 250).

Por otra parte, la distribución $\delta^{(k)}(m^2+P)$ también se puede definir siguiendo [12], págs. 248-251 y la restricción de $\delta^{(k)}(m^2+P)$ a la distribución $\delta^{(k)}(P)$ de acuerdo con [12], pág. 250 se hace bajo la condición $k < \frac{n}{2} - 1$. (A,1,9)

A.2. RESIDUO Y PARTE FINITA DE $\Gamma(z)$ EN $z = -n$, $n = 0,1,2,\ldots$

La función $\Gamma(z)$ definida por,

$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$ es analítica en z, salvo en los puntos $z = -n$, $n = 0,1,2,\ldots$, que son polos simples, luego,

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \lim_{z \to -n} \left[(z+n)\,\Gamma(z)\right] \qquad (A,2,1)$$

~~De [1]~~, pág. 3, fórmulas 1 y 2, se tiene,

$$(z + n) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+1)\ldots(z+n-1)\Gamma(z+1)} =$$

$$= \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)\Gamma(z)} \qquad (A,2,2)$$

Reemplazando (A,2,2) en (A,2,1) y tomando límite cuando z tiende a $-n$, se concluye,

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad (A,2,3)$$

De |26| , pág. 41, se tiene,

$$\operatorname*{pf}_{z=-n} \Gamma(z) = \lim_{z\to -n} \frac{d}{dz}\{(z+n)\,\Gamma(z)\} \qquad (A,2,4)$$

Después de efectuar cálculos en (A,2,4), se obtiene,

$$\operatorname*{pf}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}\,\psi(1+n) \qquad (A,2,5)$$

donde $\psi(z) = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, o equivalentemente, $\psi(1+n) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \varepsilon$

donde ε es la constante de Euler.

De [1], pág. 344, fórmulas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 15, respectivamente, se tiene,

$$\Gamma(1 + z) = z\,\Gamma(z) \qquad (A,2,6)$$

$$\Gamma(z + n) = z\,(z+1)\ldots(z+n-1)\,\Gamma(z) \qquad (A,2,7)$$

$$\frac{\Gamma(z)}{\cancel{\Gamma(z-n)}} = (z-1)\ldots(z-n) = \frac{(-1)^n\,\Gamma(-z+n+1)}{\Gamma(-z+1)} \qquad (A,2,8)$$

$$\frac{\Gamma(-z+n)}{\Gamma(-z)} = (-1)^n z\,(z-1)\ldots(z-n+1) =$$

$$= \frac{(-1)^n\,\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-n+1)} \qquad (A,2,9)$$

$$\Gamma(z)\,.\,\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z}\csc(\pi z) \qquad (A,2,10)$$

$$\Gamma(z)\,.\,\Gamma(1-z) = \pi\csc(\pi z) \qquad (A,2,11)$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+z)\,.\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-z) = \pi\sec(\pi z) \qquad (A,2,12)$$

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\,\pi^{(-1/2)}\,\Gamma(z)\,\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) \qquad (A,2,13)$$

(A,2,13) es la fórmula de duplicación de Legendre.

A.3. LA DISTRIBUCION $(S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}$

Sea $(t_o,\vec{t})$ un punto en el espacio n-dimensional de Lorentz (espacio-tiempo), donde se indica con $\vec{t}$ el vector de componentes $(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1})$,

La forma métrica del espacio de Lorentz es definida a través del producto escalar,

$$(t_o,\vec{t})\,.\,(t_o,\vec{t}) = t_o^2 - \vec{t}.\vec{t} =$$

$$= t_o^2 - (t_1^2+t_2^2+\ldots+t_{n-1}^2) \qquad (A,3,1)$$

para

$$S = \begin{cases} \sqrt{t_o^2 - t_1^2 - \ldots - t_{n-1}^2} & \text{si } t_o > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (A,3,2)$$

y Real$(\alpha) > n$, se define la distribución $(S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}$ dependiente del parámetro α, por la fórmula,

$$<(S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}, \varphi> =$$

$$= \int_{\Gamma^+} (S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}} \varphi(t_o, t_1, \ldots, t_{n-1}) dt_o dt_1 \ldots dt_{n-1} \qquad (A,3,3)$$

donde $\varphi \in D$ ([26] , pág. 64),

$$\Gamma^+ = \{ (t_o, \vec{t}) \in R^n : S \geq 0 \ , \ t_o > 0 \} \qquad (A,3,4)$$

$\alpha \in C$(números complejos) y n dimensión del espacio.

Recordemos que en este caso no se puede aplicar la fórmula de Leray ((A,1,1)) porque S^2 ((A,3,2)) tiene un punto crítico en el origen.

Siguiendo [12] , pág. 253, se obtienen las singularidades de la distribución $(S^2)^{(\alpha-n)/2}$.

Llamando $d\omega$ al elemento de área de la esfera (n-2) dimensional de radio unitario, $\Phi(t_o, \rho)$ al promedio de φ sobre las esferas (n-2) dimensionales $S(t_o, \rho)$, de ecuación

$$t_o^2 + \ldots + t_{n-1}^2 = \rho^2 \qquad (A,3,5)$$

(ρ constante, t_o constante) y W_{n-2} el área de $S(t_o, 1)$, se tiene,

$$<(S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}, \varphi> =$$

$$= \int_{t_o>0} \int_0^{t_o} (t_o^2-\rho^2)^{\frac{\alpha-n}{2}} \rho^{n-2} \varphi(t_o, \rho\omega) \, d\omega \, d\rho \, dt_o = \qquad (A,3,6)$$

$$= |W_{n-2}| \int_{t_o \ 0} \int_0^{t_o} (t_o^2-\rho^2)^{\frac{-n}{2}} \rho^{n-2} \Phi(t_o, \rho) d\rho \, dt_o$$

donde

$$\Phi(t_o, \rho) = \frac{1}{|W_{n-2}|} \int_{S(t_o, \rho)} \varphi(t_o, \rho\omega) \, d\omega \qquad (A,3,7)$$

Es claro que si φ es a soporte compacto, también Φ lo es, puesto que si $K = \text{sop}\ \varphi$ es un conjunto compacto de R^n, entonces $\Gamma^+ \cap K$, también es un conjunto compacto, luego, $\varphi(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}) = 0$ fuera de $\Gamma^+ \cap K$, por tanto para $a > 0$ y $\rho_0 > 0$, se tiene que,

$$\Phi(t_0, \rho) = 0 \text{ si } t_0 > a \text{ y } \rho > \rho_0 \text{, luego,}$$

$\text{sop}\ \Phi(t_0, \rho) \subset [0, a] \times [0, \rho_0]$, en consecuencia, $\Phi(t_0, \rho)$ es a soporte compacto.

Si se hace el cambio de variables,

$$t_0^2 = \xi$$

$$\rho^2 = \eta$$

en (A,3,6) y escribimos,

$$\Phi_1(\xi, \eta) = \Phi(t_0, \rho) \qquad (A,3,8)$$

tenemos,

$$\langle (S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}, \varphi \rangle =$$

$$= \frac{|W_{n-2}|}{4} \int_{\xi>0} \int_0^{\xi} (\xi-n)^{\frac{\alpha-n}{2}} \eta^{\frac{n-3}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} \Phi_1(\xi, \eta)\, d\eta\, d\xi \qquad (A,3,9)$$

haciendo $\eta = t\xi$, la integral (A,3,9) se transforma en,

$$\langle (S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}, \varphi \rangle =$$

$$= \frac{|W_{n-2}|}{4} \int_0^{\infty} \int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-t)^{\frac{\alpha-n}{2}} \{t^{\frac{n-3}{2}} \Phi_1(\xi, t\xi)\}\, dt\, d\xi \qquad (A,3,10)$$

Llamando $G(\xi,\alpha) = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)^{\frac{\alpha-n}{2}} \{t^{\frac{n-3}{2}} \phi_1(\xi,t\xi)\}\, dt d\xi$ (A,3,11)

y reemplazando en (A,3,10), tenemos,

$$<(S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}, \varphi> = |W_{n-2}| \int_0^\infty \xi^{\frac{\alpha}{2}-1} G(\xi,\alpha)\, d\xi \qquad (A,3,12)$$

De acuerdo con [12] , pág. 254, fórmulas (11) y (13), la cantidad $G(\xi,\alpha)$ tiene polos simples en los puntos $\alpha = n-2k$, $k = 1,2,\ldots$ y además la integral $\int_0^\infty \xi^{\frac{\alpha}{2}-1} G(\xi,\alpha)\, d\xi$ tiene polos simples en $\alpha = -2k$, $k = 0,1,2,\ldots$

Por consiguiente, $<(S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}, \varphi>$ tiene dos conjuntos de singularidades, a saber,

$A = \{ \alpha : \alpha = n-2k , k = 1,2,\ldots \}$

$B = \{ \alpha : \alpha = -2k , k = 0,1,2,\ldots\}$

En este sentido se dice que la distribución $(S^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}$ tiene dos grupos de singularidades:

$$\alpha = n-2k, \; k = 1,2,\ldots \qquad (A,3,13)$$

y

$$\alpha = -2k, \; k = 0,1,2,\ldots \qquad (A,3,14)$$

BIBLIOGRAFIA

[1] BATEMAN MANUSCRIPT PROYECT, Higher Trascendental Functions, vol. I and II, Mc Graw Hill, New York, 1953.

[2] BATEMAN MANUSCRIPT PROYECT, Tables of Integral Transform vol. I and II, Mc Graw Hill, New York, 1954.

[3] BOLLINI,C.G., GIAMBIAGI J.J. and TIOMNO J., Singular Potential and Analitic Regularization in Classical Yang-Mills Equations, J. Math. Phys., 20(9), september 1979.

[4] BREDIMAS,A., La Differentiation d'Ordre Complexe, le Produit de Convolution Generalise et le Produit Canonique de Distributions au Sense de Gelfand-Shilov, Preprint N°129, Orsay-Mathematiques, 1975.

[5] BRESTERS,D.N., On Distributions Connectes with Quedratics Forms, S.I.A.M., J.Appl.Math. vol. 16, 563-581, 1968.

[6] FISHER,B., The Product of the Distributions $x_+^{-r-(1/2)}$ and $x_-^{-r-(1/2)}$, Proc.Camb.Phil.Soc.1972, 71, 123-130.

[7] FISHER,B., The Product of the Distributions x^{-r} and $\delta^{(r-1)}$ Proc.Camb.Phil.Soc. 1972, 72, 201-204.

[8] FISHER,B., The Generalized Function $(x+i0)^{\lambda}$, Proc.Camb.Phil. Soc., vol. 68, 707-708, 1970.

[9] FISHER,B., Some Results on the Products of Distributions, Proc.Camb.Phil.Soc., 73, 317-325, 1973.

[10] FISHER,B., The Product of Distributions Quarterly Journal of Mathematic, Oxford Series, S.2, 22, 291-298, 1971.

[11] FISHER,B., Singular Products of Distributions, Math.Ann.203,

[12] GELFAND,I.M. and SHILOV,G.E., Generalized Functions, vol. I, Academic Press, New York, 1964.

[13] GONZALEZ DOMINGUEZ,A., On Some Heterodox Distributional Multiplicative Products, Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. 29, 1980.

[14] GONZALEZ DOMINGUEZ,A. and SCARFIELLO,R., Nota sobre la Fórmula $V_p \frac{1}{x} \cdot \delta = -\frac{1}{2} \cdot \delta'$, Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. XVII, 53-56, 1955.

[15] GONZALEZ DOMINGUEZ,A. and TRIONE,S.E., On the Laplace Transforms of Retarted, Lorentz-Invariante Functions, Adv.in Math. 31 (1979), 51-62.

[16] GUERRA,F., On Analytic Regularization in Quantum Field Theory II, Nuovo Cimento, vol. IA, N°3, 523-535, 1971.

[17] HADAMARD, Le Probleme de Cauchy et les Equations aux Derivées Partielles Lineaires Hiperboliques, Paris, Hermann, (Nuovelle Edition), 1932.

[18] JAGER,E.M., Aplications of Distributions in Mathematical Physics, Tract 10, Math.Centres Amsterdam, 1964.

[19] KELLER,K., On the Multiplication of Distributions (III), Preprint,Aachen, October 1976.

[20] KELLER, K., On the Multiplication of Distributions (V), Preprint, Aachen, January 1977.

[21] KELLER,K., Analytic Regularizations, Finite Part Prescriptions and Products of Distributions, January 1978.

[22] LERAY,J., Hiperbolic Differential Equations, Mimeographed Lecture Notes, Institute of Advanced Study, Princeton, 1952.

[23] MIKUSINSKY,J., On the Square of the Dirac Delta-Distribution, Bull.Acad.Polon.Sci.,Serie des Sciences Math.,Astr. et Phys., vol. 14, N°9, 511-513, 1966.

[24] METHEE,P.D., Sur les Distributions dans le Groupe des Rotations de Lorentz, Thése Doctoral, Faculté des Sciences, Universite de Lausanne, Zurich, 1954.

[25] RIESZ,M., Le' Integrale de Riemann-Liouville et le Probléme de Cauchy, Acta Math.81 pp, 1-223,1949.

[26] SCHWARTZ,L., Théorie des Distributions, Hermann, Paris,1966.

[27] SCHWARTZ,L., Sur l'impossibilité de la Multiplication des Distributions, Comptes Rendus de L'Acad.des Sciences, Tome 239, 847-848, Paris, 1954.

[28] TRIONE,S.E., On Some Distributional Multiplicative Products, Serie I, Trabajos de Matemática (Preprint), N°20, Instituto Argentino de Matemática, I.A.M., CONICET, 1978.

[29] TRIONE,S.E., Distributional Convolution Products, Serie I, Trabajos de Matemática (Preprint), N°42, Instituto Argentino de Matemática, I.A.M., CONICET, 1983.

[30] TRIONE,S.E., Soluzione Elementari Causali Dell'Operatore de Klein-Gordon iterado, Rend.Classe Sci.Fis.Mat.et Not. Accad.Naz, dei Lincei, Serie VIII, vol. LII, Fasc. 5, 607-610, Maggio 1972.

[31] TRIONE,S.E., On the Fourier Transform of Causal Distributions, Studies in Applied Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge,USA, 55, 315-326, 1976.

[32] TRIONE,S.E., La Integral de Riemann-Liouville, Cursos y Seminarios de Matemática, Fasciculo 29, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

[33] TRIONE,S.E., Distributional Products, Cursos de Matemática N°3, Serie II, Instituto Argentino de Matemática, I.A.M., CONICET, 1980.

[34] TRIONE,S.E., On the Fourier Transforms of Retarded Lorentz Invariant Functions, Serie I, Trabajos de Matemática (Preprint) N°26, Instituto Argentino de Matemática, I.A.M., CONOCET, 1980.

[35] VLADIMIROV,V.S., Methods of the Theory of Functions of Several Complex Variables, The M.I.T. Press, Cambridge, 1966.

[36] WATSON,G.N., A Treatisc on the Theory of Bessel Functions, Second Edition, Cambridge, University Press, 1944.