Conjuntos espectrales

Zalduendo, Ignacio Martín

1983

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

CONJUNTOS ESPECTRALES

POR

IGNACIO MARTIN ZALDUENDO

DIRECTOR DE TESIS

DR. ANGEL LAROTONDA

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TITULO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

1983

Agradecimientos

Este trabajo fue escrito entre 1980 y 1983, período durante el cual conté con el apoyo de becas del CONICET, sin las cuales la realización de esta tesis hubiera sido imposible.

Silvia López tipeó el manuscrito en tiempo récord. Su paciencia y sentido del humor habituales no flaquearon, aún bajo el constante asedio del autor.

En estos cuatro años he ido acumulando, a través de charlas con colegas y amigos de la UBA, el IAM, y el IMAF, una creciente deuda en sugerencias, ideas y aliento. Espero, quizás ingenuamente, poder retribuirles su ayuda algún día.

A Angel Larotonda, director de tesis, maestro y amigo; no podré retribuir nunca su ayuda, mi deuda con él es demasiado grande. Sólo puedo agradecerle sincera y profundamente.

Ignacio Zalduendo

Olivos, 22 de Noviembre de 1983

Indice

Introducción 1

Capítulo I: El cálculo funcional holomorfo 4

§1- Abiertos finitamente determinados 5
§2- Funciones holomorfas sobre A' y β-convexidad 8
§3- Gérmenes de funciones holomorfas 17
§4- El cálculo funcional 18

Capítulo II: Conjuntos espectrales y variedades analíticas 22

§1- Morfismos A-directos 23
§2- Funciones holomorfas sobre A^n 27
§3- La variedad A_M 33
§4- El funtor $A_{(\ )}$ 45
§5- El fibrado tangente 46
§6- A_M y A^M 48

Capítulo III: Conjuntos espectrales y espacios homogeneos 50

§1- Conjuntos espectrales y grupos de Lie 50
§2- Definición de A_F 53
§3- El cálculo funcional generalizado 62
§4- $A_{(G/_H)}$ y $^{A_G}/_{A_H}$ 65
§5- El teorema de Novodvorskii-Taylor 67
§6- Conjuntos espectrales y morfismos de álgebras 69

Capítulo IV: Ejemplos y aplicaciones 73

§1- $GL_n(A)$ 73
§2- Ceros de funciones analíticas 74
§3- Unimodulares 76
§4- La esfera de Riemann 77
§5- exp(A) 80

Apéndice: 82

Bibliografía: 88

Introducción

A partir del trabajo de Arens y Calderón [2] se inicia una serie de investigaciones sobre los subconjuntos de A^n (A es un álgebra de Banach compleja) que pueden ser caracterizados como conjuntos de soluciones de un sistema de ecuaciones analíticas $F_i(a_1,..,a_n) = 0$, $1 \leq i \leq m$, donde las F_i son funciones analíticas definidas en un abierto de $\mathbb{C}^n$ que contiene al espectro simultáneo $sp(a_1,..,a_n)$, y tales que las soluciones escalares del sistema $F_i(z_1,..,z_n) = 0$, $1 \leq i \leq m$ formen una variedad analítica.

El planteo formal del problema se modifica luego del trabajo de Craw [7] en el que se formula un cálculo funcional holomorfo global

$$O(X) \longrightarrow A$$

donde X indica el espacio de caracteres de A; esta formulación contiene a los cálculos "parciales"

$$O(sp(a_1,..,a_n)) \longrightarrow A$$

eliminando condiciones de compatibilidad que resultan ser innecesarias [23].

Con esta versión es que Raeburn y Taylor obtienen los conjuntos espectrales A_M como imágenes del cálculo funcional

$$O(X,\mathbb{C}^n) \longrightarrow A^n$$

restringido a $O(X,M)$; ello requiere que M sea una subvariedad analítica de $\mathbb{C}^n$. El objetivo de esta construcción es el siguiente: cuando M es además un espacio homogeneo complejo, combinando la misma con resultados de Ramspott [18] se puede obtener la biyección del teorema de Novodvorskii-Taylor [22]

$$[X,M] \longleftrightarrow \pi_0(A_M)$$

que es particularmente interesante cuando M es un espacio clasificante. Mencionemos que esto no es directamente viable si se reemplaza A_M por su versión más ingenua $A^M = \{a \in A^n: sp(a_1,...,a_n) \subset M$ excepto en el caso semisimple en el que $A_M = A^M$, lo que justifica la introducción de los conjuntos espectrales a través del cálculo funcional global.

El presente trabajo se divide de la siguiente manera.

En el capítulo I se expone una versión del cálculo funcional holomorfo global, que es utilizada sistemáticamente a lo largo de todo el trabajo.

En el capítulo II se prueba que el conjunto espectral A_M es una subvariedad analítica de A^n, cuando M es un a subvariedad analítica de $\mathbb{C}^n$. Se construye además el fibrado tangente TA_M, cuyas fibras $T_a(A_M)$ resultan ser A-módulos proyectivos de rango igual a la dimensión de M. Si bien hay diferencias esenciales en los métodos utilizados, el espíritu de estas construcciones se asemeja al de [8]. Se prueba, asimismo, que $A^M = A_M + \mathrm{Rad}(A)^n$.

En el capítulo III se define A_M en el caso en que M es un espacio homogeneo complejo, no necesariamente contenido en $\mathbb{C}^n$, sobre el que actúa un grupo de Lie G, contenido en $\mathbb{C}^m$; ello requiere un estudio de la relación entre $O(X,G)$ y $O(X,M)$. El caso de un grupo de Lie general se reduce a éste mediante el teorema de Ado-Cartan.

Se construye también un cálculo funcional generalizado, válido para funciones entre espacios homogeneos, y se extiende el teorema de Novodvoskii-Taylor al caso de espacios homogeneos no contenidos en $\mathbb{C}^n$.

Finalmente, en el capítulo IV, se muestran algunos ejemplos de conjuntos espectrales, y aplicaciones de lo expuesto en los capítulos anteriores.

El cálculo funcional holomorfo

Introducción

Dada un álgebra de Banach conmutativa A, y elementos $a_1,..,a_n$ pertenecientes a A, cualquier polinomio de n variables $P \in \mathbb{C}[X_1,..,X_n]$ puede ser especializado en $a=(a_1,..,a_n)$. Esto define un morfismo de álgebras unitario

$$e_a: \mathbb{C}[X_1,..,X_n] \to A$$

También si $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa, tiene sentido $f(a)$. En efecto, existen $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}$, con $\alpha \in N_0^n$, tales que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \lambda_\alpha \; z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$$

Entonces la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \lambda_\alpha \, a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}$$

converge en A, puesto que la correspondiente serie con $\|a_i\|$ converge.

Si U es un entorno polinomialmente convexo de sp(a), espectro simultáneo de $a_1,\dots,a_n$, toda función holomorfa sobre U se puede aproximar por polinomios uniformemente sobre los compactos de U, y O(U) induce sobre $\mathbb{C}[X_1,..,X_n]$ una topología para la cual la evaluación es continua; luego se tiene también un único morfismo de álgebras unitario y continuo

$$O(U) \longrightarrow A \quad \text{tal que } z_i \longmapsto a_i .$$

Cabe preguntarse entonces hasta dónde se puede ampliar el conjunto de funciones que se pueden especializar en n elementos de A para producir un nuevo elemento de A.

La respuesta a esta pregunta la da el cálculo funcional holomorfo, de Arens y Calderón [2] . Cualquier función holomorfa en algún entorno de sp(a) se puede especializar en $a=(a_1,\dots,a_n)$. Se tiene así, para cada n-upla a de elementos de A, un morfismo de álgebras continuo

$$\theta_a\colon O(sp(a)) \longrightarrow A$$

donde O(sp(a)) es el álgebra de gérmenes de funciones holomorfas en sp(a); $O(sp(a)) = \varinjlim_{sp(a)\subset U} O(U)$.

Necesitaremos, en un sólo morfismo, todas estas flechas para las distintas uplas de elementos de A. Esto se logrará considerando funciones holomorfas en entornos del espectro X(A) como subconjunto del dual topológico A' de A.

§1.- En A' tendremos la topología débil, es decir la inducida por la inclusión $A' \subset \mathbb{C}^A$, éste último conjunto con la topología producto. De esta forma, un elemento γ_o de A' tiene una base de entornos formada por conjuntos de la forma

$$U_{\gamma_o} = \{\gamma \in A' : |\gamma(a_i) - \gamma_o(a_i)| < 1,\ i=1,\dots,n\}$$

Además, los elementos $a_1,\dots,a_n$ se pueden tomar linealmente independientes. Una vez hecho esto, si definimos

$$u = \hat{a}_1 \times\dots\times \hat{a}_n\colon A' \to \mathbb{C},\ \text{o sea } u(\gamma) = (\gamma(a_1),\dots,\gamma(a_n))$$

tendremos una función lineal, continua, y por la independencia lineal de los a_i, suryectiva. Luego, por el Teorema de la función abierta, u es abierta. $u(U_{\gamma_o})$ es el policilindro abierto de centro $u(\gamma_o)$ y radio 1 en $\mathbb{C}^n$. Notemos que para que un elemento de A' pertenezca a U_{γ_o}, sólo interesa su comportamiento sobre $a_1,\dots,a_n$.

Diremos entonces que U_{γ_o} *está finitamente determinado* por $a_1,\dots,a_n$; o simplemente por u. En general, si W es un abierto de A', diremos que está finitamente determinado por $v = \hat{b}_1 x \dots x \hat{b}_k$ (donde los b_i son linealmente independientes), si $W = v^{-1}(v(W))$. Por supuesto, la inclusión no trivial es la de derecha a izquierda, y dice que todo elemento de A' que coincida sobre $b_1,\dots,b_k$ con algún elemento de W, es también un elemento de W. Por esto, conviene pensar a veces a W como un cilindro infinito "sobre" el abierto v(W) de $\mathbb{C}^k$. Notemos también que para cada abierto U de $\mathbb{C}^k$, $v^{-1}(U)$ es finitamente determinado por v.

Distintas uplas de elementos linealmente independientes de A pueden determinar un mismo abierto, por ejemplo A' es finitamente determinado por cualquier upla.

Dado W, un abierto finitamente determinado de A', el conjunto {u: u determina a W }se puede ordenar parcialmente poniendo: $u \leqslant v$ si y sólo si $u = \pi_{mn} \circ v$ sobre W, donde $m \geqslant n$, y $\pi_{mn}: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ es la proyección sobre las n primeras coordenadas.

O sea, $u \leqslant v$ si y sólo si conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} & v(W) \arrow[dd, "\pi_{mn}"] \\ W \arrow[ur, "v"] \arrow[dr, "u"'] & \\ & u(W) \end{tikzcd}$$

Conviene probar acá algunas propiedades que necesitaremos sobre los abiertos de este tipo.

Proposición Sea W' un abierto finitamente determinado, y W un abierto finitamente determinado por u. Entonces existe un v que determina a W y a W' y tal que $v \geqslant u$.

D/ Si W' es finitamente determinado por $w = \hat{b}_1 \times \ldots \times \hat{b}_k$, y $u = \hat{a}_1 \times \ldots \times \hat{a}_n$, sea F el subespacio generado por $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k$; y sea $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m$ una base de F, y $v = \hat{a}_1 \times \ldots \times \hat{a}_m$.

Trivialmente, v determina a W. Veamos que determina a W', o sea que $v^{-1}(v(W')) \subset W'$. Si $v(\gamma) = v(\gamma_o)$ con $\gamma_o \in W'$, $\gamma(a_i) = \gamma_o(a_i)$ para $1 \leqslant i \leqslant m$. Como γ y γ_o son lineales, coinciden sobre F, en particular sobre b_j para $1 \leqslant j \leqslant k$, es decir $w(\gamma) = w(\gamma_o)$. Luego $\gamma \in w^{-1}(w(W')) = W'$.

Por otra parte, $u = \pi_{mn} \circ v$, entonces $v \geqslant u$.

Proposición Toda unión finita de abiertos finitamente determinados es un abierto finitamente determinado.

D/ Obviamente basta probarlo para dos abiertos, digamos W y W'. Por la proposición anterior, existe un v que determina a ambos. Luego

$$v^{-1}(v(W \cup W')) = v^{-1}(v(W) \cup v(W')) = v^{-1}(v(W)) \cup v^{-1}(v(W')) = $$
$$= W \cup W'. \quad \blacksquare$$

Proposición Todo compacto de A' tiene una base de entornos formada por abiertos finitamente determinados.

D/ Sea K compacto, y V un entorno de K. Para todo $\gamma \in K$, tomemos un entorno abierto finitamente determinado U_γ contenido en V. Alcanza con finitos para cubrir K, y la unión de éstos es finitamente determinada por la Proposición anterior.

§2.- Pasamos ahora a considerar funciones holomorfas sobre abiertos de A'. $f:U \to \mathbb{C}$ se llamará *holomorfa* cuando

i) Existen todas las derivadas direccionales complejas

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}, \text{ para todo } x \in U,\ y \in A'$$

y ii) f es localmente acotada.

El conjunto $O(U)$ de funciones definidas de esta forma sobre U forma un álgebra. Notemos que las transformadas de Gelfand de elementos de A, son elementos de O(A').Llamaremos β a la subálgebra de O(A') generada por estos elementos.β tendrá en O(A') un papel análogo al de los polinomios dentro de $O(\mathbb{C}^n)$.

La condición de acotación local que imponemos sobre las funciones holomorfas, obliga a que éstas sean localmente funciones de sólo finitas variables. En efecto, cada punto de A' tiene una base formada por cilindros donde un número finito de variables están acotadas, y las demás se mueven libremente. Como la función f es holomorfa y acotada sobre uno de éstos entornos, deberá ser constante de las variables que se mueven a lo largo del cilindro, que son todas salvo un número finito de ellas. Para decirlo más claramente, tenemos la siguiente Proposición:

<u>Proposición</u>: Son equivantes:

i) $f:U \to \mathbb{C}$ es holomorfa

ii) $\forall\ \gamma \in U$ existen: un entorno U_γ de γ , elementos $a_1,\dots,a_n$ linealmente independientes de A y $F \in O(u(U_\gamma))$ tales que $f = F \circ u$, donde $u = \hat{a}_1 \times \dots \times \hat{a}_n$.

D/ i) ⇒ ii) Sea $\gamma_o \in U$. Existe un entorno de γ_o contenido en U donde f es acotada. Como en A' tenemos la topología débil, podemos suponer que el entorno es de la forma

$$U_{\gamma_o} = \{\gamma \in A' : |\gamma(a_i) - \gamma_o(a_i)| < 1, i=1,..,n\}$$

donde $a_1,..,a_n$ son linealmente independientes.

Sea $u = \hat{a}_1 \times \ldots \times \hat{a}_n : A' \to \mathbb{C}^n$. u es lineal, continua y abierta. Luego $u(U_{\gamma_o})$ es un abierto de $\mathbb{C}^n$. Queremos definir una función $F \in O(u(U_{\gamma_o}))$ tal que $F \circ u = f$. Sea entonces

$$F(z) = f(\gamma) \ , \text{ si } \ z = u(\gamma)$$

Debemos verificar la buena definición de F: si $\gamma, \gamma' \in U_{\gamma_o}$ tales que $u(\gamma) = u(\gamma')$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $u(\gamma' - \gamma_o) = u(\lambda\gamma + (1-\lambda)\gamma' - \gamma_o)$, o sea que

$$|\lambda\gamma(a_i) + (1-\lambda)\gamma'(a_i) - \gamma_o(a_i)| = |\gamma'(a_i) - \gamma_o(a_i)| < 1 \text{ para todo}$$

$i \leqslant n$.

Luego $\lambda\gamma + (1-\lambda)\gamma' \in U_{\gamma_o}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Sea, ahora

$$: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \text{ tal que } \alpha(\lambda) = f(\lambda\gamma + (1-\lambda)\gamma').$$

Habíamos elegido U_{γ_o} de manera que f fuera acotada. Luego α resulta entera y acotada, es decir, una constante. Entonces $f(\gamma') = \alpha(0) = \alpha(1) = f(\gamma)$, y F está bien definida.

Sólo falta verificar que F es holomorfa sobre $u(U_{\gamma_o})$. Por el Teorema de Hartogs bastará ver la existencia de todas las derivadas parciales. Sea $z = u(\gamma) \in u(U_{\gamma_o})$, y sean $\gamma_i \in A'$ tales que $u(\gamma_i) = e_i$.

$$\frac{\partial F}{\partial z_i}(z) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(z + \lambda e_i) - F(z)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to o} \frac{f(\gamma + \lambda\gamma_i) - f(\gamma)}{\lambda},$$

pero este límite existe, pues existen todas las derivadas direccionales de f en γ.

ii) $\Rightarrow$ i) Sea $\gamma_o \in U$. Existen las derivadas direccionales de f, pues dado $\gamma \in A'$, para λ chicos $\gamma_o + \lambda\gamma \in U_{\gamma_o}$; luego

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\gamma_o + \lambda\gamma) - f(\gamma_o)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{F(u(\gamma_o) + \lambda u(\gamma)) - F(u(\gamma_o))}{\lambda} =$$

$$\frac{\partial F}{\partial u(\gamma)} (u(\gamma_o)).$$

Además, sea $V_{u(\gamma_o)}$ un entorno de $u(\gamma_o)$ contenido en $u(U_{\gamma_o})$ en el que F es acotada. f resulta acotada en $u^{-1}(V_{u(\gamma_o)})$. ∎

En la situación de la Proposición, diremos que *f está finitamente determinada* por $a_1,\ldots,a_n$; o por u, sobre U_{γ_o}.

Más generalmente, si W es un abierto finitamente determinado de A', y $f \in O(W)$, diremos que f es finitamente determinada por u en W si W es finitamente determinado por u, y existe una función $F \in O(u(W))$ tal que $f = F\circ u$ sobre W. Las funciones finitamente determinadas de $O(W)$ forman una subálgebra que denotaremos $F(W)$. Tenemos además:

Proposición: Si W es finitamente determinado, y $f \in O(W)$ es acotada, entonces cualquier u que determina a W, determina a f.

D/ Sea u tal que $u^{-1}(u(W)) = W$. Como en la Proposición anterior, bastará probar que si γ y γ' pertenecen a W, y $u(\gamma) = u(\gamma')$, entonces $f(\gamma) = f(\gamma')$. Pero $u(\lambda\gamma + (1-\lambda)\gamma') = \lambda u(\gamma) + (1-\lambda)u(\gamma') = u(\gamma') \in u(W)$. Luego $\lambda\gamma + (1-\lambda)\gamma' \in u^{-1}(u(W)) = W$, y tiene sentido $f(\lambda\gamma + (1-\lambda)\gamma')$. La demostración sigue como en la Proposición anterior. ∎

Sin embargo, hay elementos de $F(W)$ que no son acotados. Para aclarar mejor la estructura de $F(W)$, consideremos, para u,v que determinan a W, y $u \leqslant v$,

$$f_{uv}: O(u(W)) \to O(v(W)) \text{ tal que } f_{uv}(g) = g \circ \pi_{mn}$$

Las f_{uv} así definidas forman un sistema directo, o sea que existe $\lim\limits_{\vec{u}} O(u(W))$. Llamaremos $C_u: O(u(W)) \to \lim\limits_{\vec{u}} O(u(W))$ a los morfismos canónicos que vienen con el límite directo. Necesitaremos el siguiente resultado para cada abierto W finitamente determinado.

<u>Proposición</u>: $F(W) = \lim\limits_{\vec{u}} O(u(W))$.

D/ Para todo u de los que determinan W, sea

$$O(u(W)) \xrightarrow{u^*} F(W) \text{ tal que } u^*(f) = f \circ u.$$

Entonces, si $u \leqslant v$, $v^* f_{uv} = u^*$, porque $v^* f_{uv}(g) = g \circ \pi_{mn} \circ v = g \circ u = u^*(g)$. Inducen entonces el morfismo

$$\lim_{\vec{u}} O(u(W)) \xrightarrow{\varphi} F(W) \quad \text{tal que } \varphi C_u = u^* \text{ para todo u.}$$

φ es un monomorfismo, porque si $\varphi(\bar{f}) = 0$, donde $\bar{f} = C_u(f)$, se tiene $0 = \varphi C_u(f) = u^*(f) = f \circ u$. Entonces $f = 0$, y $\bar{f} = 0$.

φ también es epimorfismo: Si $g' \in F(W)$ sea v tal que $g' = g \circ v$, con $g \in O(v(W))$. Luego

$$g' = v^*(g) = \varphi C_v(g) \in \operatorname{Im} \varphi.$$

Consideramos en $O(u(W))$ la topología de convergencia uniforme sobre compactos de $u(W)$, y en $F(W)$ la topología inducida como límite directo. Esta topología es más fina que la de convegencia uniforme sobre compactos de W. En efecto, si llamamos $F'(W)$ al mismo conjunto con la topología de convergencia uniforme sobre compactos de W, la identidad $F(W) \to F'(W)$ es continua, puesto que cada flecha $O(u(W)) \to F'(W)$ lo es. Sin embargo, la identidad en el otro sentido no es, en general, continua. Para ver esto tomemos un álgebra A con alguna subálgebra cerrada generada por numerables elementos a_n con $\|a_n\| = 1$ para cada n, pero que no sea finitamente generada como subálgebra cerrada (por ejemplo, ℓ^1: el álgebra de sucesiones sumables). Sean entonces $f_n = \frac{\hat{a}_n}{n}$. La sucesión (f_n) converge a cero uniformemente sobre compactos de W, y sin embargo no corresponde a ninguna sucesión $(F_n) \subset O(u(W))$ para ningún u, porque si existiera un tal $u = \hat{b}_1 \times \ldots \times \hat{b}_k$, con $f_n = F_n \circ u$ para cada n, se tendría $a_n = \Theta_b(n.F_n) \in \operatorname{Im} \Theta_b$, pero ésta es finitamente generada, como subálgebra cerrada, por $b_1,..,b_k$.

Para cada subconjunto B de A', definamos

$$\tilde{B} = \{\gamma \in A' : |P(\gamma)| \leq \sup_{b \in B} |P(b)| \text{ , para todo } P \in \beta\}$$

Diremos que B es *fuertemente* β-*convexo* si $\tilde{B} = B$, y β- *convexo* si para todo compacto K contenido en B, $\tilde{K} \subset B$. Naturalmente, para B compacto, ambas definiciones coinciden. Notemos que el espectro $X(A)$ de A es fuertemente β-convexo: en efecto, si $\gamma \in \widetilde{X(A)}$, sean

$$|P_{ab}(\gamma)| \leqslant \sup_{\varphi \in X(A)} |P_{ab}(\varphi)| = 0 \ ,$$

de manera que $0 = P_{ab}(\gamma) = \gamma(a)\ \gamma(b) - \gamma(ab)$ para cada $a,b \in A$. Luego $\gamma \in X(A)$.

Los conjuntos β-convexos de A', tendrán un papel análogo al de los polinomialmente convexos en $\mathbb{C}^n$. Para abiertos finitamente determinados estas nociones se relacionan de la siguiente manera.

<u>Proposición</u>: Sea W un abierto de A' finitamente determinado por $u = \hat{a}_1 \times \ldots \times \hat{a}_n$. Entonces son equivalentes:

i) W es β-convexo.

ii) u(W) es polinomialmente convexo.

D/ i) $\Rightarrow$ ii) Sea H un compacto contenido en u(W). Debemos mostrar que su cápsula polinomialmente convexa, $\hat{H}$, está contenida en u(W).

Sea $\sigma:\mathbb{C}^n \to A'$ tal que $\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i\ \varphi_i$, donde $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$ y φ_i son nulas sobre el resto de una base B de A que extiende a $(a_i)_{i \leqslant n}$. Entonces $u\,\sigma$ es la identidad sobre $\mathbb{C}^n$, y σ es continua. Sea $K = \sigma\,(H)$; es un compacto de A', $u(K) = H$, y $K \subset u^{-1}(u(W)) = W$, pues u determina a W.

Hay que ver, entonces, que $\widehat{u(K)} \subset u(W)$. Como $\tilde{K} \subset W$, es $u(\tilde{K}) \subset u(W)$, y bastará ver que $\widehat{u(K)} \subset u(\tilde{K})$. Sea $z_o \in \widehat{u(K)}$.

Entonces

$$|P(z_o)| \leqslant \sup_{z \in u(K)} |P(z)| \quad \text{para todo } P \in \mathbb{C}\,[X_1,..,X_n].$$

Sea $\gamma_o = \sigma(z_o)$. Entonces $u(\gamma_o) = z_o$, y sólo hay que ver que $\gamma_o \in \tilde{K}$, o sea que:

$$|Q(\gamma_o)| \leqslant \sup_{\gamma\in K} |Q(\gamma)| \quad \text{para todo } Q\in\beta.$$

Si bien no es cierto que dado $Q\in\beta$ exista $P \in \mathbb{C}[X_1,..,X_n]$ tal que $Q = P_\circ u$, hay un polinomio $P\in\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$ que hace válida la igualdad sobre $\sigma(\mathbb{C}^n)$, que es todo lo que se necesitará.

Para mostrar la existencia de tal polinomio P, digamos que $\hat{b}_1,...,\hat{b}_k$ son las "coordenadas" que aparecen efectivamente en Q. Entonces existen $(a_i)_{i\leqslant m}$ dentro de B, que generan a los b_j y entre los cuales se encuentran $a_1,...,a_n$. Entonces hay un polinomio $\bar{P} \in$ $\in C[X_1,..,X_m]$ tal que $Q = \bar{P}(\hat{a}_1,...,\hat{a}_m)$. Se tiene:

$$Q(\sigma(z)) = \bar{P}(\hat{a}_1,...,\hat{a}_m)\ (\sigma(z)) = \bar{P}(\sigma(z)(a_1),..,\sigma(z)(a_m))=$$
$$= \bar{P}(\sigma(z)(a_1),...,\sigma(z)(a_n),0,...,0)$$

esta última igualdad, porque $\sigma(z)$ es nula sobre los $a_i \in B$ salvo para $i\leqslant n$.

Sea $P(X_1,..,X_n) = \bar{P}(X_1,..,X_n,0,...,0)$. Entonces $Q = P\circ u$ sobre $\sigma(\mathbb{C}^n)$, y

$$|Q(\gamma_o)|= |P(u(\gamma_o))| = |P(z_o)|\leqslant \sup_{\gamma\in K} |P(u(\gamma))|= \sup_{\gamma\in K} |Q(\gamma)|.$$

Luego $\gamma_o \in \tilde{K}$, y $z_o\in u(\tilde{K})$. Entonces $\hat{H} = \widehat{u(K)} \subset u(\tilde{K})\subset u(W)$.

ii) $\Rightarrow$ i) Si $K\subset W$, K compacto, sea $H = u(K)$. H es compacto de $u(W)$, luego $\hat{H} \subset u(W)$. Queremos ver que $\tilde{K}\subset W$. Como $u^{-1}(\hat{H}) \subset u^{-1}(u(W)) = W$, bastará ver que $\tilde{K} \subset u^{-1}(\hat{H})$, o sea,que $u(\tilde{K}) \subset \hat{H}$. Sea $\gamma_o \in \tilde{K}$, y sea $P\in\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$. Como $P_\circ u \in\beta$,

$$|P(u(\gamma_o))| = |P_\circ u(\gamma_o)| \leqslant \sup_{\gamma\in K} |P_\circ u(\gamma)| = \sup_{\gamma\in K} |P(u(\gamma))| =$$

$$= \sup_{z\in H} |P(z)|.$$

Luego $u(\gamma_o) \in \hat{H}$.

Vale la pena aclarar que en el curso de la demostración hemos probado la igualdad $\widehat{u(K)} = u(\tilde{K})$ para compactos K de A' de la forma $K = \sigma(H)$, con H compacto de $\mathbb{C}^n$,pero de ninguna manera para un compacto arbitrario de A'. Dicha igualdad es falsa en general. Por ejemplo, sabemos que el espectro X(A) de A es un compacto β-convexo, pero $u(X(A)) = sp(a)$ no es, en general, polinomialmente convexo.

Este hecho es un escollo importante en la construcción del cálculo funcional holomorfo, ya que sp(a) no tendrá en general una base de entornos formada por abiertos polinomialmente convexos. En el cálculo holomorfo clásico, la dificultad es salvada por el "trick" de Arens y Calderón. En esta versión ese lugar lo ocupa la siguiente

<u>Proposición</u>: Si K es un compacto β-convexo de A', entonces K tiene una base de entornos formada por abiertos β-convexos y finitamente determinados.

D/ Como K es compacto, tiene una base de entornos formada por abiertos finitamente determinados. Sea W un entorno abierto de K finitamente determinado por $u = \hat{a}_1 \times \dots \times \hat{a}_n$. Sea también $c > 0$ tal que $K \subset D = \{\gamma\in A' : \|\gamma\| \leqslant c\}$

Dado $P \in \beta$, sea $K_P = \{\gamma \in A' : |P(\gamma)| \leqslant \sup_K |P|\}$. K es β-convexo, de manera que $K = \bigcap_P K_P$. Como $D \cap K_P$ es compacto para cada P, existen $P_1,\dots,P_k$ tales que

$$K \subset D \cap K_{P_1} \cap \ldots \cap K_{P_k} \subset W .$$

Sea $v = \hat{a}_1 \times \ldots \times \hat{a}_n \times \ldots \times \hat{a}_m \geqslant u$ tal que v determina a P_i, para $i=1,\ldots,k$: es decir, hay polinomios $Q_1,\ldots,Q_k \in \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_m]$ tales que $P_i = Q_i \circ v$. Sea $v(K)_{Q_i} = \{z \in \mathbb{C}^m : |Q_i(z)| \leqslant \sup_{v(K)} |Q_i|\}$.

Para cada i este conjunto es polinomialmente convexo, y $v(K_{P_i}) \subset v(K)_{Q_i}$. Pongamos $K_o = v(D) \cap v(K)_{Q_1} \cap \ldots \cap v(K)_{Q_k}$. K_o es un compacto polinomialmente convexo, ya que D es compacto, y $v(D)$ es polinomialmente convexo. Para ver esto último, sea V el subespacio de A generado por $a_1,\ldots,a_m$. Su dual, V' se puede pensar canónicamente como un cociente de A', a través de la traspuesta de la inclusión de V en A. Pasando v al cociente, resulta un isomorfismo $\bar{v}$ de V' en $\mathbb{C}^m$. $D' = \{x \in V' : \|x\| \leqslant c\}$ se identifica entonces con $\bar{v}(D') = v(D)$. Si ahora $z \in \mathbb{C}^m - v(D)$, es $z = \bar{v}(x)$, con $\|x\| > c$. Sea $L: V' \to \mathbb{C}$, lineal y de norma 1 tal que $|L(x)| = \|x\|$, y $Q = L \circ \bar{v}^{-1} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$. $Q \in \mathbb{C}[X_1,..,X_m]$, y

$$|Q(z)| = |L\, \bar{v}^{-1} \bar{v}(x)| = |L(x)| = \|x\| > c = \sup_{D'} |L| = \sup_{v(D)} |Q|$$

Luego para cada $z \in \mathbb{C}^m - v(D)$ existe Q tal que $|Q(z)| > \sup_{v(D)} |Q|$, es decir, $v(D)$ es polinomialmente convexo.

Se tiene, además, $v(K) \subset K_o \subset v(W)$. La primera inclusión, porque $K \subset D \cap K_{P_1} \cap \ldots \cap K_{P_k}$ implica que

$$v(K) \subset v(D \cap K_{P_1} \cap \ldots \cap K_{P_k}) \subset v(D) \cap v(K)_{Q_1} \cap \ldots \cap v(K)_{Q_K} = K_o ;$$

y para ver la segunda, sea $z \in K_o$, y $\gamma \in D$ tal que $z = v(\gamma)$. Se tiene $|P_i(\gamma)| = |Q_i \circ v(\gamma)| = |Q_i(z)| \leqslant \sup_{v(K)} |Q_i| = \sup_K |P_i|$, para $i=1,..,k$; es decir, $\gamma \in D \cap K_{P_1} \cap \ldots \cap K_{P_k} \subset W$, y $z \in v(W)$.

Sea, entonces, U un abierto polinomialmente convexo de $\mathbb{C}^m$ tal que

$$v(K) \subset K_o \subset U \subset v(W)$$

Luego $K \subset v^{-1}(U) \subset v^{-1}(v(W)) = W$, y $v^{-1}(U)$ es un abierto finitamente determinado de A', y es β-convexo por la proposición anterior. ∎

§3. Volviendo a las funciones holomorfas, si tenemos abiertos $U \subset V$ de A', tenemos también los morfismos de restricción $O(V) \to O(U)$.

Fijemos un conjunto compacto K dentro de A'. Sus entornos abiertos se encuentran parcialmente ordenados, y los morfismos de restricción forman un sistema directo. Queda definida entonces, $O(K) = \varinjlim O(U)$.

Sin embargo, como vimos antes, las funciones holomorfas son localmente finitamente determinadas, de manera que algo similar ocurre para funciones holomorfas en un entorno suficientemente chico de un compacto. Más aún, se tiene:

<u>Proposición</u>: Si K es un compacto β- convexo de A', entonces $O(K) = \varinjlim F(W)$, donde los W forman una base de entornos abiertos finitamente determinados y β-convexos de K.

D/ Como los W en cuestión forman una base de entornos de K, vale $O(K) = \varinjlim O(W)$. Además, para cada W se tienen flechas

$F(W) \longrightarrow O(W) \longrightarrow O(K)$, cuya composición, que llamaremos r_W, es inyectiva, por ser composición de dos monomorfismos. Si $W' \subset W$, y $f \in F(W)$, sea u que determina a f y a W. Entonces existe un v que determina a W y a W' tal que $v \geqslant u$, o sea

$$\begin{tikzcd} & v(W) \arrow[d, "\pi_{mn}"] & \\ W \arrow[ur, "v"] \arrow[r, "u"'] & u(W) \arrow[r, "F"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Si $f = F \circ u$, sea $F' = F \circ \pi_{mn} \in O(v(W))$, y vale $F' \circ v = F\, \pi_{mn}\, v = F \circ u = f$ sobre W, en particular sobre W'. Están definidos, entonces los morfismos de restricción:

$$C_{WW'}: F(W) \to F(W')$$

que son, en realidad, los que ya se tenían para los $O(W)$, de manera que $r_{W'}\, C_{WW'} = r_W$ y queda inducido un morfismo

$$\varinjlim F(W) \xrightarrow{\psi} O(K) \quad \text{tal que } \psi\, C_W = r_W$$

donde $C_W: F(W) \to \varinjlim F(W)$ son los canónicos.

Queremos ver que ψ es un isomorfismo. Si $\psi(\bar{f}) = 0$, sea $\bar{f} = C_W(f)$ para algún W. Entonces $0 = \psi(C_W(f)) = r_W(f)$, luego $f = 0$ y $\bar{f} = 0$. Dado ahora $\bar{f} \in O(K)$, como K es compacto existe un entorno W, que se puede tomar finitamente determinado y β-convexo, en el que f está definida y es acotada. Pero esto significa que f es finitamente determinada sobre W, es decir $f \in F(W)$. $\bar{f} = r_W(f) = \psi(C_W(f)) \in \operatorname{Im} \psi$. ∎

A veces notaremos de la misma forma a $f \in F(W)$ y a su germen en $O(K)$. Consideremos en $O(K)$ la topología inducida por $F(W)$ como límite directo.

Esta topología es, en general, más fina que la inducida por $O(U)$, si en $O(U)$ se tiene la topología de convergencia uniforme sobre compactos de U.

§4. Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema del cálculo funcional holomorfo.

<u>Teorema</u>: Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Existe un único morfismo de álgebras unitario y continuo $E: O(X(A)) \to A$ tal que tal que $E(\bar{a}) = a$ para todo $a \in A$, donde $\bar{a}$ es el germen de $\hat{a}$.

D/ Como $X(A)$ es un compacto β-convexo tenemos $O(X(A)) = \lim\limits_{\to} F(W)$ donde W recorre una base de entornos abiertos finitamente determinados y β-convexos. Sabemos además, que $F(W) = \lim\limits_{\to} O(u(W))$.

Si $u = \hat{a}_1 \times \ldots \times \hat{a}_n$, $u(X(A)) = sp(a)$ y $u(W)$ es un entorno abierto polinomialmente convexo de $sp(a)$. Luego, para cada u y W existe un único morfismo de álgebras unitario y continuo

$$E_{W,u} : O(u(W)) \to A \text{ tal que } E_{W,u}(\pi_i^n) = a_i,$$

donde $\pi_i^n(z) = z_i$.

Además, si $v \geq u$, $E_{W,u} = E_{W,v} \circ f_{uv}$. En efecto, $E_{W,v} \circ f_{uv}$ es un morfismo de álgebras unitario y continuo, y $E_{W,v} \circ f_{uv}(\pi_i^n) =$ $= E_{W,v}(\pi_i^n \circ \pi_{mn}) = E_{W,v}(\pi_i^m) = a_i$, para $i=1,..,n$. Luego por unicidad, $E_{W,u} = E_{W,v} \circ f_{uv}$ cada vez que $v \geq u$, es decir los $E_{W,u}$ son compatibles. Luego existe

$$E_W: F(W) \to A$$

único morfismo de álgebras unitario y continuo tal que para cada u de los que determinan a W, $E_W \circ u^* = E_{W,u}$. Por lo tanto, $E_W(\hat{a}_i) = E_W(u^*(\pi_i^n)) = E_{W,u}(\pi_i^n) = a_i$.

Si $W' \subset W$, $C_{WW'}: F(W) \to F(W')$ es el morfismo de restricción, vale $E_W = E_{W'} \circ C_{WW'}$. Para ver esto basta ver, por unicidad de E_W que $E_{W'} \circ C_{WW'} \circ u^* = E_{W,u}$, para cada u que determina W. Como $E_{W'} \circ C_{WW'} \circ u^*$ es continuo, basta ver que para $1 \leq i \leq n$, $E_{W'} \circ C_{WW'} \circ$ $\circ u^*(\pi_i^n) = a_i$: W' es finitamente determinado por un $v \geq u$, y

$E_{W'} \circ v^* = E_{W',v}$. Entonces $E_{W'}\, C_{WW'} u^*(\pi_i^n) = E_{W'}\, C_{WW'}(\hat{a}_i) = E_{W'}(\hat{a}_i) =$
$= E_{W'} v^*(\pi_i^m) = E_{W',v}(\pi_i^m) = a_i$.

Luego existe un único morfismo de algebras unitario y continuo

$$E: O(X(A)) \to A \quad \text{tal que} \quad E\, C_W = E_W \text{ para todo } W.$$

Además, vale $E(\bar{a}) = a$ para todo $a \in A$:

Si $a=0$, es trivial.

Si $a \neq 0$, $u=\hat{a}$ determina finitamente a A'. Entonces $E(\bar{a}) =$
$= E\, C_{A'}(\hat{a}) = E_{A'}(\hat{a}) = E_{A'}(u^*(id_{\mathbb{C}})) = E_{A',u}(id_{\mathbb{C}}) = a$.

Por supuesto que E es un epimorfismo, por la propiedad $E(\bar{a})=a$ para todo $a \in A$. Otras propiedades que usaremos del morfismo E son las siguientes.

<u>Proposición</u>: $\widehat{E(f)}\big|_{X(A)} = f\big|_{X(A)}$

D/ Supongamos que $f \in F(W)$, con W β-convexo y finitamente determinado por $u = \hat{a}_1 \times \ldots \times \hat{a}_n$, que determina a f. $u(W)$ es un abierto polinomialmente convexo de $\mathbb{C}^n$, de manera que $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$ es denso en $O(u(W))$. Si $\varphi \in X(A)$, las funciones $\varphi \circ E_{W,u}$ y $e_{u(\varphi)}$ (evaluación en $u(\varphi)$) son continuas y coinciden sobre los polinomios. En efecto, si $P \in \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$, $\varphi \circ E_{W,u}(P) = \varphi(P(a_1,\ldots,a_n)) = P(\varphi(a_n),\ldots,\varphi(a_n)) =$
$= P(u(\varphi)) = e_{u(\varphi)}(P)$.

Luego $\varphi \circ E_{W,u} = e_{u(\varphi)}$ sobre $O(u(W))$. Sea $F \in O(u(W))$ tal que $f = F \circ u$. Luego $f(\varphi) = F(u(\varphi)) = \varphi(E_{W,u}(F)) = \varphi(E(f)) = \widehat{E(f)}(\varphi)$. ∎

<u>Proposición</u>: Sea $N = \{f \in O(X(A)) : f|_{X(A)} = 0\}$. Entonces $E(N) = Rad(A)$ y $N = E^{-1}(Rad(A))$.

D/ Si $f \in N$, $\widehat{E(f)}\big|_{X(A)} = 0$ por la Proposición anterior, luego

$E(f)$ pertenece al radical de A. Si $a \in \mathrm{Rad}(A)$, se puede poner $a = E(\bar{a})$, pero $\bar{a} \in N$. Para la otra igualdad, $N \subset E^{-1}(\mathrm{Rad}(A))$, dado que $E(N) \subset \mathrm{Rad}(A)$. Por último, si $E(f) \in \mathrm{Rad}(A)$, $f\big|_{X(A)} = \widehat{E(f)}\big|_{X(A)} = 0$, es decir que $f \in N$. ∎

Notemos que en el caso en que A es semisimple esta Proposición dice que el núcleo de E es N. Este hecho será usado más adelante. Lamentablemente, no tenemos una caracterización similar de Ker E cuando A no es semisimple.

Conjuntos espectrales y variedades analíticas

Introducción

Si A es un álgebra de Banach, y M es una subvariedad analítica cerrada de un abierto de $\mathbb{C}^n$, para cualquier n-upla perteneciente a A^n cabe preguntarse si el espectro simultáneo de la n-upla está contenido en M. Podemos definir el conjunto

$$A^M = \{a = (a_1,\ldots,a_n) \in A^n\colon sp(a) \subset M\}$$

En forma análoga a lo hecho en el capítulo I, se puede definir $O(X,\mathbb{C}^n)$, gérmenes de funciones holomorfas a $\mathbb{C}^n$; y $O(X,M)$, los elementos de $O(X,\mathbb{C}^n)$ tales que algún representante tiene imagen contenida en M. Si observamos que $O(X,\mathbb{C}^n) = O(X,\mathbb{C})^n$, tendremos definido un morfismo de cálculo funcional holomorfo.

$$O(X,\mathbb{C}^n) \to A^n,$$

que es el producto cartesiano del expuesto en el Capítulo I. Notemos con la letra E a todos estos morfismos y a sus restricciones. Sea entonces

$$A_M = \{a \in A^n\colon a = E(f), \text{ para algún } f \in O(X,M)\} .$$

(Más adelante veremos que A^M y A_M coinciden si A es semisimple)

Estos conjuntos, que llamaremos *conjuntos espectrales*, están relacionados con la topología del espectro X de A. En efecto, Taylor [22] ha demostrado que si M es un espacio homogéneo contenido en $\mathbb{C}^n$, entonces A_M es localmente arco conexo y la aplicación de Gelfand

$$A_M \longrightarrow C(X,M)$$

induce una biyección entre los conjuntos de componentes conexas

$$[A_M] \to [X,M]$$

En este capítulo probaremos que A_M es en realidad una subvariedad analítica de A^n, cuyos espacios tangentes son A-módulos proyectivos de rango igual a la dimensión de M, y algunas consecuencias de este hecho.

Para esto necesitaremos probar primero una versión del teorema del rango constante válida para A-módulos (comparar con [14]).

§1. Consideraremos siempre submódulos del A-módulo libre A^n, y morfismos de A-módulos $T:A^n \to A^m$. Diremos que un submódulo D de A^n es *A-directo* cuando es cerrado y existe otro submódulo cerrado D' de A^n tal que $A^n = D \oplus D'$. Esto es equivalente a que exista un proyector $p:A^n \to A^n$, A-lineal y continuo tal que D = Ker p (ó D = Imp).

Notemos que un submódulo A-directo es necesariamente proyectivo, pero no siempre libre. A veces diremos que D tiene *rango k*, con esto queremos decir que para cualquier ideal maximal $\varphi \in X$ el módulo localizado D_φ tiene rango k sobre el anillo localizado A_φ.

Si $T: A^n \to A^m$ es un morfismo de A-módulos, diremos que *T es A-directo* si Ker T e Im T lo son.

Supongamos que

$$A^n = D_1 \oplus D_2 \qquad\qquad F_1 \oplus F_2 = A^m$$

donde D_j, F_i son submódulos cerrados. Si $T: A^n \to A^m$ es un morfismo de A-módulos, usaremos la notación

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

donde $T_{ij} \in \mathrm{Hom}_A(D_j, F_i)$; que significa lo siguiente:

si $$x = x_1 + x_2 \qquad (x_1 \in D_1,\ x_2 \in D_2),$$

entonces $$T(x) = [T_{11}(x_1) + T_{12}(x_2)] + [T_{21}(x_1) + T_{22}(x_2)]$$

es la expresión de $T(x)$ como suma de elementos en F_1 y F_2.

Necesitaremos la siguiente proposición.

<u>Proposición</u>: Sean P_1 y P_2 submódulos A-directos de A^n del mismo rango. Entonces $P_1 \subset P_2$ implica $P_1 = P_2$.

D/ Si $f: A^n \to P_1$ es un proyector A-lineal continuo, también $g = f|_{P_2}: P_2 \to P_1$ es proyector A-lineal continuo. Entonces P_1 es sumando directo de P_2, o sea $P_2 = P_1 \oplus N$ para un A-submódulo N de P_2.

Como $rg(P_1) = rg(P_2)$, debe ser $rg(N) = 0$. Luego $N=0$ y $P_1 = P_2$. ∎

<u>Teorema</u>: Sea $T_0: A^n \to A^m$ A-directo, y sean D_1 y F_2 submódulos cerrados de A^n y A^m respectivamente tales que

$$A^n = D_1 \oplus \mathrm{Ker}\, T_0 \qquad \mathrm{Im}\, T_0 \oplus F_2 = A^m$$

Si
$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ \mathrm{Ker}\ T_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ T_0 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

entonces son equivalentes:

i) T es A-directa, $A^n = D_1 \oplus \mathrm{Ker}\, T$ y $A^m = \mathrm{Im}\, T \oplus F_2$.

ii) $\alpha \in \mathrm{Iso}\,(D_1, \mathrm{Im}\ T_0)$ y $\delta = \gamma\, \alpha^{-1}\, \beta$.

iii) Existen automorfismos A-lineales $u: A^n \to A^n$ y $v: A^m \to A^m$ tales que $T_0 = v\, T\, u$, $u|_{D_1} = id_{D_1}$, y $v|_{F_2} = id_{F_2}$.

iv) T es A-directo, $\alpha \in \mathrm{Iso}(D_1, \mathrm{Im}\ T_0)$ y $rg(\mathrm{Im}\ T_0) = rg(\mathrm{Im}\ T)$.

D/ Supongamos que vale i) y consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} D_1 \times \mathrm{Ker}\ T & \xrightarrow{W} & \mathrm{Im}\ T \times F_2 \\ \varphi \Big\uparrow & & \Big\downarrow \psi \\ A^n = D_1 \oplus \mathrm{Ker}\ T_0 & \xrightarrow{T} & \mathrm{Im}\ T_0 \oplus F_2 = A^m \end{array}$$

donde φ es el isomorfismo $v \mapsto (v_1, v_2)$; aquí v_1(resp: v_2) es la proyección de v sobre D_1(resp: Ker T)de núcleo Ker T (resp: D_1). Definimos ψ de manera similar. Tenemos entonces

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} D_1 \\ \mathrm{Ker}\ T_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} D_1 \\ \mathrm{Ker}\ T \end{pmatrix}$$

y

$$\psi = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ T \\ F_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ T_0 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

con $\tau \in \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}\ T_0, D_1)$, $\nu \in \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Im}\ T, F_2)$, $\theta \in \mathrm{Iso}_A(\mathrm{Ker}\ T_0, \mathrm{Ker}\ T)$, y $\mu \in \mathrm{Iso}_A(\mathrm{Im}\ T, \mathrm{Im}\ T_0)$. Por otro lado también tenemos

$$W = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} D_1 \\ \mathrm{Ker}\ T \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ T \\ F_2 \end{pmatrix}$$

con $\lambda \in \mathrm{Iso}_A(D_1, \mathrm{Im}\ T)$.

La conmutatividad del diagrama implica

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

luego $\mu\lambda = \alpha$ (de donde α es isomorfismo) y $\delta = \nu\lambda\tau = \nu\lambda(\lambda^{-1}\mu^{-1})\mu\lambda\tau = \gamma\alpha^{-1}\beta$, y hemos probado ii).

Ahora supongamos ii). Si

$$T_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} D_1 \\ \mathrm{Ker}\ T_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ T_0 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

con $\lambda \in \mathrm{Iso}_A(D_1, \mathrm{Im}\ T_0)$, definimos

$$u = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} D_1 \\ \mathrm{Ker}\ T_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} D_1 \\ \mathrm{Ker}\ T_0 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} \lambda\alpha^{-1} & 0 \\ -\gamma\alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ T_0 \\ F_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ T_0 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Entonces u y v son automorfismos, $u_{|D_1} = id_{D_1}$, $v_{|F_2} = id_{F_2}$, y

$$\begin{pmatrix} \lambda\alpha^{-1} & 0 \\ -\gamma\alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda\alpha^{-1}\beta \\ 0 & -\gamma\alpha^{-1}\beta+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\gamma\alpha^{-1}\beta + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ indica que $T_0 = v\ Tu$.

Ahora supongamos iv) y definamos el automorfismo $S : A^m \to A^m$ por

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma\alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ T_0 \\ F_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ T_0 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

La composición

$$T' = ST = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta-\gamma\alpha^{-1}\beta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} D_1 \\ \mathrm{Ker}\ T_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ T_0 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

también es A-directa. Notemos que Im T'= S(Im T). Luego Im T' e Im T tienen igual rango, y vale rg(Im T')= rg(Im T_0).

Pero Im T' $\supset \alpha(D_1)$ = Im T_0; la proposición anterior nos dice que entonces Im T' = Im T_0 y esto implica que $\delta - \gamma\alpha^{-1}\beta = 0$. Queda probado ii).

Para ver iii) $\Rightarrow$ i), notemos primero que T es A-directo. Además u(Ker T_0) = Ker T. En efecto, si $a \in$ Ker T_0, Tu(a) = 0 si y sólo si vTu(a) = T_0(a) = 0. Si T(c)= 0, sea a tal que u(a) = c, entonces $T_0(a) = vTu(a) = vT(c) = v(0)=0$.

Luego

$$A^m = v^{-1}(\mathrm{Im}\ T_0 \oplus F_2) = v^{-1}(\mathrm{Im}\ T_0) \oplus v^{-1}(F_2) =$$

$$= v^{-1}T_0(A^n) \oplus F_2 = Tu(A^n) \oplus F_2 = \mathrm{Im}\ T \oplus F_2,$$

y

$$A^n = u(\mathrm{Ker}\ T_0 \oplus D_1) = u(\mathrm{Ker}\ T_0) \oplus D_1 = \mathrm{Ker}\ T \oplus D_1.$$

Para completar la demostración, sólo falta ver

i) $\Rightarrow$ iv) : $\alpha \in \mathrm{Iso}_A(D_1, \mathrm{Im}\ T_0)$como en i) $\Rightarrow$ ii). Lo demás es obvio, y la demostración está completa. ∎

§2. Si Ω es un abierto de A^n, y $F:\Omega \to A^m$, una función; diremos que F es *holomorfa* en Ω si es diferenciable Fréchet en cada punto de Ω, es decir para todo $a \in \Omega$ existe una función $\mathbb{C}$-lineal $T:A^n \to A^m$ tal que

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x) - F(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

Notaremos con DF(a) a dicha función T. Para funciones holomorfas definidas de esta manera vale el teorema de la función inversa. También se puede definir la noción de variedad analítica de Banach en forma totalmente análoga a la definición clásica (Ver por ejemplo

[13] [15] [17].

Para poder definir cartas sobre variedades contenidas en A^m, necesitaremos, dada una función $F:\Omega \to A^m$ holomorfa, hablar de *representación A-lineal de F en a*. Esto es un objeto (u,U,v,V,T) donde:

i) U es un entorno de $0 \in A^n$, u es biholomorfa de U en $u(U)$, un entorno de a contenido en Ω, y $u(0) = a$.

ii) V es entorno de $0 \in A^m$, v es biholomorfa de V en $v(V)$, un entorno de $F(a)$, y $v(0) = F(a)$.

iii) $T:U \to A^m$ es la restricción de una función A-lineal, y $v^{-1}Fu = T$.

iv) $Du(x)$ y $Dv(y)$ son A-lineales para todo $x \in U$, $y \in V$.

Por supuesto que tal representación A-lineal de F no siempre es posible. Por ejemplo, cualquier función F que sea lineal sobre $\mathbb{C}$ pero no sobre A es holomorfa y no admite una representación de este tipo. Daremos una condición suficiente para que esto ocurra. Para ello, definamos que F es *localmente A-directa en a* si existen submódulos cerrados $D_1 \subset A^n$, $F_2 \subset A^m$ y un entorno U de a tal que para cada $x \in U$,

i) $DF(x)$ es A-lineal

ii) $A^n = D_1 \oplus \operatorname{Ker} DF(x)$

iii) $A^m = \operatorname{Im} DF(x) \oplus F_2$

Tenemos entonces

<u>Proposición</u>: Sea Ω un abierto de A^n, F holomorfa en Ω, y $a \in \Omega$. Si F es localmente A-directa en a, entonces hay una representación A-lineal de F en a, (u,U,v,V,T) en la cual T es A-directa y con imagen cerrada.

D/ Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a=0$ y $F(a)=0$. Entonces existen un entorno $\Omega_0 \subset \Omega$ de $0 \in A^n$ y submódulos cerrados $D_1 \subset A^n$, $F_2 \subset A^m$ tales que

$$A^n = D_1 \oplus \operatorname{Ker} DF(x) \qquad A^m = \operatorname{Im} DF(x) \oplus F_2$$

para todo $x \in \Omega_0$. Además, $DF(x)$ es A-lineal para $x \in \Omega_0$.

Sean $D_2 = \operatorname{Ker} DF(0)$ y $F_1 = \operatorname{Im} DF(0)$. Notaremos con x_1, x_2 (resp: y_1, y_2) a las componentes de $x \in A^n$ (resp: $y \in A^m$) en la descomposición $D_1 \oplus D_2$ (resp: $F_1 \oplus F_2$).

Tenemos

$$DF(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Recordemos que, por el teorema de la página 24 valen, para todo $x \in \Omega_0$,

$$\alpha(x) : D_1 \to F_1 \text{ es isomorfismo, y}$$

$$\delta(x) = \gamma(x)\ \alpha(x)^{-1}\ \beta(x)$$

Definamos las siguientes funciones A-lineales

$$\begin{aligned}
&S: D_1 \to F_1 &&, \ S = \alpha(0) \\
&T: A^n \to A^m &&, \ T(x) = S(x_1) \\
&c: A^m \to A^n &&, \ c(y) = S^{-1}(y_1) \\
&P: A^n \to A^n &&, \ P(x) = x_2 \\
&Q: A^m \to A^m &&, \ Q(y) = y_2
\end{aligned}$$

$\operatorname{Im} T = \alpha(0)(D_1) = F_1$ es cerrado. Definamos ahora la función holomorfa $h\colon \Omega_0 \to A^n$ poniendo

$$h = cF + P$$

$Dh(x)$ es A-lineal si $x \in \Omega_0$. Es, en realidad, un A-isomorfismo, como se ve poniendo

$$Dh(x) = \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} S^{-1}\,\alpha(x) & S^{-1}\,\beta(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, por el teorema de la función inversa, $h\colon\Omega_1 \to \Omega_2$ es biholomorfa para entornos convenientes Ω_1 y Ω_2 de $0 \in A^n$, con $\Omega_1 \subset \Omega_0$.

La diferencial de la función $F\,h^{-1}P\colon P^{-1}(\Omega_2) \to A^m$ es idénticamente nula,para ver esto,

$$D(Fh^{-1}P)(x) = 0 \quad , \text{ para } x \in P^{-1}(\Omega_2).$$

En efecto, esta diferencial se puede calcular como la composición $DF(h^{-1}P(x))\, Dh(h^{-1}P(x))^{-1}P$. Escribiendo $x' = h^{-1}P(x)$, queda

$$D(Fh^{-1}P)(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x') & \beta(x') \\ \gamma(x') & \delta(x') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(x')^{-1}S & -\alpha(x')^{-1}\beta(x') \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(x') & \beta(x') \\ \gamma(x') & \delta(x') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha(x')^{-1}\,\beta(x') \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma(x')\alpha(x')^{-1}\beta(x') + \delta(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

porque $x' \in \Omega_o$.

Como $F\,h^{-1}P(0) = 0$, $F\,h^{-1}P$ resulta idénticamente nula en un entorno de 0.

Finalmente, definamos la función holomorfa $g: c^{-1}(\Omega_2) \to A^m$

$$g = F\,h^{-1}c + Q$$

Entonces, si $x = h^{-1}c(y)$, $Dg(y) = DF(x)Dh(x)^{-1}c + Q$ es A-isomorfismo:

$$Dg(y) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(x)^{-1}S & -\alpha(x)^{-1}\beta(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(x)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma(x)\alpha(x)^{-1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma(x)\alpha(x)^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $g: \Omega_1' \to \Omega_2'$ es biholomorfa, donde Ω_1' y Ω_2' son entornos de $0 \in A^m$.

Para completar la demostración, veamos que vale

$$gTh = F$$

en algún entorno de $0 \in A^n$. Usando las identidades

$$TP = 0$$

$$QT = 0$$

$$cQ = 0$$

$$Tc = 1-Q$$

$$cF = h-P$$, podemos escribir

$$gTh = (Fh^{-1}c + Q)\ T(cF + P) = (Fh^{-1}c + Q)(TcF + TP) =$$

$$= (Fh^{-1}c + Q)TcF = Fh^{-1}cTcF + QTcF =$$

$$= Fh^{-1}c(1-Q)F = (Fh^{-1}c - Fh^{-1}cQ)F = Fh^{-1}cF =$$

$$= Fh^{-1}(h-P) = F - Fh^{-1}P = F$$

esta última igualdad, porque ya hemos visto que $Fh^{-1}P = 0$ cerca de 0. ∎

Ahora estamos en condiciones de demostrar el

<u>Teorema</u>: Sea Ω un abierto de A^n, y $F:\Omega \to A^n$ una retracción holomorfa, localmente A-directa en x para todo $x \in \Omega$. Entonces Im F es una variedad analítica de Banach, y para cada $x \in \text{Im } F$ el espacio tangente $T_x(\text{Im } F)$ en x es Im DF(x).

D/ Para todo $F(x) \in \text{Im } F$, existen representaciones A-lineales $(u_x, U_x, v_x, V_x, T_x)$ de F, donde T_x es A-directa y con imagen cerrada.

Para los $x' \in U_x$, $T_x = DT_x(x') =$

$$= Dv_x^{-1}(Fu_x(x'))\ DF(u_x(x'))Du_x(x') =$$

$$= [\,Dv_x(T_x(x'))\,]^{-1}\ DF(u_x(x'))\ Du_x(x').$$

Pero $Dv_x(z)$ y $Du_x(z')$ son siempre isomorfismos A-lineales, de manera que $\text{Im } T_x \simeq \text{Im } DF(u_x(x'))$ para todo $x' \in U_x$. F es A-directa en x, de manera que existe un entorno de x donde $\text{Im } DF(a) \simeq \text{Im } DF(b)$, para a,b pertenecientes a este entorno.

Luego Im T_z, para z en este entorno, son todas A-isomorfas a un A-módulo fijo, P. Llamemos $h_z : \mathrm{Im}\, T_z \to P$ a estos isomorfismos.

Para todo $x \in \mathrm{Im}\, F$, $x = F(x)$, y U_x, V_x pueden elegirse de manera que $u_x(U_x) = v_x(V_x)$. Entonces

$$v_x : V_x \cap \mathrm{Im}\, T_x \to v_x(V_x) \cap \mathrm{Im}\, F$$

es una biyección. Es inyectiva sobre todo V_x, y si $v_x(z) \in \mathrm{Im}\, F$, digamos $v_x(z) = u_x(z')$, tenemos

$$v_x(z) = F\, v_x(z) = Fu_x(z') = v_x T_x u_x^{-1}(u_x(z')) = v_x T_x(z')$$

de manera que $v_x(z) \in v_x(V_x \cap \mathrm{Im}\, T_x)$.

Ahora, definamos la carta cerca de $x \in \mathrm{Im}\, F$: $(v_x(V_x) \cap \mathrm{Im}\, F, h_x v_x^{-1})$. Estas cartas son compatibles. Para ver esto, supongamos que $U_{xy} = v_x(V_x) \cap v_y(V_y) \cap \mathrm{Im}\, F \neq \phi$. Tenemos entonces

$$(h_y\, v_y^{-1})(h_x\, v_x^{-1})^{-1} : h_x\, v_x^{-1}(U_{xy}) \to h_y\, v_y^{-1}(U_{xy})$$

Pero $(h_y\, v_y^{-1})\ (h_x\, v_x^{-1})^{-1} = h_y\, v_y^{-1}\, v_x\, h_x^{-1}$ es holomorfa. Lo mismo vale para la otra composición.

El espacio tangente $T_x(\mathrm{Im}\, F)$ está dado por

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}\ (Dv_x(0)\ h_x^{-1}) = Dv_x(0)\ (\mathrm{Im}\ T_x) = \mathrm{Im}(Dv_x(0)\ T_x) = \\ &= \mathrm{Im}\ D(v_x\ T_x)(0) = \mathrm{Im}\ D(Fu_x)\ (0) = \mathrm{Im}(DF(u_x(0))\ Du_x(0)) = \\ &= \mathrm{Im}\ DF(x). \end{aligned}$$

§3. Aplicaremos ahora este resultado para mostrar que el conjunto espectral A_M es una variedad.

Si $a \in A^m$, notemos con $\hat{a}$ a la aplicación

$$A' \to \mathbb{C}^n$$

definida por $\hat{a}(\gamma) = (\gamma(a_1),\ldots,\gamma(a_n))$ para todo $\gamma \in A'$. Con las normas de supremo tanto en A^n como en $\mathbb{C}^n$, $|\hat{a}(\gamma)| \leqslant \|\gamma\| \; \|a\|$.

Escribiremos φ^n para notar al producto cartesiano $\varphi \times \ldots \times \varphi$.

Proposición: Sea W un abierto de $\mathbb{C}^n$. Entonces A_W es un abierto de A^n.

D/ Sea $a \in A_W$, y $f \in O(X,W)$ tal que $a = E(f)$. Como $f(X)$ es una parte compacta de W, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\varphi \in X$ el polidisco $\{z \in \mathbb{C}^n : |f(\varphi) - z| < \varepsilon\}$ está contendio en W. Tomemos $U = \{b \in A^n : \|a-b\| < \varepsilon\}$. $\hat{b}(X) \subset W$, porque $|f(\varphi) - \hat{b}(\varphi)| = |\widehat{a-b}\,(\varphi)| \leqslant \leqslant \|a-b\| < \varepsilon$. Luego $\hat{b}^{-1}(W)$ es un entorno de X en A', de manera que $\hat{b} \in O(X,W)$, y $b \in A_W$. ∎

Los conjuntos A_W, con W abierto, son entonces dominios apropiados para funciones holomorfas. Necesitaremos levantar funciones holomorfas en $\mathbb{C}^n$ a funciones holomorfas en A^n. Esto se hará como sigue.

Si $h: W \to \mathbb{C}^m$ es holomorfa, definimos $A_h : A_W \to A^m$ mediante:

$$A_h(a) = E(hf) \qquad \text{si} \quad a = E(f).$$

Proposición: A_h está bien definida y es holomorfa. Para cada $a = E(f) \in A_W$, $DA_h(a)$ es un morfismo de A-módulos dado por $E(Dh(f))$.

D/ Probemos primero que $E(f) = E(g)$ implica $E(hf) = E(hg)$. Para esto, sean $b_1,\ldots,b_k$ elementos de A que determinan finitamente a f y a g; es decir, existe un abierto Ω de $\mathbb{C}^k$ y $F,G \in O(\Omega,W)$ que hacen conmutativo el diagrama

$E(f) = E(g)$ significa que $\theta_b(F) = \theta_b(G)$ (aquí θ_b es el cálculo funcional holomorfo clásico), de manera que $sp(\theta_b(F)) = sp(\theta_b(G)) \subset W$. Como $h \in O(W, \mathbb{C}^m)$, podemos escribir $\theta_{\theta_b(F)}(h) = \theta_{\theta_b(G)}(h)$. Entonces $h(F(b)) = h(G(b))$, o sea $\theta_b(hF) = \theta_b(hG)$, y $E(hf) = E(hg)$.

Para ver que A_h es holomorfa, tomemos $a \in A_W$, $b \in A^n$. Será suficiente (ver [16]) probar la existencia de

$$\frac{\partial A_h}{\partial b}(a) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left[A_h(a + \lambda b) - A_h(a) \right] \tag{1}$$

puesto que A_h es continua.

Sea $a = E(f)$, $b = E(g)$. Entonces $a + \lambda b = E(f + \lambda g)$ y (1) es

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left[E(h(f + \lambda g) - hf) \right]$$

Por la continuidad del cálculo funcional E, bastará ver que el límite

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left[h(f + \lambda g) - hf \right]$$

existe en $O(X, \mathbb{C}^m)$. Para ver esto, tomemos un entorno V de X y $u = \hat{b}_1 \times \dots \times \hat{b}_k$ de manera que V, f y g están determinados por u, y $f(V) \subset W$. Digamos que $f = Fu$ y $g = Gu$. Entonces $f + \lambda g = (F + \lambda G)u$ para todo λ, y debemos ver que existe

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}[h(F+\lambda G) - hF] \text{ en } O(u(V),\mathbb{C}^m).$$

Sea Q un compacto de u(V). Debemos ver que la convergencia es uniforme sobre Q. Pongamos $\varepsilon > 0$, y si $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| < \varepsilon$ y $z \in Q$, sea

$$S(\lambda,z) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}[h(F(z)+\lambda G(z)) - hF(z)] - \frac{\partial h}{\partial G(z)} F(z), & \text{si } \lambda \neq 0. \\ 0 & , \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

h es holomorfa, de manera que $\lim_{\lambda\to 0} S(\lambda,z) = 0$ para cada $z \in Q$. Entonces existen $\delta_z > 0$ y entornos V_z de z tal que $|S(\lambda,z')| < \varepsilon$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| < \delta_z$ y todo $z' \in V_z$. Siendo Q compacto, existen $z_1,\ldots,z_p \in Q$ tales que V_{z_i} $i=1,..,p$ cubren Q. Sea $\delta = \min\{\delta_{z_i} : i=1,..,p\}$. Entonces para $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| < \delta$ y para todo $z \in Q$, $|S(\lambda,z)| < \varepsilon$ y A_h es holomorfa.

Notaremos al elemento $\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}[h(f+\lambda g) - hf]$ de $O(X,\mathbb{C}^m)$ mediante Dh(f)(g).

$DA_h(a)$ es más que una función lineal. Es A-lineal. Para probar esto debemos mostrar que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} O(X,\mathbb{C})^{m\times n} & \times & O(X,\mathbb{C})^n & \longrightarrow & O(X,\mathbb{C})^m \\ \downarrow E & & \downarrow E & & \downarrow E \\ A^{m\times n} & \times & A^n & \longrightarrow & A^m \end{array}$$

En efecto, esto dirá que aplicar $DA_h(a)$ a b es lo mismo que efectuar el producto de matrices: $DA_h(a)$. b, que obviamente es A-lineal.

Como las flechas del diagrama son continuas, y β^k(k-uplas de polinomios en las transformadas de Gelfand de elementos de A) es denso en $O(X,\mathbb{C})^k$ para cada k, pues para cada entorno abierto finitamente determinado y β-convexo V de X, y cada v que lo determina, los polinomios son densos en $O(v(V),\mathbb{C}^k)$ por ser v(V) un abierto polinomialmente convexo de $\mathbb{C}^k$(ver página 13), será suficiente mostrar que $E(p.q) = E(p).E(q)$, con p_{ij}, $q_j \in \beta$. Sean

$$p_{ij} = \sum_{(k)} \widehat{a^{ij}}(k), \quad \text{donde } \widehat{a^{ij}}(k) = \widehat{a^{ij}_{k_1}}^{k_1} \cdots \widehat{a^{ij}_{k_r}}^{k_r}$$

$$q_j = \sum_{(k')} \widehat{a^{j}}(k'), \quad \text{donde } \widehat{a^{j}}(k') = \widehat{a^{j}_{k'_1}}^{k'_1} \cdots \widehat{a^{j}_{k'_s}}^{k'_s}$$

$$E(p.q) = E\left(\sum_{j=1}^{n} p_{1j}\, q_j ,\ldots, \sum_{j=1}^{n} p_{mj}\, q_j\right) =$$

$$= E\left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{(k)} \widehat{a^{1j}}(k) \sum_{(k')} \widehat{a^{j}}(k'), \ldots , \sum_{j=1}^{n} \sum_{(k)} \widehat{a^{mj}}(k) \sum_{(k')} \widehat{a^{j}}(k')\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{(k)} a^{1j}(k) \sum_{(k')} a^{j}(k'), \ldots , \sum_{j=1}^{n} \sum_{(k)} a^{mj}(k) \sum_{(k')} a^{j}(k')\right).$$

Por otro lado $E(p).\ E(q) = \left(\sum_{j=1}^{n} E(p)_{1j}\ E(q)_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} E(p)_{mj}\ E(q)_j\right)$(2)

Pero $E(p)_{\ell j} = E(p_{\ell j}) = E\left(\sum_{(k)} \widehat{a^{\ell j}}(k)\right) = \sum_{(k)} a^{\ell j}(k)$, y

$$E(q)_j = E(q_j) = E\left(\sum_{(k')} \widehat{a^{j}}(k')\right) = \sum_{(k')} a^{j}(k').$$

Entonces

$$(2) = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{(k)} a^{1j}(k) \sum_{(k')} a^{j}(k'), \ldots , \sum_{j=1}^{n} \sum_{(k)} a^{mj}(k) \sum_{(k')} a^{j}(k')\right) = E(p.q)$$

Luego $DA_h(a)(b) = E(Dh(f)(g)) = E(Dh(f)).\ E(g) = E(Dh(f))(b)$, de manera que $DA_h(a) = E(Dh(f)) \in A^{m\times n}$ es un morfismo de A-módulos para todo $a \in A_W$. ∎

A_h podría haber sido definido mediante $A_h(a) = E(h\hat{a})$, pero esta definición sería insuficiente más adelante, ya que si M es una subvariedad cerrada de un abierto de $\mathbb{C}^n$, y $a \in A_M$, no es cierto en general que $\hat{a} \in O(X,M)$, ya que si bien $sp(a) = \hat{a}(X) \subset M$, no vale la inclusión para la imagen de un entorno de X.

Recordemos que por [11 ; Ch.VIII,C] , existe un entorno abierto W de M y una retracción holomorfa $r:W \to M$. Luego tenemos también $A_r:A_W \to A_M$, cuya imagen está contenida en A_M porque $rf \in O(X,M)$ para todo $f \in O(X,W)$. En realidad, la imagen de A_r es exactamente A_M, y A_r es una retracción, porque si $a \in A_M$, $A_r(a) = E(rf)$, donde $f \in O(X,M)$, de manera que $rf = f$; luego $A_r(a) = E(rf) = E(f) = a \in \operatorname{Im} A_r$.

Si U es un abierto de M, A_U resulta abierto en A_M. En efecto, $V = r^{-1}(U)$ es un abierto de $\mathbb{C}^n$, por lo que A_V es un abierto de A^n; pero $A_M \cap A_V = A_U$: si $a \in A_M$ es $a = E(f)$ con $f \in O(X,V)$, $a = A_r(a) = E(rf)$, pero $rf \in O(X,U)$. La otra inclusión es obvia.

Probamos ahora el principal resultado de este capítulo.

<u>Teorema</u>: Si M es una subvariedad cerrada de un abierto de $\mathbb{C}^n$, y $\dim M = k$, entonces A_M es una variedad de Banach cuyos espacios tangentes son A-módulos proyectivos de rango k.

D/ Por el teorema anterior, y como A_r es una retracción holomorfa de imagen A_M, será suficiente ver que A_r es localmente A-directa en a para todo a perteneciente a algún entorno de A_M.

Como r es retracción, $Dr(r(z))\, Dr(z) = Dr(z)$ para todo $z \in W$. Por lo tanto $\operatorname{Im} Dr(z) \subset \operatorname{Im} Dr(r(z))$, pero el rango de la matriz $Dr(z)$ es mayor o igual que el de $Dr(r(z))$ para z cercano a $r(z)$, de manera que en realidad $\operatorname{Im} Dr(z) = \operatorname{Im} Dr(r(z))$ para z en un entorno abierto de M. Esto significa que $\dim \operatorname{Im} Dr(z) = k$ y $\dim \operatorname{Ker} Dr(z) = n-k$ para z cerca de M. $\mathbb{C}^n$ puede escribirse como la suma directa

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^n &= \operatorname{Im} Dr(r(z)) \oplus \operatorname{Ker} Dr(r(z)) = \\ &= \operatorname{Im} Dr(z) \oplus \operatorname{Ker} Dr(r(z)).\end{aligned}$$

Por la continuidad de Dr, podemos escribir también

$$\mathbb{C}^n = \operatorname{Im} Dr(z) \oplus \operatorname{Ker} Dr(z), \quad \text{para } z \text{ cerca de } M.$$

Notemos también que $Dr(r(z))\big|_{\operatorname{Im} Dr(r(z))}$ es la identidad, de manera que $Dr(z)\big|_{\operatorname{Im} Dr(z)}$ es un automorfismo de $\operatorname{Im} Dr(z)$ cerca de M. Podemos suponer que el entorno donde todo esto ocurre es W, si no, se toma uno más chico. Para cada $z \in W$,

$$\alpha_z = \begin{pmatrix} Dr(z)\big|_{\operatorname{Im} Dr(z)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Im} Dr(z) \\ \\ \operatorname{Ker} Dr(z) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \operatorname{Im} Dr(z) \\ \\ \operatorname{Ker} Dr(z) \end{pmatrix}$$

es un automorfismo de $\mathbb{C}^n$. Definamos $\alpha\colon W \to GL_n(\mathbb{C})$ poniendo como $\alpha(z)$ la matriz de α_z en la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Mostraremos que α es una función holomorfa. Para esto, sea $z_0 \in W$. Existe un entorno U de z_0 y funciones holomorfas $v_i\colon U \in \mathbb{C}^n$, para $i=1,\ldots,n$ tales que $v_1(z),\ldots,v_k(z)$ es base de $\operatorname{Im} Dr(z)$, y $v_{k+1}(z),\ldots,v_n(z)$ es base de $\operatorname{Ker} Dr(z)$ para cada $z \in U$. Sea $\beta_z \in \mathbb{C}^{k\times k}$ la matriz de

$Dr(z)\big|_{\mathrm{Im}\, Dr(z)}$ es la base $v_1(z),\ldots,v_k(z)$, y sea $c(z)$ la matriz que cambia la base canónica de $\mathbb{C}^n$ por $v_1(z),\ldots,v_n(z)$. Entonces

$$\alpha(z)=c(z)^{-1}\begin{pmatrix}\beta_z & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}c(z)$$

y será suficiente verificar que β_z es función holomorfa de z en U, pero esto sigue de las ecuaciones

$$Dr(z)(v_i(z))_t = \sum_{s=1}^{k} \beta_{z_{ts}}\, v_i(z)_s\ ,\ \text{para } 1\leq i,\ t\leq k\,.$$

Tenemos, por lo tanto, $A_\alpha : A_W \to A_{GL_n(\mathbb{C})} = GL_n(A)$. Pero

$$A_\alpha(x)\big|_{\mathrm{Im}\, DA_r(x)} = DA_r(x)\big|_{\mathrm{Im}\, DA_r(x)} \quad \text{para todo } x\in A_W.$$

Para ver esto, pongamos $b = E(Dr(g)(h)) \in \mathrm{Im}\, DA_r(x)$, donde $x = E(g)$. $A_\alpha(x)\ (b) = E(\alpha g).\ E(Dr(g)(h)) = E(\alpha g\ .\ Dr(g)(h))$, pero para todo γ cercano a X,

$$\alpha(g(\gamma))\big|_{\mathrm{Im}\, Dr(g(\gamma))} = Dr(g(\gamma))\big|_{\mathrm{Im}\, Dr(g(\gamma))}$$

de manera que

$$A_\alpha(x)(b) = E(Dr(g).Dr(g)(h)) = E(Dr(g))E(Dr(g)(h)) =$$
$$= DA_r(x)(b)\,.$$

Entonces

$$DA_r(x)\big|_{\mathrm{Im}\, DA_r(x)} : \mathrm{Im}\, DA_r(x) \to \mathrm{Im}\, DA_r(x)$$

es un automorfismo.

Probaremos ahora que $A^n = \mathrm{Im}\, DA_r(x) \oplus \mathrm{Ker}\, DA_r(x)$, para $x\in A_W$:

$$0 = \mathrm{Ker}\left(DA_r(x)\Big|_{\mathrm{Im}\, DA_r(x)} \right) = \mathrm{Im}\, DA_r(x) \cap \mathrm{Ker}\, DA_r(x).$$

Si $c \in A^n$, existe $b \in \mathrm{Im}\, DA_r(x)$ tal que $DA_r(x)(b) = DA_r(x)(c)$.

Luego $c = b + (c-b)$, con $b \in \mathrm{Im}\, DA_r(x)$ y $c-b \in \mathrm{Ker}\, DA_r(x)$.

$\mathrm{Ker}\, DA_r(x)$ es cerrado, de manera que la suma es topológica.

Ahora sabemos que $\mathrm{Im}\, DA_r(x)$ es un A-módulo proyectivo. Veamos que tiene rango k.

Primero probaremos que para $x \in A_W$ y $\varphi \in X$,

$$\varphi^n(\mathrm{Im}\, DA_r(x)) = \mathrm{Im}\, Dr(\varphi^n(x))$$

y $\qquad$ (2)

$$\varphi^n(\mathrm{Ker}\, DA_r(x)) = \mathrm{Ker}\, Dr(\varphi^n(x))$$

Tomemos $DA_r(x)(b) \in \mathrm{Im}\, DA_r(x)$.

$$\varphi^n(DA_r(x)(b)) = \widehat{E(Dr(\hat{x})(\hat{b}))}(\varphi) = (Dr(\hat{x})(\hat{b}))(\varphi) =$$
$$= Dr(\varphi^n(x))(\varphi^n(b)) \in \mathrm{Im}\, Dr(\varphi^n(x)).$$

Sea ahora $b \in \mathrm{Ker}\, DA_r(x)$. $Dr(\varphi^n(x))(\varphi^n(b)) = \varphi^n(DA_r(x)(b)) = \varphi^n(0) = 0$, de manera que $\varphi^n(b) \in \mathrm{Ker}\, Dr(\varphi^n(x))$, y hemos probado ambas inclusiones de izquierda a derecha en (2).

Tenemos $A^n = \mathrm{Im}\, DA_r(x) \oplus \mathrm{Ker}\, DA_r(x)$, y φ^n es suryectiva, luego

$$\mathbb{C}^n = \varphi^n(\mathrm{Im}\, DA_r(x)) + \varphi^n(\mathrm{Ker}\, DA_r(x))$$

pero por las inclusiones que acabamos de probar, esta suma es directa.

Entonces

$$\mathbb{C}^n = \varphi^n(\mathrm{Im}\, DA_r(x)) \oplus \varphi^n(\mathrm{Ker}\, DA_r(x)) =$$
$$= \mathrm{Im}\, Dr(\varphi^n(x)) \oplus \mathrm{Ker}\, Dr(\varphi^n(x)),$$

y las inclusiones son en realidad las igualdades (2).

Ahora sea $x \in A_W$, $P = \operatorname{Im} DA_r(x)$, $Q = \operatorname{Ker} DA_r(x)$, y $\varphi \in X$. Entonces $rg_{A_\varphi} P_\varphi = rg_{A_\varphi} (A_\varphi \underset{A}{\otimes} P)$ es, por el lema de Nakayama lo mismo que $\dim_{\mathbb{C}} [(A_\varphi \underset{A}{\otimes} P) \underset{A_\varphi}{\otimes} \mathbb{C}]$, donde $\mathbb{C}$ (y también $\varphi^n(P)$) tiene la estructura de A_φ-módulo inducida por φ. Tenemos entonces el morfismo de A_φ-módulos

$$q : (A_\varphi \underset{A}{\otimes} P) \underset{A_\varphi}{\otimes} \mathbb{C} \longrightarrow \varphi^n(P), \text{ dado por}$$

$$q\Big(\sum_j \Big(\sum_i \frac{a_{ij}}{b_{ij}} \otimes p_{ij}\Big) \otimes \lambda_j\Big) = \sum_j \sum_i \lambda_j \frac{\varphi(a_{ij})}{\varphi(b_{ij})} \varphi^n(p_{ij}).$$

Sea $v_1,\ldots,v_k$ una base de $\varphi^n(P) = \operatorname{Im} Dr(\varphi^n(x))$, y sean $b_1,\ldots,b_k \in P$ tales que $v_i = \varphi^n(b_i)$ para $i=1,\ldots,k$.

Entonces $(\frac{1}{1} \otimes b_i) \otimes 1$, $i=1,\ldots,k$ son $\mathbb{C}$-linealmente independientes: si $0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\frac{1}{1} \otimes b_i) \otimes 1$, es

$$0 = q(0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi^n(b_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

y $\lambda_i = 0$ para $i=1,\ldots,k$.

Luego $rg_\varphi P = \dim_{\mathbb{C}} [(A_\varphi \underset{A}{\otimes} P) \underset{A_\varphi}{\otimes} \mathbb{C}] \geqslant k$.

Análogamente, como $\varphi^n(Q) = \operatorname{Ker} Dr(\varphi^n(x))$, se tiene $rg_\varphi Q \geqslant n-k$. Pero $rg_\varphi P + rg_\varphi Q = n$, de manera que $rg_\varphi P = k$ para todo $\varphi \in X$, es decir $rg P = k$.

Para completar la demostración, sea $a \in A_M$ y pongamos :

$$DA_r(x) = \begin{pmatrix} P(x) & Q(x) \\ R(x) & S(x) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \operatorname{Im} DA_r(a) \\ \operatorname{Ker} DA_r(a) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \operatorname{Im} DA_r(a) \\ \operatorname{Ker} DA_r(a) \end{pmatrix}$$

Como $DA_r(a)$ es un idempotente, $DA_r(a)\big|_{\operatorname{Im} DA_r(a)}$ es la identidad, y $P(a) = I$. Pero $\mathrm{Im}\, DA_r(a)$ es un espacio de Banach, de manera que por la continuidad de P, $P(x)$ será automorfismo de $\mathrm{Im}\, DA_r(a)$ para todo x en un entorno de a.

Hemos verificado las condiciones de iv) del primer teorema de este capítulo, para cada x en un entorno de a; luego A_r es localmente A-directa en b para b cerca de A_M.

∎

Observemos que el espacio tangente $T_a(A_M)$ en a es $\mathrm{Im}\, DA_r(a)$. Estos son A-módulos proyectivos de rango k, pero no tienen por qué ser isomorfos sobre distintas componentes conexas de A_M. Algunos de estos módulos pueden ser libres y otros no. Más adelante daremos una condición suficiente para que $T_a(A_M)$ sea libre, en el caso en que A sea semisimple, pero primero mencionemos que si bien $A_M = F^{-1}(0)$ con $F: A_W \to A^n$ tal que $F(x) = x - A_r(x)$, no podríamos recurrir a esta forma de presentar A_M para probar que es variedad, dado que si bien A_r es localmente A-directa, F no necesariamente lo es. El siguiente ejemplo de una retracción directa, r, en $\mathbb{C}^2$ tal que $id-r$ no es directa, lo muestra claramente:

<u>Ejemplo</u>: Sea $M = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_2 = 0\}$, y sea $r: \mathbb{C}^2 \to M$ dado por $r(z) = (z_1 + z_1 z_2, 0)$. r es holomorfa, y para $z \in M$, $r(z) = z$. Su diferencial está dada por la matriz

$$Dr(z) = \begin{pmatrix} 1 + z_2 & z_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de rango 1 en un entorno de M, mientras que

$$D(id-r)(z) = I - Dr(z) = \begin{pmatrix} -z_2 & -z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 1 en M, pero es un isomorfismo si $z \notin M$. Im Dr(z) e Im D(id-r)(z) cambian con suavidad al mover z, salvo cuando hay cambios bruscos de dimensión. En general, la situación es la siguiente: supongamos que T_a es un proyector en V, y T_x endomorfismos de V que se acercan a T_a en End(V), a medida que x se acerca a a. T_x no son, en general, proyectores. Valen las igualdades

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} T_a \cap \operatorname{Ker}(I - T_x) &= \{0\} \\
\operatorname{Im} T_a \cap \operatorname{Ker} T_x &= \{0\} \\
\operatorname{Ker} T_a + \operatorname{Im} T_x &= V \\
\operatorname{Im} T_a + \operatorname{Im}(I - T_x) &= V \text{ , para } x \text{ cerca de } a,
\end{aligned}$$

pero no son ciertas en general las siguientes:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} T_a \cap \operatorname{Im} T_x &= \{0\} \\
\operatorname{Im} T_a \cap \operatorname{Im}(I - T_x) &= \{0\} \\
\operatorname{Ker} T_a + \operatorname{Ker}(I - T_x) &= V \\
\operatorname{Im} T_a + \operatorname{Ker} T_x &= V,
\end{aligned}$$

por lo que no es fácil probar que una función es localmente directa.

El siguiente ejemplo muestra que se puede tener $T_a|_{\operatorname{Im} T_a} = id$, pero $T_x|_{\operatorname{Im} T_x}$ ni siquiera automorfismos:

<u>Ejemplo:</u> Sea, en $\mathbb{C}^3$, el proyector T_0 dado por la matriz

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para cada $\varepsilon > 0$, pongamos

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $\mathrm{Im}\, T_0 = \{z \in \mathbb{C}^3 : z = (z_1,0,0)\}$ y $\mathrm{Ker}\, T_0 = \{z \in \mathbb{C}^3 : z = (0,z_2,z_3)\}$. Vale $\mathbb{C}^3 = \mathrm{Im}\, T_0 \oplus \mathrm{Ker}\, T_0$, y $T_0|_{\mathrm{Im}\, T_0} = \mathrm{id}$. Pero $\mathrm{Im}\, T_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^3 : z = (z_1,z_2,0)\}$ y $\mathrm{Ker}\, T_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^3 : z = (0,z_2,0)\}$. Es $\mathrm{Ker}\, T_\varepsilon \subset \mathrm{Im}\, T_\varepsilon$, y $T_\varepsilon|_{\mathrm{Im}\, T_\varepsilon}$ tiene imagen $\{z \in \mathbb{C}^3 : z = (z_1,0,0)\}$.

Finalmente, notemos que tampoco había posibilidad de "*levantar*" cartas en M a cartas en A_M, ya que para hacer esto, los elementos $a \in A_M$ deberían tener sp(a) contenido en el dominio de alguna carta de M, lo que en general no ocurre.

§4. Consideremos para cualquier álgebra de Banach A, la categoría $\mathcal{M}(A)$ cuyos objetos son variedades analíticas cuyos espacios tangentes son A-módulos proyectivos, con morfismos funciones holomorfas cuyas diferenciales son morfismos de A-módulos y la composición común de funciones. Sea $\mathcal{M}$ la categoría de subvariedades analíticas cerradas de abiertos de productos finitos de $\mathbb{C}$. Entonces tenemos:

<u>Proposición</u>: $A_{(.)}$ es funtor covariante de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}(A)$.

D/ Para cada objeto M de $\mathcal{M}$, A_M está definida y es un objeto de $\mathcal{M}(A)$ por el teorema anterior. Sean M,N objetos de $\mathcal{M}$, y $h: M \to N$ una función holomorfa. h se puede extender a un entorno abierto W de M, por ejemplo mediante hr. Si $\bar{h}$ es una extensión de h, podemos definir $A_{\bar{h}}$ como al comenzar §3. Definamos entonces a A_h como la restricción de $A_{\bar{h}}$ a A_M, donde $\bar{h}$ es una extensión de h. Obviamente $\mathrm{Im}\, A_h = A_{\bar{h}}(A_M) \subset A_N$, y si h_1 y h_2 son dos extensiones de h, y $a \in A_M$, $a = E(f)$ con $f \in O(X,M)$, entonces $A_{h_1}(a) = E(h_1 f) = E(hf) = E(h_2 f) = A_{h_2}(a)$, de manera que A_h está bien definida. $DA_h(a) = DA_{\bar{h}}(a)\Big|_{T_a(A_M)}$ es un morfismo de A-módulos, así que A_h es un morfismo de la categoría $\mathcal{M}(A)$.

Si $i:M \to M$ es la identidad, y $a \in A_M$, $a = E(f)$, $A_i(a) = E(if) = E(f) = a$. Además, si se tienen $M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{\ell} P$, $A_{(\ell h)}(a) = E(\ell hf) = A_\ell(E(hf)) = A_\ell(A_h(E(f))) = (A_\ell\, A_h)(a)$, de manera que $A_{(\ell h)} = A_\ell\, A_h$, y $A_{(\ .\ )}$ es funtor covariante. ∎

Hay muchas funciones holomorfas en A^n cuyas diferenciales son morfismos de A-módulos pero que no son de la forma A_h para ninguna función holomorfa h. Por ejmplo, tomemos $a \in A$ tal que existan $x \in A$, $\varphi, \psi \in X$ con $\varphi(x) = \psi(x) \neq 0$, y $\varphi(a) \neq \psi(a)$; y consideremos la función $L_a: A \to A$ dada por $L_a(y) = a.y$. L_a es A-lineal, pero $L_a \neq A_h$ para todo h: si L_a fuera A_h, $ax = L_a(x) = A_h(x) = E(h\hat{x})$, de manera que sobre X coincidirían $\hat{a}\hat{x}$ y $h\hat{x}$. Luego $\varphi(a)\ \varphi(x) = h(\varphi(x)) = h(\psi(x)) = \psi(a)\ \psi(x)$, y se tendría $\varphi(a) = \psi(a)$, lo que contradice nuestras hipótesis.

§5. Queremos dar una condición necesaria para que el espacio tangente a A_M sea libre. Necesitamos considerar el fibrado tangente a A_M. Este es el fibrado de base A_M, espacio total

$$TA_M = \bigcup_{a \in A_M} [\{a\} \times T_a(A_M)]$$, con la estructura usual de variedad,

y la proyección a la primera coordenada.

Por otro lado al espacio total TM del fibrado tangente a M es una subvariedad cerrada de un abierto de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, de manera que ya tenemos definido A_{TM}. Podemos identificar $O(X,TM)$ con el subconjunto de los pares $(f,g) \in O(X,M) \times O(X,\mathbb{C}^n)$ tales que $g(\gamma) \in T_{f(\gamma)}(M)$ para todo γ cercano a X. Luego, como

$E(f,g) = (E(f),E(g))$, identificamos A_{TM} con TA_M. Tenemos entonces:

Proposición: Si A es semisimple, y U un abierto paralelizable de M, entonces A_U es un abierto paralelizable de A_M.

D/ Existen k secciones nunca dependientes $s_i : U \to TM$, $i=1,\ldots,k$.

Cada s_i induce $A_{s_i} : A_U \to A_{TM} = TA_M$, por funtorialidad, y como la proyección $A_{TM} \to A_M$ es inducida de la misma manera por la proyección $TM \to M$, las A_{s_i} resultan ser secciones holomorfas.

Son, además, nunca dependientes sobre A. En efecto, si existiera $b \in A_U$, y $c_1,\ldots,c_k \in A$ tales que $\sum_{i=1}^{k} c_i A_{s_i}(b) = 0$, poniendo $b = E(g)$ y $c_i = E(f_i)$, $i = 1,\ldots,k$ se tendría

$$0 = \sum_{i=1}^{k} E(f_i)\, A_{s_i}(E(g)) = \sum_{i=1}^{k} E(f_i)E(s_i g) =$$
$$= E\left(\sum_{i=1}^{k} f_i \,.\, s_i g\right)$$

Entonces para cada $\varphi \in X$, $\sum_{i=1}^{k} f_i(\varphi) \,.\, s_i(g(\varphi)) = 0$. Pero las s_i son nunca dependientes, y $g(X) \subset U$, luego $f_i(\varphi) = 0$ para $i=1,\ldots,k$ y para todo $\varphi \in X$. Como vimos en el capítulo I, cuando A es semisimple, Ker E está formado por las funciones nulas sobre X, de manera que $c_i = E(f_i) = 0$, para $i=1,\ldots,k$.

Proposición: Sea A semisimple, y $a \in A_M$. Si $sp(a)$ tiene algún entorno paralelizable en M, entonces $T_a(A_M)$ es libre.

D/ Sabemos que a pertenece a una parte paralelizable de A_M, por la proposición anterior, es decir existen secciones $\sigma_1,\ldots,\sigma_k$ nunca dependientes cerca de a. Para $i=1,\ldots,k$, $\sigma_i(a) = (a,v_i)$, donde $v_1,\ldots,v_k \in T_a(A_M)$ son A-linealmente independientes. Si L es el A-módulo generado por $v_1,..,v_k$, L es libre de rango k y contenido en $T_a(A_M)$. Necesariamente $T_a(A_M) = L$ y es libre. ∎

Notemos que entonces, si M es un grupo de Lie, o cualquier otra variedad paralelizable, A_M resulta una variedad con espacios tangentes A^k en todo punto, cuando A es semisimple.

En el próximo capítulo nos ocuparemos más detenidamente de los conjuntos espectrales A_M cuando M es un grupo de Lie o un espacio homogéneo, aún los no contenidos en $\mathbb{C}^n$, como el plano proyectivo.

§6. Para terminar, comparemos ahora los conjuntos espectrales A_M y A^M. M, W y r son como en el §3.

Proposición: $A^M = A_M + \mathrm{Rad}(A)^n$.

D/ En el capítulo I vimos que si $N = \{f \in O(X,\mathbb{C}) : f|_X = 0\}$, $E(N) = \mathrm{Rad}(A)$. Identificamos también $\mathrm{Rad}(A)^n$ con $E(N^n)$.

Notemos que $A^M \subset A_W$, puesto que si $\hat{a}(X) = sp(a) \subset M$, $\hat{a} \in O(X,W)$. Luego, para $a \in A^M$, podemos poner

$$a = A_r(a) + (a - A_r(a)).$$

$A_r(a) \in A_M$, y $a - A_r(a) = E(\hat{a}) - E(r\hat{a}) = E(\hat{a} - r\hat{a})$ pertenece a $\mathrm{Rad}(A)^n$, ya que $\hat{a} - r\hat{a} \in N^n$. Para la otra inclusión, sea $b \in A_M$ y $c \in \mathrm{Rad}(A)^n$, digamos $c = E(g)$ con $g \in N^n$. Entonces

$$sp(b + c) = \widehat{b + c}(X) = (\hat{b} + \widehat{E(g)})(X) = (\hat{b} + g)(X) =$$
$$= \hat{b}(X) = sp(b) \subset M.$$ ∎

Esto significa que cuando A es semisimple A_M y A^M coinciden (ver también [22]). También coinciden si M es un abierto. En efecto, la inclusión $A_M \subset A^M$ vale siempre, ya que si $a = E(f) \in A_M$,

$$sp(\hat{a}) = a(X) = \widehat{E(f)}(X) = f(X) \subset M,$$

y si M es abierto vale la otra inclusión: si $a \in A^M$, $a=E(\hat{a})$, y como $sp(a) \subset M$, $\hat{a}(X) \subset M$, pero por ser M abierto un entorno de X también cae dentro de M al aplicar $\hat{a}$; luego $\hat{a} \in O(X,M)$, y $a \in A_M$.

Sin embargo, la inclusión $A_M \subset A^M$ puede ser estricta, como se ve tomando A no semisimple y $M = \{0\} \subset \mathbb{C}$; en este caso $A_M = \{0\}$, mientras que $A^M = Rad(A)$. El ejemplo también muestra que A^M no es, en general una variedad al menos de las discutidas aquí, porque Rad(A) no tiene por qué ser proyectivo como A-módulo.

Tenemos también

<u>Proposición</u>: A^M y A_M tienen el mismo tipo de homotopía.

D/ Sea $\iota: A_M \to A^M$ la inclusión. $A_r \circ \iota$ es la identidad sobre A_M, mientras que $\iota \circ A_r : A^M \to A^M$ es homotópica a la identidad: sea

$$H: [0,1] \times A^M \to A^M$$

dada por $H(t,a) = A_r(a) + t(a - A_r(a))$.

H es continua, $H(0,a) = A_r(a)$ para todo $a \in A^M$, y $H(1,a) = a$ para todo $a \in A^M$. ∎

Conjuntos espectrales y espacios homogéneos

Introducción

Queremos estudiar ahora los conjuntos espectrales resultantes de tomar como variedad analítica a un grupo de Lie, o un espacio homogéneo.

La riqueza de la estructura de los grupos de Lie y de los espacios homogéneos se traduce a los conjuntos espectrales, y esto permitirá definir, dado un espacio homogeneo F, el conjunto espectral A_F, aún cuando F no sea una subvariedad de $\mathbb{C}^n$. A_F en general no estará contenido en A^n. Para esto deberemos restringirnos a veces al caso en que A es semisimple, ya que será importante la caracterización de Ker E dada en el capítulo I, que no tenemos en el caso general.

Definiremos también un cálculo funcional holomorfo para funciones a valores en un espacio homogeneo, e incluso para funciones entre espacios homogeneos.

Por último, relacionaremos la topología de A_F con la de F y la del espectro X de A, probando que existe una biyección entre $[A_F]$ y $[X,F]$ aún sin estar F contenido en $\mathbb{C}^n$.

§1. Sea G un grupo de Lie complejo que es una subvariedad cerrada de un abierto de $\mathbb{C}^n$. Más tarde veremos que esta condición no es excesivamente restrictiva para un grupo de Lie.

Las funciones holomorfas a valores en G x G se pueden pensar como pares de funciones holomorfas con valores en G, de manera que podemos identificar O(X,G x G) con O(X,G) x O(X,G) como antes hemos identificado $O(X,\mathbb{C}^n)$ con $O(X,\mathbb{C})^n$. Aplicando el cálculo funcional, identificaremos a A_{GxG} con $A_G \times A_G$. De esta forma las funciones holomorfas

$$G \times G \longrightarrow G$$

$$\text{y} \qquad G \xrightarrow{(\ )^{-1}} G$$

que dan la estructura de grupo a G, se levantan a funciones

$$A_G \times A_G \longrightarrow A_G$$

$$A_G \longrightarrow A_G \ , \text{ y tenemos}$$

<u>Proposición</u>: A_G es un grupo de Lie. Si $h:H \to G$ es un morfismo de grupos de Lie, entonces $A_h : A_H \to A_G$ también.

D/ Sabemos que las funciones levantadas son holomorfas, por la proposición de la página 45 Para ver que definen una estructura de grupo en A_G, basta usar que $A_{fxg} = A_f \times A_g$, junto con la funtorialidad de $A_{(\ .\ )}$ y considerar los diagramas conmutativos siguientes, donde Δ denota la diagonal, y e la función que vale constantemente el elemento neutro de G.

$$\begin{tikzcd}
 & (G \times G) \times G \arrow[r, ". \times id"] \arrow[dd, leftrightarrow] & G \times G \arrow[d] \\
\text{asociatividad} & & G \\
 & G \times (G \times G) \arrow[r, "id \times ."] & G \times G \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & G \times G \arrow[r, "id \times e"] & G \times G \arrow[d, "."] \\
\text{existencia de neutro} & G \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[r, "id"] & G \\
 & G \times G \arrow[r, "e \times id"] & G \times G \arrow[u, "."']
\end{tikzcd}$$

existencia de inversos
$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "id \times (\ )^{-1}"] & G \times G \arrow[d, "\cdot"] \\ G \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[r, "e"] & G \\ G \times G \arrow[r, "(\ )^{-1} \times id"] & G \times G \arrow[u, "\cdot"'] \end{tikzcd}$$

A_h es holomorfa. Que es un morfismo de grupos sigue de aplicar $A_{(\ .\ )}$ al diagrama

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "h \times h"] \arrow[d, "\cdot"] & G \times G \arrow[d, "\cdot"] \\ H \arrow[r, "h"] & G \end{tikzcd}$$

Explícitamente, el producto en A_G está dado de la siguiente forma: si $a = E(f)$ y $b = E(g)$, $ab = E(.(f,g)) = E(f.g)$, donde $f.g$ es el producto punto a punto. Vemos entonces que con la estructura natural de grupo que tiene $O(X,G)$ el cálculo holomorfo E resulta ser un morfismo de grupos.

El elemento neutro de A_G está dado por $E(f)$, donde $f(\gamma) = e$ para todo γ, y si $a = E(g) \in A_G$, su inverso a^{-1} es $E((\ )^{-1} \circ g) =$
$= E(g^{-1})$.

Además, A_G es abeliano si y sólo si G lo es.

En efecto, si G es abeliano basta considerar

$$\begin{tikzcd} (x_1, x_2) \arrow[d, leftrightarrow] & G \times G \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, "\cdot"] & \\ (x_2, x_1) & G \times G \arrow[r, "\cdot"'] & G \end{tikzcd}$$

y si A_G es abeliano, G también, considerando que G es un subgrupo de A_G mediante la inclusión natural $G \rightarrow A_G$.

Si H es un subgrupo de Lie de G, A_H lo es de A_G, porque si $H \xrightarrow{\iota} G$ es la inclusión, $A_H \xrightarrow{A_\iota} A_G$ es monomorfismo: pongamos

$a = E(f) \in A_H$, y $e = A_\iota(a) = E(\iota f) = E(f)$, entonces $e=a$. A_h es monomorfismo sólo si h lo es, pues $\mathrm{Ker}\ h \subset A_{\mathrm{Ker}\ h} \subset \mathrm{Ker}\ A_h$. La primera inclusión es trivial; para la segunda, si $a = E(f)$ con $f \in O(X,\mathrm{Ker}\ h)$, $A_h(a) = E(hf) = E(e) = e$. Si A es semisimple, vale la recíproca, pues $\mathrm{Ker}\ A_h \subset A^{\mathrm{Ker}\ h}$.

Mencionemos finalmente que si A es semisimple, los espacios tangentes $T_a(A_G)$ son A-módulos libres para todo $a \in A_G$, ya que G es paralelizable por ser grupo de Lie.

§2. Pasamos ahora a definir el conjunto espectral A_F, donde F es un espacio homogeneo no necesariamente contenido en $\mathbb{C}^m$, sobre el que actúa transitivamente un grupo de Lie G, subvariedad cerrada de un abierto de $\mathbb{C}^n$. En todo el §2 el álgebra de Banach A se supondrá semisimple. Recordemos (ver página 21) que para tales álgebras, si f y g son funciones holomorfas en un entorno del espectro X de A, se tiene $E(f) = E(g)$ si y sólo si $f|_X = g|_X$.

Antes de definir A_F necesitamos relacionar $O(X,G)$ con $O(X,F)$. Aquí $O(X,F)$ se toma como $\varinjlim_{W} \varinjlim_{u} O(u(W),F)$, donde como en el capítulo I, los W son entornos abiertos β-convexos y finitamente determinados de X, y u son $\hat{a}_1 \times \dots \times \hat{a}_k$ que determinan a W. Pensaremos a los elementos de $O(X,F)$ como funciones definidas en un entorno de X, es decir, consideraremos representantes en $\varinjlim_{u} O(u(W),F)$. Pondremos en $O(u(W),F)$ la topología compacto-abierta, y en $O(X,F)$ la inducida como límite directo.

Así como G actúa sobre F, se tiene también la acción

$$O(X,G) \times O(X,F) \longrightarrow O(X,F)$$

dada por $(f,h) \mapsto fh$, donde fh es la clase de la función que resulta de tomar representantes de f y h y aplicar la acción $G \times F \to F$ punto a punto. Valen entonces, si $f,g \in O(X,G)$ y $h \in O(X,F)$, $e.h = h$, y $(f.g)h = f(gh)$. e denota la clase de la función que vale constantemente la identidad de G (que también se notará con e). No es cierto, en general, que la acción de O(X,G) sobre O(X,F) sea transitiva, de manera que fijado $h \in O(X,F)$ tendremos una función no suryectiva en general

$$O(X,G) \xrightarrow{\pi^h} O(X,F) \text{ dada por } \pi^h(f) = fh.$$

Necesitaremos el siguiente lema. Damos solamente una idea de la demostración, dejando los detalles para el apéndice.

Lema. Para cada $h \in O(X,F)$, y cada $fh \in \operatorname{Im} \pi^h$, π^h tiene una sección local continua s definida en un entorno de fh y tal que $s(fh) = f$.

D/ Para cada $x \in F$, $a \longmapsto ax$ define

$$G \xrightarrow{\pi^x} F$$

Se puede ver que existen secciones τ^x de π^x definidas en entornos W_x de x tales que $\tau^x(x) = e$. Consideramos en $F \times F$ el subconjunto

$$U = \{(y,x) : y \in W_x\}$$

y definimos $\tau : U \to G$ mediante $\tau(y,x) = \tau^x(y)$. En realidad, para un mismo x existen infinidad de secciones que aplican x en e, pero se pueden elegir en forma canónica de manera que U resulte un entorno de la diagonal de $F \times F$ y τ resulte analítica.

Sea ahora $h \in O(X,F)$, y $U_h = \{h' \in O(X,F) : (h' \times h)(X) \subset U\}$ y $s : U_h \to O(X,G)$ dado por $s(h') = \tau(h' \times h)$. Entonces U_h es entorno de h y s es la sección buscada en el caso f=e.

En el caso general, sea $fh = \pi^h(f) \in \mathrm{Im}\, \pi^h$. Por lo recién probado, existe un entorno de fh y una sección s' de π^{fh} tal que $s'(fh) = e$. Sea

$$R_f: O(X,G) \longrightarrow O(X,G)$$

el automorfismo $R_f(g) = gf$, cuyo inverso es R_{f-1}. Definamos, sobre el entorno en que está definida s', $s = R_f \circ s'$. s es sección continua de π^h, y $s(fh)= f$.

∎

Notemos que tanto π^h como s son continuas. En efecto, π^h es inducida por $O(u(W),G) \to O(u(W),F)$ tal que $f \to f.H$ con $H \in O(u(W),F)$. La continuidad de s se prueba en el apéndice.

Podemos definir sobre $O(X,F)$ la relación: $h \sim h'$ si y sólo si $h' \in \mathrm{Im}\, \pi^h$. Tenemos

<u>Proposición</u>: $\sim$ es una relación de equivalencia, cuyas clases de equivalencia son los abiertos $\mathrm{Im}\, \pi^h$. Vale también $h \sim h'$ si y sólo si existe $f \in O(X,G)$: $h'|_X = fh|_X$.

D/ Que $\sim$ es una relación de equivalencia cuyas clases son $\mathrm{Im}\, \pi^h$ es trivial. Estas son abiertas por el lema anterior. Que $h \sim h'$ implica la existencia de f con $h'|_X = fh|_X$ también es fácil. Para ver la recíproca, notemos que h' pertenece a

$$U_{fh} = \{h' \in O(X,F) : (h' \times fh)(X) \subset W\}$$

donde hay definida una sección s de π^h tal que $s(fh) = f$. Luego $h' = \pi^h s(h') \in \mathrm{Im}\, \pi^h$, es decir $h \sim h'$.

∎

Notaremos con Σ un conjunto formado tomando un representante de cada clase de equivalencia. Se tiene, entonces, $O(X,F) = \dot{\bigcup}_{h \in \Sigma} \mathrm{Im}\, \pi^h$.

Por lo tanto cada $\mathrm{Im}\, \pi^h$ es abierto y cerrado, es decir una unión de componentes conexas de $O(X,F)$.

Para cada $h \in \Sigma$ definimos $\mathcal{K}_h = \{f \in O(X,G): h|_X = fh|_X\}$. Este es un subgrupo de $O(X,G)$; luego su imagen por el cálculo funcional, $H_h = E(\mathcal{K}_h)$ es un subgrupo de A_G (recordemos que E es un morfismo de grupos).

Además H_h es cerrado: si $a_n \to a$, donde $a = E(f)$, y $a_n = E(f_n)$ con $f_n \in \mathcal{K}_h$, $\hat{a}_n \to \hat{a}$ uniformemente sobre X. Luego

$$h|_X = f_n h|_X = \hat{a}_n h|_X \to \hat{a}h|_X$$

es decir, $h|_X = \hat{a}h|_X = fh|_{X,y}$ $f \in \mathcal{K}_h$, o sea $a \in H_h$.

Definimos en $A_G \times \Sigma$ la relación $(a,h) \sim (b,h')$ si y sólo si $h=h'$ y $a^{-1}b \in H_h$. $\sim$ es una relación de equivalencia. Pondremos

$$A_F = (A_G \times \Sigma)/\sim$$

Notemos que lo mismo se obtiene poniendo la unión disjunta $\bigcup_{h\in\Sigma} (A_G/H_h)$. Consideramos en A_F la topología final inducida por la flecha $A_G \times \Sigma \to A_F$.

En la definición de A_F intervienen G y Σ. Pero F puede presentarse como cociente de varios grupos, de manera que debemos verificar que A_F está bien definido.

<u>Proposición</u>: A_F está bien definido.

D/ Se tiene

$$(A_G \times \Sigma)/\sim \longrightarrow (A_{G'} \times \Sigma')/\sim$$

definida de la siguiente manera: $\overline{(a,h)} \to \overline{(a',h')}$, si $a= E(f)$, h' es el representante de la clase de fh en Σ', y si $f' \in O(X,G')$ es tal que $f'h' = fh$, $a' = E(f')$.

Debemos ver que si $b = E(g)$ con $\overline{(a,h)} = \overline{(b,h)}$, entonces $\overline{(a',h')} = \overline{(b',h')}$. Tenemos $a^{-1}b = E(f^{-1}g) = E(\ell)$, con $\ell \in \mathcal{K}_h$. Luego

$f^{-1}gh\,|_X = \ell h|_X = h|_X$, y $fh|_X = gh|_X$. Entonces, por la proposición anterior, la clase de fh es la de gh. Sea h' su representante en Σ'. Si s' es sección de

$$O(X,G') \xrightarrow{\pi^{h'}} O(X,F)$$

cerca de fh, sean f' = s'(fh), y g'= s'(gh). Entonces f'h' = fh y g'h' = gh. Por lo tanto, restringiendo a X se tiene $f'h'|_X = g'h'|_X$, de manera que, con a' = E(f') y b'= E(g'), vale $a'^{-1}b' = E(f'^{-1}g') \in H_{h'}$. Luego $(\overline{a',h'}) = (\overline{b',h'})$.

La continuidad se deduce de la de $s'\circ\pi^h$. Obviamente existe una flecha definida en forma totalmente análoga pero en sentido contrario, que es su inversa. Luego se trata de un homeomorfismo.

∎

Si A es semisimple y el espacio homogéneo F es una subvariedad cerrada de un abierto de $\mathbb{C}^m$, tenemos, en principio dos definiciones para A_F. Son

$$A_F = (A_G \times \Sigma)/_\sim$$

y

$$A_F' = E(O(X,F))$$

donde $E:O(X,\mathbb{C}^m) \longrightarrow A^m$ es el cálculo funcional holomorfo. Queremos ver que ambas definiciones coinciden. Pongamos

$$A_F \to A_F' \text{ tal que } (\overline{a,h}) \mapsto E(fh), \text{ si } a=E(f).$$

Está bien definida: si $(\overline{a,h}) = (\overline{b,h'})$, h=h' y si b=E(g), $a^{-1}b = E(f^{-1}g) = E(\ell)$ con $\ell \in \mathcal{H}_h$. Luego $fh|_X = gh|_X$, y E(fh)= = E(gh). Tenemos además:

<u>Proposición</u>: A_F y A'_F son homeomorfos.

D/ El homeomorfismo es la función definida arriba. Es inyectiva: en efecto, si $E(fh) = E(gh')$, $fh|_X = gh'|_X$, luego h y h' pertenecen a la misma clase, pero ambos son representantes y por lo tanto iguales. Se sigue que $f^{-1}g \in \mathcal{H}_h$, $E(f)^{-1} E(g) \in H_h$, y $\overline{(E(f),h)} = \overline{(E(g),h')}$. La función es suryectiva: sea $E(h') \in A'_F$. Si h es el representante de la clase de h' en $\sum$, existe un $f \in O(X,G)$ <u>tal que</u> $h'|_X = fh|_X$. Luego $E(h') = E(fh)$, que proviene de $(E(f),h)$.

Para ver la continuidad de la función y de su inversa, conviene enfocarla desde el siguiente punto de vista. La acción

$$G \times F \longrightarrow F$$

puede ser levantada a una acción holomorfa

$$A_G \times A'_F \longrightarrow A'_F$$

Sea $h \in \sum$, y $b = E(h)$. Entonces fijando la segunda variable igual a b, se obtiene una función holomorfa

$$A_G \xrightarrow{\pi^b} A'_F$$

Sobre el subconjunto de A_F $(A_G \times \{h\})/_\sim$ (que es A_G/H_h), la función definida antes proviene de π^b, y es por lo tanto continua. Para ver que es abierta, notemos que H_h es igual a $\pi^{b^{-1}}(\{b\})$; bastará ver entonces que para cada $a \in A_G$,

$$D\,\pi^b(a) \;:\; T_a(A_G) \longrightarrow T_{\pi^b(a)}(A'_F)$$

es un epimorfismo A-directo de A-módulos. No sabemos, en principio, si $D\,\pi^b(a)$ es un morfismo de A-módulos, ya que π^b no está dado como

A_g para alguna $g:G \to F$ analítica. Sin embargo, π^b se puede pensar como la composición de las funciones

$$A_G \xrightarrow{\Delta} A_G \times A_G \xrightarrow{(\iota x b)} A_G \times A_F' \xrightarrow{A.} A_F'$$

donde Δ es la diagonal, y A. es la acción levantada de

$$G \times F \longrightarrow F$$

Luego

$$D\pi^b(a) = D(A. \circ (\iota x b)\circ\Delta)(a) = DA.(a,b)\circ D(\iota x b)(a,a)\circ D\Delta(a) =$$

$$= DA.(a,b)\circ(\iota x 0)\circ\Delta \ ,$$

es decir, para cada $c \in T_a(A_G)$,

$$D\pi^b(a)(c) = DA.(a,b)(c,0)$$

con lo cual $D\pi^b(a)$ es obviamente de A-módulos, y $D\pi^b(a) = E(D\pi^h(f))$ si $a = E(f)$. Para todo $x \in A_G$, $\pi^b(x) = xb = x\, a^{-1}ab = \pi^{ab}\, R_{a^{-1}}(x)$, y $D\pi^b(a) = D\pi^{ab}(e) \circ DR_{a^{-1}}(a)$, donde $DR_{a^{-1}}(a)$ es isomorfismo. Luego, basta ver que para cada b,

$$D\pi^b(e):\ T_e(A_G) \longrightarrow T_b(A_F')$$

es un epimorfismo A-directo de A-módulos.

Sea u tal que determina a.h, y por lo tanto a $D\pi^h(e)$ sobre un entorno abierto β-convexo y finitamente determinado W de X. Existe entonces $d_{u,W} \in O(u(W), L(T_e(G),\mathbb{C}^m))$ tal que $D\pi^h(e) = d_{u,W} \circ u$ sobre W. Definamos ahora

$$u(W) \times T_e(G) \longrightarrow u(W) \times \mathbb{C}^m$$

mediante $(z,z') \longmapsto (z, d_{u,W}(z)(z'))$. Este es un morfismo de fibrados vectoriales de base u(W). Llamemos $K_{u,W}$ al fibrado núcleo de este morfismo, y $\zeta_{u,W}$ a su imagen; la fibra de $\zeta_{u,W}$ sobre $z=u(\gamma)$ es $T_{h(\gamma)}(F)$. Tenemos la sucesión exacta de fibrados sobre $u(W)$

$$0 \longrightarrow K_{u,\overline{W}} \longrightarrow u(W) \times T_e(G) \longrightarrow \zeta_{u,\overline{W}} \longrightarrow 0$$

Como $u(W)$ es un abierto polinomialmente convexo (ver página 13) aplicando [11 , VIII - c-7] vemos que la sucesión se parte, es decir, el fibrado trivial $u(W) \times T_e(G)$ es isomorfo a $K_{u,W} \oplus \zeta_{u,W}$.

Tenemos entonces, para los $O(u(W),\mathbb{C})$- módulos de secciones globales

$$\Gamma(u(W) \times T_e(G)) \simeq \Gamma K_{u,W} \oplus \Gamma\zeta_{u,W} \qquad (1)$$

Identificaremos $\Gamma(u(W)\times T_e(G))$ con $O(u(W),T_e(G))$, y $\Gamma K_{u,W}$, $\Gamma\zeta_{u,W}$ con subespacios de $O(u(W),T_e(G))$ y $O(u(W),\mathbb{C}^m)$ respectivamente. Notemos que si $W' \subset W$, está determinada por $v \geq u$, tenemos morfismos de restricción entre estos espacios:

$$s \longmapsto s\big|_{u(W')} \circ \pi \quad , \text{ si } v(W') \xrightarrow{\pi} u(W).$$

Tomando límite directo se obtiene

$$O(X,T_e(G)) \simeq \varinjlim \Gamma K_{u,W} \oplus \varinjlim \Gamma\zeta_{u,W} \subset$$
$$\subset O(u(W),T_e(G)) \oplus O(X,\mathbb{C})^m.$$

Aplicando el cálculo funcional holomorfo, la suma sigue siendo directa, pues si $E(s)= E(s')$, con $s \in \varinjlim \Gamma K_{u,W}$ y $s' \in \varinjlim \Gamma\zeta_{u,W}$, existen $\omega \in \varinjlim \Gamma K_{u,W}$ y $\omega' \in \varinjlim \Gamma\zeta_{u,W}$, nulas sobre X, tales que $s+\omega = s'+\omega'$. Luego $s+\omega = 0 = s'+\omega'$, y $E(s) = 0 = E(s')$.

Tenemos entonces

$$T_e(A_G) \simeq E(\varinjlim \Gamma K_{u,W}) \oplus E(\varinjlim \Gamma\zeta_{u,W})$$

Veamos ahora que $E(\varinjlim \Gamma\zeta_{u,W}) = \operatorname{Im} D\pi^{b}(e)$:

Si $\sigma \in \Gamma\zeta_{u,W}$, por (1) existe $s \in O(u(W),T_e(G))$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd} u(W) \times T_e(G) \arrow[rr] & & \zeta_{u,W} \\ & u(W) \arrow[ul, "\iota \times s"] \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

es decir $\sigma(z) = (z,d_{u,W}(z)(s(z)))$. Luego $E(\sigma\circ u)$ se identifica con $E(D\pi^{h}(e))(E(s\circ u)) \in \operatorname{Im} D\pi^{b}(e)$. Para ver la otra inclusión, si $c = E(g\circ v)$, con $g \in O(v(W'), T_e(G))$, $D\pi^{b}(e)(c) = E(D\pi^{h}(e)(g\circ v))$, pero $z \mapsto (z,d_{v,W'}(z)(g(z)))$ es una sección perteneciente a $\Gamma\zeta_{v,W'}$.

Sabemos que por ser A semisimple y G paralelizable, $T_e(A_G)$ es un A-módulo libre. Luego $\operatorname{Im} D\pi^{b}(e)$ resulta proyectivo. Para cada $\varphi \in X$,

$$\varphi^{n}(\operatorname{Im} D\pi^{b}(e)) = \operatorname{Im} D\pi^{h(\varphi)}(e) = T_{h(\varphi)}(F)$$

tiene dimensión = dim F. Por el Lema de Nakayama, haciendo como en la página 42, vemos que $rg_{\varphi}\ (\operatorname{Im} D\pi^{b}(e))_{\varphi} \geq \dim F$. Pero $\operatorname{Im} D\pi^{b}(e)$ está contendio en $T_b(A_F^{!})$, un A-módulo proyectivo de rango dim F. Luego el rango de $\operatorname{Im} D\pi^{b}(e)$ es dim F, y $\operatorname{Im} D\pi^{b}(e) = T_b(A_F^{!})$.

Para ver que $D\pi^{b}(e)$ es A-directo, sólo falta ver que $\operatorname{Ker} D\pi^{b}(e)$ es sumando directo de A^{n}, pero lo es de $T_e(A_G)$, que a su vez lo es de A^{n}. ∎

Hemos mencionado que el pedir que el grupo de Lie G sea subvariedad cerrada de un abierto de $\mathbb{C}^{n}$ no es una condición restrictiva. La razón es la siguiente.

Por el Teorema de Ado (toda álgebra de Lie compleja es subálgebra del álgebra de Lie $\mathcal{GL}(n,\mathbb{C})$ para algún n y el Teorema de Cartan (si G es un grupo de Lie simplemente conexo, existe una biyección entre Hom (G,H) y Hom $(\mathcal{G},\mathcal{H})$ que respeta monomorfismos , cualquier grupo de Lie simplemente conexo G se puede pensar como subgrupo de Lie (localmente cerrado, y por lo tanto, cerrado) de $GL_n(\mathbb{C})$, un abierto de $\mathbb{C}^{nxn}$. Si, en cambio, G no es simplemente conexo, se puede pensar como un espacio homogéneo cociente de su revestimiento universal, $\widetilde{G}$, que sí es simplemente conexo. Por la proposición recién demostrada, no habrá ambigüedad al definir A_G. De la misma manera, para cualquier espacio homogéneo F, se puede considerar que el grupo que actúa sobre él es simplemente conexo, de manera que siempre que A sea semisimple, se puede definir A_F.

Si A no es semisimple, la dificultad para la formulación de una buena definición de A_F (es decir una definición que coincida con A_F' si $F \subset \mathbb{C}^n$) está en cómo definir los subgrupos H_h de A_G, si no se tiene idea de qué debe ser un elemento de A_F. Esta dificultad está ligada con el problema de caracterizar el núcleo del cálculo funcional holomorfo cuando A no es semisimple.

§3. Sea A semisimple. Queremos definir un cálculo funcional

$$O(X,F) \xrightarrow{E} A_F$$

Lo haremos de la siguiente manera. Dado $h_0 \in O(X,F)$, si $A_F = (A_G \times \sum)/_{\sim}$, y h es el representante de la clase de h_0 en $\sum$, digamos que $h_0 = fh$, pondremos

$$E(h_0) = (\overline{E(f),h})$$

Tenemos:

<u>Proposición</u>: E está bien definido. Es continuo, suryectivo, y $E(h_1) = E(h_2)$ si y sólo si $h_1|_X = h_2|_X$.

D/ Veamos que no depende de f. Si $f_1h = h_0 = f_2h$, también vale restringiendo a X, y se tiene $f_1^{-1}f_2 \in \mathcal{K}_h$, y $E(f_1)^{-1}E(f_2) \in$ $\in H_h$, con lo cual $(\overline{E(f_1),h}) = (\overline{E(f_2),h})$. Tampoco depende de G o de $\sum$, porque se verifica la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} & O(X,F) \arrow[dl, "E"'] \arrow[dr, "E"] & \\ (A_G \times \sum)/\sim \arrow[rr, leftrightarrow] & & (A_{G'} \times \sum')/\sim \end{tikzcd}$$

La continuidad de E resulta de lo siguiente: si $h_0 \in \operatorname{Im} \pi^h$, por el Lema existe un entorno U_{h_0} de h_0 y una sección local continua s de π^h definida sobre U_{h_0} tal que $s(h_0)=f$. Para $h' \in U_{h_0}$, es

$$E(h') = (\overline{E\ s(h'),h})$$

La suryectividad se verifica fácilmente; si $(\overline{a,h}) \in A_F$ y $a=E(f)$, es $E(fh) = (\overline{a,h})$.

Por último, si $h_1|_X = h_2|_X$ y, digamos, $h_1 = f_1h$ y $h_2 = f_2h$, $E(h_1) = (\overline{E(f_1),h})$ y $E(h_2) = (\overline{E(f_2),h})$. Pero

$$f_1h|_X = h_1|_X = h_2|_X = f_2h|_X \text{ implica } f_1^{-1} f_2 \in \mathcal{K}_h$$

Luego $E(f_1)^{-1} E(f_2) \in H_h$, y $E(h_1) = E(h_2)$. Recíprocamente, si $E(h_1) = E(h_2)$, $E(f_1^{-1} f_2) = E(\ell)$ con $\ell \in \mathcal{H}_h$. Luego

$$f_1^{-1} f_2 h \Big|_X \doteq \ell h\Big|_X = h\Big|_X$$

$$\text{y} \quad h_1\Big|_X = f_1 h\Big|_X = f_2 h\Big|_X = h_2\Big|_X \qquad \blacksquare$$

Notemos que cuando F es una subvariedad cerrada de un abierto de $\mathbb{C}^n$, el cálculo funcional definido arriba coincide con el que ya teníamos, es decir conmuta

$$\begin{tikzcd} & O(X,F) \arrow[dl, "E"'] \arrow[dr, "E"] & \\ A_F \arrow[rr, leftrightarrow] & & A'_F \end{tikzcd}$$

En lo que sigue, M denotará o bien una subvariedad cerrada de un abierto de $\mathbb{C}^n$, o un espacio homogeneo no necesariamente contenido en $\mathbb{C}^n$. Lo mismo para N. Cuando sea necesario, se sobreentenderá que el álgebra A es semisimple.

Supongamos que tenemos una función analítica $M \xrightarrow{g} N$. Induce entonces

$$A_M \xrightarrow{A_g} A_N$$

definida así: si $a \in A_M$, existe $h \in O(X,M)$ tal que $a=E(h)$. Sea $A_g(a) = E(gh)$. Esto está bien definido, pues si $a=E(h')$, se tendrá $h\big|_X = h'\big|_X$, y $gh\big|_X = gh'\big|_X$, con lo cual $E(gh) = E(gh')$, si A es semisimple. Si A no es semisimple M y N son subvariedades de $\mathbb{C}^n$, y la existencia de A_g ya se conoce (página 45)

Ahora queremos definir un cálculo funcional que se aplique a funciones definidas sobre abiertos de M.

Para esto, sea $a \in A_M$, $h \in O(X,M)$ tal que $a=E(h)$. Definimos el espectro $sp_M(a)$ como $h(X)$. $sp_M(a)$ es un subconjunto de M. Si g es una función analítica definida en un entorno de $sp_M(a)$, a valores en N, $gh \in O(X,N)$ y definimos

$$\theta_a(g) = E(gh).$$

θ_a está bien definido, como arriba. Tenemos entonces

$$\theta_a : O(sp_M(a), N) \longrightarrow A_N$$

aún si M y N son espacios homogeneos no contenidos en $\mathbb{C}^n$.

§4. Si F es un espacio homogeneo sobre el que actúa G, y x pertenece a F,

$$G \xrightarrow{\ \pi\ } F \text{ dado por } \pi(g) = g.x$$

induce una identificación entre el conjunto de clases a izquierda $G/_H$ y F, donde $H = \{g \in G: gx = x\}$, es el grupo de isotropía de x. Se tiene

$$A_G \xrightarrow{\ A_\pi\ } A_F$$

y también sabemos que A_H es subgrupo de A_G. Es natural entonces preguntarse si $A_G/_{A_H}$ se identifica con A_F (en cuyo caso A_F se podría haber definido de esta manera cuando F no está contenido en $\mathbb{C}^n$), o al menos cuál es la relación entre ambos conjuntos. Tenemos el siguiente resultado:

<u>Proposición</u>: Si A es semisimple, $A_G/_{A_H}$ se identifica con la unión de componentes de A_F que forman $(A_G \times \{x\})/_\sim$, con x constante.

D/ Notemos primero que si $S = \{a \in A_G : A_\pi(a) = x\}$, valen las inclusiones: $A_H \subset S \subset A^H$. En efecto, para ver la primera, tomemos $a = E(f)$, con $f \in O(X,H)$; entonces πf es la función constantemente igual a x, y $A_\pi(a) = E(\pi f) = E(x) = x$. Para la segunda, si $A_\pi(a) = x$, es $E(\pi f) = E(x)$, y se tiene $\pi f|_X = x|_X$; entonces $sp(a) = f(X) \subset H$.

Como aquí A es semisimple, los tres conjuntos son iguales, por el resultado de la página 48.

Definamos

$$A_G/A_H \xrightarrow{\alpha} A_F$$

mediante $\alpha(\bar{a}) = A_\pi(a)$. α está bien definida, porque si $\bar{a} = \bar{b}$, digamos con $a = E(f)$ y $b = E(g)$, $a^{-1}b = E(f^{-1}g) \in A_H$. Luego $E(f^{-1}g) = E(\ell)$ con $\ell \in O(X,H)$. En particular

$f^{-1}g|_X = \ell|_X$. Luego $f^{-1}g\, x|_X = \ell x|_X = x|_X$, y

$\pi f|_X = f\,x|_X = gx|_X = \pi g|_X$. Entonces $A_\pi(a) =$

$= E(\pi f) = E(\pi g) = A_\pi(b)$.

α es inyectiva: si $\alpha(\bar{a}) = \alpha(\bar{b})$, se tiene $E(\pi f) = E(\pi g)$, o sea $\pi f|_X = \pi g|_X$, y $f^{-1}g\, x|_X = x|_X$. De aquí resulta $sp(a^{-1}b) = f^{-1}g(X) \subset H$, y $a^{-1}b \in A^H = A_H$, es decir $\bar{a} = \bar{b}$.

Para ver cuál es la imagen de α, consideremos a x como una función constante, y por la tanto un elemento de $O(X,F)$. Está definido entonces $\mathcal{K}_x = \{f \in O(X,G) : x|_X = f.x|_X\}$, y

$H_x = E(\mathcal{H}_x)$. Vale entonces: $H_x = A_H$. En efecto, si $a = E(f)$, con $fx|_X = x|_X$ $A_\pi(a) = E(\pi \circ f) = E(fx) = E(x) = x$, es decir $a \in S = A_H$. Si $E(f) = a \in A_H = A^H$, $f(X) = sp(a) \subset H$, y $fx|_X = x|_X$, o sea, $f \in \mathcal{H}_x$, y $a \in H_x$.

Entonces $A_{\dot{G}}/A_H$ se identifica con A_G/H_x que es la unión de componentes conexas $(A_G \times \{x\})/\sim$ en A_F.

Notemos que este resultado no depende de $x \in F$, puesto que todas las constantes de $O(X,F)$ son equivalentes (el grupo G actúa transitivamente sobre F). ∎

El siguiente es, entonces, un corolario trivial, que no requiere demostración.

<u>Corolario</u>: Sea A semisimple. Son equivalentes:

i) $A_{(G/H)} = A_G/A_H$.

ii) A_π es suryectiva.

iii) para toda $h,h' \in O(X,F)$, $h \sim h'$.

iv) Toda $h \in O(X,F)$ se levanta a $\bar{h} \in O(X,G)$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, "\bar{h}"] \arrow[r, "h"'] & G/H \end{tikzcd}$$

§5. Estudiamos a continuación la relación entre A_F y $C(X,F)$, donde F es un espacio homogeneo. Como siempre, si F no está contenido en $\mathbb{C}^n$, nos limitamos al caso en que A es semisimple.

Usaremos el siguiente hecho (ver Ramspott [18] y Taylor[22]):

Si F es un espacio homogeneo complejo y X es el espectro de A, entonces:

i) Si h y h' $\in O(X,F)$ son tales que $h|_X$ es homotópica a $h'|_X$ en $C(X,F)$, entonces existe un entorno W de X tal que h y h' son homotópicas en $O(W,F)$.

ii) Si $f \in C(X,F)$, f es homotópica en $C(X,F)$ a $h|_X$ con $h \in O(X,F)$.

Si $[A_F]$ denota componentes arco conexas de A_F, y $[X,F]$ componentes arco conexas de $C(X,F)$, se obtiene

<u>Teorema</u>: Existe una biyección entre $[A_F]$ y $[X,F]$.

D/ Hacemos la demostración para el caso en que A es semisimple. La demostración para A no semisimple pero F contenido en $\mathbb{C}^n$ puede verse en [22]

Sea Γ la transformada de Gelfand generalizada

$$A_F \rightarrow C(X,F) \quad \text{dada por } (\overline{a,h}) \xrightarrow{\Gamma} fh|_X \text{ , si } a=E(f).$$

Γ está bien definida, pues si $(\overline{a,h}) = (\overline{b,h'})$, con $b=E(g)$, es $h = h'$, y $E(f^{-1}g) = E(\ell)$ con $\ell \in \mathcal{K}_h$. Luego $fh|_X = gh|_X$.

Γ es continua, pues para h fijo,

$$A_G \rightarrow A_G/_{H_h} \xrightarrow{\Gamma} C(X,F)$$

está dada por $a \mapsto \hat{a}.h$, que es continua, pues la transformación de Gelfand común es continua. Luego induce una flecha entre las componentes:

$$[A_F] \to [X,F]$$

que es biyectiva: para ver la inyectividad, si ${}^{fh}|_X$ es ${}^{gh'}|_X$, por i) fh es homotópica a gh' en O(X,F). Luego h y h' son equivalentes, pero como ambos son representantes, es decir, pertenecen a Σ, se tiene h=h'. Además, aplicando E, que es continua al camino que une fh con gh en O(X,F) se tiene un camino que une $(\overline{E(f),h})$ con $(\overline{E(g),h'})$ en A_F. Para ver la suryectividad, si $\ell \in C(X,F)$, por ii) existen $h' \in O(X,F)$ tal que ${}^{h'}|_X$ es homotópica a ℓ en C(X,F). Sea $E(h') \in A_F$. Entonces $\Gamma(E(h'))$ es homotópica a ℓ. En efecto, $\Gamma(E(h'))$ coincide con ${}^{h'}|_X$: sea h el representante de la clase de h' en Σ, y sea $f \in O(X,G)$ tal que ${}^{h'}|_X = {}^{fh}|_X$. Entonces $\Gamma(E(h')) = \Gamma((\overline{E(f),h})) = {}^{fh}|_X =$
$= {}^{h'}|_X$. ■

Mencionemos finalmente que las componentes arco conexas de A_F son las componentes conexas de A_F. En efecto, si F está en $\mathbb{C}^n$, hemos probado que A_F es una variedad. En el otro caso, fijado G y Σ, A_F puede pensarse como una unión discreta de espacios homogeneos: $\bigcup_{h\in\Sigma} (A_G/H_h)$, por lo tanto también es localmente arco conexa.

§6. Estudiaremos ahora la relación entre conjuntos espectrales correspondientes a distintas álgebras, y morfismos entre éstas. A y B serán álgebras de Banach; M y N subvariedades analíticas cerradas de abiertos de $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^k$; o bien, espacios homogéneos. B se supondrá semisimple, y si hace falta para que A_M esté definida (es decir, si M es un espacio homogeneo), A también.

Sea $L:A \to B$ un morfismo continuo de álgebras. Su traspuesta,

$$L^*: B' \longrightarrow A' \text{ , dada por } L^*(\gamma) = \gamma \circ L$$

es lineal, continua, y $L^*(X(B)) \subset X(A)$. Se puede definir entonces $L_M : A_M \longrightarrow B_M$ mediante $L_M(a) = E(f \circ L^*)$ si $a=E(f)$. Esta función está bien definida, pues si $E(f) = E(g)$; $f|_{X(A)} = g|_{X(A)}$, por lo tanto $f \circ L^*|_{X(B)} = g \circ L^*|_{X(B)}$, $E(f \circ L^*) = E(g \circ L^*)$.

Dados morfismos $A \xrightarrow{L} B \xrightarrow{L'} B_0$, se prueba fácilmente que $L'_M \circ L_M = (L' \circ L)_M$, y también $\iota_M = \iota_{B_M}$. Se tiene además la siguiente

<u>Proposición</u>: Sea $L:A \to B$ un morfismo de álgebras, y $h:M \to N$ analítica. Entonces conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_M \arrow[r, "A_h"] \arrow[d, "L_M"'] & A_N \arrow[d, "L_N"] \\ B_M \arrow[r, "B_h"'] & B_N \end{tikzcd}$$

D/ Si $a=E(f) \in A_M$,

$(L_N \circ A_h)(a) = L_N(A_h(a)) = L_N(E(h \circ f)) = E(h \circ f \circ L^*) =$

$= B_h(E(f \circ L^*)) = B_h(L_M(a)) = (B_h \circ L_M)(a)$. ■

Notemos que si $M \subset \mathbb{C}^n$, L_M es simplemente $L^n|_A$. Entonces poniendo en la proposición anterior, M=W, y $h = r:W \to N$ una retracción analítica, se tiene

$$\begin{array}{ccc} A_W & \xrightarrow{A_r} & A_N \\ {\scriptstyle L^n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L_N} \\ B_W & \xrightarrow[B_r]{} & B_N \end{array}$$

y derivando en $a \in A_N$,

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{DA_r(a)} & T_a(A_N) \\ {\scriptstyle L^n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle DL_N(a)} \\ B^n & \xrightarrow[DB_r(L^n(a))]{} & T_{L_N(a)}(B_N) \end{array}$$

de donde se deduce que si L es suryectiva, $DL_N(a)$ es un epimorfismo para cada $a \in A_N$. También podemos ver que L_N es abierta cuando L es epimorfismo. En efecto, dado un abierto U de A_N, $L_N(U) = (B_r \circ L^n)(A_r^{-1}(U))$. Pero $A_r^{-1}(U)$ es un abierto de A_W, por lo tanto de A^n; L^n es abierta por ser suryectiva y continua mientras que B_r también es abierta pues es localmente B-directa.

Dado un grupo de Lie G, $L_G : A_G \longrightarrow B_G$ resulta ser un morfismo de grupos:

$$\begin{aligned} L_G(ab) &= L_G(E(f).E(g)) = L_G(E(fg)) = E(fg \circ L^*) = \\ &= E(f \circ L^* . g \circ L^*) = E(f \circ L^*)\, E(g \circ L^*) = \\ &= L_G(a)\, L_G(b). \end{aligned}$$

Si F es un espacio homogeneo sobre el que actúa G, y $h \in O(X(A),F)$, $h \circ L^* \in O(X(B),F)$, y además $L_G(H_h) \subset H_{h\circ L^*}$, de manera que se puede escribir, para cada parte A_G/H_h

de A_F,

$$A_G/H_h \xrightarrow{L_F} B_G/H_{h \circ L^*}$$

Ejemplos y aplicaciones

En [22], Taylor aplica el teorema de Novodvoskii-Taylor, generalizado aquí en la página 68, al cálculo de los primeros grupos de cohomología del espectro de un álgebra de Banach, obteniendo los teoremas de

Shilov [20] $H^{\circ}(X,Z)$ = grupo generado por idempotentes de A.

Arens-Royden [1 ;19]: $H^1(X,Z) = A^{-1}/\exp(A)$

y Forster [9]: $H^2(X,Z) = \mathrm{Pic}(A)$

Mostramos ahora otras aplicaciones de lo desarrollado en los capítulos anteriores, y algunos ejemplos de conjuntos espectrales.

§1.- El grupo general lineal de A es un conjunto espectral. En efecto, valen las igualdades $A_{GL_n(\mathbb{C})} = GL_n(A) = A^{GL_n(\mathbb{C})}$: como $GL_n(\mathbb{C})$ es abierto, vale $A_{GL_n(\mathbb{C})} = A^{GL_n(\mathbb{C})}$, luego bastará ver las inclusiones de izquierda a derecha. Para la primera, tomemos $a = E(f)$ con $f \in O(X,GL_n(\mathbb{C}))$. Como $GL_n(\mathbb{C})$ es un grupo de Lie, $f^{-1} \in O(X,GL_n(\mathbb{C}))$, y $E(f^{-1})\,E(f) = E(f^{-1}f) = I = E(ff^{-1}) =$
$= E(f)E(f^{-1})$, es decir, $a \in GL_n(A)$. Para la otra inclusión, sea $\varphi \in X$, y $a \in GL_n(A)$. $\hat{a}(\varphi)\ \widehat{a^{-1}}(\varphi) = (\hat{a}\widehat{a^{-1}})(\varphi) = \widehat{aa^{-1}}(\varphi) = I$, luego $\hat{a}(\varphi) \in GL_n(\mathbb{C})$ para cada $\varphi \in X$, es decir, $sp(a) =$
$= \hat{a}(X) \subset GL_n(\mathbb{C})$, y $a \in A^{GL_n(\mathbb{C})}$.

§2. Si $M = H^{-1}(0)$ es una variedad analítica dada por los ceros de una función analítica, y A es semisimple, entonces $A_M = (A_H)^{-1}(0)$. En efecto, si H está definida en el abierto W, y tiene valores en $\mathbb{C}^k$, se levanta a una función holomorfa

$$A_H: A_W \longrightarrow A^k$$

cuyos ceros coinciden con A_M: si $a = E(f)$, con $f \in O(X,M)$, $A_H(a) = E(H \circ f) = E(0) = 0$; por otro lado, si $a \in A_W$ y $A_H(a) = 0$, se tiene $E(H\hat{a}) = 0$, luego $H\hat{a}\big|_X = 0$, es decir $H(sp(a)) = \{0\}$, y $sp(a) \subset M$. Por ser A semisimple, $a \in A_M$.

Además el espacio tangente $T_a(A_M)$ a A_M en a está dado por Ker $DA_H(a)$. Para ver esto, notemos que si $r: W \to M$ es una retracción analítica, $A_H \circ A_r = A_{Hr} = 0$, luego $DA_H(a) \circ DA_r(a) = 0$, y $T_a(A_M) = \text{Im } DA_r(a) \subset \text{Ker } DA_H(a)$. El primero es un A-módulo proyectivo de rango = dim M, luego bastará ver que el segundo también lo es. Para ver que es proyectivo, probaremos

$$\text{Ker } DA_r(a) \oplus \text{Ker } DA_H(a) = A^n$$

Que la suma es A^n se ve fácilmente poniendo $b = [b - DA_r(a)(b)] + DA_r(a)(b)$. Para ver que tienen intersección nula, sea $c \in A^n$ tal que $DA_r(a)(c) = 0$ y $DA_H(a)(c) = 0$. Tomemos $\varphi \in X$, y apliquemos φ^n y φ^k:

$$Dr(\varphi^n(a)) \quad (\varphi^n(c)) = 0$$

$$DH(\varphi^n(a)) \quad (\varphi^n(c)) = 0$$

Entonces $\varphi^n(c) \in \text{Ker } Dr(\varphi^n(a)) \cap \text{Ker } DH(\varphi^n(a)) = 0$, es decir $c \in \text{Rad}(A)^n = \{0\}$. El rango de Ker $DA_H(a)$ se puede calcular ahora como se hizo en la página 42, y tenemos $T_a(A_M) = \text{Ker } DA_H(a)$.

Como caso particular, consideremos un polinomio $P = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i X^i \in \mathbb{C}[X]$; pensado como función analítica de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. Se levanta a una función polinómica

$$A_P: A \longrightarrow A$$

que es en realidad el mismo polinomio, es decir $A_P(a) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a^i$

Queremos determinar los ceros de este polinomio en A, es decir $(A_P)^{-1}(0)$. Sabemos que esto es $A_{P^{-1}(0)}$, de manera que si a es un cero de A_P, $a=E(f)$ con $f \in O(X,P^{-1}(0))$. Pero $P^{-1}(0)$ es un conjunto discreto de $\mathbb{C}$, y entonces f es constantemente igual a alguna raíz de P sobre cada componente conexa de X. En otras palabras, $a = z_1e_1 + \ldots + z_ne_n$, donde z_i son raíces de P en $\mathbb{C}$ y e_i son idempotentes ortogonales que suman 1. Entonces P tiene a lo sumo k^r raíces en A, donde k es el grado de P y r la cantidad de componentes conexas del espectro de A. Esto es similar a lo obtenido en [5]. Aquí no pedimos que el polinomio tenga raíces simples, pero estamos trabajando siempre con álgebras conmutativas. Lo mismo vale para una función entera (comparar con [3] y [12]).

Los grupos de Lie-Banach A_G donde G es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{C})$ dado por ecuaciones, son entonces fáciles de definir al menos cuando A es semisimple: si SL es el grupo especial lineal, T las matrices triangulares, T_1 las triangulares con unos en la diagonal, C_z las que conmutan con la matriz $z \in GL_n(\mathbb{C})$, G_p las raíces p-ésimas de la identidad, B_ϕ las que dejan invariante una forma bilineal simétrica $\phi: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, e ID_n las idempotentes, se tiene

$$
\begin{aligned}
A_{SL(\mathbb{C})} &= SL(A)\\
A_{T(\mathbb{C})} &= T(A)\\
A_{T_1(\mathbb{C})} &= T_1(A)\\
A_{C_z(\mathbb{C})} &= C_z(A)\\
A_{G_p(\mathbb{C})} &= G_p(A)\\
A_{B\phi(\mathbb{C})} &= B_\phi(A)\\
A_{ID_n(\mathbb{C})} &= ID_n(A)
\end{aligned}
$$

§3. Sea $U_n(A^k) = \{a \in A^{kxn}$: existe $a' \in A^{nxk}$ con $a'a = I \in A^{nxn}\}$. Veremos que $A_{U_n(\mathbb{C}^k)} = U_n(A^k) = A^{U_n(\mathbb{C}^k)}$. Como $U_n(\mathbb{C}^k)$ es abierto, sólo veremos las inclusiones de izquierda a derecha. Para la primera, notemos primero que si $z \in U_n(\mathbb{C}^k)$, y

$$V_z = \{z' \in \mathbb{C}^{nxk} : z'z = I\} ,$$

V_z es una variedad lineal, luego el fibrado

$$
\begin{array}{l}
\displaystyle\bigcup_{z \in U_n(\mathbb{C}^k)} V_z \subset U_n(\mathbb{C}^k) \times \mathbb{C}^{nxk}\\
\quad\Big\downarrow p_1\\
U_n(\mathbb{C}^k)
\end{array}
$$

tiene fibras contráctiles y existe (ver [21]) una sección analítica global, s. Si $a = E(f) \in O(X, U_n(\mathbb{C}^k))$,

$a' = E(p_2 sf) \in A^{nxk}$, y $a'a = I$, es decir $a \in U_n(A^k)$. Para ver la otra inclusión, si $\varphi \in X$, y $a \in U_n(A^k)$, sea $a' \in A^{nxk}$ tal que $a'a = I$. $\hat{a}'(\varphi)\ \hat{a}(\varphi) = \widehat{a'a}(\varphi) = I(\varphi) = I$, de manera que $\hat{a}(\varphi) \in U_n(\mathbb{C}^k)$. Luego $sp(a) = \hat{a}(X) \subset U_n(\mathbb{C}^k)$, es decir $a \in A^{U_n(\mathbb{C}^k)}$

En el caso particular en que $k=1$, se tienen unimodulares de A (ver [6]).

§4. Queremos aplicar lo dicho sobre espacios homogeneos no contenidos en $\mathbb{C}^n$ al caso $F = \mathbb{P}^1$, la recta proyectiva compleja, o plano extendido. Se puede presentar a $\mathbb{P}^1$ como $GL_2(\mathbb{C})/_H$, donde $H = \{z \in GL_2(\mathbb{C}) : z_{21} = 0\}$. En [10], Glickfeld ha definido la esfera de Riemann, A_∞ , de un álgebra de Banach conmutativa A, de la siguiente manera: se define en $U_2(A)$ la relación de equivalencia $(a_1, a_2) \sim (a_1', a_2')$ si para un inversible u de A, vale $a_i' = ua_i$, $i = 1,2$. A_∞ es entonces el cociente de $U_2(A)$ por esta relación.

Ya hemos visto en la página 66, que se tiene la inclusión

$$A_{GL_2(\mathbb{C})} \big/ A_H \longrightarrow A_{\mathbb{P}^1}.$$

Pero también sabemos que $A_{GL_2(\mathbb{C})} = GL_2(A)$, y que $A_H = H(A) = \{a \in GL_2(A) : a_{21} = 0\}$, de manera que la inclusión es

$$GL_2(A) \big/ H(A) \longrightarrow A_{\mathbb{P}^1}$$

Veamos que $GL_2(A) \big/ H(A)$ coincide con A_∞. Tenemos

$$A_\infty \to GL_2(A) \big/ H(A) \quad \text{dada por } (\overline{a_1, a_2}) \mapsto \bar{c}$$

donde $c = \begin{pmatrix} a_1 & -b_2 \\ a_2 & b_1 \end{pmatrix}$, si $a_1b_1 + a_2b_2 = 1$. Esto está bien definido, pues si $(a_1,a_2) \sim (a_1',a_2')$, y u es un elemento inversible de A tal que $a_i' = ua_i$, $i = 1,2$; y se tiene

$$c^{-1}c' = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ua_1 & -u^{-1}b_2 \\ ua_2 & u^{-1}b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \in H(A)$$

Luego $\bar{c} = \bar{c}'$. Por otro lado se tiene también

$$GL_2(A)/_{H(A)} \longrightarrow A_\infty \qquad \text{dada por } \bar{a} \mapsto \overline{(a_{11},a_{21})}.$$

Está bien definida: si $\bar{a} = \bar{b}$, $a^{-1}b = x$, con $x \in H(A)$. Luego,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{pmatrix}$$

y $(a_{11},a_{21}) \sim (b_{11},b_{21})$. Las composiciones dan la identidad:

$$A_\infty \longrightarrow GL_2(A)/_{H(A)} \longrightarrow A_\infty$$

es trivialmente la identidad.

$$GL_2(A)/_{H(A)} \longrightarrow A_\infty \longrightarrow GL_2(A)/_{H(A)}$$

que es

$$\bar{c} \longrightarrow \overline{(c_{11}, c_{21})} \longrightarrow \overline{\begin{pmatrix} c_{11} & -(c^{-1})_{12} \\ c_{21} & (c^{-1})_{11} \end{pmatrix}}$$

es la identidad, pues

$$\begin{pmatrix} (c^{-1})_{11} & (c^{-1})_{12} \\ -c_{21} & c_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c_{21}c_{12} + c_{11}c_{22} \end{pmatrix} \in H(A)$$

Entonces $A_{\mathbb{P}^1}$ es, en general, más grande que A_∞. Tenemos la siguiente condición suficiente para la igualdad.

<u>Proposición</u>: Si $H^2(X,Z) = 0$ (o sea $\mathrm{Pic}(A)=0$), entonces $A_\infty = A_{\mathbb{P}^1}$.

D/ La inclusión

$$GL_2(A)/_{H(A)} \longrightarrow A_{\mathbb{P}^1}$$

está dada por $\bar{a} \mapsto A_\pi(a) = E(\pi\hat{a})$, donde $\pi : GL_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1$ es la función que manda la matriz z en la clase de (z_{11}, z_{21}) en $\mathbb{C}^2 - \{0\}/_\sim$.

Sabemos que $E: O(X,\mathbb{P}^1) \to A_{\mathbb{P}^1}$ es suryectiva

Debemos ver, entonces, que para cada $h \in O(X, \mathbb{P}^1)$ existen un $a \in GL_2(A)$ tal que $E(h) = E(\pi\hat{a})$.

Digamos que h es finitamente determinada por v sobre W, es decir, $h = H \circ v$, con $H \in O(v(W), \mathbb{P}^1)$. Como $H^2(X,Z) = 0$, se puede tomar W tal que $H^2(W,Z) = 0$, y como W es homotópicamente equivalente a $v(W)$, $H^2(v(W),Z) = 0$. Luego, por [11 ; VIII,B-13] existen $F_1, F_2 \in O(v(W),\mathbb{C})$ coprimos tales que $H = \frac{F_1}{F_2}$. Entonces $b_1 = E(F_1 \circ v)$ y $b_2 = E(F_2 \circ v)$ también son coprimos, digamos $b_1c_1 + b_2c_2 = 1$. Sea

$$a = \begin{pmatrix} b_1 & -c_2 \\ & \\ b_2 & c_1 \end{pmatrix} \in GL_2(A)$$

Para cada $\varphi \in X$, $\pi\hat{a}(\varphi)$ = clase de $(\hat{b}_1(\varphi), \hat{b}_2(\varphi))$ = clase de $(F_1 v(\varphi), F_2 v(\varphi)) = \dfrac{F_1 v(\varphi)}{F_2 v(\varphi)} = H(v(\varphi)) = h(\varphi)$. Luego $E(h) =$ $= E(\pi\hat{a}) = A_\pi(a)$.

A se puede considerar contenida en $A_{\mathbb{P}^1}$; más aún, en $GL_2(A)/_{H(A)}$, mediante $a \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$. Recordemos que para $a \in A_{\mathbb{P}1}$, $sp_{\mathbb{P}^1}(a) = \hat{a}(X)$. Entonces $a \in A$ si y sólo si $\infty \notin sp_{\mathbb{P}^1}(a)$ En efecto, si $\infty \notin sp_{\mathbb{P}^1}(a)$, $V = \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$ es un entorno de $sp_{\mathbb{P}^1}(a)$, y $V \subset \mathbb{C}$. Sea $\iota : V \to \mathbb{C}$ esa inclusión. Aplicando el cálculo holomorfo, resulta $a \in A$. La otra implicación es trivial.

Hemos aplicado recién el cálculo funcional holomorfo de la página 62. Tenemos, para cualquier función meromorfa f definida en un entorno de $sp_{\mathbb{P}^1}(a)$, un elemento $f(a) \in A_{\mathbb{P}^1}$. Por ejemplo, la función $\frac{1}{z}$ se puede aplicar a cualquier elemento de $A_{\mathbb{P}1}$, en particular a todo elemento a de A. Si a es inversible, $\frac{1}{a}$ coincide con $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a^{-1} & 1 \end{bmatrix}$, o sea, con a^{-1}.

§5. Dada la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{e^{2\pi i z}} C^* \longrightarrow 0$$

queremos ver qué se obtiene al levantarla mediante el funtor $A_{(\ .\ )}$. Tendremos

$$0 \longrightarrow A_Z \longrightarrow A_{\mathbb{C}} \xrightarrow{A_{e^{2\pi iz}}} A_{\mathbb{C}^*}$$

Se ha perdido la suryectividad, pero la sucesión sigue siendo exacta. La función $A_{e^{2\pi iz}}$, levantada de una función entera, es la misma, es decir, $A_{e^{2\pi iz}}(a) = e^{2\pi ia}$. Además $A_{\mathbb{C}} = A$. Tenemos entonces, poniendo a la derecha la imagen de la función exponencial,

$$0 \longrightarrow A_Z \longrightarrow A \xrightarrow{e^{2\pi ia}} \exp(A) \longrightarrow 0$$

Como Z es discreto, $A_Z = \{a = k_1e_1 + \ldots + k_re_r : k_i \in Z\}$, donde e_i es el idempotente a la i-esima componente conexa de X. Entonces

$$\exp(A) = \bigoplus_{i=1}^{r} \left({}^{Ae_i}\!/_{Ze_i} \right)$$

Apéndice

Hemos dejado para el final la demostración del lema de la página 54. Recordemos cuál era la situación.

F es un espacio homogeneo sobre el que actúa el grupo de Lie G. Esta acción induce, aplicándola punto a punto,

$$O(X,G) \times O(X,F) \longrightarrow O(X,F)$$

y fijando $h \in O(X,F)$ tenemos

$$O(X,G) \xrightarrow{\pi^h} O(X,F)$$

que no es suryectiva en general. Queríamos probar la existencia de secciones locales continuas de π^h:

<u>Lema</u>: Para cada $h \in O(X,F)$, y cada $fh \in \operatorname{Im} \pi^h$, π^h tiene una sección local continua s definida en un entorno de fh y tal que $s(fh) = f$.

D/ Probemos primero el caso f=e, la función que vale constantemente la identidad de G.

Sea $\mathcal{G}$ el álgebra de Lie de G, y D un entorno de cero en $\mathcal{G}$ sobre el cual la función exponencial es un difeomorfismo analítico con un entorno V de la identidad de G. D se puede tomar de manera que cualquier proyección ortogonal sobre un subespacio de $\mathcal{G}$ de un elemento de D, pertenezca a D.

Para cada $x \in F$, sea $\pi^x : G \to F$ dada por $a \mapsto ax$, y $H_x = \pi^{x^{-1}}(x)$ el grupo de isotropía de x. $\mathcal{H}_x$ denotará el álgebra

de Lie de H_x. Es un subespacio de $\mathcal{G}$, y vale $\exp(D \cap \mathcal{H}_x) = V \cap H_x$.
Para cada $y \in D$, escribiremos

$$y = y_1 + y_2, \text{ con } y_1 \in \mathcal{H}_x, \ y_2 \in \mathcal{H}_x^{\perp} .$$

Definamos $\psi_x : D \to G$ mediante $\psi_x(y) = \exp y_1 . \exp y_2$, y consideremos la función

$$F \times D \xrightarrow{\ \beta\ } F \times G \text{ dada por } \beta(x,y) = (x, \psi_x(y)).$$

En seguida veremos que β es analítica. Restringiendo a $F \times \{0\}$ se tiene $\beta(x,0) = (x,e)$, y en un entorno de este conjunto la función β es un difeomorfismo analítico local, de manera que existe un entorno de $F \times \{0\}$ sobre el cual es un difeomorfismo analítico. En otras palabras, se puede encontrar una función continua $\varepsilon : F \to \mathbb{R}_{>0}$ tal que la función β es bianalítica sobre $\{(x,y) \in F \times G : \|y\| < \varepsilon(x)\}$. Para cada x, sea D_x la bola de centro cero y radio $\varepsilon(x)/_2$.

Veamos que $\pi^x \circ \psi_x|_{D_x \cap \mathcal{H}_x^{\perp}} : D_x \cap \mathcal{H}_x^{\perp} \to F$ es inyectiva:
si $y, y' \in D_x \cap \mathcal{H}_x^{\perp}$ tales que $\exp y . x = \exp y' . x$,

$$\exp(-y') . \exp y = (\exp y')^{-1} . \exp y \in H_x .$$

Luego existe $y_0 \in D_x \cap \mathcal{H}_x$ tal que

$$\exp(-y') . \exp y = \exp y_0$$

$$\psi_x(0 - y') = \exp(-y') = \exp y_0 . \exp(-y) = \psi_x(y_0 - y).$$

Pero $\|y'\|$, $\|y_0 - y\| < \varepsilon(x)$, entonces $0 = y_0$, $y' = y$. Poniendo $W_x = \pi^x(\psi_x(D_x))$ y $\alpha_x = [\pi^x \circ \psi_x|_{D_x \cap \mathcal{H}_x^{\perp}}]^{-1}$, se tiene una carta (α_x, W_x) para F cerca de x. Podemos definir, para $z \in W_x$, $\tau^x(z) = \exp(\alpha_x(z))$. τ^x es sección analítica de π^x, y $\tau^x(x) = e$.

Resumiendo, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
D_x \arrow[r, "\psi_x"] \arrow[d, "p_x"'] & \psi_x(D_x) \arrow[d, shift left, "\pi^x"] \\
D_x \cap \mathcal{H}_x^{\perp} & W_x \arrow[l, "\alpha_x"] \arrow[u, shift left, "\tau^x"]
\end{tikzcd}$$

donde p_x es la proyección y $\mapsto y_2$.

Sea ahora $U = \{(x_1,x_2) \in F \times F\colon x_1 \in W_{x_2}\}$. Claramente U contiene a la diagonal Δ de $F \times F$. Veamos que es un entorno de Δ, o sea que dado $x \in F$, existe algún entorno V_x de x tal que si $z,z' \in V_x$, entonces $z \in W_{z'}$. Si no fuera así, habría un $x \in F$, y sucesiones $x_n \to x$, $x_n' \to x$ tales que para cada n, $x_n \notin W_{x_n'}$. Aplicando, para n suficientemente grande, la sección τ^x, se obtiene $\tau^x(x_n) \to e$, $\tau^x(x_n') \to e$ y $\tau^x(x_n) \notin \psi_{x_n'}(D_{x_n'}) . \tau^x(x_n')$ pues si $\tau^x(x_n) \in \psi_{x_n'}(D_{x_n'}) . \tau^x(x_n')$, aplicando π^x se tendría

$$x_n \in \psi_{x_n'}(D_{x_n'}).x_n' = \pi^{x_n'}(\psi_{x_n'}(D_{x_n'})) = W_{x_n'}$$

Luego $\tau^x(x_n')^{-1} \; \tau^x(x_n) \notin \psi_{x_n'}(D_{x_n'})$. Pero esto es absurdo, pues $\tau^x(x_n')^{-1} \; \tau^x(x_n) \to e$, y existe un entorno de e contenido en $\psi_{x_n'}(D_{x_n'})$ para todo n. En efecto, si K es el compacto $\{x,x_n'\colon n \in \mathbb{N}\}$ y $\varepsilon = \text{mín} \; \varepsilon(K)$, sea D_ε la bola de centro cero y radio $\varepsilon/2$ en G; $K \times D_\varepsilon \xrightarrow{\beta} K \times G$ es un difeomorfismo analítico con su imagen. Sea V_e un entorno de e tal que $K \times V_e$ está contenido en esta imagen. Entonces $V_e \subset \psi_{x_n'}(D_\varepsilon) \subset \psi_{x_n'}(D_{x_n'})$ para cada n.

Supondremos que U es abierto; si no fuera así, tomamos su interior, sabiendo que contiene a Δ.

Definimos entonces, $\tau : U \to G$ mediante

$$\tau(x_1,x_2) = \tau^{x_2}(x_1)$$

Notemos que $\tau(x,x) = e$ para todo $x \in F$. τ es una función analítica. Esto es claro para la primera variable. Veamos la segunda.

Fijemos $x \in F$. Para cada $x' \in F$ se puede escribir $x' = ax$ con $a \in G$ (por ejemplo, $a = \tau^x(x')$, si $x' \in W_x$). Entonces el grupo de isotropía de x' es conjugado del de x: $H_{x'} = H_{ax} =$ $= \{c \in G: c\,ax = ax\} = \{c \in G: a^{-1}c\,a\,x = x\} = \{c \in G: a^{-1}c\,a \in H_x\} =$ $= a\,H_x\,a^{-1} = I_a(H_x)$, donde $I_a : G \to G$ es el automorfismo de grupos de Lie, $I_a(b) = a\,b\,a^{-1}$. Se tiene también $\mathcal{H}_{x'} = DI_a(e)(\mathcal{H}_x)$.

Sea $B = \{v_1,\dots,v_n\}$ base de $\mathcal{G}$ tal que $\{v_1,\dots,v_k\}$ es base de $\mathcal{H}_x$. Entonces $DI_a(e)(v_1),\dots,DI_a(e)(v_k)$ es base de $\mathcal{H}_{x'}$. Para cada $y \in \mathcal{G}$ podemos escribir,

$$y = y_1 + y_2 = \sum_{i=1}^{k} c_a(y)_i\, DI_a(e)(v_i) + \left[y - \sum_{i=1}^{k} c_a(y)_i\, DI_a(e)(v_i) \right]$$

y entonces

$$p_{x'}(y) = y - \sum_{i=1}^{k} c_a(y)_i\, DI_a(e)(v_i) \qquad (1)$$

donde $c_a(y)_i$ son los coeficientes que correspondan. Mencionemos que si $ax = x' = bx$, los sumandos de esta igualdad son distintos si se considera I_a o I_b, pero la suma, y por lo tanto $p_{x'}$, no depende de cómo se escriba x'. Sin embargo, mediante τ^x se pueden elegir los $a \in G$ en forma analítica de x' cuando ésta pertenece a W_x, de manera que para ver que $p_{x'}(y)$ es analítica de x' basta ver que (1) lo es de a. Pero si $y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$, resulta

$$c_a(y)_i = \sum_{j=1}^{n} M_B(DI_{a^{-1}}(e))_{ij}\, y_j$$

donde $M_B(DI_{a^{-1}}(e))$ es la matriz de $DI_{a^{-1}}(e)$ en la base B. Esta es analítica de a, pues $DI_{a^{-1}}(e) = Ad(a^{-1})$, representación adjunta en a^{-1}, y Ad es analítica (ver, por ejemplo [4]). Luego también

$$\psi_{x'}(y) = \exp(y - p_{x'}(y)).\ \exp p_{x'}(y)$$

es analítica de x'. Tenemos ahora, para $x' \in W_x$ y $a = \tau^x(x')$,

$$\tau^{x'}(x) = \psi_{x'}(\alpha_{x'}(x)) = \psi_{x'}(\alpha_{x'}(a^{-1}.\ x')) =$$

$$= \psi_{x'} \circ \alpha_{x'} \circ \pi^{x'}(a^{-1}) = \psi_{x'} \circ p_{x'} \circ \psi_{x'}^{-1}(a^{-1}) =$$

$$= \psi_{x'} \circ p_{x'} \circ \psi_{x'}^{-1}\ (\tau^x(x')^{-1})$$

que es analítica de x'.

Sea $U_h = \{h' \in O(X,F) : (h' \times h)(X) \subset U\}$. U_h es entorno de h.

Definimos $s : U_h \to O(X,G)$ poniendo $s(h') = \tau \circ (h' \times h)$. Es una sección de π^h: en efecto, $(\pi^h s)\ (h') = h'$, pues para cada γ cercano a X, $\pi^h(s(h'))(\gamma) = s(h')(\gamma).h(\gamma) = \tau(h'(\gamma),h(\gamma))h(\gamma) = \tau^{h(\gamma)}(h'(\gamma))h(\gamma) = (\pi^{h(\gamma)}\ \tau^{h(\gamma)})(h'(\gamma)) = h'(\gamma)$. Además $s(h)(\gamma) = \tau(h(\gamma),h(\gamma)) = e$, de manera que $s(h) = e$.

Veamos ahora la continuidad de s. Supongamos que h es finitamente determinada por u sobre W, $h = H \circ u$ con $H \in O(u(W),F)$, y que $H_n \to H_0$ en $O(u(W),F)$ (la topología es la compacto-abierta). Claramente, $(H_n \times H) \to (H_0 \times H)$ en $O(u(W), F \times F)$.

Si V es un abierto cualquiera de G y Q un compacto de $u(W)$ tal que $\tau \circ (H_0 \times H)(Q) \subset V$, sea $V' = \tau^{-1}(V)$ y n_0 tal que para cada $n \geq n_0$, $(H_n \times H)(Q) \subset V'$. Entonces $\tau \circ (H_n \times H)(Q) \subset V$, es decir $\tau \circ (H_n \times H) \to \tau \circ (H_0 \times H)$ en $O(u(W),G)$.

Pasamos ahora al caso general, es decir $f \in O(X,G)$ arbitrario, y $fh = \pi^h(f) \in \mathrm{Im}\, \pi^h$. Sabemos, por lo demostrado arriba, que existe un entorno de fh, y una sección continua s' de π^{fh} definida sobre este entorno y tal que $s'(fh) = e$. Sea

$$R_f : O(X,G) \to O(X,G) \text{ dada por } R_f(g) = gf$$

y sea $s = R_f \circ s'$. s es continua, pues R_f y s' lo son. Es sección de π^h, porque $(\pi^h s)(h') = \pi^h(s'(h')f) = s'(h')fh = (\pi^{fh} \circ s')(h') = h'$, y $s(fh) = R_f(s'(fh)) = s'(fh)f = ef = f$.

Bibliografía

[1] R.Arens: The group of invertible elements of a commutative Banach algebra, Studia Math. 11(1963), 21-23.

[2] R.Arens and A.P.Calderón: Analytic functions of several Banach algebra elements, Ann.Math. 62(2)(1955), 204-216.

[3] F.F. Bonsall and J. Duncan: "Complete normed algebras", Springer, New York, 1973.

[4] N.Bourbaki: "Lie groups and Lie algebras", Addison-Wesley, Reading Mass., 1975.

[5] G.Corach: Elementos algebraicos en álgebras topológicas, Rev.U. Mat.Arg. 30(2)(1982), 118-127.

[6] G.Corach and A.Larotonda: Unimodular rows in Banach algebras, Trab. de Mat. (IAM), 39(1982).

[7] I.G.Craw: A condition equivalent to the continuity of characters on a Fréchet algebra, Proc.London Math.Soc. (3) 22(1971), 452-464.

[8] J.Eells, Jr.: On the geometry of function spaces, en Simp.Int. de Top.Alg., Univ.Aut.de México y UNESCO, 1958.

[9] O.Forster: Functiontheoretische Hilfsmittel im der Theorie der kommutativen Banach-Algebren, Jber.Deutsch.Math.Verein 76(1974) 1-17.

[10] B.W.Glickfeld: The Riemann sphere of a commutative Banach algebra, Trans. Am.Math.Soc. 134(1968), 1-28.

[11] R.C.Gunning and H.Rossi: "Analytic functions of several complex variables", Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[12] E.Hille: On roots and logarithms of elements of a complex Banach algebra, Math.Ann. 136 (1958) 46-57.

[13] S.Lang: "Introduction aux variétés différentiables", Dunod, Paris, 1967.

[14] A.Larotonda: "Notas sobre variedades diferenciables", INMABB, UNS, Bahía Blanca, 1980.

[15] L. Nachbin: "Introdução à análise funcional: espaços de Banach e cálculo diferencial", OEA, Washington D.C., 1976.

[16] L. Nachbin: A glimpse at infinite dimensional holomorphy, en Lecture Notes in Math. N°364, (1974).

[17] I. Raeburn: The relationship between a commutative Banach algebra and its maximal ideal space, Jour of Funct.Anal. 25(4) (1977) 366-390.

[18] K.J.Ramspott: Stetige und holomorphe Schnitte in Bundeln mit homogener Faser, Math.Zeitschr. 89(1965) 234-246.

[19] H.L. Royden: Function algebras, Bull. Am.Math.Soc.69(1963), 281-298.

[20] G.E.Shilov: On decomposition of a commutative normed ring in a direct sum of ideals, (Math.Sb. 32(1953) 353-364) Am. Math.Soc.Transl. 1(1955) 37-48.

[21] N.E.Steenrod: "The topology of fibre bundles", PUP, Princeton, N.J., 1951.

[22] J.L.Taylor: Topological invariants of the maximal ideal space of a Banach algebra, Adv.in Math. 19(1976) 149-206.

[23] W.R.Zame: Existence, uniqueness and continuity of functional calculus homomorphisms, Proc.London Math.Soc. 39(1)(1979)73-92.