

## Tesis de Posgrado

# Estabilidad de plasmas inhomogéneos con radio de larmor grande

Sicardi Schifino, Aníbal Carlos

1984

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Sicardi Schifino, Aníbal Carlos. (1984). Estabilidad de plasmas inhomogéneos con radio de larmor grande. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1851\\_SicardiSchifino.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1851_SicardiSchifino.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Sicardi Schifino, Aníbal Carlos. "Estabilidad de plasmas inhomogéneos con radio de larmor grande". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1984. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1851\\_SicardiSchifino.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1851_SicardiSchifino.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE FISICA  
LABORATORIO DE FISICA DEL PLASMA

ESTABILIDAD DE PLASMAS  
INHOMOGENEOS CON RADIO DE  
LARMOR GRANDE

ANIBAL CARLOS SICARDI SCHIFINO

Trabajo de Tesis presentado para optar  
al Título de Doctor en Ciencias Físicas

Director de Tesis: Prof. Dr. Constantino Ferro Fontán

1984

1851

- 1851 -

ej 2

A la memoria de mi madre  
y a mis dos  
hermanas Ariana y

## AGRADECIMIENTOS

- A mi familia, por el apoyo moral que me brindaron , y en especial a mi esposa por haber mecanografiado esta Tesis.

- A mi Director de Tesis y Consejero de Estudios, Prof. Dr. Constantino Ferro Fontán, por sus enseñanzas y su orientación.

- Al Laboratorio de Física del Plasma (Dpto. de Física, FCEN, UBA), que me ofreció la posibilidad y las facilidades de cómputo para poder realizar este trabajo, así como el apoyo material para el mismo.

También quisiera agradecer las valiosas charlas y discusiones sobre temas de cálculo numérico y computación sostenidas con varios de mis compañeros del Dpto. de Física, en particular con L. Bilbao, R. Mancini y C. Caputo, así como también los valiosos comentarios del Dr. F. Gratton sobre el experimento MIGMA.

I N D I C E

	Pag.
CAPITULO I	
INTRODUCCION.....	1
Referencias.....	9
CAPITULO II	
TEORIA CINETICA DE LA ESTABILIDAD DE LOS PLASMAS CON RADIO DE LARMOR GRANDE.....	10
Referencias.....	35
CAPITULO III	
LA TERMODINAMICA IRREVERSIBLE Y LA TEORIA TERMODINAMICA DE LA ESTABILIDAD EN LOS PLASMAS.....	37
Referencias.....	88
CAPITULO IV	
ESTUDIO VARIACIONAL DE LA ESTABILIDAD DE LOS PLASMAS CON RADIO DE LARMOR ARBITRARIO.....	92
Referencias.....	142
CAPITULO V	
ESTUDIO NUMERICO Y CONCLUSIONES.....	144
Referencias.....	162

## CAPITULO I

### - I N T R O D U C C I O N -

El 99 % del Universo se compone de materia en estado de plasma. La física del plasma es la llave que abrirá para el hombre la fuente de energía, prácticamente inagotable, de la fusión nuclear controlada. Sea para el conocimiento de las estructuras macroscópicas en que se halla organizada la materia en el espacio cósmico, como para el dominio de nuevas tecnologías, la teoría de la estabilidad de los plasmas es una disciplina fundamental.

Una característica de los plasmas es la variedad de escalas representativas de los fenómenos que en ellos pueden tener lugar. Como gases de partículas cargadas, en movimiento, dan origen a concentraciones de carga y de corriente eléctrica, con sus concomitantes campos eléctricos y magnéticos. En estos campos, a su vez, deben moverse las propias partículas - iones y electrones- del plasma. De entrada, se pone de manifiesto el carácter no lineal de la dinámica del plasma. De esta dinámica, la teoría de la estabilidad contempla solamente los primeros instantes, en una aproximación linealizada, de los procesos de transformación y cambios de estado de equilibrio en el plasma. Pero debe tenerse presente que los estados de equilibrio están, por lo general, muy apartados del llamado equilibrio termodinámico (o mejor, termoestático), debido a la alta densidad de energía que caracteriza a los plasmas y a la riqueza de sus grados de libertad colectivos. Así, un plasma rápidamente desarrolla estados turbulentos, que reflejan sus microinesta

bilidades, o bien muda violentamente de equilibrio cuando una reorganización en gran escala de sus cargas y corrientes le permite acceder a un estado de menor energía. Las microinestabilidades, de alta frecuencia y pequeña longitud de onda, producen cambios en las funciones de distribución de las partículas en la dirección del equilibrio termodinámico. No obstante, debe mencionarse la facultad de los plasmas de organizarse, en una etapa posterior no lineal, en estructuras coherentes (solitones, espicones, etc.) que constituyen su estado de turbulencia fuerte. En este trabajo no nos ocuparemos de esta fase tan avanzada de la evolución de un plasma, sino más bien de la primera en el orden fenomenológico, es decir de su estabilidad macroscópica, o mejor dicho, de sus macroinestabilidades de baja frecuencia. Pero conviene tener en cuenta que no existe una frontera claramente definida que separe los tipos de inestabilidad, sino una graduación continua de escalas.

Es evidente que la inhomogeneidad de un sistema constituye un desequilibrio, que puede alimentar una inestabilidad si se dan condiciones favorables. La inhomogeneidad es inevitable en dispositivos realistas, como las máquinas de plasma destinadas a confinarlo con vistas a su empleo en futuros reactores de fusión. En el concepto de confinamiento magnético, son las líneas de fuerza de un campo magnético las encargadas de restringir los grados de libertad de las partículas del plasma transversales al campo, evitando así el contacto con paredes, que provocaría un rápido enfriamiento del sistema.

Esto impediría la utilización del mismo como reactor. La presencia del campo magnético introduce dos nuevos parámetros, que caracterizan el movimiento individual de las partículas del plasma: el radio de su órbita en el campo magnético (supuesto, por un instante, homogéneo), o radio de Larmor ( $\rho_L$ ), y la frecuencia con que recorre la órbita, llamada frecuencia de Larmor o de ciclotrón ( $\omega_c$ )

$$\begin{aligned}\omega_c &= eB/mc \quad , \\ \rho_L &= v_{\perp}/\omega_c \quad .\end{aligned}\tag{I.1}$$

Aquí,  $e$  y  $m$  son la carga y masa de la partícula,  $v_{\perp}$  es su velocidad transversal al campo  $B$ , y  $c$  es la velocidad de la luz. Nótese que para igual  $v_{\perp}$ , mayor  $B$  implica mayor frecuencia de ciclotrón y menor radio de Larmor, es decir un confinamiento más eficaz de los desplazamientos transversales. Asimismo, la dependencia con  $m$ , muestra que es más difícil restringir el movimiento de los iones - debido a su mayor inercia - que el de los electrones.

En el límite en que el radio de Larmor es mucho menor que la escala de los movimientos macroscópicos del plasma, y al mismo tiempo el período de ciclotrón iónico es mucho menor que los tiempos característicos, el plasma se puede tratar como un fluido neutro, pero conductor y sensible a la acción del campo magnético debido a la fuerza de Lorentz. Esta aproximación se conoce como magnetohidrodinámica (MHD), y ha sido muy utilizada en la teoría de estabilidad de plasmas. Naturalmente, también se requiere que los



períodos de plasma (de electrones e iones), y la longitud de Debye

$$\lambda_D = (kT / 4\pi ne^2)^{1/2} \approx 7 [T(^{\circ}K)/n(\text{cm}^{-3})]^{1/2}, \quad (1.2)$$

sean despreciables frente al tiempo y longitudes de onda características (a fin de no considerar efectos de carga espacial). Recientemente, la aplicación de la MHD ideal (sin viscosidad, conductividad térmica ni resistividad eléctrica) al caso de los espejos magnéticos axisimétricos (que nos interesan particularmente como dispositivo de fusión), fue reseñada y extendida por D' Ippolito, Hafizi y Myra<sup>(1)</sup>.

La aproximación MHD equivale, en líneas generales, a suponer que las partículas del plasma carecen de inercia, pero muchos de los fenómenos observados violan esta condición. Por ejemplo, es insostenible cuando algún componente del plasma posee alta energía, como en muchos sistemas actualmente estudiados, en los que se inyectan haces iónicos acelerados o electrones calientes. En tales circunstancias, las especies con dicha característica requieren un tratamiento cinético completo, usando para ello la ecuación de Vlasov.

En estos plasmas, una consideración detallada muestra en todos los casos que el parámetro  $\alpha = (k\rho)^2$ , siendo  $k$  el número de ondas de un modo inestable y  $\rho$  el radio de Larmor típico de la especie involucrada, supera un cierto valor, que depende del problema. Por ejemplo, en un campo eléctrico inestable  $\underline{E}$ , cruzado con un campo magnético, los electrones derivan con una velocidad mayor que los iones, debido a la inhomogeneidad de  $\underline{E}$ ,

que es percibida con más facilidad por los iones, pues éstos, en un plasma isotérmico, tienen mayor radio de Larmor<sup>(2)</sup>. El efecto produce un desplazamiento relativo de cargas y puede estabilizar al plasma si<sup>(3)</sup>

$$(k\rho_i)^2 \gtrsim w/w_{ci} . \quad (I.3)$$

Plasmas donde se cumplen condiciones como la (I.3) se distinguen con el nombre de "plasmas con radio de Larmor finito", aludiendo al hecho de que no es posible conservar los efectos físicos en ellos observados al tomar el límite MHD, ya que ambos miembros de (I.3) se anulan.

La teoría de la estabilidad de los plasmas con radio de Larmor finito debe desarrollarse, como ya dijimos, a partir de la ecuación de Vlasov. En consecuencia, el marco matemático en que se realizan los cálculos de estabilidad es muchísimo más complejo que para la estabilidad MHD. Habitualmente, para simplificar las ecuaciones, se realiza una expansión en potencias de un parámetro pequeño  $\epsilon$ , y se retienen todos los términos dominantes de igual orden. En el ordenamiento apropiado para describir el efecto de la desigualdad (I.3) se toma

$k\rho_i = O(\epsilon)$  y  $w/w_{ci} = O(\epsilon^2)$ <sup>(3)</sup>. Otros ordenamientos son posibles<sup>(4)</sup>. En particular, el objeto de esta tesis es estudiar un ordenamiento en que los efectos del radio de Larmor iónico sean tomados en consideración en forma exacta, es decir

$k\rho_i = O(1)$  y también  $\rho_i/a = O(1)$ , donde  $a$  es la escala

típica de inhomogeneidad del plasma, al que llamaremos "plasma con radio de Larmor grande". En este sistema, el tamaño de la órbita iónica es comparable a las dimensiones macroscópicas.

El plan de la tesis es el siguiente. En el capítulo II se presenta la integración de la ecuación de Vlasov por el método de las características, señalándose la imposibilidad práctica de desarrollar ese tipo de cálculo en un plasma inhomogéneo con órbitas macroscópicas, ya que para ellas no es posible desarrollar la inhomogeneidad sobre la órbita en algún parámetro pequeño.

El origen de la dificultad es el uso de la variable tiempo en la integración de la ecuación de Vlasov. Un formalismo conjugado que emplea la variable canónica hamiltoniana es sugerido por analogía con la mecánica cuántica. Los autoestados del operador de Liouville de orden cero forman una base estacionaria que permite integrar sin dificultad la ecuación de Vlasov, a primer orden en la perturbación. Estos autoestados, que son verdaderas "funciones de onda" del problema, contienen toda la información sobre las inhomogeneidades, y pueden ser computados numéricamente en los casos que no admiten tratamiento analítico. A diferencia de lo que ocurre en la ecuación cuántica de Schrödinger, gracias a que la mecánica subyacente es clásica, la integración se reduce a simples cuadraturas sobre la trayectoria en los campos de equilibrio (no perturbados).

Asimismo se presenta un esquema electrodinámico en que los electrones, supuestos cálidos o fríos, son tratados en aproximación

MHD. Este modelo híbrido, llamado de Vlasov-fluido, será utilizado en los capítulos finales.

El capítulo III intenta dar una formulación unificada de los "principios de energía" usados en la física del plasma para los estudios de estabilidad. Para ello, el enfoque elegido es el de la termodinámica de procesos apartados del equilibrio (también llamada "irreversible"), que hasta el presente trabajo no había sido utilizada en física del plasma, salvo una referencia lejana, hecha por Chandrasekhar, al principio de mínima disipación. Se presentan en este capítulo las herramientas fundamentales, y se reseña el trabajo de las distintas escuelas. Un concepto central es el de función de Lyapunov, cuya existencia y construcción son encaradas desde el punto de vista macroscópico y el microscópico. Se muestra en ambos casos que si la disipación es semidefinida positiva, la función de Lyapunov existe y está relacionada a un exceso de entropía, que se calcula a partir de las ecuaciones de regresión de Onsager del problema.

Como aplicación inmediata de la teoría general se redemuestran dos principios de energía de la magnetohidrodinámica, ideal<sup>(5)</sup> y disipativa<sup>(6)</sup>. Asimismo, se investigan dos inestabilidades termoeléctricas a la luz del formalismo generalizado de la función de Lyapunov para plasmas fuera de equilibrio. Los resultados obtenidos<sup>(7)</sup> concuerdan con los análisis de modos normales<sup>(8, 9)</sup>. El capítulo IV está dedicado a la estabilidad de los plasmas de Vlasov, usando para ello las técnicas de los capítulos anteriores. Con toda generalidad, y de manera unificada, se reobtienen

los teoremas de estabilidad debidos a Newcomb y Rosenbluth<sup>(10)</sup>, Seyler y Lewis<sup>(11)</sup> y Sudan y Rosenbluth<sup>(12)</sup>. Los resultados de este capítulo permiten extender la aplicación de principios de probada amplia validez al caso del MIGMA, un experimento que consiste en un espejo axisimétrico simple, con iones de alta energía inyectados con muy bajo momento angular. Este es un típico ejemplo de plasma con radio de Larmor grande, ya que el diámetro de la columna es sólo unas dos veces el diámetro de las órbitas iónicas. El cálculo de estabilidad para un modo "flute", bien conocido por su inestabilidad, se realiza en el capítulo V. Primero, se analizan las dificultades del cómputo de los modos normales, debidas al tamaño y las características de las matrices involucradas. Un estudio menos detallado, pero igualmente efectivo en ciertas circunstancias, es investigar la satisfacción del criterio de Lyapunov. Así, se logra mostrar que un desplazamiento rígido de la columna del MIGMA es inestable en el campo magnético del espejo simple (el modo  $m = 1$ ). La inestabilidad, que constituye un defecto característico de los espejos simples, era esperada, a pesar del tamaño de las órbitas, pues este modo no es estabilizado por efectos de radio de Larmor finito.

El capítulo V se cierra con las conclusiones del trabajo y las perspectivas para futuras investigaciones.

Salvo en donde se indica explícitamente lo contrario, se usan siempre, en esta Tesis, unidades CGS gaussianas.

REFERENCIAS DEL CAPITULO I

- 1.- D' Ippolito, Hafizi & Myra: Phys. Fluids 25, 2223 (1982)
- 2.- F.C. Hoh: Phys. Fluids 6, 1359 (1963)
- 3.- M.N. Rosenbluth, N.A. Krall & N. Rostoker: Nucl. Fus., Suppl. N° 1, 143 (1962)
- 4.- C.E. Seyler & D. Barnes: Phys. Fluids 24 (11), 1989 (1981)
- 5.- I.B. Bernstein, E.A. Frieman, M.D. Kruskal & R.M. Kulsrud: Proc. Roy. Soc. A 224, 17 (1958)
- 6.- H. Tasso: Z. Naturforsch 33 A, 257 (1978)
- 7.- A. Sicardi Schifino, & C. Ferro Fontán: 1981 IEEE Int. Conf. Plasma Science, Santa Fe, Nuevo México.
- 8.- C. Ferro Fontán & A. Sicardi Schifino, en: "Energy Storage, Compression, and Switching", vol. 2, 607 (Nardi, Sahlin & Bostick, eds.; Plenum, 1983)
- 9.- M.G. Haines: J. Plasma Phys. 12 (1), 1 (1974)
- 10.- W.A. Newcomb, en el apéndice de I.B. Bernstein: Phys. Rev. 109, 10 (1958)
- 11.- C.E. Seyler & H.R. Lewis: J. Plasma Phys. 27 (1), 37 (1982)
- 12.- R.N. Sudan & M.N. Rosenbluth: Phys. Fluids 22 (2), 282 (1979)

## CAPITULO II

### TEORIA CINETICA DE LA ESTABILIDAD DE LOS PLASMAS CON RADIO DE LARMOR GRANDE

Las técnicas habituales en Física del Plasma<sup>(1)</sup> para estudiar la estabilidad de un sistema confinado magnéticamente (por ejemplo, un espejo) se basan en suponer un radio de Larmor iónico pequeño, o incluso nulo.

Sin embargo, en algunos experimentos actuales, el radio de Larmor iónico,  $r_{L1}$ , puede llegar a ser comparable con las dimensiones del sistema, y claramente mayor que la escala típica de inhomogeneidad del mismo. Por ejemplo, en el experimento MIGMA, el radio del plasma es del orden de  $2r_{L1}$ . Está claro que en sistemas de este tipo, a causa del gran valor de  $r_{L1}$ , los iones deben describirse por medio de la ecuación de Vlasov. En cuanto a los electrones, aunque siempre es posible representarlos por otra ecuación de Vlasov, se pueden tratar aproximadamente como un fluido frío sin inercia. Además, por supuesto, se deben agregar las ecuaciones de Maxwell para tomar en cuenta al campo electromagnético.

Corrientemente, la ecuación de Vlasov se resuelve por el método de las características<sup>(1, 2, 3, 4)</sup>. Esta técnica, usual en el estudio de plasmas homogéneos y de plasmas inhomogéneos con pequeño radio de Larmor, presenta, en el caso de plasmas con  $r_{L1}$  grande, dificultades que la hacen de muy difícil aplicación.

Consideremos el caso especialmente simple de un plasma formado por una sola especie de partículas, con un fondo neutralizador.

Tratemos dicho plasma con la ecuación de Vlasov sin colisiones (para una especie) y supongamos que sólo pueden aparecer modos electrostáticos, con lo cual la perturbación del campo electromagnético puede describirse por la ecuación de Poisson. Si la densidad del plasma a orden cero es  $n_0$  y la frecuencia de ciclotrón (a orden cero) es  $\Omega$ , definiendo el vector  $\underline{\Omega}$  que apunta en la dirección del campo magnético (a orden cero) y tiene módulo  $\Omega$ , supuesto que las partículas del plasma tienen masa  $\mu$  y carga  $Q$ , se obtiene, linealizando las ecuaciones de Vlasov ( $f = f_0 + f_1$ ) y de Poisson ( $\phi = \phi_1$ )

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_0 f_1 \equiv \frac{\partial f_1}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} f_1 + \underline{v} \times \underline{\Omega} \cdot \underline{\nabla}_v f_1 = \frac{Q}{\mu} \underline{\nabla} \phi_1 \cdot \underline{\nabla}_v f_0, \quad (\text{II.1})$$

$$\nabla^2 \phi_1 = -4\pi n_0 Q \int d^3v f_1 \equiv -4\pi \rho_1 \quad (\text{II.2})$$

Si el fondo neutralizador tiene una función dieléctrica distinta de la unidad, ésta debe incluirse en (II.2). Si ahora se integra (II.1) por el método de las características, se tiene

$$f_1(\underline{r}, \underline{v}, t) = \frac{Q}{\mu} \int_{-\infty}^t dt' \underline{\nabla}' \phi_1(\underline{r}', \underline{v}', t') \cdot \underline{\nabla}_v f_0(\underline{r}', \underline{v}'), \quad (\text{II.3})$$

donde la integral en  $t'$  es una integral "a lo largo de la trayectoria" (sin perturbar), dada por

$$d\underline{r}'/dt' = \underline{v}'; \quad d\underline{v}'/dt' = \underline{v}' \times \underline{\Omega}(\underline{r}') \quad (\text{II.4})$$



Si el plasma es homogéneo, o bien inhomogéneo pero con radio de Larmor despreciable, la integral orbital (II.3) se realiza sin problemas<sup>(1, 2)</sup>. Si el radio de Larmor  $r_L$  es pequeño, aunque no despreciable, es aún posible calcular la integral orbital (II.3), desarrollando el integrando en serie de potencias de  $r_L$ <sup>(5, 6)</sup>. Pero si  $r_L$  es grande, la integral (II.3) es muy difícil de evaluar. Hay casos especiales<sup>(7, 8, 9, 10, 11)</sup> en que aún con un valor grande del radio de Larmor  $r_L$  la integral orbital (II.3) se puede obtener analíticamente. En particular esto es cierto si el campo magnético (a orden cero) es uniforme, o sea si  $\Omega(\underline{r}) = \Omega_0$ , independiente de  $\underline{r}$ <sup>(8)</sup>. Siempre es posible evaluar numéricamente la integral (II.3), pero en general esta integral depende en forma complicada de la frecuencia  $w$  de la perturbación (que aparece cuando se hace un análisis de Fourier en el tiempo de la perturbación:  $\phi_1, f_1 \sim e^{-iwt}$ ), y se hace necesario realizar el cálculo numérico de la integral orbital para cada valor posible de la frecuencia  $w$ .

Esto muestra la dificultad que hace inaplicable, en el caso general con  $r_L$  grande, el método de las características: Cuando es posible calcular analíticamente la integral orbital, combinando (II.2) y (II.3) para un modo de Fourier, se obtiene la relación de dispersión del problema

$$D(w) = 0 \quad (\text{II.5})$$

que da la frecuencia de la perturbación. Pero si la integral orbital debe computarse, la raíz de la ecuación (II.5) debe encontrarse numéricamente, lo cual demanda un tiempo de cálculo muy largo.

Designemos con  $I$  la integral orbital que aparece en la ecuación (II.3).

Puesto que la dificultad esencial para resolver la ecuación de Vlasov en el caso de un plasma con  $r_L$  grande y  $\underline{B}(\underline{r})$  no uniforme, está en el cálculo de la integral orbital  $I$ , lo ideal sería tener un método para resolver la ecuación de Vlasov (II.1), en que la integral  $I$  ni siquiera se planteara.

Para entender la causa por la cual aparece  $I$  en el cálculo, conviene adoptar el punto de vista de la Mecánica Cuántica, aún cuando el problema físico estudiado sea totalmente clásico. La ventaja de tratar cuánticamente problemas clásicos complicados, en Física del Plasma, fue ya puesta en evidencia por varios autores<sup>(11,12,13,14)</sup>. Desde un punto de vista cuántico, el tratamiento clásico habitual de la ecuación de Vlasov por el método de las características, equivale a elegir, como base del espacio de Hilbert, una base de estados coherentes, en vez de la base canónica formada por los autoestados del hamiltoniano<sup>(15)</sup>.

Ahora bien, es ésta precisamente, la causa de que en los cálculos aparezca la integral orbital  $I$ . Está claro que, volviendo a la base canónica de autoestados del hamiltoniano  $H_0$  sin perturbar, y como éstos sólo se modifican en un factor de fase, esta integral es ahora trivial.

Este tratamiento ha sido aplicado por Harris y por Virtamo, para

el caso de un plasma en un campo magnético  $\underline{B}_0$  uniforme<sup>(11,12)</sup>. En particular, el cálculo de Virtamo es para un plasma inhomogéneo, con radio de Larmor grande, pero en él se supone una forma especialmente simple para  $f_0$ <sup>(11)</sup>.

Es posible, sin embargo, modificar su cálculo para que sea válido para cualquier  $f_0$ . Supondremos, por simplicidad, que el plasma está formado por una sola clase de partículas. Sea  $H_0$  el hamiltoniano de Hartree-Fock del plasma en equilibrio. No es necesario hacer mayores hipótesis sobre la forma de  $H_0$ , salvo la importante suposición de que se sabe resolver exactamente la correspondiente ecuación de Schrödinger, es decir hallar los autovalores de  $H_0$  y sus correspondientes funciones propias

$$H_0 \varphi_n = E_n \varphi_n, \quad (\text{II.6})$$

donde  $n$  es un índice (ocasionalmente múltiple) que representa los números cuánticos del problema. En particular, si a orden cero sólo hay presente un campo magnético uniforme  $\underline{B}_0$  (y no hay campo eléctrico), se tiene

$$H_0 = \frac{1}{2\mu} \left( \underline{p} - \frac{q}{c} \underline{A}_0 \right)^2; \quad \underline{A}_0 = \frac{1}{2} \underline{B}_0 \times \underline{r} \quad (\text{II.7})$$

La ecuación de Schrödinger para este hamiltoniano se ha discutido ampliamente en la literatura<sup>(16,17,18,19)</sup>.

El análogo cuántico de la ecuación Vlasov es la ecuación de Schrödinger - Von Neumann para el operador densidad  $\rho$ <sup>(17,20,21,22,23,24)</sup>.

$$i \hbar \dot{\rho} = [H, \rho], \quad (\text{II.8})$$

donde  $H = H_0 + H_1$  es el hamiltoniano de Hartree-Fock del plasma, cuando se ha introducido la perturbación  $f_1$  en la función de distribución. Autoconsistentemente, de forma que se cumplan las ecuaciones de Maxwell, las perturbaciones correspondientes del campo electromagnético vienen expresadas por  $\underline{A}_1$  y  $\phi_1$ . Por simplicidad asumiremos  $\underline{A}_1 = 0$ , lo que equivale a considerar como posibles perturbaciones sólo modos electrostáticos, dados por  $\phi_1$ . Entonces resulta  $H_1 = Q \phi_1$ .

Luego, debe agregarse a la versión linealizada de (II.8), que es el equivalente cuántico de (II.1),

$$i \hbar \dot{f}_1 = [H_1, f_0] + [H_0, f_1] \quad (f = f_0 + f_1) \quad (\text{II.9})$$

la ecuación de Poisson linealizada (II.2). Así pues, el análogo cuántico del sistema de ecuaciones (II.1) - (II.2) es el dado por (II.9) y (II.2).

La ecuación (II.8) a orden cero nos permite observar que  $f_0$  debe conmutar con  $H_0$ . Luego debe existir una base de autoestados de  $H_0$ , en que la matriz densidad a orden cero es diagonal; si los kets de esa base se representan por  $\{|n\rangle\}$ , se tiene

$$f_0 = \sum_n f_n |n\rangle \langle n| \quad (f_n \equiv \langle n | f_0 | n \rangle) \quad (\text{II.10})$$

Haciendo ahora un análisis de Fourier en el tiempo de la perturbación ( $f_1, \phi_1 \sim e^{-i\omega t}$ ), se puede escribir en dicha base  $\{|n\rangle\}$  la ecuación (II.9), en la forma

$$\hbar \omega \langle m | f_1 | n \rangle = \langle m | H_1 | n \rangle (f_n - f_m) + (E_m - E_n) \langle m | f_1 | n \rangle, \quad (\text{II.11})$$

o sea

$$\langle m | \rho_1 | n \rangle = \frac{\langle m | H_1 | n \rangle}{w - w_{mn}} \left( \frac{f_n - f_m}{\hbar} \right), \quad (\text{II.12})$$

donde es

$$E_n = \langle n | H_0 | n \rangle; \quad w_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$$

La ecuación (II.12) es la solución de la ecuación de Vlasov cuántica, y como se ve no contiene integral orbital, como ocurre con la solución clásica por el método de las características.

La base  $\{|n\rangle\}$  será la base propia común a  $H_0$  y otras constantes de movimiento (como el momento angular canónico, etc) que forman junto con  $H_0$  un conjunto completo de observables que conmutan  $\{\alpha_i\}; i = 1, \dots$  (18,22)

El límite clásico de (II.12), que es lo que en realidad nos interesa, se obtiene pasando al límite  $\hbar \rightarrow 0$  en (II.12). Para ello es necesario tener en cuenta que las diferencias  $(f_n - f_m)/\hbar$  tienden a valores proporcionales a las derivadas de la función de distribución  $f_0$  respecto de las constantes de movimiento

$\alpha_i (i = 1, \dots)$  que forman el conjunto completo de observables  $\{\alpha_i\}$ .

O sea

$$\frac{f_n - f_m}{\hbar} \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \sum_i \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_i} \beta_i(n), \quad (\text{II.13})$$

donde los coeficientes  $\beta_i(n)$  se determinan en un cálculo detallado. Este límite (II.13) lo notaremos  $\partial f_0 / \partial n$ .

Supuesto además que se conoce el límite clásico de los elementos de matriz  $\langle m | H_1 | n \rangle$  y de  $w_{mn}$

$$w_{mn} \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \mathcal{W}_{mn}^0, \quad \langle m | H_1 | n \rangle \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \mathcal{H}_{mn}^0,$$

se puede, finalmente tomar el límite clásico de (II.12)

$$\langle m | \rho_1 | n \rangle \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_{mn}^0}{w - \mathcal{W}_{mn}^0} \frac{\partial r_0}{\partial n} = \frac{\mathcal{H}_{mn}^0}{D_0(w)} \frac{\partial r_0}{\partial n} \quad \omega_0(w) \equiv w - \mathcal{W}_{mn}^0. \quad (\text{II.14})$$

Por ejemplo, en el caso de campo a orden cero uniforme, con  $H_0$  dado en (II.7), se tiene que  $n$  es un índice triple, es decir

$$|n\rangle \equiv |\nu sk\rangle; \quad E_n = E_{\nu sk} = E_{\nu k}$$

donde  $\nu, s$  son índices discretos y  $k$  es un índice continuo, no dependiendo de  $s$  los niveles de energía. Dichos niveles son (17,18,19)

$$E_{\nu k} = \hbar \Omega_0(\nu) + 1/2 + \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \quad \therefore \mathcal{W}_{\ell, q}^0 = \ell \Omega_0 + v_{\parallel} q \quad (\ell \equiv \nu_m - \nu_n; q \equiv k_m - k_n)$$

$$\text{y luego} \quad D_0(w) = w - \ell \Omega_0 - v_{\parallel} q. \quad (\text{II.15})$$

En cuanto al cálculo de los elementos de matriz  $\mathcal{H}_{mn}^0$ , se puede realizar, usando que  $H_1 = Q\phi_1$ , y expresando a  $\phi_1$  como

$$\phi_1 = \phi(\underline{r}, t) = \phi_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\underline{r} - i\omega t}$$

(si se asumen condiciones de borde cilíndricas, conviene realizar un análisis de Fourier - Bessel<sup>(8)</sup>, en que la perturbación  $\phi_1$  es proporcional a una función de Bessel en la variable radial y a  $\exp(i\ell\theta + ikz - i\omega t)$ ).

El cálculo detallado ha sido hecho por Virtamo<sup>(11,19)</sup> quien obtuvo los elementos de matriz  $\langle m | H_1 | n \rangle$  en términos de funciones de Laguerre. Al tomar el límite clásico del resultado de Virtamo, usando ciertas conocidas relaciones de las funciones especiales, se puede mostrar que las funciones de Laguerre se transforman, en este límite, en funciones de Bessel.

Realizando el cálculo en forma detallada es posible mostrar que se obtiene la misma relación de dispersión (II.5), para el caso de  $B_0$  uniforme que estamos considerando, que por el método clásico de las características<sup>(11)</sup>.

La única diferencia entre nuestra presentación y la de Virtamo<sup>(11)</sup> es que nosotros factorizamos la ecuación (II.12) en  $(f_n - f_m)/\hbar$ , el elemento de matriz  $\langle m | H_1 | n \rangle$  y la inversa de  $(w - w_{mn})$ , y tomamos el límite clásico de cada factor, para lo cual no se requiere ninguna hipótesis sobre  $f_0$  como necesita Virtamo en su cálculo, por lo cual nuestro método es más general.

Ahora bien, aunque este procedimiento permite reproducir los resultados obtenidos por el método de las características, incluso en casos difíciles, como los discutidos por Davidson<sup>(8)</sup>, no es aplicable al caso de  $r_L$  grande, con  $B(r)$  no uniforme.

La causa de ello es que si bien se sabe resolver exactamente la ecuación de Schrödinger para una partícula cargada en un campo magnético uniforme  $B_0$ , no se conoce, en cambio, la solución de esta ecuación para el caso de un campo magnético no uniforme. Luego no es posible obtener los niveles de energía ni las correspondientes funciones de onda.

Podría pensarse, entonces, en intentar buscar una solución aproximada de esta ecuación de Schrödinger, pero las aproximaciones a realizar deberían ser consistentes con que luego se tomara el límite clásico. Esto excluye, por ejemplo, una solución perturbativa de la ecuación  $H_0 \psi_n = E_n \psi_n$ .

Surge entonces una idea mejor: ¿No será posible realizar un cálculo que sea totalmente clásico desde el comienzo, pero que se asemeje al cálculo cuántico antes esbozado, en el sentido de que describa la evolución del sistema en términos de una base de estados estacionarios (a orden cero) y no en términos de una base de estados coherentes, como en el método de las características?

Como veremos a continuación, la respuesta a esta pregunta es afirmativa. La idea del método a seguir está en la analogía existente entre la ecuación de Liouville (o en nuestro caso, la de Vlasov) y la ecuación de Schrödinger<sup>(20,25)</sup>. Esta idea ha sido desarrollada recientemente en una serie de trabajos por Symon, Lewis, Seyler y Barnes<sup>(26,27,28,29,30,31)</sup>.

Hasta ahora hemos usado dos tratamientos equivalentes: uno clásico, en base a las ecuaciones (II.1) y (II.2); y otro cuántico, en base a las ecuaciones (II.9) y (II.2). En ambos hicimos una serie de hipótesis simplificadoras (una sola especie de partículas, sólo modos electrostáticos, etc), y se supuso que el campo a orden cero era  $\underline{B}(\underline{r})$ . En realidad, se particularizó luego más al suponer  $\underline{B}(\underline{r}) = \underline{B}_0$  uniforme. En el tratamiento cuántico se tenía

$$H_0 = \frac{1}{2\mu} \left( \underline{p} - \frac{Q}{c} \underline{A}_0(\underline{r}) \right)^2; \quad H_1 = Q \phi_1 \left( \underline{\nabla} \times \underline{A}_0(\underline{r}) = \underline{B}(\underline{r}) \right) . \quad (\text{II.16})$$



En especial, si  $\underline{B}(\underline{r}) = \underline{B}_0$ , uniforme, de (II.16) se sigue (II.7). Las ecuaciones (II.1) y (II.2), que son la base del tratamiento clásico, se escriben en forma compacta

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \hat{L}_0 f_1 = [H_1, f_0], \quad (\text{II.17})$$

$$\hat{L} \eta_1 = \int d^3v J f_1, \quad (\text{II.18})$$

donde los corchetes en estas ecuaciones, son corchetes de Poisson, y es

$$\hat{L}_0 \equiv [ \quad, H_0 ] = \underline{v} \cdot \underline{\nabla} + \underline{v} \times \underline{\Omega} \cdot \underline{\nabla}_v; \quad \hat{L} = - \frac{1}{4\pi n_0} \nabla^2; \quad J = Q; \quad \eta_1 = \rho_1, \quad (\text{II.19})$$

$H_0$  y  $H_1$  coinciden con los dados en (II.16). En especial es

$$H_1 = J \eta_1; \quad [H_1, f_0] = \frac{J}{\mu} \underline{\nabla} \eta_1 \cdot \underline{\nabla} f_0 \quad (\text{II.20})$$

El límite clásico de (II.9) es (II.17) y el de (II.8) es

$$\partial f / \partial t + \hat{L} f = 0; \quad \hat{L} = [ \quad, H ] \quad (H = H_0 + H_1) \quad (\text{II.21})$$

La versión a orden cero de (II.21) es que  $\hat{L}_0 f_0 = 0$ , o sea que  $f_0$  es una función propia del operador  $\hat{L}_0$  con autovalor cero.

La versión linealizada (a primer orden) de (II.21) es (II.17).

El operador  $\hat{L}$  se llama Liouvillano, y  $\hat{L}_0$  es el Liouvillano a orden cero.

Cambiando la definición del operador diferencial  $\hat{L}$  y de  $J$ , el sistema de ecuaciones (II.17) - (II.18), salvo alguna ligera modificación (como que  $\eta_1$  en vez de ser igual a  $\rho_1$ , sea un vector

de  $\mathbb{R}^3$  o de  $\mathbb{R}^4$ , o que  $f$  pueda ser también un vector) representa en realidad una situación mucho más general que la discutida hasta ahora. También es general la validez de (II.21) y que  $\hat{L}_0 = [ \quad , H_0 ]$  y  $H_1 = J \eta_1$ .

Así, por ejemplo, consideremos un plasma formado por varias ( $n$ ) especies de partículas, tratadas cada una de ellas por la ecuación de Vlasov, y supongamos que se considera una perturbación arbitraria, por lo cual en vez de la ecuación de Poisson (II.2), hay que usar las ecuaciones de Maxwell. Esta es, sin duda, la situación más general que se puede plantear.

En este caso es posible identificar a  $\eta_1$  con el cuadrivector  $(\phi_1, \underline{A}_1)$  y a  $f_1$  con el vector  $(f_1^{(1)}, \dots, f_1^{(s)}, \dots, f_1^{(n)})$ , y análogamente a  $f_0$  con el vector  $(f_0^{(1)}, \dots, f_0^{(s)}, \dots, f_0^{(n)})$ , donde  $1 \leq s \leq n$ ;  $f^{(s)}$  es la función de distribución de la especie  $s$ . Ahora si  $J$  se identifica con una matriz de  $(n \times 4)$  o sea un vector  $(J_1, \dots, J_s, \dots, J_n)$ , donde  $J_s$  es a su vez un cuadrivector

$$J_s = \begin{pmatrix} Q_s \\ \frac{-Q_s}{cM_s} \left( \underline{p}_s - \frac{Q_s}{c} \underline{A}_0 \right) \end{pmatrix}, \quad (II.22)$$

donde  $Q_s$  es la carga y  $M_s$  la masa de una partícula de la especie  $s$ ,  $c$  es la velocidad de la luz,  $\underline{A}_0$  el potencial vector a orden cero,  $\underline{A}_0 = \underline{A}_0(\underline{r})$ , y donde  $\underline{p}_s$  es el impulso canónico de una partícula de la especie  $s$

$$\underline{p}_s = M_s \underline{v} + \frac{Q_s}{c} \underline{A} \quad ; \quad \underline{A} = \underline{A}_0 + \underline{A}_1 \quad ; \quad (II.23)$$

se tiene que<sup>(26,29)</sup> las ecuaciones, a primer orden en la perturbación, que describen este sistema, supuesto que se eligió una medida en que  $\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = \underline{\nabla} \cdot (\underline{A}_0 + \underline{A}_1) = 0$  son

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}_S^{(\omega)} \right) f_1^{(s)} = [H_1^{(s)}, f_0^{(s)}] \quad (\text{II.24})$$

$$\hat{\Lambda} \eta_1 = \sum_s \int d^3 p_s J_s f_1^{(s)} \quad (\text{II.25})$$

donde se ha eliminado un factor  $M_s^3$  renormalizando convenientemente la función de distribución  $f^{(s)}$ , y es

$$\hat{L}_S^{(\omega)} = [ , H_0^{(s)} ]; \quad H_0^{(s)} = \frac{1}{2M_s} \left( \underline{p}_s - \frac{Q_s}{c} \underline{A}_0 \right)^2 + Q_s \phi_0; \quad H_1^{(s)} = J_s \eta_1, \quad (\text{II.26})$$

$$\hat{\Lambda} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} -\nabla^2 & 0 \\ \frac{1}{c} \underline{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} & \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \sum_s w_p^{(s)2} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.27})$$

siendo además

$$w_p^{(s)2}(\underline{r}) = \frac{4\pi Q_s^2}{M_s} \int d^3 p_s f_0^{(s)}(\underline{r}, \underline{p}) \quad (\text{II.28})$$

La ecuación (II.25) es una ecuación entre cuadvectores, y se debe interpretar el producto  $J_s \eta_1$ , que se iguala a  $H_1^{(s)}$  en (II.26), como un producto escalar entre cuadvectores. Obviamente, el sistema de ecuaciones (II.24)-(II.25) así obtenido es muy similar al sistema de ecuaciones (II.17)-(II.18) y, a los efectos de los desarrollos que luego haremos, puede identificársele

con él sin mayor dificultad.

Otro caso interesante es el de un plasma compuesto por una especie iónica de gran radio de Larmor (iones calientes), que debe tratarse por una ecuación de Vlasov, y por electrones fríos, que son considerados como un fluido frío sin inercia. Eventualmente, podría haber presentes también iones fríos que fuesen asimilables a un fluido iónico.

El caso de perturbaciones de baja frecuencia en un plasma de iones calientes y electrones fríos es el llamado modelo de "Vlasov-fluido" (26, 29, 30). En este caso debe ser

$$\underline{E} + \frac{1}{c}(\underline{u} \times \underline{B}) = 0; \quad \text{e } \underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (\text{II.29})$$

$$(\underline{\nabla} \times \underline{B}) \times \underline{B} = 4\pi Q \int (\underline{E} + \frac{\underline{v} \times \underline{B}}{c}) f d^3v \quad (\text{II.30})$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} f + \frac{Q}{M} (\underline{E} + \frac{\underline{v} \times \underline{B}}{c}) \cdot \underline{\nabla}_v f = 0 \quad (\text{II.31})$$

donde  $Q$  es la carga y  $M$  la masa de los iones (la carga electrónica es  $-Q$ ),  $\underline{u}$  es la velocidad de los electrones, y los campos  $\underline{E}$  y  $\underline{B}$  pueden expresarse como

$$\underline{E} = -\underline{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}; \quad \underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A} \quad (\text{II.32})$$

Las condiciones de equilibrio del plasma, con distribución  $f_0$  de los iones, vienen dadas por las versiones a orden cero en la perturbación de (II.29), (II.30) y (II.31). Ocasionalmente, en algunos cálculos se introducen corrientes adicionales, que no se perturban, ajenas al plasma. Esto evita que los campos eléctricos  $\underline{E}_0 = \underline{E}_0(\underline{r})$

y magnético  $\underline{B}_0 = \underline{B}_0(\underline{r})$  a orden cero, deban ser autoconsistentes con la función de distribución  $f_0$ . En estos casos deben corregirse convenientemente las ecuaciones (II.29), (II.30) y (II.31) a orden cero.

Asumiendo que los electrones se desplazan perpendicularmente a las líneas de fuerza, porque los movimientos a lo largo de las líneas son inmediatamente cortocircuitados

$$\underline{B}_0 \cdot \underline{A}_1 = \underline{B}_0 \cdot \underline{u}_1 = 0, \quad (\text{II.33})$$

es posible elegir una medida tal que<sup>(26,29,30)</sup>

$$\underline{u}_1 = \dot{\underline{\xi}}; \quad \underline{A}_1 = \underline{\xi} \times \underline{B}_0; \quad \rho_1 = \underline{\xi} \cdot \underline{E}_0 \quad (\text{II.34})$$

donde  $\underline{E}_0(\underline{r})$  y  $\underline{B}_0(\underline{r})$  son los campos a orden cero (que pueden ser o no ser uniformes). La ecuación (II.32) asegura el cumplimiento automático de la ley de Faraday; si además se elige la medida (II.34), se cumple también automáticamente la ley de Ohm. Luego, con la elección de medida hecha, las ecuaciones (II.29) se verifican siempre.

La versión linealizada (es decir, a primer orden en la perturbación) de (II.30) es

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} [ (\underline{\nabla} \times \underline{B}_0) \times \underline{B}_1 + (\underline{\nabla} \times \underline{B}_1) \times \underline{B}_0 ] - Q n_0 \underline{E}_1 - \frac{Q}{c} \underline{j}_0 \times \underline{B}_1 = \\ & = Q \int d^3v f_1 \left( \underline{E}_0 + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B}_0 \right), \quad (\text{II.35}) \end{aligned}$$

donde

$$n_0 = n_0(\underline{r}) = \int f_0 d^3v; \quad \underline{j}_0 = \underline{j}_0(\underline{r}) = \int \underline{v} f_0 d^3v \quad (\text{II.36})$$

Expresando la perturbación de los campos a primer orden  $\underline{E}_1, \underline{B}_1$  en función de  $\underline{A}_1, \phi_1$ , por (II.32), y usando (II.34) para expresar a su vez  $\underline{A}_1, \phi_1, \underline{u}_1$  en función del desplazamiento electrónico  $\underline{\xi}$ , se obtiene, luego de hacer un cambio de variables de  $\underline{v}$  a  $\underline{\rho}$ , dado por (II.23), en donde  $\underline{S}$  es el vector impulso canónico de los iones

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} \underline{\xi} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ (\underline{\nabla} \times \underline{B}_0) \times [\underline{\nabla} \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0)] + [\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0)] \times \underline{B}_0 \right\} - \frac{Q}{c} \underline{j}_0 \times [\underline{\nabla} \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0)] + \\ &+ Q n_0 \left[ \underline{\nabla} (\underline{\xi} \cdot \underline{E}_0) + \frac{1}{c} \dot{\underline{\xi}} \times \underline{B}_0 \right] + \frac{Q^2}{Mc^2} n_0 (\underline{\xi} \times \underline{B}_0) \times \underline{B}_0 = \\ &= Q \int d^3\rho \left[ \underline{E}_0 + \frac{1}{Mc} (\underline{S} - \frac{Q}{c} \underline{A}_0) \times \underline{B}_0 \right] f_1 = \int d^3\rho \underline{J} f_1, \quad (\text{II.37}) \end{aligned}$$

donde se ha eliminado un factor  $M^3$ , renormalizando la función de distribución. En lo que sigue, siempre que aparece un factor  $M^3$  debido al cambio de variables en una integral, de  $(d^3v)$  a  $(d^3\rho)$ , se supone que se elimina por una renormalización conveniente de la función de distribución.

El operador diferencial  $\hat{\Lambda}$  y el vector  $\underline{J}$  quedan definidos en la propia (II.37), que en forma compacta se escribe

$$\hat{\Lambda} \underline{\xi} = \int d^3\rho \underline{J} f_1, \quad (\text{II.38})$$

El hamiltoniano para un ión del plasma es

$$H = \frac{1}{2M} \left( \underline{S} - \frac{Q}{c} \underline{A} \right)^2 + Q \phi = H_0 + H_1 \quad (\text{II.39})$$

y luego es (recordando la definición de  $\underline{J}$  dada en (II.37))

$$H_1 = \underline{J} \cdot \underline{\xi}; \quad \underline{J} = Q \left[ \underline{E}_0 + \frac{1}{Mc} (\underline{\rho} - \frac{Q}{c} \underline{A}_0) \times \underline{B}_0 \right] = \frac{\partial H}{\partial \underline{\xi}} \Big|_0 \quad (\text{II.40})$$

También, definiendo

$$\hat{L} \equiv [ \quad , H ] = \hat{L}_0 + \hat{L}_1 \quad (\text{II.41})$$

se ve que

$$\begin{aligned} \hat{L}_0 &\equiv [ \quad , H_0 ] \equiv \underline{\nabla}_{\underline{\rho}} H_0 \cdot \underline{\nabla} - \underline{\nabla} H_0 \cdot \underline{\nabla}_{\underline{\rho}} = \\ &= \underline{v}_0 \cdot \underline{\nabla} + \frac{Q}{M} (\underline{E}_0 + \frac{1}{c} \underline{v}_0 \times \underline{B}_0) \cdot \underline{\nabla}_{\underline{v}_0} \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

donde

$$\underline{v}_0 = \frac{1}{M} (\underline{\rho} - \frac{Q}{c} \underline{A}_0) = \underline{v} + \frac{Q}{Mc} \underline{A}_1 \quad (\text{II.43})$$

A primer orden, la ecuación (II.31) resulta

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \hat{L}_0 f_1 = [H_1, f_0] \quad (\text{II.44})$$

que es idéntica a la ecuación (II.17).

Con la definición (II.43) de  $\underline{v}_0$ , la integral en  $(d^3_{\underline{\rho}})$  de la expresión (II.38) se transforma en una integral en  $(d^3_{\underline{v}_0})$ , con lo que (II.38) se puede identificar con (II.18), igualando  $\eta_1$  a  $\underline{\xi}$ . Además las expresiones de  $H_1$  dadas en (II.40) y (II.20) coinciden. Entonces las ecuaciones básicas del modelo de "Vlasov-

fluido" son (II.44) y (II.38), que pueden identificarse con el sistema de ecuaciones (II.17) - (II.18).

Vamos ahora a discutir el método de resolución del sistema de ecuaciones (II.17)- (II.18), que se aplica igualmente al sistema (II.24)- (II.25), que describe un plasma de muchas especies de Vlasov, y al sistema (II.44)- (II.38) del modelo de "Vlasov-fluido". Este método es muy similar al usado antes, al hacer el tratamiento cuántico, y al que se usa en Mecánica Cuántica, para resolver en forma perturbativa la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.

El sistema de ecuaciones a tratar es

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \hat{L}_0 f_1 = [H_1, f_0] ; \hat{\Lambda} \eta_1 = \int d^3g J f_1 \quad (H_1 = J \eta_1)$$

(II.45)

donde el operador  $\hat{\Lambda}$  puede incluir derivadas temporales, o sea que en general es

$$\hat{\Lambda} \eta_1 = \hat{\Lambda}_1 \eta_1 + \hat{\Lambda}_2 \dot{\eta}_1 + \hat{\Lambda}_3 \ddot{\eta}_1 \quad (II.46)$$

donde los operadores diferenciales  $\hat{\Lambda}_1, \hat{\Lambda}_2, \hat{\Lambda}_3$  sólo implican derivadas espaciales.

En cuanto al operador  $\hat{L}_0$  (que contiene derivadas respecto a las coordenadas y a los impulsos canónicos correspondientes) es un operador diferencial antihermítico, cuyo problema de valores propios puede resolverse; al menos se lo ha resuelto en el importante



caso en que  $H_0$  contenga una s3la coordenada no - ignorable.<sup>(26,27,28)</sup>

Es decir, en el espacio funcional de las funciones definidas en el espacio de las fases de una part3cula del plasma  $g(q_1, p_1)$ , es posible hallar en este caso una base de funciones  $\{W_r\}$ , tal que

$$(W_r \equiv W_r(q_1, p_1)) \quad \hat{L}_0 W_r = i\mu_r W_r, \quad (\text{II.47})$$

donde el 3ndice  $r$  es un 3ndice m3ltiple (como lo era  $n$  en la ecuaci3n (II.6)) que puede descomponerse en varios 3ndices, discretos y continuos, de forma de determinar univocamente a  $W_r$ . (Entre los 3ndices continuos est3 la energ3a  $E$  y otras constantes de movimiento.) Una suma en  $r$  ( $\sum_r$ ) se entender3, en lo que sigue, que implica una suma en los 3ndices discretos y una integral en los 3ndices continuos (como la energ3a  $E$ ). La base  $\{W_r\}$  es ortogonal con el producto escalar

$$(g_1, g_2) = \int d\sigma g_1^* g_2 = \int d^3x d^3p g_1^*(\underline{x}, \underline{p}) g_2(\underline{x}, \underline{p}) \quad (\text{II.48})$$

$$(d\sigma \equiv \prod_i dq_i dp_i) .$$

Ser3, luego

$$\begin{aligned} (W_{r'}, W_r) &= \delta_{rr'} ; \quad \sum_r W_r^*(q_1, p_1) W_r(q'_1, p'_1) = \\ &= \prod_i \delta(q_i - q'_i) \delta(p_i - p'_i) \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

donde el signo  $(\prod_i)$  indica productoria. Las variables can3nicas

$q_i, p_i$  pueden elegirse de varias maneras. En particular puede hacerse que sea

$$q_i = x_i, \quad p_i = p_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Por formar los  $\{\mathcal{W}_r\}$  una base del espacio funcional, vale el desarrollo

$$f_1 = \sum_r \gamma_r(t) \mathcal{W}_r(q_i, p_i) \quad (II.50)$$

Usando (II.49) y (II.50), se obtiene, multiplicando escalarmente por  $\mathcal{W}_r$  a la primera ecuación de (II.45)

$$\dot{\gamma}_r + i\mu_r \gamma_r = (\mathcal{W}_r, [H_1, f_0]) = -([\mathcal{W}_r, f_0], H_1) \quad (II.51)$$

donde la igualdad del segundo y el tercer miembro de (II.51) se deduce de que la integral en todo el espacio de las fases de un corchete de Poisson es nula, y de las propiedades conocidas de los corchetes de Poisson (32,33)

Recordemos que  $f_0$  es sólo función de las constantes de movimiento, que designaremos con  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) siendo  $\alpha_0 = H_0$ , etc. Resulta entonces, si  $f_0 = f_0(H_0, \alpha_1 \dots \alpha_n)$ , que es

$$[\mathcal{W}_r, f_0] = \sum_{i=0}^N \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_i} [\mathcal{W}_r, \alpha_i] = \frac{\partial f_0}{\partial H_0} [\mathcal{W}_r, H_0] + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_i} [\mathcal{W}_r, \alpha_i] \quad (II.52)$$

Ahora bien,  $\mathcal{W}_r$  cumple la ecuación de valores propios (II.47), con  $\hat{L}_0 = [ , H_0 ]$ .

Además se tiene (27)

$$[\mathcal{W}_r, \alpha_j] = i K_j \mathcal{W}_r \quad (j = 1, \dots) \quad (II.53)$$

La ecuación (II.53) resulta de que la base  $\{\psi_r\}$  debe ser una base propia común a  $\hat{L}_0 = [ , H_0 ]$  y a los operadores  $[ , \alpha_j ]$  ( $j = 1, \dots$ ) asociados a las constantes  $\alpha_j$ , que junto con  $H_0$  forman un conjunto completo de observables. (Comparar con el tratamiento cuántico.)

Luego resulta

$$[\psi_r, f_0] = iK_r \psi_r ; \quad K_r = \mu_r \frac{\partial f_0}{\partial H_0} + \sum_{j=1}^N K_j \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_j} . \quad (\text{II.54})$$

Usando (II.54) y que  $H_1 = J \eta_1$ , se deduce de (II.51) que

$$\dot{\gamma}_r + i \mu_r \gamma_r = iK_r(\psi_r, J \eta_1) . \quad (\text{II.55})$$

Sustituyendo (II.50) en la segunda de las ecuaciones (II.45) se tiene

$$\hat{A} \eta_1 = \sum_r \gamma_r \int d^3 \rho J \psi_r \quad (\text{II.56})$$

Así el sistema (II.45) se ha transformado en el sistema de ecuaciones (II.55) - (II.56).

Haciendo ahora una transformada de Fourier en el tiempo ( $\gamma_r, \eta_1 \sim e^{-i\omega t}$ ), o más propiamente de Laplace, el sistema (II.55) - (II.56) se reduce a

$$(\mu_r - \omega) \gamma_r = K_r(\psi_r, J \eta_1) ; \quad \tilde{A} \eta_1 = \sum_r \gamma_r \int d^3 \rho J \psi_r \quad (\text{II.57})$$

donde el operador  $\tilde{A}$  se obtiene del  $\hat{A}$  cambiando las derivadas temporales por factores  $(-i\omega)$ . Despejando  $\gamma_r$  de una de las ecuaciones

(II.57) y sustituyéndolo en la otra, se obtiene

$$\hat{D}(w)\eta_1 \equiv \tilde{\Lambda}\eta_1 - \sum_r \frac{K_r(\mathcal{W}_r, J\eta_1) \int d^3s J\mathcal{W}_r}{\mu_r - w} = 0 \quad (\text{II.58})$$

Multiplicando, ahora, (II.58) por  $\eta_1^*$  e integrando en  $(d^3x)$ , resulta

$$\begin{aligned} \Delta(\eta_1^*, \eta_1) &\equiv \int d^3x \eta_1^* \hat{D}(w)\eta_1 \equiv (\eta_1, \hat{D}(w)\eta_1) \equiv \\ &\equiv (\eta_1, \tilde{\Lambda}\eta_1) - \sum_r \frac{K_r(\mathcal{W}_r, J\eta_1)(J\eta_1, \mathcal{W}_r)}{\mu_r - w} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

donde  $\Delta(\eta_1^*, \eta_1)$  es la "funcional de dispersión"<sup>(27)</sup>.

Alternativamente, se tiene la siguiente expresión para  $\Delta(\eta_1^*, \eta_1)$ , que se deduce de (II.59), sustituyendo allí  $K_r$  por la expresión

$$K_r = (\mu_r - w) \frac{\partial f_0}{\partial H_0} + K_r^i; \quad K_r^i = w \frac{\partial f_0}{\partial H_0} + \sum_{j=1}^N K_j \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_j} \quad (\text{II.60})$$

y usando la relación de clausura de la base  $\{\mathcal{W}_r\}$ , dada en (II.49),

$$\Delta(\eta_1^*, \eta_1) \equiv (\eta_1, \tilde{\Lambda}\eta_1) - \int d\sigma \frac{\partial f_0}{\partial H_0} (J\eta_1^*)(J\eta_1) - \sum_r \frac{K_r^i(J\eta_1, \mathcal{W}_r)(\mathcal{W}_r, J\eta_1)}{\mu_r - w} \quad (\text{II.61})$$

Si se desarrolla  $\eta_1(\mathbf{x})$  en una base de funciones  $\{\chi_\ell(\mathbf{x})\}$  del espacio funcional de las funciones de  $\underline{x}(\equiv \underline{r})$  (es decir definidas en  $\mathbb{R}^3$ ) que satisfacen las condiciones de borde del problema, puede transformarse a  $\Delta(\eta_1^*, \eta_1)$  en una "matriz de dispersión"  $\Delta_{\ell\ell'}(w)$

$$\eta_1 = \sum_{\ell} \alpha_{\ell} \chi_{\ell}(\mathbf{x}) ; \quad \Delta_{\ell\ell'}(w) = \frac{\partial^2 \Delta(\eta_1^*, \eta_1)}{\partial \alpha_{\ell}^* \partial \alpha_{\ell'}} \quad (\text{II.62})$$

y a (II.59) (o sea a la condición  $\Delta = 0$ ) en una relación de dispersión

$$\sum_{\ell'} \Delta_{\ell\ell'}(w) \alpha_{\ell'} = 0; \quad D(w) \equiv \det (\Delta_{\ell\ell'}) = 0 \quad (\text{II.63})$$

Las autofunciones  $\mathcal{W}_r$  y los autovalores  $(i\mu_r)$  de  $\hat{L}_0$  para el caso que en  $H_0$  figure una única coordenada no ignorable han sido dadas por Lewis et al (26,28,29,30). En particular, para un problema con simetría cilíndrica, si la coordenada no ignorable es la radial y  $\tau$  es la coordenada canónica conjugada de  $H_0$ , se tiene (donde la energía es  $H_0 = \mathcal{E}$ , las constantes de movimiento  $(\alpha_1)$  son el impulso angular canónico  $P_{\theta}$  y el impulso canónico según  $z, p_z$ )

$$\mu_r = n\Omega_0 + m\omega_d + kv_d \quad (\text{II.64})$$

$$\mathcal{W}_r = d_r \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}') \delta(P_{\theta} - P'_{\theta}) \delta(p_z - p'_z) e^{i(m\theta + kz)} e^{i[n\Omega_0\tau - m\tilde{\theta}(\tau) - k\tilde{z}(\tau)]} \quad (\text{II.65})$$

donde  $\Omega_0$  es la frecuencia de ciclotrón de una partícula del plasma,  $\omega_d$  la frecuencia de deriva y  $v_d$  la velocidad de deriva, según  $z$ , y donde  $n, m, k$  son índices que deben incluirse (junto con  $\mathcal{E}, P_{\theta}, p_z$ ) en el índice múltiple  $r$ . En cuanto a  $d_r$ , es un coeficiente de normalización, y las funciones  $\tilde{\theta}(\tau)$ ,  $\tilde{z}(\tau)$  son

$$\tilde{\theta}(\tau) = \int_0^{\tau} d\tau' \left( \frac{\partial H_0}{\partial P_{\theta}} \right) - \omega_d \tau; \quad \tilde{z}(\tau) = \int_0^{\tau} d\tau' \left( \frac{\partial H_0}{\partial p_z} \right) - v_d \tau \quad (\text{II.66})$$

La variable  $\tau$  (cuyo impulso canónico conjugado es  $H_0$ ) es el tiempo medido sobre la órbita sin perturbar, o sea que

$d\tau = dR/v_r$  (donde  $R$  es la coordenada radial y  $v_r$  la velocidad radial de una partícula del plasma).

La suma en  $r(\sum_r)$  no debe implicar suma en  $m$  ó  $k$ , ya que como estos índices determinan la dependencia en  $\theta$  y  $z$  de  $W_r$ , sus valores se fijan al elegir la perturbación  $\eta_1(\underline{x}) = \eta_1(R, \theta, z)$ .

Así pues es

$$\sum_r \rightarrow \int d\epsilon dP_\theta dp_z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \quad (\text{II.67})$$

(la suma en  $n$  indica las resonancias de ciclotrón).

En lugar de deducir una relación de dispersión como (II.63), a partir de  $\Delta(\eta_1^*, \eta_1)$ , es también posible construir un principio variacional para el estudio de la estabilidad del plasma, como se verá en otro capítulo.

Para poder construir las relaciones de dispersión (II.63) es necesario elegir las funciones espaciales (es decir de  $\underline{x}$ )

$\chi_e(\underline{x}) = \chi_e(R, \theta, z)$  (en el caso de un problema con simetría cilíndrica). Para el caso de un  $\theta$  - pinch, usando el modelo de "Vlasov - fluido", el cálculo fue hecho por Seyler<sup>(30)</sup> quien usó funciones  $\chi_e$  de la forma

$$J_m(\lambda_{im} R) e^{im\theta + ikz} \quad (\text{II.68})$$

donde los  $\lambda_{im}$  son ceros de la función de Bessel  $J_m$  o de su derivada.

La "matriz de dispersión"  $((\Delta_{\ell}))$  es en principio una matriz infinita, pero en la práctica esta serie se corta en algún  $\ell$  finito. Pero la dimensión óptima de la matriz  $((\Delta_{\ell}))$  depende del problema considerado y de la elección de las  $\chi_{\ell}(\underline{x})$ .

Sobre este punto volveremos más adelante.

REFERENCIAS DEL CAPITULO II

- 1.- A. B. Mikhailovskii: "Theory of plasma instabilities" (2 vols. ; Plenum, 1974)
- 2.- N. A. Krall & A. W. Trivelpiece: "Principles of Plasma Physics" (McGraw-Hill, 1973)
- 3.- A. I. Akhiezer, I.A. Akhiezer, Polovin, Sitenko & Stepanov: "Plasma Electrodynamics" (2 vols. ; Pergamon Press, 1975)
- 4.- B. Kadomtsev: "Phénomènes collectifs dans les plasmas" (Mir, 1979)
- 5.- Horton, Callen & Rosenbluth: *Phys. Fluids* 14 (9), 2019 (1971)
- 6.- Callen & Horton: *Phys. Fluids* 13 (1), 154 (1970)
- 7.- Gerver, Birdsall, Langdon & Fuss: *Phys. Fluids* 20 (2), 291 (1977)
- 8.- R. C. Davidson: *Phys. Fluids* 19 (8), 1189 (1976)
- 9.- Uhm & Davidson: *Phys. Fluids* 22 (4), 718 (1979)
- 10.- Davidson, Uhm & Mahajan: *Phys. Fluids* 19 (10), 1608 (1976)
- 11.- J. T. Virtamo: *Plasma Phys.* 21, 781 (1979)
- 12.- E. G. Harris, en: "Advances in Plasma Physics", vol. 3, 159 (Simon & Thompson, eds. ; Interscience, 1969)
- 13.- D. F. Du Bois, en: "Lectures in Theoretical Physics", vol. 9, 469 (Britten, ed.; Gordon & Breach, 1967)
- 14.- E. G. Harris: "A Pedestrian Approach to Quantum Field Theory" (Wiley-Interscience, 1972)
- 15.- T. Nag, G. Ghosh & B. Dasgupta: *Phys. Rev. A* 21 (3), 1025 (1980)
- 16.- Johnson & Lippmann: *Phys. Rev.* 76 (6), 828 (1949)
- 17.- L. Landau & E. Lifchitz: "Mécanique Quantique" (Mir, 1967)
- 18.- C. Cohen Tannoudji, B. Diu & F. Laloë: "Quantum Mechanics" (2 vols.; Wiley, 1977)



- 19.- J. Virtamo & P. Jauho: *Il Nuovo Cimento* 26 B (2), 537 (1975)
- 20.- R. Balescu: "Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics" (Wiley, 1975)
- 21.- L. Landau & E. Lifchitz: "Physique Statistique" (Mir, 1967)
- 22.- A. Messiah: "Mecánica Cuántica" (2 vols.; Tecnos, 1965)
- 23.- B.G. Levich: "Curso de Física Teórica" (4 vols.; Reverté, 1978)
- 24.- R. F. Feynman: "Statistical Mechanics" (Benjamin, 1972)
- 25.- I. Prigogine: "Non-Equilibrium Statistical Mechanics" (Wiley, 1963)
- 26.- H.R. Lewis & K.R. Symon: *J. Math. Phys.* 20 (3), 413 (1979)
- 27.- K.R. Symon, C.E. Seyler & H.R. Lewis: *J. Plasma Phys.* 27 (1), 13 (1982)
- 28.- H. R. Lewis & C. E. Seyler: *J. Plasma Phys.* 27 (1), 25 (1982)
- 29.- C. E. Seyler & H. R. Lewis: *J. Plasma Phys.* 27 (1), 37 (1982)
- 30.- C. E. Seyler: *Phys. Fluids* 22 (12), 2324 (1979)
- 31.- C. E. Seyler & D. C. Barnes: *Phys. Fluids* 24 (11), 1989 (1981)
- 32.- L. Landau & E. Lifchitz: "Mécanique" (Mir, 1966)
- 33.- H. Goldstein: "Classical Mechanics" (Addison Wesley, 2° ed. , 1980)

### CAPITULO III

#### LA TERMODINAMICA IRREVERSIBLE Y LA TEORIA TERMODINAMICA DE LA ESTABILIDAD EN LOS PLASMAS

La utilización de principios variacionales o "principios de energía", como se los llama comúnmente, es usual en la Física del Plasma (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13) para el estudio de problemas de estabilidad. Este método es menos detallado pero de más fácil aplicación que el método de modos normales, consistente en la obtención de la relación de dispersión del plasma y su posterior resolución.

La idea de justificar termodinámicamente los principios de energía no es nueva (1, 10, 13) pero, salvo un viejo trabajo de Chandrasekhar (6) en el que se invoca el principio de mínima disipación, los demás intentos de justificación termodinámica de los principios variacionales de la Física del Plasma no se basan en la Termodinámica de los procesos irreversibles (la cual ha tenido gran desarrollo en los últimos tiempos) sino en una analogía intuitiva con la Termodinámica del equilibrio, a consecuencia de lo cual no se ha dado, hasta ahora, en la literatura una justificación termodinámica rigurosa y general de los principios de energía, ni una presentación unificada de los mismos. En lugar de ello se han deducido diversos principios variacionales, válidos en uno u otro caso, que guardan cierta analogía formal, en mayor o menor grado, con principios termodinámicos.

Sin embargo, como mostramos en esta Tesis, se puede, en base a los métodos de la Termodinámica Irreversible, dar un tratamiento termo-

dinámico unificado y riguroso de los principios de energía de la Física del Plasma.

Antes de hacer una revisión de la Termodinámica Irreversible (o Termodinámica de los sistemas fuera del equilibrio), recordemos algunas nociones de la teoría de procesos estocásticos.

Un proceso estocástico<sup>(14, 15, 16, 17)</sup> es una función muestral del tiempo  $q(t, w)$  caracterizada por una variable aleatoria  $w$ , que toma valores al azar en un conjunto  $D(w)$ , llamado "rango" o "conjunto de estados". (Tanto  $q$  como  $w$  pueden ser variables escalares o vectoriales, etc.). El proceso estocástico puede darse, equivalentemente, por la distribución de probabilidades (dependiente del tiempo)  $P(q, t)$  de los valores de  $q$  al tiempo  $t$ .

Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación del tipo

$$\dot{q} = F(q, t, w) \quad (\text{III.1})$$

que define (dadas las condiciones iniciales, que también pueden ser aleatorias) un proceso estocástico  $q(t, w)$ . Luego veremos un importante ejemplo de ecuaciones diferenciales estocásticas, que son las ecuaciones de Langevin (III.6).

Un proceso estocástico  $q(t, w)$  tal que sea  $\langle q(t, w) \rangle = 0$ , y sea  $\langle q(t, w)q(t', w) \rangle$  proporcional a  $\delta(t-t')$  (donde aquí la  $\delta$  es la de Dirac y los promedios son respecto del conjunto  $D(w)$ ) se llama "ruido blanco"<sup>(15, 18)</sup>; el ejemplo típico de "ruido blanco" es un proceso estacionario gaussiano, o sea tal que  $P(q, t) = g(q)$  no depende de  $t$  y es una campana gaussiana centrada en  $q$ .

En Mecánica Estadística, la evolución temporal de un sistema termodinámico se considera como un proceso estocástico a nivel microscópico.

Si el sistema, cuya evolución nos interesa estudiar, puede encontrarse en diversos estados microscópicos que pueden rotular con un índice  $r$  (que sustituye a la variable  $q$  de antes), la probabilidad de que al tiempo  $t$  el sistema esté en el estado  $r$  la representaremos por  $P_r(t)$ . Un proceso estocástico se llama markoviano (16, 17, 19, 20, 21, 22, 23) si, cualquiera que sean los tiempos  $t$  y  $t'$  tal que  $t' > t$ , se tiene

$$P_r(t') = \sum_s G_{rs}(t', t) P_s(t) \quad (G_{rs} \geq 0; \sum_r G_{rs} = 1) \quad (\text{III.2})$$

De aquí se deduce que, si el proceso es markoviano, las derivadas temporales de las probabilidades,  $\dot{P}_r(t)$ , solamente dependen de los valores actuales de dichas probabilidades (es decir al tiempo  $t$ ), pero no de sus valores en instantes anteriores. Derivando (III.2) respecto a  $t'$ , en el valor  $t' = t$ , resulta

$$\dot{P}_r(t) = \sum_s W_{rs}(t) P_s(t) \quad (W_{rs}(t) = \left. \frac{d}{dt} G_{rs}(t', t) \right|_{t' = t}) \quad (\text{III.3})$$

Todo proceso, markoviano obedece una ecuación maestra del tipo de (III.3). El índice  $r$  puede ser múltiple e incluir índices continuos, en cuyo caso la suma en  $s$  implica integrales.

Todos los sistemas termodinámicos corrientes pueden en general describirse, en forma markoviana, a condición que su descripción sea lo suficientemente detallada, o sea incluya suficiente cantidad de variables. Como se verá luego todos los sistemas markovianos (es decir, que siguen una ecuación maestra (III.3)) cumplen el "teorema H" de Boltzmann. Ejemplos de ecuaciones maestras del tipo de (III.3) son la ecuación

cinética de Boltzmann (conocida de la teoría de los gases diluidos); y la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \left[ K_i(q_1, \dots, q_n) P \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} \left[ Q_{ij}(q_1, \dots, q_n) P \right] \quad (\text{III.4})$$

donde el índice  $r$ , de (III.3), se sustituyó por las variables continuas  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) y la probabilidad  $P_r(t)$  por la función de distribución  $P(q_1, \dots, q_n, t)$ ; y donde la "matriz de difusión" ( $(Q_{ij})$ ) que aparece en (III.4), es habitualmente, por hipótesis, una matriz real, simétrica y semidefinida positiva (a veces, incluso se la toma estrictamente definida positiva).

Así pues, la ecuación maestra (III.3) es, en esencia, una ecuación cinética para la cual es posible demostrar un "teorema H" de Boltzmann, o sea asociarle una entropía.

La ecuación de Fokker-Planck fue planteada originalmente en el estudio del movimiento browniano, pero luego adquirió gran generalidad: bajo ciertas circunstancias la ecuación de Boltzmann puede aproximarse por una ecuación del tipo (III.4), y en general, la mayoría de los sistemas markovianos pueden tratarse, al menos en primera aproximación, por una ecuación de Fokker-Planck (III.4). Por ello, puede decirse que el ejemplo típico de sistema markoviano es aquel que viene descrito por una ecuación de Fokker-Planck. La conveniencia de usar la ecuación de Fokker-Planck en lugar de las ecuaciones diferenciales estocásticas se basa en que éstas son por lo general no lineales en al to grado. Para poder introducir procedimientos lineales, existe una simple transformación que consiste en plantear la ecuación de continuidad para la función de distribución  $P(q, t)$  (análoga a la ecuación de Liouville de la mecánica estadística, aunque en este caso no

se conserva el volumen del espacio de fases). Siendo los procesos markovianos, la ecuación de continuidad se puede reducir a la de Fokker-Planck (14).

Como luego veremos, para el estudio de su estabilidad, el plasma puede tratarse como obedeciendo a una ecuación del tipo (III.4), por lo cual le será aplicable toda la teoría que aquí vamos a desarrollar.

La positividad de la "matriz de difusión"  $((Q_{ij}))$  en la ecuación (III.4), está asociada a la validez del "teorema H", ya mencionada, para (III.4).

Debido a su gran generalidad, la ecuación de Fokker-Planck puede usarse en diversos contextos que no deben confundirse. Así es corriente en Física del Plasma el uso de esta ecuación, para el estudio de procesos de difusión en el plasma en situaciones en que las colisiones entre partículas deben tomarse en cuenta. En dicho caso, las variables  $q_i$  de la ecuación (III.4) son las coordenadas y las componentes de la velocidad de una partícula del plasma, o sea que la función de distribución  $P(q_1, \dots, q_n, t)$  está definida en el espacio de las fases de una partícula, y se reduce a la habitual función de distribución  $f(\underline{x}, \underline{v})$ .

En cambio, si se introducen fluctuaciones estocásticas en las ecuaciones de movimiento de un plasma, a los efectos de estudiar su estabilidad (se consideren, o no, las colisiones entre partículas del plasma) estas fluctuaciones obedecerán, como luego se verá, a una ecuación de Fokker-Planck tipo (III.4), que no es la ecuación de Fokker-Planck habitual antes mencionada. En particular, el espacio de las variables

$q_i$  no es ahora el espacio de las fases de una partícula del plasma, sino un espacio funcional. (El índice  $i$  es en general, continuo y múltiple).

Las variables  $q_i$  serán, en este caso, variables magnetohidrodinámicas; o incluso, en el caso de un plasma de Vlasov, la propia función de distribución de una partícula  $f(\underline{x}, \underline{v})$  (que no debe entonces confundirse con la función de distribución  $P(q_1, \dots, q_n, t)$  de la ecuación de Fokker-Planck(III.4)). Notemos que en este caso, en que  $f(\underline{x}, \underline{v})$  es una variable  $q_i$ , es posible identificar a  $i$  con  $(\underline{x}, \underline{v})$ .

Para entender como es esto posible, observemos que la ecuación de Fokker-Planck representa siempre una "caminata al azar" (movimiento browniano generalizado) en algún espacio. En el caso que es familiar a los plasmistas, la "caminata al azar" es de una partícula del plasma, debido a sus colisiones con las demás partículas, y ocurre en su espacio mecánico de las fases, siendo luego los  $q_i$  la posición  $\underline{x}$  y la velocidad  $\underline{v}$ .

En cambio, en el caso en que se añaden fluctuaciones a las ecuaciones de movimiento del plasma (por ejemplo, a la ecuación de Vlasov), estas ecuaciones dejan de ser deterministas, y lo que se convierte en una "caminata al azar" es la trayectoria (que, en otro caso, sería determinista) del punto de un espacio funcional (que, ahora, pasa a ser el nuevo espacio de las fases), que representa, en cada instante, el estado del plasma (de todo el plasma, no sólo de una partícula). En el caso de un plasma de Vlasov, por ejemplo, el estado viene expresado por la función de distribución de una partícula  $f(\underline{x}, \underline{v})$  y los campos autoconsistentes  $\underline{E}(\underline{x})$ ,  $\underline{B}(\underline{x})$  en cada instante, que constituyen los  $q_i$  de este ejemplo. Estos, en el caso en que hay fluctua-

ciones, evolucionan en forma no determinista. Así, aunque se conozcan  $f$ ,  $\underline{E}$ ,  $\underline{B}$  al instante inicial, no se puede determinar con certeza su valor al instante  $t$ , sino sólo una distribución de probabilidades sobre el espacio funcional de las "funciones de distribución"  $f(\underline{x}, \underline{y})$  y de los campos  $\underline{E}$ ,  $\underline{B}$ ; ésta es la distribución de probabilidades  $P$  que cumple (III.4). Tal espacio funcional es el espacio de las fases en que vale, en éste caso, la ecuación de Fokker-Planck.

La Termodinámica Irreversible tuvo su origen en los trabajos de Onsager y Prigogine sobre los sistemas ligeramente apartados del equilibrio y sobre las fluctuaciones alrededor del estado de equilibrio (24, 25, 26, 27, 28, 29, 30), destacando especialmente, entre estos trabajos, la teoría termodinámica lagrangeana de Onsager y Machlup. Los primeros intentos de crear una Termodinámica de los sistemas  $t_0$  totalmente apartados (con un apartamiento no lineal) del equilibrio se deben a Prigogine y su escuela (23, 31, 32, 33) que trabajaron macroscópicamente, y a Schlögl (34, 35, 36, 37) quien trabajó en forma microscópica, usando teoría de la información.

Lamentablemente los resultados de Glansdorff y Prigogine no son válidos más que si se cumple la hipótesis de "equilibrio local" (31) que sólo es realmente válida en las proximidades del equilibrio termodinámico (38, 39, 40, 41).

Según esta hipótesis, vale (en los estados fuera del equilibrio, que estudiamos) la misma relación de Gibbs que en el equilibrio, o sea que la entropía se puede expresar en función de las demás variables



termostáticas de la misma forma, exactamente, que en el equilibrio. Entendemos por variables termostáticas aquellas que se definen para el equilibrio termodinámico.

Si bien es posible (37,42) extender, en cierto sentido, la hipótesis de "equilibrio local" a sistemas muy alejados del equilibrio, esto sólo es posible sustituyendo la evolución real del sistema, dada por una ecuación del tipo (III.3), por una evolución ficticia que en general no es markoviana; es decir que el precio que hay que pagar para mantener el "equilibrio local" es en general perder el carácter markoviano de la descripción del sistema. Esto complica artificialmente el sistema y vuelve, en el caso general, "no - física" la teoría de Glansdorff-Prigogine (38,39,43,44,45,46). Aunque los primeros trabajos de Schlögl (34,35) parecían confirmar la teoría de Prigogine y Glansdorff, pronto se vió que sus resultados son de carácter más general (37,42,43) y conservan sentido físico cuando los de Prigogine lo pierden (debido a que falla la hipótesis de "equilibrio local").

En base a la teoría de Onsager y Machlup, Landau y Lifchitz plantearon una teoría de las fluctuaciones, en las proximidades del equilibrio, que ha sido desarrollada por Fox y Uhlenbeck (29,47,48,49,50,51); e incluso aplicada a la Física del Plasma (52,53,54). Una ampliación de esta teoría a sistemas lejos del equilibrio ha sido realizada por Keizer y Fox (38,39,40,41,49). Sus resultados coinciden con los de Schlögl (43) pero no con los de Prigogine, salvo en las proximidades del equilibrio, donde vale la hipótesis de "equilibrio local".

En forma independiente, Eu realizó, un estudio cinético basado en su

poner la validez de la ecuación de Boltzmann (55,56) y reobtuvo los resultados de Keizer y Fox.

Otro estudio cinético independiente, esta vez en base a suponer que el sistema obedece a la ecuación (III.4) de Fokker-Planck, realizado por Graham y Haken (19,20,21,57,58) condujo a importantes resultados, en especial a una generalización lejos del equilibrio de la teoría termodinámica lagrangeana de Onsager y Machlup. Estos resultados son consistentes con los de Schlögl, Keizer, Fox y Eu.

La hipótesis de "equilibrio local" de Prigogine no vale lejos del equilibrio y luego debe ser abandonada y sustituida por otra (44).

La teoría termodinámica macroscópica de Glansdorff y Prigogine fue entonces corregida por Lavenda, quien desarrolló (44,45,46) una teoría macroscópica de los sistemas termodinámicos, en base al principio termodinámico de balance de potencia y a postular una relación de Gibbs generalizada fuera del equilibrio, consistente con los resultados de Keizer. Esta teoría no sólo corrige y amplía la de Glansdorff y Prigogine, de acuerdo a los resultados de estudios microscópicos, sino que resulta ser, al mismo tiempo, una generalización de la "Termodinámica Racional" de Coleman y Truesdell (44,59) y de la teoría termodinámica lagrangeana de Onsager y Machlup (24,25), así como del principio de mínima disipación de Onsager, a sistemas alejados del equilibrio. Así, la teoría de Lavenda (44) sintetiza, en forma unificada y coherente, muchos resultados de otros autores aparentemente divergentes entre sí. La fundamentación microscópica de esta teoría macroscópica ha sido dada por el propio Lavenda (60,61). Por otra parte, los resultados de Lavenda son idénticos a los obtenidos por Graham (57), en base a la ecuación de Fokker-Planck.

En particular, para todo sistema que cumpla (III.4) es válida una teoría generalizada de Onsager.

Los mismos resultados de Lavenda y Graham, han sido obtenidos, en forma independiente, por Levine y Procaccia (62, 63, 64, 65) en base a la teoría de la información y a un análisis cinético de la ecuación maestra (III.3).

En lo que sigue resumimos los principales resultados de la Termodinámica de los sistemas alejados del equilibrio, en lo referente al estudio de la estabilidad de estos sistemas.

Un concepto matemático importante en la teoría de la estabilidad de sistemas termodinámicos es el de función de Lyapunov (20, 23, 31, 66, 67, 68) usado también, independientemente de cualquier consideración termodinámica, en Física del Plasma por Fowler (8).

Si un cierto sistema físico es descrito por coordenadas generalizadas  $q_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) que obedecen ecuaciones de movimiento conocidas, es decir que su evolución viene dada por un sistema de ecuaciones diferenciales conocidas, y si  $q_i = q_i^{(0)}$  ( $i=1, \dots, n$ ) es una solución estacionaria de este sistema (es decir, independiente del tiempo), dicha solución estacionaria será estable si existe una función  $\Theta(q_1, \dots, q_n)$  llamada "función de Lyapunov", definida al menos en un entorno del punto  $(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$  del espacio de configuraciones del sistema, tal que en un entorno de dicho punto sea

$$\Theta(q_1, \dots, q_n) \geq 0; \quad \Theta(q_1, \dots, q_n) = 0 \Leftrightarrow q_i = q_i^{(0)} (\forall i); \quad \frac{d\Theta}{dt} \leq 0. \quad (\text{III.5})$$

Evidentemente hallar un "principio de energía" es equivalente a encontrar una función de Lyapunov (8), la cual es, a su vez, una "energía

libre generalizada" o (a menos de un signo) una "entropía generalizada", ya que, en el equilibrio termodinámico, el papel de función de Lyapunov lo juega la entropía para sistemas aislados y la energía libre para sistemas a temperatura constante.

La existencia de una función de Lyapunov es una condición suficiente para asegurar la estabilidad del estado estacionario  $(q_1^{(b)}, \dots, q_n^{(b)})$ .

Sea un sistema descrito por la ecuación de Fokker-Plank (III.4). Es entonces posible deducir de (III.4) ecuaciones de movimiento para las variables  $q_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) que en general tendrán la forma (donde  $F$  es una variable aleatoria que representa las fluctuaciones, consideradas "ruido blanco")

$$\dot{q}_i = K_i(q_1, \dots, q_n) + F_i(t); \quad \langle F_i(t) \rangle = 0; \quad \langle F_i(t) F_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t-t') \quad (III.6)$$

Las ecuaciones (III.6) con  $i=1, \dots, n$  se llaman "ecuaciones de Langevin" (19, 20) y son equivalentes a la ecuación de Fokker-Planck (III.4), o sea que no sólo las ecuaciones (III.6) se deducen de (III.4) sino que, además, es también posible la deducción inversa, o sea deducir (III.4) de (III.6). El que las ecuaciones (III.6) sean de primer orden en el tiempo no es algo esencial, sino que sólo se lo supuso para escribir estas ecuaciones en forma más simple, pero es igualmente posible hallarse con ecuaciones de Langevin de segundo orden en el tiempo (25, 44). También es posible (20) que las ecuaciones (III.6) sean ecuaciones en derivadas parciales, en cuyo caso las funciones  $K_i$  deben cambiarse por operadores diferenciales (que contienen derivadas espaciales). Esto ocurre si las variables  $q_i$  son variables macroscópicas o termodinámicas y las ecuaciones (III.6)

son en este caso ecuaciones fluidísticas que incluyen fluctuaciones (47, 48, 49, 50, 51).

Si ahora, cuando en las ecuaciones (III.6) se desprecian las fluctuaciones ( $F_i=0$ ), existe una solución determinista estacionaria de estas ecuaciones,  $(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$ , la versión linealizada de las ecuaciones (III.6) alrededor de dicha solución estacionaria se llaman "ecuaciones de regresión de Onsager", por haber sido usadas en la teoría de Onsager-Machlup.

Como veremos luego, es posible deducir de las ecuaciones de regresión de Onsager alrededor de una solución determinista estacionaria,  $(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$ , siempre que estas ecuaciones posean la estructura adecuada, una función  $\theta(q_1, \dots, q_n)$  tal que

$$\frac{d\theta(q_1, \dots, q_n)}{dt} < 0; \quad \theta(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}) = 0 \quad (\text{III.7})$$

Luego se ve que, si  $\theta(q_1, \dots, q_n)$  es definida positiva en un entorno reducido de  $(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$  la función  $\theta(q_1, \dots, q_n)$  es una función de Lyapunov, y la solución estacionaria resulta ser estable. En cambio, si la solución estacionaria considerada es inestable, no existe ningún entorno reducido de ella en que la función  $\theta$  sea definida positiva.

A partir de las ecuaciones macroscópicas que describen la evolución de un sistema termodinámico (por ejemplo, un plasma), se obtienen fácilmente las correspondientes ecuaciones de regresión de Onsager alrededor del estado estacionario cuya estabilidad deseamos estudiar. En efecto, ya que dichas ecuaciones macroscópicas pueden considerarse como ecuaciones de Langevin en que se eliminaron las fluctuaciones

( $F_i = 0$ ) ; basta linealizarlas (alrededor de la solución estacionaria) para obtener las correspondientes ecuaciones de regresión de Onsager deterministas. Si estas ecuaciones tienen la forma adecuada, la construcción, a partir de ellas, de la función  $\Theta(q_1, \dots, q_n)$ , que verifica (III.7), es sistemática, de lo que resulta una técnica muy general de construir principios variacionales.

Además, la función  $\Theta$ , cuando existe, tiene un significado termodinámico inmediato. Para que la función  $\Theta$  se pueda construir se necesita <sup>(44)</sup> que las ecuaciones de regresión de Onsager tengan una determinada estructura particular. En concreto, si las ecuaciones de regresión de Onsager sin fluctuaciones son ecuaciones de segundo orden en el tiempo, del tipo

$$\sum_j (M_{ij} \ddot{\alpha}_j + R_{ij} \dot{\alpha}_j + S_{ij} \alpha_j) = 0 ; \alpha_j \equiv \delta q_j \equiv q_j - q_j^{(0)} \quad (\text{III.8})$$

donde los elementos de matrices  $M_{ij}$ ,  $R_{ij}$ ,  $S_{ij}$  pueden ser ocasionalmente operadores diferenciales, suponiendo que la parte hermítica de la matriz  $((R_{ij}))$  sea semidefinida positiva, lo cual se desprende, como se verá luego, del principio de mínima disipación de la energía; para que exista la función  $\Theta$  es suficiente que las matrices  $((M_{ij}))$  y  $((S_{ij}))$  sean hermíticas. Esta hipótesis se cumple respecto a  $((M_{ij}))$  en todos los casos de interés, pero hay situaciones de interés físico en que  $((S_{ij}))$  no es hermítica. Aún en estos casos se puede obtener importante información termodinámica <sup>(44)</sup> de las ecuaciones de regresión (III.8), pero en todos los casos discutidos en esta Tesis la matriz  $((S_{ij}))$  será hermítica.

En lo que sigue analizaremos la existencia y la construcción de la función  $\Theta$ , tanto desde un punto de vista macroscópico como microscó-

pico (es decir, usando la ecuación de Fokker-Planck).

Comencemos con un análisis macroscópico basado en el principio termodinámico de balance de potencia <sup>(44)</sup>. Este principio ha sido justificado rigurosamente por Lavenda, pero aquí lo presentamos sólo en forma intuitiva.

Como antes, el sistema estará descrito por variables  $q_i$  cuyos valores en el estado estacionario son  $q_i^{(a)}$ , y sus desviaciones respecto a este valor las notaremos  $\alpha_i \equiv q_i - q_i^{(a)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Sea  $\eta$  la entropía del sistema por unidad de masa y  $\pi$  la potencia total que el sistema cede al medio (en forma de trabajo) por unidad de masa y de temperatura. Entonces el principio termodinámico de balance de potencia afirma que

$$\pi - \dot{\eta} = \sum_i X_i^{(D)} \dot{\alpha}_i = -2\dot{\Psi}, \quad (\text{III.9})$$

donde  $(2\dot{\Psi})$  es la disipación de energía del sistema por unidad de masa y temperatura, y los coeficientes  $X_i^{(D)}$  se llaman fuerzas disipativas. Estas fuerzas disipativas se anulan en el estado estacionario, y en general siempre que  $\dot{q}_i = \dot{\alpha}_i = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ). El significado intuitivo de (III.9) es claro: el aumento de entropía del sistema se debe tanto a la disipación de energía, como a la potencia que el sistema cede al medio; o dicho de otra forma: la disipación que no es compensada por trabajo entregado al sistema por el medio produce un aumento de la entropía del sistema.

Los  $\dot{q}_i = \dot{\alpha}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) se llaman "flujos". Como cuando todos los flujos se anulan, también lo hacen las fuerzas disipativas, en las proximidades del estado estacionario debe ser

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\alpha}_i} = X_i^{(D)} = \sum_j R_{ij} \dot{\alpha}_j ; \quad \Psi = \frac{1}{2} \sum_{ij} R_{ij} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j \quad (\text{III.10})$$

La función  $\Psi$  dada en (III.10) se llama "función de disipación" y fue originalmente introducida por Rayleigh, y muy usada por Onsager. (Los coeficientes  $R_{ij}$  son los coeficientes de Onsager si el estado estacionario es el estado de equilibrio termodinámico.)

Es conveniente desarrollar a  $\pi$  y  $\eta$  alrededor del estado estacionario hasta cantidades de segundo orden en las  $\alpha_i$ . En cuanto a  $\Psi$ , de acuerdo con (III.10) es ya una cantidad de segundo orden en las  $\dot{\alpha}_i$ . Se puede ver que las versiones a orden cero y primer orden de (III.9) sólo aseguran que el estado  $(q_1^{(b)}, \dots, q_n^{(b)})$  sea estacionario, pero no tienen relación con la estabilidad <sup>(44)</sup>. Si las variaciones a segundo orden de  $\eta$  y  $\pi$  son  $\delta^2 \eta$ ,  $\delta^2 \pi$ ; la versión a segundo orden de (III.9) será

$$\delta^2 \pi = \frac{1}{2} \delta^2 \eta - 2\Psi = -\sum_{ij} (S_{ij} \alpha_j + M_{ij} \ddot{\alpha}_j + R_{ij} \dot{\alpha}_j) \dot{\alpha}_i, \quad (\text{III.11})$$

donde se supuso que era (lo cual se deduce de una relación de Gibbs generalizada)

$$\delta^2 \eta = -\sum_{ij} (S_{ij} \alpha_i \alpha_j + M_{ij} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j) \quad (\text{III.12})$$

De la misma forma que se introdujeron las fuerzas disipativas se pueden introducir las fuerzas termodinámicas  $X_i^{(\pi)}$  y externas  $X_i^{(E)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), siendo

$$X_i^{(\pi)} = -\frac{\partial \eta}{\partial \alpha_i} = X_i^{(\pi,0)} + X_i^{(\pi,1)} + \dots ; \quad X_i^{(E)} = -\frac{\partial \pi}{\partial \dot{\alpha}_i} = X_i^{(E,0)} + X_i^{(E,1)} + \dots \quad (\text{III.13})$$



donde se ha hecho un desarrollo hasta primer orden de estas cantidades, siendo las fuerzas a primer orden las que nos interesan

$$X_i^{(\tau,1)} \equiv X_{\tau,i} = -\frac{\partial(\delta^2 \eta)}{\partial \dot{\alpha}_i} = \sum_j (S_{ij} \alpha_j + M_{ij} \ddot{\alpha}_j); \quad X_i^{(E,1)} \equiv X_{E,i} = -\frac{\partial(\delta^2 \pi)}{\partial \dot{\alpha}_i} \quad (\text{III.14})$$

De (III.11) es fácil deducir que las ecuaciones de evolución de las  $\alpha_i (i = 1, \dots, n)$ , es decir las ecuaciones de regresión de Onsager, deben ser

$$\sum_j (M_{ij} \ddot{\alpha}_j + R_{ij} \dot{\alpha}_j + S_{ij} \alpha_j) = X_{E,i}, \quad (\text{III.15})$$

que se reducen a (III.8) en caso que se anule  $(\delta^2 \pi)$  y luego las  $(X_{E,i})$ .

Así pues, es posible interpretar a la versión linealizada de las ecuaciones de movimiento (III.8) como ecuaciones de regresión de Onsager (III.15). (Las fuerzas  $X_{E,i}$  pueden, a su vez, relacionarse con las fluctuaciones de las ecuaciones de Langevin.)

Introduciendo la "función generatriz"  $\Psi$  que es la transformada de Legendre de la función de disipación  $\varphi$  y las fuerzas  $X_i (i=1, \dots, n)$

$$\Psi = \Psi(X_1, \dots, X_n) = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}_i} \dot{\alpha}_i - \varphi = \frac{1}{2} \sum_{ij} L_{ij} X_i X_j; \\ ((L_{ij}))^{-1} = ((R_{ij})); \quad X_i \equiv X_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = X_{\tau,i} - X_{E,i} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}_i} = X_i^{(D)}, \quad (\text{III.16})$$

las ecuaciones (III.15) pueden derivarse de un lagrangeano termodinámico  ${}^{(44)} \mathcal{L}_2$  que es, a su vez, el término de segundo orden (en las  $\alpha_i$ ) en el desarrollo del lagrangeano termodinámico exacto  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \dots; \quad \mathcal{L}_2 = \varphi + \Psi + \delta^2 \pi - \frac{1}{2} \delta^2 \eta \quad (\text{III.17})$$

En el caso en que  $\pi = 0$  y que el estado estacionario  $(q_1^{(b)}, \dots, q_n^{(b)})$

corresponde al equilibrio termodinámico,  $\mathcal{L}$  se reduce al lagrangeano termodinámico de Onsager-Machlup <sup>(24,25)</sup>.

Si se realizan variaciones en las cuales las fuerzas  $X_1$  se consideran variables independientes que se las hace permanecer constantes a los efectos de extremar la acción correspondiente al lagrangeano (III.17), el problema de deducir las ecuaciones (III.15) equivale a extremar la acción del lagrangeano ( $\Psi$  es constante)

$$\mathcal{L}' = (\pi - \dot{\eta} + \varphi) = \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}'_1 + \mathcal{L}'_2 + \dots \quad ; \quad \mathcal{L}'_2 = \left( \delta^2 \pi - \frac{1}{2} \delta^2 \dot{\eta} + \varphi \right) \quad (\text{III.18})$$

Este es un principio de extremo libre <sup>(44)</sup> pero se puede ver que es equivalente a la minimización de la disipación  $\varphi$ , sometida al vínculo dado por el principio de balance de potencia (III.9) (o sea (III.11)) <sup>(44)</sup>. Así pues se ha generalizado lejos del equilibrio el principio de mínima disipación de Onsager, por el cual el sistema evoluciona de forma de disminuir a un mínimo su disipación. Se puede ver ahora que una condición necesaria de estabilidad es que la disipación de energía,  $2\varphi$ , sea siempre una cantidad no negativa en cualquier apartamiento del estado estacionario, ya que si la disipación  $\varphi$  pudiese hacerse negativa con una cierta perturbación del estado estacionario, este estado no podría corresponder a un mínimo de la disipación (ya que, en todo estado estacionario, la disipación  $\varphi$  se anula); en contra del principio de mínima disipación. Esta misma conclusión puede obtenerse a partir del principio de balance de potencia (III.9), observando que si para una perturbación del estado estacionario es  $(\delta^2 \pi)$  una cantidad posi

tiva, la perturbación se desarrolla espontáneamente.

Luego, una condición necesaria de estabilidad es que para cualquier perturbación del estado estacionario sea  $(\delta^2 \pi)$  una cantidad no positiva. Como en el estado estacionario es  $\eta$  constante y luego  $\dot{\eta}$  es nula, del segundo principio de la termodinámica se sigue que  $(\delta^2 \dot{\eta})$  debe ser no negativa, y luego por (III.11) debe ser no negativa la disipación  $\Psi$

$$\delta^2 \pi \leq 0 \therefore \frac{1}{2} \delta^2 \dot{\eta} \leq 2\Psi ; \delta^2 \dot{\eta} \geq 0 \therefore \Psi \geq 0 \quad (\text{III.19})$$

La condición de que  $\Psi$  sea no negativa es una condición necesaria pero claramente no suficiente de estabilidad. Si ella no se cumple, claramente no existe una función  $\Theta$  que cumpla (III.7) y determine la estabilidad del sistema. Así pues supondremos de aquí en más que es  $\Psi \geq 0$ . Recordando la expresión de  $\Psi$  dada en (III.10), resulta inmediatamente que la parte hermitica de la matriz  $((R_{ij}))$  debe ser semidefinida positiva para que sea  $\Psi \geq 0$ .

Hasta ahora las  $\alpha_i$  eran variables reales, pero es conveniente trabajar formalmente con variables complejas, para poder descomponer las perturbaciones en modos normales. (Así es como antes hemos hablado de hermiticidad en vez de simplemente de simetría de las matrices, pensando en esta generalización.) Las ecuaciones de regresión (III.15) siguen valiendo para variables complejas, para las cuales, siguiendo a Lavenda, se puede definir la potencia compleja<sup>(44)</sup>

$$\delta^2 \pi = \pi' + i\pi'' = - \sum_j \alpha_j^* X_{E,j} \quad (\text{III.20})$$

y extender la definición dada en (III.10) de la función de disipación  $\Psi$ , así como la expresión de  $(\delta^2 \dot{\eta})$  dada en (III.12) sin

más que sustituir en ambas expresiones los productos  $(\dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j)$  por  $(\dot{\alpha}_i^* \dot{\alpha}_j)$  y los  $(\alpha_i \alpha_j)$  por  $(\alpha_i^* \alpha_j)$ .

La extensión del principio de balance de potencia (III.11) al campo complejo constituye la base del método de Lavenda de la potencia compleja<sup>(14)</sup>. La deducción de la generalización de (III.11) al campo complejo se realiza simplemente multiplicando la  $i$ -ésima ecuación de regresión (III.15) por  $\dot{\alpha}_i^*$ , sumando luego, en el índice  $i$ , las ecuaciones resultantes. Se tiene así la ecuación compleja de balance de potencia

$$-\sum_{ij} \left( \dot{\alpha}_i^* M_{ij} \ddot{\alpha}_j + \dot{\alpha}_i^* R_{ij} \dot{\alpha}_j + \dot{\alpha}_i^* S_{ij} \alpha_j \right) = \pi' + i \pi'' \quad (\text{III.21})$$

Definiendo ahora

$$R_{ij}^{(H)} \equiv \frac{R_{ij} + R_{ji}^*}{2}; \quad R_{ij}^{(A)} \equiv \frac{R_{ij} - R_{ji}^*}{2}; \quad S_{ij}^{(H)} \equiv \frac{S_{ij} + S_{ji}^*}{2}; \quad S_{ij}^{(A)} \equiv \frac{S_{ij} - S_{ji}^*}{2} \quad (\text{III.22})$$

y asumiendo que la matriz  $(M_{ij})$  es hermítica, se tiene (donde  $\pi'$  es la parte real y  $\pi''$  la parte compleja de la potencia)

$$\pi' = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \left[ \frac{d}{dt} (M_{ij} \dot{\alpha}_i^* \dot{\alpha}_j + S_{ij}^{(H)} \alpha_i^* \alpha_j) + 2 R_{ij}^{(H)} \dot{\alpha}_i^* \dot{\alpha}_j + S_{ij}^{(A)} (\dot{\alpha}_i^* \alpha_j - \alpha_i^* \dot{\alpha}_j) \right], \quad (\text{III.23})$$

$$\pi'' = \frac{i}{2} \sum_{ij} \left[ S_{ij}^{(H)} (\dot{\alpha}_i^* \alpha_j - \alpha_i^* \dot{\alpha}_j) + M_{ij} (\dot{\alpha}_i^* \ddot{\alpha}_j - \ddot{\alpha}_i^* \dot{\alpha}_j) + 2 R_{ij}^{(A)} \dot{\alpha}_i^* \dot{\alpha}_j + \frac{d}{dt} (S_{ij}^{(A)} \alpha_i^* \alpha_j) \right]. \quad (\text{III.24})$$

Las ecuaciones (III.23) y (III.24) son las ecuaciones básicas de la teoría de la estabilidad termodinámica, basada en el método

de la potencia compleja de Lavenda.

La ecuación (III.23) que involucra a la parte hermitica de la matriz  $((R_{ij}))$ , es decir a la matriz  $((R_{ij}^{(H)}))$ , es más importante a los efectos de determinar la estabilidad que la (III.24) que sólo involucra a su parte antihermitica,  $((R_{ij}^{(A)}))$ ; ya que mientras  $((R_{ij}^{(H)}))$  está asociada a las fuerzas disipativas,  $((R_{ij}^{(A)}))$  está asociada a las fuerzas giroscópicas, que no trabajan. (Ejemplos de fuerzas giroscópicas son las fuerzas de Lorentz debidas a campos magnéticos, o las fuerzas de Coriolis que aparecen en los referenciales no inerciales.)

La matriz  $((S_{ij}^{(H)}))$  está asociada a fuerzas de tipo conservativo que se pueden derivar de un potencial (en nuestro caso son las fuerzas termodinámicas y el potencial es la entropía  $\eta$ ), mientras que la matriz  $((S_{ij}^{(A)}))$  está asociada a fuerzas no - conservativas llamadas por Lavenda "fuerzas circulatorias". Una discusión completa sobre todos estos tipos de fuerzas y sus efectos sobre la estabilidad ha sido dada por Lavenda en base a un análisis de modos normales de las ecuaciones (III.23) y (III.24).<sup>(44)</sup> Nosotro nos con centraremos en el caso en que no hay fuerzas circulatorias presentes, o sea que es  $S_{ij}^{(A)} = 0$  para todos  $i, j$ . En el caso de que hubiese fuerzas circulatorias el estudio de la estabilidad se volvería mucho más complicado y, en particular, en ese caso no es posible hallar ninguna función  $\Theta$  que cumpla (III.7)<sup>(44)</sup>. Si asumimos la ausencia de fuerzas circulatorias y observamos que en el campo complejo es

$$\delta^2 \eta = - \sum_{ij} (M_{ij} \dot{\alpha}_i^* \dot{\alpha}_j + S_{ij}^{(H)} \alpha_i^* \alpha_j) ; \quad \varphi = \frac{1}{2} \sum_{ij} R_{ij}^{(H)} \dot{\alpha}_i^* \dot{\alpha}_j ;$$

(III.25)

suponiendo que no hay fluctuaciones de potencia, o sea  $\pi' = \pi'' = 0$ , la ecuación (III.23) se reduce a

$$\frac{d}{dt} (\delta^2 \eta) \equiv (\delta^2 \dot{\eta}) = 4\varphi \quad \text{(III.26)}$$

Si ahora se recuerda que una condición necesaria de estabilidad es que la disipación  $\varphi$  sea semidefinida positiva, se ve que se puede elegir la función  $\Theta = -\delta^2 \eta$ , y siempre que sea  $\varphi \geq 0$ , se cumplirá (III.7), o sea

$$\varphi \geq 0 \therefore \Theta = -\delta^2 \eta ; \quad \frac{d\Theta}{dt} \leq 0 \quad \left( \frac{d}{dt} (\delta^2 \eta) \geq 0 \right)$$

(III.27)

Luego, si la disipación es semidefinida positiva, existe una función de Lyapunov  $\Theta$  y la condición de estabilidad es que  $\Theta$  sea siempre positiva salvo cuando  $\alpha_i = 0$  para todo  $i$ , es decir en el estado estacionario. Esto equivale a pedir que el "exceso" de entropía  $(\delta^2 \eta)$  cumpla la desigualdad contraria, o sea  $(\delta^2 \eta) \leq 0$ , valiendo el signo de igual sólo en el estado estacionario.

Así pues la función de Lyapunov es el "exceso" de entropía  $(\delta^2 \eta)$  y la condición de estabilidad es

$$\delta^2 \eta \leq 0 ; \quad \delta^2 \eta = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad (\forall i) ; \quad \delta^2 \dot{\eta} \geq 0$$

(III.28)

siendo la condición sobre  $(\delta^2 \dot{\eta})$  equivalente a pedir  $\varphi \geq 0$ . La

condición de estabilidad (III.28) es el criterio de estabilidad de Glansdorff - Prigogine<sup>(23,31)</sup>, salvo que debido a la hipótesis de "equilibrio local", Glansdorff y Prigogine calculan incorrectamente ( $\delta^2 \eta$ ), como si valiera para la entropía la misma expresión que en el equilibrio, (obteniendo entonces que siempre es  $\delta^2 \eta \leq 0$ ), además de no imponer una condición de validez a su teoría (es decir, no se asocia la validez de (III.28) con la ausencia de fuerzas circulatorias). En la teoría de Glansdorff y Prigogine falta una clara relación entre el cálculo del "exceso" de entropía ( $\delta^2 \eta$ ) y del "exceso" de producción de entropía ( $\delta^2 \dot{\eta}$ ) (o sea de la disipación) y las ecuaciones de movimiento (III.15). En especial, estos autores suponen que las  $q_1$  son sólo variables termostáticas extensivas, valiendo para ellas la misma relación de Gibbs que en el equilibrio termodinámico; mientras que, en la teoría de Lavenda que aquí desarrollamos, se postula una relación de Gibbs más general, asociada a las ecuaciones de movimiento y que incluye como posibles  $q_1$  algunas variables que sólo existen lejos del equilibrio.

Así pues, para que haya estabilidad es necesario que siempre sea  $\psi \geq 0$ , lo que equivale a decir que la matriz  $((R_{ij}^{(H)}))$  debe ser semidefinida positiva. Supuesto que esta condición se cumple, una condición suficiente de estabilidad es que sea  $\delta^2 \eta < 0$ , para cualquier perturbación, lo que equivale a pedir que la matriz  $((S_{ij}^{(H)}))$  sea definida positiva y la matriz  $((M_{ij}))$  semidefinida positiva (o viceversa). En efecto, siendo  $((R_{ij}^{(H)}))$  semidefinida positiva es  $\delta^2 \dot{\eta} \geq 0$ , y siendo  $\delta^2 \eta < 0$  en toda perturbación,  $\theta = -\delta^2 \eta$  es una función de Lyapunov, lo que garantiza la estabilidad. Por otra

parte, si  $((R_{ij}^{(H)}))$  es (estrictamente) definida positiva, la condición  $\delta^2 \eta < 0$  es necesaria para la estabilidad, pues si en alguna perturbación fuera  $\delta^2 \eta > 0$ , como en ella sería también (por ser  $((R_{ij}^{(H)}))$  definida positiva)  $\delta^2 \dot{\eta} > 0$ , esa perturbación se desarrollaría espontáneamente, es decir tendríamos una inestabilidad.

Puesto que en ausencia de disipación ( $\psi = 0$ ) es  $\delta^2 \dot{\eta} = 0$  falla, en este caso, el argumento anterior para probar que en toda perturbación  $\delta^2 \eta < 0$  es condición necesaria para la estabilidad.

Así, si  $((R_{ij}^{(H)}))$  no es definida positiva, sino que sólo es semidefinida positiva, puede haber perturbaciones estables con  $\delta^2 \eta > 0$  (sin disipación); luego, aunque  $\delta^2 \eta < 0$  garantice la estabilidad, la condición  $\delta^2 \eta < 0$  no es ya más necesaria para la estabilidad. Esto es consecuencia de que, en ausencia de disipación, las fuerzas giroscópicas pueden estabilizar una perturbación con  $\delta^2 \eta > 0$  <sup>(44)</sup>.

Sin embargo, si no hay fuerzas giroscópicas presentes, aún cuando no haya disipación, la condición de que las matrices  $((M_{ij}))$  y  $((S_{ij}^{(H)}))$  sean semidefinidas positivas es necesaria para la estabilidad, puesto que para las perturbaciones en que no haya ni disipación ni fuerzas giroscópicas, las ecuaciones de regresión (III.15) (con  $X_{E,i} = 0$ ) toman la forma

$$\sum_{ij} (M_{ij} \ddot{\alpha}_j + S_{ij}^{(H)} \dot{\alpha}_j) = 0, \quad (\text{III.29})$$

donde se usó que  $((S_{ij}^{(A)}))$  es nula. El sistema de ecuaciones (III.29) es análogo al que se encuentra en la teoría de las pequeñas oscilaciones en Mecánica Clásica (69, 70, 71). Si se hace un análisis de Fourier en el tiempo de este sistema de ecuaciones, o sea se buscan soluciones con dependencia temporal del tipo  $\sim e^{-i\omega t}$ , resolviendo la corres-



pendiente relación de dispersión se hallan las frecuencias características  $w$  de los distintos modos normales que satisfacen el sistema de ecuaciones (III.29), hallándose que estas frecuencias  $w$  son reales o imaginarias puras, viniendo dadas éstas últimas de a pares conjugados, por lo cual una de ellas corresponde necesariamente a un modo inestable.

Para que haya estabilidad es entonces necesario que todas las  $w$  sean reales, o sea que las matrices  $((M_{ij}))$  y  $((S_{ij}^{(H)}))$  sean ambas semidefinidas positivas.

La condición de que  $((M_{ij}))$  y  $((S_{ij}^{(H)}))$  sean ambas semidefinidas positivas, equivale, por (III.25), a que sea siempre  $\zeta^2 \eta < 0$ .

En el caso en que hay fuerzas giroscópicas, si hay perturbaciones con  $\zeta^2 \eta > 0$  sin disipación, para estudiar la estabilidad debe recurrirse a la ecuación (III.24), que para  $\pi'' = 0$  (y  $((S_{ij}^{(A)}))$  nula) se escribe

$$\sum_{ij} \left[ S_{ij}^{(H)} (\dot{\alpha}_i^* \alpha_j - \alpha_i^* \dot{\alpha}_j) + M_{ij} (\ddot{\alpha}_i^* \alpha_j - \alpha_i^* \ddot{\alpha}_j) + 2 R_{ij}^{(A)} \dot{\alpha}_i^* \dot{\alpha}_j \right] = 0 \quad (III.30)$$

Haciendo ahora un análisis de Fourier de (III.30) es posible determinar la estabilidad, es decir si las fuerzas giroscópicas logran o no estabilizar el sistema.

Aún en los casos en que la estabilidad del sistema queda fijada por las propiedades de la función  $\theta = -\zeta^2 \eta$ , puede resultar conveniente plantear (III.30) para obtener información adicional que ocasionalmente puede ser útil.

En los casos en que  $((R_{ij}^{(H)}))$  es sólo semidefinida positiva (y puede

haber perturbaciones con  $\int^2 \dot{\eta} = 0$ ) si hay estabilidad, se habla de estabilidad marginal. También se habla de estabilidad marginal cuando puede haber perturbaciones estables con  $\int^2 \eta = 0$ . Esto ocurre, por ejemplo, cuando el sistema tiene simetría de traslación en una dirección (o de rotación según un eje) y esta simetría no la tiene el estado estacionario, existen entonces infinitos estados estacionarios análogos que forman un continuo, y se puede pasar de uno a otro por una perturbación (de frecuencia nula) que no se considera una inestabilidad, en la cual es  $\int^2 \eta = 0$ .

Pasemos ahora a un análisis microscópico, siguiendo a Graham <sup>(57,58)</sup>, en base a la ecuación de Fokker-Planck (III.4), que como sabemos <sup>(19,20)</sup> es equivalente a un sistema de ecuaciones de Langevin (Teorema de Kolmogorov). Sin mayor pérdida de generalidad, podemos suponer que éstas son de la forma (III.6), ya que si fueran de segundo orden en el tiempo, igualmente puede aplicarse la misma teoría, salvo ligeras modificaciones que luego indicaremos. Es posible demostrar <sup>(21,34,37,57)</sup> que para la ecuación de Fokker - Planck (III.4), así como para la ecuación maestra (III.3), es válido el "Teorema H" de Boltzmann, de lo que se deduce que estas ecuaciones tienen una única solución estacionaria, la cual es además solución asintótica para  $t \rightarrow \infty$ . Se supone que la "matriz de difusión"  $((Q_{ij}))$  es real, simétrica y semidefinida positiva, lo cual es consistente con la relación establecida en (III.6), por la cual  $((Q_{ij}))$  es la matriz de correlación de las fluctuaciones,

$$\langle F_i(t) F_j(t') \rangle = Q_{ij} \delta(t-t') \quad . \quad (III.31)$$

Conviene escalar las ecuaciones (III.4) y (III.6) con un parámetro  $\varepsilon$ , tal que cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  se anulan las fluctuaciones<sup>(58)</sup>.

Obviamente para ello simplemente hay que sustituir, tanto en (III.4) como en (III.6), a  $Q_{ij}$  por  $\varepsilon Q_{ij}$ .

Llamaremos "atractores" a las soluciones estacionarias (o soluciones de equilibrio) deterministas  $(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$  de las ecuaciones de movimiento (III.6).

Si la distribución  $P$  no depende de  $\varepsilon$  (ver más adelante), el límite determinista de la ecuación de Fokker-Planck es la siguiente ecuación de continuidad de la probabilidad

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} (K_i P) = 0 \quad (\text{III.32})$$

Introduciendo la corriente  $J_i = K_i \cdot P$  vemos que  $P$  deriva con velocidad

$$\dot{q}_i = K_i(q_1, \dots, q_n) \quad (\text{III.33})$$

(ecuación de las características).

Sin embargo, es de esperar que la solución estacionaria (solución asintótica para  $t \rightarrow \infty$ ) de la ecuación de Fokker-Planck dependa de  $\varepsilon$ .

En efecto, si  $\varepsilon \rightarrow 0$  se espera que la probabilidad se concentre alrededor de los atractores (soluciones de  $K_i(q_1, \dots, q_n) = 0$ ) estables de la ecuación característica (III.33). Supongamos que, como sucedería con la función de distribución de Boltzmann en presencia de un campo de fuerzas, la importancia de un atractor venga medida por un cierto potencial, y consecuentemente busquemos soluciones estacionarias (asintóticas) del tipo

$$W(\underline{q}) (\equiv P, t \rightarrow \infty) = C \exp \left[ - \theta(\underline{q}) / \varepsilon \right] ; \underline{q} \equiv (q_1, \dots, q_n) \quad (\text{III.34})$$

Obviamente, la distribución alrededor de un atractor será tanto más

ancha cuanto mayores sean las fuerzas fluctuantes (que son proporcionales a  $\varepsilon$ ).

Los términos dominantes en el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$  (que son  $\sim O(\varepsilon^{-1})$ ) de la ecuación de Fokker-Planck dan la siguiente ecuación (análoga a la aproximación eikonal de la ecuación de ondas en el límite  $\lambda \rightarrow 0$ )

$$\sum_i k_i \frac{\partial \theta}{\partial q_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial q_i} \frac{\partial \theta}{\partial q_j} = 0. \quad (\text{III.35})$$

La similitud con la ecuación eikonal sugiere que esta ecuación juega el papel de la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo en la mecánica clásica, y  $\theta$  es el análogo de la acción  $S$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$  correspondería al límite clásico  $\hbar \rightarrow 0$  de la mecánica cuántica, lo cual también sugiere la utilización de integrales de camino, a la Feynman<sup>(72)</sup>).

Luego es posible<sup>(58)</sup>, a partir de (III.35), construir una teoría lagrangeana termodinámica, siguiendo una analogía completa con la mecánica clásica.<sup>(69,70,71)</sup> Alternativamente se puede desarrollar una

teoría termodinámica lagrangeana (equivalente a la anterior) a partir de la ecuación de Fokker-Planck, basándose en el uso de la técnica de integrales de camino.<sup>(20,21,57,60,61)</sup>

Esta teoría termodinámica lagrangeana es del tipo Onsager-Machlup, pero válida lejos del equilibrio, siendo en todo equivalente a la teoría lagrangeana macroscópica de Lavenda, antes reseñada.

La función  $\theta$  tiene la propiedad de Lyapunov  $\dot{\theta} \ll 0$ . Es decir, si apartamos al sistema del equilibrio, el estado  $q$  será función del tiempo en su evolución, y lo mismo ocurrirá con  $\theta(q)$ , para la cual podemos escribir, en el límite determinista

$$\dot{\theta} = \sum_i \frac{\partial \theta}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial \theta}{\partial q_i} k_i = -\frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial q_i} \frac{\partial \theta}{\partial q_j} \ll 0, \quad (\text{III.36})$$

por la positividad de la matriz  $((Q_{ij}))$ .

Además, se muestra fácilmente que el estado de equilibrio es un punto estacionario de  $\theta$  (donde  $\partial\theta/\partial q_i = 0$ ). En efecto, como  $K_i = 0$  en tal punto, debe ser en su entorno por lo menos de primer orden en  $\delta q \equiv q - q^{(b)}$ . Pero entonces se ve que para satisfacer la ecuación de Hamilton-Jacobi (III.35) es necesario que  $\partial\theta/\partial q_i$  también sea de primer orden en  $\delta q$ , lo que prueba la afirmación. En consecuencia, una variación de la función  $\theta$  respecto a su valor de equilibrio es por lo menos de segundo orden.

Un estado estable de equilibrio será entonces aquel para el cual  $\theta$  sea mínimo, o sea que para todo desplazamiento es

$$\delta^2\theta > 0 \quad , \quad (\text{III.37})$$

pues  $\dot{\theta} < 0$  implica que el sistema vuelve al punto de partida, que es el estado de equilibrio. Lo opuesto ocurre si  $\delta^2\theta < 0$ ; en este caso el sistema se aleja. Puede también ocurrir que el signo de  $\delta^2\theta$  no esté definido. En tal caso el equilibrio corresponde a un punto de ensilladura y es inestable.

Asumiendo la expresión (III.34) para  $W(q)$  (podría considerarse, para ganar generalidad, que  $\theta$  depende del tiempo). y trabajando al orden más relevante en  $\epsilon$ , la ecuación de Fokker-Planck puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} (r_i W) = 0 \quad , \quad (\text{III.38})$$

donde la deriva de la probabilidad  $r_i$  es

$$r_i = K_i + \frac{1}{2} \sum_j Q_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial q_j} \quad . \quad (\text{III.39})$$

De la ecuación de Hamilton-Jacobi (III.35) resulta que

$$\sum_i r_i \frac{\partial \theta}{\partial q_i} = 0, \quad (\text{III.40})$$

que implica que  $(r_i)$  es un vector tangente a las equipotenciales de Lyapunov. Además, en régimen estacionario ( $\partial W/\partial t = 0$ ), la conservación de probabilidad se expresa como

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} (r_i W) = 0, \quad (\text{III.41})$$

es decir, la ausencia de divergencia de la corriente de probabilidad  $r_i W$ . La ecuación (III.40) significa que la probabilidad circula en el estado estacionario a lo largo de equipotenciales (líneas de igual probabilidad, como no puede ser de otra manera en un estado estacionario).

Es útil reescribir la ecuación (III.39) en la forma

$$K_i = r_i - \frac{1}{2} \sum_j q_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial q_j}. \quad (\text{III.42})$$

Luego, la fuerza generalizada  $K_i$  tiene dos componentes:  $r_i$ , que es la deriva de la probabilidad, tangente a las equipotenciales, o fuerza "circulatoria", y

$$d_i = -\frac{1}{2} \sum_j q_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial q_j}, \quad (\text{III.43})$$

que debido a la positividad de  $(q_{ij})$ , está orientada en el semiespa<sub>cio</sub> opuesto a  $\partial \theta/\partial q_i$ . Nótese que

$$\sum_i \frac{\partial \theta}{\partial q_i} \cdot d_i < 0 . \quad (\text{III.44})$$

Esta fuerza es responsable de la deriva del estado hacia el equilibrio cuando  $\delta^2 \theta > 0$ .

Adviértase lo siguiente: mientras el estado  $q$  deriva hacia el equilibrio, la distribución de probabilidad permanece estacionaria (con deriva  $r_i$ ). En otras palabras,  $W$  no acompaña estrictamente el movimiento de los estados, y por lo tanto debe existir una deriva compensadora, que es precisamente

$$r_i - K_i = -d_i = \frac{1}{2} \sum_j Q_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial q_j} , \quad (\text{III.45})$$

cuya interpretación física es transparente: representa a las fuerzas aleatorias en su acción dispersora de probabilidad (difusión). En consecuencia,  $d_i$  representa a las fuerzas equilibrantes del sistema, que se hallan de alguna manera compendiadas en el potencial de Lyapunov  $\theta$ . Nótese que la presencia del tensor  $((Q_{ij}))$  en la expresión de  $d_i$  es, a efectos de estudiar el equilibrio, irrelevante, ya que sólo interesa la orientación del vector  $(d_i)$ , y ésta no puede ser alterada por un tensor definido positivo.

Lo que sí es de la mayor importancia para nuestro trabajo es que la introducción de fuerzas aleatorias en las ecuaciones de movimiento, y el tratamiento equivalente de las ecuaciones de Langevin así obtenidas mediante la ecuación de Fokker-Planck, asegura la existencia de un potencial de Lyapunov que contiene toda la información sobre las fuerzas equilibrantes del sistema físico. En principio, este potencial debe

ser obtenido resolviendo la ecuación de Hamilton-Jacobi homogénea (III.35).

Pasamos ahora a ver cómo el potencial de Lyapunov  $\theta$  entra en la ecuación de movimiento de los estados, (III.33). En todas las situaciones de interés práctico es esta última ecuación determinista la que se conoce, por lo menos en su forma linealizada alrededor de un estado de equilibrio (donde  $K_1 = 0$ ). Si bien la resolución de la ecuación (III.35) para  $\theta$  no presenta problemas en una teoría linealizada, aproximación que siempre adoptaremos en nuestro estudio de los plasmas, existe un procedimiento alternativo, que evita esta tarea, y que consiste en identificar la contribución de  $\theta$  a la ecuación (III.33). Para ello procedemos como sigue. Si se desarrolla  $\delta\theta \equiv \theta - \theta_0$  en potencias de los desplazamientos  $\alpha_i \equiv \delta q_i$  de las variables  $q_i$ , respecto a sus valores en el estado estacionario  $(q_i^{(0)})$ , se obtiene al menor orden significativo del desarrollo

$$\delta\theta = \theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_{ij} \alpha_i \alpha_j + \dots \quad (\alpha_i = \delta q_i = q_i - q_i^{(0)}) \quad , \quad (III.46)$$

donde la matriz  $((\sigma_{ij}))$  es real y simétrica.

Desarrollando  $K_1(\underline{q})$  alrededor del valor  $\underline{q} = \underline{q}^{(0)}$ , y recordando que  $K_1(\underline{q}^{(0)}) = 0$ , se tiene, cortando el desarrollo a primer orden

$$K_1(\underline{q}) = \sum_j \Lambda_{ij} \alpha_j + \dots \quad (\delta \underline{q} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \quad . \quad (III.47)$$

Sustituyendo las expresiones de  $K_1(\underline{q})$  y de  $\theta$ , dadas en (III.46) y (III.47) respectivamente, en la ecuación (III.35), se obtiene la



siguiente generalización, lejos del equilibrio, del teorema de fluctuación-disipación

$$\sum_j (A_{ij}E_{jk} + E_{ij}A_{kj}) = -Q_{ik} \quad , \quad (\text{III.48})$$

donde la matriz  $((E_{ij}))$  es la inversa de la matriz  $((\sigma_{ij}))$  y es simétrica como ella, cumpliéndose entonces, por hipótesis

$$\sum_j E_{ij}\sigma_{jk} = \delta_{ik} \quad . \quad (\text{III.49})$$

(Es decir, que para deducir (III.48), se necesita suponer (III.49), o sea que  $((\sigma_{ij}))$  sea invertible).

La fuerza "circulatoria"  $r_i(\mathbf{q})$ , resulta ser entonces (ver (III.39), (III.43), (III.46) y (III.47) )

$$r_i(\mathbf{q}) = \sum_j A_{ij}\alpha_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} Q_{ik}\sigma_{kj}\alpha_j = \sum_{j,k} T_{ik}\sigma_{kj}\alpha_j \quad ;$$

$$T_{ik} = \sum_j A_{ij}E_{jk} + \frac{1}{2} Q_{ik} \quad , \quad (\text{III.50})$$

donde para introducir la matriz  $((T_{ik}))$  se recurrió a introducir la identidad (III.49). Usando ahora (III.48) y la simetría de  $((E_{ij}))$ , resulta que es

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad ; \quad \sum_k \frac{\partial r_k(\mathbf{q})}{\partial q_k} = 0 \quad (\text{III.51})$$

lo que, en particular, es consistente con (III.40).

Las ecuaciones de Langevin, linealizadas alrededor de  $q^{(0)}$  y sin fluctuaciones, son entonces

$$\dot{\alpha}_i = \sum_j A_{ij} \alpha_j = \sum_{j,k} (T_{ik} - \frac{1}{2} Q_{ik}) \sigma_{kj} \alpha_j \quad (\text{III.52})$$

Si ahora

$$L_{ij} \equiv -T_{ij} + \frac{1}{2} Q_{ij} \quad (\text{III.53})$$

(y, por lo tanto,  $Q_{ij} = L_{ij} + L_{ji}$  por la antisimetría de  $((T_{ij}))$ ) y si la matriz inversa de  $((L_{ij}))$ , que asumiremos que existe, es  $((R_{ij}))$ , se tiene

$$\sum_j R_{ij} \dot{\alpha}_j + \sum_j \sigma_{ij} \alpha_j = 0 \quad (\text{III.54})$$

Hasta aquí se supuso que las ecuaciones de Langevin eran de primer orden en el tiempo. Si comparamos con la teoría macroscópica de antes, vemos que las ecuaciones (III.54) coinciden con las ecuaciones de regresión de Onsager (III.15), si se supone allí que  $\sum_{E,i} X_{E,i} = 0$ ; que la matriz  $((S_{ij}))$  es hermítica, y se la identifica con  $((\sigma_{ij}))$ , o sea que es  $\sigma_{ij} = S_{ij}$ ; y si además  $M_{ij} = 0$  para todos los valores posibles de  $i, j$ ; siendo esta última condición consecuencia de haber supuesto que las ecuaciones de Langevin eran todas de la forma (III.6), o sea de primer orden en el tiempo. Si se levanta esta hipótesis, y se admite que las ecuaciones de Langevin pueden ser de segundo orden en el tiempo, la teoría sólo debe modificarse levemente (tratando los  $\dot{q}_i$  como nuevos  $q_i$ ). Supongamos, para simplificar, que el vector de estado tiene dos componentes  $\alpha = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , siendo  $v = \dot{u}$ , considerando a la velocidad

una variable de estado (como es habitual en mecánica). La ecuación (III.54) se escribe matricialmente

$$\mathbb{R} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} + \mathbb{S} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad . \quad (\text{III.55})$$

La matriz  $\mathbb{S}$  debe ser diagonal, porque de lo contrario en la expresión (III.46)

$$\delta\theta = \frac{1}{2} \alpha^+ \mathbb{S} \alpha \quad ( \alpha^+ = (u^*, v^*) )$$

se mezclarían las variables  $u$  y  $v$ , que tienen propiedades opuestas de inversión temporal, en tanto que la solución asintótica de la ecuación de Fokker-Planck, (III.34) debería ser invariante ante tal inversión.

Escribamos

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{III.56})$$

Entonces para satisfacer el vínculo  $v = \dot{u}$  debe ser

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} R & \rho \\ -M & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.57})$$

con  $R$  y  $\rho$  a determinar. Recordemos que la parte simétrica de la inversa de  $\mathbb{R}$  es la matriz de correlación de las fluctuaciones (ver ecuaciones (III.53) y (III.31) )

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} - \frac{1}{M} \\ \frac{1}{\rho} - \frac{1}{M} & \frac{R}{M\rho} \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{III.58})$$

Pero los elementos no diagonales de  $\mathbb{Q}$  deben anularse si no se quieren introducir fluctuaciones en la ecuación exacta (determinista)  $v = \dot{u}$ , es decir  $\mathcal{F} = M$ . Luego, la parte superior de la ecuación (III.55) queda

$$M\dot{v} + R\dot{u} + \sigma u = 0 \quad (\text{III.59})$$

y usando el vínculo ( $v = \dot{u}$ )

$$M\ddot{u} + R\dot{u} + \sigma u = 0 \quad (\text{III.60})$$

El mismo procedimiento se puede emplear en casos de más dimensiones, reemplazando  $u$  y  $v$  por vectores y  $M, R, \sigma$  por matrices con el número apropiado de componentes. En el caso más general, la función de Lyapunov es de la forma

$$\mathcal{L}\theta = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma_{ij} \alpha_i \alpha_j + M_{ij} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j) \quad (\text{III.61})$$

Nótese que la positividad de  $\mathbb{Q}$ , la matriz de difusión, implica en el ejemplo que acabamos de ver (ecuación (III.58)) y en el caso general, la positividad de  $R$ , que juega el papel de una matriz de disipación.

Con esto, una vez supuesto que  $((S_{ij}))$  es hermítica (condición para que exista  $\theta$  en (III.27)) es evidente que la  $\mathcal{L}\theta$  dada en (III.61) coincide con la  $\theta = -\mathcal{L}^2 \eta$ , de antes, si  $S_{ij} = \sigma_{ij}$ .

Además, ahora, en vez de (III.54), se obtendrá la ecuación (III.15), con  $X_{E,i} = 0$ .

En definitiva, la teoría microscópica en base a la ecuación de Fokker-Planck, equivale a la teoría macroscópica de Lavenda, antes desarrollada.

Por último, digamos que es posible dar una formulación de la Termodinámica Irreversible a partir de un tratamiento fundado en el uso de la Teoría de la Información, (y a partir de la ecuación maestra (III.3), o de la ecuación de Fokker-Planck) que reproduce todos los resultados anteriores, incluyendo la teoría lagrangeana antes mencionada, y el principio termodinámico de balance de potencia <sup>(63,64)</sup>. Esta teoría se basa en el concepto de "ganancia de información" <sup>(37)</sup>, y entre sus consecuencias figura la demostración del "teorema H" para la ecuación maestra (III.3).

Pasemos ahora a discutir las aplicaciones concretas de la Termodinámica Irreversible a la teoría de la estabilidad de los plasmas.

La teoría termodinámica que acabamos de desarrollar se basa en admitir que las ecuaciones macroscópicas de evolución de un sistema termodinámico (por ejemplo, un plasma) deben tener términos fluctuantes (aunque puedan ser despreciables) y luego, son ecuaciones de Langevin.

Las fluctuaciones en las ecuaciones de movimiento que rigen la evolución de un sistema macroscópico (como por ejemplo, en el caso de un plasma), se deben a que dichas ecuaciones dan una descripción del sistema basada en unas pocas variables macroscópicas (las variables magnetohidrodinámicas, en el caso de un plasma tratado como fluido), a pesar del enorme número de grados de libertad que el sistema posee. Luego, esta descripción implica una división de los grados de libertad del sistema en estas pocas variables macroscópicas y el resto de los grados de libertad del sistema, que son ignorados en esta descripción, pero que necesariamente deben tener su influencia en la evolución del sistema. Si la elección de las variables macros-

cópicas se realizó correctamente<sup>(14)</sup>, esta influencia de los grados de libertad ignorados en la descripción macroscópica sobre la evolución del sistema puede representarse por términos fluctuantes en las ecuaciones macroscópicas de movimiento del sistema.

Es decir que las ecuaciones deterministas microscópicas (o sea, las que toman en cuenta todos los grados de libertad del sistema) de movimiento pueden reducirse a las ecuaciones macroscópicas, a condición de que se le adicionen a éstas, términos fluctuantes (que, ocasionalmente, pueden ser despreciables).

En lo que resta de este capítulo discutiremos casos en que el plasma se trata como un fluido, mientras que en el próximo capítulo abordaremos el problema de la estabilidad de un plasma descrito por la ecuación de Vlasov, y, en especial, el caso de un plasma con radio de Larmor grande.

Antes de nada, si describimos el plasma como un fluido (o dos fluidos, uno de iones y otro de electrones) basta añadirle a las ecuaciones fluidísticas las fluctuaciones, de acuerdo con la teoría de Landau-Lifchitz, para transformarlas en ecuaciones de Langevin<sup>(29,47,48,49,50)</sup>.

Un estudio detallado de los efectos de las fluctuaciones en las ecuaciones magnetohidrodinámicas, y sus implicancias sobre la estabilidad del plasma, desde un punto de vista puramente matemático (no termodinámico), fue realizado recientemente por Teichmann<sup>(73,74)</sup>.

Sus resultados en lo referente a la estabilidad del plasma coinciden, en esencia, con los de Tasso<sup>(11,75,76)</sup>, que discutiremos más adelante, en este mismo capítulo.

Comenzaremos discutiendo el caso de la magnetohidrodinámica (MHD) ideal, en que las ecuaciones básicas (de un sólo fluido) son: <sup>(1,10,11)</sup>

a) la ecuación de continuidad y la ecuación de estado

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 ; \left( \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \right) \left( \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (\text{III.62})$$

b) la ecuación de conservación del impulso y la ley de Ohm

$$\rho \left[ \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} \right] = \frac{\underline{j} \times \underline{B}}{c} - \nabla p + \rho \underline{g} ;$$

$$\underline{E} + \frac{\underline{v} \times \underline{B}}{c} = \frac{1}{n_e} (\nabla p_i + \rho \underline{g}) \quad (\text{III.63})$$

c) las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{j} ; \nabla \times \underline{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} ; \nabla \cdot \underline{B} = 0 ;$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi \rho q \quad (\text{III.64})$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa,  $\rho q$  la densidad de carga,  $p_i$  la presión iónica,  $\underline{g}$  el campo gravitatorio (real o ficticio) y en general la notación es la de Krall & Trivelpiece <sup>(1)</sup>.

Supongamos que en la situación estacionaria no hay campo eléctrico ni movimiento ( $\underline{E}_0 = \underline{v}_0 = 0$ ). Definiendo el vector desplazamiento  $\underline{\xi}$ , tal que la velocidad (a primer orden) sea  $\underline{v} = \underline{v}_1 = \dot{\underline{\xi}}$ , se linealizan todas las ecuaciones dadas en (III.62), (III.63) y (III.64), así como las cantidades que en ellas aparecen, alrededor del estado

estacionario; luego de algún manipuleo algebraico, se obtiene (1,3,10)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} = \underline{\nabla} \left[ \underline{\xi} \cdot \underline{\nabla} p_0 + \gamma p_0 (\underline{\nabla} \cdot \underline{\xi}) \right] + \left( \frac{1}{4\pi} \right) \left[ (\underline{\nabla} \times \underline{B}_0) \times \underline{Q} + (\underline{\nabla} \times \underline{Q}) \times \underline{B}_0 \right] - g_0 \left[ \underline{\nabla} \cdot (\rho_0 \underline{\xi}) \right]; \quad \underline{Q} \equiv \underline{B}_1 = \underline{\nabla} \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0) \quad (\text{III.65})$$

donde el subíndice "0" en algunas variables indica que son cantidades a orden cero, y  $\underline{Q}$  es el campo magnético a primer orden. La ecuación para  $\underline{\xi}$  dada en (III.65) puede ahora tratarse como una ecuación de regresión de Onsager del tipo (III.15), con  $X_{E,i} = 0$  (es decir, sin fluctuaciones); siendo aquí

$$R_{ij} = 0; \quad M_{ij} = \rho_0 \delta_{ij}; \quad \delta^2 W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_i^* S_{ij} \alpha_j =$$

$$= - \frac{1}{2} \int_{\text{plasma}} d^3x \underline{\xi}^* \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} [(\underline{\nabla} \times \underline{B}_0) \times \underline{Q} + (\underline{\nabla} \times \underline{Q}) \times \underline{B}_0] + \right.$$

$$\left. + \underline{\nabla} \left[ \underline{\xi} \cdot \underline{\nabla} p_0 + \gamma p_0 (\underline{\nabla} \cdot \underline{\xi}) \right] - g_0 \left[ \underline{\nabla} \cdot (\rho_0 \underline{\xi}) \right] \right\}, \quad (\text{III.66})$$

donde los índices  $i, j$  son continuos y múltiples; una suma en uno de ellos implica integración espacial en el volumen del plasma, además de suma en las componentes espaciales, ya que  $i = (\underline{x}, \ell)$ ,  $\ell = 1, 2, 3$ ; siendo  $\alpha_i = \xi_\ell(\underline{x})$ .

Siendo nula la matriz  $((R_{ij}))$  y definida positiva la matriz  $((M_{ij}))$ , se podrá establecer un criterio de estabilidad termodinámico (III.28) sólo si la matriz  $((S_{ij}))$  es hermítica; y, en este caso, la condición de estabilidad será que  $((S_{ij}))$  sea definida positiva, corres-



poniendo el caso que sólo sea semidefinida positiva al de la estabilidad marginal. En otros términos, si  $((S_{ij}))$  es hermitica, hay estabilidad si para cualquier perturbación es  $\int \delta^2 W > 0$  (el caso  $\int \delta^2 W = 0$  corresponde a la estabilidad marginal), y hay inestabilidad si para alguna perturbación es  $\int \delta^2 W < 0$ . La cantidad  $\int \delta^2 W$ , definida en (III.66), es en la notación habitual de los físicos del plasma

$$\int \delta^2 W = \frac{1}{2} \int_{\text{plasma}} \xi^* \cdot \underline{K} \cdot \xi \, d^3 x \quad (\text{III.67})$$

donde el operador  $\underline{K}$  no es otra cosa que la matriz  $((S_{ij}))$  para este caso particular. Nuestro criterio vale entonces si  $\underline{K}$  es autoadjunto, y el criterio de estabilidad está dado por el signo de  $(\int \delta^2 W)$ . En otras palabras, reencontramos el conocido "principio de energía" de la MHD ideal debido a Bernstein et al. <sup>(77,1,3,9,10)</sup>

Nosotros hemos supuesto un tensor isótropo de presiones, pero la extensión de este principio al caso de un tensor anisótropo de presiones (y, en especial, al caso en que valga la aproximación de Chew, Goldberger y Low) no ofrece dificultades, como se muestra en el capítulo XII del libro de Mikhailovskii <sup>(2)</sup>.

El problema de establecer el carácter autoadjunto del operador  $\underline{K}$  ha sido ampliamente discutido en la literatura <sup>(1,9,10)</sup>, así como también la aplicación del "principio de energía" de Bernstein a las más diversas situaciones de la MHD ideal, razón por la cual aquí no insistiremos en estos puntos. Sólo mencionaré que, en el caso

$g_0 = 0$ , resulta (3,4,9,10)

$$T + \mathcal{W} = \text{constante}; \quad T = \frac{1}{2} \int_{\text{plasma}} \rho v^2 d^3x; \quad \mathcal{W} = \int \left( \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{8\pi} \right) d^3x$$

todo el espacio (III.68)

lo cual no es otra cosa que el principio de conservación de la energía. La integral  $\mathcal{W}$  se extiende no sólo a la región con plasma, sino también a la zona de vacío (a diferencia de la integral en (III.66), ó (III.67), que es sólo en el plasma). Luego, observando que es

$$\delta \dot{\mathcal{W}} = -\delta \dot{T} = -\int_{\text{plasma}} (\rho_0 \dot{\xi} \cdot \ddot{\xi}) d^3x = \int_{\text{plasma}} (\dot{\xi} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \dot{\xi}) d^3x = \delta^2 \dot{\mathcal{W}} \quad (\underline{v} = \dot{\xi}; \rho_0 \dot{\xi} = -\underline{\underline{K}} \cdot \dot{\xi})$$

(III.69)

(un razonamiento análogo es posible aún si  $g_0 \neq 0$ , añadiendo en  $\mathcal{W}$  un potencial gravitatorio del que derive  $g_0$ ); de (III.69) se deduce que  $\delta^2 \dot{\mathcal{W}} = \delta^2 \mathcal{W}$ , es decir que  $\delta^2 \dot{\mathcal{W}}$  representa una variación de la energía  $\mathcal{W}$ .

Dejemos ahora la MHD ideal, y pasemos a ver como se aplica nuestro criterio de estabilidad termodinámico (basado en la Termodinámica Irreversible) al caso más complejo en que el plasma debe tratarse con las ecuaciones de la magnetohidrodinámica disipativa (MHD disipativa), lo que nos permitirá estudiar inestabilidades resistivas y térmicas (éstas últimas, asociadas a la existencia de gradientes de temperatura y densidad (78,79,80)).

Las inestabilidades resistivas (y algunas térmicas) han sido estudiadas en detalle por Tasso, quien encontró para ellas un "principio de energía" (11,75,76,81) más general que el de la MHD ideal, cu-

ya identificación con nuestro principio termodinámico es mucho más directa aún que en el caso del "principio de energía" de la MHD ideal, debido a Bernstein.

En efecto, Tasso ha logrado mostrar que en gran cantidad de situaciones las ecuaciones de la MHD disipativa (tanto en un modelo a un fluido, como en uno a dos fluidos) pueden reducirse a un sistema de ecuaciones de la forma (75,76)

$$\underline{\underline{N}}\dot{\underline{y}} + (\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{H}}) \underline{\dot{y}} + \underline{\underline{Q}} \underline{y} = 0 \quad (\text{III.70})$$

donde  $\underline{y}$  es un vector multidimensional cuyas componentes son variables magnetohidrodinámicas (tales como la velocidad o un campo) y donde  $\underline{\underline{N}}$ ,  $\underline{\underline{P}}$ ,  $\underline{\underline{H}}$ ,  $\underline{\underline{Q}}$  son matrices (cuyos elementos de matriz pueden contener operadores de derivación espacial, tal y como gradientes, divergencias, etc.); siendo las matrices  $\underline{\underline{N}}$ ,  $\underline{\underline{H}}$  y  $\underline{\underline{Q}}$  simétricas (o sea reales y hermiticas) y la  $\underline{\underline{P}}$  antisimétrica (real y antihermitica), y además  $\underline{\underline{N}}$  y  $\underline{\underline{H}}$  son definidas positivas. Entonces Tasso encuentra que el criterio de estabilidad que se cumple en todos estos casos, es que (si  $(\underline{y}, \underline{y}')$  representa el producto escalar de los vectores multidimensionales  $\underline{y}$ ,  $\underline{y}'$ ) sea en toda perturbación

$$(\underline{y}, \underline{\underline{Q}} \underline{y}) > 0 \quad (\text{III.71})$$

La condición suficiente de estabilidad es que valga (III.71) para toda perturbación del estado estacionario (cuya estabilidad se estudia), o sea que  $\underline{\underline{Q}}$  sea definida positiva. Por otro lado, basta que en alguna perturbación sea el producto escalar dado en

(III.71) negativo para que haya inestabilidad (o sea que una condición necesaria de estabilidad es que  $\underline{Q}$  sea semidefinida positiva, correspondiendo al caso de que el producto escalar pueda ser nulo a una estabilidad marginal).

Ahora bien este criterio de estabilidad hallado por Tasso independientemente de cualquier consideración termodinámica <sup>(11,75,76)</sup> es idéntico al que resulta identificando las ecuaciones (III.70) con ecuaciones de regresión sin fluctuaciones (con  $X_{E,i} = 0$ ) del tipo (III.15), donde las componentes del vector  $\underline{y}$  coinciden con los  $\alpha_i$  (cada componente de  $\underline{y}$  es un conjunto infinito de  $(\alpha_i)$  ó  $(q_i)$ , donde  $i \equiv \underline{x}$ ), las matrices  $((M_{ij}))$  y  $((S_{ij}))$  se transforman respectivamente en  $\underline{N}$  y  $\underline{Q}$ , y las matrices  $((R_{ij}^{(H)}))$  y  $((R_{ij}^{(A)}))$  en las matrices  $\underline{H}$  y  $\underline{P}$ .

En efecto, con esta identificación, el carácter hermitico de  $\underline{Q}$  (o sea  $((S_{ij}))$ ) y el carácter definido positivo de  $\underline{H}$  (o sea  $((R_{ij}^{(H)}))$ ), que está asociada a la disipación), implican que el criterio termodinámico de estabilidad (III.28) es válido, y éste se reduce a pedir que sea, en toda perturbación estable  $\delta^2 \eta < 0$ , ya que la condición  $\delta^2 \dot{\eta} > 0$  es automática, por ser  $\underline{H}$  definida positiva.

Luego, la condición termodinámica de estabilidad es, usando la notación de Tasso,

$$\delta^2 \eta = - \left[ (\dot{\underline{y}}, \underline{N} \dot{\underline{y}}) + (\underline{y}, \underline{Q} \underline{y}) \right] < 0 \quad (\text{III.72})$$

donde esta condición (en toda perturbación) es suficiente para la estabilidad, mientras que  $\delta^2 \dot{\eta} > 0$  en alguna perturbación asegura la

inestabilidad, pues la disipación es positiva (el caso  $\delta^2 \eta = 0$  es marginal). Como  $\underline{N}$  es definida positiva, (III.72) se reduce a (III.71), reobteniéndose el criterio de estabilidad de Tasso. El caso más general tratado por Tasso<sup>(75,76)</sup> es el representado por las ecuaciones a dos fluidos ( $k = 1, e$ )

$$(j \neq k) \quad n_k m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = n_k q_k (\underline{E} + \mathbf{v}_k \times \underline{B}) - \underline{\nabla} p_k - \frac{\underline{\nabla} \cdot \underline{\pi}}{=k} + \\ + \frac{q_k^2}{c} \eta n_k (n_j \mathbf{v}_j - n_k \mathbf{v}_k) \quad , \quad (\text{III.73})$$

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (n_k \mathbf{v}_k) = 0 ; \quad p_k = p_k(n_k) \quad ,$$

conjuntamente con las cuatro ecuaciones de Maxwell (la notación aquí es la de Caldas & Tasso). Luego de hacer ciertas suposiciones y aproximaciones, mencionadas por Caldas & Tasso en su trabajo<sup>(75)</sup> y en especial desprestigiar cierto término proporcional a  $(\underline{j} \cdot \underline{\nabla} \underline{\xi}_e)$ <sup>(11,75,76)</sup> se llega a ecuaciones del tipo (III.70), con ( $\underline{A}$  es el potencial vector,  $\underline{\xi}_k$  el desplazamiento de la especie  $k$ ,  $\underline{j}$  la corriente a orden cero,  $k = 1, e$ )

$$(\underline{y}, \underline{Q} \underline{y}) = \int d\tau (\underline{\nabla} \times \underline{A})^2 + \sum_k \int d\tau [2 \underline{\nabla} \cdot \underline{\xi}_k (\underline{\xi}_k \cdot \underline{\nabla} p_k) + \gamma p_k (\underline{\nabla} \cdot \underline{\xi}_k)^2 + \\ + (\underline{\nabla} p_k \cdot \frac{\underline{\nabla} n}{n}) (\frac{\underline{\xi}_k \cdot \underline{\nabla} n}{|\underline{\nabla} n|})^2] - \int d\tau (\underline{\nabla} \ln n \cdot \underline{\nabla} p) (\frac{\underline{\xi}_e \cdot \underline{\nabla} n}{|\underline{\nabla} n|})^2 + \\ + 2 \int d\tau \underline{A} \cdot (\underline{\xi}_e \cdot \underline{\nabla} \underline{j} - \underline{j} \cdot \underline{\nabla} \underline{\xi}_e + \underline{j} \cdot \underline{\nabla} \underline{\xi}_e) - \int d\tau (\underline{B}_0 \times \underline{\xi}_e) \cdot (\underline{\xi}_e \cdot \underline{\nabla} \underline{j} - \underline{j} \cdot \underline{\nabla} \underline{\xi}_e) \\ (n_i = n_e = n, \quad p = p_i + p_e) \quad (\text{III.74})$$

y es esta la cantidad que debe sustituirse en (III.71) para estu-

diar la estabilidad del plasma. El criterio de estabilidad es pues el signo de (III.74). A partir de este criterio es posible estudiar la estabilidad de muy variadas situaciones<sup>(75)</sup>. El "principio de energía" de Bernstein, antes discutido, es un caso particular de este principio de Tasso (obteniéndose  $\delta W$  de (III.74), cuando se supone  $\xi_i \sim \xi_e$ ,  $A \sim \xi_k \times B_0$ ,  $\eta = 0$ , etc.).

Un ejemplo simple no-ideal es el de las inestabilidades resistivas en un Tokamak, discutido por Tasso<sup>(11, 81)</sup> con el modelo de un sólo fluido.

Las ecuaciones básicas, en un modelo a un fluido, son de la forma

(III.70), con  $\underline{P}$  nula, y

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} U \\ A \end{pmatrix}; \quad \underline{N} = \begin{pmatrix} -\underline{\nabla}_\perp \cdot \underline{\nabla}_\perp & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{M} = \begin{pmatrix} -(\underline{B} \cdot \underline{\nabla}) \frac{1}{\eta_0} (\underline{B} \cdot \underline{\nabla}) & (\underline{B} \cdot \underline{\nabla}) \frac{1}{\eta_0} \\ -\frac{1}{\eta_0} (\underline{B} \cdot \underline{\nabla}) & \frac{1}{\eta_0} \end{pmatrix}$$

y donde  $\underline{Q}$  depende del modelo físico que se haga del transporte de la resistividad: si es llevada por el fluido (f) o por las superficies magnéticas (s). Se tiene<sup>(81)</sup>

$$\underline{Q}^{(f)} = \begin{pmatrix} J'(\underline{B} \cdot \underline{\nabla})(\underline{B}_\perp \cdot \underline{\nabla}) & -J'(\underline{B}_\perp \cdot \underline{\nabla}) \\ J'(\underline{B}_\perp \cdot \underline{\nabla}) & -\frac{1}{\mu_0} \underline{\nabla}_\perp^2 \end{pmatrix}; \quad \underline{Q}^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J'(\underline{B} \cdot \underline{\nabla})^{-1} (\underline{B}_\perp \cdot \underline{\nabla}) - \frac{1}{\mu_0} \underline{\nabla}_\perp^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.75})$$

Luego

$$\begin{aligned} (\underline{y}, \underline{Q}^{(f)} \cdot \underline{y}) &= \int [J'(\underline{B} \cdot \underline{\nabla})(\underline{B}_\perp \cdot \underline{\nabla})U + 2J'A(\underline{B}_\perp \cdot \underline{\nabla})U + \frac{1}{\mu_0} |\underline{\nabla}_\perp A|^2] d\tau \\ (\underline{y}, \underline{Q}^{(s)} \cdot \underline{y}) &= \int [J'A(\underline{B} \cdot \underline{\nabla})^{-1} (\underline{B}_\perp \cdot \underline{\nabla})A + \frac{1}{\mu_0} |\underline{\nabla}_\perp A|^2] d\tau \end{aligned} \quad (\text{III.76})$$

donde, de acuerdo con Tasso, se ha asumido<sup>(81)</sup> que  $(J', A, U)$  se defi

nen implícitamente en lo que sigue)

$$\underline{B} = \underline{e}_z \times \nabla \Psi + B_z \underline{e}_z ; \quad \underline{J} = J(\Psi) \underline{e}_z ; \quad J' = \frac{dJ}{d\Psi} ; \quad \underline{E} = \eta_0 \underline{J} ;$$

$$\underline{b} = -\underline{e}_z \times \nabla A ; \quad \underline{\xi} = -\underline{e}_z \times \nabla U \quad (\nabla \cdot \underline{\xi} = 0)$$

(III.77)

siendo aquí  $\Psi$  el flujo magnético poloidal, y donde los campos, a orden cero son  $\underline{E}$ ,  $\underline{B}$  y, a primer orden son  $\underline{e}$ ,  $\underline{b}$  (de la misma forma, la corriente, a orden cero es  $\underline{J}$  y, a primer orden es  $\underline{j}$ ); y es  $\nabla \cdot \underline{\xi} = 0$  siendo  $\underline{\xi}$  el desplazamiento del plasma; se usan unidades M.K.S. y la resistividad es  $\eta_0 + \eta_1$ , teniéndose que

$$\eta_1^{(f)} = -\underline{\xi} \cdot \nabla \eta_0 ; \quad (\underline{B} \cdot \nabla) \eta_1^{(s)} + (\underline{b} \cdot \nabla) \eta_0 = 0.$$

Pasemos ahora a discutir otros dos ejemplos no tratados por Tasso, en que el plasma se puede describir como fluido, pero en que hay presente un gradiente térmico (y en uno de ellos, un gradiente de densidad, cruzado con el térmico).

Estos ejemplos sólo han sido discutidos antes en la literatura con un análisis de modos normales, no con ningún principio variacional. Son dos ejemplos concretos en que el análisis variacional se puede llevar a sus últimas consecuencias en forma analítica.

El primero de ellos es el de la inestabilidad termoeléctrica, descubierta por Tidman & Shanny<sup>(78)</sup> en los plasmas producidos por láser, y propuesta luego como posible mecanismo para la filamentación de la lámina de corriente de un Plasma Focus<sup>(79)</sup>.

La idea básica de este mecanismo es considerar la lámina de corrien

te del Plasma Focus (PF) como una juntura termoeléctrica. La inestabilidad en cuestión resulta del efecto combinado del término de fuente de campo magnético llamado "vector baroclínico"

$$-\frac{e}{e} \underline{\nabla} \ln(n_e) \times \underline{\nabla} T_e \quad (\text{III.78})$$

y la deriva térmica en un campo magnético

$$-K_{\Lambda}^e \underline{b} \times \underline{\nabla} T_e \equiv -K' \underline{\omega}_{ce} \times \underline{\nabla} T_e \quad (\underline{\omega}_{ce} \equiv \omega_{ce} \underline{b}; K_{\Lambda}^e \equiv K' \omega_{ce}) \quad (\text{III.79})$$

(donde  $T_e$  es la temperatura y  $n_e$  la densidad de electrones,  $\underline{b}$  es el vector unidad en la dirección del campo magnético,  $\omega_{ce}$  es la frecuencia de ciclotrón de los electrones, etc.)

Las ecuaciones básicas para estudiar esta inestabilidad son (79)

$$\frac{\partial \omega_{ce}}{\partial t} = \frac{|\underline{\nabla} \ln n_e|_0}{m_e} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \nu_m \frac{\partial^2 \omega_{ce}}{\partial x^2} \quad (\text{III.80})$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = -s |\underline{\nabla} T_e|_0 \frac{\partial K_{\Lambda}^e}{\partial x} + K_{\perp} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \quad (\text{III.81})$$

donde  $\nu_m$  es la viscosidad magnética,  $K_{\perp}$  el coeficiente de difusión térmica;  $T_1(x,y)$  es la perturbación en  $T_e$ ; no hay campo magnético a orden cero, luego  $\omega_{ce}$  es una cantidad a primer orden (sólo existe en la perturbación); la dirección de  $\underline{b}$  coincide con el eje  $z$ ; la dependencia de la perturbación con  $y$  puede desprejarse; a orden cero los gradientes de densidad y temperatura son paralelos, siendo (ambos están paralelos al eje  $y$ )

$$S \equiv \underline{\nabla} (\ln n_e)_0 \cdot \underline{\nabla} (T_e)_0 > 0; \quad \mathcal{A} \equiv \frac{S}{|S|} \quad (\text{III.82})$$



La ecuación (III.80) es la ecuación de evolución del campo magnético y la (III.81) la ley de conducción del calor. (No se considera el movimiento del plasma, o mejor dicho, las ecuaciones son planteadas desde un referencial solidario con él.)

Aplicando el operador  $(\partial/\partial t - \nu_m \partial^2/\partial x^2)$  a (III.81), y usando (III.80) para eliminar a  $\omega_{ce}$ , resulta

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} + (K_{\perp} + \nu_m) \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial T_1}{\partial t} + K_{\perp} \nu_m \frac{\partial^4 T_1}{\partial x^4} + \frac{K' S}{m_e} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = 0 \quad (III.83)$$

que puede considerarse una ecuación de Langevin (donde  $q_i \equiv T_1$ ) o ecuación de regresión (III.15) en que las tres matrices  $((M_{ij}))$ ,  $((R_{ij}))$ ,  $((S_{ij}))$  son hermiticas, además  $((M_{ij}))$  se reduce a la identidad y  $((R_{ij}))$  al operador  $(-\partial^2/\partial x^2)$  multiplicado por  $(K_{\perp} + \nu_m)$ . Luego tanto  $((M_{ij}))$  como  $((R_{ij}))$  son definidas positivas. El criterio de estabilidad termodinámico es entonces válido y establece como condición de estabilidad que  $((S_{ij}))$  sea definida positiva, o sea

$$\int d^3x \left[ \nu_m K_{\perp} \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{K' S}{m_e} \left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)^2 \right] \geq 0 \quad (III.84)$$

Recordamos que la matriz  $((S_{ij}))$  corresponde al operador

$$K_{\perp} \nu_m \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right) + \frac{K' S}{m_e} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$$

y se hicieron integrales por partes, suponiéndose que las condiciones de borde son tales que todas las integrales de contorno se anulan.

La condición (III.84) conduce a los mismos resultados que un análisis de modos normales <sup>(79)</sup>.

En el caso  $S \leq 0$ , hay estabilidad para cualquier modo. Si en cam-

bio es  $S > 0$ , como supusimos en (III.82), puede haber modos inestables, los cuales, si los suponemos del tipo  $\sim e^{ikx}$ , deben cumplir la condición

$$k_{\min}^2 \leq k^2 < \frac{K' S}{m_e \nu_m K_{\perp}} = \frac{K' \nabla (\ln n_0) \cdot (\nabla T_e)_0}{m_e \nu_m K_{\perp}} \quad (\text{III.85})$$

donde se supone que existe una longitud de onda máxima, que fija el valor de  $k_{\min}$  (esto se supone en la deducción de las ecuaciones (III.80) y (III.81), que dejan de valer si  $k^2 \ll S/T_e$ ).

Pasemos ahora a analizar el último ejemplo que discutiremos en este capítulo: es el de una inestabilidad que aparece en el  $\theta$ -pinch, estudiada por Haines<sup>(80)</sup> mediante un análisis de modos normales.

Las ecuaciones básicas para estudiar la inestabilidad de Haines (supuesto que los iones están en reposo) son

$$\dot{J}_1 = \nu \frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} ; \quad \dot{T}_1 = \alpha J_1 - \gamma T_1 + K \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right) ; \quad (\text{III.86})$$

donde  $T_1$  es la temperatura electrónica a primer orden,  $J_1$  la corriente a primer orden (en la dirección  $\theta$ ), siendo  $J_0$  y  $T_0$  la corriente y la temperatura electrónica a orden cero;  $\Delta T = (T_0 - \hat{T})$  es la diferencia de temperaturas entre los electrones y el medio, o sea, los iones; la conductividad eléctrica es  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$ ; siendo

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{3}{2} \left( \frac{T_1}{T_0} \right) ; \frac{\alpha}{K_B \gamma} = \frac{(2J_0/K_B)}{(J_0^2/\Delta T)} ; \mu = \frac{3}{2} \left( \frac{J_0 \nu}{T_0} \right) \quad (\text{III.87})$$

( $k_B$  es la constante de Boltzmann, los valores de las constantes  $\nu$ ,  $\gamma$  y  $K$  son irrelevantes para este cálculo, pero  $\nu$  es la viscosidad magnética a orden cero,  $K$  es esencialmente un coeficiente de difusión térmica, y  $\gamma$  una constante de relajación térmica).

Combinando entre sí las dos ecuaciones de Haines, dadas en (III.86), se obtiene

$$\ddot{T}_1 - (\nu + K) \frac{\partial^2 \dot{T}_1}{\partial z^2} + \nu K \frac{\partial^4 T_1}{\partial z^4} + \alpha \mu \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - \gamma \nu \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \gamma \dot{T}_1 = 0. \quad (\text{III.88})$$

Interpretando ahora a (III.88) como ecuación de regresión (III.15), se ve que la matriz  $((M_{ij}))$  resulta ser la identidad, la matriz  $((R_{ij}))$  se reduce al operador hermítico y definido positivo

$$- (\nu + K) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma$$

mientras que la matriz  $((S_{ij}))$  se reduce al operador hermítico

$$\nu K \left( \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) + (\alpha \mu - \gamma \nu) \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Luego el criterio de estabilidad termodinámico es aplicable, y la condición de estabilidad es que  $((S_{ij}))$  sea definida positiva, o sea que

$$\int d^3x \left[ \nu K \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right)^2 + (\gamma \nu - \alpha \mu) \left( \frac{\partial T_1}{\partial z} \right)^2 \right] \geq 0, \quad (\text{III.89})$$

que conduce a la misma condición de estabilidad que el análisis de Haines (80)

$$\delta \nu \geq \alpha \mu \quad (\text{III.90})$$

o, mediante (III.87),

$$T_0 < \frac{3}{2} \hat{T} \quad . \quad (\text{III.91})$$

REFERENCIAS DEL CAPITULO III

- 1.- N. A. Krall & A. W. Trivelpiece: "Principles of Plasma Physics" (McGraw-Hill, 1973)
- 2.- A.B. Mikhailovskii: "Theory of plasma instabilities" (2 vols. ; Plenum, 1974)
- 3.- W. B. Thompson: "An Introduction to Plasma Physics" (Addison Wesley, 1962)
- 4.- L. Spitzer: "Física de los gases totalmente ionizados" (Alhambra, 1969)
- 5.- S. Chandrasekhar: "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability" (Dover, 1961)
- 6.- S. Chandrasekhar & L. Woltjer: Proc. Nat. Ac. Sciences 44 (4), 285 (1958)
- 7.- T. K. Fowler: Phys. Fluids 4 (11), 1393 (1961)
- 8.- T. K. Fowler: J. Math. Phys. 4 (4), 559 (1963)
- 9.- J.P. Freidberg: Rev. Mod. Phys. 54 (3), 801 (1982)
- 10.- P.H. Sakanaka, en: "Autumn College on Plasma Phys", Int. Centre for Theor. Phys., Trieste (1979)
- 11.- H. Tasso: "Lectures on Plasma Phys.", Univ. San Pablo (1979)
- 12.- J.M. Finn & R.N. Sudan: Nucl. Fus. 22 (11), 1443 (1982)
- 13.- R.N. Sudan & M.N. Rosenbluth: Phys. Fluids 22 (2), 282 (1979)
- 14.- N.G. Van Kampen: Phys. Rep. 24 (3), 175 (1976)
- 15.- L. Arnold, en: "Stochastic Nonlinear Systems", 100 (Arnold & Lefever, eds.; Springer-Verlag, 1981)
- 16.- Y. Rozanov: "Procesos Aleatorios" (Mir, 1973)
- 17.- I. Guikhman & A. Skorokhod: "Introduction à la Théorie des Processus Aléatoires" (Mir, 1980)
- 18.- V.S. Pugachev: "Introducción a la Teoría de las Probabilidades" (Mir, 1973)
- 19.- H. Haken: Rev. Mod. Phys. 47 (1), 67 (1975)
- 20.- H. Haken: "Synergetics" (Springer-Verlag, 1978)

- 21.- R. Graham: Springer Tracts Mod. Phys. 66, 1 (1973)
- 22.- R. Balescu: "Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics" (Wiley, 1975)
- 23.- G. Nicolis & I. Prigogine: "Self-Organization in Nonequilibrium Systems" (Wiley, 1977)
- 24.- L. Onsager & S. Machlup: Phys. Rev. 91 (6), 1505 (1953)
- 25.- S. Machlup & L. Onsager: Phys. Rev. 91 (6), 1512 (1953)
- 26.- I. Prigogine: "Thermodynamics of Irreversible Processes" (Wiley, 1967)
- 27.- S.R. de Groot: "Termodinámica de los Procesos Irreversibles" (Alhambra, 1968)
- 28.- S.R. de Groot & P. Mazur: "Non-Equilibrium Thermodynamics" (North-Holland, 1962)
- 29.- L. Landau & E. Lifchitz: "Physique Statistique" (Mir, 1967)
- 30.- I. Gyarmati: "Non-Equilibrium Thermodynamics" (Springer-Verlag, 1970)
- 31.- P. Glansdorff & I. Prigogine: "Structure, Stability and Fluctuations" (Wiley, 1971)
- 32.- P. Glansdorff & I. Prigogine: Physica 30, 351 (1964)
- 33.- P. Glansdorff & I. Prigogine: Physica 46, 344 (1970)
- 34.- F. Schlögl: Ann. Phys. 45, 155 (1967)
- 35.- F. Schlögl: Z. Physik 243, 303 (1971)
- 36.- F. Schlögl: Z. Physik 244, 199 (1971)
- 37.- F. Schlögl: Phys. Rep. 62 (4), 268 (1980)
- 38.- R.F. Fox: J. Chem. Phys. 70 (10), 4660 (1979)
- 39.- J. Keizer: J. Chem. Phys. 65 (11), 4431 (1976)
- 40.- J. Keizer: Phys. Fluids 21 (2), 198 (1978)
- 41.- J. Keizer: J. Chem. Phys. 69 (6), 2609 (1978)
- 42.- F. Schlögl: Z. Physik B 20, 177 (1975)

- 43.- C.W. Gardiner: J. Chem. Phys. 70 (12), 5778 (1979)
- 44.- B. H. Lavenda: "Thermodynamics of Irreversible Processes" (MacMillan Press, 1978)
- 45.- B. H. Lavenda: Lett. Nuovo Cimento 3 (10), 385 (1972)
- 46.- B. H. Lavenda: Phys. Rev. A 9 (2), 929 (1974)
- 47.- L. Landau & E. Lifchitz: "Mécanique des Fluides" (Mir, 1971)
- 48.- L. Landau & E. Lifchitz: "Electrodynamique des Milieux Continus" (Mir, 1969)
- 49.- R.F. Fox: Phys. Rep. 48 (3), 180 (1978)
- 50.- R.F. Fox & G.E. Uhlenbeck: Phys. Fluids 13 (8), 1893 (1970)
- 51.- R.F. Fox & G.E. Uhlenbeck: Phys. Fluids 13 (12), 2881 (1970)
- 52.- A.I. Akhiezer, I.A. Akhiezer, Polovin, Sitenko & Stepanov: "Plasma Electrodynamics" (2vols.; Pergamon Press, 1975)
- 53.- A.I. Akhiezer, I.A. Akhiezer & A.G. Sitenko: Sov. Phys. JETP 14 (2), 462 (1962)
- 54.- A.G. Sitenko: "Electromagnetic Fluctuations in Plasma" (Academic Press, 1967)
- 55.- B.C. Eu: J. Chem. Phys. 73 (6), 2958 (1980)
- 56.- B.C. Eu: J. Chem. Phys. 74 (5), 2998 (1981)
- 57.- R. Graham, en: "Stochastic Processes in Nonequilibrium Systems", 83 (Garrido et al, eds; Springer-Verlag, Lec. Notes in Phys. 84; 1978)
- 58.- R. Graham, en: "Stochastic Nonlinear Systems", 202 (Arnold & Lefever, eds.; Springer-Verlag, 1981)
- 59.- C. Truesdell: "Termodinámica Racional" (Reverté, 1973)
- 60.- B. H. Lavenda: Riv. Nuovo Cimento 7 (2), 229 (1977)
- 61.- B. H. Lavenda: Lett. Nuovo Cimento 21 (17), 600 (1978)
- 62.- I. Procaccia, Y. Shimoni & R.D. Levine: J. Chem. Phys. 65 (8), 3284 (1976)

- 63.- R.D. Levine: J. Chem. Phys. 65 (8), 3302 (1976)
- 64.- I. Procaccia & R.D. Levine: J. Chem. Phys. 65 (8), 3357 (1976)
- 65.- I. Procaccia & J. Ross: J. Chem. Phys. 67 (12) 5558 (1978)
- 66.- V. Arnold: "Equations Différentielles Ordinaires" (Mir, 1974)
- 67.- L. Elsgoltz: "Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional" (Mir, 1969)
- 68.- S. Lefschetz: "Differential equations: Geometric Theory" (Dover, 1977)
- 69.- H. Goldstein: "Classical Mechanics" (Addison Wesley, 2<sup>o</sup> ed., 1980)
- 70.- V. I. Arnold: "Mecánica Clásica" (Paraninfo, 1983)
- 71.- L. Landau & E. Lifchitz: "Mécanique" (Mir, 1966)
- 72.- R. P. Feynman & A. R. Hibbs: "Quantum Mechanics and Path Integrals" (Mc Graw-Hill, 1965)
- 73.- J. Teichmann: Phys. Lett. 72 A (2), 117 (1979)
- 74.- J. Teichmann: Can. J. Phys. 59 (1), 82 (1981)
- 75.- I. L. Caldas & H. Tasso: Plasma Phys. 20, 1299 (1978)
- 76.- H. Tasso: Z. Naturforsch 33 A, 257 (1978)
- 77.- I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal & R. M. Kulsrud: Proc. Roy. Soc. A 224, 17 (1958)
- 78.- D. A. Tidman & R. A. Shanny: Phys. Fluids 17, 1207 (1974)
- 79.- C. Ferro Fontán & A. Sicardi Schifino, en: "Energy Storage, Compression, and Switching", vol. 2, 607 (Nardi, Sahlin & Bostick, eds.; Plenum, 1983)
- 80.- M. G. Haines: J. Plasma Phys. 12 (1), 1 (1974)
- 81.- H. Tasso & J. T. Virtamo: Plasma Phys. 22, 1003 (1980)



CAPITULO IV

ESTUDIO VARIACIONAL DE LA ESTABILIDAD DE LOS PLASMAS CON RADIO  
DE LARMOR ARBITRARIO

En este capítulo vamos a aplicar el criterio termodinámico de estabilidad, hallado en el capítulo anterior, al estudio de la estabilidad de los plasmas descritos por la ecuación de Vlasov, y en especial, de los plasmas con radio de Larmor arbitrario (cuya descripción hemos dado en el capítulo II); construyendo para estos plasmas un "principio de energía" o principio variacional, que nos permita determinar su estabilidad. Los resultados que se obtengan serán comparados con los de otros autores (1,2,3,4,5,6).

Puesto que el plasma se describe por una ecuación de Vlasov, acoplada a las ecuaciones de Maxwell, y como si a éstas ecuaciones se le añaden fluctuaciones puede considerárselas como ecuaciones de Langevin, es válido aplicar la teoría termodinámica desarrollada en el capítulo anterior.

Veamos esto con más detalle. Un método sistemático para obtener los términos fluctuantes que deben incluirse en las ecuaciones de movimiento macroscópicas, convirtiéndolas así en ecuaciones de Langevin, ha sido desarrollado por Landau y Lifchitz (7,8,9), siendo usado y justificado, incluso en situaciones alejadas del equilibrio, por varios autores (10,11,12,13,14,15,16,17).

Como las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones de campo macroscó-

picas, a las que facilmente pueden añadirse fluctuaciones, usando la teoría de Landau & Lifchitz<sup>(7)</sup>, no hay problema en transformarlas en ecuaciones de Langevin. Algo más delicado parece el caso de la ecuación de Vlasov, por ser una ecuación cinética. Situaciones análogas se encuentran, sin embargo, ampliamente discutidas en la literatura. En particular, la teoría de fluctuaciones en un plasma<sup>(15,16,17)</sup> se basa justamente en añadir términos fluctuantes tipo "Landau-Lifchitz" a la ecuación de Vlasov con colisiones (o ecuación de Boltzmann-Vlasov) para un plasma, convirtiéndola así en una ecuación de Langevin.

El primer trabajo en que se usó la teoría de Landau-Lifchitz aplicada a una ecuación cinética parece ser el estudio de la dispersión de la luz en un líquido de Fermi<sup>(18)</sup>. La justificación de este procedimiento de añadir términos fluctuantes a las ecuaciones cinéticas (como la ecuación de Boltzmann o la de Vlasov), y considerar dichas ecuaciones como ecuaciones de Langevin ha sido luego detalladamente discutida por varios autores<sup>(12,14)</sup>.

En particular, Ueyama<sup>(14)</sup> ha mostrado que si un sistema caracterizado por ciertos  $q_i$ , que son las componentes del vector  $\underline{q}$ , tiene una función de distribución de probabilidades  $f(\underline{q}, t)$  que satisface una ecuación maestra (o una ecuación cinética, como la de Boltzmann o Fokker-Planck) y, ahora, se considera formalmente a  $f(\underline{q}, t)$  como una función de  $\underline{q}$  y  $t$ , olvidándose su carácter de función de distribución, entonces la ecuación de evolución de  $f(\underline{q}, t)$  (que formalmente es una ecuación maestra) puede considerarse (ahora) como una ecuación de Langevin.

Mas claramente, el sistema en cuestión podrá tener distintas distribuciones de probabilidad, según las condiciones iniciales. Todas deben evolucionar según la misma ecuación maestra. Sean  $f(\underline{q}, t)$  y  $p(\underline{q}, t)$  dos de estas funciones de distribución, y supongamos que las condiciones iniciales son tales que la distribución de probabilidades del sistema es la dada por  $p(\underline{q}, t)$ . Consideremos formalmente a  $f(\underline{q}, t)$  como una función de  $\underline{q}, t$  (olvidándonos de que es una distribución de probabilidades). Su ecuación de evolución determinista, que se deduce de las ecuaciones deterministas para los  $q_i$ , será formalmente idéntica a la ecuación maestra que cumple la función de distribución  $p(\underline{q}, t)$ . Si ahora se toma en cuenta que los  $q_i$  no siguen ecuaciones deterministas, sino que su evolución es estocástica y viene representada por la función de distribución  $p(\underline{q}, t)$  (que cumple la ecuación maestra), las ecuaciones de movimiento de los  $q_i$  deben transformarse en ecuaciones de Langevin. Entonces la ecuación de evolución de  $f(\underline{q}, t)$  (considerada como función de  $\underline{q}, t$ ) es también una ecuación de Langevin, la que, si se anula el término fluctuante, se reduce a una ecuación formalmente igual a la ecuación maestra.

Esto es justamente lo que Ueyama ha probado<sup>(14)</sup>. El pasaje de las ecuaciones de Langevin de los  $q_i$  a las de las funciones  $f(\underline{q}, t)$ , que pueden considerarse como nuevos  $(q_i)$ , y a los que designaremos  $\hat{q}_i \equiv f(\underline{q}, t)$ , es un "cambio de variables" fundamental que nos hace pasar del espacio de las fases de los  $(q_i)$ , al de los  $(\hat{q}_i)$ . Si los  $(q_i)$  son las coordenadas y las componentes de la ve

locidad de las partículas del sistema, los  $\hat{q}_i \equiv f(\underline{q}, t)$ , son, en cambio, funciones arbitrarias de  $\underline{q}$  y  $t$ ; luego, en este caso, el espacio de las fases de los  $(q_i)$  es el espacio de las fases ordinario de la Mecánica, pero el de los  $(\hat{q}_i)$  es un espacio funcional. En dicho espacio funcional, habrá a su vez, una distribución de probabilidades  $P(\hat{\underline{q}}, t)$ , donde el vector  $\hat{\underline{q}}$  tiene componentes  $\hat{q}_i \equiv f(\underline{q}, t)$ , es decir  $P(\hat{\underline{q}}, t)$  es una "superfunción" de distribución que asigna probabilidades a los distintos  $\hat{q}_i \equiv f(\underline{q}, t)$ , que son las funciones de distribución ordinarias, es decir en el espacio de las fases de los  $(q_i)$ . Esta "superfunción" de distribución  $P(\hat{\underline{q}}, t)$  cumplirá, a su vez, una ecuación maestra, que tendrá, en general, la forma de una ecuación de Fokker-Planck.

Así pues, queda claro que es posible usar la ecuación de Vlasov como ecuación de Langevin, añadiéndole un término fluctuante. La correspondiente ecuación de Fokker-Planck será una ecuación en el espacio funcional de los  $q_i \equiv f(\underline{x}, \underline{v})$ , y no será una ecuación para la función de distribución  $f(\underline{x}, \underline{v})$  de una partícula del plasma, sino para una "superfunción" de distribución  $P(\underline{q})$ , donde las componentes de  $\underline{q}$  son los  $q_i \equiv f(\underline{x}, \underline{v})$ .

Esta ecuación de Fokker-Planck representa una "caminata al azar" en el espacio funcional de las "funciones de distribución"  $f(\underline{x}, \underline{v})$ , y no tiene relación con la ecuación de Fokker-Planck que los plasmistas usan para estudiar la difusión de partículas en el plasma<sup>(19)</sup>. Estrictamente, las  $(q_i)$  no se reducen sólo a las  $f(\underline{x}, \underline{v})$ , sino que deben incluirse también entre las  $(q_i)$  a los campos  $\underline{E}$  y  $\underline{B}$ , que dan el campo electromagnético del plasma.

Entonces la ecuación de Vlasov debe considerarse como una de las ecuaciones de Langevin, siendo las otras, las ecuaciones de Maxwell. Por lo que la correspondiente ecuación de Fokker-Planck será algo más compleja aún, ya que los  $q_i$  son tanto las  $f(\underline{x}, \underline{y})$  como los campos  $\underline{E}$ ,  $\underline{B}$ ; y la distribución de probabilidad  $P(q)$  es sobre un espacio de las fases algo más complejo, ya que es el espacio funcional de las "funciones de distribución"  $f(\underline{x}, \underline{y})$  y de los campos  $\underline{E}(\underline{x})$ ,  $\underline{B}(\underline{x})$ .

Así pues, es posible usar a la ecuación de Vlasov y a las ecuaciones de Maxwell, luego de linealizadas alrededor de un estado de equilibrio, como ecuaciones de regresión de Onsager (ver capítulo III). Los  $\alpha_i \equiv \delta q_i$  (desviaciones de los  $q_i$  respecto a sus valores de equilibrio) serán ahora  $f_1$ ,  $\underline{E}_1$ ,  $\underline{B}_1$  (es decir, la función de distribución y los campos, a primer orden). Alternativamente, en vez de  $\underline{E}_1$ ,  $\underline{B}_1$  pueden usarse las versiones a primer orden del potencial escalar y vectorial, como variables  $(\alpha_i)$ , escribiendo las ecuaciones de Maxwell en función de ellos, como ecuaciones de regresión.

Si, por el momento, olvidamos el campo electromagnético, los  $q_i$  se reducen a las  $f(\underline{x}, \underline{y})$  donde el índice  $i$  puede identificarse con las variables  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$ , o sea  $i \equiv (\underline{x}, \underline{y})$ , siendo  $\alpha_i \equiv f_1(\underline{x}, \underline{y})$ . El espacio funcional de los  $q_i$  se reduce entonces al espacio de las funciones de  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$ .

Como veremos, el formalismo desarrollado por Lewis, Symon y Seyler para tratar la ecuación de Vlasov (5,20,21,22), que hemos descrip-

to en el capítulo II de esta Tesis, es especialmente adecuado para aplicarle la teoría termodinámica irreversible de la estabilidad, desarrollada en el capítulo III, siguiendo a Lavenda<sup>(23)</sup> y a Graham<sup>(24,25)</sup>.

La idea básica del método de Lewis, Symon y Seyler, descrito en el capítulo II, es expandir la perturbación  $f_1$  de la función de distribución, en una base de autofunciones  $\mathcal{W}_r$  del Liouvilliano a orden cero,  $\hat{L}_0 = [ \quad, H_0 ]$ ; con ello la ecuación de Vlasov a primer orden se transforma en un sistema de ecuaciones para las variables  $\delta_r$ , que son los coeficientes de dicha expansión

$$f_1(q_i, p_i, t) = \sum_r \delta_r(t) \mathcal{W}_r(q_i, p_i);$$

$$\hat{L}_0 \mathcal{W}_r \equiv [\mathcal{W}_r, H_0] = i\mu_r \mathcal{W}_r \quad (IV.1)$$

Siendo el operador  $\hat{L}_0$  antihermítico, los autovalores correspondientes a las autofunciones  $\mathcal{W}_r$  son imaginarios puros,  $i\mu_r$ . Las ecuaciones de evolución de los  $\delta_r$  son

$$\dot{\delta}_r + i\mu_r \delta_r = iK_r \langle \mathcal{W}_r | H_1 \rangle \quad (IV.2)$$

donde hemos introducido

$$\langle a | b \rangle \equiv \int d^3x d^3p (a^* b); \quad K_r = \mu_r \frac{\partial f_0}{\partial H_0} + \sum_j K_j \frac{\partial f_0}{\partial \beta_j};$$

$$[\mathcal{W}_r, \beta_j] = iK_j \mathcal{W}_r \quad (IV.3)$$

(la integral en la definición de  $\langle a | b \rangle$  se extiende a todo el espacio de las fases) y el conjunto  $\{ \beta_j \}$ , son las constantes de mo

vimiento (salvo la energía) cuando el hamiltoniano de una partícula del plasma es  $H_0$ .

El sistema de ecuaciones (IV.2) sustituye a la ecuación de Vlasov. En el caso de un plasma de Vlasov con varias especies, basta con introducir más coeficientes  $\gamma_r$ , que se notaran ahora  $\gamma_r^{(p)}$ , donde el índice  $p$  (que indica la especie de partículas) puede, si se desea, incorporarse al índice múltiple  $r$ . Las ecuaciones de Maxwell para los campos, así como las ecuaciones fluidísticas para las especies "frías" de partículas (o en general, para las especies que se describen en forma fluidística) serán de la forma

$$\hat{\Lambda}_1 \Psi + \hat{\Lambda}_2 \dot{\Psi} + \hat{\Lambda}_3 \ddot{\Psi} = \sum_r \gamma_r \int d^3p \hat{J} \mathcal{W}_r, \quad (\text{IV.4})$$

donde  $\hat{\Lambda}_1, \hat{\Lambda}_2, \hat{\Lambda}_3$  son operadores que pueden contener derivadas espaciales,  $\hat{J}$  es el operador corriente, tal que la perturbación a primer orden del hamiltoniano de una partícula del plasma es

$$H_1 = \hat{J} \Psi \quad (\text{IV.5})$$

Aquí  $\Psi$ , que representa todas las variables de campo, es en general un vector de dimensión  $n$ , siendo entonces  $\hat{J}$  un vector de igual dimensión, el producto en (IV.5) un producto escalar, y los operadores  $\hat{\Lambda}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) son en general tensoriales (o matriciales). La expresión de  $H_1$  dada en (IV.5) es la que debe sustituirse en (IV.2).

Las ecuaciones básicas son entonces (IV.2) y (IV.4), usando el hamiltoniano  $H_1$  de (IV.5), y es posible (ver capítulo II) a partir de ellas, construir una "funcional de dispersión", con la cual se puede hallar la relación de dispersión del problema. Asimismo, se puede obtener un principio variacional de estabilidad, deducido matemáticamente de la "funcional de dispersión"<sup>(5,6)</sup>; pero, como veremos a continuación, es posible también deducir un principio variacional totalmente general, en forma simple y sistemática, aplicando la teoría termodinámica del capítulo III a las ecuaciones (IV.2) y (IV.4), que, a estos efectos, pueden considerarse como ecuaciones de regresión de Onsager (sin fluctuaciones), del tipo

$$\sum_{i,j} (M_{ij} \ddot{\alpha}_j + R_{ij} \dot{\alpha}_j + S_{ij} \alpha_j) = 0, \quad (IV.6)$$

quedando definidas la "entropía"  $\eta$  y la función de disipación  $\varphi$  para las ecuaciones (IV.6) en la forma

$$\delta^2 \eta = - \sum_{ij} (M_{ij} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j + S_{ij} \alpha_i \alpha_j);$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{ij} R_{ij} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j; \quad (IV.7)$$

donde las variables "termodinámicas"  $\alpha_j$  serán en nuestro caso las  $\gamma_r$  y  $\Psi$  (o las componentes  $\Psi_i$  de  $\Psi$ ).

En general veremos que, en los casos que discutiremos aquí, los operadores  $\hat{\Lambda}_1$  y  $\hat{\Lambda}_3$ , que aparecen en (IV.4), son hermiticos, mientras que  $\hat{\Lambda}_2$ , en la misma ecuación, es antihermitico. En lu-



gar de usar la ecuación (IV.2) como ecuación de regresión para las  $\delta_r$ , es preferible usar a su derivada temporal dividida por  $(\mu_r K_r)$

$$\frac{1}{\mu_r K_r} \ddot{\delta}_r + \frac{1}{K_r} \dot{\delta}_r = \frac{1}{\mu_r} \langle \mathcal{W}_r | \hat{J} \dot{\Psi} \rangle, \quad (\text{IV.8})$$

usando la ecuación (IV.2) como condición inicial. De la misma forma, en vez de (IV.4) es preferible usar la siguiente ecuación, que proviene de sustituir  $\delta_r$  por su expresión en función de  $\dot{\delta}_r$  y de  $\Psi$ , deducida de (IV.2), en ella

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_1 \Psi + \hat{\Lambda}_2 \dot{\Psi} + \hat{\Lambda}_3 \ddot{\Psi} - \sum_r (K_r / \mu_r) \langle \mathcal{W}_r | \hat{J} \Psi \rangle \int d^3 p \hat{J} \mathcal{W}_r = \\ = i \sum_r (\dot{\delta}_r / \mu_r) \int d^3 p \hat{J} \mathcal{W}_r \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

Si ahora se consideran (IV.8) y (IV.9) como ecuaciones de regresión del tipo (IV.6), se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{ij} R_{ij} \dot{\alpha}_i^* \dot{\alpha}_j = \langle \dot{\Psi} | \hat{\Lambda}_2 \dot{\Psi} \rangle - i \sum_r \frac{\dot{\delta}_r}{\mu_r} \langle \hat{J} \dot{\Psi} | \mathcal{W}_r \rangle + \\ + i \sum_r \frac{\dot{\delta}_r^* \dot{\delta}_r}{K_r} - i \sum_r \frac{\dot{\delta}_r^*}{\mu_r} \langle \mathcal{W}_r | \hat{J} \dot{\Psi} \rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

es una cantidad imaginaria pura ( $\hat{\Lambda}_2$  es antihermítico); y luego, la matriz  $((R_{ij}))$  es antihermítica, o sea que no hay fuerzas disipativas presentes, pero sí fuerzas giroscópicas (ver capítulo III). Además las matrices  $((M_{ij}))$  y  $((S_{ij}))$  son hermíticas, y la "entropía" (IV.7) es, ahora

$$\delta^2 \eta = \left[ \langle \Psi | \hat{\Lambda}_1 \Psi \rangle + \langle \dot{\Psi} | \hat{\Lambda}_3 \dot{\Psi} \rangle - \sum_r \frac{K_r}{\mu_r} |\langle \mathcal{W}_r | \hat{J} \Psi \rangle|^2 + \sum_r \frac{\dot{\gamma}_r^* \dot{\gamma}_r}{\mu_r K_r} \right] \left( \langle \Psi | \hat{\Lambda}_i \Psi \rangle \equiv \int_{\text{plasma}} d^3x \Psi^* \hat{\Lambda}_i \Psi \right). \quad (\text{IV.11})$$

Luego, de acuerdo con la teoría termodinámica desarrollada en el capítulo anterior, puesto que la matriz  $((R_{ij}))$  es antihermítica, resulta  $\dot{\delta}^2 \eta = 0$ ; una condición suficiente (aunque no necesaria, pues hay fuerzas giroscópicas presentes y no, en cambio, fuerzas disipativas) de estabilidad es  $\delta^2 \eta \ll 0$  (el signo de igualdad corresponde a una estabilidad marginal).

También puede obtenerse directamente que  $\dot{\delta}^2 \eta = 0$ , derivando (IV.11) respecto al tiempo y usando (IV.8) y (IV.9).

Si se usa el método de la "potencia compleja" de Lavenda<sup>(23)</sup>, discutido en el capítulo III, igualando a cero la parte real de la potencia,  $\pi'$ , se obtiene una vez más que  $\dot{\delta}^2 \eta = 0$  (ya que  $\pi'$  es proporcional a  $\delta^2 \eta$ ). Por lo tanto,  $(\delta^2 \eta)$  es una función de Lyapunov para el problema y el criterio de estabilidad es que posea signo definido. La ecuación correspondiente a la parte imaginaria de la potencia  $\pi''$  es

$$\begin{aligned} \pi'' = \frac{i}{2} \left\{ \int_{\text{plasma}} d^3x \left[ \dot{\Psi}^* (\hat{\Lambda}_1 \Psi + \hat{\Lambda}_3 \ddot{\Psi}) - (\Psi^* \hat{\Lambda}_1 + \dot{\Psi}^* \hat{\Lambda}_3) \dot{\Psi} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \dot{\Psi}^* \hat{\Lambda}_2 \dot{\Psi} \right] + \sum_r \left[ \frac{1}{\mu_r K_r} (\dot{\gamma}_r^* \ddot{\gamma}_r - \ddot{\gamma}_r^* \dot{\gamma}_r) + \frac{K_r}{\mu_r} (\langle \hat{J} \Psi | \mathcal{W}_r \rangle \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \langle \mathcal{W}_r | \hat{J} \dot{\Psi} \rangle - \langle \hat{J} \dot{\Psi} | \mathcal{W}_r \rangle \cdot \langle \mathcal{W}_r | \hat{J} \Psi \rangle) \right] - 2i \sum_r \left[ \frac{1}{\mu_r} (\langle \hat{J} \dot{\Psi} | \mathcal{W}_r \rangle \dot{\gamma}_r + \right. \right. \\ \left. \left. + \dot{\gamma}_r^* \langle \mathcal{W}_r | \hat{J} \dot{\Psi} \rangle) - \frac{\dot{\gamma}_r^* \dot{\gamma}_r}{K_r} \right] \right\} \quad (\text{IV.12}) \end{aligned}$$

Usando ahora que  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  y suponiendo que  $\Psi, \gamma_r \sim e^{-i\omega t}$ , se obtiene de (IV.12)

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(\omega) \left[ \int d^3x \left( \Psi^* \hat{\Lambda}_1 \Psi + \dot{\Psi}^* \hat{\Lambda}_3 \dot{\Psi} \right) + \sum_r \left( \frac{\dot{\gamma}_r^* \dot{\gamma}_r}{K_r \mu_r} - \frac{K_r}{\mu_r} |\langle W_r | \hat{J} \Psi \rangle|^2 \right) \right] = \\ & = |\omega|^2 \left[ i \int d^3x \left( \Psi^* \hat{\Lambda}_3 \dot{\Psi} - \dot{\Psi}^* \hat{\Lambda}_3 \Psi \right) + i \int d^3x \left( \Psi^* \hat{\Lambda}_2 \Psi \right) + \sum_r \frac{K_r |\langle W_r | \hat{J} \Psi \rangle|^2}{|\mu_r - \omega|^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

donde las integrales espaciales se extienden a toda la zona con plasma, y se ha usado, de acuerdo con (IV.2), que

$$K_r \langle W_r | \hat{J} \Psi \rangle = (\mu_r - \omega) \gamma_r \quad (\text{IV.14})$$

Si se deriva la ecuación (IV.13) respecto del tiempo, notando que, según (IV.11), el miembro izquierdo es  $\operatorname{Re}(\omega) \cdot \delta^2 \dot{\eta}$ , y que  $\delta^2 \ddot{\eta} = 0$ , se obtiene (reemplazando las nuevas derivadas temporales por  $\mp i\omega$ , según corresponda)

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im}(\omega) \left\{ i \int_{\text{plasma}} d^3x \left[ \left( \Psi^* \hat{\Lambda}_3 \dot{\Psi} - \dot{\Psi}^* \hat{\Lambda}_3 \Psi \right) + \left( \Psi^* \hat{\Lambda}_2 \Psi \right) \right] + \right. \\ & \left. + \sum_r \frac{K_r |\langle W_r | \hat{J} \Psi \rangle|^2}{|\mu_r - \omega|^2} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

Las ecuaciones (IV.13) y (IV.15), cuya utilidad se discutirá más adelante, son consecuencia de suponer que la perturbación  $(\Psi, \gamma_r)$  evoluciona según las ecuaciones (IV.2) y (IV.4). Para una perturbación que evolucione de esta forma es  $\delta^2 \dot{\eta} = 0$ , como ya vimos, y además  $\delta^2 \ddot{\eta} = -i \operatorname{Im}(\omega) \delta^2 \eta = 0$ .  
Entonces se ve que, si para cualquier perturbación es  $\delta^2 \eta < 0$ , el plas

ma debe ser estable, ya que ninguna perturbación podrá desarrollarse espontáneamente ( $\text{Im}(w) = 0$ ). En consecuencia  $(\zeta^2 \eta)$  es nuestra función de Lyapunov, de la cual, como veremos luego, pueden deducirse los "principios de energía" para plasmas de Vlasov conocidos en la literatura (y en especial el de Sudan y Rosenbluth). Mirando la expresión (IV.11) de  $(\zeta^2 \eta)$  se nota fácilmente que los términos que allí aparecen dependen de  $\Psi$ ,  $\dot{\Psi}$  y los  $\dot{\gamma}_r$ ; pero no de los  $\gamma_r$ . Esto es consecuencia de que la matriz  $((S_{ij}))$ , en el caso que estamos discutiendo, tiene un autovalor nulo, lo cual en general está asociado a bifurcaciones y casos de estabilidad marginal<sup>(23)</sup>. En nuestro problema, refleja que existen infinitos estados estacionarios del plasma, ya que toda función de las constantes de movimiento,  $f_0$ , es solución estacionaria de la ecuación de Vlasov. Por supuesto, entonces los modos de frecuencia nula que corresponden a pasar de una solución estacionaria  $f_0$  de la ecuación de Vlasov a otra, no se toman en cuenta para el estudio de la estabilidad, por lo cual no consideraremos nuestro caso como "marginal", a pesar de que  $((S_{ij}))$  tenga un autovalor nulo. Consistentemente con ello, a pesar de que la matriz  $((S_{ij}))$  no es invertible, puede definirse una "inversa generalizada" de  $((S_{ij}))$  que actúa sólo sobre los modos que pertenecen al complemento ortogonal del "subespacio nulo" o "núcleo" de  $((S_{ij}))$ , ya que este "subespacio nulo" de  $((S_{ij}))$  debe excluirse del espacio de modos. Veamos ahora, que si se usa la "condición inicial" impuesta a las ecuaciones de regresión (IV.8) por las ecuaciones (IV.2), se eliminan automáticamente los modos de frecuencia nula de  $(\zeta^2 \eta)$ , y

ésta pasa a depender de los  $\gamma_r$ . Para ello vamos a deducir, usando (IV.2), una expresión para  $(\delta^2 \eta)$  alternativa a (IV.11).

De (IV.2) y su ecuación conjugada compleja, sustituyendo en ambas  $H_1$  por su expresión dada en (IV.5), se obtiene

$$\sum_r \frac{\dot{\gamma}_r^* \dot{\gamma}_r}{K_r \mu_r} = \sum_r \frac{\mu_r}{K_r} \gamma_r^* \gamma_r + \sum_r \frac{K_r}{\mu_r} \langle W_r | \hat{J} \Psi \rangle \langle \hat{J} \Psi | W_r \rangle - \sum_r \left[ \gamma_r \langle \hat{J} \Psi | W_r \rangle + \gamma_r^* \langle W_r | \hat{J} \Psi \rangle \right]. \quad (\text{IV.16})$$

Notemos, por otra parte, que de (IV.4) se sigue que

$$\sum_r \gamma_r \langle \hat{J} \Psi | W_r \rangle = \langle \Psi | \hat{\Lambda}_1 \Psi \rangle + \langle \Psi | \hat{\Lambda}_2 \dot{\Psi} \rangle + \langle \Psi | \hat{\Lambda}_3 \ddot{\Psi} \rangle. \quad (\text{IV.17})$$

De (IV.11) y (IV.16), usando además (IV.17) y su ecuación conjugada compleja, se deduce una nueva expresión para  $(\delta^2 \eta)$ , que es

$$\begin{aligned} \delta^2 \eta = & \sum_r \frac{\mu_r}{K_r} \gamma_r^* \gamma_r - \int d^3x (\Psi^* \hat{\Lambda}_1 \Psi) + \\ & + \int d^3x (\dot{\Psi}^* \hat{\Lambda}_3 \dot{\Psi}) - \int d^3x \left[ \Psi^* (\hat{\Lambda}_3 \ddot{\Psi} + \hat{\Lambda}_2 \dot{\Psi}) + \Psi (\hat{\Lambda}_3 \ddot{\Psi} + \hat{\Lambda}_2 \dot{\Psi})^* \right], \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

siendo allí

$$\begin{aligned} \int (\Psi^* \hat{\Lambda}_1 \Psi) d^3x &= \langle \Psi | \hat{\Lambda}_1 \Psi \rangle, \quad \int \Psi (\hat{\Lambda}_3 \ddot{\Psi} + \hat{\Lambda}_2 \dot{\Psi})^* = \\ &= \langle \hat{\Lambda}_3 \ddot{\Psi} + \hat{\Lambda}_2 \dot{\Psi} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{\Lambda}_3 \ddot{\Psi} + \hat{\Lambda}_2 \dot{\Psi} \rangle^*, \quad \text{etc. ;} \end{aligned}$$

las integrales espaciales se extienden sólo a la zona en que hay plasma.

La expresión (IV.18) para  $(\delta^2 \eta)$  es equivalente a (IV.11), junto con la "condición inicial" (IV.2), y constituye una expresión alternativa para  $(\delta^2 \eta)$  que será luego muy útil.

Una observación interesante es que, debido al carácter hermitico de  $((S_{ij}))$  y  $((M_{ij}))$  y al carácter antihermitico de  $((R_{ij}))$ , la relación de dispersión de las ecuaciones de regresión (IV.6) debe ser tal, que si una frecuencia  $w$  es raíz de dicha relación de dispersión, también debe ser raíz su conjugada,  $w^*$  (ver página 122 del libro de Lavenda<sup>(23)</sup>) ya que es

$$\begin{aligned} [\det(-w^2 \mathbb{M} - iw \mathbb{R} + \mathbb{S})]^* &= \det(-w^{*2} \mathbb{M}^+ + iw^* \mathbb{R}^+ + \mathbb{S}^+) = \\ &= \det(-w^{*2} \mathbb{M} - iw \mathbb{R} + \mathbb{S}) \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

donde es

$$\mathbb{M} = ((M_{ij})) ; \quad \mathbb{S} = ((S_{ij})) ; \quad \mathbb{R} = ((R_{ij}))$$

y donde  $\mathbb{A}^+$  es la matriz adjunta (traspuesta conjugada) de  $\mathbb{A}$ .

El que las frecuencias complejas, que son soluciones de la relación de dispersión del problema, vengan de a pares conjugadas, es consecuencia de la ausencia de disipación.

En un plasma con varias especies de partículas, todas descritas por ecuaciones de Vlasov, se tiene (si el índice  $p$  indica las distintas especies), a primer orden, que<sup>(22,5)</sup>

$$\frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial t} + L_0^{(p)} f_1^{(p)} = [H_1^{(p)}, f_0^{(p)}];$$

$$L_0^{(p)} = \underline{v}_0^{(p)} \cdot \underline{\nabla} + \frac{Q^{(p)}}{M^{(p)}} \left( \underline{E}_0 + \frac{\underline{v}_0^{(p)} \times \underline{B}_0}{c} \right) \cdot \underline{\nabla}_{\underline{v}_0^{(p)}}; \quad (\text{IV.20})$$

siendo

$$\underline{v}_0^{(p)} = \underline{v}^{(p)} + \frac{Q^{(p)}}{cM^{(p)}} \underline{A}_1 = \frac{1}{M^{(p)}} \left( \underline{P}^{(p)} - \frac{Q^{(p)}}{c} \underline{A}_0 \right);$$

$$\underline{A} = \underline{A}_0 + \underline{A}_1; \quad f^{(p)} = f_0^{(p)} + f_1^{(p)}; \quad \phi = \phi_0 + \phi_1;$$

$$H^{(p)} = \frac{1}{2M^{(p)}} \left( \underline{P}^{(p)} - \frac{Q^{(p)}}{c} \underline{A} \right)^2 + Q^{(p)} \phi = H_0^{(p)} + H_1^{(p)}, \quad (\text{IV.21})$$

donde  $\underline{P}^{(p)}$  es el impulso canónico de las partículas de la especie  $(p)$  y  $H^{(p)}$  es el correspondiente hamiltoniano. Además deben añadirse las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético, que expresadas en función de los potenciales  $\phi$ ,  $\underline{A}$  (en lugar de los campos  $\underline{E}$ ,  $\underline{B}$ ) son, a primer orden

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{A}_1}{\partial t^2} + \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A}_1) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\nabla} \phi_1) + \frac{1}{c^2} \sum_p w_p^2 \underline{A}_1 &= \\ = \frac{4\pi}{c} \sum_r Q^{(p)} \gamma_r \int \underline{v}_0 \mathcal{W}_r^p d^3 v_0 &; \quad (\text{IV.22}) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\nabla} \cdot \underline{A}_1) - \nabla^2 \phi_1 = 4\pi \sum_r Q^{(p)} \gamma_r \int \mathcal{W}_r^p d^3 v_0 ; \quad (\text{IV.23})$$

donde

$$\underline{E}_1 = -\underline{\nabla} \phi_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}_1}{\partial t} ; \quad \underline{B}_1 = \underline{\nabla} \times \underline{A}_1 ;$$

$$w_p^2(\underline{x}) \equiv \frac{4\pi (Q^{(p)})^2}{M^{(p)}} \int d^3 v_0 f_0^{(p)}(\underline{x}, \underline{v}_0) ; \quad (\text{IV.24})$$

y donde se ha desarrollado  $f_1^{(p)}$  en la base  $\{\mathcal{W}_r\}$ , como se indica en (IV.1), y el índice  $p$  se ha incluido en el índice múltiple  $r$  (de forma que la sumatoria en  $r$ , en (IV.22) y (IV.23), implica también suma en  $p$ ); con lo cual es

$$\sum_p Q^{(p)} \int f_1^{(p)} \underline{v}_0 d^3 v_0 = \sum_r Q^{(p)} \gamma_r \int \underline{v}_0 \mathcal{W}_r^p d^3 v_0 ;$$

$$\sum_p Q^{(p)} \int f_1^{(p)} d^3 v_0 = \sum_r Q^{(p)} \gamma_r \int \mathcal{W}_r^p d^3 v_0 .$$

Como luego veremos, las ecuaciones (IV.22) y (IV.23), para los campos, son del tipo (IV.4); con  $\Psi = (\phi_1, \underline{A}_1)$ .

Haciendo uso del desarrollo (IV.1) de  $f_1^{(p)}$  en la base  $\{\mathcal{W}_r\}$ , las ecuaciones (IV.20) se transforman en ecuaciones del tipo



(IV.2), para los coeficientes  $\gamma_r$  del desarrollo (IV.1), donde es (a primer orden)

$$H_1^{(p)} = Q^{(p)} \phi_1 - \frac{Q^{(p)}}{c} \underline{v}_0^{(p)} \cdot \underline{A}_1 \quad (IV.25)$$

Estrictamente en la expresión (IV.25) habría que incluir un término más, cuadrático en  $\underline{A}_1$ , que se desprecia por ser de segundo orden en la perturbación.

En lo que sigue, a los efectos de simplificar la notación, supondremos que hay una especie única de partículas presente (lo que permite eliminar el índice  $p$ ), aunque todo lo que sigue se extiende fácilmente al caso con varias especies de partículas.

Conjuntamente con despreciar el término cuadrático en  $\underline{A}_1$  en la expresión de  $H_1$  dada en (IV.25), elijiremos, en el caso de un plasma infinito, una "medida" tal que

$$\frac{Q^2}{Mc^2} \int \underline{A}_1^* \cdot \underline{A}_1 f_0 d^3v_0 d^3x = \frac{Q}{c} \left[ \int \underline{A}_1^* \cdot \underline{v}_0 f_1 d^3v_0 d^3x + \int \underline{A}_1 \cdot \underline{v}_0 f_1^* d^3v_0 d^3x \right] \quad (IV.26)$$

por razones que luego analizaremos.

Veamos ahora que las ecuaciones (IV.22) y (IV.23) pueden considerarse como componentes de la ecuación (IV.4), identificando a  $\Psi$  con el cuadrivector  $\Psi = (\phi_1, \underline{A}_1)$ . En efecto, basta identificar al operador corriente  $\hat{J}$  y a los operadores diferenciales  $\hat{\Lambda}_i (i = 1, 2, 3)$  con sus expresiones

$$\hat{J} = (Q, -\frac{Q}{c} \underline{v}_0) ; \Psi = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \underline{A}_1 \end{pmatrix} ;$$

$$\hat{\Lambda}_1 = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} -\nabla^2 & 0 \\ 0 & -\nabla \chi(\nabla \chi) - \frac{1}{c^2} \omega_p^2 \end{pmatrix} ; \hat{\Lambda}_2 = \frac{1}{4\pi c} \begin{pmatrix} 0 & -\nabla \\ -\nabla & 0 \end{pmatrix} ; \hat{\Lambda}_3 = \frac{1}{4\pi c^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(IV.27)

( $\omega_p$ , que se da en (IV.24) y depende de  $\underline{x}$ , es la frecuencia del plasma). Se verifica que, haciendo el cambio de variables en la integral, de la velocidad a orden cero  $\underline{v}_0$  al impulso canónico  $\underline{p}$ , las ecuaciones (IV.22) y (IV.23) se reducen a la ecuación (IV.4). Además se ve que la expresión de  $H_1$  dada en (IV.25), que es la que hay que usar en (IV.2) (para que estas ecuaciones en los  $\gamma_r$  equivalgan a las ecuaciones de Vlasov (IV.20)), se reduce a (IV.5), si allí el producto de  $\hat{J}$  y  $\Psi$  es un producto escalar de cuadvectores.

Como primer ejemplo concreto de aplicación del criterio termodinámico de estabilidad antes establecido ( $\zeta^2 \eta \leq 0$ ; donde en (IV.18) se da la expresión de  $\zeta^2 \eta$ ), deduciremos ahora un conocido resultado, obtenido originalmente por Newcomb y Rosenbluth (para un plasma de Vlasov homogéneo, con una sola especie de partículas): si la función de distribución  $f_0$  sólo depende de la energía  $E$ , siendo esa dependencia tal que la función  $f_0(E)$  es monótona decreciente, la configuración del plasma dada por  $f_0$  es estable (19,26,27,3,4).

Para ello partimos de las ecuaciones (IV.2) (que sustituyen a la ecuación de Vlasov (IV.20)), y de las ecuaciones para el campo (IV.22) y (IV.23), consideradas como una única ecuación (IV.4)

entre cuadvectores, donde  $\Psi$ ,  $\hat{J}$  y los  $\hat{\Lambda}_i (i = 1, 2, 3)$  se dan en (IV.27), y se eligió una "medida" tal que valga (IV.26). Se ve directamente de (IV.27) que  $\hat{\Lambda}_1$  y  $\hat{\Lambda}_3$  son operadores hermíticos, así como que  $\hat{\Lambda}_2$  es antihermítico, por lo cual es aplicable el criterio  $\delta^2 \eta < 0$  (donde  $\delta^2 \eta$  se da en (IV.11) ó (IV.18)). Así pues  $(\delta^2 \eta)$  será la función de Lyapunov del problema, y basta escribirla explícitamente para obtener un "principio de energía" que nos conduzca al resultado buscado. Como veremos,  $(\delta^2 \eta)$  es, salvo el signo, la función de Lyapunov hallada por Fowler (3,4), en forma independiente de cualquier consideración termodinámica.

Partiendo de (IV.18), y usando (IV.27) para sustituir en (IV.18) los valores de los  $\Lambda_i$ , se obtiene

$$\delta^2 \eta = \int_{\text{plasma}} [\phi_1^* \nabla^2 \phi_1 + \underline{A}_1^* \cdot \nabla \times (\nabla \times \underline{A}_1) + \frac{w_p^2}{c^2} \underline{A}_1^* \cdot \underline{A}_1 + \frac{1}{c^2} (\underline{A}_1^* \cdot \ddot{\underline{A}}_1 + \underline{A}_1 \cdot \ddot{\underline{A}}_1^* - \dot{\underline{A}}_1^* \cdot \dot{\underline{A}}_1)] \frac{d^3 x}{4\pi} + \sum_r \frac{\mu_r}{K_r} \delta_r^* \delta_r + \frac{1}{4\pi c} \int_{\text{plasma}} d^3 x [\underline{A}_1^* \cdot \nabla \dot{\phi}_1 + \underline{A}_1 \cdot \nabla \dot{\phi}_1^* + \dot{\phi}_1^* (\nabla \cdot \dot{\underline{A}}_1) + \dot{\phi}_1 (\nabla \cdot \dot{\underline{A}}_1^*)]$$

(IV.28)

Notemos (20) que las autofunciones  $\mathcal{W}_r$  de  $\hat{L}_0$  son también autofunciones de las constantes de movimiento (como la energía, etc), y luego si  $g$  es una función arbitraria de las constantes de movimiento, es

$$\langle W_{r'} | g W_r \rangle = g \langle W_{r'} | W_r \rangle = g \delta_{rr'}$$

Usando ahora la hipótesis de que  $f_0$  sólo depende de  $E$ , o sea  $f_0 = f_0(E)$ , de (IV.3) se deduce que

$$\begin{aligned} K_r &= \mu_r \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \therefore \sum_r \frac{\mu_r}{K_r} \gamma_r^* \gamma_r = \sum_r \frac{1}{(\partial f_0 / \partial H_0)} \gamma_r^* \gamma_r = \\ &= \int d^3x d^3v_0 \frac{f_1^* f_1}{(\partial f_0 / \partial H_0)} \quad . \quad (IV.29) \end{aligned}$$

La integral anterior puede hacerse en  $(d^3x d^3p)$  ó en  $(d^3x d^3v)$ , en vez de en  $(d^3x d^3v_0)$ , y se extiende a todo el espacio de las fases.

Como  $d^3p = M^3 d^3v_0$ , si la integral anterior se hace en  $(d^3x d^3p)$ , en vez de en  $(d^3x d^3v_0)$ , aparece (al hacer el cambio de variables) un factor  $M^3$ , que puede eliminarse renormalizando la función de distribución. En lo que sigue supondremos siempre que si en una integral en el espacio de las fases (que contiene a la función de distribución) hacemos el cambio de variables de  $(d^3x d^3p)$  a  $(d^3x d^3v_0)$  o viceversa, conjuntamente con ello se renormaliza la función de distribución de forma de eliminar el factor  $M^3$ .

Si ahora se supone que el plasma es homogéneo, y se extiende hasta el infinito, donde supondremos se anulan todas las integrales de superficie (es decir, asumimos que la perturbación se anula en el infinito), las integrales en (IV.28) se extienden a todo el espacio, y pueden hacerse por partes. Usando (IV.29), la "medida" (IV.26), integrando por partes en (IV.28) y utilizando además (IV.22),

y las relaciones entre  $\underline{E}_1$ ,  $\underline{B}_1$  y los potenciales  $\phi_1$ ,  $A_1$  dadas en (IV.24); se obtiene, luego de algunas cuentas cuyos detalles técnicos omitimos para abreviar

$$\zeta^2 \eta \equiv -\delta C = \int d^3x d^3v \frac{|f_1|^2}{(\partial f_0 / \partial H_0)} - \frac{1}{4\pi} \int d^3x (|\underline{E}_1|^2 + |\underline{B}_1|^2) .$$

(IV.30)

La elección de la "medida" (IV.26) se hizo para que  $\zeta^2 \eta$  sólo dependa de los campos  $\underline{E}_1$  y  $\underline{B}_1$  y no, en cambio, del potencial  $A_1$ , ya que una dependencia de  $\zeta^2 \eta$  con  $A_1$  sería claramente no física.

El criterio termodinámico de estabilidad es  $\zeta^2 \eta \leq 0$ , o sea  $\delta C \geq 0$ , donde  $(\delta C)$  se define en (IV.30), y representa una "energía libre" generalizada.

Puesto que  $H_0 = E$  (energía de una partícula del plasma); resulta ser  $(\partial f_0 / \partial H_0) = f'_0(E)$ ; donde  $f'_0(E)$  es la derivada (respecto a  $E$ ) de  $f_0$ , que es una cantidad siempre negativa, si la función  $f_0(E)$  es monótona decreciente. De aquí resulta el teorema de Newcomb y Rosenbluth antes enunciado, ya que si  $f_0(E)$  es monótona decreciente es  $\zeta^2 \eta \leq 0$ , o sea  $\delta C \geq 0$ , siempre; y el plasma es estable.

La expresión (IV.30) se generaliza trivialmente al caso de muchas especies de partículas, sin más que observar que, en este caso, la sumatoria en  $r$ , en (IV.29), implica también suma en  $p$  (que es el índice que indica las especies de partículas), lo cual se extien

de a la integral en  $(d^3x d^3v)$  sustituyendo en el integrando  $f_0$  y  $f_1$  por  $f_0^{(p)}$ ,  $f_1^{(p)}$ . Además conviene notar que en ambos miembros de (IV.26) hay (en el caso de muchas especies) una suma implícita en  $p$ .

La función de Lyapunov hallada es pues  $(\delta^2 \eta)$  ó, si se quiere,  $(\delta C)$ , dadas ambas en (IV.30).

La deducción de (IV.30) se simplifica en el caso en que sólo se consideren perturbaciones electrostáticas, tratables con la ecuación de Poisson. En este caso  $\underline{B}_1 = 0$ , y se puede elegir  $\underline{A}_1 = 0$ , con lo que (IV.23) es la ecuación de Poisson. La ecuación (IV.4) es ahora una ecuación escalar, que no es otra que (IV.23); siendo  $\Psi = \phi_1$ ;  $\hat{J} = Q$ ;  $\hat{\Lambda}_1 = -(4\pi)^{-1} \nabla^2$ ;  $\hat{\Lambda}_2 = \hat{\Lambda}_3 = 0$ . La expresión (IV.18) para  $(\delta^2 \eta)$  se simplifica notablemente por ser nulos  $\hat{\Lambda}_2, \hat{\Lambda}_3$ . La transformación de (IV.18) en (IV.30) es ahora inmediata (siendo, en este caso,  $\underline{B}_1 = 0$  en (IV.30)).

Otro caso, más general que el anterior, en que la deducción de (IV.30) se simplifica, es cuando  $\underline{B}_1 \neq 0$ , pero puede despreciarse la corriente de desplazamiento en las ecuaciones de Maxwell, o sea tanto el término que contiene a  $\underline{\nabla} \dot{\phi}_1$ , como el que contiene a  $\ddot{\underline{A}}_1$  en la ecuación (IV.22), la cual se reduce entonces a la ecuación de Ampère. En este caso, puede elegirse una "medida" para la cual  $\underline{\nabla} \cdot \underline{A}_1 = 0$ , siendo esto compatible con (IV.26), con lo cual la ecuación (IV.23) se reduce, de nuevo, a la ecuación de Poisson. Entonces las ecuaciones (IV.22) y (IV.23) son ahora

$$\frac{1}{c^2} \sum_p w_p^2 \underline{A}_1 + \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A}_1) = \frac{4\pi}{c} \sum_r Q^{(p)} \gamma_r \int \underline{v}_0 \mathcal{W}_r d^3 v_0 ;$$

$$-\nabla^2 \phi_1 = 4\pi \sum_r Q^{(p)} \gamma_r \int \mathcal{W}_r d^3 v_0 \quad (\underline{\nabla} \cdot \underline{A}_1 = 0) \quad (IV.31)$$

Igual que en el caso general,  $\Psi = (\phi_1, \underline{A}_1)$  y la ecuación (IV.4), que es una ecuación entre cuadvectores, no es más que las ecuaciones (IV.31) escritas en forma compacta.  $\Psi, \hat{J}$  y  $\hat{\Lambda}_1$  son los dados en (IV.27).

Siendo nulos  $\hat{\Lambda}_2, \hat{\Lambda}_3$  la expresión (IV.18) se simplifica, igual que ocurría en el caso en que sólo se consideraban perturbaciones electrostáticas; luego se transforma (IV.18) en (IV.30), usando para ello (IV.29), (IV.26) y la primera de las ecuaciones (IV.31). Esta aproximación, de despreciar la corriente de desplazamiento, ha sido muy usada para discutir casos más generales que el de Newcomb, en los que la función de distribución  $f_0$  puede depender, además de la energía, de otras constantes de movimiento, como el momento angular canónico, pudiendo incluso ser el plasma no-homogéneo<sup>(2,5)</sup>. La hipótesis  $f_0 = f_0(E)$  sólo la hemos usado para establecer (IV.29), por lo cual las modificaciones que debemos hacer en nuestro tratamiento para discutir este caso más general son mínimas.

Usando (IV.14), que no implica ninguna hipótesis sobre  $f_0$ , en vez de (IV.29), se obtiene de la expresión (IV.18) de  $(\frac{1}{2}^2 \eta)$ , en el caso que sea  $\hat{\Lambda}_2 = \hat{\Lambda}_3 = 0$  (como ocurre si se desprecia la corrien

te de desplazamiento)

$$\delta^2 \eta = \sum_r \frac{\mu_r K_r |\langle \gamma_r^p | \hat{J} \Psi \rangle|^2}{|\mu_r - \omega|^2} - \int_{\text{plasma}} d^3x (\Psi^* \hat{\Lambda}_1 \Psi) \quad (\text{IV.32})$$

La condición termodinámica  $\delta^2 \eta < 0$  para este  $(\delta^2 \eta)$ , es idéntica a la condición de estabilidad hallada por Seyler y Lewis, para un plasma de Vlasov con varias especies <sup>(5)</sup> en base al método de la "funcional de dispersión", sin usar argumentos termodinámicos. (En especial, la ecuación (70) de Seyler y Lewis <sup>(5)</sup> coincide con nuestra ecuación (IV.32)).

Por otra parte, la ecuación (IV.15), que puede ser de utilidad para el estudio de la estabilidad, se escribe ahora (siendo  $\hat{\Lambda}_2 = \hat{\Lambda}_3 = 0$ ), supuesto  $\text{Im}(\omega) \neq 0$

$$\sum_r \frac{\gamma_r^* \gamma_r}{K_r} = \sum_r \frac{K_r |\langle \gamma_r^p | \hat{J} \Psi \rangle|^2}{|\mu_r - \omega|^2} = 0 \quad (\text{IV.33})$$

donde, para establecer la primera igualdad, se usó (IV.14).

La ecuación (IV.33) coincide con la ecuación (69) de Seyler y Lewis <sup>(5)</sup>.

Si suponemos por simplicidad que hay una sólo especie de partículas, siendo ahora  $f_0 = f_0(E, P_\theta)$  donde  $P_\theta$  es el momento angular canónico (y  $E$  es la energía), es posible generalizar el "principio de energía" dado en (IV.30), si despreciamos la corriente de desplazamiento, y además suponemos una función de distribución



tipo "rotor rígido"  $f_0 = f_0(K - \Omega P_\theta)$ . (Se supone el plasma con simetría de revolución alrededor del eje  $z$ ; siendo  $\theta$  el ángulo de giro alrededor de dicho eje.)

Será entonces

$$f_0 = f_0(H_0 - \Omega P_\theta) ; \quad \frac{\partial f_0}{\partial P_\theta} = -\Omega \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \quad (\text{IV.34})$$

Usando (IV.3) y (IV.34) se tiene

$$(\mu'_r \equiv \mu_r - K\Omega)$$

$$K_r = \mu_r \frac{\partial f_0}{\partial H_0} + K \frac{\partial f_0}{\partial P_\theta} = \mu_r \frac{\partial f_0}{\partial H_0} - K\Omega \frac{\partial f_0}{\partial H_0} = \mu'_r \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \quad (\text{IV.35})$$

Según (IV.3), la derivada de  $\mathcal{W}_r$  respecto del ángulo  $\theta$  es igual a  $(iK)$  veces  $\mathcal{W}_r$ ; luego, si  $\mathcal{W}_r$  tiene una dependencia angular  $\sim e^{im\theta}$ , es  $K = m$ .

Será ahora

$$\sum_r \frac{\mu_r}{K_r} \gamma_r^* \gamma_r = \sum_r \frac{\mu'_r}{K_r} \gamma_r^* \gamma_r + K\Omega \sum_r \frac{1}{K_r} \gamma_r^* \gamma_r \quad (\text{IV.36})$$

y usando (IV.33) y (IV.35), resulta de (IV.36)

$$\sum_r \frac{\mu_r}{K_r} \gamma_r^* \gamma_r = \sum_r \frac{1}{(\partial f_0 / \partial H_0)} \gamma_r^* \gamma_r = \int d^3x d^3v_0 \frac{f_1^* f_1}{(\partial f_0 / \partial H_0)}$$

(IV.37)

El resultado (IV.37) que acabamos de obtener es el mismo que obtuvimos antes, en (IV.29); aunque las hipótesis hechas en ambos casos (y las formas correspondientes de obtenerlo) sean diferentes. Puesto que la expresión (IV.37) no es otra que (IV.29), es posible ahora repetir textualmente el razonamiento hecho en el caso anterior, en que era  $f_0 = f_0(E)$ , obteniéndose una vez más (IV.30). Así pues, la relación (IV.30) es válida también si en vez de ser  $f_0 = f_0(E)$  es, ahora,  $f_0 = f_0(E - \Omega P_\theta)$  (siempre que se desprece la corriente de desplazamiento); luego si la función  $f_0(E')$ , donde  $E' \equiv E - \Omega P_\theta$ , es monótona decreciente en su argumento  $E'$ , hay estabilidad. Esta generalización del teorema de Newcomb puede obtenerse también<sup>(2)</sup> siguiendo el método planteado originalmente por Newcomb para establecer su teorema<sup>(1,27)</sup> basado en una analogía formal y cualitativa con la Termodinámica del Equilibrio (o Termostática): Se define formalmente una "energía libre" generalizada, por analogía con el caso de equilibrio termodinámico y se la minimiza, sujeta a ciertos vínculos dinámicos, dados por constantes de movimiento.

Aunque la deducción en sí del "principio de energía" correspondiente a cada caso, por este método de Newcomb, sea rigurosa, no lo es, en cambio, su justificación termodinámica; además la aplicación de este método a los distintos casos es muy laboriosa y poco sistemática. Como luego veremos, este método ha sido aplicado al estudio de plasmas inhomogéneos con una especie iónica con radio de Larmor grande ("haz") y otras especies (de electrones y eventualmente, iones) que pueden ser tratadas en forma fluidística (espe-

cies "frías"), por Sudan y Rosenbluth<sup>(1)</sup>. Luego nosotros deduciremos los resultados básicos de estos autores a partir de nuestro criterio general de estabilidad  $(\delta^2 \eta < 0)$ , en una forma menos laboriosa y más sistemática.

Existe una analogía sorprendente entre el método de Newcomb de construcción de vínculos con constantes de movimiento y la formulación de Levine de la Termodinámica Irreversible, basada en el análisis de la "sorpresa" o ganancia de información (usada también por Schlögl<sup>(28)</sup>) y en el uso de vínculos dinámicos<sup>(29, 30, 31)</sup>.

Seguramente ambos métodos deben estar emparentados, y debe poderse justificar el método de Newcomb en base a un análisis de "sorpresas" como el de Levine. Pero el método que aquí usamos es más sistemático.

Es interesante notar, que, en un clásico trabajo sobre estabilidad magnetohidrodinámica, Chandrasekhar y Woltjer<sup>(32)</sup> mostraron la equivalencia, al menos en un caso simple, de un análisis basado en el principio de mínima disipación (y luego, en la Termodinámica Irreversible) y otro tratamiento, basado en una analogía con la Termostática, totalmente similar al método de Newcomb antes mencionado. En trabajos posteriores, los plasmistas han optado siempre por este segundo método, olvidando el primero, que es el que aquí desarrollamos.

Como ya dijimos, Sudan y Rosenbluth<sup>(1, 2)</sup> han construido un principio variacional para la estabilidad de los plasmas con radio de Larmor arbitrario (o dicho más exactamente, de un plasma compuesto por un haz energético de iones de radio de Larmor grande,

y especies frías que pueden ser tanto iones como electrones). También Seyler et al (5, 6) usando el método de la "funcional de dispersión" y el modelo de "Vlasov-fluido" (que hemos discutido en el capítulo II), han realizado un estudio variacional de los plasmas de radio de Larmor grande.

En lo que sigue, usando nuestro método termodinámico (basado en la Termodinámica Irreversible), estableceremos un criterio general de estabilidad (para lo cual usaremos, también, el modelo de Vlasov-fluido); del cual deduciremos los criterios de estabilidad (y principales resultados) de Sudan-Rosenbluth y de Seyler et al.

El modelo de "Vlasov-fluido" ha sido discutido en detalle en el capítulo II, y se aplica a un plasma con iones energéticos, de radio de Larmor arbitrario, tratables por la ecuación de Vlasov, y electrones fríos, considerados como un fluido sin inercia (y sin presión). El plasma tiene simetría de revolución alrededor del eje z y se estudian perturbaciones de baja frecuencia (por lo cual se desprecia la corriente de desplazamiento). En general se supone que la única coordenada no ignorable es la radial, y se usa una "medida" tal que

$$(\underline{\xi} \cdot \underline{B}_0 = 0) \quad \underline{A}_1 = \underline{\xi} \times \underline{B}_0 ; \quad \phi_1 = \underline{\xi} \cdot \underline{E}_0 ; \quad \underline{u}_1 \equiv \dot{\underline{\xi}}$$

(IV.38)

donde  $\underline{u}$  es la velocidad y  $\underline{\xi}$  el "desplazamiento" electrónico (5, 6, 20, 21, 22, 33). Las ecuaciones básicas del modelo, cuya

deducción ya hicimos en el capítulo II, son la de Vlasov (IV.20) para los iones y

$$\hat{\underline{A}} \cdot \underline{\xi} = \int d^3 \underline{\rho} \underline{J} f_1 ; \quad \underline{J} \equiv Q \left[ \underline{E}_0 + \frac{1}{Mc} \left( \underline{p} - \frac{Q}{c} \underline{A}_0 \right) \times \underline{B}_0 \right] = \frac{\partial H}{\partial \underline{\xi}} \Big|_0 \quad (\text{IV.39})$$

donde, por definición

$$\begin{aligned} \hat{\underline{A}} \cdot \underline{\xi} &\equiv \frac{1}{4\pi} \left\{ (\underline{\nabla} \times \underline{B}_0) \times \left[ \underline{\nabla} \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0) \right] + \left[ \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0) \right] \times \underline{B}_0 \right\} + \\ &+ Q n_0 \left[ \underline{\nabla} (\underline{\xi} \cdot \underline{E}_0) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\xi} \times \underline{B}_0) \right] - \frac{Q}{c} \left( \int d^3 v \underline{v} f_0 \right) \times \left[ \underline{\nabla} \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0) \right] + \\ &+ \frac{Q^2}{Mc^2} n_0 (\underline{\xi} \times \underline{B}_0) \times \underline{B}_0 \quad (n_0 \equiv \int f_0 d^3 v) \quad (\text{IV.40}) \end{aligned}$$

Aquí  $\underline{p} \equiv \underline{P}$  es el impulso canónico de los iones,  $H$  es el hamiltoniano dado, en función de  $\underline{P}$ , en (IV.21), siendo su perturbación a primer orden el  $H_1$  de la expresión (IV.25), con  $\underline{v}_0$  definido como en (IV.21). Resulta ser  $H_1 = \underline{J} \cdot \underline{\xi}$ ; luego si se identifica a  $\Psi$  con  $\underline{\xi}$  y a  $\hat{J}$  con  $\underline{J}$ ,  $H_1$  adopta la forma (IV.5), entendiéndose que el producto  $(\hat{J}\Psi)$  que allí aparece es el producto escalar  $(\underline{J} \cdot \underline{\Psi})$ . Además, la ecuación (IV.39) para  $\underline{\xi}$  es de la forma (IV.4), si  $\Psi = \underline{\xi}$ , y se procede a desarrollar  $f_1$  como en (IV.1), con lo cual la ecuación de Vlasov (IV.20) para los iones se transforma en las ecuaciones (IV.2).

Para identificar (IV.39) con (IV.4) es necesario hacer la descom-

posición de  $\hat{\Lambda}$

$$\hat{\Lambda}_{\xi} = \hat{\Lambda}_{=1} \xi + \hat{\Lambda}_{=2} \dot{\xi} + \hat{\Lambda}_{=3} \ddot{\xi} \quad (\text{IV.41})$$

donde  $\hat{\Lambda}_1, \hat{\Lambda}_2, \hat{\Lambda}_3$  son los operadores presentados en (IV.4).

Comparando (IV.41) con (IV.40) resulta ser

$$\hat{\Lambda}_{=3} = 0; \quad \hat{\Lambda}_{=2} \dot{\xi} = \frac{Qn_0}{c} \dot{\xi} \times \underline{B}_0; \quad \hat{\Lambda}_{=1} \xi = \frac{1}{4\pi} \left\{ (\underline{\nabla} \times \underline{B}_0) \times [\underline{\nabla} \times (\xi \times \underline{B}_0)] + \right. \\ \left. + [\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times (\xi \times \underline{B}_0)] \times \underline{B}_0 \right\} + Q n_0 \left[ \underline{\nabla} \cdot (\xi \cdot \underline{E}_0) + \frac{Q}{Mc^2} (\xi \times \underline{B}_0) \times \underline{B}_0 \right] - \frac{j_0}{c} \chi [\underline{\nabla} \times (\xi \times \underline{B}_0)]$$

$$\left( n_0 \equiv \int f_0 d^3v_0; \quad j_0 \equiv Q \int v_0 f_0 d^3v_0 \right). \quad (\text{IV.42})$$

Se ve directamente que  $\hat{\Lambda}_2$  es antihermítico y  $\hat{\Lambda}_1$  es hermítico, con el producto escalar

$$\langle \xi_{-1} | \xi_{-2} \rangle \equiv \int_{\text{plasma}} d^3x (\xi_{-1}^* \cdot \xi_{-2}) \quad (\text{IV.43})$$

que es un caso especial del producto escalar definido en (IV.3) (y empleado en (IV.11)).

Ahora podemos aplicar la teoría general antes desarrollada, que conducía a la función de Lyapunov termodinámica ( $\zeta^2 \eta$ ) dada en (IV.11) ó (IV.18), pudiendo además usarse como ecuación auxiliar a (IV.15) ó (IV.13). También es posible expresar los coeficientes  $\delta_r$  en función de  $\xi$  y  $w$ , por medio de (IV.14), lo que nos permitirá simplificar la expresión de ( $\zeta^2 \eta$ ).

Así, se obtiene fácilmente, a partir de la expresión (IV.11) para

( $\delta^2 \eta$ ), recordando que  $\hat{\Lambda}_3 = 0$  y haciendo un análisis de Fourier en el tiempo

$$\delta^2 \eta = \int_{\text{plasma}} (\xi \cdot \hat{\Lambda}_{=1}^* \cdot \xi) d^3x - \sum_r \frac{K_r}{\mu_r} |\langle W_r | \underline{j} \cdot \xi \rangle|^2 + |w|^2 \sum_r \frac{K_r}{\mu_r} \frac{|\langle W_r | \underline{j} \cdot \xi \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2}$$

(IV.44)

Además, de (IV.15) resulta si  $\text{Im}(w) \neq 0$

$$\sum_r \frac{K_r |\langle W_r | \underline{j} \cdot \xi \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2} + i \int_{\text{plasma}} d^3x (\xi \cdot \hat{\Lambda}_{=2}^* \cdot \xi) = 0$$

(IV.45)

Las ecuaciones (IV.44) y (IV.45) fueron halladas por Seyler y Lewis<sup>(5)</sup>, en el caso particular de que sea  $f_0 = f_0(E)$ , para el cual se tiene<sup>(5)</sup>

$$\begin{aligned} 2\delta W &= \int d^3x d^3p \left( \frac{df_0}{dH_0} \right) |\underline{j} \cdot \xi|^2 - \int_{\text{plasma}} d^3x \xi \cdot \hat{\Lambda}_{=1}^* \cdot \xi = \\ &= \sum_r \frac{K_r}{\mu_r} |\langle W_r | \underline{j} \cdot \xi \rangle|^2 - \int_{\text{plasma}} d^3x \xi \cdot \hat{\Lambda}_{=1}^* \cdot \xi, \end{aligned} \quad (\text{IV.46})$$

donde la última igualdad es consecuencia de que, por ser  $f_0 = f_0(E)$ , es

$$K_r = f_0'(E) \mu_r = \frac{df_0}{dH_0} \mu_r \quad \left( \frac{df_0}{dH_0} \equiv f_0'(E) \right) \quad (\text{IV.47})$$

y donde<sup>(5)</sup>  $\delta W$  es la energía magnetohidrodinámica

$$\delta W = - \frac{1}{2} \int_{\text{plasma}} d^3x \underline{\xi} \cdot \underline{F}(\underline{\xi}) ;$$

$$\underline{F}(\underline{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (\underline{\nabla} \times \underline{B}_0) \times [\underline{\nabla} \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0)] + [\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0)] \times \underline{B}_0 \right\} + \underline{\nabla}(\underline{\xi} \cdot \underline{\nabla} p_0)$$

(IV.48)

La presión iónica  $p_0$  se calcula con la expresión<sup>(5)</sup>

$$p_0 = \frac{1}{3} \int d^3v Mv^2 f_0$$

Luego, (IV.44) se escribe, en este caso

$$\delta^2 \eta = |\omega|^2 \sum_r \frac{\kappa_r |\langle \psi_r^2 | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{|\mu_r - \omega|^2} - 2 \delta W$$

(IV.49)

Una expresión equivalente a (IV.49), pero que es válida también para perturbaciones que varían en el tiempo en forma arbitraria es

$$\delta^2 \eta = \sum_r \frac{\overset{*}{\delta}_r \delta_r}{\mu_r \kappa_r} - 2 \delta W$$

(IV.50)

Usando la expresión de  $\hat{\Lambda}_2$  dada en (IV.42), (IV.45) se escribe

$$\sum_r \frac{\kappa_r |\langle \psi_r^2 | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{|\mu_r - \omega|^2} + 1 \frac{Q}{c} \int_{\text{plasma}} d^3x n_0(\underline{x}) \underline{\xi} \cdot (\underline{\xi} \times \underline{B}_0) = 0$$

(IV.51)

Las ecuaciones (IV.49) y (IV.51) coinciden con las ecuaciones (53) y (54) de Seyler & Lewis<sup>(5)</sup>. Si se cumple la relación (IV.47) por ser  $f_0 = f_0(E)$  ; y si además vale la condición de Newcomb



$$f'_0(E) \equiv \frac{df_0}{dH_0} \leq 0 \quad (\text{IV.52})$$

el requerimiento adicional de que sea  $\delta W > 0$  (en toda perturbación) es, ahora, una condición suficiente de estabilidad. En efecto, de (IV.47) y (IV.52) resulta que  $(K_r/\mu_r) \leq 0$ ; luego, la condición termodinámica de estabilidad  $\delta^2 \eta \leq 0$ , donde  $(\delta^2 \eta)$  se da en (IV.49) ó (IV.50), se reduce a  $\delta W \geq 0$ .

La condición de estabilidad de un plasma frío (con radio de Larmor despreciable), que puede tratarse en forma magnetohidrodinámica es, justamente,  $\delta W \geq 0$ .

Así pues, si el plasma con radio de Larmor grande tiene una función de distribución  $f_0(E)$  que cumple la condición de Newcomb (IV.52), la condición magnetohidrodinámica  $\delta W > 0$  es suficiente para la estabilidad.

Si se supone, además, que todos los  $\mu_r$  son no nulos ( $\mu_r \neq 0$ ), la condición  $\delta W \geq 0$  es también necesaria<sup>(5)</sup>. Para probarlo, notemos primero que si para una perturbación es inicialmente  $\delta^2 \eta = 0$ , esta igualdad sigue valiendo en todo instante (por ser  $\delta^2 \dot{\eta} = 0$ ) y, además, de (IV.13) se deduce entonces, que se cumple, para esa perturbación, (IV.45) ó (IV.51), por lo cual esta perturbación satisface la relación de dispersión (la cual se sigue de que sea  $\delta^2 \eta = 0$ , conjuntamente con que se cumplan (IV.49) y (IV.51)<sup>(5)</sup>).

Entonces, toda perturbación para la cual sea inicialmente  $\delta^2 \eta = 0$ , puede desarrollarse espontáneamente (ya que cumple la relación de dispersión).

Ahora bien, si para alguna perturbación es  $\delta W < 0$ ; como  $\delta W$  sólo depende de  $\xi$  pero no de los  $\delta r$  (o de sus derivadas temporales), los valores iniciales de estos  $\delta r$  pueden elegirse arbitrariamente (sin que ello modifique el valor de  $\delta W$ ); luego, eligiendo convenientemente los  $\delta r$  es posible, si los correspondientes  $\mu_r$  son no nulos, fijar los valores de los  $\dot{\delta r}$ , por las ecuaciones (IV.2), de modo tal que se anule la expresión (IV.50) de  $(\delta^2 \eta)$ ; esto es así por ser  $\delta W < 0$ , y  $(\mu_r k_r) \leq 0$ .

Luego, cuando los  $\mu_r$  son no nulos, basta que haya una perturbación en la que  $\delta W < 0$ , para que sea posible elegir los  $\delta r$  iniciales (en dicha perturbación) de modo tal que el plasma sea inestable frente a esta perturbación; o sea que la condición  $\delta W \geq 0$  es necesaria para la estabilidad. (Se supone válida (IV.52).)

Alternativamente, si se supone que los  $\mu_r$  forman un continuo sobre el eje real (lo cual es una hipótesis razonable), siendo en general  $\langle W_r^0 | \underline{1} \cdot \xi \rangle \neq 0$ , se ve que la única frecuencia real que puede ser solución de la relación de dispersión es  $w = 0$ ; es decir, que de que sea  $\text{Im}(w) = 0$ , se deduce que también es  $\text{Re}(w) = 0$ . En efecto, pues cubriendo los  $\mu_r$  un continuo sobre el eje real, si  $w_0$  es una frecuencia real no nula, existirá, en general, un  $\mu_{r_0}$  tal que  $\mu_{r_0} = w_0$  (que corresponderá a  $r = r_0$ ; se supone que entonces  $\langle W_{r_0}^0 | \underline{1} \cdot \xi \rangle \neq 0$ ). Ahora bien, si  $w_0 \neq 0$ , la frecuencia real  $w = w_0$  no es admisible, pues al incluir la suma que aparece en (IV.49) al término con  $r = r_0$ , se ve que la expresión de  $(\delta^2 \eta)$  es divergente para  $w = w_0$ .

Luego, la única situación posible de estabilidad marginal (es de-

cir con  $\text{Im}(w) = 0$ ) es la de frecuencia nula ( $w = 0$ ); para este caso, en que  $w = 0$ , las fuerzas giroscópicas se anulan y luego para perturbaciones con  $w = 0$ , la condición necesaria y suficiente de estabilidad es  $\delta^2 \eta \leq 0$ . Pero si no hay  $\mu_r$  nulos ( $\mu_r \neq 0$ ), y  $w = 0$ , la expresión  $(\delta^2 \eta)$ , dada en (IV.49), es esencialmente igual a  $(\delta W)$ , cambiada de signo, y la condición  $\delta^2 \eta \leq 0$  equivale a  $\delta W \geq 0$ .

Por lo tanto, si todos los  $\mu_r$  son no nulos,  $\delta W \geq 0$  es condición necesaria y suficiente de estabilidad frente a perturbaciones con  $|w|$  pequeño; y, puesto que  $\delta W$  no depende de  $w$ ,  $\delta W \geq 0$ , es condición necesaria de estabilidad para toda perturbación. Este resultado había ya sido establecido antes, por otro razonamiento. Por otra parte, ya se vió que si vale (IV.52), la condición  $\delta W > 0$  es suficiente para la estabilidad. Estos resultados coinciden con los de Seyler y Lewis<sup>(5)</sup>, quienes han realizado un detallado análisis de la estabilidad, para un plasma como el que ahora consideramos. Si para algún  $r_0$  es  $\langle \mathcal{W}_{r_0} | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle = 0$  basta, para poder generalizar el razonamiento anterior a este caso (y probar que es necesario, para la estabilidad, que sea  $\delta W \geq 0$ ), considerar sólo perturbaciones con  $\gamma_{r_0} = 0$  (y  $w \neq \mu_{r_0}$ ). En especial, si para algún  $r_0$  es  $\mu_{r_0} = 0$ , pero es simultáneamente  $\langle \mathcal{W}_{r_0} | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle = 0$ , los dos razonamientos anteriores que prueban la necesidad de  $\delta W \geq 0$  pueden generalizarse fácilmente. (En especial, de (IV.2) se sigue que  $\dot{\gamma}_{r_0} = 0$ , cualquiera sean  $\underline{\xi}$  y  $\gamma_{r_0}$ ).

En el caso de que haya algún  $r_0$ , tal que sea  $\mu_{r_0} = 0$  pero  $\langle \mathcal{W}_{r_0} | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle \neq 0$ , las deducciones anteriores fallan.

Pero,<sup>(6)</sup> si se define ahora

$$\delta W' \equiv \delta W - \frac{1}{2} f'_0(E) \left| \langle W_{r_0}^0 | \underline{j \cdot \xi} \rangle \right|^2, \quad (\text{IV.53})$$

se tiene (de (IV.49) ó (IV.50) )

$$\delta^2 \eta = |w|^2 \sum_{r \neq r_0} \frac{K_r}{\mu_r} \frac{|\langle W_r^0 | \underline{j \cdot \xi} \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2} - 2\delta W' = \sum_{r \neq r_0} \frac{\dot{\gamma}_r^* \dot{\gamma}_r}{\mu_r K_r} - 2\delta W'. \quad (\text{IV.54})$$

Usando (IV.54), en vez de (IV.49) ó (IV.50), por razonamientos análogos a los antes realizados, supuesto que vale (IV.52), se prueba ahora que :  $\delta W' \geq 0$  es condición necesaria y suficiente de estabilidad. (Así por ser  $(K_r/\mu_r) \leq 0$ , como se deduce de (IV.52), se ve que  $\delta W' > 0$  implica  $\delta^2 \eta < 0$ , y se deduce que  $\delta W' > 0$  es suficiente para la estabilidad; asimismo, usando  $\delta W'$  en vez de  $\delta W$ , puede repetirse, en forma casi textual, cualquiera de los dos razonamientos antes desarrollados, para probar la condición necesaria de estabilidad; que ahora es  $\delta W' \geq 0$ .) El resultado coincide con el de Seyler y Barnes<sup>(6)</sup>, quienes discuten en detalle una situación de este tipo.

Un análisis similar al que acabamos de hacer en base al modelo de "Vlasov-fluido", puede hacerse, usando las ecuaciones (IV.32) y (IV.33), para un plasma con varias especies de Vlasov<sup>(5)</sup>. En este caso, sin embargo, no es tan fácil hallar una condición necesaria de estabilidad. De (IV.32), se ve que, una condición suficiente de estabilidad, es que

$$(\forall_r) \quad (\mu_r K_r) \leq 0 ; \int_{\text{plasma}} d^3x (\Psi^* \hat{\Lambda}_1 \Psi) \geq 0 \quad (\Psi = (\phi_1, \underline{A}_1)) \quad (IV.55)$$

En particular, si para toda especie  $p$  es  $f_0^{(p)} = f_0^{(p)}(H_0^{(p)})$ , la primera de las condiciones dadas en (IV.55) se reduce a la condición de Newcomb (IV.52) para cada especie. Si  $\hat{\Lambda}_1$  se da en (IV.27), la segunda de las condiciones dadas en (IV.55) está asociada a la energía electromagnética; si el plasma es homogéneo (e infinito), caso ya discutido, esta segunda condición (IV.55) se cumple automáticamente. Un análisis detallado del problema de estabilidad de un plasma descrito por (IV.32) y (IV.33), ha sido realizado por Seyler y Lewis, quienes han obtenido la condición suficiente de estabilidad (IV.55), además de una condición necesaria y suficiente de estabilidad de más difícil formulación, que aquí no reproducimos por sencillez<sup>(5)</sup>. En lugar de (IV.32) y (IV.33) puede usarse equivalentemente la relación de dispersión del problema, o sea la nulidad de la funcional de dispersión  $\Delta^{(5)}$ , dada como

$$\Delta \equiv \langle \Psi | \hat{\Lambda}_1 \Psi \rangle - \int d\mu \frac{s(\mu)}{\mu - w} ; \quad s(\mu) \equiv \sum_r \delta(\mu - \mu_r) K_r |\langle W_r | \hat{J} \Psi \rangle|^2$$

$$(\langle \Psi | \hat{\Lambda}_1 \Psi \rangle \equiv \int_{\text{plasma}} d^3x [\Psi^* \hat{\Lambda}_1 \Psi]) \quad (IV.56)$$

La igualdad  $\Delta = 0$  se obtiene trivialmente, anulando  $(\delta^2 \eta)$ , de la ecuación (IV.32), y restándole (IV.33) multiplicada por la frecuencia conjugada  $w^*$ . Para verlo, basta notar que

$$\sum_r \frac{\mu_r k_r |\langle \mathcal{W}_r | \hat{J} \cdot \Psi \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2} - \sum_r \frac{k_r w^* |\langle \mathcal{W}_r | \hat{J} \cdot \Psi \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2} =$$

$$= \sum_r \frac{k_r |\langle \mathcal{W}_r | \hat{J} \cdot \Psi \rangle|^2}{(\mu_r - w)} \quad (\text{IV.57})$$

Análogamente, en el caso de "Vlasov - fluido", la funcional de dispersión  $\Delta$ , que dan Seyler y Lewis<sup>(5)</sup>, y que debe igualarse a cero, se obtiene restando (IV.45), multiplicada por la frecuencia  $w$ , de (IV.44), siendo entonces

$$\Delta \equiv \langle \underline{\xi} | \hat{\Lambda} \underline{\xi} \rangle + \langle \underline{\xi} | \hat{\Lambda} \dot{\underline{\xi}} \rangle - \sum_r \frac{k_r |\langle \mathcal{W}_r | \underline{J} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{\mu_r - w} \quad (\text{IV.58})$$

y donde, en vez de (IV.57), debe usarse ahora que

$$|w|^2 \sum_r \frac{k_r}{\mu_r} \frac{|\langle \mathcal{W}_r | \underline{J} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2} - \sum_r \frac{k_r}{\mu_r} |\langle \mathcal{W}_r | \underline{J} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2 =$$

$$= \sum_r \frac{k_r |\langle \mathcal{W}_r | \underline{J} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{(w - \mu_r)} + w \sum_r \frac{k_r |\langle \mathcal{W}_r | \underline{J} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2} \quad (\text{IV.59})$$

(los productos escalares se definen como antes). Nótese que debe usarse  $\dot{\underline{\xi}} = -iw\underline{\xi}$  para obtener (IV.58), en la forma descripta. Si el primer miembro de (IV.45) se designa con  $\Gamma$ , la "funcional de dispersión"  $\Delta$ , dada en (IV.58), es

$$\Delta = \zeta^2 \eta - w \Gamma \quad (\text{IV.60})$$

Como para el caso de "Vlasov - fluido", (IV.13) se escribe

$$\text{Re}(w) \zeta^2 \eta = |w|^2 \Gamma, \quad (\text{IV.61})$$

de (IV.60) resulta

$$\text{Re}(\Delta) = [\text{Im}(w)]^2 \Gamma / \text{Re}(w), \quad (\text{IV.62})$$

donde se usó que  $\Gamma$  y  $\zeta^2 \eta$  son reales. En consecuencia

$$\text{Re}(\Delta) = [\text{Im}(w)]^2 (\zeta^2 \eta) / |w|^2. \quad (\text{IV.63})$$

Las fórmulas (IV.58) a (IV.63), que se acaban de establecer para el modelo de "Vlasov - fluido", se han deducido sin hacer hipótesis sobre la función de distribución (en particular no se supuso que la  $f_0$  sólo dependiera de  $E$ ), por lo cual valen cualquiera sea ésta. En cambio, si se usó, por ejemplo, que  $\hat{\Lambda}_3 = 0$ . Puesto que la relación de dispersión del problema es  $\Delta = 0$  (donde  $\Delta$  se da en (IV.58) ó (IV.60)), se ve que  $\text{Re}(\Delta) = 0$  para cualquier perturbación tipo "modo normal" que evolucione según las "ecuaciones de movimiento" del problema; equivalentemente, si la perturbación es tal que  $\zeta^2 \dot{\eta} = 0$ , o lo que es lo mismo, tal que  $\text{Im}(w) \zeta^2 \eta = 0$ ; debe ser, por (IV.63),  $\text{Re}(\Delta) = 0$ . Además, si  $\text{Re}(w) = 0$ , de (IV.63) resulta también que  $\text{Re}(\Delta)$  coincide con  $\zeta^2 \eta$ . Luego, para  $\text{Re}(w) = 0$ , al menos, el signo de  $\text{Re}(\Delta)$  es el mismo que el de  $\zeta^2 \eta$ . Si ahora considero un tipo de perturbación, frente a la cual el plasma es estable, y que

por lo tanto no puede desarrollarse espontáneamente en el plasma, no debe haber ningún  $w$  complejo con  $\text{Im}(w) > 0$  que satisfaga la relación de dispersión  $\Delta = 0$ . Luego si se fija  $\text{Im}(w) = \gamma$  (siendo  $\gamma > 0$ ) y se varía  $\text{Re}(w)$  de  $-\infty$  a  $+\infty$ ,  $\Delta$  no debe anularse, para que el plasma sea estable. Una condición suficiente para que esto suceda es que no se anule  $\text{Re}(\Delta)$ , lo cual implica que  $\Delta_R \equiv \text{Re}(\Delta)$  no debe cambiar de signo si  $\text{Re}(w)$  varía de  $-\infty$  a  $+\infty$  (con  $\text{Im}(w) = \gamma > 0$ , fijo). Pero si  $\text{Re}(w) = 0$  el signo de  $\Delta_R$  coincide con el de  $(\zeta^2 \eta)$ ; luego, si se cumple la condición termodinámica de estabilidad,  $\zeta^2 \eta \leq 0$  (que asegura la estabilidad del plasma), el signo constante de  $\Delta_R$  (para asegurar que  $\Delta_R$  nunca se anule) debe ser negativo. Por lo tanto, una condición suficiente de estabilidad es

$$\Delta_R \equiv \text{Re}(\Delta) \leq 0 \quad , \quad (\text{IV.64})$$

donde el signo de igual sólo puede darse en el caso marginal, con  $w$  real.

En realidad, la condición (IV.64) es equivalente a la condición termodinámica de estabilidad  $\zeta^2 \eta \leq 0$ , ya que (IV.63) asegura que  $(\zeta^2 \eta)$  y  $\Delta_R$  son del mismo signo (si ambas son no nulas). Así pues podemos usar como condición suficiente de estabilidad, en este caso, ya sea  $\zeta^2 \eta \leq 0$ , o bien (IV.64).

Nótese, de paso, que toda perturbación con  $\text{Re}(w) \neq 0$  y  $\zeta^2 \eta = 0$  se desarrolla espontáneamente, pues de  $\zeta^2 \eta = 0$  y (IV.63) resulta  $\text{Re}(\Delta) = 0$ , lo que junto con  $\text{Re}(w) \neq 0$ ,  $\zeta^2 \eta = 0$  y



(IV.60) implica que también debe ser  $\Gamma = 0$ , y luego,  
 $\text{Im}(\Delta) = 0$ , satisfaciéndose la relación de dispersión para la perturbación en cuestión.

Ahora vamos a comparar nuestros resultados con los de Sudan y Rosenbluth<sup>(1, 2)</sup>, quienes han realizado un estudio variacional de la estabilidad de un plasma inhomogéneo, con una especie iónica de radio de Larmor arbitrario que debe tratarse por la ecuación de Vlasov (se supone que estos iones energéticos forman un haz) y un plasma residual frío, tratable como fluido, que está compuesto de electrones y, ocasionalmente, también de iones fríos. Este modelo es, pues, muy similar al de "Vlasov - fluido", discutido por Seyler et al, así como también por nosotros, en las páginas anteriores de esta Tesis. Sudan y Rosenbluth han supuesto que la función de distribución de los iones del haz es tipo "rotor rígido"  $f_0 = f_0(E - \Omega R_\theta)$ , o sea que satisface (IV.34), teniendo el plasma simetría de revolución alrededor del eje  $z$ ,  $\theta$  es el ángulo de giro alrededor de este eje. Vale entonces (IV.35) donde, si la dependencia angular de los  $W_r$  es  $\sim e^{i\ell\theta}$ , resulta  $k = \ell$ .

Las ecuaciones básicas del modelo son, <sup>(1, 2)</sup> la ecuación de Vlasov para el haz y una ecuación fluidística para el "desplazamiento"  $\xi$ . En el caso en que sólo hay electrones fríos,  $\xi$  es el desplazamiento electrónico, y la ecuación que le corresponde no es otra que la ecuación (IV.39) del modelo de "Vlasov - fluido" (con  $\hat{A}$  dada en (IV.40)). En este caso, las ecuaciones de Sudan - Rosenbluth son idénticas a las del modelo de "Vlasov - fluido". En el caso que haya tanto iones como electrones fríos, el despla-

miento del plasma frío  $\xi$ , cumple la ecuación (1, 2)

$$n_i M_i \ddot{\xi} = \frac{1}{c} n_b Q_b \dot{\xi} \times \underline{B}_0 + [\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times (\xi \times \underline{B}_0)] \times \underline{B}_0 \left(\frac{1}{4\pi}\right) + \frac{1}{c} \underline{j}_{p0} \times [\underline{\nabla} \times (\xi \times \underline{B}_0)] - \frac{1}{c} \underline{j}_{b1} \times \underline{B}_0 - \underline{\nabla} p_1 \quad (IV.65)$$

donde el índice b se refiere a los iones energéticos del haz, el i, a los iones fríos del plasma;  $p_1$  es la presión, a primer orden, del plasma frío, que se supone varía en forma adiabática,  $\underline{j}_{b1}$  es la corriente del haz iónico a primer orden,  $\underline{j}_{p0}$  es la corriente del plasma frío a orden cero; además se supone que no hay campo eléctrico a orden cero,  $\underline{E}_0 = 0$ ; y se elige la "medida" dada en (IV.38). Usando la ecuación de Ampère a orden cero, calculando explícitamente  $\underline{j}_{b1}$ , y recordando que se asume  $\underline{E}_0 = 0$ ; se ve que si  $\hat{\Lambda}$  se define como en (IV.40), (IV.65) puede escribirse

$$n_i M_i \ddot{\xi} = \hat{\Lambda} \cdot \xi - \int d^3p \underline{j} f_1 - \underline{\nabla} p_1 \quad (\underline{j} \equiv \frac{Q_b}{c} \underline{v}_0^{(b)} \times \underline{B}_0) \quad (IV.66)$$

donde la velocidad a orden cero  $\underline{v}_0^{(b)}$  para los iones del haz se define, en función del impulso canónico  $\underline{\zeta}$  de estos, como en (IV.21). Usando la variación adiabática de  $p_1$ , se puede probar que  $\underline{\nabla} p_1$  es el resultado de aplicar un operador lineal, que puede contener derivadas espaciales (pero no temporales) a  $\xi$ . Luego, si  $\hat{\Lambda}_1$  y  $\hat{\Lambda}_2$  son los dados en (IV.42), con

$\underline{E}_0 = 0$ , y si

$$\hat{\Lambda}'_{=1} \cdot \underline{\xi} = \hat{\Lambda}_{=1} \cdot \underline{\xi} - \underline{\nabla} p_1 ; \quad \hat{\Lambda}'_{=1} \cdot \underline{\xi} = \hat{\Lambda}_{=1} \cdot \underline{\xi} - \underline{\nabla} p_1 ; \quad \hat{\Lambda}_{=3} = - (M_i n_i) \underline{1} ;$$

(IV.67)

la ecuación (IV.66) toma la forma

$$\hat{\Lambda}_{=1} \cdot \underline{\xi} + \hat{\Lambda}_{=2} \cdot \dot{\underline{\xi}} + \hat{\Lambda}_{=3} \cdot \ddot{\underline{\xi}} = \int d^3p \underline{v} f_1 , \quad (\text{IV.68})$$

donde el  $\hat{\Lambda}_{=1}$  de (IV.68) es en realidad  $\hat{\Lambda}'_{=1}$ . En lo que sigue, y mientras no haya lugar a confusión, notaremos  $\hat{\Lambda}_{=1}$  a  $\hat{\Lambda}'_{=1}$  y  $\hat{\Lambda}$  a  $\hat{\Lambda}'$ ; cuando  $\underline{\nabla} p_1 = 0$  ambos conjuntos de operadores son idénticos. La ecuación (IV.68) es análoga a (IV.39), y es del tipo (IV.4).

Luego, sustituyendo a (IV.39) por (IV.68), es posible aplicar sin mayores cambios la teoría antes desarrollada a este caso. El único cambio notable respecto al modelo de "Vlasov - fluido", tal y como lo discutimos antes, es que ahora  $\hat{\Lambda}_{=3} \neq 0$ , por la presencia de iones fríos. Si en cambio sólo los electrones son fríos, pero no los iones, es nuevamente  $\hat{\Lambda}_{=3} = 0$  y se recupera el modelo de "Vlasov - fluido" tratado antes.

Para hacer un tratamiento unificado de ambos casos, discutiremos el caso en que hay iones fríos,  $\hat{\Lambda}_{=3} \neq 0$ . Basta poner  $M_i n_i = 0$  formalmente ( y hacer  $p_1 = 0$ ) para obtener el caso de "Vlasov - fluido" con sólo electrones fríos, además de los iones del haz.

Usando (IV.34), resulta que

$$\underline{\nabla}_v f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial H_0} (M_b \underline{v} - M_b \Omega r \underline{e}_\theta) \quad (\text{IV.69})$$

donde  $r$  es la coordenada radial, en cilíndricas, de una partícula del haz y  $\underline{e}_\theta$  el versor según  $\theta$ .

La solución estacionaria  $f_0$  de la ecuación de Vlasov, satisface en el caso general ( $f_0$  arbitraria,  $\underline{E}_0$  puede no ser nulo)

$$\underline{v} \cdot \underline{\nabla} f_0 + \frac{Q_b}{M_b} (\underline{E}_0 + \frac{\underline{v} \times \underline{B}}{c}) \cdot \underline{\nabla}_v f_0 = 0 \quad (\text{IV.70})$$

Si ahora se supone una distribución tipo "rotor rígido", vale (IV.34) y luego (IV.69), y resulta de (IV.70)

$$Q n_{b0} \left[ \underline{E}_0 - \frac{\Omega r}{c} (\underline{B}_0 \times \underline{e}_\theta) \right] = \underline{\nabla} p_{b0};$$

$$n_{b0} = \int f_0 d^3v; \quad p_{b0} = \frac{1}{3} \int (M_b v^2) f_0 d^3v. \quad (\text{IV.71})$$

En el caso  $f_0 = f_0(E)$  antes discutido, y que es el caso de "Vlasov - fluido" que tratan Seyler y Lewis, valen (IV.69), (IV.70) y (IV.71), haciendo formalmente  $\Omega = 0$  en estas ecuaciones. En este caso se sigue, luego de algunas cuentas, usando la definición de  $\underline{J}$  dada en (IV.39), que<sup>(5)</sup>

$$\int d^3p d^3x \frac{df_0}{dH_0} \left| \underline{J} \cdot \underline{\xi} \right|^2 = \int_{\text{plasma}} d^3x \underline{\xi}^* \cdot \left[ Q n_0 \underline{\nabla} \phi_1 - \underline{\nabla} (\underline{\xi} \cdot \underline{\nabla} p_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{Q^2}{Mc^2} n_0 (\underline{\xi} \times \underline{B}_0) \times \underline{B}_0 \right], \quad (\text{IV.72})$$

donde se ha obviado el índice "b", y  $p_0$  es la presión de los iones del haz a orden cero (hemos vuelto, momentáneamente, a la notación que usamos al discutir el modelo de "Vlasov - fluido" de Seyler et al). Si ahora se usa la expresión (IV.42) de  $\hat{\Lambda}_1$ , de (IV.72) y de la definición (IV.48) de  $\delta W$  resulta la primera igualdad dada en (IV.46), obteniéndose la segunda igualdad en (IV.46) de que sea  $f_0 = f_0(E)$  (también se usó la primera de las igualdades que se dan, más adelante, en (IV.79)).

Si en cambio, volvemos ahora al caso de Sudan-Rosenbluth, en que  $\underline{E}_0 = 0$ ,  $f_0 = f_0(E - \Omega P_\theta)$ , con  $\hat{\Lambda}_1$  y  $\hat{\Lambda}_3$  dados en (IV.67), se deduce, en vez de (IV.72)

$$\int d^3x d^3p \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right) |\underline{J} \cdot \underline{\xi}|^2 = \frac{Q_b^2}{M_b c^2} \int_{\text{plasma}} d^3x \left\{ \underline{\xi}^* \cdot [(\underline{\xi} \times \underline{B}_0) \times \underline{B}_0] n_{b0} \right\} + \frac{Q_b^2}{c^2} \Omega^2 \int d^3x d^3p \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right) \cdot \left| r \frac{v}{\theta} \cdot (\underline{\xi} \times \underline{B}_0) \right|^2 \quad (\text{IV.73})$$

De aquí y de la expresión de  $\hat{\Lambda}'_1$  dada en (IV.67) se obtiene, en vez de (IV.46)

$$2 \delta W_p + 2 \delta W_\alpha = \int d^3x d^3p \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right) |\underline{J} \cdot \underline{\xi}|^2 - \int_{\text{plasma}} d^3x (\underline{\xi}^* \cdot \hat{\Lambda}'_1 \cdot \underline{\xi}) ;$$

$$\delta W_\alpha = \frac{Q_b^2}{2c^2} \Omega^2 \int d^3x d^3p \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right) \cdot \left| r \frac{v}{\theta} \cdot (\underline{\xi} \times \underline{B}_0) \right|^2, \quad (\text{IV.74})$$

donde  $\delta W_p$  es la energía magnetohidrodinámica del plasma frío, o sea la  $\delta W$  dada en (IV.48); salvo que ahora debe sustituirse el término  $\underline{\nabla} \cdot (\underline{\xi} \cdot \underline{\nabla} p_0)$  que aparece en la expresión (IV.48)

de  $\underline{E}(\underline{\xi})$ , por  $\underline{\nabla} \left[ \underline{\xi} \cdot \underline{\nabla} p_0 + \gamma p_0 (\underline{\nabla} \cdot \underline{\xi}) \right]$ , siendo  $p_0$  la presión de los iones fríos del plasma que satisface

$$c \underline{\nabla} p_0 = \underline{j} p_0 * \underline{B}_0 \quad (\text{IV.75})$$

Como ahora  $\hat{\Lambda}_3 \neq 0$ , se tiene, en vez de (IV.44), la siguiente expresión para  $(\delta^2 \eta)$ , que se deduce fácilmente de (IV.11)

$$\begin{aligned} \delta^2 \eta = & \int_{\text{plasma}} (\underline{\xi} \cdot \hat{\Lambda}_3 \cdot \underline{\xi}) d^3x + \int_{\text{plasma}} (\underline{\xi} \cdot \hat{\Lambda}_1 \cdot \underline{\xi}) d^3x - \sum_r \frac{K_r}{\mu_r} |\langle W_r^p | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2 + \\ & + |w|^2 \sum_r \frac{K_r}{\mu_r} \frac{|\langle W_r^p | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.76})$$

Usando  $K = \mathcal{L}$  y que  $\dot{\underline{\xi}} = -i w \underline{\xi}$ , así como la expresión (IV.67) de  $\hat{\Lambda}_3$ , resulta

$$\begin{aligned} \delta^2 \eta = & -|w|^2 \int_{\text{plasma}} d^3x (M_1 n_1 |\underline{\xi}|^2) + \int_{\text{plasma}} d^3x (\underline{\xi} \cdot \hat{\Lambda}_1 \cdot \underline{\xi}) - \sum_r \frac{K_r}{\mu_r} |\langle W_r^p | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2 + \\ & + |w|^2 \sum_r \frac{K_r}{\mu_r} \frac{|\langle W_r^p | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2} \equiv -\delta C \end{aligned} \quad (\text{IV.77})$$

con

$$(K_r / \mu_r) = \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \left( 1 - \frac{\mathcal{L} \Omega_r}{\mu_r} \right) \quad (\text{IV.78})$$

El criterio termodinámico de estabilidad es, como siempre,  $\delta^2 \eta \leq 0$ , o equivalentemente,  $\delta C \geq 0$ . Esta es una condición suficiente de estabilidad (como ya sabemos), que, según veremos, coincide con la

hallada por Sudan y Rosenbluth<sup>(1, 2)</sup>. En otras palabras, el criterio de estabilidad de Sudan - Rosenbluth, se reduce al criterio suficiente de estabilidad  $\delta C \geq 0$ , que es equivalente a nuestra condición termodinámica  $\delta^2 \eta \leq 0$ .

Usando (IV.78) y las igualdades

$$\int d^3x d^3p \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right) |\underline{j} \cdot \underline{\xi}|^2 = \sum_r \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right) |\langle W_r | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2 ;$$

$$|w|^2 \sum_r \frac{\alpha_r}{\mu_r} \frac{|\langle W_r | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2} - \sum_r \frac{\alpha_r}{\mu_r} |\langle W_r | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2 =$$

$$= \sum_r \frac{\alpha_r [2\text{Re}(w) - \mu_r]}{|\mu_r - w|^2} |\langle W_r | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2 ; \quad \alpha_r \equiv e (\partial f_0 / \partial H_0) \Omega ;$$

(IV.79)

resulta, de la definición de  $\delta C$ , dada en (IV.77) y de las expresiones (IV.74), que es

$$\frac{1}{2} \delta C = |w|^2 (\delta M - \delta G) + \text{Re}(w) e \Omega \delta G + e \Omega \delta J + \delta W_\alpha + \delta W_p$$

(IV.80)

donde

$$\delta M \equiv \frac{1}{2} \int d^3x (n_i M_i) |\underline{\xi}|^2 ; \quad \delta G \equiv \frac{1}{2} \sum_r \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right) \frac{|\langle W_r | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2} =$$

$$= \frac{Q_b^2}{2c^2} \int d^3x d^3p |g|^2 \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right) ;$$

$$\delta J \equiv i \left( \frac{q_b^2}{2c^2} \right) \int_{-\infty}^t dt \operatorname{Im}(w) \int d^3x d^3p \left( g^* \frac{dg}{dt} - g \frac{dg^*}{dt} \right) \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right);$$

$$g \equiv \int_{-\infty}^t dt' \left( \underline{\xi}, \underline{v}_0 \times \underline{B}_0 \right) . \quad (\text{IV.81})$$

En la última integral  $\underline{v}_0 = \underline{v}_0^{(b)}$  es la velocidad a orden cero de los iones del haz ; resulta

$$dg/dt = i(\mu_r - w)g = \underline{\xi} \cdot \underline{v}_0^{(b)} \times \underline{B}_0 = \frac{c}{Q_b} \underline{\xi} \cdot \underline{J} \quad (\text{IV.82})$$

donde  $\underline{J}$ , definido en (IV.66), es el operador corriente (que aparece, por ejemplo, en  $|\langle \mathcal{W}_r | \underline{J} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2$ )

Para deducir (IV.80), se usó además que

$$\sum_r \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right) \frac{[\operatorname{Re}(w) - \mu_r] |\langle \mathcal{W}_r | \underline{J} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2} = \frac{1}{2} i \left( \frac{q_b^2}{c^2} \right) \int d^3x d^3p \left( g^* \frac{dg}{dt} - g \frac{dg^*}{dt} \right) \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right);$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_r \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right) \frac{[\operatorname{Re}(w) - \mu_r] |\langle \mathcal{W}_r | \underline{J} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2} \right\} =$$

$$= 2 \operatorname{Im}(w) \left\{ \sum_r \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right) \frac{[\operatorname{Re}(w) - \mu_r] |\langle \mathcal{W}_r | \underline{J} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2} \right\}; \quad (\text{IV.83})$$

de donde, se deduce para la  $\delta J$  dada en (IV.81) que

$$\sum_r \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right) \frac{[\operatorname{Re}(w) - \mu_r] |\langle \mathcal{W}_r | \underline{J} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2} = 2(\delta J) . \quad (\text{IV.84})$$

Esta relación es de utilidad en la deducción de (IV.80) .

Nuestro criterio termodinámico de estabilidad ( $\delta^2 \eta \leq 0$ ) coincide entonces con el criterio suficiente de estabilidad establecido por



Sudan y Rosenbluth (2, 1); nuestra notación es la de Finn & Sudan.

En particular, la formulación que aquí presentamos del criterio de Sudan - Rosenbluth, ecuación (IV.80), coincide textualmente con la ecuación (6.15) del trabajo de Finn & Sudan.

La "funcional de dispersión", al estilo de Seyler et al, se puede definir, si se desea, también para el caso de Sudan - Rosenbluth, obteniéndose ahora

$$\Delta \equiv \langle \underline{\xi} \cdot | \hat{\Lambda}_3 \cdot \ddot{\underline{\xi}} \rangle + \langle \underline{\xi} \cdot | \hat{\Lambda}_2 \cdot \dot{\underline{\xi}} \rangle + \langle \underline{\xi} | \hat{\Lambda}_1 \cdot \underline{\xi} \rangle - \sum_r \frac{\kappa_r |\langle \mathcal{W}_r | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{(\mu_r - w)}, \quad (IV.85)$$

que es una simple generalización de (IV.58) al caso en que  $\hat{\Lambda}_3 \neq 0$ , no discutido por Seyler et al. Definiendo

$$\delta L \equiv \frac{(-1) Q_b}{2c} \int d^3x n_{b0} \underline{\xi}^* \cdot (\underline{\xi} \times \underline{B}_0);$$

$$\delta W_\beta \equiv i(w - l\Omega) \frac{Q_b^2}{2c^2} \int d^3x d^3y \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right) \underline{g} \frac{d\underline{g}}{dt}^*; \quad (IV.86)$$

se ve que la relación de dispersión  $\Delta = 0$  del problema, se escribe

$$-w^2 \delta M - w \delta L + \delta W_p + \delta W_\alpha + \delta W_\beta = 0 \quad (IV.87)$$

donde se usaron (IV.74), la primera de las ecuaciones (IV.79), las definiciones de  $\hat{\Lambda}_3$ ,  $\delta M$ ,  $\delta W_p$ ,  $\hat{\Lambda}_2$ ,  $\delta L$ , y además que

$$\sum_r \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right) \frac{|\langle \mathcal{W}_r | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{(\mu_r - w)} = i \frac{Q_b^2}{c^2} \int d^3x d^3y \left( \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \right) \underline{g} \frac{d\underline{g}}{dt}^* = \frac{2}{(w - l\Omega)} \delta W_\beta,$$

así como que, de (IV.35), se deduce

$$K_r = (\mu_r - \ell\Omega) \frac{\partial f_0}{\partial H_0} = (\mu_r - w) \frac{\partial f_0}{\partial H_0} + (w - \ell\Omega) \frac{\partial f_0}{\partial H_0} \quad (\text{IV.88})$$

La ecuación (IV.87) hallada coincide con la ecuación (6.11) de Finn & Sudan. Para frecuencias reales, (IV.87) se deduce directamente de (IV.13), de la misma forma que, en el caso de "Vlasov-fluido", con  $\hat{\Lambda}_3 = 0$ , (IV.13) se reduce, para frecuencias reales, a pedir que sea nulo el  $\Delta$  definido en (IV.58). Esto muestra una vez más la relación existente entre la ecuación (IV.13), que proviene de anular la parte imaginaria de la potencia, " $\pi$ ", en el formalismo de Lavenda<sup>(23)</sup>, con la relación de dispersión,  $\Delta = 0$ . Pasemos a examinar, para finalizar, la ecuación (IV.15), que para el caso de Sudan - Rosenbluth, es

$$\int_{\text{plasma}} d^3x \left[ (\underline{\xi}^* \underline{\xi} - \underline{\xi}^* \underline{\xi}) (n_i M_i) - \left( \frac{Q_b n_{b0}}{c} \right) \underline{\xi}^* (\underline{\xi} \times \underline{B}_0) \right] =$$

$$= -i \sum_r \frac{K_r |\langle \tilde{W}_r | J \cdot \underline{\xi} \rangle|^2}{|\mu_r - w|^2} = 2i \{ [\ell\Omega - \text{Re}(w)] (\delta G) + (\delta J) \} \quad (\text{IV.89})$$

donde  $(\delta G)$  y  $(\delta J)$  se definen en (IV.81), y se usaron (IV.84) y (IV.88).

La expresión (IV.89) coincide con la ecuación (39) de Sudan & Rosenbluth<sup>(1)</sup>.

REFERENCIAS DEL CAPITULO IV

- 1.- R.N. Sudan & M.N. Rosenbluth: Phys. Fluids 22 (2), 282 (1979)
- 2.- J.M. Finn & R.N. Sudan: Nucl. Fus. 22 (11), 1443 (1982)
- 3.- T.K. Fowler: Phys. Fluids 4 (11), 1393 (1961)
- 4.- T.K. Fowler: J. Math. Phys. 4(4), 559 (1963)
- 5.- C.E. Seyler & H.R. Lewis: J. Plasma Phys. 27 (1), 37 (1982)
- 6.- C.E. Seyler & D. Barnes: Phys. Fluids 24 (11), 1989 (1981)
- 7.- L. Landau & E. Lifchitz: "Electrodynamique des Milieux Continus" (Mir, 1969)
- 8.- L. Landau & E. Lifchitz: "Physique Statistique" (Mir, 1967)
- 9.- L. Landau & E. Lifchitz: "Mécanique des Fluides" (Mir, 1971)
- 10.- R.F. Fox: Phys. Rep. 48 (3), 180 (1978)
- 11.- R.F. Fox & G.E. Uhlenbeck: Phys. Fluids 13 (8), 1893 (1970)
- 12.- R.F. Fox & G.E. Uhlenbeck: Phys. Fluids 13 (12), 2881 (1970)
- 13.- J. Keizer: Phys. Fluids 21 (2), 198 (1978)
- 14.- H. Ueyama: J. Stat. Phys. 22 (1), 1 (1980)
- 15.- A.I. Akhiezer, I.A. Akhiezer, Polovin, Sitenko & Stepanov: "Plasma Electrodynamics" (2 vols. ; Pergamon Press, 1975)
- 16.- A.I. Akhiezer, I.A. Akhiezer & A.G. Sitenko: Sov. Phys. JETP 14 (2), 462 (1962)
- 17.- A.G. Sitenko: "Electromagnetic Fluctuations in Plasma" (Academic Press, 1967)
- 18.- A.A. Abrikosov & I.M. Khalatnikov: Sov. Phys. JETP 7 (1), 135 (1958)
- 19.- N.A. Krall & A.W. Trivelpiece: "Principles of Plasma Physics" (McGraw-Hill, 1973)
- 20.- K.R. Symon, C.E. Seyler & H.R. Lewis: J. Plasma Phys. 27 (1), 13 (1982)

- 21.- H.R. Lewis & C.E. Seyler: J. Plasma Phys. 27 (1), 25 (1982)
- 22.- H.R. Lewis & K.R. Symon: J. Math. Phys. 20 (3), 413 (1979)
- 23.- B.H. Lavenda: "Thermodynamics of Irreversible Processes"  
(MacMillan Press, 1978)
- 24.- R. Graham, en: "Stochastic Processes in Nonequilibrium  
Systems", 83 (Garrido et al, eds; Springer-Verlag, Lec. Notes  
in Phys. '84; 1978)
- 25.- R. Graham, en: "Stochastic Nonlinear Systems", 202 (Arnold &  
Lefever, eds.; Springer-Verlag, 1981)
- 26.- P.C. Clemmow & J.P. Dougherty: "Electrodynamics of Particles  
and Plasmas" (Addison-Wesley, 1969)
- 27.- P.H. Sakanaka, en: "Autumn College on Plasma Phys.", Int.  
Centre for Theor. Phys., Trieste (1979)
- 28.- F. Schlögl: Phys. Rep. 62 (4), 268 (1980)
- 29.- R.D. Levine: J. Chem. Phys. 65 (8), 3302 (1976)
- 30.- Procaccia, Shimoni & Levine: J. Chem. Phys. 65 (8), 3284 (1976)
- 31.- Y. Aihassid & R.D. Levine: J. Chem. Phys. 67 (10), 4321 (1977)
- 32.- S. Chandrasekhar & L. Woltjer: Proc. Nat. Ac. Sciences 44 (4),  
285 (1958)
- 33.- C.E. Seyler: Phys. Fluids 22 (12), 2324 (1979)

CAPITULO V

ESTUDIO NUMERICO Y CONCLUSIONES

En este capítulo discutiremos una aplicación numérica al estudio de la estabilidad de un espejo magnético, en que la configuración del plasma es tal que el radio de Larmor iónico es del orden de las dimensiones del sistema.

Finalmente, analizaremos las conclusiones generales que se desprenden del trabajo presentado en esta Tesis.

El MIGMA (1, 2, 3, 4.) es un espejo magnético, con simetría de revolución alrededor de un eje, en el que se inyecta un haz de iones de alta energía enfocado de forma tal que el momento angular canónico de los iones del haz (respecto del eje de simetría) sea prácticamente nulo. El haz iónico es un haz autocolisionante en el eje del MIGMA. Además de los iones del haz, hay electrones fríos en el espejo magnético, lo que asegura la cuasineutralidad del plasma.

El radio del plasma es dos veces el radio de Larmor iónico, ya que todos los iones deben pasar, en algún instante, por el eje del sistema.

Parece razonable adoptar, entonces, para este caso el modelo de "Vlasov - fluido"<sup>(5)</sup>, discutido en capítulos anteriores; con  $\underline{E}_0 = 0$ ,  $f_0 = f_0(\epsilon_{\perp}, \epsilon_{\parallel}, P_{\theta})$ ; siendo  $f_0, \underline{E}_0$  la función de distribución iónica y el campo eléctrico a orden cero, y donde  $\epsilon = \epsilon_{\perp} + \epsilon_{\parallel}$  es la

energía total iónica, siendo  $\epsilon_{\perp}$  la parte de esa energía asociada al movimiento paralelo al eje de simetría y  $\epsilon_{\parallel}$  la parte asociada al movimiento perpendicular a ese eje,  $P_{\theta}$  es el momento angular canónico de los iones ( $P_{\theta} \approx 0$ ).

El campo magnético a orden cero  $\underline{B}_0$  debería, estrictamente hablando, calcularse en forma autoconsistente con  $f_0$ , siendo además sus líneas de fuerza sólo aproximadamente paralelas al eje del plasma. Sin embargo, para el estudio de muchas inestabilidades es posible asumir  $\underline{B}_0 = B_0(r) \hat{z}$  donde  $\hat{z}$  es el versor en la dirección del eje de simetría, elegido como eje  $z$ , y  $r$  la coordenada radial, si se usan coordenadas cilíndricas. Esto implica asumir simetría de traslación (además de la de rotación) en la dirección del eje  $z$ . Luego, las constantes de movimiento (de los iones) son la energía  $\epsilon$ , el momento angular canónico  $P_{\theta}$ , y el impulso según  $z$ ,  $p_z = Mv_z = Mv_{\parallel}$ ; o equivalentemente, siendo  $\epsilon_{\parallel} = \frac{M}{2} v_{\parallel}^2 = \frac{p_z^2}{2M}$ , se pueden considerar como constantes de movimiento  $\epsilon_{\perp}, \epsilon_{\parallel}, P_{\theta}$ ; por lo que se supuso  $f_0 = f_0(\epsilon_{\perp}, \epsilon_{\parallel}, P_{\theta})$ .

El campo  $\underline{B}_0$  puede calcularse autoconsistentemente con  $f_0^{(4)}$ , pero también se lo puede "modelar" (asumiendo que existen corrientes externas), siendo entonces en forma aproximada<sup>(3)</sup>

$$\underline{B}_0 = B_0(r) \hat{z}; \quad B_0(r) = \beta_0(1 - \alpha r^2); \quad (V.1)$$

lo que simplifica el cálculo numérico. Asimismo, con este mismo fin, asumiremos una función de distribución

$$f_0 = [\theta(\epsilon_{\perp} - \epsilon_0 + \Delta\epsilon) - \theta(\epsilon_{\perp} - \epsilon_0 - \Delta\epsilon)] \theta(\Delta p - |p_{\theta}|) g(\epsilon_{\parallel}), \quad (V.2)$$

donde  $\theta(x)$  es la función "escalón" de Heaviside, que vale 1 si  $x \geq 0$ , y vale 0 en caso contrario.

Para el estudio de las inestabilidades en acanaladura (flute, en inglés), en que  $k_z = 0$ , la forma de  $g(\epsilon_{\parallel})$  es irrelevante.

Las ecuaciones básicas del modelo de "Vlasov - fluido", a primer orden, son entonces

$$\hat{A}_{\perp} \cdot \underline{\xi} = \int d^3p_{\perp} \underline{j} f_1 = \sum_r \gamma_r \int d^3p_{\perp} \underline{j} \mathcal{W}_r, \quad (V.3)$$

que es la ecuación para el desplazamiento electrónico  $\underline{\xi}$ ; donde

$$\hat{A}_{\perp} \cdot \underline{\xi} \equiv \frac{1}{4\pi} \left\{ (\underline{\nabla} \times \underline{B}_0) \times [\underline{\nabla} \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0)] + [\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0)] \times \underline{B}_0 \right\} +$$

$$+ \frac{Q}{c} n_0 (\dot{\underline{\xi}} \times \underline{B}_0) - \frac{1}{c} \underline{j}_0 \times [\underline{\nabla} \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0)] + \frac{Q^2}{Mc^2} n_0 (\underline{\xi} \times \underline{B}_0) \times \underline{B}_0 ;$$

$$\underline{v}_0 \equiv (\underline{\mathcal{E}} - \frac{Q}{c} \underline{A}_0) \frac{1}{M}; \quad \underline{j} \equiv \frac{Q}{c} (\underline{v}_0 \times \underline{B}_0); \quad (V.4)$$

aquí se usó que  $\underline{E}_0 = 0$ ,  $\underline{A}_0$  es el potencial vector a orden cero,

$Q$  es la carga y  $M$  la masa de un ión,  $n_0$  es la densidad iónica y  $\underline{j}_0$  la corriente del plasma, ambas a orden cero; y además la ecuación de Vlasov, escrita en la forma

$$\dot{\gamma}_r + i\mu_r \gamma_r = iK_r \langle \mathcal{W}_r | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle \left( f_1 = \sum_r \gamma_r \mathcal{W}_r ; \langle a | b \rangle \equiv \int d^3x d^2p_{\perp} a^* b \right), \quad (V.5)$$

donde  $\underline{x}$  es la posición y  $\underline{p}$  el impulso canónico de un ión, cu-

yo hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2M} \left( \underline{p} - \frac{Q}{c} \underline{A} \right)^2 = H_0 + H_1; \quad H_1 = \underline{J} \cdot \underline{\xi}; \quad H_0 = \frac{M}{2} v_0^2 \quad (V.6)$$

Se ha elegido una "medida" en que el potencial escalar es nulo, y el potencial vector a primer orden es

$$\underline{A}_1 = \underline{\xi} \times \underline{B}_0 \quad (\underline{\xi} \cdot \underline{B}_0 = 0) \quad (V.7)$$

El potencial vector a orden cero,  $\underline{A}_0$ , está orientado según  $\hat{e}_\theta$ . Además las funciones  $\mathcal{W}_r$  forman, en el espacio de las funciones de  $\underline{x}, \xi$ , una base propia de autofunciones del Liouvillano a orden cero  $\hat{L}_0$ , con autovalores  $i\mu_r$ . Luego es

$$\hat{L}_0 \mathcal{W}_r = i\mu_r \mathcal{W}_r; \quad \langle \mathcal{W}_r | \mathcal{W}_{r'} \rangle = \delta_{r r'}; \\ \sum_r \mathcal{W}_r^*(\underline{x}, \xi) \mathcal{W}_r(\underline{x}', \xi') = \delta(\underline{x} - \underline{x}') \delta(\xi - \xi') \quad (\hat{L}_0 \equiv [ \quad , H_0 ] ). \quad (V.8)$$

Si, como hemos supuesto, se usan coordenadas cilíndricas, la dependencia con  $z$  y  $\theta$  de las funciones  $\mathcal{W}_r$  es sólo por un factor  $\sim \exp(ik_z z + im\theta)$ , y si se supone  $f_0 = f_0(\epsilon, p_\theta, p_z)$ , con  $p_z = Mv_z$ ,  $K_r$  resulta ser

$$K_r = \mu_r \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} + m \frac{\partial f_0}{\partial p_\theta} + k_z \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \quad (V.9)$$

En particular, si  $k_z = 0$ , como ocurre para los modos "flute", y  $f_0$  es la dada en (V.2), como  $\epsilon_{\parallel} = p_z^2/2M$ ,  $\epsilon_{\perp} = \epsilon - \epsilon_{\parallel}$ , resulta de (V.9)



$$K_r = \mu_r \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_{\perp}} + m \frac{\partial f_0}{\partial P_{\theta}} ;$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_{\perp}} = [ \delta(\epsilon_{\perp} - \epsilon_0 + \Delta\epsilon) - \delta(\epsilon_{\perp} - \epsilon_0 - \Delta\epsilon) ] \cdot$$

$$\cdot \theta(\Delta P - |P_{\theta}|) g(\epsilon_{\parallel}) ; \quad (V.10)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial P_{\theta}} = [ \theta(\epsilon_{\perp} - \epsilon_0 + \Delta\epsilon) - \theta(\epsilon_{\perp} - \epsilon_0 - \Delta\epsilon) ] \delta(\Delta P - |P_{\theta}|) g(\epsilon_{\parallel}) .$$

La aparición de las  $\delta$  de Dirac en las expresiones de las derivadas de  $f_0$  simplifica el cálculo, ya que  $K_r$  se usa como factor en el integrando de una integral múltiple sobre  $\epsilon_{\perp}$ ,  $\epsilon_{\parallel}$  y  $P_{\theta}$  (o, si se prefiere, en  $\epsilon$ ,  $P_{\theta}$ ,  $p_z$ ), implícita en el índice  $r$ , que es continuo y múltiple. Este es el motivo de la elección de la  $f_0$  dada en (V.2), ya que así se reduce la parte numérica del trabajo. Las expresiones de los  $\mu_r$  y las  $W_r$  son las siguientes <sup>(6)</sup>

$$\mu_r = n\Omega_0 + m\omega_d + k_z v_d ;$$

$$W_r(E, P_{\theta}, p_z, \tau, \theta, z) = d_r \delta(E - E_0) \delta(P_{\theta} - P_0) \delta(p_z - p_0) e^{im\theta + ik_z z} \cdot e^{i[n\Omega_0\tau - m\tilde{\theta}(\tau) - k_z \tilde{z}(\tau)]} ; \quad (V.11)$$

donde el índice múltiple  $r$  contiene los índices continuos  $E_0$ ,  $P_0$ ,  $p_0$ ,  $k_z$  y los índices discretos  $n$ ,  $m$ ;  $d_r$  es un factor de normalización para  $W_r(E, P_{\theta}, p_z, \tau, \theta, z)$ ,  $\tau$  es la variable canónicamente conjugada a  $H_0$  (o sea, el tiempo, medido sobre la órbita iónica no perturbada), siendo ( $r$  es la coordenada cilíndrica radial)

$$\begin{aligned}
 d\tau &= \frac{dr}{|v_r|}; \quad \tau = \int_0^\tau d\tau'; \quad T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \int_0^{T_0} d\tau = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{|v_r|}; \\
 w_d &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left( \frac{\partial H_0}{\partial P_\theta} \right) d\tau; \\
 v_d &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} d\tau \left( \frac{\partial H_0}{\partial p_z} \right); \quad \tilde{\theta}(\tau) = \int_0^\tau d\tau' \left( \frac{\partial H_0}{\partial P_\theta} \right) - w_d \tau; \\
 \tilde{z}(\tau) &= \int_0^\tau d\tau' \left( \frac{\partial H_0}{\partial p_z} \right) - v_d \tau; \tag{V.12}
 \end{aligned}$$

en donde  $v_r \equiv \dot{r}$ , y  $r_1$  y  $r_2$  son los "puntos de retroceso" de la órbita iónica, para los cuales  $v_r = 0$ . Claramente,  $T_0$  es el período correspondiente a una órbita iónica sin perturbar,  $\Omega_0$  la frecuencia de ciclotrón,  $w_d$  la frecuencia de deriva. En nuestro caso, en que  $\underline{A}_0$  no tiene componentes según  $z$ , es  $v_d = v_{||}$  (que es una constante) y  $\tilde{z}(\tau) = 0$  siempre. Si  $\underline{B}_0$  es el dado en (V.1),  $\underline{A}_0$  se dirige según  $\hat{e}_\theta$ , y vale

$$\underline{A}_0 = \frac{B_0 r}{2} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} r^2 \right) \hat{e}_\theta. \tag{V.13}$$

Se tiene, obviamente

$$v_\theta = \left( \frac{P_\theta - \frac{Q}{c} r A_0}{Mr} \right); \quad v_r \equiv \pm \sqrt{\frac{2}{M} \left( \epsilon_\perp - \frac{M}{2} v_\theta^2 \right)} \quad (\epsilon = \epsilon_\perp + \epsilon_{||}). \tag{V.14}$$

Observemos que  $\tilde{\theta}(\tau)$  es el ángulo  $\theta$ , en el instante  $\tau$ , descontada la deriva ( $w_d \tau$ ).

Nuestro cálculo debe entonces comenzar por una determinación numérica de la órbita de un ión del plasma, en ausencia de perturbaciones, para obtener así los parámetros de dicha órbita, o sea  $\Omega_0$ ,  $w_d$ , etc. ; y además determinar numéricamente las funciones  $r(\tau)$ ,  $\tilde{\theta}(\tau)$  que dan las coordenadas  $(r, \theta)$  en función del tiempo medido sobre la órbita,  $\tau$  ( $\theta$  y  $\tilde{\theta}$  sólo se diferencian en la "derivada" angular  $w_d \tau$ ). Esta órbita se calcula sólo en el plano  $(x, y)$  o  $(r, \theta)$ , ya que  $z = v_{\parallel} \tau$ .

Para la órbita, en el caso que nos interesa  $P_{\theta} \approx 0$ , en lugar de usar coordenadas polares  $(r, \theta)$ , es preferible usar coordenadas cartesianas  $(x, y)$  a fin de evitar la singularidad de las coordenadas polares en  $r = 0$ , haciendo luego, para cada  $\tau$ , el pasaje de  $(x, y)$  a  $(r, \theta)$  para hallar las funciones  $r(\tau)$ ,  $\tilde{\theta}(\tau)$ . Así, la órbita resulta de integrar, en coordenadas cartesianas, las ecuaciones de movimiento no perturbadas de un ión del plasma, es decir las que corresponden al hamiltoniano  $H_0$ . Esto se efectúa, en forma numérica, mediante una rutina de integración de ecuaciones diferenciales basada en el método de Runge-Kutta,<sup>(7,8,9)</sup> lo que permite calcular  $\Omega_0$ ,  $w_d$ , etc. y las funciones  $r(\tau)$ ,  $\tilde{\theta}(\tau)$ ; así como los "puntos de retroceso"  $r_1$  y  $r_2$ , para los cuales  $v_r = 0$ . Valores intermedios de  $r$  y  $\tilde{\theta}$  en función de  $\tau$ , que no resultan directamente de la integración numérica, pueden interpolarse mediante una rutina apropiada.

De (V.5) resulta (si  $\gamma_r \sim e^{-i\omega t}$ )

$$\gamma_r = \frac{\kappa_r \langle \mathcal{W}_r | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle}{(\mu_r - \omega)} \quad (V.15)$$

Por otra parte, de (V.3) se deduce

$$\langle \underline{\xi} \cdot | \hat{\underline{A}} \cdot \underline{\xi} \rangle - \sum_r \gamma_r \langle \underline{j} \cdot \underline{\xi} | \mathcal{W}_r \rangle = 0 \quad (\text{V.16})$$

Usando (V.15) y (V.16), se tiene que la "funcional de dispersión" del plasma es

$$\Delta(\underline{\xi}^*, \underline{\xi}) \equiv \langle \underline{\xi} \cdot | \hat{\underline{A}} \cdot \underline{\xi} \rangle - \sum_r \frac{\kappa_r \langle \underline{j} \cdot \underline{\xi} | \mathcal{W}_r \rangle \langle \mathcal{W}_r | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle}{(\mu_r - \omega)} \quad (\text{V.17})$$

y que debe ser (por (V.15) y (V.16))

$$\Delta(\underline{\xi}^*, \underline{\xi}) = 0 \quad (\text{V.18})$$

La relación de dispersión del plasma es entonces (V.18), con tal que se especifique la forma de los modos normales  $\underline{\xi}$ . Si se elige una base del espacio de funciones de  $\underline{x}$ ,  $\{f_e(\underline{x})\}$  que satisfaga las condiciones de borde del problema, basta desarrollar a  $\underline{\xi}$  en esta base para obtener la relación de dispersión en forma algebraica

$$\sum_e \Delta_{ee'} \alpha_{e'} = 0 \left( \Delta_{ee'} \equiv \frac{\partial^2 \Delta(\underline{\xi}^*, \underline{\xi})}{\partial \alpha_e^* \partial \alpha_{e'}} ; \quad \underline{\xi}(\underline{x}) = \sum_e \alpha_e f_e(\underline{x}) \right) \quad (\text{V.19})$$

Las frecuencias características del problema se obtienen como raíces de la ecuación

$$\det((\Delta_{ee'})) = 0 \quad (\text{V.20})$$

La matriz  $((\Delta_{ee'}))$  es, en principio, infinita. Si la base  $\{f_e(\underline{x})\}$  es tal que los modos  $\underline{\xi}$ , que son soluciones de (V.18),

son funciones parecidas a las de la base (lo que, en principio, no se puede saber hasta resolver el problema), es posible lograr aproximar  $((\Delta_{\rho\rho}'))$  por una matriz de pequeñas dimensiones, lo que permite la resolución numérica de (V.20) (buscando raíces en el plano complejo), que da las frecuencias de los modos que se pueden excitar en el plasma. Estos se determinan, a continuación, mediante la ecuación (V.19).

Para configuraciones con simetría cilíndrica, la base de funciones  $\{f_{\rho}(\mathbf{x})\}$  que satisface las condiciones de borde correspondientes y que se usa corrientemente en este tipo de problemas,<sup>(10)</sup> es la de las funciones dadas en (II.68).

Lamentablemente, en nuestro caso, al usar esta base, la matriz  $((\Delta_{\rho\rho}'))$  resultó demasiado grande para las facilidades de cálculo disponibles.

Así pues, para poder resolver la relación de dispersión del problema hubiéramos necesitado una computadora que nos permitiera tratar con matrices cubiertas (es decir, con elementos alejados de la diagonal); o bien encontrar una nueva base  $\{f_{\rho}(\mathbf{x})\}$ , tal que la matriz  $((\Delta_{\rho\rho}'))$  resultara más tratable.

Ahora bien, no existe un criterio claro de como construir una tal base. Por ello, se optó por recurrir a un cálculo variacional, que aunque menos detallado, es más accesible a las facilidades de computación a nuestro alcance.

Como ejemplo de la potencialidad del método nos hemos concentrado en estudiar la estabilidad de un espejo MCGMA frente a los modos "flute" ( $k_z = 0$ ), con  $m = 1$ . De estos modos elegimos un despla-

zamiento rígido de la columna de plasma, por lo cual es

$$\underline{\xi} = \gamma_1 \underline{e}_r + \gamma_2 \underline{e}_\theta ; \quad \gamma_1 = \gamma_0 e^{i\theta} ; \quad \gamma_2 = +i\gamma_1 ; \quad (V.21)$$

donde  $\gamma_0$  es constante (no depende de r).

De acuerdo con lo visto en el capítulo anterior, una condición suficiente de estabilidad del plasma es que sea  $\delta^2\eta < 0$  para cualquier perturbación, donde  $(\delta^2\eta)$  es el exceso de entropía definido en el capítulo anterior.

Además vimos que, en lugar de la condición de estabilidad  $\delta^2\eta < 0$ , es equivalente usar la condición suficiente  $Re(\Delta) < 0$ , siendo  $\Delta$  la "funcional de dispersión" dada en (V.17).

La relación entre  $\delta\mathcal{C} \equiv -Re(\Delta)$  y  $(-\delta^2\eta)$  la hemos discutido en detalle en el capítulo anterior, así como la posibilidad de intercambiarlas como función de Lyapunov. Explícitamente es

$$-\delta^2\eta = \sum_r \frac{K_r}{\mu_r} \left( -\frac{|w|^2}{|\mu_r - w|^2} + 1 \right) | \langle \mathcal{W}_r | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle |^2 - \langle \underline{\xi} | \hat{\Lambda}_{=1} \underline{\xi} \rangle, \quad (V.22)$$

$$\delta\mathcal{C} = \sum_r \frac{K_r [\mu_r - Re(w)]}{|\mu_r - w|^2} | \langle \mathcal{W}_r | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle |^2 - \langle \underline{\xi} | \hat{\Lambda}_{=1} \underline{\xi} \rangle, \quad (V.23)$$

donde es

$$\hat{\Lambda}_{=1} \underline{\xi} = \hat{\Lambda}_{=1} \underline{\xi} + \hat{\Lambda}_{=2} \dot{\underline{\xi}} \quad \left( \hat{\Lambda}_{=2} \dot{\underline{\xi}} \equiv \frac{q}{c} n_0 (\underline{\xi} \times \underline{B}_0) \right) \quad (V.24)$$

no incluyendo los operadores  $\hat{\Lambda}_{=1}, \hat{\Lambda}_{=2}$  derivadas temporales (alguno puede incluir derivadas espaciales), a diferencia de  $\hat{\Lambda}_{=1}$ , dado en la expresión (V.4), que sí las incluye.

Las sumas sobre el índice múltiple r, en (V.22) y (V.23), implican integrales en  $P_\theta, \epsilon_{||}, \epsilon_{\perp}$  y suma en el índice n, definido en

(V.11). En principio, también habría que sumar en  $m$  y  $k_z$ , pero el valor de estos índices se fija al elegir  $\underline{\xi}$ , que se da en (V.21).

La sumatoria en  $n$  debería hacerse, en (V.22) o (V.23), desde  $-\infty$  a  $+\infty$ , pero en la práctica esta serie se corta en algún  $n$  finito. Los denominadores resonantes, dependientes de la frecuencia, que aparecen en (V.22) y (V.23), inciden de distinta manera en las funciones de Lyapunov  $(-\delta^2\eta)$  y  $\delta\mathcal{L}$ . Esta última tiene un comportamiento menos divergente sobre la resonancia, debido al numerador  $\mu_r - \text{Re}(w)$ , y por esta razón usaremos la condición de estabilidad  $\delta\mathcal{L} > 0$ .

En la práctica puede verse, evaluando la serie numéricamente, que, a bajas frecuencias, basta considerar sólo los términos con  $|n| \leq 1$  ( $n = 0, 1, -1$ ).

Nuestra condición de estabilidad es pues  $\delta\mathcal{L} > 0$ , con  $(\delta\mathcal{L})$  dada en (V.23), donde

$$\langle a|b \rangle \equiv \int d^3x d^3p a^* b ; \quad \langle \underline{\xi}_- | \hat{\underline{\Lambda}} | \underline{\xi}_- \rangle = \int_{\text{plasma}} d^3x (\underline{\xi}_-^* \hat{\underline{\Lambda}} \underline{\xi}_-) ; \quad (\text{V.25})$$

y la suma sobre  $r$  implica integrales en  $P_\theta, \epsilon_\perp, \epsilon_\parallel$  y suma sobre  $n$ .

Reiteramos que  $\hat{\underline{\Lambda}}$  es el operador presentado en (V.4), lo mismo que  $\underline{J}$ , mientras que  $\mu_r, \tilde{W}_r$  son los expresados en (V.11);  $K_r$  se calculó en (V.10), y el  $\underline{\xi}$  que corresponde a un desplazamiento rígido se da en (V.21).

Todas las integrales necesarias para calcular  $\delta\mathcal{L}$  fueron hechas

numéricamente, usando el método de Romberg<sup>(8, 9)</sup>, salvo las triviales (como las integrales en  $\theta$ , en  $p_z$  o en  $a$ ), que se efectuaron directamente en forma analítica. Algunas integrales numéricas radiales (como la necesaria para calcular  $\langle W_r | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle$ ) se realizaron integrando en la variable  $\tau$ , definida en (V.12), en lugar de hacerlo en la variable radial, lo que simplifica el cálculo. Cabe señalar que todas las integrales radiales se extienden sólo al volumen del plasma.

La expresión  $|\langle W_r | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle|^2$  se tabuló primero, para distintos valores de  $n$ ,  $P_\theta$  y  $\epsilon_\perp$  ( $\langle W_r | \underline{j} \cdot \underline{\xi} \rangle$  no depende de  $\epsilon_\parallel$ ), y luego, mediante interpolación numérica, se hallaron los valores usados en el cálculo de  $\delta\mathcal{E}$ .

Luego de algunos pasajes algebraicos,  $\delta\mathcal{E}$  puede expresarse en la siguiente forma

$$\delta\mathcal{E} = A + \nu A' + \nu B \operatorname{Re}(w) + \sum_r \left\{ K_r I_r \frac{[\mu_r - \operatorname{Re}(w)]}{[\mu_r - \operatorname{Re}(w)]^2 + \operatorname{Im}(w)^2} \right\}; \tag{V.26}$$

donde  $\nu$  es el parámetro de Budker por unidad de longitud<sup>(11)</sup> del plasma, definido como

$$\nu = N Q^2 / M c^2, \tag{V.27}$$

donde  $N$  es el número de iones que hay en un cilindro de plasma de altura unidad,  $Q$  es la carga y  $M$  la masa de un ión. Hacemos notar que  $K_r$ , dado en (V.9), es proporcional a  $\nu$ .

La presencia del parámetro  $\nu$  en los tres últimos términos de (V.26) indica que estas contribuciones son proporcionales a la



densidad del plasma. En cambio,  $A$  es esencialmente la energía magnética de la perturbación, y es una cantidad positiva.

La forma (V.2) supuesta para  $f_0$ , y la expresión (V.9) de  $K_r$  (con  $k_z = 0$ ), implican no sólo que la integral en  $\epsilon_{||}$  (o sea, en  $p_z$ ) de (V.26) es trivial, sino que la integral doble en  $\epsilon_{\perp}$  y  $P_{\theta}$  (todas ellas indicadas por la suma en  $r$ ) se reduce, en realidad, a la suma de cuatro integrales simples, que se efectuaron numéricamente.

No escribimos aquí  $A$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $I_r$  en forma explícita, por ser sus expresiones bastante complejas.

Si se toman frecuencias estrictamente reales, la expresión (V.26) es divergente, por lo cual calculamos  $\delta \mathcal{E}$  para distintos valores de  $\text{Re}(w) \equiv w_r$  y  $\sigma \equiv \text{Im}(w)$  pequeña, pero no nula, a efectos de estudiar la estabilidad marginal del MIGMA respecto al desplazamiento rígido (flute,  $k_z = 0$ ,  $m = 1$ ) dado en (V.21).

Siguiendo a Sudan y Rosenbluth<sup>(12)</sup>, podemos afirmar que si  $\delta \mathcal{E} > 0$  al variar  $w_r$  en cierta zona de frecuencias, con  $\sigma$  pequeña y positiva, el plasma es estable frente al modo en estudio en dicho rango de frecuencias, aunque a frecuencias mayores podría aparecer tal inestabilidad.

La frecuencia de ciclotrón iónica del plasma es  $w_{ci} \sim 24$  MHz y la de deriva resulta ser  $w_d \sim 10^{-2} w_{ci}$ . Hemos analizado numéricamente la zona de bajas frecuencias hasta  $w = 10 w_d \sim 2-3$  MHz, con  $\sigma = 10^{-12} w_{ci}$ , hallando que en todo el rango es  $\delta \mathcal{E} > 0$ , lo que asegura la estabilidad frente al modo. El valor de  $\sigma$  asu

451

mido garantiza que una eventual inestabilidad necesitaría un tiempo mayor o del orden de  $1/\sigma \sim 10^4$  segundos para desarrollarse, por lo cual no es detectable.

La causa de la estabilidad en este cálculo es la pequeñez del parámetro de Budker, que para la configuración más reciente del experimento Migma vale  $10^{-4}$  ( $N \sim 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ ). Esto hace que la contribución magnetohidrodinámica  $A$  a la energía  $\int \mathcal{E}$  domine el criterio de estabilidad. Sin embargo, tal circunstancia muestra más bien que el cálculo realizado no es realista ya que, primero, el plasma es un caso extremo en lo referente a su radio de Larmor, y no se espera de ninguna manera que sea dominado por efectos MHD. Segundo, el desplazamiento rígido que sufre la columna de plasma pertenece a la categoría de los intercambios de tubos de flujo que no alteran la energía magnética, y que de acuerdo al clásico análisis de Rosenbluth y Longmire<sup>(13)</sup> son, por esta particularidad, potencialmente peligrosos para el desarrollo de la inestabilidad "flute", ya que no necesitan energía para alimentar una variación del campo magnético.

Lo que ocurre tiene su explicación en la forma (V.1) asumida para el campo magnético. Esta expresión sencilla se eligió por tener suficiente simetría para que las órbitas, aun derivando en el plano horizontal - y por lo tanto dando la posibilidad de separar cargas, que es intrínseco al modo "flute" - tuvieran libertad de movimiento en la dirección vertical. Pero dicho campo, que es una modelización muy grosera, aunque conveniente, del campo mag-

nético de un espejo simple, supone la existencia de corrientes externas distribuidas en el seno del plasma con la ley (en unidades mks)

$$\underline{j}^{\text{ext}} = \underline{\nabla} \times \underline{B}_0 = 2\alpha B_0 r \underline{e}_\theta . \quad (\text{V.28})$$

Puede entonces demostrarse sin dificultad que la estabilidad observada es la resultante de una fuerza recuperadora de interacción entre tales corrientes externas (inexistentes en el experimento verdadero), y la corriente inducida por el desplazamiento del plasma

$$\underline{j}^{\text{ind}} = \underline{\nabla} \times \underline{Q} , \quad \underline{Q} = \underline{\nabla} \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0) . \quad (\text{V.29})$$

Si, por ejemplo,  $\underline{\xi} = \xi \underline{e}_x$ , resulta

$$\underline{j}^{\text{ind}} = -2\alpha B_0 \xi \underline{e}_y . \quad (\text{V.30})$$

Luego, si  $\xi > 0$ , las corrientes (V.28) y (V.30) son antiparalelas, y por lo tanto se repelen, en el semiplano  $x > 0$ . Lo opuesto ocurre para  $x < 0$ . Es decir, el plasma está anclado a los conductores externos, efecto que enmascara completamente al mecanismo del modo "flute".

Para recuperar la física de esta inestabilidad es necesario eliminar las corrientes externas espúreas de la contribución  $A$  a la expresión (V.26) de  $\delta \mathcal{E}$ . A primer orden en el parámetro de Budker, puede verse que ésta es la única modificación necesaria para producir un tratamiento correcto del problema. Aunque grosera

mente aproximado, el campo (V.1) describe en los términos de orden  $\nu$ , lo esencial del modo investigado, que es la deriva de los iones. Sin embargo, si es necesario retener en  $A$ , al mismo orden de aproximación, la corriente diamagnética de los propios iones, que obviamente es proporcional al parámetro de Budker  $\nu$ . Formalmente, en  $A$  debe reemplazarse el término

$$\underline{\nabla} \times \underline{Q} = -(\underline{\xi} \cdot \underline{\nabla})(\underline{\nabla} \times \underline{B}_0)$$

por

$$\underline{\nabla} \times \underline{Q} = -(\underline{\xi} \cdot \underline{\nabla}) \underline{j}_0^{\text{diam.}} \quad (V.31)$$

De esta forma, todas las contribuciones a  $\delta \mathcal{E}$  dependen exclusivamente de las cantidades de plasma y son de magnitud semejante. El término (V.31) torna al tributo de  $A$  al principio de energía en una cantidad proporcional a la densidad, o sea al parámetro de Budker  $\nu$ . Con ello todos los términos en (V.26) son proporcionales a  $\nu$ , y el signo de  $\delta \mathcal{E}$  resulta independiente de  $\nu$ , o sea de la densidad del plasma.

En realidad, si se tomase en cuenta el diamagnetismo del plasma y se corrigiese consecuentemente el campo  $\underline{B}_0$ , dado en (V.1), por medio de un cálculo autoconsistente, aparecerían en  $\delta \mathcal{E}$  términos que tendrían una dependencia no lineal con la densidad del plasma, y luego la estabilidad del plasma podría depender de la densidad. Este cálculo más exacto implicaría complejidades que no abordaremos aquí. Nuestro cálculo será correcto, sin embargo, a bajas densidades.

Luego de eliminar el término espúreo como antes se indicó, se

encuentra que  $\delta\mathcal{E}$  se hace negativo debido a los términos desestabilizantes, en particular el asociado al gradiente de presión, que es varias veces mayor que la contribución de los términos resonantes o la del término lineal en la frecuencia. En conclusión, el plasma es inestable ( $\delta\mathcal{E} < 0$ ) debido a que los términos asociados al carácter finito del radio de Larmor no logran compensar la desestabilización producida por el gradiente expansivo de presiones, el cual es el causante de la inestabilidad "flute" ya en los plasmas de radio de Larmor pequeño.

El que el radio de Larmor grande no estabilice el plasma frente a un modo "flute" con  $m = 1$ , es debido a que el campo eléctrico perturbado, en este modo, es uniforme, y no se produce el desplazamiento relativo de cargas que lo estabiliza, según se mencionó en el Capítulo I.

La Inestabilidad "flute" no es observada en el experimento MIGMA<sup>(14)</sup>.

No obstante, existen otros argumentos para explicar la estabilidad del MIGMA, por ejemplo la presencia cercana de conductores metálicos y de una vaina conductora de plasma que envuelve al MIGMA, y que pueden proveer las cargas necesarias para cortocircuitar los campos eléctricos responsables de la inestabilidad<sup>(15,16)</sup>.

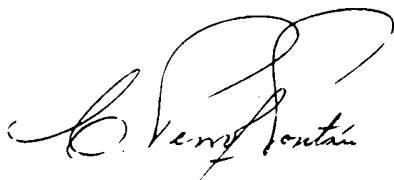
El cálculo aquí presentado es sólo un ejemplo de las posibles aplicaciones de los criterios de estabilidad logrados. Una investigación sistemática nos llevaría mucho más allá de los límites prefijados para esta tesis. En particular, el tratamiento numérico requiere mayor esfuerzo y un "hardware" más poderoso para poder abordar el análisis de los modos. Así se podrán investigar otras

inestabilidades de gran interés, pero de mayor frecuencia.

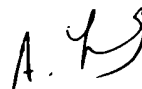
Lo que queda establecido firmemente con este trabajo es el marco teórico, constituido por un fundamento termodinámico sólido de los principios de estabilidad, aplicación que por primera vez se intenta en la física del plasma, partiendo de la moderna termodinámica irreversible. Esta formulación se ha acoplado con un tratamiento espectral del operador de Liouville en la ecuación de Vlasov, que es el método idóneo para tratar los problemas de equilibrio en plasmas inhomogéneos<sup>(5)</sup>.

El resultado es una presentación general y unificada de los múltiples "principios de energía" en boga.

Las perspectivas para la continuación de esta investigación son interesantes, ya que la versatilidad del enfoque permite abordar nuevos y complejos problemas de la física del plasma.



Dr. Constantino Ferro Fontán



Lic. Aníbal Carlos  
Sicardi Schifino

REFERENCIAS DEL CAPITULO V

- 1.- F. Gratton: Atomkernenergie 32, 121 (1978)
- 2.- B.C. Maglich: Nuc. Instr. & Meth. 151, 1 (1978)
- 3.- B.C. Maglich: Atomkernenergie 32, 100 (1978)
- 4.- F. Gratton & L. Lara: Proc. First Latin American Conf. on Plasma Phys. & Controlled Fusion, Cambuquira, Brasil (1982)
- 5.- H.R. Lewis & K.R. Symon: J. Math. Phys. 20 (3), 413 (1979)
- 6.- C.E. Seyler & H.R. Lewis: J. Plasma Phys. 27 (1), 37 (1982)
- 7.- E. Isaacson & H. B. Keller: "Analysis of Numerical Methods" (Wiley)
- 8.- A. Ralston: "Introducción al Análisis Numérico" (Limusa-Wiley, 1970)
- 9.- F. Scheid: "Análisis Numérico" (Schaum; McGraw-Hill, 1972)
- 10.- C.E. Seyler: Phys. Fluids 22 (12), 2324 (1979)
- 11.- Uhm & Davidson: Phys. Fluids 22 (4), 718 (1979)
- 12.- R.N. Sudan & M.N. Rosenbluth: Phys. Fluids 22 (2), 282 (1979)
- 13.- M.N. Rosenbluth & C.L. Longmire: Ann. Phys. 1, 120 (1957)
- 14.- S. Menasian et al: Aneutronic Energy Labs. Rep., Sept. 1983 (AEL - 83-14)
- 15.- M. Wickham & G. Vandegrift: Phys. Fluids 25, 52 (1982)
- 16.- D. Segal: Phys. Fluids 26, 2565 (1983)