

## Tesis de Posgrado

# Análisis numérico del problema de Stefan multidimensional a dos fases por el método de regularización

Nochetto, Ricardo H.

1983

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Nochetto, Ricardo H.. (1983). Análisis numérico del problema de Stefan multidimensional a dos fases por el método de regularización. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1787\\_Nochetto.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1787_Nochetto.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Nochetto, Ricardo H.. "Análisis numérico del problema de Stefan multidimensional a dos fases por el método de regularización". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1983.

[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1787\\_Nochetto.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1787_Nochetto.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

ANALISIS NUMERICO DEL PROBLEMA DE  
STEFAN MULTIDIMENSIONAL A DOS FASES  
POR EL METODO DE REGULARIZACION

Trabajo presentado para optar al grado de  
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

Ricardo H. Nochetto

Director: Néstor E. Aguilera

Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias  
Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Setiembre 1983

Trabajo realizado como becario del CONICET en el Programa Especial de Ma-  
temática Aplicada - Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria  
Química, Santa Fe.

1787  
Ej. 2

Quiero agradecer al Dr. Néstor E. Aguilera por su constante preocupación, guía y esfuerzo sin los cuales no hubiera sido posible este trabajo.

Deseo reconocer especialmente al Dr. Luis Caffarelli quien me propuso el problema y orientó en el mismo, y por las sustanciosas discusiones que con él he realizado sobre algunos tópicos de estas notas.

El trabajo ha sido realizado durante una beca interna del CONICET en el Programa Especial de Matemática Aplicada con sede en el Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC) a cuyas autoridades agradezco el apoyo institucional y humano brindado en todo momento.

Finalmente vaya mi reconocimiento al banco de dactilógrafas y en particular a la Srta. Cristina E. González quien con enorme paciencia y dedicación ha mecanografiado estas notas.

## INTRODUCCION

El propósito de este trabajo es estudiar la aproximación numérica del problema de Stefan multidimensional a dos fases planteado según la formulación entálpica y con condiciones de contorno de tipo Dirichlet.

Siguiendo a A. Friedman (ver [F-1]) se emplea el método de regularización que consiste en suavizar la función entalpía originándose una familia de problemas no lineales regulares parametrizados por  $\epsilon$ . Según E. Magènes (ver [M-1]) la buena conjetura para la diferencia entre las soluciones regulares y la solución del problema de Stefan es que en norma  $L^2$  del espacio-tiempo el error sea de orden  $\epsilon^{1/2}$ . En el Capítulo 2 se estudia el método de regularización, se prueba esta estimación de error en condiciones generales sobre los datos y se demuestra que si la solución es no degenerada el orden de convergencia es  $\epsilon$ . También se prueba que el error en norma  $L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$  entre las funciones entalpía real y regularizada es de orden  $\epsilon^{1/2}$  o  $\epsilon$  en correspondencia con los errores obtenidos para las funciones temperatura.

En el Capítulo 3 se propone una discretización de los problemas regulares que consiste en un esquema de elementos finitos seccionalmente lineales en el espacio y un esquema de diferencias finitas implícito en el tiempo. Se estudia la aproximación de las soluciones discretas a las soluciones continuas regulares obteniendo una estimación del error en norma  $L^2$  del espacio-tiempo en función de los tamaños de las mallas espacial  $h$  y temporal  $\tau$  y del parámetro de regularización  $\epsilon$ . Esto establece relaciones a priori entre los tres parámetros a fin de obtener un error global de orden  $\epsilon^{1/2}$  en el proceso de aproximación. Para una adecuada elección del dato inicial y/o de la malla de elementos finitos resulta la relación  $h \sim \epsilon^{3/4}$ ,  $\tau \sim \epsilon$  y proponiendo como dato inicial discreto el interpolante de Lagrange del dato inicial continuo se obtiene

$h \sim \tau \sim \varepsilon$ , que es claramente menos fina que la anterior. Por otra parte si la solución del problema de Stefan es no degenerada entonces las relaciones que implican un error global de orden  $\varepsilon$  son  $h \sim \varepsilon, \tau \sim \varepsilon^{3/2}$ . Cabe citar a J. Jerome y M. Rose quienes en [J-R] han estudiado el problema con condiciones de contorno de tipo Neumann y obtenido las relaciones  $h \sim \varepsilon^{3/4}, \tau \sim \varepsilon$  bajo condiciones no muy naturales sobre los datos, empleando técnicas diferentes a las que se desarrollan en el presente trabajo.

En el Capítulo 4 se estudia un algoritmo que permite resolver efectivamente el problema discreto y comprobar las estimaciones teóricas de error. Se basa en la relación  $\varepsilon \tau \sim h^2$  y la teoría de convergencia bajo orden parcial (ver [O-R]), y posee propiedades de acotación del error en término de la diferencia entre iteraciones sucesivas. Además permite probar propiedades de monotonía de las soluciones discretas con respecto a los datos y estimaciones de error en norma  $L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$  entre las funciones entalpía continua y discreta que resultan de orden  $\varepsilon^{1/2}$  (ó  $\varepsilon$  para soluciones no degeneradas) bajo las restricciones indicadas para los parámetros  $\varepsilon, h$  y  $\tau$ .

Finalmente en el Capítulo 5 se proponen varios ejemplos con solución exacta elemental que han sido resueltos numéricamente con el algoritmo del Capítulo 4 y se emplean para verificar las estimaciones teóricas de error por un lado y probar la eficiencia del método para la resolución de problemas parabólicos fuertemente no lineales por otro.

## INDICE

	Pág.
<u>CAPITULO 1: PRESENTACION DEL PROBLEMA</u> .....	1
§1.1. NOTACION I .....	1
§1.2. EL PROBLEMA DE STEFAN .....	3
1.2.1. Formulación Clásica .....	3
1.2.2. Formulación Entálpica .....	5
1.2.3. Aproximación Numérica .....	6
1.2.4. Mayoración del Error .....	7
§1.3. OBJETIVOS DEL TRABAJO .....	8
<u>CAPITULO 2: EL PROBLEMA CONTINUO</u> .....	12
§2.1. HIPOTESIS SOBRE LOS DATOS .....	12
§2.2. EL METODO DE REGULARIZACION .....	14
§2.3. ESTIMACION DE $\ u - u_\epsilon\ _{L^2(Q)}$ .....	25
§2.4. PROPIEDADES DEL PROBLEMA (P) .....	33
2.4.1. Regularidad Global de la Solución .....	33
2.4.2. Estabilidad de Soluciones .....	34
2.4.3. Monotonía de la Solución con respecto a los Datos .....	38
2.4.4. Sobre las Zonas Degeneradas .....	39
<u>CAPITULO 3: EL PROBLEMA DISCRETO</u> .....	42
§3.1. NOTACION E HIPOTESIS .....	43
3.1.1. Notación II .....	43
3.1.2. Hipótesis sobre la Discretización .....	44
3.1.3. Hipótesis sobre los Datos .....	46
§3.2. ESQUEMAS DE APROXIMACION NUMERICA .....	46
3.2.1. Esquema Semidiscreto .....	47
3.2.2. Esquemas Discretos .....	48
3.2.3. Aproximación de $\beta_\epsilon(u_0)$ y $f$ .....	49

	Pág.
§3.3. ESTIMACION DE $\ u_\epsilon - u_{\epsilon,h}\ _{L^2(Q_h \cap Q)}$	52
§3.4. ESTIMACION DE $\ u_\epsilon - u_{\epsilon,h,\tau}\ _{L^2(Q_h \cap Q)}$	58
3.4.1. 1º Esquema Discreto .....	58
3.4.2. 2º Esquema Discreto .....	65
3.4.3. Relación entre los Parámetros $\epsilon, h, \tau$ .....	69
§3.5. PROPIEDADES DEL PROBLEMA $(P_{\epsilon,h,\tau})$ .....	70
3.5.1. Acotación Uniforme en $W_2^{1,1}(Q_h)$ .....	70
3.5.2. Estabilidad de las Soluciones Discretas .....	74
<u>CAPITULO 4: RESOLUCION DEL PROBLEMA DISCRETO</u> .....	78
§4.1. PRESENTACION DEL ALGORITMO .....	78
4.1.1. Notación III .....	78
4.1.2. Hipótesis sobre la Triangulación .....	80
4.1.3. El Algoritmo de Resolución .....	81
§4.2. CONVERGENCIA Y ESTIMACIONES DE ERROR .....	82
§4.3. PROPAGACION DEL ERROR INTRODUCIDO POR EL ALGORITMO .....	89
4.3.1. Control del Error .....	90
4.3.2. Comentarios .....	95
§4.4. MONOTONIA DE LA SOLUCION DISCRETA CON RESPECTO A LOS DATOS	96
§4.5. OTRAS PROPIEDADES DE LA SOLUCION DISCRETA .....	98
4.5.1. Acotación Uniforme en $L^\infty(Q_h)$ .....	98
4.5.2. Estimación de $\max_{1 \leq n \leq L} \ \beta_\epsilon(u_\epsilon^n) - \beta_\epsilon(U_n)\ _{H^{-1}(\Omega)}$	99
<u>CAPITULO 5: EXPERIMENTOS NUMERICOS</u> .....	102
§5.1. COMENTARIOS GENERALES .....	102
5.1.1. Fórmula de Cuadratura .....	102
5.1.2. Sobre las Hipótesis (2.1), (3.25) y (3.26) .....	104
5.1.3. Sobre la Malla de Elementos Finitos .....	107
5.1.4. Notación IV .....	107

	Pág.
§5.2. EJEMPLOS .....	108
5.2.1. Ejemplo 1: Solución Radialmente Simétrica .....	108
5.2.2. Ejemplo 2: Solución Radialmente Simétrica .....	111
5.2.3. Ejemplo 3: Problema Degenerado .....	113
5.2.4. Ejemplo 4: Problema de una Fase .....	116
5.2.5. Conclusiones .....	118
APENDICE A: EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION DEL PROBLEMA SEMI- DISCRETO .....	119
APENDICE B: ESTIMACIONES DE ERROR $\  \tilde{u} - u \ _{L^2(\Omega_h)}$ cuando $\Omega \neq \Omega_h$ .....	124
REFERENCIAS .....	134



## CAPITULO 1

### PRESENTACION DEL PROBLEMA

El problema de Stefan es el modelo matemático de numerosos problemas de la física tales como la conducción del calor con cambio de fase, la formación de precipitados en reacciones químicas, la difusión de oxígeno en tejidos, etc., que se describen matemáticamente como un problema de frontera libre para la ecuación del calor.

En este trabajo tomaremos como problema modelo el derretimiento de un trozo de hielo inmerso en agua, por lo que frecuentemente nos referiremos a la solución como temperatura del sistema. La frontera libre será la interfase hielo-agua que supondremos a cero grado.

El propósito de este capítulo es presentar el problema de Stefan mostrando inicialmente los fenómenos relativos al agua, al hielo y a la interfase por separado, para luego asociarlos en la llamada formulación entálpica con la cual será tratado teórica y numéricamente el problema. En particular la descripción local del movimiento de la interfase será de gran utilidad para comprender los ejemplos que se exponen en el Capítulo 5. Finalmente se enuncian los resultados principales del trabajo.

#### §1.1. NOTACION I

Sobre los Datos y Variables

(1.1)  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , espacio euclideo usual. Denotaremos con  $x$  a un punto de  $\mathbb{R}^N$

(1.2)  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , es un abierto acotado y conexo, ocupado por un cuerpo no necesariamente homogéneo e isótropo, que será sede del fenómeno termodinámico a estudiar.

- (1.3)  $\partial\Omega$  es el borde o frontera de  $\Omega$ . Supondremos, al menos en el Capítulo 2, que  $\Omega$  tiene forma anular resultando  $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$  con  $\partial_2\Omega$  interior al dominio definido por  $\partial_1\Omega$
- (1.4)  $T$ ,  $0 < T < \infty$ , es el lapso de tiempo máximo. Usualmente denotaremos con  $t$  a un punto del intervalo  $[0, T]$ .
- (1.5)  $Q = \Omega \times (0, T)$
- (1.6)  $|A|$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^N$  del conjunto  $A \subset \mathbb{R}^N$
- (1.7)  $u(x, t)$  es la temperatura (solución del problema de Stefan). Consideraremos descompuesto al cilindro  $Q$  en:  
 $Q^+ = \{(x, t) \in Q : u(x, t) > 0\}$  (el agua)  
 $Q^- = \{(x, t) \in Q : u(x, t) < 0\}$  (el hielo)  
 $F = \{(x, t) \in Q : u(x, t) = 0\}$  (la interfase)
- (1.8)  $\beta(u)$  es la entalpía, que es una función estrictamente creciente, regular fuera del origen, y con un salto finito (proporcional al calor latente de fusión) en el origen (ver (2.15) y (2.48)).
- (1.9)  $g(x, t)$  es la temperatura impuesta en  $\partial\Omega$  o dato de contorno.
- (1.10)  $f(x, t)$  es una densidad de generación interna o término fuente.
- (1.11)  $u_0(x)$  es la temperatura prescrita en  $t = 0$  o dato inicial.
- (1.12)  $k(u)$  es la conductividad térmica, en general dependiente de la temperatura.

(1.13)  $c(u)$  es el calor específico también dependiente de la temperatura

Sobre los Espacios Funcionales

(1.14)  $C^0(\bar{\Omega})$  es el espacio de funciones continuas en  $\bar{\Omega}$ .

(1.15)  $C^{0+\alpha, 0+\beta}(\bar{Q})$  es el espacio de funciones continuas en  $\bar{Q}$  que satisfacen condiciones de Hölder de exponente  $\alpha$  y  $\beta$  en las variables  $x$  y  $t$  respectivamente.

(1.16)  $W_p^m(\Omega)$  con  $m=0, 1$  ó  $2$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , es el espacio de Sobolev de funciones  $v$  tales que  $D^\alpha v \in L^p(\Omega)$  con  $|\alpha| \leq m$  ( $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ ).

En particular  $W_\infty^1(\Omega)$  es el espacio de funciones Lipschitz continuas en  $\bar{\Omega}$ , y  $W_\infty^2(\Omega)$  son las funciones con derivadas Lipschitz continuas en  $\bar{\Omega}$ . Usualmente para  $p=2$  se indican:

$$H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega) \quad H^2(\Omega) = W_2^2(\Omega)$$

(1.17)  $H_0^1(\Omega)$  es el subespacio de  $H^1(\Omega)$  de las funciones con traza cero, i.e. cuya restricción a  $\partial\Omega$  es nula.  $H_0^{-1}(\Omega)$  espacio dual de  $H_0^1(\Omega)$ .

(1.18)  $W_p^{2,1}(Q)$  es el espacio de funciones  $v$  tales que  $D_x^\alpha D_t^k v \in L^p(Q)$  con  $|\alpha| + 2k \leq 2$ .

(1.19)  $W_p^{m,m}(Q)$  es el espacio de funciones  $v$  tales que  $D_x^\alpha D_t^k v \in L^p(Q)$  con  $|\alpha| + k \leq m$ .

## 51.2. EL PROBLEMA DE STEFAN

### 1.2.1 Formulación Clásica

Supongamos que en el instante  $t=0$  el cuerpo  $\Omega$  puede subdividirse en dos regiones:  $\Omega_0^+$  y  $\Omega_0^-$  que son las fases líquida y sólida respectivamente, separadas por una superficie o interfase inicial  $F_0$  (problema a dos fases). Supongamos que están prescriptas las temperaturas

inicial  $u_0$  y en el borde  $g(\cdot, t)$ ,  $0 < t < T$ .

Interesa reconocer como evoluciona en el tiempo,  $0 < t < T$ , la temperatura del cuerpo  $\Omega$ . Notemos que en cada fase (i.e.  $Q^+$  y  $Q^-$ ) se verificará la ecuación del calor

$$(1.20) \quad -\nabla_x(k(u) \nabla_x u) + c(u)u_t = f$$

pero estos dominios serán a priori desconocidos debido al movimiento de la interfase

$$(1.21) \quad F_t = \{x \in \Omega: u(x, t) = 0\}.$$

El conjunto  $F$  (ver(1.7)) se denomina frontera libre y es claramente una incógnita del problema, que en ciertos casos resulta la más importante. En consecuencia sobre  $F$  se deben verificar condiciones adicionales a la que expresa la continuidad de la temperatura a través de esa superficie, i.e.

$$(1.22) \quad u = 0$$

En efecto a partir del Principio de Conservación de la Energía se obtiene una relación válida en  $F$  y que expresa el balance de energía (ver [F-1], [K] ó [M-1]).

$$(1.23) \quad (k(u^+) \nabla_x u^+ - k(u^-) \nabla_x u^-) \cdot \nabla_x \phi = \lambda \phi_t$$

donde  $\phi(x, t)$  es una función regular en  $Q$  que describe a  $F$  (i.e.  $F$  es el conjunto de ceros de  $\phi$ ,  $\nabla_x \phi \neq 0$  en  $F$ ,  $\phi > 0$  en  $Q^+$  y  $\phi < 0$  en  $Q^-$ ) y  $\lambda > 0$  es el calor latente de fusión. Llamando  $v$  al vector normal (en el espacio) a la superficie  $F_t$ , i.e.  $v = \nabla_x \phi \cdot |\nabla_x \phi|^{-1}$ , la igualdad (1.23) se transforma en

$$(1.24) \quad k(u^-)u_v^- - k(u^+)u_v^+ = \lambda \frac{\phi_t}{|\nabla_x \phi|} = \lambda V(t, x),$$

siendo  $V(t, x)$  la velocidad de movimiento de  $F_t$  en el punto  $x$ .

Se denomina "problema clásico" de Stefan a dos fases al siguiente:

En hipótesis de suficiente regularidad de los datos  $\Omega_0^+$ ,  $\Omega_0^-$ ,  $F_0$ ,  $u_0$ ,  $g$ ,  $f$ ,  $c$  y  $k$  encontrar una función  $u$  continua en  $Q$  y regular en  $Q^+$  y  $Q^-$  que satisfaga (1.20) puntualmente en  $Q^+$  y  $Q^-$ ,  $F$  definida en (1.7) sea una variedad  $(N-1)$ -dimensional regular y  $u$  verifique (1.22) y (1.23) en  $F$

(1.25) Nota: en general este problema no tiene solución, aún con la mayor regularidad posible de los datos. En efecto la frontera libre  $F_t$  puede degenerar en un punto, desaparecer o aparecer súbitamente o incluso ser una región degenerada (mushy zone) con medida de Lebesgue  $N$ -dimensional positiva (ver Capítulo 5) // .

El problema clásico ha sido resuelto "en pequeño" para  $N > 1$  en el sentido que existe un  $T > 0$  dependiente de los datos tal que  $F$  es regular (ver [M-3]).

### 1.2.2 Formulación Entálpica

Se trata de una formulación global, en el sentido que se busca una función  $u$  solución de una ecuación diferencial parabólica definida en  $Q$ , resultando  $F$  una incógnita implícita, calculable a posteriori del conocimiento de  $u$ .

Naturalmente el artificio de eliminar  $F$  como incógnita explícita se logra a costa de la linealidad de la ecuación diferencial.

Siguiendo a [K] ó [F-1] se busca una función  $u$  definida en  $Q$  tal que resuelva en el sentido de las distribuciones (ver (2.16), (2.17) y (2.46))

$$(1.26) \quad -\nabla_x (k(u)\nabla_x u) + \beta(u)_t = f \quad , \quad \text{en } Q$$

Nota: la ecuación (1.26) se puede generalizar para tratar medios inhomogéneos y anisótropos (ver (2.49)) // .

La existencia y unicidad de solución de la formulación entálpica ha sido probada en [K] y [F-1], además de otros trabajos. En el Capítulo 2 seguiremos la metodología de Friedman que consiste en regularizar la función entalpía y obtener un problema regularizado del tipo (1.26) que resulta particularmente apropiado para la aproximación numérica que se desarrolla en los Capítulos 3 y 4.

De esta forma el problema de Stefan multidimensional a dos fases (y en particular a una fase) se reduce a resolver la ecuación (1.26), sin que ello implique el conocimiento a priori de la regularidad de la frontera libre  $F$ . Por esto la formulación entálpica proporciona un camino especialmente atractivo para la resolución numérica en varias dimensiones espaciales y ha sido extensamente investigada en este último tiempo (ver [J-R], [C-Z], [M-2], [M-1] y la bibliografía allí indicada), principalmente desde un punto de vista computacional.

### 1.2.3 Aproximación Numérica

Cubriendo  $\Omega$  con una malla de elementos finitos y partiendo  $[0, T]$  en  $L$  subintervalos (por simplicidad de igual longitud  $\tau$ ) podemos asociar a la ecuación (1.26) un problema discreto que consiste en hallar una familia de vectores  $\{U_n\}_{n=1}^L$ ,  $U_n \in \mathbb{R}^I$ , tales que verifiquen la ecuación no lineal en  $\mathbb{R}^I$

$$(1.27) \quad A U_n + \frac{1}{\tau} B_n U_n = b_n \quad 1 \leq n \leq L$$

donde  $A$  es un operador lineal y  $B_n$  es uniformemente monótono pero no continuo. El problema discreto asociado al problema regularizado es similar a (1.27) con  $B_n$  continuo (ver Capítulo 4). Tanto  $A$  como  $B_n$  dependen de la malla espacial, a través del tamaño de la misma que llamamos  $h$ , y  $B_n$  depende del parámetro de regularización  $\epsilon$  (ver (4.34)).

Hay varios métodos para resolver el sistema (1.27) correspon-

diente al problema regular. En particular el método de extrapolación (ver [D-D] y [L]) y métodos iterativos de tipo Gauss-Seidel (ver [C-Z], [Z], [M-2]). En este trabajo se propone un algoritmo de tipo Gauss-Seidel con interesantes propiedades de monotonía y control del error.

La evidencia experimental (ver [C-Z] ó [M-2]) demuestra que la solución discreta es substancialmente invariante para valores muy pequeños de  $\epsilon$ , supuesto fijos  $h$  y  $\tau$ .

En general, salvo [J-R] y el presente trabajo, no existe un estudio de la más adecuada relación entre los parámetros  $\epsilon$ ,  $h$  y  $\tau$ , y los mismos se condicionan dependiendo del problema y de los resultados que se esperan obtener.

#### 1.2.4 Mayoración del Error

Llamando  $u_\epsilon$  a la solución del problema regularizado y  $u_{\epsilon,h,\tau}$  a la solución del problema discreto (1.27) se presentan las cuestiones (ver [M-1]):

- (1.28) demostrar la convergencia de  $u_\epsilon$  a  $u$  obteniendo estimaciones del error en función de  $\epsilon$ .
- (1.29) probar la convergencia de  $u_{\epsilon,h,\tau}$  a  $u_\epsilon$  y acotar el error en término de  $\epsilon$ ,  $h$  y  $\tau$ .
- (1.30) relacionar los parámetros  $\epsilon$ ,  $h$  y  $\tau$  de manera que el error entre  $u_\epsilon$  y  $u_{\epsilon,h,\tau}$  sea del orden del error entre  $u$  y  $u_\epsilon$ .

El problema de la elección de los espacios funcionales en los que pueda medirse el error está estrechamente ligada a la regularidad de la solución. La función  $u \in C^0(\bar{Q}) \cap W_2^{1,1}(Q)$  (ver [C-E] y [F-1]), i.e. posee una escasa regularidad global. Por ello el espacio natural para evaluar la aproximación es  $L^2(Q)$  (un orden de regularidad menor que

$W_2^{1,1}(Q)$  .

Para problemas parabólicos lineales o no lineales regulares la estimación natural es (ver [W], pág. 753)

$$\|u - u_{h,\tau}\|_{L^2(Q)} \leq c_1 h^2 + c_2 \tau$$

para un esquema de diferencias finitas implícito en el tiempo, donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes dependientes de las derivadas espaciotemporales de  $u$ .

Como no es clara la dependencia de las derivadas superiores de  $u_\epsilon$  con respecto a  $\epsilon$ , la estimación anterior proporciona una respuesta parcial a (1.29). El problema consiste en hallar esta dependencia empleando la menor regularidad posible de  $u_\epsilon$ .

Por otra parte para la efectiva resolución numérica, los métodos que requieren excesiva suavidad de la solución  $u_\epsilon$ , tal como el método de extrapolación (ver [L]), no parecen adecuados para proporcionar una cota de error compatible con (1.29).

Los métodos de tipo Gauss-Seidel en cambio, requieren la mínima regularidad de  $u_\epsilon$  (Capítulo 4).

(1.31) Nota: podría proponerse el problema discreto sin regularizar, para el cual hemos dicho que  $B_n$  no es continuo. Este problema tiene solución, pero no es clara la convergencia de  $u_{h,\tau}$  a  $u$  y menos aún el conocimiento de estimaciones de error, por lo que atendiendo a la evidencia experimental y a la posibilidad de responder a (1.28)-(1.30) el método de regularización parece el más eficaz // .

### §1.3. OBJETIVOS DEL TRABAJO

El propósito fundamental de este trabajo es dar una respuesta a los interrogantes (1.28) a (1.30) y desarrollar un algoritmo eficaz para comprobar la optimalidad de las estimaciones teóricas de error.



Según Magènes (ver [M-1]) la buena conjetura para (1.28) es que

$$(1.31) \quad \| u - u_\epsilon \|_{L^2(Q)} \leq c \epsilon^{1/2}$$

En el Capítulo 2 probaremos esta estimación en las condiciones más generales sobre el problema de Stefan (ver (2.51) y (2.63)). Sin embargo para soluciones  $u$  no degeneradas, vale decir que tienen un crecimiento lineal a partir de la frontera libre  $F$  la estimación es (ver (2.62))

$$(1.32) \quad \| u - u_\epsilon \|_{L^2(Q)} \leq c \epsilon .$$

Luego para dar una respuesta a (1.29) se realiza un estudio del problema discreto basado en la teoría de aproximación de problemas elípticos (ver [C-1] y [W]) ya que en c.t.p.  $t$ ,  $0 < t < T$ ,  $u_\epsilon$  es solución de (ver (1.26)).

$$(1.33) \quad -\Delta_x u_\epsilon(\cdot, t) = f(\cdot, t) - \beta_\epsilon(u_\epsilon(\cdot, t))_t$$

donde se supone  $k(u) = 1$  o que se ha efectuado un apropiado cambio de variables (ver (2.46)). Dado que  $\beta(u)$  es una función discontinua en  $F$ , por definición (1.8), y  $\beta_\epsilon(u_\epsilon)$  es su aproximación, la buena conjetura para estimar la no homogeneidad de (1.33) es

$$(1.34) \quad \| \beta_\epsilon(u_\epsilon)_t \|_{L^2(Q)} \leq c \epsilon^{-1/2} .$$

Esta estimación se prueba en (2.35) y permite obtener en (3.78) la estimación

$$(1.35) \quad \| u_{\epsilon, h, \tau} - u_\epsilon \|_{L^2(Q_n Q_h)} \leq c \left( \frac{h^2}{\epsilon} + (h+\epsilon)^{1/2} + \frac{\tau}{\epsilon^{1/2}} \right)$$

en condiciones bastante generales sobre los datos, y en (3.82) para un dato inicial más restrictivo resulta

$$(1.36) \quad \| u_{\epsilon, h, \tau} - u_\epsilon \|_{L^2(Q_n Q_h)} \leq c \left( \frac{h^2}{\epsilon} + \frac{\tau}{\epsilon^{1/2}} \right) ,$$

que coincide con la hallada en [J-R] mediante técnicas diferentes. Las acotaciones (1.35) y (1.36) proporcionan una respuesta a (1.29) y simultáneamente condicionan los parámetros  $\epsilon$ ,  $h$  y  $\tau$ , de manera que

$$(1.37) \quad \varepsilon \sim h \sim \tau$$

para el primer caso, y para el segundo

$$(1.38) \quad h \sim \varepsilon^{3/4}, \quad \tau \sim \varepsilon$$

Si la solución  $u$  es no degenerada entonces se verifica (1.32) y la relación correcta es:

$$(1.39) \quad h \sim \varepsilon \quad \tau \sim \varepsilon^{3/2}$$

Por otra parte, de la demostración de (1.31) se deduce la siguiente estimación para las funciones entalpía

$$(1.40) \quad \|\beta(u) - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq c \varepsilon^{1/2},$$

resultando de orden  $\varepsilon$  para soluciones no degeneradas.

Paralelamente se prueba, con la misma técnica de demostración con que se obtiene (1.31), una desigualdad de estabilidad para soluciones continuas (ver (2.76)) que se extiende a las soluciones discretas (ver (3.110)).

En el Capítulo 4 se desarrolla un algoritmo de tipo Gauss-Seidel modificado para la resolución del problema discreto. Se prueba la convergencia del proceso iterativo dando estimaciones del error en término de la diferencia entre dos iteraciones sucesivas. El algoritmo se basa en la teoría de la convergencia bajo orden parcial (ver [O-R], pág. 432) y permite obtener un resultado de dependencia monótona de las soluciones discreta y continua con respecto a los datos (ver (2.88) y (4.52)). A partir de esta propiedad de monotonía se obtiene una estimación para la diferencia entre las funciones entalpía discreta y continua, que constituye la versión discreta de (1.40), a saber

$$(1.41) \quad \max_{1 \leq n \leq L} \|\beta_\varepsilon(u_\varepsilon^n) - \beta_\varepsilon(U_n)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c \varepsilon^{1/2},$$

donde los parámetros  $\varepsilon, h$  y  $\tau$  se relacionan de acuerdo a (1.37) o (1.38) según el caso, y  $u_\varepsilon^n = u_\varepsilon(\cdot, n\tau)$ . Naturalmente si la solución es no dege

nerada entonces la estimación es de orden  $\epsilon$  bajo la relación (1.39).

Finalmente en el Capítulo 5 se muestran varios ejemplos que reúnen las dificultades típicas de problemas de Stefan N-dimensionales, tales como aparición súbita de la frontera libre, zonas degeneradas, movimiento uniforme o no de la frontera libre y problemas de una fase. Con estos ejemplos se comprueban las estimaciones teóricas de error y la eficiencia del algoritmo para resolver problemas parabólicos.

## CAPITULO 2

### EL PROBLEMA CONTINUO

En este capítulo se estudia el problema de Stefan multidimensional a dos fases según la formulación entálpica. Se aproxima este problema empleando un método de regularización que consiste en suavizar la función entalpía, obteniéndose una familia de problemas parabólicos no lineales regulares asociada al problema de Stefan. Se obtiene una estimación en norma  $L^2$  del espacio-tiempo del error de aproximación entre las soluciones  $u$  del problema de Stefan y  $u_\epsilon$  de los problemas regulares asociados (ver §2.3).

En §2.2 se presentan, siguiendo a [F-1], algunos resultados de existencia, unicidad y regularidad de las soluciones  $u$  y  $u_\epsilon$ . Finalmente en §2.4 se obtienen propiedades de estas funciones tales como monotonía y dependencia continua respecto de los datos que se prueban con técnicas diferentes a las empleadas en [F-1].

#### §2.1 HIPOTESIS SOBRE LOS DATOS

Vamos a precisar aquí las hipótesis generales sobre regularidad de los datos que emplearemos en el trabajo.

Sobre el Dominio:

(2.1)  $\partial\Omega \in C^2$ , o sea que localmente en todo punto de  $\partial\Omega$  existe un sistema de coordenadas  $(x', x_n)$  y una función  $\psi$  de clase  $C^2$  tal que  $x_n = \psi(x')$  describe a  $\partial\Omega$  y  $\Omega$  está contenido (localmente) en  $x_n > \psi(x')$

Sobre el Dato de Contorno:

(2.2)  $g \in W_\infty^{2,1}(Q)$ , o sea  $g$  es Lipschitz continua en  $\bar{Q}$  y con derivadas espaciales Lipschitz continuas en  $\bar{Q}$ .

(2.3)  $g \geq \gamma_1 > 0$  en  $\partial_1\Omega \times [0, T]$  y  $g \leq \gamma_2 < 0$  en  $\partial_2\Omega \times [0, T]$ , donde

$\gamma_1, \gamma_2$  son constantes.

(2.4)  $g \in W_{\infty}^{1,1}(Q)$ , o sea  $g$  es Lipschitz continua en  $\bar{Q}$ . Además  $g_{xt}, g_{tt} \in L^2(Q)$ .

Sobre el Dato Inicial:

(2.5)  $u_0 \in W_{\infty}^1(\Omega)$ , o sea  $u_0$  es Lipschitz continua en  $\bar{\Omega}$ .

(2.6)  $u_0(x) = g(x,0)$   $x \in V \cap \Omega$ , donde  $V$  es un entorno de  $\partial\Omega$  (condición de compatibilidad).

(2.7)  $|\{x \in \Omega / |u_0(x)| < \varepsilon\}| \leq c^* \varepsilon$ , donde  $c^*$  es una constante independiente de  $\varepsilon$  (condición de no degeneración), para  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ .

Sobre el Término Fuente:

(2.8)  $f \in L^{\infty}(Q)$ , o sea  $f$  es esencialmente acotada en  $Q$ .

Sobre las Propiedades del Medio:

(2.9)  $c(\cdot) \in W_{\infty}^1(\mathbb{R})$ , o sea  $c$  es Lipschitz continua en  $\mathbb{R}$ , y además es estrictamente creciente, i.e.  $0 < C_1 \leq c'(s) \leq C_2$  c.t.p  $s \in \mathbb{R}$ , donde  $C_1, C_2$  son constantes.

(2.10)  $k(\cdot) \in W_{\infty}^1(\mathbb{R})$ , o sea  $k$  es Lipschitz continua en  $\mathbb{R}$ , y además es acotada superior e inferiormente, i.e.

$0 < K_1 \leq k(s) \leq K_2$ , donde  $K_1, K_2$  son constantes

(2.11)  $K(x) = (k_{ij}(x))$  es una matriz  $N \times N$  simétrica y uniformemente definida positiva en  $\Omega$ , además  $k_{ij} \in W_{\infty}^1(\Omega)$ .

(2.12)  $b \in L^{\infty}(Q)$ ,  $b \geq 0$ .

Sobre la Frontera Libre:

No supondremos hipótesis de regularidad de la frontera libre, siendo esta situación una de las mayores ventajas de la aproximación numérica del problema de Stefan según la formulación entálpica. No obstante

en el Capítulo 3 serán necesarias ciertas condiciones sobre el conjunto  $F_0 = \{x \in \Omega / u_0(x) = 0\}$ , que abusando del lenguaje podríamos considerar como la frontera libre inicial:

(2.13)  $F_0$  es localmente una superficie con derivadas Lipschitz continuas, i.e. localmente en todo punto de  $F_0$  existe un sistema de coordenadas  $(x', x_n)$  y una función  $\psi \in W_\infty^2(\mathbb{R}^{n-1})$  tal que  $x_n = \psi(x')$  describe a  $F_0$ , y los conjuntos  $\{x : u_0(x) > 0\}$ ,  $\{x : u_0(x) < 0\}$  están a un lado de  $F_0$ .

(2.14) Nota: la condición de no degeneración (2.7) se verifica si  $F_0$  es localmente una superficie Lipschitz continua y existe  $\sigma > 0$  tal que  $|\frac{\partial}{\partial v} u_0| \geq \sigma$  en c.t.p. de  $F_0$  // .

## §2.2. EL METODO DE REGULARIZACION

Consideremos el problema modelo

$$(P) \quad \begin{aligned} -\Delta_x u + \frac{\partial}{\partial t}(\beta(u)) &= f && \text{en } Q \\ u &= g && \text{en } \partial\Omega \times \{0, T\} \\ u &= u_0 && \text{en } \Omega \times \{0\} \end{aligned}$$

siendo  $\beta(\cdot)$  la función entalpía definida por

$$(2.15) \quad \beta(s) = s + \chi(s) \quad , \quad s \in \mathbb{R} \quad ,$$

donde  $\chi(s)$  es la función signo de  $\mathbb{R}$ , i.e.

$$\begin{aligned} \chi(s) &= -1 && \text{si } s < 0 \\ &= 1 && \text{si } s > 0 \end{aligned}$$

Llamaremos solución débil (o solución generalizada) del problema (P) a una función  $u \in W_2^{1,0}(Q)$  tal que:

$$(2.16) \quad u = g \quad \text{en } \partial\Omega \times (0, T)$$

$$(2.17) \quad \int_Q \nabla_x u \cdot \nabla_x \phi - \beta(u) \phi_t = \int_Q f \phi + \int_\Omega \beta(u_0) \phi(\cdot, 0)$$

para toda función  $\phi \in W_2^{1,1}(Q)$  tal que  $\phi = 0$  en  $\partial\Omega \times (0, T)$  y  $\Omega \times \{T\}$ .

En (2.17)  $\beta(u(x,t))$  es una función medible  $b(x,t)$  de obvia

definición cuando  $u(x,t) > 0$  ( $< 0$ ) y tal que  $-1 \leq b(x,t) \leq 1$  cuando  $u(x,t) = 0$ .

(2.18) Nota: una solución clásica de (P) es solución débil de (P) (ver [F-1])// .

Generalizaciones de este problema que tengan en cuenta las propiedades no lineales del medio serán enunciadas, cuando corresponda, al final de cada resultado probado.

El método de regularización consiste en proponer una aproximación regular de la función  $\beta$ , que llamamos  $\beta_\epsilon$ , definida por

$$(2.19) \quad \beta_\epsilon(s) = s + \chi_\epsilon(s) \quad s \in \mathbb{R},$$

donde  $\epsilon > 0$  es el parámetro de regularización y

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \chi_\epsilon(s) &= -1 & s \leq -\epsilon \\ &= \frac{s}{\epsilon} & -\epsilon < s < \epsilon \\ &= 1 & s \geq \epsilon \end{aligned},$$

es la correspondiente aproximación de la función signo  $\chi$

De esta manera queda naturalmente asociada a (P) la familia  $(P_\epsilon)$  de problemas parabólicos no lineales siguiente:

$$(P_\epsilon) \quad \begin{aligned} -\Delta_x u_\epsilon + \frac{\partial}{\partial t}(\beta_\epsilon(u_\epsilon)) &= f & \text{en } Q \\ u_\epsilon &= g & \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \\ u_\epsilon &= u_0 & \text{en } \Omega \times \{0\} \end{aligned}$$

El propósito de este párrafo es estudiar propiedades de existencia, unicidad y regularidad de las soluciones  $u_\epsilon$  y su dependencia con el parámetro de regularización  $\epsilon$ . Ellas se relacionan con las propiedades de suavidad de la función  $\beta_\epsilon$ , que resulta globalmente Lipschitz continua y estrictamente creciente. Más precisamente  $\beta_\epsilon$  verifica:

$$(2.21) \quad s_1 - s_2 \leq \beta_\epsilon(s_1) - \beta_\epsilon(s_2) \leq \frac{1}{\epsilon} (s_1 - s_2), \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

o equivalente  $1 \leq \beta'_\epsilon(s) \leq \frac{1}{\tilde{\epsilon}} (\tilde{\epsilon} = 1 + \epsilon^{-1})^{-1}$  .

(2.22) Nota: se podría proponer una función  $\beta_\epsilon$  más regular tal como en [F-1], [J-R] ó [M-1], pero se ha preferido trabajar con la regularidad mínima compatible con el problema de Stefan (P) y el método de resolución numérica que se expone en el Capítulo 4 //.

La noción de solución débil se extiende trivialmente al problema  $(F_\epsilon)$ .

(2.23) LEMA. En las hipótesis (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) y (2.8) el problema  $(P_\epsilon)$  admite una y sólo una solución débil  $u_\epsilon$ , que verifica:

$$(2.24) \quad u_\epsilon \in C^{0+\alpha, 0+\alpha/2}(\bar{Q}) \cap W_2^{2,1}(Q) \quad , \quad 0 < \alpha < 1$$

$$(2.25) \quad \|u_\epsilon\|_{L^\infty(Q)} \leq C \quad , \quad C \text{ constante independiente de } \epsilon \text{ .}$$

Demostración: Para probar el Lema aproximamos  $\beta_\epsilon$  y  $f$  con funciones suaves  $\beta_{\epsilon,\delta}$  y  $f_\delta$  que convergen uniformemente y en  $L^p(Q)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) respectivamente, cuando  $\delta \downarrow 0$ , y proponemos el problema auxiliar

$$\begin{aligned} -\Delta_x u_{\epsilon,\delta} + \frac{\partial}{\partial t}(\beta_{\epsilon,\delta}(u_{\epsilon,\delta})) &= f_{\epsilon,\delta} && \text{en } Q \\ (P_{\epsilon,\delta}) \quad u_{\epsilon,\delta} &= g && \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \\ u_{\epsilon,\delta} &= u_0 && \text{en } \Omega \times \{0\} \end{aligned}$$

que admite una única solución en  $C^{0+\alpha, 0+\alpha/2}(\bar{Q}) \cap W_2^{2,1}(Q)$  para algún  $0 < \alpha < 1$  dependiente de los datos (ver [LSU], pag. 459, y tomar  $v_{\epsilon,\delta} = \beta_{\epsilon,\delta}(u_{\epsilon,\delta})$  como incógnita).

Además  $u_{\epsilon,\delta}$  resulta uniformemente acotada en  $L^\infty(Q)$ . Para ver esto haremos una prueba directa que muestra la independecia de la cota en  $L^\infty(Q)$  con respecto a los parámetros  $\epsilon, \delta$ . Sea  $v$  la solución del problema



$$\begin{aligned} \Delta_x v &= F && \text{en } \Omega \\ v &= -\gamma && \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

donde  $F, \gamma$  son constantes tales que  $F > \|f\|_{L^\infty(Q)}$ ,  $-\gamma < \gamma_2$  y resulta  $v \leq u_0$ . Luego notemos que  $u_{\epsilon, \delta} - v$  verifica la inecuación

$$(2.26) \quad -\Delta_x(u_{\epsilon, \delta} - v) + \beta'_\epsilon(u_{\epsilon, \delta})(u_{\epsilon, \delta} - v)_t = f + F > 0$$

y dadas las condiciones iniciales y de borde es claro que  $u_{\epsilon, \delta} - v$  no puede ser negativa en  $Q$ . Esto muestra una cota inferior para  $u_{\epsilon, \delta}$ . Análogamente se obtiene una cota superior.

Luego resulta que  $u_{\epsilon, \delta} \in C^{0+\alpha, 0+\alpha/2}(\bar{Q})$ , con una estimación para la norma independiente de  $\delta$  (ver [LSU], pág.204). No obstante esta cota depende en general de  $\epsilon$ .

Con un argumento de compacidad es claro que se puede extraer una subsucesión que converge en  $L^\infty(Q)$  a una función  $u_\epsilon$ , que es solución débil de  $(P_\epsilon)$  y verifica (2.24) y (2.25).

Para probar la unicidad se procede como en [F-1] ó [K]. Con esto queda probado el Lema //.

(2.27) LEMA. En las hipótesis (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) y (2.8) existen entornos  $U_i$  de  $\partial_i\Omega$  ( $i=1,2$ ) independientes de  $\epsilon$ , y una constante  $\alpha_0 > 0$  tales que:

$$(2.28) \quad (-1)^{i-1} u_\epsilon(x, t) > \alpha_0 \quad \text{en } \Omega_i^* = (U_i \cap \Omega) \times (0, T)$$

Demostración: Consideremos el problema auxiliar

$$\begin{aligned} -\Delta \omega_\gamma &= F && \text{en } \Omega \\ \omega_\gamma &= \delta && \text{en } \partial_1\Omega \\ \omega_\gamma &= -K && \text{en } \partial_2\Omega \end{aligned}$$

donde  $F > \|f\|_{L^\infty(Q)}$  y  $\gamma, K \in \mathbb{R}^+$  a fijar, tales que  $\gamma < \gamma_1$ ,  $-K < \gamma_2$

(ver (2.3)).

Por la regularidad de los datos y del dominio es conocido que (2.29) admite una única solución en  $W_p^2(\Omega)$  para todo  $1 < p < \infty$ , y entonces por teoremas de inmersión de espacios de Sobolev (ver [C-1]) resulta  $\omega_\gamma \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$  con  $0 < \alpha < 1$ . Además  $\omega_\gamma$  depende continuamente de los datos. Entonces

$$(2.30) \quad \omega_\gamma \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \omega_0 \quad \text{en } L^\infty(Q)$$

donde  $\omega_0$  es la solución de (2.29) con  $\gamma = 0$ . Por el Principio de Máximo es  $\omega_0 < 0$  en  $\Omega$ , y luego por (2.30) resulta  $\omega_\gamma \leq \omega_0$  para  $\gamma > 0$  suficientemente pequeño y  $K$  suficientemente grande. Por otra parte la elección de  $\gamma$  y  $K$  es tal que  $\omega_\gamma \leq g$  en  $\partial\Omega \times (0, T)$ .

Tomemos  $u_{\varepsilon, \delta}$ , solución de  $(P_{\varepsilon, \delta})$ , y consideremos la diferencia  $u_{\varepsilon, \delta} - \omega_\gamma$  que verifica la inecuación (2.26), y es positiva en  $\partial\Omega \times (0, T)$  y en  $\Omega \times \{0\}$ . Entonces razonando por el absurdo es claro que  $u_{\varepsilon, \delta} - \omega_\gamma$  no puede ser negativa en  $Q$ , i.e.  $u_{\varepsilon, \delta} \geq \omega_\gamma$  en  $Q$  (Principio de Máximo). Luego es inmediata la existencia de un entorno  $U_1$  tal que  $u_{\varepsilon, \delta} \geq \omega_\gamma > \alpha_0$  en  $\Omega_1^*$ . Como  $u_{\varepsilon, \delta}$  converge en  $L^\infty(Q)$  a  $u_\varepsilon$  queda probada la propiedad (2.28) para  $i=1$ , ya que  $\gamma$  y  $K$  han sido seleccionados independientemente de  $\varepsilon$ . Análogamente se prueba la existencia de  $U_2 //$ .

A partir de (2.27) y para  $\varepsilon \leq \varepsilon(\alpha_0)$  se deduce que  $u_\varepsilon$  verifica para  $i=1, 2$

$$\begin{aligned} -\Delta_x u_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon &= f && \text{en } \Omega_i^* \\ u_\varepsilon &= g && \text{en } \partial_i \Omega \times (0, T) \\ u_\varepsilon &= u_0 && \text{en } (U_i \cap \Omega) \times \{0\} \end{aligned}$$

vale decir los coeficientes, datos y dominio son independientes de  $\varepsilon$ .

Esto permite obtener una estimación sobre el comportamiento de  $\nabla_x u_\epsilon$  en  $\partial\Omega \times (0, T)$ .

(2.31) LEMA. En las hipótesis (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) y (2.8) existe una constante  $A$  independiente de  $\epsilon$  tal que

$$(2.32) \quad \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} \right| \leq A \quad \text{en } \partial\Omega \times (0, T)$$

donde  $\nu$  es la normal exterior a  $\partial\Omega$ .

Demostración: Vamos a demostrar (2.32) en  $\partial_1\Omega \times (0, T)$ . Consideremos la función auxiliar  $\omega = u_{\epsilon, \delta} - g$  que satisface

$$\begin{aligned} -\Delta_x \omega + \frac{\partial}{\partial t} \omega &= v && \text{en } \Omega_1^* \\ \omega &= 0 && \text{en } \partial_1\Omega \times (0, T) \\ \omega &= 0 && \text{en } (U_1 \cap \Omega) \times \{0\} \end{aligned}$$

donde  $v = \Delta_x g - \frac{\partial g}{\partial t} + f$  es una función acotada con una norma  $L^\infty(Q)$  independiente de  $\epsilon$ .

Dado que por hipótesis (2.1)  $\partial\Omega \in C^2$ , el dominio  $\Omega$  verifica la propiedad de la bola exterior uniforme, esto es existe  $R > 0$  tal que para todo punto  $x_0 \in \partial\Omega$  existe  $y_0$  con  $R = |x_0 - y_0|$  y la bola con centro  $y_0$  y radio  $R$  es exterior a  $\Omega$ . Sea

$$\omega_0(x) = k \left( \frac{1}{R^p} - \frac{1}{|x - y_0|^p} \right)$$

que para  $k$  y  $p$  adecuados (independientes de  $\epsilon$ ) verifica

$$\begin{aligned} -\Delta_x \omega_0 + \frac{\partial}{\partial t} \omega_0 &\geq 1 && \text{en } \Omega_1^* \\ \omega_0 &\geq 0 && \text{en } \partial_1\Omega \times (0, T) \text{ y } (U_1 \cap \Omega) \times \{0\} \\ \omega_0 &\geq 1 && \text{en } (\partial\Omega_1^* \setminus \partial_1\Omega) \cap \{0 < t < T\} \end{aligned}$$

La idea es usar a  $\omega_0$  como barrera en  $(x_0, t)$  con  $0 < t < T$ .

Para ello tomemos

$$k_0 = \max \left\{ \|\nu\|_{L^\infty(Q)}, \|\omega\|_{L^\infty(Q)} \right\}$$

que resulta finito por (2.2), (2.8) y (2.25).

Ahora consideremos la función  $k_0 \omega_0 \pm \omega$ . Aplicando el Principio de Máximo (como en (2.27)) se sigue que  $k_0 \omega_0 \pm \omega \geq 0$  en  $\Omega_1^*$ , i.e. tenemos la estimación

$$(2.33) \quad |(u_{\varepsilon, \delta} - g)(x, t)| \leq k_0 \omega_0(x)$$

que también es válida para  $u_\varepsilon$  debido a la convergencia uniforme de  $u_{\varepsilon, \delta}$ . Como  $\omega_0$  se anula en  $(x_0, t)$  para  $0 < t < T$  resulta

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} (u_\varepsilon - g)(x_0, t) \right| \leq -k_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial \nu}(x_0) \leq A$$

donde  $A$  es una constante independiente de  $\varepsilon$ . Dada la arbitrariedad de  $x_0 \in \partial\Omega$ , y que  $\frac{\partial}{\partial \nu} g$  es acotado en  $\partial\Omega \times (0, T)$  (por (2.2)) se obtiene (2.32) // .

(2.34) Nota: es claro de la demostración de los Lemas anteriores que sus enunciados son válidos para la función  $u_{\varepsilon, \delta}$ , solución de  $(P_{\varepsilon, \delta})$ , con cotas independientes de  $\delta$  // .

Ahora estamos en condiciones de probar una estimación a priori en  $W_2^{1,1}(Q)$  para la solución  $u_\varepsilon$  que permite construir una solución débil de (P) y juega un rol esencial en todo el estudio de aproximación numérica.

(2.35) TEOREMA. En las hipótesis (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) y (2.8) existe una y sólo una solución  $u_\varepsilon$  del problema  $(P_\varepsilon)$  que verifica:

$$(2.36) \quad u_\varepsilon \in C^{0+\alpha, 0+\alpha/2}(\bar{Q}) \cap W_2^{2,1}(Q), \quad 0 < \alpha < 1$$

$$(2.37) \quad \sup_{0 < t < T} \int_Q |\nabla_x u_\varepsilon(\cdot, t)|^2 + \int_Q \left| \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon \right|^2 \leq C$$

$$(2.38) \quad \int_Q \left| \frac{\partial}{\partial t} \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \right|^2 \leq \frac{C}{\varepsilon}$$

donde  $C$  indica una constante dependiente de los datos  $\Omega$ ,  $g$ ,  $u_0$ ,  $f$  pero no de  $\epsilon$ .

Demostración: Sólo es necesario probar (2.37) y (2.38). Para ello, y como en los Lemas previos, estudiaremos la función  $u_{\epsilon, \delta}$ .

Notemos que  $u_{\epsilon, \delta}$  satisface la ecuación diferencial de  $(P_{\epsilon, \delta})$  puntualmente ya que es una función regular. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por  $\frac{\partial}{\partial t} u_{\epsilon, \delta}$ , integrando en  $\Omega \times (0, t)$ , y aplicando el teorema de Green obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_0^t \nabla_x u_{\epsilon, \delta} (\nabla_x u_{\epsilon, \delta})_t + \int_{\Omega} \int_0^t \beta_{\epsilon, \delta} (u_{\epsilon, \delta})_t \frac{\partial}{\partial t} u_{\epsilon, \delta} \\ = \int_{\Omega} \int_0^t f \frac{\partial}{\partial t} u_{\epsilon, \delta} + \int_0^t \int_{\partial \Omega} \frac{\partial}{\partial \nu} u_{\epsilon, \delta} \cdot g_t \end{aligned}$$

Integrando en el tiempo el primer sumando del miembro izquierdo y empleando la desigualdad (2.21) para  $\beta'_{\epsilon, \delta}$  en el primer sumando del miembro derecho, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla_x u_{\epsilon, \delta}(\cdot, t)|^2 + \int_{\Omega} \int_0^t \beta_{\epsilon, \delta} (u_{\epsilon, \delta})_t \cdot \frac{\partial}{\partial t} u_{\epsilon, \delta} \\ \leq 2 \int_{\Omega} \int_0^t f^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^t \beta_{\epsilon, \delta} (u_{\epsilon, \delta})_t \frac{\partial}{\partial t} u_{\epsilon, \delta} \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla_x u_0|^2 + \int_0^t \int_{\partial \Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} u_{\epsilon, \delta} \right| |g_t| \end{aligned}$$

que en virtud de (2.32) y (2.34) y las hipótesis sobre  $f$ ,  $u_0$  y  $g$  resulta

$$\int_{\Omega} |\nabla_x u_{\epsilon, \delta}(\cdot, t)|^2 + \int_{\Omega} \int_0^t \beta_{\epsilon, \delta} (u_{\epsilon, \delta})_t \frac{\partial}{\partial t} u_{\epsilon, \delta} \leq C$$

con  $C$  una constante dependiente de los datos, pero no de  $\epsilon$  ni  $\delta$ .

Dada la arbitrariedad de  $t$ ,  $0 < t < T$ , es inmediato que esta expresión implica:

$$(2.39) \quad \sup_{0 < t < T} \int_{\Omega} |\nabla_x u_{\epsilon}(\cdot, t)|^2 + \int_Q \beta_{\epsilon}(u_{\epsilon})_t \frac{\partial}{\partial t} u_{\epsilon} \leq C$$

Empleando nuevamente (2.21) se obtiene trivialmente (2.37) y (2.38) a partir de (2.39), con lo que queda probado el teorema // .

(2.40) Nota: La estimación a priori (2.37) permite probar, mediante una técnica estándar del Análisis Funcional, la existencia de una solución débil  $u$  del problema de Stefan (P), y que también verifica (2.37) (ver [F-1]) // .

(2.41) Nota: Las hipótesis (2.2) y (2.3) sobre el dato de contorno  $g$  implican propiedades geométricas de la solución  $u_{\epsilon}$ , que se trasladan a  $u$ , tales como (2.28) y (2.32) que serán importantes en sí mismas cuando en el Capítulo 3 se estudie la aproximación numérica de  $(P_{\epsilon})$ . No obstante a los efectos de obtener una prueba de existencia y una estimación a priori como (2.37) para el problema (P) se pueden suponer otras condiciones sobre  $g$ , tal como se efectúa en el Lema siguiente, y con la ventaja de que la técnica empleada en la prueba se puede repetir en los problemas discreto y semidiscreto (ver Capítulo 3) para obtener estimaciones a priori de las soluciones de los mismos // .

(2.42) LEMA. Supongamos que se verifican las hipótesis (2.1), (2.4), (2.5), (2.6) y (2.8). Entonces existe una y sólo una solución débil de  $(P_{\epsilon})$  y se satisface la estimación a priori (2.39), i.e.

$$\sup_{0 < t < T} \int_{\Omega} |\nabla_x u_{\epsilon}(\cdot, t)|^2 + \int_Q \beta_{\epsilon}(u_{\epsilon})_t \frac{\partial}{\partial t} u_{\epsilon} \leq C ,$$

donde  $C$  indica una constante dependiente de los datos  $\Omega$ ,  $g$ ,  $u_0$  y  $f$  pero no de  $\epsilon$  .

Demostración: Dado que  $u_0(x) = g(x,0)$  para  $x \in V \cap \Omega$  existe una función  $\psi$  Lipschitz continua en  $\bar{Q}$  y que coincide con  $g$  en  $(V \cap \Omega) \times (0, T)$  y con  $u_0$  en  $\Omega \times \{0\}$  (por ejemplo  $\psi(x, t) = (1 - \zeta(x)) g(x, t) + \zeta(x) (1 - \frac{t}{T}) u_0(x)$ , donde  $\zeta$  es una función regular que vale uno en  $\Omega \cap C(V)$  y se anula en  $\partial\Omega$ ). Consideremos una regularización  $\psi_\delta$  de  $\psi$  y el problema auxiliar  $(P_{\epsilon, \delta})$  asociado con  $\psi_\delta$  ( $\psi_\delta$  dato de contorno e inicial). Entonces existe una solución  $u_{\epsilon, \delta}$  en  $W_2^{2,1}(Q)$  y localmente regular (ver [LSU], pág. 457 y 459), de modo que la ecuación diferencial tiene sentido puntual.

Sea  $\psi(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} (u_{\epsilon, \delta}(x, t) - \psi_\delta(x, t))$  una función de prueba, que resulta admisible por la regularidad de  $u_{\epsilon, \delta}$  y  $\psi_\delta$  y porque  $u_{\epsilon, \delta} = \psi_\delta$  en  $\partial\Omega \times (0, T)$ . Multiplicando la ecuación diferencial por  $\psi$  e integrando en  $\Omega \times (0, t) = Q_t$  obtenemos

$$\begin{aligned}
 (2.43) \quad & \int_{Q_t} \nabla_x u_{\epsilon, \delta} \cdot \nabla_x \frac{\partial}{\partial t} u_{\epsilon, \delta} + \int_{Q_t} \beta_{\epsilon, \delta}(u_{\epsilon, \delta})_t \frac{\partial}{\partial t} u_{\epsilon, \delta} \\
 & = \int_{Q_t} \nabla_x u_{\epsilon, \delta} \cdot \nabla_x \frac{\partial}{\partial t} \psi_\delta + \int_{Q_t} \frac{\partial}{\partial t} u_{\epsilon, \delta} \frac{\partial}{\partial t} \psi_\delta \\
 & + \int_{Q_t} \chi_{\epsilon, \delta}(u_{\epsilon, \delta})_t \frac{\partial}{\partial t} \psi_\delta + \int_{Q_t} f_{\epsilon, \delta} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (u_{\epsilon, \delta} - \psi_\delta)
 \end{aligned}$$

Observando que  $\nabla_x u_{\epsilon, \delta} \cdot \nabla_x \frac{\partial}{\partial t} u_{\epsilon, \delta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_x u_{\epsilon, \delta})^2$  para el miembro izquierdo, y para el derecho aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz al primer, segundo y cuarto sumando, recordando (2.21) e integrando por partes el tercer sumando, (2.43) se transforma en

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} |\nabla_x u_{\epsilon, \delta}(\cdot, t)|^2 + 2 \int_{Q_t} \beta_{\epsilon, \delta}(u_{\epsilon, \delta})_t \frac{\partial}{\partial t} u_{\epsilon, \delta} \\
 & \leq \int_{\Omega} |\nabla_x \psi_\delta(\cdot, 0)|^2 + \int_{Q_t} |\nabla_x u_{\epsilon, \delta}|^2 + \int_{Q_t} |\nabla_x \frac{\partial}{\partial t} \psi_\delta|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{Q_t} \beta_{\epsilon, \delta}(u_{\epsilon, \delta})_t \frac{\partial}{\partial t} u_{\epsilon, \delta} + 3 \int_{Q_t} \left| \frac{\partial}{\partial t} \psi_\delta \right|^2 \\
 & + 2 \int_{Q_t} \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_\delta \right|^2 + 2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial t} \psi_\delta(\cdot, t) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial t} \psi_\delta(\cdot, 0) \right| + 3 \int_{Q_t} f_{\epsilon, \delta}^2
 \end{aligned}$$

que puede reescribirse como

$$(2.45) \quad \int_{\Omega} \left| \nabla_x u_{\epsilon, \delta}(\cdot, t) \right|^2 + \int_{Q_t} \beta_{\epsilon, \delta}(u_{\epsilon, \delta})_t \frac{\partial}{\partial t} u_{\epsilon, \delta} \leq \int_{Q_t} \left| \nabla_x u_{\epsilon, \delta} \right|^2 + \alpha(t)$$

donde  $\alpha(t)$  es una función acotada para  $0 < t < T$  debido a las hipótesis sobre  $g$ ,  $u_0$  y  $f$ , independientemente de  $\epsilon$  y  $\delta$ . Aplicando la desigualdad de Gronwall a (2.45) se obtiene (2.39) para  $u_{\epsilon, \delta}$ , y dado que la cota no depende de  $\delta$  la misma estimación vale para  $u_\epsilon$ . La unicidad se prueba como en [F-1] o [K] // .

(2.46) Nota: adicionando las hipótesis (2.9) y (2.10) todos los resultados anteriores se extienden al caso de medios no lineales, para los cuales la ecuación diferencial es

$$(2.47) \quad -\nabla_x (k(u) \nabla_x u) + \frac{\partial}{\partial t} \beta(u) = f \quad ,$$

donde la función entalpía  $\beta$  se define como

$$(2.48) \quad \beta(u) = c(u) + \chi(u)$$

Una posible demostración consiste en transformar la variable dependiente  $u$  (temperatura) vía la transformada de Kirchhoff (ver [Z])

$$v(x, t) = (Gu)(x, t) = \int_0^{u(x, t)} k(s) ds$$

que permite obtener una ecuación en  $v$  con parte elíptica igual a la tratada. Por otro lado de (2.10) se deduce que

$$k_1(u_1 - u_2) \leq v_1 - v_2 \leq k_2(u_1 - u_2) \quad , \quad \text{si } u_1 \geq u_2$$

y de esta desigualdad se sigue que  $c(G^{-1}(\cdot))$  es Lipschitz continua y estrictamente creciente. En consecuencia la ecuación resultante es un caso particular de la ecuación diferencial parabólica



$$(2.49) \quad -\nabla_x (k(x)\nabla_x u) + b(x)u + \frac{\partial}{\partial t} \beta(u) = f$$

con  $\beta$  tal como en (2.48) ( $K$  y  $c$  satisfacen (2.11) y (2.12)). Para (2.49) son aplicables todos los teoremas de [LSU] empleados en el caso más simple, y en particular para obtener una inecuación del tipo (2.26) y aplicar el Principio de Máximo se debe considerar el operador elíptico auxiliar  $-\nabla_x (K(x)\nabla_x) + b(x)$  en lugar de  $-\Delta_x$ . Los resultados (2.35) y (2.42) se demuestran de manera análoga.

Debido a las propiedades de  $k$  (ver (2.10)) las mismas estimaciones obtenidas para  $G_u$  son válidas para  $u$  // .

### §2.3. ESTIMACION DE $\|u - u_\epsilon\|_{L^2(Q)}$

Debido a la regularidad global de la solución del Problema de Stefan, que según (2.30) es  $u \in W_2^{1,1}(Q)$ , la norma natural para aproximar este problema es  $L^2(Q)$ , es decir se exige un orden de regularidad menor que el esperado para la solución. Como se detalla en §2.4.1 la función  $u$  no es en general globalmente Lipschitz continua, por lo que una aproximación uniforme no parece factible, al menos para el problema de Stefan planteado con toda generalidad.

El objetivo de esta sección es probar una estimación para el error  $u - u_\epsilon$  en norma  $L^2(Q)$ , para lo cual será necesaria la siguiente observación.

(2.50) LEMA. Para todo  $a, b \in \mathbb{R}$  se verifica

$$(\chi(a) - \chi_\epsilon(b))(a - b) \geq -4\epsilon$$

Demostración: Consideremos  $\mathbb{R}$  descompuesto en los intervalos  $(-\infty, -\epsilon)$ ,  $[-\epsilon, \epsilon]$  y  $(\epsilon, \infty)$ . Si  $a$  y  $b$  no pertenecen al mismo intervalo, entonces  $a$  ó  $b$  (digamos  $a$ ) no pertenece a  $[-\epsilon, \epsilon]$  y por lo tanto  $\chi(a) = \chi_\epsilon(a)$ . Como  $\chi$  y  $\chi_\epsilon$  son monótonas se obtiene la desigualdad (con cero en lugar de  $-4\epsilon$ ). Si  $a$  y  $b$  pertenecen al mismo intervalo el único caso no trivial

es que éste sea  $[-\epsilon, \epsilon]$ , en cuyo caso  $|a - b| \leq 2\epsilon$  ,  $|\chi(a) - \chi_\epsilon(b)| \leq 2$  , y de aquí se obtiene la tesis // .

(2.51) TEOREMA. Sean  $u$  y  $u_\epsilon$  soluciones débiles de los problemas (P) y  $(P_\epsilon)$  respectivamente. Si se satisface la hipótesis de no degeneración (2.7), entonces existe una constante  $C > 0$  sólo dependiente de  $C^*$ ,  $\Omega$  y  $T$  tal que

$$(2.52) \quad \|u - u_\epsilon\|_{L^2(Q)} \leq C \epsilon^{1/2}$$

Demostración: Recordando las formulaciones débiles de (P) y  $(P_\epsilon)$  (ver (2.17)) es claro por sustracción, que se satisface la ecuación

$$(2.53) \quad \int_Q \nabla_x (u - u_\epsilon) \cdot \nabla_x \psi - (u - u_\epsilon) \psi_t - (\chi(u) - \chi_\epsilon(u_\epsilon)) \psi_t = \int_\Omega (\chi(u_0) - \chi_\epsilon(u_0)) \psi(\cdot, 0) ,$$

para toda función  $\psi \in W_2^{1,1}(Q)$  que se anula en  $\partial\Omega \times (0, T)$  y  $\Omega \times \{T\}$  .

La idea de la demostración es proponer una función de prueba que elimine el primer sumando del miembro izquierdo que es inadecuado para una estimación  $L^2$  y simultáneamente verifique  $\psi_t = u_\epsilon - u$  para aprovechar la forma particular del resto de los sumandos. Sea

$$(2.54) \quad \psi(x, t) = \int_t^T (u - u_\epsilon)(x, s) ds$$

que es obviamente una función admisible, pues pertenece al espacio  $W_2^{1,1}(Q)$  y verifica las condiciones de borde. Llevando (2.54) a (2.53) obtenemos

$$(2.55) \quad \int_Q \nabla_x (u - u_\epsilon) \int_t^T \nabla_x (u - u_\epsilon) + \int_Q (u - u_\epsilon)^2 + \int_Q (\chi(u) - \chi_\epsilon(u_\epsilon)) (u - u_\epsilon) = \int_Q (\chi(u_0) - \chi_\epsilon(u_0)) (u - u_\epsilon)$$

Seguidamente analizaremos cada término por separado. Para el primer sumando del miembro izquierdo notemos que

$$(2.56) \quad \int_Q \nabla_X (u - u_\epsilon) \int_t^T \nabla_X (u - u_\epsilon) = -\frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_t^T \nabla_X (u - u_\epsilon)(x, s) ds \right)^2 dt dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \left( \int_0^T \nabla_X (u - u_\epsilon) \right)^2 \geq 0$$

Para el tercer término de (2.55) se aplica el Lema (2.50) obteniéndose

$$(2.57) \quad \int_Q (\chi(u) - \chi_\epsilon(u_\epsilon)) (u - u_\epsilon) \geq -4 \epsilon |Q| = -4 T |\Omega| \epsilon$$

Finalmente para el segundo miembro de (2.55) se aplica la condición (2.7) resultando

$$(2.58) \quad \int_Q (\chi(u_0) - \chi_\epsilon(u_0)) (u - u_\epsilon) \leq 2 \int_0^T \int_{A_\epsilon} |u - u_\epsilon|$$

$$\leq 2(T|A_\epsilon|)^{1/2} \left( \int_Q |u - u_\epsilon|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq C \epsilon^{1/2} \|u - u_\epsilon\|_{L^2(Q)}$$

donde  $A_\epsilon = \{x \in \Omega / |u_0(x)| < \epsilon\}$ .

Con las estimaciones (2.56), (2.57) y (2.58) en (2.55) resulta

$$(2.59) \quad \|u - u_\epsilon\|_{L^2(Q)}^2 \leq C \epsilon + C \epsilon^{1/2} \|u - u_\epsilon\|_{L^2(Q)}$$

que implica la estimación de error (2.52) que queríamos probar // .

(2.60) Nota: acotaciones del tipo (2.52) se obtienen en [J-R] por otro método y para el caso de condiciones de contorno de tipo Neumann. También se mencionan en [M-1] para el mismo problema que [J-R] .

Seguidamente veremos que la técnica de demostración de (2.57) incluye este caso. Más aún consideremos el problema de Stefan con condiciones de contorno mixtas

$$u = g \quad \text{en} \quad \Gamma_1 \times (0, T)$$

$$\int_Q \nabla_x u \cdot \nabla_x \psi + \beta(u) \psi_t + \int_{\Gamma_2 \times (0, T)} (g_0(x)u + g_1(x, t)) \psi = \int_Q f \psi + \int_{\Omega} \beta(u_0) \psi(\cdot, 0)$$

para toda  $\psi \in W_2^{1,1}(Q)$  tal que  $\psi = 0$  en  $\Gamma_1 \times (0, T)$  y  $\Omega \times \{T\}$ , donde  $g_0(x) \geq 0$  y  $g_1$  son regulares,  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ .

Restando las formulaciones débiles para  $u$  y  $u_\epsilon$  y proponiendo (2.54) como función de prueba, que claramente es admisible, obtenemos una ecuación semejante a (2.55) con la novedad de que aparece el término que corresponde a la condición de Neumann y que se acota de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2 \times (0, T)} g_0(x) (u - u_\epsilon) \int_t^T (u - u_\epsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} g_0(x) \int_t^T -\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_t^T u - u_\epsilon \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} g_0(x) \left( \int_0^T u - u_\epsilon \right)^2 \geq 0 \quad // . \end{aligned}$$

(2.61) Nota: la condición de no degeneración no sería necesaria si el problema  $(P_\epsilon)$  se formulara con un dato inicial  $\tilde{u}_0$  tal que

$$\beta_\epsilon(\tilde{u}_0) = \beta(u_0)$$

Sin embargo es más natural fijar la temperatura inicial  $u_0$  igual para ambos problemas, sobre todo pensando que al realizar la aproximación numérica la función  $\tilde{u}_0$  no sería un dato inmediato // .

(2.62) Nota: debe observarse que la estimación (2.52) es muy precisa porque esencialmente se basa en (2.50) que es una acotación optimal.

No obstante algo más se puede decir si la solución  $u$  es no degenerada. En efecto siendo

$$A_\epsilon(u) = \{(x,t) \in Q : |u(x,t)| < \epsilon\} ,$$

notemos que en (2.50) el único caso que proporciona un aporte negativo es cuando ambas variables pertenecen a  $[-\epsilon, \epsilon]$ , de donde en (2.57) podemos escribir

$$\int_Q (\chi(u) - \chi_\epsilon(u_\epsilon))(u - u_\epsilon) \geq \int_{A_\epsilon(u) \cap A_\epsilon(u_\epsilon)} -4\epsilon \geq -4\epsilon |A_\epsilon(u)|$$

Luego eligiendo el dato inicial como en (2.61) resulta la estimación

$$\|u - u_\epsilon\|_{L^2(Q)}^2 \leq c \epsilon |A_\epsilon(u)|$$

Si la función  $u$  es no degenerada, i.e.  $|A_\epsilon(u)| \leq c \epsilon$ , entonces

$$\|u - u_\epsilon\|_{L^2(Q)} \leq c \epsilon .$$

Una interesante caracterización de soluciones no degeneradas la proporciona el siguiente resultado (comunicación personal de L. Caffarelli):

"Sean  $f = 0$ ,  $g_t \geq \alpha > 0$ ,  $\Delta_x u_0 \geq \alpha > 0$ , entonces

$$|A_\epsilon^+| < c \epsilon \text{ donde}$$

$$A_\epsilon^+ = \{(x,t) \in Q : 0 < u(x,t) < \epsilon\} ."$$

Luego la estimación de orden  $\epsilon$  se obtiene redefiniendo  $\beta(s) = s + \chi(s)$  donde  $\chi$  es la característica de  $\mathbb{R}^+$  // .

(2.63) TEOREMA. En las mismas condiciones de (2.51) existe una constante  $c > 0$  sólo dependiente de  $C^*$ ,  $\Omega$  y  $T$  tal que

$$\|\beta(u) - \beta_\epsilon(u_\epsilon)\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq c \epsilon^{1/2} .$$

Demostración: Observemos que definiendo

$$\psi(x,t) = \int_t^{t_0} (u - u_\epsilon)(x,s) ds , \quad 0 < t < t_0 < T ,$$

en lugar de (2.54) y prolongando  $\psi$  por cero para  $t_0 < t < T$ , de la prueba de (2.51) se deduce que

$$\int_\Omega \left( \int_0^{t_0} \nabla_x (u - u_\epsilon)^2 \leq c \epsilon .$$

Sean  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  y  $\zeta_\sigma \in C^\circ[0, T]$  definida por ( $\sigma > 0$ )

$$\begin{aligned} \zeta_\sigma(t) &= 1 && , \text{ si } 0 < t < t_0 - \sigma \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma} (t - t_0) && , \text{ si } t_0 - \sigma \leq t \leq t_0 + \sigma \\ &= 0 && , \text{ si } t_0 + \sigma \leq t \leq T . \end{aligned}$$

Entonces  $\psi(x, t) = \phi(x) \zeta(t)$  es una función admisible en (2.17), con la cual resulta

$$\begin{aligned} \int_0^T \zeta_\sigma(x) \int_\Omega \nabla_x (u - u_\epsilon) \cdot \nabla \phi + \frac{1}{2\sigma} \int_{t_0 - \sigma}^{t_0 + \sigma} \int_\Omega (\beta(u) - \beta_\epsilon(u_\epsilon)) \phi \\ = \int_\Omega (\chi(u_0) - \chi_\epsilon(u_0)) \phi \end{aligned}$$

Como la función  $(t \rightarrow \int_\Omega (\beta(u) - \beta_\epsilon(u_\epsilon))(\cdot, t) \phi)$  pertenece a  $L^\infty(0, T)$  por ser  $\beta(u)$  y  $\beta_\epsilon(u_\epsilon)$  acotadas en  $Q$ , aplicando el Teorema de Derivación de Lebesgue obtenemos que

$$\frac{1}{2\sigma} \int_{t_0 - \sigma}^{t_0 + \sigma} \int_\Omega (\beta(u) - \beta_\epsilon(u_\epsilon)) \phi \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \int_\Omega (\beta(u) - \beta_\epsilon(u_\epsilon))(\cdot, t_0) \phi$$

en c. t. p.  $t_0$ ,  $0 < t_0 < T$ . Entonces la igualdad anterior implica

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\beta(u) - \beta_\epsilon(u_\epsilon))(\cdot, t_0) \phi &= \int_\Omega \int_0^{t_0} \nabla_x (u_\epsilon - u) \cdot \nabla \phi + \int_\Omega (\chi(u_0) - \chi_\epsilon(u_0)) \phi \\ &\leq [ \int_\Omega \int_0^{t_0} (\nabla_x (u_\epsilon - u))^2 ]^{1/2} [ \int_\Omega |\nabla \phi|^2 ]^{1/2} + |A_\epsilon|^{1/2} [ \int_\Omega \phi^2 ]^{1/2} \\ &\leq c \epsilon^{1/2} \| \phi \|_{H_0^1(\Omega)} , \end{aligned}$$

i.e.  $(\beta(u) - \beta_\epsilon(u_\epsilon))(\cdot, t_0)$  es una funcional lineal y continua en  $H_0^1(\Omega)$  con norma acotada por  $c \epsilon^{1/2}$  uniformemente en  $t_0$ ,  $0 < t_0 < T$ . Con esto queda probado el teorema // .

Para la formulación más general del problema de Stefan basada en la ecuación (2.49), la estimación (2.52) aún es válida como se prueba en el siguiente teorema.

(2.64) TEOREMA. Sean  $u$  y  $u_\epsilon$  soluciones débiles de los problemas (P) y  $(P_\epsilon)$  respectivamente, asociados a la ecuación parabólica (2.49). Entonces si se satisfacen las hipótesis (2.7), (2.9), (2.11) y (2.12), existe una constante  $c > 0$  sólo dependiente de  $C^*$ ,  $C_1$ ,  $T$  y  $\Omega$  tal que

$$\|u - u_\epsilon\|_{L^2(Q)} + \|\beta(u) - \beta_\epsilon(u_\epsilon)\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq c\epsilon^{1/2}.$$

Demostración: Restando las formulaciones débiles de los problemas (P) y  $(P_\epsilon)$  se obtiene

$$\begin{aligned} \int_Q [K(x) \cdot \nabla_x (u - u_\epsilon)] \cdot \nabla_x \psi - (c(u) - c(u_\epsilon))\psi_t - (\chi(u) - \chi_\epsilon(u_\epsilon))\psi_t \\ + b(x)(u - u_\epsilon)\psi \\ = \int_\Omega (\chi(u_0) - \chi_\epsilon(u_0))\psi(\cdot, 0) \end{aligned}$$

La idea, como en (2.51), es usar una adecuada función de prueba  $\psi$ . Consideremos  $\psi$  tal como en (2.54). Luego el primer sumando del miembro izquierdo se estima de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (2.65) \quad \int_Q [K(x) \cdot \nabla_x (u - u_\epsilon)] \cdot \int_t^T \nabla_x (u - u_\epsilon) \\ = \int_Q K(x)^{1/2} \cdot \nabla_x (u - u_\epsilon) \int_t^T K(x)^{1/2} \cdot \nabla_x (u - u_\epsilon) \\ = -\frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_t^T K(x)^{1/2} \cdot \nabla_x (u - u_\epsilon) \right)^2 \\ = \int_\Omega \left( \int_0^T K(x)^{1/2} \cdot \nabla_x (u - u_\epsilon) \right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

donde se ha usado la hipótesis (2.11) de que  $K$  es definida positiva y simétrica para asegurar la existencia de la matriz  $K^{1/2}$ .

Para el segundo sumando tenemos

$$(2.66) \quad \int_Q (c(u) - c(u_\epsilon))(u - u_\epsilon) \geq c_1 \int_Q |u - u_\epsilon|^2$$

donde hemos aplicado las hipótesis (2.9) sobre  $c(\cdot)$ .

Para analizar el tercer sumando aplicamos como en (2.51) el le-

ma (2.50), obteniéndose la misma estimación que en aquel caso.

Para el cuarto sumando procedemos como en (2.66), es decir

$$\begin{aligned}
 (2.68) \quad \int_Q b(x)(u - u_\epsilon) \int_t^T (u - u_\epsilon) &= \int_Q b(x)^{1/2}(u - u_\epsilon) \int_t^T b(x)^{1/2}(u - u_\epsilon) \\
 &= \int_\Omega \int_0^T b(x)^{1/2}(u - u_\epsilon) \int_t^T b(x)^{1/2}(u - u_\epsilon) \\
 &= -\frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_t^T b(x)^{1/2}(u - u_\epsilon) \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left( \int_0^T b(x)^{1/2}(u - u_\epsilon) \right)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

porque según (2.12) es  $b(x) \geq 0$ .

Finalmente de (2.7) obtenemos para el segundo miembro

$$\begin{aligned}
 (2.69) \quad \int_Q (\chi(u_0) - \chi_\epsilon(u_0))(u - u_\epsilon) &= \int_0^T \int_{A_\epsilon} (\chi(u_0) - \chi_\epsilon(u_0))(u - u_\epsilon) \\
 &\leq 2(T|A_\epsilon|)^{1/2} \left( \int_Q |u - u_\epsilon|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq c \epsilon^{1/2} \|u - u_\epsilon\|_{L^2(Q)}
 \end{aligned}$$

A partir de las estimaciones (2.65)-(2.69) resulta la desigualdad (2.59) y de ella se sigue (2.52). Para acotar las funciones entalpía se procede como en (2.63) recordando las propiedades de  $K$  // .

(2.70) Nota: por las propiedades de  $k$  (ver (2.10)) la estimación (2.52) es válida para la ecuación (2.47) con  $c$  dependiente de  $c^*$ ,  $c_1$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $T$  y  $\Omega$  // .

(2.71) Nota: como aplicación de la técnica de demostración de los teoremas (2.51) y (2.64) resulta una prueba de la unicidad de solución de los problemas (P) y  $(P_\epsilon)$ , que es considerablemente más elemental que la realizada en [F-1].



En efecto, supongamos que  $u_1$  y  $u_2$  son dos soluciones del problema (P) para la ecuación parabólica (2.49). Por sustracción de las formulaciones débiles obtenemos

$$\int_Q [K(x) \nabla_x (u_1 - u_2)] \nabla_x \psi - (c(u_1) - c(u_2)) \psi_t - (\chi(u_1) - \chi(u_2)) \psi_t + b(x) (u_1 - u_2) \psi = 0$$

Empleando la función de prueba  $\psi = \int_t^T u_1 - u_2$  y procediendo como en (2.64), resulta

$$\| u_1 - u_2 \|_{L^2(Q)} \leq 0$$

y de aquí  $u_1 = u_2$  como habíamos enunciado // .

## §2.4. PROPIEDADES DEL PROBLEMA (P)

### 2.4.1 Regularidad Global de la Solución

La solución  $u$  del problema (P) tiene una escasa regularidad global. Hemos probado (ver (2.40)) que  $u \in W_2^{1,1}(Q)$  pero esta condición no implica, en varias dimensiones espaciales, propiedades de continuidad de la función  $u$ .

Notemos que en general  $u$  no será mejor que una función Lipschitz, ya que la condición (1.24) de conservación de energía en la interfase implica una discontinuidad en las derivadas primeras, al menos para el caso no estacionario. Sin embargo la situación es aún peor en los puntos singulares de la frontera libre, donde las derivadas primeras de  $u$  se hacen infinito debido a la súbita desaparición de los mismos. Esta situación puede presentarse hasta con datos muy regulares si éstos y el dominio se combinan de determinada manera: muy poco hay hecho en la caracterización de estos casos. Por lo tanto la regularidad global de la solución no es mayor al aumentar la suavidad de los datos.

No obstante la función  $u$  resulta continua como enuncia el siguiente teorema probado en [C-E]. Se considera el problema singular (P) con  $g = f = 0$ .

(2.72) TEOREMA. Existe una función no decreciente (módulo de continuidad)

$$\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \quad \omega(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \omega(s) = 0$$

tal que

$$|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| \leq \omega(|x_1 - x_2|^2 + |t_1 - t_2|)$$

para todo  $(x_i, t_i) \in \bar{Q}$  // .

(2.73) Nota: el módulo de continuidad  $\omega$  es peor que Lipschitz // .

(2.74) Nota: (2.72) se extiende a problemas con una función  $\beta$  continua, creciente y que satisfaga

$$\beta'(x) \quad \text{existe para todo } x \neq 0$$

(2.75) 
$$\beta(0) = 0$$

$$\beta'(x) \geq \gamma > 0 \quad \text{para alguna constante } \gamma, x \neq 0$$

$$|\beta'(x)| \leq C(\epsilon) \quad \text{para } \epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon} \quad \epsilon > 0$$

Por ejemplo la ecuación de difusión de gas en medios porosos  $\omega_t = \Delta(|\omega|^\alpha \text{sg } \omega)$  ( $\alpha > 1$ ) puede escribirse en esta forma, definiendo  $v = |\omega|^\alpha \text{sg } \omega$  como variable dependiente. Todos los resultados de la teoría de regularización de las secciones §2.2 y §2.3 se extienden a este caso // .

#### 2.4.2 Estabilidad de Soluciones

El propósito de este párrafo es probar una estimación en nor

ma  $L^2(Q)$  para la diferencia entre dos soluciones  $u$  y  $\hat{u}$  de (P) correspondientes a condiciones de contorno  $g$  y  $\hat{g}$ , condiciones iniciales  $u_0$  y  $\hat{u}_0$  y términos de generación interna (fuentes)  $f$  y  $\hat{f}$ . Se obtiene una estimación del mismo tipo que en [F-1] pero por una técnica diferente, que incluso permite la generalización al caso de no linealidades debidas al medio, y se extiende al problema discreto (ver §3.5).

Consideremos  $u_\epsilon$  y  $\hat{u}_\epsilon$  las soluciones de los problemas regularizados  $(P_\epsilon)$  para cada familia de datos.

(2.76) LEMA. Existe una constante  $C$  sólo dependiente de  $\Omega$  y  $T$ , no de  $\epsilon$ , tal que

$$(2.77) \quad \int_Q (u_\epsilon - \hat{u}_\epsilon) (\beta_\epsilon(u_\epsilon) - \beta_\epsilon(\hat{u}_\epsilon)) \leq C \left( \int_\Omega |\beta_\epsilon(u_0) - \beta_\epsilon(\hat{u}_0)|^2 + \int_Q |f - \hat{f}|^2 \right) + C \left( \int_Q |g - \hat{g}|^2 + |\nabla_x(g - \hat{g})|^2 \right)^{1/2}$$

Demostración: Como en las demostraciones anteriores la idea consiste en definir una adecuada función de prueba  $\psi$  para la formulación débil que permita eliminar el término con derivadas espaciales y aprovechar la forma del término con derivada temporal. Por simplicidad de notación vamos a eliminar el subíndice  $\epsilon$ .

Para ello consideremos  $\tilde{u}(\cdot, t)$  la proyección  $H_0^1$  de  $u(\cdot, t)$  con dato de borde  $\hat{g}(\cdot, t)$ , i.e.

$$\hat{u}(\cdot, t) = \hat{g}(\cdot, t) \quad \text{en } \partial\Omega$$

$$(2.78) \quad \int_\Omega \nabla_x(u - \tilde{u})(\cdot, t) \cdot \nabla_x \psi = 0$$

para toda  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ , lo cual tiene sentido en casi todo  $t$ ,  $0 < t < T$ ,

porque  $u \in W_2^{1,1}(Q)$ . De la teoría elíptica resulta que

$$(2.79) \quad \| (u-\tilde{u})(\cdot, t) \|_{H^1(\Omega)} \leq C \| (g-\hat{g})(\cdot, t) \|_{H^1(\Omega)}$$

donde  $C$  depende sólo de  $\Omega$  (Basta proponer  $\psi = [(u-\tilde{u}) - (g-\hat{g})](\cdot, t)$  y luego usar la desigualdad de Poincarè).

De (2.78) y (2.17) tenemos que, para toda  $\psi \in W_2^{1,1}(Q)$  y que se anula en  $\partial\Omega \times (0, T)$  y  $\Omega \times \{T\}$  se verifica

$$(2.80) \quad \int_Q \nabla_x \tilde{u} \cdot \nabla_x \psi - \beta(u) \psi_t = \int_Q \beta(u_0) \psi(\cdot, 0) + \int_Q f \psi$$

Restando (2.80) y la formulación débil correspondiente a  $\hat{u}$  obtenemos

$$(2.81) \quad - \int_Q (\beta(u) - \beta(\hat{u})) \psi_t = - \int_Q \nabla_x (\tilde{u} - \hat{u}) \cdot \nabla_x \psi + \int_Q (\beta(u_0) - \beta(\hat{u}_0)) \psi(\cdot, 0) \\ + \int_Q (f - \hat{f}) \psi = I + II + III$$

Consideremos la función de prueba

$$\psi(x, t) = \int_t^T (\tilde{u} - \hat{u})(x, s) ds$$

que por (2.78) es claramente una función admisible. Para el primer miembro de (2.81) tenemos

$$(2.82) \quad \int_Q (\beta(u) - \beta(\hat{u})) (\tilde{u} - \hat{u}) = \int_Q (\beta(u) - \beta(\hat{u})) (u - \hat{u}) + \int_Q (\beta(u) - \beta(\hat{u})) (\tilde{u} - u),$$

y como de (2.79) resulta

$$\int_Q (\beta(u) - \beta(\hat{u})) (\tilde{u} - u) = \int_Q (u - \hat{u}) (\tilde{u} - u) + (\chi(u) - \chi(\hat{u})) (\tilde{u} - u) \\ \leq \left( \int_Q (\beta(u) - \beta(\hat{u})) (u - \hat{u}) \right)^{1/2} \left( \int_Q |u - \tilde{u}|^2 \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \int_Q |\tilde{u}-u| \\
 & \leq \frac{1}{4} \int_Q (\beta(u)-\beta(\hat{u})) (u-\hat{u}) \\
 & + C \left( \int_Q |g-\hat{g}|^2 + |\nabla_x (g-\hat{g})|^2 \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

reemplazando en (2.82) nos queda

$$\begin{aligned}
 (2.83) \quad \int_Q (\beta(u)-\beta(\hat{u})) (\tilde{u}-\hat{u}) & \geq \frac{3}{4} \int_Q (\beta(u)-\beta(\hat{u})) (u-\hat{u}) \\
 & - C \left( \int_Q |g-\hat{g}|^2 + |\nabla_x (g-\hat{g})|^2 \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

Ahora estudiaremos el segundo miembro de (2.81). Como en varias demostraciones anteriores :  $I \leq 0$  .

$$\begin{aligned}
 (2.84) \quad \text{II} & \leq C \left( \int_{\Omega} |\beta(u_0)-\beta(\hat{u}_0)|^2 \right)^{1/2} \left[ \left( \int_Q |\tilde{u}-u|^2 \right)^{1/2} + \left( \int_Q |u-\hat{u}|^2 \right)^{1/2} \right] \\
 & \leq C \left( \int_{\Omega} |\beta(u_0)-\beta(\hat{u}_0)|^2 + \int_Q |g-\hat{g}|^2 + |\nabla_x (g-\hat{g})|^2 \right) \\
 & + \frac{1}{4} \int_Q (\beta(u)-\beta(\hat{u})) (u-\hat{u})
 \end{aligned}$$

y procediendo análogamente obtenemos

$$(2.85) \quad \text{III} \leq C \left( \int_Q |f-\hat{f}|^2 + \int_Q |g-\hat{g}|^2 + |\nabla_x (g-\hat{g})|^2 \right) + \frac{1}{4} \int_Q (\beta(u)-\beta(\hat{u})) (u-\hat{u})$$

Finalmente vemos que con las estimaciones (2.83), (2.84) y (2.85) sigue la acotación (2.77) que queríamos probar // .

(2.86) TEOREMA. Sean  $u$  y  $\hat{u}$  dos soluciones del problema de Stefan

(P) correspondientes a los datos  $u_0$ ,  $g$ ,  $f$  y  $\hat{u}_0$ ,  $\hat{g}$ ,  $\hat{f}$  respectivamente. Entonces existe una constante  $C$  sólo dependiente de  $\Omega$  y  $T$  tal que

$$\int_Q (u - \hat{u})(\beta(u) - \beta(\hat{u})) \leq C \left( \int_{\Omega} |\beta(u_0) - \beta(\hat{u}_0)|^2 + \int_Q |f - \hat{f}|^2 \right) + C \left( \int_Q |g - \hat{g}|^2 + |\nabla_x (g - \hat{g})|^2 \right)^{1/2}.$$

Demostración: se basa en la estimación (2.77) que es uniforme en  $\varepsilon$ . Como  $u_\varepsilon$  ( $\hat{u}_\varepsilon$ ) converge a  $u$  ( $\hat{u}$ ) en  $L^2$ , la misma estimación vale para el límite //.

(2.87) Nota: (2.76) y (2.86) se extienden al problema de Stefan asociado a la ecuación diferencial (2.49), suponiendo válidas las hipótesis (2.11) y (2.12). La demostración es idéntica a la realizada.

En particular si  $k$  verifica (2.10), entonces (2.76) y (2.86) son satisfechas por el problema de Stefan asociado a (2.47) //.

(2.88) Nota: los teoremas (2.76) y (2.86) han sido obtenidos bajo condiciones más débiles de los datos que las supuestas en [F-1]. Por ejemplo no son necesarias las hipótesis (2.2), (2.3), (2.5) y (2.6), requiriéndose de los datos la regularidad mínima que dé sentido a las desigualdades probadas //.

#### 2.4.3 Monotonía de la Solución con Respecto a los Datos

Tal como se muestra en [K] bajo hipótesis más restrictivas de los datos, a partir del problema discreto y sus propiedades de monotonía se pueden inferir resultados sobre el problema continuo.

(2.89) TEOREMA. Sean  $u$  y  $\hat{u}$  dos soluciones del problema de Stefan (P) correspondientes a los datos  $u_0$ ,  $g$ ,  $f$  y  $\hat{u}_0$ ,  $\hat{g}$ ,  $\hat{f}$  respectiva-

mente tales que

$$u_0 \leq \hat{u}_0, \quad g \leq \hat{g}, \quad f \leq \hat{f}$$

Entonces resulta  $u \leq \hat{u}$  en  $Q$

Demostración: en Capítulo 4 (ver (4.52)) se prueba que las soluciones discretas están en la misma relación de monotonía que los datos. Como las soluciones discretas convergen en  $L^2(Q)$ , y entonces en casi todo punto (por la unicidad de solución), a las soluciones continuas de (P) (ver (3.78)) la desigualdad se mantiene para el límite // .

(2.89) Nota: La teoría de aproximación numérica del Capítulo 3 se extiende a problemas de Stefan asociados a la ecuación diferencial (2.49), y por lo tanto también el teorema (2.88). En particular esta propiedad de monotonía es válida para la ecuación (2.47) (recordar (2.10)) // .

#### 2.4.4 Sobre las Zonas Degeneradas

Para problemas de Stefan (P) sin fuentes internas de energía ( $f = 0$ ) no existe un estudio general de la regularidad de la frontera libre  $F = \{(x,t) \in Q / u(x,t) = 0\}$ . En particular sólo para determinadas condiciones sobre los datos se sabe que este conjunto tiene interior vacío, por ejemplo es una superficie Lipschitz si:

$$g_t > 0; \quad \Delta u_0 > 0$$

Pero si  $f \neq 0$  entonces cabe esperar que  $F$  degenerare en un conjunto con interior no vacío. Ejemplos con estas zonas degeneradas (mushy zone) se proponen en el Capítulo 5, siendo éste el momento de detenerse a analizar la validez de los resultados expuestos hasta ahora. Es claro que la función entalpía  $\beta$  ya no es una función uniforme de la temperatura  $u$ , resultando (ver (2.17))

$$|b(x,t)| \leq 1 \quad \text{si} \quad u(x,t) = 0$$

En estos casos la temperatura no es suficiente para describir

el estado termodinámico del sistema, siendo  $\beta$  la variable indicada. Si la condición inicial es degenerada, y por lo tanto falla (2.7), debería elegirse un dato inicial  $\beta_\epsilon(\tilde{u}_0)$  para el problema regularizado  $(P_\epsilon)$  tal que (comparar con (2.61)).

$$\beta_\epsilon(\tilde{u}_0) = \beta(u_0) \quad , \quad \text{o al menos} \quad \|\beta_\epsilon(\tilde{u}_0) - \beta(u_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \epsilon^{1/2}$$

Por otra parte el Lema (2.50) permanece válido dando un adecuado sentido a la desigualdad, ya que  $\chi$  no es una función uniforme. Con estas dos observaciones todos los resultados probados se extienden a este caso.

(2.90) Nota: en particular el problema de Stefan de una fase, para el cual  $\{(x,t) \in Q / u(x,t) < 0\} = \phi$ , constituye un ejemplo de problema degenerado. La teoría de existencia y unicidad de la sección §2.2 se aplica a este caso, notando primero que en  $\partial_2 \Omega \times [0, T]$  será  $g = 0$  y por lo tanto  $g_t = 0$  en dicho conjunto y resultando entonces válido (2.35) a pesar de que (2.27) y (2.32) no se verifican. Por otra parte es claro de la demostración de (2.42) que la estimación (2.39) es válida para el problema de una fase bajo la hipótesis (2.4) sobre  $g$

Los resultados de acotación del error  $u - u_\epsilon$  de §2.3 también son válidos para el problema de una fase definiendo  $\chi(0) = 0 //$ .

(2.91) Nota: es importante observar que el resultado de unicidad de solución de los problemas  $(P)$  y  $(P_\epsilon)$  (ver (2.71)) también es válido para las funciones entalpía. En efecto si asociadas a una misma temperatura suponemos dos funciones  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , éstas verifican

$$\int_Q (\beta_1 - \beta_2) \psi_t = 0$$

para toda  $\psi \in W_2^{1,1}(Q)$  y que se anula en  $\partial\Omega \times (0, T)$  y  $\Omega \times \{T\}$  (ver (2.17)). Entonces para  $\phi$  regular en  $Q$  y que se anula en  $\partial\Omega \times (0, T)$



consideramos  $\psi = \int_t^T \phi$  , de donde

$$\int_Q (\beta_1 - \beta_2) \phi = 0$$

y de aquí  $\beta_1 = \beta_2$  c.t.p. // .

### CAPITULO 3

#### EL PROBLEMA DISCRETO

En este capítulo estudiaremos la aproximación numérica del problema regularizado  $(P_\epsilon)$ , para lo cual se propone un esquema de elementos finitos en el espacio y un esquema de diferencias finitas implícito en el tiempo que constituyen el llamado problema discreto. Como paso previo será analizado, tal como en [D] y [W], el problema semidiscreto que consiste en mantener continua la variable tiempo, y del cual obtendremos las ideas centrales para aplicar al problema discreto.

El objetivo básico es obtener estimaciones del error en norma  $L^2$  del espacio-tiempo entre la solución continua  $u_\epsilon$  y las soluciones semidiscreta  $u_{\epsilon,h}$  y discreta  $u_{\epsilon,h,\tau}$  que vinculen los tres parámetros del problema: el parámetro de regularización  $\epsilon$  y los tamaños de las mallas espacial  $h$  y temporal  $\tau$ . Entonces será posible relacionarlos de modo que las cotas de error resulten de orden  $\epsilon^{1/2}$  tal como fue previsto para la diferencia  $u - u_\epsilon$  en el Capítulo 2.

En condiciones generales sobre los datos la relación adecuada es  $\epsilon \sim h \sim \tau$ , pudiendo mejorarse a  $h^{4/3} \sim \epsilon \sim \tau$  para una adecuada elección del dato inicial y el término fuente discretos (ver [J-R] para el problema de Neumann).

Los elementos finitos empleados (tipo simple o paralelepípedo) no son conformes en el sentido que no cubren exactamente el dominio. Esto ocasiona ciertas dificultades al estudiar la aproximación en norma  $L^2$ , siendo necesarios algunos resultados de la teoría elíptica que se incluyen en el Apéndice B.

### §3.1 NOTACION E HIPOTESIS

En esta sección vamos a precisar la notación relativa a los esquemas de aproximación numérica siguiendo a Ciarlet (ver [C-1]), y las hipótesis sobre los mismos y los datos.

#### 3.1.1 Notación II

- (3.1)  $K$  elemento finito, de tipo simple o paralelepípedo, con vértices en  $\bar{\Omega}$
- (3.2)  $h_K$  diámetro de  $K$  ( $h_K = \text{diam}(K)$ )
- (3.3)  $\rho_K$   $\sup \{ \text{diam}(S) : S \text{ es una bola contenida en } K \}$
- (3.4)  $F_h$  familia de elementos finitos  $K$
- (3.5)  $h = \max_{K \in F_h} h_K$  norma de la triangulación espacial
- (3.6)  $\Omega_h = (\cup_{K \in F_h} K)^{\circ}$  dominio espacial aproximado
- (3.7)  $\partial\Omega_h$  borde de  $\Omega_h$
- (3.8)  $Q_h = \Omega_h \times (0, T)$  dominio espacio-tiempo aproximado
- (3.9)  $x_i$  nodo de la triangulación espacial, para  $i$  variando de la siguiente forma
- $1 \leq i \leq I$  : nodos interiores de  $\Omega_h$  .
- $I < i \leq \tilde{I}$  : nodos sobre  $\partial\Omega_h$  .
- (3.10)  $P(K)$  espacio de polinomios interpolantes sobre  $K$  ,
- (3.11)  $V_h(g) = \{v \in C^0(\bar{\Omega}_h) : v|_K \in P(K), v(x_i) = g(x_i) \ I < i \leq \tilde{I}\}$   
 espacio discreto de funciones, asociado a un dato de borde  $g \in C^0(\bar{\Omega}_h)$  .
- (3.12)  $\{\omega_i\}$  base de funciones del espacio discreto  $V_h(1)$  localmente soportadas, i.e.

- (3.13)  $\omega_i \in V_h(1)$  ,  $\omega_i(x_j) = \delta_{ij}$   $1 \leq i, j \leq \tilde{I}$   
 $u^I$  interpolante de Lagrange de la función  $u$  , i.e.  

$$u^I = \sum_{i=1}^{\tilde{I}} u(x_i) \omega_i$$
- (3.14)  $\tau = \frac{T}{L}$  tamaño de la participación temporal.
- (3.15)  $\tilde{\Omega}$  abierto de  $\mathbb{R}^N$  tal que  $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$
- (3.16)  $\tilde{v}$  extensión a  $\tilde{\Omega}$  de la función  $v$  definida en  $\Omega$  .

Finalmente vamos a convenir en denotar con  $C$  constantes, posiblemente distintas de un paso a otro, pero sólo dependientes de los datos y no de los parámetros  $\varepsilon$  ,  $h$  y  $\tau$  .

### 3.1.2 Hipótesis Sobre la Discretización

- (3.17) los nodos de  $\partial\Omega_h$  pertenecen a  $\partial\Omega$  .
- (3.18)  $K$  es un elemento de Lagrange del 1º tipo (según [C-1]), es decir sólo sus vértices son nodos de  $F_h$  , y  $P(K)$  son polinomios lineales para  $K$  de tipo simple o lineales en cada variable para  $K$  de tipo paralelepípedo.
- (3.19) Nota: para elementos de Lagrange del 1º tipo  $K$ , el conjunto de vértices es  $P(K)$ - unisolvente, de modo que toda función  $v \in V_h(g)$  admite la representación

$$v = \sum_{i=1}^{\tilde{I}} v(x_i) \omega_i \quad // .$$

- (3.20) Nota: dado que  $\partial\Omega \in C^2$  (hipótesis (2.1)) existe un operador de prolongamiento  $\pi$  de  $\Omega$  a  $\tilde{\Omega}$  , i.e.

$$\begin{aligned} \pi: W_p^m(\Omega) &\longrightarrow W_p^m(\tilde{\Omega}) & (1 \leq p \leq \infty , 0 \leq m \leq 2) \\ v &\longrightarrow \pi(v) = \tilde{v} \end{aligned}$$

con  $\pi$  continuo o equivalentemente

$$(3.21) \quad \|\tilde{v}\|_{W_p^m(\tilde{\Omega})} \leq C \|v\|_{W_p^m(\Omega)}$$

donde  $C$  es una constante independiente de  $v$  (y de  $m, p$ ) (ver [F-2], pág. 10). Este resultado es válido con menos regularidad de  $\partial\Omega$ : basta  $\partial\Omega$  Lipschitz // .

Ahora vamos a enunciar una hipótesis sobre aproximación de funciones en espacios de Sobolev.

$$(3.22) \quad \|\tilde{v} - v^I\|_{W_p^k(\Omega_h)} \leq Ch^{2-k} \|\tilde{v}\|_{W_p^2(\tilde{\Omega})} \quad k = 0, 1$$

para toda  $v \in W_p^2(\Omega) \cap C^0(\tilde{\Omega})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , siendo  $C$  una constante independiente de  $v$ ,  $p$ ,  $k$  y  $h$ .

(3.23) Nota: la acotación (3.22) se verifica si la triangulación posee ciertas propiedades, que en los casos que nos interesan se resumen así:

1º Caso: (elementos finitos estándar)

- a) la familia  $F_h$  es regular en el sentido que existe  $\sigma > 0$  tal que  $h_K \leq \sigma \rho_K$  para todo  $K \in F_h$ .
- b) todos los elementos finitos son afinmente equivalentes a un elemento patrón.
- c) los elementos finitos son de clase  $C^0$ , o sea que  $V_h(g) \in C^0(\tilde{\Omega}_h)$ .

Para una demostración ver [C-1], pág. 132.

2º Caso: (elementos cuadriláteros isoparamétricos del 1º tipo,  $N=2$ )

- a) la familia  $F_h$  es regular, en el sentido que existen  $\sigma, \gamma$  tales que

$$h_K \leq \sigma h'_K \quad \text{y} \quad \gamma_K \leq \gamma < 1$$

donde  $h'_K$  = menor longitud de los lados de  $K$

$$\gamma_K = \max\{|\cos\{a_{i+1} - a_i, a_{i-1} - a_i\}|, 1 \leq i \leq 4(\text{mod } 4)\}$$

con  $a_i$  vértice de  $K$  convexo.

b) los elementos finitos son de clase  $C^0$  (ver [C-1], pág. 247) // .

(3.24) Nota: el orden de aproximación que proporciona el método de elementos finitos no sólo depende del espacio de polinomios interpolantes sino también de la regularidad global de la solución. En este sentido recordemos que la solución  $u$  del problema de Stefan es tan sólo continua con un módulo de continuidad peor que Lipschitz (ver(2.72)) y  $u \in W_2^{1,1}(Q)$  , lo que justifica la elección de elementos de Lagrange del 1º tipo (polinomios interpolantes lineales) // .

### 3.1.3 Hipótesis Sobre los Datos

Para el estudio del 2º esquema discreto será necesario disponer de datos de borde  $g$  y de generación interna de energía  $f$  un poco más regulares. Supondremos que

$$(3.25) \quad \|g(\cdot, t_1) - g(\cdot, t_2)\|_{H^1(\Omega)} \leq C|t_1 - t_2|$$

$$(3.26) \quad \|f(\cdot, t_1) - f(\cdot, t_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq C|t_1 - t_2|$$

para  $0 \leq t_1, t_2 \leq T$  .

Las hipótesis (3.25) y (3.26) se satisfacen si  $g$  ,  $g_x$  y  $f$  son Lipschitz continuos en  $t$  con constante  $C(x) \in L^2(\Omega)$  .

## §3.2. ESQUEMAS DE APROXIMACION NUMERICA

Vamos a usar un esquema de elementos finitos de Lagrange del 1º tipo para aproximar la solución  $u_\epsilon$  del problema regularizado  $(P_\epsilon)$  en la variable espacial. Para ello emplearemos un método de Galerkin puro, es decir que el espacio discreto de funciones coincide con el conjunto de funciones de prueba. En consecuencia la solución discreta (o semidiscreta) es-

tará expresada en término de las mismas funciones que las que sirven de test.

### 3.2.1 Esquema Semidiscreto

Entendemos por tal (ver [D]) al problema  $(P_{\epsilon, h})$  de hallar una función  $u_{\epsilon, h}$  tal que

$$(3.27) \quad u_{\epsilon, h}(\cdot, 0) = u_0^I$$

$$(3.28) \quad u_{\epsilon, h}(\cdot, t) \in V_h(g(\cdot, t)) \quad 0 < t < T$$

$$(3.29) \quad \int_{\Omega_h} \nabla_x u_{\epsilon, h}(\cdot, t) \cdot \nabla_x \psi + \frac{\partial}{\partial t} \beta_{\epsilon}(u_{\epsilon, h}(\cdot, t)) \psi = \int_{\Omega_h} \tilde{f}(\cdot, t) \psi$$

en c.t.p.  $0 < t < T$ , para toda  $\psi \in V_h(0)$ . Con  $\tilde{f}(\cdot, t)$  indicamos a  $\tilde{f}(\cdot, t)$  o a  $f^I(\cdot, t)$ .

Siendo  $u_{\epsilon, h}(x, t) = \sum_{i=1}^{\tilde{I}} U_i(t) \omega_i(x)$  resulta a partir de (3.29) el siguiente sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias en las incógnitas:  $U_i$ ,  $1 \leq i \leq I$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\tilde{I}} U_i(t) \int_{\Omega_h} \nabla_x \omega_i \cdot \nabla_x \omega_j + \sum_{i=1}^{\tilde{I}} \dot{U}_i(t) \int_{\Omega_h} \beta'_{\epsilon}(u_{\epsilon, h}(\cdot, t)) \omega_i \omega_j \\ = \int_{\Omega_h} \tilde{f}(\cdot, t) \omega_i \quad 1 \leq i \leq I \end{aligned}$$

(3.30) Nota: para la ecuación parabólica (2.49), resulta en lugar de (3.29) la ecuación

$$(3.31) \quad \int_{\Omega_h} (K(x) \cdot \nabla_x u_{\epsilon, h}(\cdot, t)) \cdot \nabla_x \psi + b(x) u_{\epsilon, h}(\cdot, t) \cdot \psi + \frac{\partial}{\partial t} \beta_{\epsilon}(u_{\epsilon, h}(\cdot, t)) \cdot \psi = \int_{\Omega_h} \tilde{f}(\cdot, t) \psi$$

que también es un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias //.

(3.32) Nota: el problema de valor inicial (3.27), (3.28), (3.29) ó (3.31) posee una única solución, que además es Lipschitz continua. Este resultado se muestra en el Apéndice A (Lema A-8) // .

El interés del esquema semidiscreto, al menos en este trabajo, es el de proporcionar las técnicas esenciales para obtener las estimaciones de error. Luego la estimación en  $L^2$  para el esquema discreto constituye una "versión discreta" de estos métodos.

### 3.2.2 Esquemas Discretos

Un esquema discreto es el problema  $(P_{\epsilon, h, \tau})$  de hallar una familia de funciones  $\{U_n\}_{n=1}^L$  tales que

$$(3.33) \quad U_0 = u_0^I$$

$$(3.34) \quad U_n \in V_h(g_n)$$

$$(3.35) \quad \int_{\Omega_h} \nabla U_n \cdot \nabla \psi + \frac{1}{\tau} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(U_{n-1})) \psi = \int_{\Omega_h} f_n \psi \quad 1 \leq n \leq L$$

para toda  $\psi \in V_h(0)$  .

(3.36) Nota: para la ecuación parabólica (2.49) en lugar de (3.35) tenemos la ecuación

$$(3.37) \quad \int_{\Omega_h} (K(x) \nabla U_n) \cdot \nabla \psi + b(x) U_n \psi + \frac{1}{\tau} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(U_{n-1})) \cdot \psi = \int_{\Omega_h} f_n \cdot \psi // .$$

(3.38) Nota: para cada  $n$  ,  $1 \leq n \leq L$  , la ecuación (3.35) (o(3.37)) es un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas. Como hemos observado,  $\beta_\epsilon$  es Lipschitz continua y creciente, y entonces (3.35) o (3.37) admiten una única solución. Esta propiedad se puede probar a partir de la teoría de Operadores Monótonos en  $\mathbb{R}^N$  (ver [O-R], pág. 167).

No obstante en este trabajo daremos una demostración constructiva de la existencia de solución (ver Capítulo 4) // .



Sea  $t_n = n\tau$ ,  $1 \leq n \leq L$ . Definimos la solución discreta  $u_{\epsilon, h, \tau}$  como la función

$$(3.39) \quad u_{\epsilon, h, \tau}(x, t) = U_n(x) \quad \text{si} \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad 1 \leq n \leq L.$$

En este trabajo vamos a estudiar dos esquemas discretos, que difieren en la elección de las funciones  $g_n$  y  $f_n$ . Para el 1º esquema tomamos

$$(3.40) \quad g_n(\cdot) = \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} g(\cdot, t) dt \quad f_n(\cdot) = \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \tilde{f}(\cdot, t) dt$$

y para el 2º esquema serán

$$(3.41) \quad g_n(\cdot) = g(\cdot, t_n), \quad f_n(\cdot) = \tilde{f}(\cdot, t_n)$$

donde nuevamente  $\tilde{f}(\cdot, t)$  indica  $\tilde{f}(\cdot, t)$  ó  $f^I(\cdot, t)$

Naturalmente esta última elección requerirá mayores propiedades de suavidad de los datos  $f$  y  $g$  (ver (3.25) y (3.26)).

### 3.2.3 Aproximación de $\beta_\epsilon(u_0)$ y $f$

En el estudio de los problemas discreto y semidiscreto será necesario comparar  $\beta_\epsilon(u_0)$  y  $f$  con las funciones  $\beta_\epsilon(u_0^I)$  y  $\tilde{f}$ . Daremos en este párrafo algunos resultados de aproximación que serán de gran utilidad en las secciones siguientes.

(3.42) LEMA. Si  $u_0 \in H^2(\Omega)$  entonces existe una constante  $C > 0$  dependiente de  $u_0$  pero no de  $\epsilon$  y  $h$  tal que

$$\| \beta_\epsilon(\tilde{u}_0) - \beta_\epsilon(u_0^I) \|_{L^2(\Omega_h)} \leq C \frac{h^2}{\epsilon}$$

Demostración: Como  $u_0 \in H^2(\tilde{\Omega})$  entonces  $\tilde{u}_0 \in H^2(\tilde{\Omega})$  (ver (3.20)).

Luego por (3.22) resulta

$$\| \tilde{u}_0 - u_0^I \|_{L^2(\Omega_h)} \leq C h^2.$$

Por otra parte

$$\| \chi_\epsilon(\tilde{u}_0) - \chi_\epsilon(u_0^I) \|_{L^2(\Omega_h)} \leq \frac{1}{\epsilon} \| \tilde{u}_0 - u_0^I \|_{L^2(\Omega_h)} \leq C \frac{h^2}{\epsilon} .$$

Como  $\beta_\epsilon(s) = s + \chi_\epsilon(s)$  con las estimaciones anteriores se obtiene la tesis // .

(3.43) Nota: la condición  $u_0 \in H^2(\Omega)$  no es natural para el problema de Stefan. En efecto es más razonable que el dato inicial tenga un gradiente discontinuo en  $F_0 = \{x \in \Omega / u_0(x) = 0\}$  , y si este conjunto es una superficie suave no resultará  $u_0 \in H^2(\Omega)$  // .

Seguidamente veremos otras condiciones sobre  $u_0$  que implican estimaciones del tipo (3.42).

(3.44) LEMA. Supongamos que  $u_0$  satisface las hipótesis (2.5) y (2.7) Entonces existe una constante  $C > 0$  dependiente de  $u_0$  y  $F_0$  , pero no de  $h$  y  $\epsilon$  , tal que

$$\| \beta_\epsilon(\tilde{u}_0) - \beta_\epsilon(u_0^I) \|_{L^2(\Omega_h)} \leq C (h+\epsilon)^{1/2}$$

Demostración: Por (3.22) y (2.5) tenemos  $\| \tilde{u}_0 - u_0^I \|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch$  .  
Además  $\{x : \chi_\epsilon(u_0(x)) - \chi_\epsilon(u_0^I(x)) \neq 0\} \subset \{x : |u_0(x)| \leq \epsilon + ch\} = A_{\epsilon+ch}$  ,  
pues si  $x \notin A_{\epsilon+ch}$  entonces

$$|u_0^I(x)| \geq |u_0(x)| - ch > \epsilon + ch - ch = \epsilon$$

y luego  $\chi_\epsilon(u_0^I(x)) = \chi_\epsilon(u_0(x)) = \pm 1$  .

Ahora notemos que si  $\epsilon$  ,  $h$  son suficientemente pequeños ( $\epsilon + ch \leq \epsilon_0$ ) resulta por (2.7)

$$\begin{aligned} \| \chi_\epsilon(\tilde{u}_0) - \chi_\epsilon(u_0^I) \|_{L^2(\Omega_h)} &= \left( \int_{A_{\epsilon+ch}} |\chi_\epsilon(\tilde{u}_0) - \chi_\epsilon(u_0^I)|^2 \right)^{1/2} \leq 2 |A_{\epsilon+ch}|^{1/2} \\ &\leq C(\epsilon+h)^{1/2} \end{aligned}$$

Finalmente como  $\beta_\epsilon(s) = s + \chi_\epsilon(s)$  la tesis sigue de inmediato // .

Consideremos los conjuntos  $\Omega^+ = \{x \in \Omega : u_0(x) < 0\}$ ,  $\Omega^- = \{x \in \Omega : u_0(x) < 0\}$  y la siguiente propiedad de la malla  $F_h$  de elementos finitos. Sean  $\Omega_h^+$  y  $\Omega_h^-$  tales que  $\Omega_h = \Omega_h^+ \cup \Omega_h^-$ . Entonces

(3.45) los nodos de  $\partial\Omega_h^+(\partial\Omega_h^-)$  pertenecen a  $\partial\Omega^+(\partial\Omega^-)$

(3.46) LEMA. Supongamos que  $u_0$  satisface las hipótesis (2.5) y (2.7) y  $F_0$  verifica (2.13). Si la malla  $F_h$  satisface (3.45) entonces existe una constante  $C > 0$  sólo dependiente de  $u_0$  y  $F_0$ , pero no de  $\epsilon$  y  $h$ , tal que

$$\| \beta_\epsilon(\tilde{u}_0) - \beta_\epsilon(u_0^I) \|_{L^2(\Omega_h)} \leq C \frac{h^2}{\epsilon} (\epsilon + h^2)^{1/2}$$

Demostración: Como  $\Omega_h = \Omega_h^+ \cup \Omega_h^-$  vamos a obtener la acotación en  $\Omega_h^+$ , resultando en  $\Omega_h^-$  con idéntico razonamiento.

Sea  $\bar{u}_0^+$  una extensión  $W_\infty^2$  de la función  $\tilde{u}_0^+$ , del conjunto  $\Omega^+$  a  $\Omega_h$  (recordar que  $F_0 \in W_\infty^2$  y (3.20)). Entonces

$$\begin{aligned} \| \chi_\epsilon(\tilde{u}_0) - \chi_\epsilon(u_0^I) \|_{L^2(\Omega_h^+)} &\leq \| \chi_\epsilon(\tilde{u}_0) - \chi_\epsilon(\bar{u}_0^+) \|_{L^2(\Omega_h^+)} \\ &\quad + \| \chi_\epsilon(\bar{u}_0^+) - \chi_\epsilon(u_0^I) \|_{L^2(\Omega_h^+)} = I + II \end{aligned}$$

Para acotar I notemos que el integrando es no nulo en  $\Omega_h^+ \setminus \Omega^+$ , y como  $|\Omega_h^+ \setminus \Omega^+| \leq c h^2$  (por (2.14) y (3.45)), resulta

$$\begin{aligned} I &= \left( \int_{\Omega_h^+ \setminus \Omega^+} | \chi_\epsilon(\tilde{u}_0) - \chi_\epsilon(\bar{u}_0^+) |^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\epsilon} \left( \int_{\Omega_h^+ \setminus \Omega^+} | \tilde{u}_0 - \bar{u}_0^+ |^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c \frac{h^2}{\epsilon} |\Omega_h^+ \setminus \Omega^+|^{1/2} \leq \frac{h^3}{\epsilon} \end{aligned}$$

Para acotar II observemos que  $u_0^I$  es el interpolante de Lagrange de  $\bar{u}_0^+$  en  $\Omega_h^+$ . Luego por (3.22) tenemos

$$\| \bar{u}_0^+ - u_0^I \|_{L^\infty(\Omega_h^+)} \leq c h^2$$

Además

$$\{x : \chi_\epsilon(\bar{u}_0^+) - \chi_\epsilon(u_0^I) \neq 0\} \subset \{x : |\bar{u}_0^+(x)| < \epsilon + c h^2\} = A_{\epsilon + ch^2}$$

lo que se verifica como en (3.44). Entonces

$$II \leq \left( \int_{A_{\epsilon + ch^2}} | \chi_\epsilon(\bar{u}_0^+) - \chi_\epsilon(u_0^I) |^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\epsilon} \| \bar{u}_0^+ - u_0^I \|_{L^\infty(\Omega_h^+)} |A_{\epsilon + ch^2}|^{1/2}$$

$$\leq c \frac{h^2}{\epsilon} (\epsilon+h^2)^{1/2} .$$

Con las estimaciones para I y II y observando que  $\| \tilde{u}_0 - u_0^I \|_{L^2(\Omega_h^+)} \leq C h^2$  obtenemos la tesis // .

En los ejemplos del Capítulo 5 el término de generación interna  $f$  será regular en  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$  pero con una discontinuidad en  $F_0$  . Desde el punto de vista computacional es más simple considerar  $f^I$  (en el caso en que un nodo de  $F_h$  se encuentre en la frontera libre se define como cualquiera de los dos valores posibles). Vamos a denotar para cada  $t$  ,  $0 < t < T$

$$F_t \text{ frontera libre, } \Omega_t^+ = \{x \in \Omega / u(x,t) > 0\} \text{ y análogamente } \Omega_t^- .$$

(3.47) LEMA. Supongamos que para cada  $t$  ,  $0 < t < T$  ,  $F_t$  es Lipschitz continua uniformemente en  $t$  , y sea  $f \in L^\infty(Q)$  ,  $f(\cdot, t) \in H^1(\Omega_t^+) (H^1(\Omega_t^-))$  . Entonces existe  $C > 0$  sólo dependiente de  $f$  y  $F$  tal que

$$\| (\tilde{f} - f^I)(\cdot, t) \|_{L^2(\Omega_h)} \leq C h^{1/2} , \quad 0 < t < T$$

Demostración: Sea  $A_{t,h} = \{K \in F_h : K \cap F_t \neq \emptyset\}$  . Como  $F_t$  es Lipschitz resulta  $|A_{t,h}| \leq Ch$  , con  $C$  independiente de  $t$  . Luego

$$\begin{aligned} \| (\tilde{f} - f^I)(\cdot, t) \|_{L^2(\Omega_h^+)} &\leq \left( \int_{\Omega_h^+ \setminus A_{t,h}} |\tilde{f}(\cdot, t) - f^I(\cdot, t)|^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + \left( \int_{A_{t,h}} |\tilde{f}(\cdot, t) - f^I(\cdot, t)|^2 \right)^{1/2} \leq C (h+h^{1/2}) , \end{aligned}$$

y análoga acotación se obtiene para  $\Omega_h^-$  . De ambas sigue la tesis // .

### §3.3. ESTIMACION DE $\| u_\epsilon - u_{\epsilon,h} \|_{L^2(Q_h \cap Q)}$

Supongamos que en (3.29) la función de prueba  $\psi$  depende de la variable temporal  $t$  ,  $\psi \in W_2^{1,1}(Q_h)$  , siendo continua en  $t$  a valores en  $V_h(0)$  y tal que  $\psi(\cdot, T) = 0$  . Entonces integrando (3.29) en  $t$  para  $0 < t < T$  obtenemos

$$(3.48) \quad \int_{Q_h} \nabla_x u_{\epsilon, h} \cdot \nabla_x \psi - \beta_{\epsilon}(u_{\epsilon, h}) \frac{\partial}{\partial t} \psi = \int_{\Omega_h} \beta_{\epsilon}(u_0^I) \psi(\cdot, 0) + \int_{Q_h} \bar{f} \psi .$$

y la correspondiente ecuación para (3.31).

La idea ahora es proceder como en el caso continuo (ver (2.51)), vale decir restar (3.48) y la formulación débil (2.17) para  $u_{\epsilon}$  y luego emplear una función de prueba  $\psi$  adecuada. Para definir  $\psi$  consideremos, tal como en [Z], la proyección  $H_0^1$  de  $u_{\epsilon}(\cdot, t)$  en el espacio discreto  $V_h(g(\cdot, t))$ , que tiene sentido en c.t.p.  $t$  ( $0 < t < T$ ) por ser  $u_{\epsilon} \in W_2^{1,1}(Q)$ . Llamamos  $Y(\cdot, t)$  a esta función auxiliar, que verifica

$$(3.49) \quad \begin{aligned} & Y(\cdot, t) \in V_h(g(\cdot, t)) \\ & \int_{\Omega_h} \nabla_x Y(\cdot, t) \cdot \nabla_x \psi + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \beta_{\epsilon}(u_{\epsilon}(\cdot, t)) \cdot \psi = \int_{\Omega} f(\cdot, t) \psi \end{aligned}$$

en c.t.p.  $t$  ( $0 < t < T$ ) y para toda  $\psi \in V_h(0)$ .

Además  $Y(\cdot, t)$  está próxima a  $u_{\epsilon}(\cdot, t)$  en el sentido que en c.t.p.  $t$  ( $0 < t < T$ ).

$$(3.50) \quad \| Y(\cdot, t) - u_{\epsilon}(\cdot, t) \|_{L^2(\Omega_h)} \leq C h^2 (1 + \| u_{\epsilon}(\cdot, t) \|_{H^2(\Omega)})$$

con  $C$  dependiente de  $g$ . Esta desigualdad se prueba en el Apéndice B y en realidad (ver [C-1], pág 139) la dificultad radica en que  $\Omega_h \neq \Omega$ . Recordemos que según (2.1)  $\partial\Omega \in C^2$  y en cambio  $\Omega_h$  es poligonal. Con las hipótesis (2.2) y (2.3) sobre  $g$ , y (2.8) sobre  $f$  es aplicable la teoría de dicho Apéndice.

Daremos ahora una estimación en norma  $L^2(Q_h)$  del error entre  $Y$  y  $u_{\epsilon}$ .

(3.51) LEMA. Sea  $u_{\epsilon}$  la solución débil del problema  $(P_{\epsilon})$ , para el cual son válidas las hipótesis (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) y (2.8). Entonces existe una constante  $C > 0$  sólo dependiente de los datos  $g$ ,

$u_\epsilon$ ,  $f$  y  $\Omega$ , pero no de  $\epsilon$  ni  $h$ , tal que

$$(3.52) \quad \|Y - \tilde{u}_\epsilon\|_{L^2(Q_h)} \leq c \frac{h^2}{\epsilon^{1/2}}$$

Demostración: Debemos estimar  $\|u_\epsilon(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)}$  y aplicar (3.50). Por (2.38) es  $\frac{\partial}{\partial t} \beta_\epsilon(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$  en c.t.p.  $t$  ( $0 < t < T$ ). Luego

$-\Delta_x u_\epsilon(\cdot, t) = f - \frac{\partial}{\partial t} \beta_\epsilon(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$  en c.t.p.  $t$  y como  $\partial\Omega \in C^2$  por (2.1), es válida la estimación a priori (ver [F-2], pág.68)

$$(3.53) \quad \|u_\epsilon(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\|f(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} + \|g(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)} + \|\frac{\partial}{\partial t} \beta_\epsilon(u_\epsilon(\cdot, t))\|_{L^2(\Omega)})$$

en c.t.p.  $t$ , con  $c$  una constante sólo dependiente de  $\Omega$ . Integrando en  $t$  en virtud de (2.2), (2.8) y (2.38) resulta  $\|u_\epsilon\|_{L^2(0, T; H^2)} \leq c \epsilon^{-1/2}$ , y de aquí y (3.50) obtenemos la acotación buscada //

(3.54) LEMA. Existe una constante  $c > 0$  dependiente de  $\Omega$ , pero no de  $\epsilon$  ni  $h$ , tal que

$$\|u_{\epsilon, h} - Y\|_{L^2(Q_h \setminus Q)} \leq c h \|u_{\epsilon, h} - Y\|_{L^2(Q_h)}$$

Demostración: Por definición de  $Y$  (ver (3.49)) es claro que  $u_{\epsilon, h}(\cdot, t) - Y(\cdot, t) \in V_h(0)$  para todo  $t$  ( $0 < t < T$ ). Entonces el resultado sigue de aplicar el Lema (B-12) e integrar en  $t$  //

A continuación vamos a probar el resultado más importante de la sección, esto es la estimación de error entre la solución continua  $u_\epsilon$  y la solución semidiscreta  $u_{\epsilon, h}$ .

(3.55) TEOREMA. Consideremos válidas las hipótesis (2.1) a (2.3) y (2.5) a (2.8) sobre los datos, y sean  $u_\epsilon$ ,  $u_{\epsilon, h}$  las soluciones de los problemas  $(P_\epsilon)$  y  $(P_{\epsilon, h})$  respectivamente con  $\bar{f} = \tilde{f}$ . Entonces existe una constante  $c > 0$  dependiente de los datos, pero no de  $\epsilon$  ni  $h$ , tal que

$$(3.56) \quad \int_{Q_h} (\beta_\epsilon(u_{\epsilon, h}) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon))(u_{\epsilon, h} - \tilde{u}_\epsilon) \leq c[(\frac{h^2}{\epsilon})^2 + (h + \epsilon)]$$

Demostración: Restando las ecuaciones (3.48) y (3.49) integrada en  $t$ , y reordenando obtenemos

$$\begin{aligned}
 (3.57) \quad I &= - \int_{Q_h} (\beta_\epsilon(u_{\epsilon,h}) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon)) \frac{\partial}{\partial t} \psi = - \int_{Q_h} \nabla_x (u_{\epsilon,h} - Y) \cdot \nabla_x \psi \\
 &+ \int_{\Omega_h} (\beta_\epsilon(u_{\epsilon,0}^I) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_{\epsilon,0})) \psi(\cdot, 0) \\
 &+ \int_{Q_h \setminus Q} \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon) \frac{\partial}{\partial t} \psi + \int_{\Omega_h \setminus \Omega} \beta_\epsilon(\tilde{u}_{\epsilon,0}) \psi(\cdot, 0) \\
 &+ \int_{Q_h \setminus Q} (\bar{f} - f) \psi \\
 &= II + III + IV + V + VI
 \end{aligned}$$

Proponemos como función de prueba

$$\psi(x, t) = \int_t^T (u_{\epsilon,h} - Y)(x, s) ds$$

que por (3.49) es claramente una función admisible. Para el primer miembro tenemos

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{Q_h} (\beta_\epsilon(u_{\epsilon,h}) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon)) (u_{\epsilon,h} - Y) = \int_{Q_h} (\beta_\epsilon(u_{\epsilon,h}) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon)) (u_{\epsilon,h} - \tilde{u}_\epsilon) \\
 &+ \int_{Q_h} (\beta_\epsilon(u_{\epsilon,h}) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon)) (\tilde{u}_\epsilon - Y) \\
 &= A + B
 \end{aligned}$$

Ahora llamando

$$\begin{aligned}
 a(x, t) &= \frac{\beta_\epsilon(u_{\epsilon,h}) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon)}{u_{\epsilon,h} - \tilde{u}_\epsilon} && \text{si } u_{\epsilon,h} \neq \tilde{u}_\epsilon \\
 &= 0 && \text{si } u_{\epsilon,h} = \tilde{u}_\epsilon
 \end{aligned}$$

resulta  $0 \leq a(x, t) \leq \tilde{\epsilon}^{-1}$  (por (2.21)), y luego para B

$$\begin{aligned}
 B &\leq \left[ \int_{Q_h} (\beta_\epsilon(u_{\epsilon,h}) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon)) \cdot (u_{\epsilon,h} - \tilde{u}_\epsilon) \right]^{1/2} \cdot \left[ \int_{Q_h} a \cdot (\tilde{u}_\epsilon - Y)^2 \right]^{1/2} \\
 &\leq c A^{1/2} \frac{h^2}{\epsilon} \leq \frac{1}{5} A + c \left( \frac{h^2}{\epsilon} \right)^2 .
 \end{aligned}$$

En consecuencia para I tenemos la acotación

$$I \geq \frac{4}{5} A - c \left(\frac{h^2}{\epsilon}\right)^2$$

Como en (2.51) resulta :  $II \leq 0$ .

Para III usamos la estimación de (3.44), con la cual obtenemos

$$\begin{aligned} III &\leq c \|\beta_\epsilon(\tilde{u}_0) - \beta_\epsilon(u_0^I)\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u_{\epsilon,h}^{-Y}\|_{L^2(Q_h)} \\ &\leq c(h+\epsilon)^{1/2} (\|u_{\epsilon,h} - \tilde{u}_\epsilon\|_{L^2(Q_h)} + \|\tilde{u}_\epsilon^{-Y}\|_{L^2(Q_h)}) \\ &\leq \frac{1}{5} A + c(h+\epsilon) + c(h+\epsilon)^{1/2} \frac{h^2}{\epsilon^{1/2}} \end{aligned}$$

Para acotar IV; V y VI recordemos que  $\tilde{u}_\epsilon$  es acotado uniformemente en  $\epsilon$  (ver (2.25) y (3.21)) y por lo tanto también lo es  $\beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon)$ . Lo mismo verifican  $\tilde{u}_0$  y  $f$  por hipótesis (2.5), (2.8) y (3.21). Luego resulta

$$\begin{aligned} IV &\leq c \int_{Q_h \setminus Q} |u_{\epsilon,h}^{-Y}| \leq c \|u_{\epsilon,h}^{-Y}\|_{L^2(Q_h \setminus Q)} \cdot |Q_h \setminus Q|^{1/2} \\ &\leq c h^2 \|u_{\epsilon,h}^{-Y}\|_{L^2(Q_h)} \\ &\leq c h^2 (A^{1/2} + \|\tilde{u}_\epsilon^{-Y}\|_{L^2(Q_h)}) \leq \frac{1}{5} A + c \left(\frac{h^2}{\epsilon^{1/2}}\right)^2 \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el Lema (3.54) y que  $|Q_h \setminus Q| \leq c h^2$  por ser  $\partial\Omega \in C^2$  (condición (2.1)). La misma acotación es válida para V y VI.

Finalmente con las estimaciones para I a VI obtenemos en (3.57):

$$\frac{1}{5} A \leq c \left(\frac{h^2}{\epsilon}\right)^2 + c h^2 \left(1 + \frac{h}{\epsilon}\right)^{1/2} + c(h+\epsilon)$$

que implica la tesis // .

(3.58) Corolario: Con las mismas hipótesis de (3.53) resulta

$$(3.59) \quad \|u_{\epsilon,h} - u_\epsilon\|_{L^2(Q_h \cap Q)} \leq c \left[ \frac{h^2}{\epsilon} + (h+\epsilon)^{1/2} \right]$$

Demostración: basta usar (2.21) // .

(3.60) Nota: es válida la misma estimación (3.54) si el problema semi



discreto se propone con  $\bar{f} = f^I$ , para  $f$  en las hipótesis de (3.47) // .

(3.61) Nota: la estimación (3.56) se extiende al problema  $(P_{\epsilon, h})$  asociado a (2.49) (ver (3.30)): La demostración es idéntica // .

(3.62) TEOREMA. Supongamos que se satisfacen las hipótesis (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) y (2.8), y además  $u_0 \in H^2(\Omega)$  ó  $u_0, F_0$  y  $F_h$  verifican las condiciones del Lema (3.46). Siendo  $u_\epsilon$  y  $u_{\epsilon, h}$  las soluciones de los problemas  $(P_\epsilon)$  y  $(P_{\epsilon, h})$  con  $\bar{f} = \tilde{f}$ , existe una constante  $c > 0$  dependiente de los datos, pero no de  $\epsilon$  ni  $h$ , tal que

$$(3.63) \quad \int_{Q_h} (\beta_\epsilon(u_{\epsilon, h}) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon))(u_{\epsilon, h} - \tilde{u}_\epsilon) \leq c \left(\frac{h^2}{\epsilon}\right)^2 .$$

Demostración: idem (3.55) // .

(3.64) Corolario: Con las mismas hipótesis de (3.63) resulta

$$(3.65) \quad \|u_{\epsilon, h} - u_\epsilon\|_{L^2(Q_h \cap Q)} \leq c \frac{h^2}{\epsilon}$$

(3.66) Nota: la estimación (3.65) fue obtenida en [J-R] para el problema de Neumann, suponiendo  $u_0 \in H^2(\Omega)$ , mediante un método diferente al empleado en este trabajo // .

(3.67) Nota: por inspección de la demostración de (3.55) es claro que la elección ideal para  $u_{\epsilon, h}(\cdot, 0) = U_0$  es tal que

$$P_h(\beta_\epsilon(U_0)) = P_h(\beta_\epsilon(\tilde{u}_0))$$

donde  $P_h$  es la proyección  $L^2$  sobre  $V_h(g(\cdot, 0))$ . Por la teoría de Operadores Monótonos (ver [O-R], pág 167) existe y es única la solución  $U_0$ . De esta manera la estimación resultante sería (3.63), que es más fina que (3.56). Sin embargo esta metodología tiene interés teórico ya que difícilmente será calculable  $U_0$  de esta forma. En este sentido (3.46) ó (3.42) establece condiciones geométricas más fáciles de manejar, y que conservan el orden de convergencia.

No obstante considerando  $u_0$  con la regularidad mínima compatible con la teoría de existencia y unicidad de  $(P_\epsilon)$  del Capítulo 2, la estimación natural resulta (3.44). Es interesante observar aquí que el orden de convergencia  $(h + \epsilon)^{1/2}$  es óptimo en estas condiciones. En efecto si para el problema  $(P_\epsilon)$  se cambia el dato  $u_0$  por  $u_0^I$  la estimación de estabilidad (2.77) proporciona el mismo orden de error, pero a nivel del problema continuo (en este caso (2.77) coincide exactamente con la estimación obtenida en [F-1]). En consecuencia no parece razonable esperar un comportamiento mejor para el problema semidiscreto // .

(3.68) Nota: la estimación (3.65) se extiende al problema  $(P_{\epsilon,h})$  asociado a la ecuación parabólica (2.49) // .

### §3.4. ESTIMACION DE $\|u_\epsilon - u_{\epsilon,h,\tau}\|_{L^2(Q_h \cap Q)}$

La idea central del estudio consiste en definir una familia de funciones de prueba  $\psi_n \in V_h(0)$  ( $1 \leq n \leq L$ ) que haga las veces de la función  $\psi(\cdot, t)$  en (3.55), y luego sumar la igualdad (3.35) en  $n$  ( $1 \leq n \leq L$ ) lo cual representa la integral en la variable  $t$ , expresada en (3.48) para el problema semidiscreto. En síntesis el método que seguidamente desarrollaremos es una versión discreta de lo expuesto en §3.3.

#### 3.4.1. 1º Esquema Discreto

Comenzamos por definir la equivalente discreta de la función auxiliar  $Y$  de (3.49). Sea

$$(3.69) \quad Y_n(x) = \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} Y(x, t) dt$$

que satisface el problema

$$(3.70) \quad \begin{aligned} Y_n \in V_h \left( \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} g(\cdot, t) dt \right) = V_h(g_n) \\ \int_{\Omega_h} \nabla Y_n \cdot \nabla \psi + \int_{\Omega} \frac{1}{\tau} [\beta_\epsilon(u_\epsilon^n) - \beta_\epsilon(u_\epsilon^{n-1})] \psi = \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} f \psi = \int_{\Omega} f_n \psi \end{aligned}$$

para toda  $\psi \in V_h(0)$ ,  $1 \leq n \leq L$ . En (3.70) hemos empleado la notación (3.40) para  $\bar{f} = \tilde{f}$  y que  $u_\epsilon^n(\cdot) = u_\epsilon(\cdot, t_n)$  ( $1 \leq n \leq L$ ).

Seguidamente compararemos las familias  $(Y_n)$  y  $(u_\epsilon^n)$  obteniendo una versión discreta de (3.51) y (3.54).

(3.71) LEMA. Sea  $u_\epsilon$  la solución débil del problema  $(P_\epsilon)$ , para el cual son válidas las hipótesis (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) y (2.8). Entonces existe una constante  $c > 0$  sólo dependiente de los datos  $g$ ,  $u_0$ ,  $f$  y  $\Omega$ , pero no de  $\epsilon$ ,  $h$  ni  $\tau$ , tal que

$$(3.72) \quad \left( \sum_{n=1}^L \tau \| Y_n - \tilde{u}_\epsilon^n \|^2_{L^2(\Omega_h)} \right)^{1/2} \leq c \left( \frac{h^2}{\epsilon^{1/2}} + \tau \right)$$

Demostración: Notemos que

$$\begin{aligned} Y_n - \tilde{u}_\epsilon^n &= \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} Y(\cdot, t) dt - \tilde{u}_\epsilon^n \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (Y(\cdot, t) - \tilde{u}_\epsilon(\cdot, t)) dt + \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\tilde{u}_\epsilon(\cdot, t) - \tilde{u}_\epsilon(\cdot, t_n)) dt \\ &= I_n + \Pi_n, \end{aligned}$$

de donde basta acotar cada sumando por separado. Para el primero, empleando la estimación (3.52), resulta

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^L \tau \| I_n \|^2_{L^2(\Omega_h)} &\leq \sum_{n=1}^L \tau \left( \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| Y(\cdot, t) - \tilde{u}_\epsilon(\cdot, t) \|^2_{L^2(\Omega_h)} dt \right)^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^L \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| Y(\cdot, t) - \tilde{u}_\epsilon(\cdot, t) \|^2_{L^2(\Omega_h)} dt \\ &= \| Y - \tilde{u}_\epsilon \|^2_{L^2(Q_h)} \leq c \left( \frac{h^2}{\epsilon^{1/2}} \right)^2 \end{aligned}$$

Con respecto al segundo sumando tenemos

$$\sum_{n=1}^L \tau \| \Pi_n \|^2_{L^2(\Omega_h)} \leq \sum_{n=1}^L \tau \left( \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_t^{t_n} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_\epsilon(\cdot, s) \right\|^2_{L^2(\Omega_h)} ds dt \right)^2$$

$$\begin{aligned} &\leq c \tau^2 \sum_{n=1}^L \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &= c \tau^2 \left\| \frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon \right\|_{L^2(Q)}^2 \leq c \tau^2 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la estimación a priori (2.37) y la desigualdad (3.21) para el operador de prolongamiento. De las estimaciones obtenidas sigue claramente la tesis // .

(3.73) LEMA. Existe una constante  $c > 0$  dependiente de  $\Omega$ , pero no de  $\epsilon, h$  ó  $\tau$ , tal que

$$\left( \sum_{n=1}^L \tau \left\| U_n - Y_n \right\|_{L^2(Q_h \setminus Q)}^2 \right)^{1/2} \leq c h \left( \sum_{n=1}^L \tau \left\| U_n - Y_n \right\|_{L^2(Q_h)}^2 \right)^{1/2}$$

Demostración: idem (3.54) // .

Con los resultados auxiliares (3.72) y (3.73) estamos en condiciones de comparar  $u_{\epsilon, h, \tau}$  con  $u_\epsilon$ .

(3.74) TEOREMA. Supongamos que los datos satisfacen las hipótesis (2.1) a (2.3) y (2.5) a (2.8) y sean  $u_\epsilon$  y  $u_{\epsilon, h, \tau}$  las soluciones de los problemas  $(P_\epsilon)$  y  $(P_{\epsilon, h, \tau})$  respectivamente con  $\bar{f} = \tilde{f}$ . Entonces existe una constante  $c > 0$  sólo dependiente de los datos, pero no de  $\epsilon, h$  ó  $\tau$ , tal que

$$(3.75) \quad \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon^n)) \cdot (U_n - \tilde{u}_\epsilon^n) \leq c \left[ \left(\frac{h^2}{\epsilon}\right)^2 + (h + \epsilon) + \frac{\tau}{\epsilon} \right]$$

Demostración: La prueba sigue los mismos pasos que el teorema (3.55). Sumando en  $n$  ( $1 \leq n \leq L$ ) la ecuación (3.35) y definiendo  $\psi_{L+1} = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} \nabla U_n \cdot \nabla \psi_n - \beta_\epsilon(U_n) \cdot \frac{1}{\tau} (\psi_{n+1} - \psi_n) \\ &= \int_{\Omega_h} \beta_\epsilon(u_0^I) \psi_1 + \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} f_n \psi_n \end{aligned}$$

donde  $\psi_n \in V_h(0)$ ,  $1 \leq n \leq L$ , Procediendo análogamente con (3.70) resulta

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} \nabla Y_n \cdot \nabla \psi_n - \int_{\Omega} \beta_{\epsilon}(u_{\epsilon}^n) \cdot \frac{1}{\tau} (\psi_{n+1} - \psi_n) \\ = \int_{\Omega} \beta_{\epsilon}(u_0) \psi_1 + \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega} f_n \psi_n . \end{aligned}$$

Restando estas dos ecuaciones y reordenando obtenemos

$$\begin{aligned} (3.76) \quad I &= - \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\beta_{\epsilon}(U_n) - \beta_{\epsilon}(\tilde{u}_{\epsilon}^n)) \cdot \frac{1}{\tau} (\psi_{n+1} - \psi_n) \\ &= - \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} \nabla (U_n - Y_n) \cdot \nabla \psi_n \\ &\quad + \int_{\Omega_h} (\beta_{\epsilon}(u_0^I) - \beta_{\epsilon}(\tilde{u}_0)) \psi_1 \\ &\quad + \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h \setminus \Omega} \beta_{\epsilon}(\tilde{u}_{\epsilon}^n) \cdot \frac{1}{\tau} (\psi_{n+1} - \psi_n) + \int_{\Omega_h \setminus \Omega} \beta_{\epsilon}(\tilde{u}_0) \psi_1 \\ &\quad + \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h \setminus \Omega} f_n \cdot \psi_n = II + III + IV + V + VI \end{aligned}$$

Para acotar cada sumando definimos previamente la familia de funciones de prueba

$$\psi_n = \tau \sum_{k=n}^L (U_k - Y_k) \quad 1 \leq n \leq L$$

que juega el mismo rol que la función  $\psi(\cdot, t)$  de (3.55) para el problema semidiscreto. Claramente  $\psi_n \in V_h(0)$  para todo  $n$  y entonces es admisible.

Reemplazando en I resulta

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\beta_{\epsilon}(U_n) - \beta_{\epsilon}(\tilde{u}_{\epsilon}^n)) (U_n - Y_n) = \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\beta_{\epsilon}(U_n) - \beta_{\epsilon}(\tilde{u}_{\epsilon}^n)) (U_n - \tilde{u}_{\epsilon}^n) \\ &\quad + \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\beta_{\epsilon}(U_n) - \beta_{\epsilon}(\tilde{u}_{\epsilon}^n)) (\tilde{u}_{\epsilon}^n - Y_n) \\ &= A + B \end{aligned}$$

Ahora definimos la función auxiliar  $a_n(x)$  como

$$a_n(x) = \frac{\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon^n)}{U_n - \tilde{u}_\epsilon^n}, \quad \text{si } U_n \neq \tilde{u}_\epsilon^n$$

$$= 0, \quad \text{si } U_n = \tilde{u}_\epsilon^n$$

Por la propiedad (2.21) de  $\beta_\epsilon$  tenemos que  $0 \leq a_n(x) \leq \epsilon^{-1}$  y entonces podemos acotar B haciendo

$$B \leq \left[ \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon^n))(U_n - \tilde{u}_\epsilon^n) \right]^{1/2} \cdot \left[ \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} a_n \cdot (\tilde{u}_\epsilon^n - Y_n)^2 \right]^{1/2}$$

$$\leq c A^{1/2} \frac{1}{\epsilon^{1/2}} \left( \frac{h^2}{\epsilon^{1/2}} + \tau \right)$$

$$\leq \frac{1}{5} A + c \left( \frac{h^2}{\epsilon} + \frac{\tau}{\epsilon^{1/2}} \right)^2$$

donde hemos usado la estimación (3.72).

Para II notemos que

$$\Pi = -\tau^2 \int_{\Omega_h} \sum_{n=1}^L \nabla(U_n - Y_n) \sum_{k=n}^L \nabla(U_k - Y_k) \leq 0$$

por aplicación de (3.77), posterior a este teorema.

Con la estimación (3.44) podemos acotar III, resultando

$$\text{III} = \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\beta_\epsilon(u_0^I) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_0)) (U_n - Y_n)$$

$$\leq c (h+\epsilon)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^L \tau \|U_n - Y_n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq c (h+\epsilon)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^L \tau \|U_n - \tilde{u}_\epsilon^n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \right)^{1/2}$$

$$+ c (h+\epsilon)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^L \tau \|\tilde{u}_\epsilon^n - Y_n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{5} A + c(h+\epsilon) + c(h+\epsilon)^{1/2} \left( \frac{h^2}{\epsilon^{1/2}} + \tau \right)$$

donde nuevamente hemos usado la propiedad (2.21) de  $\beta_\epsilon$ . Para el resto de los sumandos recordemos que  $\tilde{u}_\epsilon(\cdot, t)$ , y por lo tanto  $\tilde{u}_\epsilon^n$  ( $1 \leq n \leq L$ ),  $\tilde{u}_0$  y  $\tilde{f}$ , y entonces  $f_n$  ( $1 \leq n \leq L$ ), son acotados. El primero por (2.25) y los otros por (2.5) y (2.8). Entonces el análisis de estos términos se

reduce al Lema (3.73). En efecto

$$\begin{aligned} \text{IV} &\leq \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h \setminus \Omega} |U_n - Y_n| \leq c |\Omega_h \setminus \Omega|^{1/2} \left( \sum_{n=1}^L \tau \|U_n - Y_n\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c h^2 \left( \sum_{n=1}^L \tau \|U_n - Y_n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{5} A + c \left( \frac{h^2}{\epsilon^{1/2}} + \tau \right)^2 \end{aligned}$$

donde hemos aplicado (2.21) y (3.72). Análogas acotaciones son válidas para V y VI .

Llevando las estimaciones para I a VI a la ecuación (3.76) obtenemos

$$\frac{1}{5} A \leq c \left( \frac{h^2}{\epsilon} + \frac{\tau}{\epsilon^{1/2}} \right)^2 + c(h+\epsilon)^{1/2} \left( \frac{h^2}{\epsilon^{1/2}} + \tau \right) + c(h+\epsilon)$$

que implica la tesis // .

(3.77) Nota: sean  $\alpha_n \in \mathbb{R}^N$  ,  $1 \leq n \leq L$  . Entonces se verifica la desigualdad

$$\sum_{n=1}^L \alpha_n \cdot \sum_{k=n}^L \alpha_k \geq 0$$

En efecto, llamando  $a_n = \sum_{k=n}^L \alpha_k$  resulta  $\alpha_n = a_n - a_{n+1}$  para  $1 \leq n \leq L$  suponiendo  $a_{L+1} = 0$

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^L \alpha_n \cdot \sum_{k=n}^L \alpha_k &= \sum_{n=1}^L a_n \cdot (a_n - a_{n+1}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^L 2a_n \cdot (a_n - a_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^L (a_n + a_{n+1}) \cdot (a_n - a_{n+1}) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^L (a_n - a_{n+1})^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^L (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \frac{1}{2} a_1^2 \geq 0 \quad // . \end{aligned}$$

(3.78) Corolario: Con las mismas hipótesis de (3.74) es válida la estimación

$$(3.79) \quad \|u_{\epsilon, h, \tau} - u_{\epsilon}\|_{L^2(Q \cap Q_h)} \leq c \left[ \frac{h^2}{\epsilon} + (h+\epsilon)^{1/2} + \frac{\tau}{\epsilon^{1/2}} \right]$$

Demostración: A partir de la definición (3.39) de  $u_{\epsilon, h, \tau}$  resulta

$$\|u_{\epsilon, h, \tau} - u_{\epsilon}\|_{L^2(Q \cap Q_h)} \leq \left( \sum_{n=1}^L \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_{\epsilon}(\cdot, t) - u_{\epsilon}(\cdot, t_n)\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_h)}^2 dt \right)^{1/2} + \left( \sum_{n=1}^L \tau \|u_{\epsilon}^n - U_n\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_h)}^2 \right)^{1/2} .$$

Luego empleando las desigualdades (2.37) y (3.75) se acotan el primer y segundo sumando respectivamente // .

(3.80) Nota: las mismas estimaciones (3.75) y (3.79) son válidas si el problema discreto se propone con  $\bar{f} = f^I$ , siendo  $f$  un dato en las hipótesis de (3.47) // .

(3.81) Nota: las mismas estimaciones (3.75) y (3.79) se extienden al problema  $(P_{\epsilon, h, \tau})$  asociado a la ecuación parabólica (2.49) con idéntica demostración (ver (3.36)) // .

Eligiendo el dato inicial más cuidadosamente es posible mejorar la estimación (3.75).

(3.82) TEOREMA. Supongamos que los datos satisfacen las hipótesis (2.1) a (2.3) y (2.5) a (2.8) y además  $u_0 \in H^2(\Omega)$  ó  $u_0, F_0$  y  $F_n$  verifican las condiciones del Lema (3.46). Siendo  $u_{\epsilon}$  y  $u_{\epsilon, h, \tau}$  las soluciones de los problemas  $(P_{\epsilon})$  y  $(P_{\epsilon, h, \tau})$  con  $\bar{f} = \tilde{f}$ , existe una constante  $c > 0$  dependiente de los datos, pero no de  $\epsilon, h$  ó  $\tau$ , tal que

$$(3.83) \quad \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\beta_{\epsilon}(U_n) - \beta_{\epsilon}(\tilde{u}_{\epsilon}^n)) \cdot (U_n - \tilde{u}_{\epsilon}^n) \leq c \left( \frac{h^2}{\epsilon} + \frac{\tau}{\epsilon^{1/2}} \right)^2$$

Demostración: idem (3.74), con (3.46) en lugar de (3.44) // .

(3.84) Corolario: En las mismas hipótesis de (3.82) resulta

$$(3.85) \quad \|u_{\epsilon, h, \tau} - u_{\epsilon}\|_{L^2(Q \cap Q_h)} \leq c \left( \frac{h^2}{\epsilon} + \frac{\tau}{\epsilon^{1/2}} \right)$$

(3.86) Nota: caben para (3.79) y (3.84) los mismos comentarios de (3.66)



y (3.67) // .

(3.87) Nota: las estimaciones (3.83) y (3.85) se extienden al problema  $(P_{\epsilon, h, \tau})$  asociado a la ecuación parabólica (2.49) sin variante en las pruebas // .

### 3.4.2 2º Esquema Discreto

El esquema anterior tiene el inconveniente que la definición de  $g_n$  y  $f_n$  no es puntual, resultando poco atractivo desde el punto de vista numérico. Es naturalmente preferible poder expresar los datos  $g_n$  y  $f_n$  a partir de valores puntuales de  $g$  y  $f$  y no mediante promedios. Es claro también que esto requerirá mayor regularidad de  $f$  y  $g$  (ver (3.25) y (3.26)).

Como ocurrió en la sección anterior, la estrategia para la obtención de la estimación del error consiste en definir una adecuada función auxiliar que haga las veces de  $Y_n$

Sea  $W(\cdot, t)$  la función que verifica

$$(3.88) \quad \begin{aligned} W(\cdot, t) \in V_h(g(\cdot, t_n)) = V_h(g_n) \\ \int_{\Omega_h} \nabla_x W(\cdot, t) \cdot \nabla \psi + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \beta_{\epsilon}(u_{\epsilon}(\cdot, t)) \psi = \int_{\Omega} f(\cdot, t_n) \psi \end{aligned} ,$$

en c.t.p.  $t$ ,  $t_{n-1} < t \leq t_n$ , y para toda función  $\psi \in V_h(0)$ ,  $1 \leq n \leq L$ .

Nuestro propósito es comparar  $W$  con  $\tilde{u}_{\epsilon}$ . Notemos que llamando  $\omega_{\epsilon}(\cdot, t) \in H^1(\Omega)$  a la función que en c.t.p.  $t$ ,  $t_{n-1} < t \leq t_n$ , es solución de

$$\begin{aligned} \omega_{\epsilon}(\cdot, t) = g(\cdot, t_n) \quad , \quad \text{en } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} \nabla_x \omega_{\epsilon}(\cdot, t) \cdot \nabla \psi + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \beta_{\epsilon}(u_{\epsilon}(\cdot, t)) \cdot \psi = \int_{\Omega} f(\cdot, t_n) \psi \end{aligned}$$

para toda  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ . Entonces  $W(\cdot, t)$  es la proyección  $H_0^1$  de  $\omega_{\epsilon}(\cdot, t)$

sobre el espacio  $V_h(g_n)$  en c.p.t.  $t$ ,  $t_{n-1} < t \leq t_n$  ( $1 \leq n \leq L$ ).

Por otra parte, de la formulación débil (2.17) para  $u_\epsilon$  es claro que  $u_\epsilon(\cdot, t)$  satisface en c.t.p.  $t$ ,  $t_{n-1} < t \leq t_n$

$$u_\epsilon(\cdot, t) = g(\cdot, t) \quad \text{en } \partial\Omega$$

$$\int_{\Omega} \nabla_X u_\epsilon(\cdot, t) \cdot \nabla \psi + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \beta_\epsilon(u_\epsilon(\cdot, t)) \cdot \psi = \int_{\Omega} f(\cdot, t) \psi$$

para toda  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ .

(3.89) LEMA. Sean  $u_\epsilon$  solución del problema  $(P_\epsilon)$  bajo las hipótesis (2.1) a (2.3), (2.5) a (2.8), (3.25) y (3.26) y  $W$  solución de (3.88). Entonces existe una constante  $c > 0$  dependiente de los datos, pero no de  $\epsilon$ ,  $h$  ó  $\tau$ , tal que

$$(3.90) \quad \|W - \tilde{u}_\epsilon\|_{L^2(Q_h)} \leq c \left( \frac{h^2}{\epsilon^{1/2}} + \tau \right)$$

Demostración: La prueba está basada en el Lema (B.29). Para ello notemos que los datos  $g$  y  $f$ , verifican las hipótesis de este lema, y entonces sólo resta verificar la condición (B-21) para  $\omega_\epsilon$ . Sea

$v_\epsilon(\cdot, t) = (\omega_\epsilon - u_\epsilon)(\cdot, t)$ , que satisface en c.t.p.  $t$ ,  $t_{n-1} < t \leq t_n$

$$v_\epsilon(\cdot, t) = g(\cdot, t_n) - g(\cdot, t)$$

$$\int_{\Omega} \nabla_X v_\epsilon(\cdot, t) \cdot \nabla \psi = \int_{\Omega} (f(\cdot, t_n) - f(\cdot, t)) \psi$$

para toda  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ ,  $1 \leq n \leq L$ , i.e. es solución del problema de contorno elíptico

$$-\Delta_X v_\epsilon(\cdot, t) = f(\cdot, t_n) - f(\cdot, t) = F \quad \text{en } \Omega$$

$$v_\epsilon(\cdot, t) = g(\cdot, t_n) - g(\cdot, t) = G \quad \text{en } \partial\Omega$$

con  $F \in L^\infty(\Omega)$ ,  $G \in W_\infty^2(\Omega)$ . Entonces recurriendo a la observación (B-23) concluimos que  $v_\epsilon$  verifica (B-21), y como también esta propiedad es válida para  $u_\epsilon$  por (2.31), resulta cierta para  $\omega_\epsilon$ . Luego aplicando (B-29)

obtenemos en c.t.p.  $t, t_{n-1} < t \leq t_n$ ,

$$\begin{aligned} \|(W - \tilde{u}_\epsilon)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_h)} &\leq c h^2 (1 + \|u_\epsilon(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)}) \\ &\quad + \|f(\cdot, t_n) - f(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} + \|g(\cdot, t_n) - g(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Recordando las estimaciones a priori (3.53) y (2.38), y las hipótesis (3.25) y (3.26), esta expresión se transforma en

$$\|(W - \tilde{u}_\epsilon)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_h)} \leq c \left( \frac{h^2}{\epsilon^{1/2}} + \tau \right) \quad 0 < t < T$$

que integrada en  $t$ ,  $0 < t < T$ , proporciona (3.90) como queríamos demostrar // .

Ahora estamos en condiciones de definir la función auxiliar a la que nos referimos al principio del párrafo y que llamaremos  $W_n$ .

Sea

$$W_n(x) = \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} W(x, t) dt \quad 1 \leq n \leq L$$

Entonces  $W_n$  satisface el problema

$$\begin{aligned} W_n &\in V_h(g_n) \\ \int_{\Omega_h} \nabla W_n \nabla \psi + \int_{\Omega} \frac{1}{\tau} [\beta_\epsilon(u_\epsilon^n) - \beta_\epsilon(u_\epsilon^{n-1})] \cdot \psi &= \int_{\Omega} f_n \cdot \psi \end{aligned}$$

para toda  $\psi \in V_h(0)$ ,  $1 \leq n \leq L$ , donde  $u_\epsilon^n = u_\epsilon(\cdot, t_n)$ . A continuación enunciaremos una estimación para la distancia entre las familias  $(W_n)$  y  $(u_\epsilon^n)$  que se corresponde con (3.71) del 1º esquema discreto.

(3.91) LEMA. Sea  $u_\epsilon$  la solución débil del problema  $(P_\epsilon)$  que verifica las hipótesis (2.1) a (2.3), (2.5) a (2.8), (3.25) y (3.26). Entonces existe una constante  $c > 0$  dependiente de los datos, pero no de  $\epsilon$ ,  $h$  ó  $\tau$ , tal que

$$(3.92) \quad \left( \sum_{n=1}^L \tau \|W_n - \tilde{u}_\epsilon^n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \right)^{1/2} \leq c \left( \frac{h^2}{\epsilon^{1/2}} + \tau \right)$$

Demostración: idem (3.71) con (3.90) en lugar de (3.52) // .

Como en el párrafo anterior, la desigualdad (3.92) permite comparar  $u_\epsilon$  con  $u_{\epsilon,h,\tau}$ . Omitiremos la prueba de los resultados porque se obtienen exactamente igual que (3.75), (3.79), (3.83) y (3.85).

(3.93) TEOREMA. Supongamos que los datos satisfacen las hipótesis (2.1) a (2.3), (2.5) a (2.8), (3.25) y (3.26) y sean  $u_\epsilon$  y  $u_{\epsilon,h,\tau}$  las soluciones de los problemas  $(P_\epsilon)$  y  $(P_{\epsilon,h,\tau})$  con  $\tilde{f} = \tilde{f}$ . Entonces existe una constante  $c > 0$  sólo dependiente de los datos, pero no de  $\epsilon$ ,  $h$  ó  $\tau$ , tal que

$$\sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon^n)) (U_n - \tilde{u}_\epsilon^n) \leq c \left[ \left(\frac{h^2}{\epsilon}\right)^2 + (h+\epsilon) + \frac{\tau^2}{\epsilon} \right]$$

(3.94) Corolario: Con las mismas hipótesis de (3.93) es válida la estimación

$$\|u_{\epsilon,h,\tau} - u_\epsilon\|_{L^2(Q \cap Q_h)} \leq c \left[ \left(\frac{h^2}{\epsilon}\right) + (h+\epsilon)^{1/2} + \frac{\tau}{\epsilon^{1/2}} \right]$$

(3.95) Nota: tanto (3.93) como (3.94) permanecen válidos si se toma  $\tilde{f} = f^I$  en el problema discreto, para  $f$  en las condiciones de (3.47) // .

(3.96) TEOREMA. Supongamos que los datos satisfacen las hipótesis (2.1) a (2.3), (2.5) a (2.8), (3.25) y (3.26) y además  $u_0 \in H^2(\Omega)$  ó  $u_0, F_0, F_h$  verifican las condiciones del Lema (3.46). Siendo  $u_\epsilon$  y  $u_{\epsilon,h,\tau}$  las soluciones de los problemas  $(P_\epsilon)$  y  $(P_{\epsilon,h,\tau})$  con  $\tilde{f} = \tilde{f}$ , existe una constante  $c > 0$  dependiente de los datos, pero no de  $\epsilon$ ,  $h$  ó  $\tau$ , tal que

$$\sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon^n)) \cdot (U_n - \tilde{u}_\epsilon^n) \leq c \left( \frac{h^2}{\epsilon} + \frac{\tau}{\epsilon^{1/2}} \right)^2$$

(3.97) Corolario: Con las mismas hipótesis de (3.96) resulta

$$\|u_{\epsilon,h,\tau} - u_\epsilon\|_{L^2(Q \cap Q_h)} \leq c \left( \frac{h^2}{\epsilon} + \frac{\tau}{\epsilon^{1/2}} \right)$$

(3.98) Nota: dado que la estimación (3.92) también es válida para el problema de Stefan asociado a la ecuación parabólica (2.49), todas las estimaciones de esta sección se extienden a este caso más general // .

### 3.4.3. Relación entre los Parámetros $\epsilon, h, \tau$

En §2.3 hemos probado la estimación

$$\|u - u_\epsilon\|_{L^2(Q)} \leq c \epsilon^{1/2}$$

que parece optimal (ver (2.62)), siendo  $u$  y  $u_\epsilon$  las soluciones de los problemas (P) y  $(P_\epsilon)$ . En consecuencia la más adecuada relación entre los parámetros  $\epsilon, h, \tau$  será aquella que proporcione para  $\|u_\epsilon - u_{\epsilon, h, \tau}\|_{L^2(Q_n Q_h)}$  un orden  $\epsilon^{1/2}$ .

Para las condiciones (2.5) y (2.7) sobre  $u_0$ , y eventualmente (3.47) para  $f$ , tenemos la estimación

$$\|u_\epsilon - u_{\epsilon, h, \tau}\|_{L^2(Q_n Q_h)} \leq c \left( \frac{h^2}{\epsilon} + (h + \epsilon)^{1/2} + \frac{\tau}{\epsilon^{1/2}} \right)$$

para ambos esquemas discretos (ver (3.79) y (3.49)). De esta desigualdad es claro que la restricción a imponer es:

$$(3.99) \quad h \leq c_1 \epsilon, \quad \tau \leq c_2 \epsilon$$

Si el dato inicial es más regular (ver (3.42)) y/o la malla de elementos finitos se elige en correspondencia con la frontera libre inicial (ver (3.46)), la estimación obtenida fue

$$\|u_\epsilon - u_{\epsilon, h, \tau}\|_{L^2(Q_n Q_h)} \leq c \left( \frac{h^2}{\epsilon} + \frac{\tau}{\epsilon^{1/2}} \right)$$

para ambos esquemas discretos (ver (3.85) y (3.97)). Luego para esta situación más restrictiva la relación correcta es

$$(3.100) \quad h \leq c_1 \epsilon^{3/4}, \quad \tau \leq c_2 \epsilon$$

que es claramente más fina que (3.99) porque asintóticamente resulta  $h \gg \epsilon$ .

Si además la solución  $u$  es no degenerada (ver (2.62)) la relación es

$$h \leq c_1 \epsilon, \quad \tau \leq c_2 \epsilon^{3/2}$$

para obtener una convergencia de orden  $\epsilon$ .

(3.101) Nota: las relaciones (3.100) fueron también encontradas en [J-R] para un problema de Stefan con condiciones de contorno de tipo Neumann no lineal, suponiendo  $u_0 \in H^2(\Omega)$  y empleando una metodología de análisis diferente a la presentada en este trabajo // .

(3.102) Nota: las restricciones (3.99) y (3.100) también son válidas para el problema de Stefan más general originado por la ecuación parabólica (2.49) (ver (3.98)) // .

### §3.5. PROPIEDADES DEL PROBLEMA $(P_{\epsilon, h, \tau})$

En esta sección mostraremos que algunas propiedades del problema (P) son heredadas por  $(P_{\epsilon, h, \tau})$ , tales como la acotación uniforme en  $W_2^{1,1}(Q_h)$  y la estabilidad de soluciones. La primera nos servirá incluso para dar una prueba alternativa de la existencia de solución del problema (P).

#### 3.5.1 Acotación Uniforme en $W_2^{1,1}(Q_h)$

Daremos inicialmente una prueba de una desigualdad discreta de tipo Gronwall.

(3.103) LEMA. Sean  $a_n, b_n \geq 0$ ,  $1 \leq n \leq L$ , una familia de números reales tales que

$$a_n \leq \tau \sum_{i=1}^n a_i + b_n \quad 1 \leq n \leq L$$

Entonces si indicamos con  $c = \max_{1 \leq n \leq L} b_n$  resulta

$$(3.104) \quad a_n \leq c(1-\tau)^{-n} \quad 1 \leq n \leq L$$

Demostración: Llamemos  $\alpha_n = \tau \sum_{i=1}^n a_i$ ,  $1 \leq n \leq L$ . Entonces las familias  $(\alpha_n)$  y  $(b_n)$  verifican

$$\frac{1}{\tau} (\alpha_n - \alpha_{n-1}) - \alpha_n \leq b_n$$

La idea de la demostración consiste en multiplicar ambos miembros por una función que haga las veces de factor integrante. Para ello proponemos la

familia auxiliar de números reales positivos definida por la relación de recurrencia

$$f_0 = 1$$

$$\frac{1}{\tau} (f_n - f_{n-1}) = -f_{n-1}$$

Claramente resulta  $f_n = (1-\tau)^n$ . Entonces multiplicando por  $f_{n-1}$  la de

$\alpha_0 = 0$ )

$$\sum_{n=1}^k \alpha_n (1-\tau)^n - \alpha_{n-1} (1-\tau)^{n-1} \leq \tau \sum_{n=1}^k (1-\tau)^{n-1} b_n$$

o equivalentemente

$$\alpha_k \leq \tau (1-\tau)^{-k} \sum_{n=1}^k (1-\tau)^{n-1} b_n \quad 1 \leq k \leq L$$

Luego reemplazando en la inecuación para  $a_k$  resulta

$$a_k \leq \tau (1-\tau)^{-k} \sum_{n=1}^k (1-\tau)^{n-1} b_n + b_k$$

que implica

$$a_k \leq c [\tau (1-\tau)^{-k} \sum_{n=1}^k (1-\tau)^{n-1} + 1] \leq c (1-\tau)^{-k}$$

como queríamos probar // .

Ahora vamos a enunciar el resultado de acotación uniforme en  $W_2^{1,1}(Q)$ , cuya prueba es una versión discreta de (2.42).

(3.105) TEOREMA. Supongamos que se verifican las hipótesis (2.5) sobre  $u_0$ , (3.26) sobre  $f$  y que  $g \in W_\infty^{2,2}(Q)$ . Sea  $(U_n)_{n=1}^L$  la solución del problema discreto  $(P_{\epsilon, h, \tau})$  para el 2º esquema discreto (ver (3.41)). Entonces existe una constante  $c > 0$  sólo dependiente de los datos, pero no de  $\epsilon$ ,  $h$  ó  $\tau$ , tal que

$$(3.106) \quad \max_{1 \leq n \leq L} \int_{\Omega_h} |\nabla U_n|^2 + \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} \frac{1}{\tau} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(U_{n-1})) \frac{1}{\tau} (U_n - U_{n-1}) \leq c$$

Demostración: Recordemos de (3.38) que el problema  $(P_{\epsilon, h, \tau})$  admite una única solución  $(U_n)$  que satisface para  $1 \leq n \leq L$

$$\int_{\Omega_h} \nabla U_n \cdot \nabla \psi + \frac{1}{\tau} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(U_{n-1})) \psi = \int_{\Omega_h} f_n \psi$$

para toda  $\psi \in V_h(0)$  . Proponemos como función de prueba

$$\psi_n = \frac{1}{\tau} [(U_n - U_{n-1}) - (g_n^I - g_{n-1}^I)] \quad 1 \leq n \leq L$$

que resulta admisible, pues  $U_n \in V_h(g_n)$  . Reemplazando en la ecuación anterior y sumando en  $n$  , con  $1 \leq n \leq k$  tenemos:

$$\begin{aligned} (3.107) \quad I + II &= \sum_{n=1}^k \tau \int_{\Omega_h} \nabla U_n \cdot \frac{1}{\tau} \nabla (U_n - U_{n-1}) + \frac{1}{\tau} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(U_{n-1})) \frac{1}{\tau} (U_n - U_{n-1}) \\ &= \sum_{n=1}^k \tau \int_{\Omega_h} \nabla U_n \cdot \frac{1}{\tau} \nabla (g_n^I - g_{n-1}^I) \\ &\quad + \sum_{n=1}^k \tau \int_{\Omega_h} \frac{1}{\tau} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(U_{n-1})) \frac{1}{\tau} (g_n^I - g_{n-1}^I) \\ &\quad + \sum_{n=1}^k \tau \int_{\Omega_h} f_n \frac{1}{\tau} (U_n - U_{n-1}) \\ &\quad + \sum_{n=1}^k \tau \int_{\Omega_h} f_n \frac{1}{\tau} (g_n^I - g_{n-1}^I) = III + IV + V + VI \end{aligned}$$

Como  $\nabla U_n \cdot \frac{1}{\tau} \nabla (U_n - U_{n-1}) = \frac{1}{2\tau} (|\nabla U_n|^2 - |\nabla U_{n-1}|^2) + \frac{1}{2\tau} |\nabla (U_n - U_{n-1})|^2$  resulta para I

$$I \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \int_{\Omega_h} |\nabla U_n|^2 - |\nabla U_{n-1}|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} |\nabla U_k|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} |\nabla u_0|^2$$

Por otra parte para III tenemos

$$III \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \tau \int_{\Omega_h} |\nabla U_n|^2 + 2 \sum_{n=1}^k \tau \int_{\Omega_h} \frac{1}{\tau} |\nabla (g_n^I - g_{n-1}^I)|^2 ,$$

y para IV

$$\begin{aligned} IV &= \sum_{n=1}^k \tau \int_{\Omega_h} \frac{1}{\tau} (U_n - U_{n-1}) \frac{1}{\tau} (g_n^I - g_{n-1}^I) + \sum_{n=1}^k \tau \int_{\Omega_h} \frac{1}{\tau} (\chi_\epsilon(U_n) - \chi_\epsilon(U_{n-1})) \frac{1}{\tau} (g_n^I - g_{n-1}^I) \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^k \tau \int_{\Omega_h} \frac{1}{\tau} (\beta_\epsilon(U_{n-1}) - \beta_\epsilon(U_n)) \frac{1}{\tau} (U_n - U_{n-1}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + 4 \sum_{n=1}^k \tau \int_{\Omega_h} \frac{1}{\tau^2} (g_n^I - g_{n-1}^I)^2 \\
 & + \sum_{n=1}^{k-1} \tau \int_{\Omega_h} \frac{1}{\tau^2} |g_{n+1}^I + g_{n-1}^I - 2g_n^I| \\
 & + \int_{\Omega_h} \frac{1}{\tau} |g_k^I - g_{k-1}^I| + \int_{\Omega_h} \frac{1}{\tau} |g_1^I - g_0^I|
 \end{aligned}$$

que fue obtenida por (2.21) y una reordenación de la sumatoria del segundo término.

Para  $V$  empleamos nuevamente (2.21) resultando

$$V \leq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^k \tau \int_{\Omega_h} \frac{1}{\tau} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(U_{n-1})) \frac{1}{\tau} (U_n - U_{n-1}) + 4 \sum_{n=1}^k \tau \int_{\Omega_h} f_n^2 .$$

Con las estimaciones obtenidas y las hipótesis sobre  $f$ ,  $u_0$  y  $g$ , de

(3.107) sigue la expresión

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_h} |\nabla U_k|^2 + \sum_{n=1}^k \tau \int_{\Omega_h} \frac{1}{\tau} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(U_{n-1})) \frac{1}{\tau} (U_n - U_{n-1}) \\
 \leq \sum_{n=1}^k \tau \int_{\Omega_h} |\nabla U_n|^2 + b_k \quad 1 \leq k \leq L ,
 \end{aligned}$$

con  $b_k$  acotado independientemente de  $\epsilon, h$  y  $\tau$ . Luego llamando

$a_n = \int_{\Omega_h} |\nabla U_n|^2$  y aplicando el Lema (3.103) a esta última inecuación obtenemos la tesis // .

(3.108) Nota: dado que  $U_n \in V_h(g_n)$ , la estimación (3.106) implica que la función  $v_{\epsilon, h, \tau}$  definida por:

$$v_{\epsilon, h, \tau}(x, t) = \frac{1}{\tau} (t_n - t) U_{n-1}(x) + \frac{1}{\tau} (t - t_{n-1}) U_n(x) \quad , \quad t_{n-1} < t \leq t_n ,$$

tiene una norma  $W_2^{1,1}(Q_h)$  acotada independientemente de  $\epsilon, h$  y  $\tau$ . Entonces como  $\Omega_h \rightarrow \Omega$  es claro que para cada compacto  $K \subset \Omega$  se puede extraer una subsucesión de  $v_{\epsilon, h, \tau}$  que converge a una función  $u$  fuertemente en  $L^2(K \times (0, T))$ , débilmente en  $W_2^{1,1}(K \times (0, T))$  y en c.t.p. de

$K \times (0, T)$  cuando  $\epsilon, h, \tau \rightarrow 0$ . Además la familia  $u_{\epsilon, h, \tau}$  converge en  $L^2(K \times (0, T))$  y en c.t.p. de  $K \times (0, T)$  a la misma función  $u$ , y  $\nabla_x u_{\epsilon, h, \tau} \rightarrow \nabla_x u$  débil en  $L^2(K \times (0, T))$ .

Sea  $\psi$  regular con soporte contenido en  $\Omega \times [0, T)$ . Llamamos  $\psi_{h, \tau}$  al interpolante de Lagrange en la malla  $(x, t)$  y  $\psi_h, f_h$  a las funciones que en  $(t_{n-1}, t_n]$  están definidas por:

$$\psi_h(x, t) = \psi^I(x, t_n) \quad f_h(x, t) = f(x, t_n)$$

Entonces de (3.35) resulta

$$\begin{aligned} \int_{Q_h} \nabla_x u_{\epsilon, h, \tau} \cdot \nabla_x \psi_h - \beta_\epsilon(u_{\epsilon, h, \tau}) \frac{\partial}{\partial t} \psi_{h, \tau} \\ = \int_{\Omega_h} \beta_\epsilon(u_0^I) \psi^I(\cdot, 0) + \int_{Q_h} f_h \psi_h \end{aligned}$$

y como  $\nabla_x \psi_h \rightarrow \nabla_x \psi$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} \psi_{h, \tau} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \psi$ ,  $\psi_h \rightarrow \psi$  fuerte en  $L^2(Q)$  es fácil probar que  $u$  verifica (2.17), vale decir  $u$  es solución débil de (P) (para los detalles ver [K], pág. 504).

Esto proporciona una prueba constructiva de existencia de solución de (P) pero con hipótesis más fuertes que las empleadas en §2, pues  $g \in W_\infty^{2,2}(Q)$  y  $f$  satisface (3.26) (2º esquema discreto) // .

(3.109) Nota: la estimación (3.106) al igual que (3.108) también son válidas para el problema discreto asociado con la ecuación parabólica (2.49) // .

### 3.5.2 Estabilidad de las Soluciones Discretas

El propósito de este párrafo es probar la dependencia continua de las soluciones discretas respecto de los datos del problema  $(P_{\epsilon, h, \tau})$ , obteniendo una versión discreta de la estimación (2.87).

(3.110) TEOREMA. Sean  $(U_n)$  y  $(\hat{U}_n)$  las soluciones del problema  $(P_{\epsilon, h, \tau})$  que respectivamente corresponden a los datos  $u_0, g, f$  y  $\hat{u}_0, \hat{g}, \hat{f}$ . Entonces existe una constante  $c > 0$  sólo dependiente de  $\Omega$  y  $T$ , pero no de  $\epsilon, h, \delta, \tau$ , tal que

$$(3.111) \quad \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (U_n - \hat{U}_n) (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(\hat{U}_n)) \leq c \left( \int_{\Omega_h} |\beta_\epsilon(u_0^I) - \beta_\epsilon(\hat{u}_0^I)|^2 + \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} |f_n - \hat{f}_n|^2 \right) + c \left( \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} |g_n^I - \hat{g}_n^I|^2 + |\nabla(g_n^I - \hat{g}_n^I)|^2 \right)^{1/2}$$

Demostración: Sea  $V_n$ ,  $1 \leq n \leq L$ , la familia de funciones auxiliares definidas por

$$V_n \in V_h(\hat{g}_n) \\ \int_{\Omega_h} \nabla(V_n - U_n) \cdot \nabla \psi = 0$$

para toda  $\psi \in V_h(0)$ . Análogamente a (2.79) resulta

$$\|V_n - U_n\|_{H^1(\Omega_h)} \leq c \|g_n^I - \hat{g}_n^I\|_{H^1(\Omega_h)}$$

que puede obtenerse, por ejemplo, proponiendo  $\psi = (V_n - U_n) - (g_n^I - \hat{g}_n^I)$  y usando la desigualdad de Poincarè.

Para cada  $n$ ,  $1 \leq n \leq L$ ,  $V_n$  verifica

$$\int_{\Omega_h} \nabla V_n \cdot \nabla \psi + \frac{1}{\tau} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(U_{n-1})) \psi = \int_{\Omega_h} f_n \psi,$$

de donde por sustracción de esta ecuación de la (3.35) correspondiente a  $\hat{U}_n$ , suma en  $n$  y reordenación de términos (suma por partes) obtenemos

$$I = \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(\hat{U}_n)) \frac{1}{\tau} (\psi_n - \psi_{n+1}) \\ = - \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} \nabla(V_n - \hat{U}_n) \cdot \nabla \psi_n + \int_{\Omega_h} (\beta_\epsilon(u_0^I) - \beta_\epsilon(\hat{u}_0^I)) \psi_1$$

$$+ \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\hat{f}_n - \hat{f}_n) \psi_n = \text{II} + \text{III} + \text{IV}$$

Elegimos como función de prueba

$$\psi_n = \tau \sum_{k=n}^L (V_k - \hat{U}_k) .$$

Entonces tenemos, procediendo como en (2.76), las siguientes estimaciones

$$\text{I} \geq \frac{3}{4} \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(\hat{U}_n)) (U_n - \hat{U}_n) - c \left( \sum_{n=1}^L \tau \|g_n^I - \hat{g}_n^I\|_{H^1(\Omega_h)}^2 \right)^{1/2}$$

$$\text{II} \leq 0$$

$$\begin{aligned} \text{III} \leq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(\hat{U}_n)) (U_n - \hat{U}_n) + c \int_{\Omega_h} |\beta_\epsilon(u_0^I) - \beta_\epsilon(\hat{u}_0^I)|^2 \\ + c \left( \sum_{n=1}^L \tau \|g_n^I - \hat{g}_n^I\|_{H^1(\Omega_h)}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IV} \leq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(\hat{U}_n)) (U_n - \hat{U}_n) + c \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} |f_n - \hat{f}_n|^2 \\ + c \sum_{n=1}^L \tau \|g_n^I - \hat{g}_n^I\|_{H^1(\Omega_h)}^2 \end{aligned}$$

que implican la desigualdad (3.111) que deseábamos probar // .

(3.112) Nota: la estimación (3.111) también es válida para el problema discreto asociado a la ecuación parabólica (2.49). La prueba es la misma// .

(3.113) Nota: observemos que el 2º esquema discreto puede estudiarse a partir de (3.111). En efecto si indicamos con  $(U_n)$  y  $(\hat{U}_n)$  las soluciones de  $(P_{\epsilon, h, \tau})$  con datos (3.40) y (3.41) respectivamente, resulta por [C-1] (pág.124).

$$\| (g_n^I - \hat{g}_n^I) - (\tilde{g}_n - \hat{\tilde{g}}_n) \|_{H^1(\Omega_h)} \leq c h \|g_n - \hat{g}_n\|_{W_\infty^2(\Omega)}$$

y luego por las hipótesis (3.25) y (3.26) tenemos

$$\sum_{n=1}^L \tau \|U_n - \hat{U}_n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \leq c(\tau+h) .$$

Según (3.99)  $h \sim \tau \sim \varepsilon$ , de modo que resulta el mismo orden de convergencia que el probado en (3.94) // .

## CAPITULO 4

### RESOLUCION DEL PROBLEMA DISCRETO

Hasta el momento se ha estudiado el problema discreto en relación al problema continuo pero nada se ha dicho acerca de la obtención efectiva de la solución discreta. El propósito de este capítulo es presentar un algoritmo de resolución aplicable a ambos esquemas discretos y que permite la verificación de las estimaciones teóricas del Capítulo 3.

Se trata de un método iterativo basado en la teoría de convergencia bajo orden parcial. Permite realizar los cálculos sin resolver ningún sistema algebraico de ecuaciones, ni invertir o transformar matriz alguna, por lo que posee una relativamente simple implementación computacional.

Se prueba en §4.3 la convergencia del algoritmo, resultando estimaciones de error por componentes, y luego en norma  $L^\infty(\Omega_h)$ , lo que da una idea local del orden de convergencia para cada etapa en el tiempo. En §4.4 se estudia el error global introducido por el método, vale decir el error en norma  $L^2$  del espacio-tiempo.

Finalmente se obtiene un resultado de monotonía de soluciones discretas basado en las características del algoritmo y de la malla de elementos finitos para la cual está previsto.

#### §4.1. PRESENTACION DEL ALGORITMO

##### 4.1.1 Notación III

(4.1)  $\{U\}_{n=1}^L$  familia de vectores solución del problema discreto, i.e.  
 $U_n = (U_{ni})_{i=1}^I$  son las ordenadas de la función homónima definida en (3.35) en los nodos internos de la triangulación  $F_h$ .

(4.2)  $\{G_n\}_{n=1}^L$  conjunto de vectores datos de contorno, i.e.

$$G_n = (G_{ni})_{i=I+1}^{\tilde{I}} \quad \text{tal que}$$

$$G_{ni} = \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} g(x_i, t) dt \quad , \quad (1^\circ \text{ esquema discreto})$$

o  $G_{ni} = g(x_i, t_n)$  , (2º esquema discreto)

donde  $\{x_i\}_{i=1}^{\tilde{I}}$  es el conjunto de nodos de la triangulación definido en

(3.9)

Recordando que  $\{\omega_i\}_{i=1}^{\tilde{I}}$  es el conjunto de funciones base de

$V_h(1)$  (ver (3.12)) definimos

(4.3)  $\{F_n\}_{n=1}^L$  conjunto de vectores fuente o de generación interna de energía, donde  $F_n = (F_{ni})_{i=1}^{\tilde{I}}$

$$F_{ni} = \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_h} \tilde{f}(x, t) \omega_i(x) dx dt \quad , \quad (1^\circ \text{ esquema discreto})$$

$$F_{ni} = \int_{\Omega_h} \tilde{f}(x, t_n) \omega_i(x) dx dt \quad , \quad (2^\circ \text{ esquema discreto}) .$$

(4.4)  $A = (a_{ij})$  matriz de rigidez, vale decir la matriz  $A \in L(\mathbb{R}^{\tilde{I}})$  definida por

$$a_{ij} = \int_{\Omega_h} \nabla \omega_i \cdot \nabla \omega_j \quad 1 \leq i, j \leq \tilde{I} .$$

Vamos a descomponer  $A$  en sus partes diagonal  $D$  , estrictamente superior e inferior  $-U$  y  $-L$  respectivamente. Entonces

$A = D - (L + U)$  . Como  $A$  es simétrica  $L = U^t$  .

Para la ecuación parabólica (2.49) la definición es

$$a_{ij} = \int_{\Omega_h} (K(x) \cdot \nabla \omega_i) \cdot \nabla \omega_j \quad 1 \leq i, j \leq \tilde{I}$$

(4.5)  $\tilde{A} = (a_{ij})$  matriz rectangular de orden  $\tilde{I} \times (\tilde{I} - I)$  definida por

$$a_{ij} = \int_{\Omega_h} \nabla \omega_i \cdot \nabla \omega_j \quad 1 \leq i \leq \tilde{I} \quad , \quad I < j \leq \tilde{I}$$

(4.6)  $M = (m_{ij})$  matriz de masa, vale decir la matriz cuadrada  $I \times I$  definida por

$$m_{ij} = \int_{\Omega_h} \omega_i \omega_j \quad 1 \leq i, j \leq I$$

Consideremos  $M$  descompuesta en su parte diagonal  $M_1$  y  $M_2 = M - M_1$ .

(4.7)  $B_n : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^I$  ( $1 \leq n \leq L$ ) operador no lineal definido por componentes como

$$B_{nj} U = \int_{\Omega_h} \beta_\epsilon \left( \sum_{i=1}^I U_i \omega_i + \sum_{i=\tilde{I}+1}^{\tilde{I}} G_{ni} \omega_i \right) \omega_j \quad 1 \leq j \leq I$$

En general  $\beta_\epsilon$  se puede suponer de la forma (2.48), aunque por simplicidad se trabajará con  $\beta_\epsilon$  definida por (2.19). Como puede comprobarse en la prueba de cada resultado, esto no es una limitación, extendiéndose las demostraciones sin variantes a este caso.

(4.8)  $\{b_n\}_{n=1}^L$  conjunto de vectores dato para el  $n$ -ésimo paso en el tiempo, definidos por

$$b_n = -\tilde{A} G_n + \frac{1}{\tau} B_{n-1} U_{n-1} + F_n$$

(4.9)  $\rho(P)$  radio espectral de la matriz  $P \in L(\mathbb{R}^I)$

#### 4.1.2 Hipótesis sobre la Triangulación

(4.10) La triangulación  $F_h$  es de tipo estrictamente no negativo, vale decir que los coeficientes  $a_{ij}$  satisfacen:

(4.11)  $a_{ij} < 0$  si  $i \neq j$  ( $1 \leq i \leq I$ ,  $1 \leq j \leq \tilde{I}$ ), y los nodos  $i, j$  pertenecen al mismo elemento finito

(4.12)  $\sum_{j=1}^I a_{ij} \geq 0 \quad 1 \leq i \leq I$ .

(4.13) Nota: la condición (4.10) se verifica para elementos finitos  $n$ -simples de Lagrange del 1º tipo si además se verifica la siguiente propiedad geométrica (ver [C-R] o [Z]):



"Para todo  $K \in F_h$  y para todo vértice  $P \in K$  la proyección de  $P$  sobre el hiperplano soporte de la cara opuesta pertenece al interior de esa cara".

En el caso 2-dimensional ( $N=2$ ) equivale a decir que los ángulos internos de  $K$  sean menores que  $\pi/2$ . Para la ecuación (2.49) es más difícil establecer una propiedad del tipo (4.10) porque claramente dependerá de la matriz  $K(x) \in L(\mathbb{R}^N)$ . En lo que sigue nos referiremos al caso  $K(x) = I //$ .

(4.14)  $F_h$  satisface una hipótesis inversa, i.e. existe una constante  $\nu > 0$  independiente de  $h$  tal que

$$h \leq \nu h_k, \text{ para todo } K \in F_h.$$

#### 4.1.3 El Algoritmo de Resolución

Eligiendo en la ecuación (3.35) como funciones de prueba la familia  $\{\omega_i\}_{i=1}^I$  de funciones base de  $V_h(0)$  obtenemos la ecuación

$$(4.15) \quad A U_n + \frac{1}{\tau} B_n U_n = b_n$$

Trataremos de obtener la solución  $U_n$  como punto fijo de un operador contractivo. Para ello notemos que  $\frac{1}{\tau} A^{-1} B_n$  en general no será contractivo debido a que  $B_n$  tiene un crecimiento grande fijado por  $\epsilon$ . Hablando imprecisamente podemos decir que el método consiste en asociar con  $A$  una parte importante de  $\frac{1}{\tau} B_n$ , que simultáneamente controle el crecimiento de  $\frac{1}{\tau} B_n$  e incremente el de  $A$ .

Consideramos  $A$  y  $M$  descompuestas según (4.4) y (4.6). Sea  $\tilde{\epsilon} = (1 + \epsilon^{-1})^{-1}$ . Claramente la ecuación (4.14) es equivalente a

$$(4.16) \quad (D - \frac{1}{2}L + \frac{1}{2\tilde{\epsilon}\tau} M_1) U_n = (\frac{1}{2}L + U + \frac{1}{2\tilde{\epsilon}\tau} M_1 - \frac{1}{\tau} B_n) U_n + b_n$$

de donde  $U_n$  es un punto fijo del operador  $T_n : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^I$  definido por

$$(4.17) \quad T_n U = (D - \frac{1}{2} L + \frac{1}{2\epsilon\tau} M_1)^{-1} [(\frac{1}{2} L + U + \frac{1}{2\epsilon\tau} M_1 - \frac{1}{\tau} B_n) U + b_n]$$

El resultado principal de este capítulo consiste en demostrar que  $T_n$  es un operador contractivo. Mas aún que existe una matriz  $P$  (independiente de  $n$ )

$$(4.18) \quad P \geq 0, \quad \rho(P) < 1$$

( $\rho$  indica el radio espectral) y tal que

$$(4.19) \quad |T_n U_1 - T_n U_2| \leq P \cdot |U_1 - U_2|, \quad U_1, U_2 \in \mathbb{R}^I,$$

donde  $|U|$  indica el vector obtenido con los módulos de las componentes de  $U$  (ver [O-R], pág. 433) y la desigualdad (4.19) se entiende por componentes al igual que (4.18). Un tal operador se denomina P-contracción.

(4.20) Nota: la matriz  $P$  resulta ser

$$P = (D - \frac{1}{2} L + \frac{1}{2\epsilon\tau} M_1)^{-1} (\frac{1}{2} L + U + \frac{1}{2\epsilon\tau} M_1)$$

que es independiente de  $n$ ,  $1 \leq n \leq L //$ .

El algoritmo consiste en resolver el problema

$$U_n^0 = U_{n-1} \quad (U_0 = u_0^I)$$

$$U_n^k = T_n U_n^{k-1}, \quad k \geq 1$$

para el cual es posible controlar el error en norma  $L^\infty(\Omega_h)$  como veremos seguidamente.

#### §4.2. CONVERGENCIA Y ESTIMACIONES DE ERROR

En este parágrafo emplearemos varios resultados sobre operadores definidos en espacios de dimensión finita, que serán enunciados sin demostración como Lemas, y que pueden hallarse en [O-R].

(4.22) Definición: Decimos que una matriz  $A \in L(\mathbb{R}^I)$  es una M-matriz si  $A$  es inversible,  $A^{-1} \geq 0$  (desigualdad entendida por componentes), y  $a_{ij} \leq 0$  para  $i \neq j$  ( $1 \leq i, j \leq I$ ).

Entonces tenemos la siguiente caracterización de M-matrices (ver [O-R], pág. 54)

(4.23) LEMA. Sea  $A$  una matriz,  $A \in L(\mathbb{R}^I)$  con  $a_{ij} \leq 0$  si  $i \neq j$ . Entonces  $A$  es una M-matriz si y sólo si

(4.24) los elementos diagonales de  $A$  son positivos

(4.25) la matriz  $B = I - D^{-1}A$  con  $D = \text{diag}(A)$  satisface  $\rho(B) < 1$ .

Otro resultado auxiliar que emplearemos establece condiciones que implican (4.25) (ver [O-R], pág. 55).

(4.26) LEMA. Sea  $B \in L(\mathbb{R}^I)$  irreducible. Si  $\sum_{j=1}^I |b_{ij}| \leq 1$ ,  $1 \leq i \leq I$ , y la desigualdad estricta vale al menos para algún  $i$ , entonces  $\rho(B) < 1$ .

Sean  $A, B \in L(\mathbb{R}^I)$ . Decimos que  $A = B - C$  es una partición regular de  $A$  si  $B$  es inversible,  $B^{-1} \geq 0$  y  $C \geq 0$ . El próximo resultado, que puede hallarse en [O-R] pág. 56, establece una condición equivalente a la definición anterior.

(4.27) LEMA. Sea  $A \in L(\mathbb{R}^I)$  y supongamos que  $A = B - C$  es una partición regular de  $A$ . Entonces  $\rho(B^{-1}C) < 1$  si y sólo si existe  $A^{-1}$  y  $A^{-1} \geq 0$ .

Ahora vamos a obtener propiedades de las matrices de rigidez  $A$  y de masa  $M$  definidas en (4.4) y (4.6) respectivamente.

(4.28) LEMA. Si la triangulación espacial  $F_h$  satisface (4.10) entonces  $A$  es una M-matriz.

Demostración: Claramente es  $a_{ij} \leq 0$  si  $i \neq j$ , puesto que por (4.11)  $a_{ij} < 0$  si  $i, j$  pertenecen al mismo elemento finito, y si no  $a_{ij} = 0$  por ser  $\{\omega_i\}$  localmente soportadas. En consecuencia podemos aplicar el Lema (4.23), para lo cual sólo debemos verificar (4.25).

Notemos que  $A$  es una matriz irreducible diagonalmente dominante, pues por (4.11) y (4.12)

$$\sum_{j=1}^I a_{ij} \geq \sum_{j=I+1}^{\tilde{I}} -a_{ij} \geq 0,$$

y entonces

$$(4.29) \quad a_{ii} \geq \sum_{j=1, j \neq i}^I -a_{ij} = \sum_{j=1, j \neq i}^I |a_{ij}|$$

Además cuando  $x_i$  es un nodo próximo a  $\partial\Omega_h$  en el sentido que existe  $K \in F_h$  con  $x_i \in K$  y  $x_j \in K \cap \partial\Omega_h$  para algún  $j$ ,  $I < j \leq \tilde{I}$ , entonces  $a_{ij} < 0$  y la desigualdad (4.29) es estricta. En consecuencia  $A$  es diagonalmente dominante. Para probar que  $A$  es irreducible basta observar que la condición (4.11) implica que para cualquier par de índices  $i, j$  existe una sucesión de elementos no nulos de  $A$  de la forma  $\{a_{ii_1}, \dots, a_{i_m j}\}$ , lo que geométicamente se interpreta diciendo que entre los nodos internos  $x_i, x_j$  se puede establecer un camino interno en la malla espacial que los conecta. Esta propiedad equivale a la irreducibilidad (ver [O-R], pág.47).

Luego la matriz  $B = I - D^{-1}A$  es irreducible, y su elemento  $(i-j)$ -ésimo verifica

$$\begin{aligned} b_{ij} &= 0 & , \text{ si } i=j \\ &= -a_{ij} \cdot a_{ii}^{-1} & , \text{ si } i \neq j \end{aligned}$$

de donde por (4.28) se sigue que

$$\sum_{j=1, j \neq i}^I |b_{ij}| = \sum_{j=1, j \neq i}^I |a_{ij} \cdot a_{ii}^{-1}| = a_{ii}^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^I |a_{ij}| \leq 1$$

verificándose la desigualdad estricta para al menos un  $i$ . Entonces aplicando (4.26) obtenemos la tesis //.

(4.30) Nota: el Lema (4.27) implica el Principio de Máximo discreto (ver [Z] ó [C-R]). En efecto, si  $x$  indica la solución de  $Ax = b$  entonces  $x_1 \leq x_2$  para  $b_1 \leq b_2$ , que es un resultado de comparación inmediato de (4.28). Consideremos ahora  $x \in \mathbb{R}^I$  solución de  $Ax = -\tilde{A}G$ . Entonces se verifica

$$\max_{1 \leq i \leq I} x_i \leq \max_{I < i \leq \tilde{I}} G_i \quad (\text{principio de máximo})$$

Para probar esta desigualdad llamemos  $\alpha = \max_{I < i \leq \tilde{I}} G_i$ , y notemos que el vector  $\bar{x} \in \mathbb{R}^I$  definido por  $\bar{x}_i = \alpha$ ,  $1 \leq i \leq I$ , satisface la ecuación

$A\bar{x} = -\tilde{A} \bar{G}$ , con  $\bar{G}_i = \alpha$  (recordar que  $\sum_{j=1}^{\tilde{I}} a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \omega_i \cdot \nabla (\sum_{j=1}^{\tilde{I}} \omega_j) = 0$ ). Pero como  $\bar{G} \geq G$  y  $\tilde{A} \leq 0$  por (4.11), aplicando el resultado de comparación se sigue que  $x \leq \bar{x}$  como habíamos enunciado // .

El siguiente Lema vincula a las matrices de rigidez  $A$  y de masa  $M$  con los parámetros del problema:  $\epsilon, h, \tau$ .

(4.31) LEMA. Si la triangulación  $F_h$  satisface las hipótesis (4.10) (4.14) y es regular (ver (3.23)) entonces, para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, existen  $h$  y  $\tau$  compatibles con las estimaciones (3.99) tales que

$$(4.32) \quad L + U \geq \frac{1}{\tilde{\epsilon}\tau} M_2$$

Demostración: debemos probar que  $-a_{ij} \geq (\tilde{\epsilon}\tau)^{-1} m_{ij}$  con  $i \neq j$ , o sea por (4.4) y (4.6) que

$$-\int_{\Omega_h} \nabla \omega_i \cdot \nabla \omega_j \geq \frac{1}{\tilde{\epsilon}\tau} \int_{\Omega_h} \omega_i \omega_j \quad i \neq j$$

Es claro que resulta suficiente considerar el caso en que los soportes de  $\omega_i$  y  $\omega_j$  son no disjuntos, o equivalentemente que los nodos  $x_i$  y  $x_j$  pertenecen al mismo elemento finito. Como  $F_h$  satisface las hipótesis inversa (4.14), (4.11) y además es regular, tenemos

$$-\int_{\Omega_h} \nabla \omega_i \cdot \nabla \omega_j \geq c_1 h^{N-2}, \quad \int_{\Omega_h} \omega_i \omega_j \leq c_2 h^N$$

donde  $c_1, c_2 > 0$  son constantes independientes de  $h$ . En consecuencia eligiendo  $\tau \geq \frac{2c_2}{c_1} \epsilon$  y  $h = \epsilon$ , que son relaciones compatibles con (3.99) resulta

$$\frac{1}{\tilde{\epsilon}\tau} m_{ij} \leq c_2 \frac{h^N}{\tilde{\epsilon}\tau} \leq c_1 h^{N-2} \leq -a_{ij} \quad i \neq j$$

con lo que queda probado el Lema // .

(4.33) Nota: el hecho de que  $\tau \epsilon \sim h^2$  sea la relación adecuada en (4.31) y luego permita obtener un resultado de convergencia en  $L^\infty(\Omega_h)$  sugiere que  $\epsilon \sim \tau \sim h$  obtenida en (3.99) es la relación de los parámetros más natural // .

Recordemos que un operador  $F: \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^I$  es isótono si  $F U_1 \leq F U_2$  para  $U_1 \leq U_2$ ,  $U_1, U_2 \in \mathbb{R}$  (desigualdad entendida por componentes).

Ahora vamos a enunciar algunas propiedades de  $B_n$ ,  $1 \leq n \leq L$ , necesarias en lo que sigue.

(4.34) LEMA. El operador  $B_n : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^I$  definido por (4.7) es Lipschitz continuo e isótono. Entonces admite derivadas parciales en c.t.p. de  $\mathbb{R}^I$  y su matriz Jacobiana  $J(B_n)$  verifica

$$(4.35) \quad 0 \leq J(B_n) \leq \frac{1}{\tilde{\epsilon}} M$$

donde  $M$  es la matriz de masa de (4.6) y  $\tilde{\epsilon} = (1 + \epsilon^{-1})^{-1}$ .

Demostración: que  $B_n$  es Lipschitz continuo e isótono se desprende directamente de la definición y la propiedad (2.21) de  $\beta_\epsilon$ . Luego la existencia de la matriz  $J(B_n)$  en c.t.p. de  $\mathbb{R}^I$  se deduce de la teoría de diferenciación de funciones monótonas de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ . Finalmente la desigualdad (4.35) es inmediata por simple cálculo //.

(4.36) TEOREMA. Sean  $A$  una  $M$ -matriz,  $A \in L(\mathbb{R}^I)$ ,  $B$  un operador isótono continuo en  $\mathbb{R}^I$  con matriz Jacobiana  $J(B)$  tal que  $0 \leq J(B) \leq N$ , con  $N \in L(\mathbb{R}^I)$  y que verifica  $L + U \geq N_2$  ( $N_1 = \text{diag } N$ ,  $N_2 = N - N_1$ ). Entonces el operador

$$T : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^I$$

$$x \rightarrow Tx = (D - \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} N_1)^{-1} (U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} N_1 - B) x$$

es una  $P$ -contracción, con  $P = (D - \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} N_1)^{-1} (U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} N_1)$

Demostración: Llamemos  $H$  al operador sobre  $\mathbb{R}^I$  definido por

$$Hx = (U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} N_1 - B) x$$

$$= (U + \frac{1}{2} L - \frac{1}{2} N_2) x + (\frac{1}{2} N - B) x .$$

Como por hipótesis  $L + U \geq N_2$ , tenemos que

$$|(U + \frac{1}{2} L - \frac{1}{2} N_2)x_1 - (U + \frac{1}{2} L - \frac{1}{2} N_2)x_2| \leq (U + \frac{1}{2} L - \frac{1}{2} N_2) \cdot |x_1 - x_2| .$$

Ahora vamos a estudiar la parte no lineal de  $H$ . Usaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} x_i &= (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iI}) & i &= 1, 2 \\ y_k &= (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k}, x_{2k+1}, \dots, x_{2I}) & 1 \leq k \leq I \\ y_0 &= x_2, & y_I &= x_1 \end{aligned}$$

Como  $B$  es isótono e  $y_k, y_{k-1}$  difieren en una sola componente, podemos decir que para  $1 \leq k \leq I$

$$\begin{aligned} 0 \leq B_i y_k - B_i y_{k-1} &\leq n_{ik}(x_{1k} - x_{2k}) & , \text{ si } x_{1k} \geq x_{2k} \\ 0 \geq B_i y_k - B_i y_{k-1} &\geq n_{ik}(x_{1k} - x_{2k}) & , \text{ si } x_{1k} \leq x_{2k} \end{aligned}$$

Entonces tenemos para la  $i$ -ésima componente de la parte no lineal de  $H$

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{2} N-B\right)_i x_1 - \left(\frac{1}{2} N-B\right)_i x_2 \right| &= \left| \sum_{k=1}^I \frac{1}{2} n_{ik}(x_{1k} - x_{2k}) - (B_i y_k - B_i y_{k-1}) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^I n_{ik} |x_{1k} - x_{2k}| \leq \frac{1}{2} N_i |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

Luego para el operador  $H$  resulta la desigualdad

$$\begin{aligned} |Hx_1 - Hx_2| &\leq \left( U + \frac{1}{2} L - \frac{1}{2} N_2 \right) \cdot |x_1 - x_2| + \frac{1}{2} N \cdot |x_1 - x_2| \\ &\leq \left( U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} N_1 \right) \cdot |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

y por la definición de  $T$  claramente para todo  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^I$  se verifica

$$|Tx_1 - Tx_2| \leq \left( D - \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} N_1 \right)^{-1} \left( U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} N_1 \right) \cdot |x_1 - x_2| = P \cdot |x_1 - x_2|$$

Para probar que  $T$  es una  $P$ -contracción es necesario comprobar que  $P \geq 0$  y  $\rho(P) < 1$  (ver (4.18)). La primera propiedad es trivial y la segunda se deduce de la teoría de particiones regulares de matrices. En efecto  $A = \left( D - \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} N_1 \right) - \left( U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} N_1 \right)$  es una partición regular de  $A$  pues  $\left( D - \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} N_1 \right)^{-1} \geq 0$  (por ser  $D + \frac{1}{2} N_1 \geq 0$  diagonal e inversible y  $L \geq 0$  estrictamente triangular inferior (ver [O-R], pág.53)) y  $U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} N_1 \geq 0$ . Además de (4.28)  $A$  es una  $M$ -matriz y por ende  $A^{-1} \geq 0$ . Luego aplicamos el Lema (4.27) y concluimos que  $\rho(P) < 1$  como debíamos demostrar // .

La definición de  $P$ -contracción reúne los conceptos de contracción usual y de orden parcial. Esta propiedad se encuentra en el estudio de la existencia de puntos fijos, como lo demuestra el siguiente resulta-

do probado en [O-R], pág. 433, que establece la convergencia de un esquema iterativo dando estimaciones locales del error.

(4.37) LEMA. Supongamos que  $T: \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^I$  es una P-contracción. Entonces para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^I$  la sucesión

$$x_k = T x_{k-1} \quad , \quad k \geq 1$$

converge al único punto fijo  $x$  de  $T$  y vale la estimación de error

$$|x_k - x| \leq (I-P)^{-1} \cdot P \cdot |x_k - x_{k-1}| \quad , \quad k \geq 1$$

Ahora vamos a enunciar el resultado principal de la sección, que establece la convergencia del esquema iterativo (4.21) y proporciona estimaciones locales de error.

(4.28) Corolario: El operador  $T_n$ ,  $1 \leq n \leq L$ , definido en (4.17) es una P-contracción con  $P$  independiente de  $n$  y de expresión

$$(4.39) \quad P = (D - \frac{1}{2} L + \frac{1}{2\epsilon\tau} M_1)^{-1} (U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{2\epsilon\tau} M_1) .$$

Entonces  $T_n$  posee un único punto fijo que llamamos  $U_n$ , calculable con el proceso iterativo (4.21), es decir

$$\begin{aligned} U_n^0 &= U_{n-1} & (U_0 &= u_0^I) \\ U_n^k &= T_n U_n^{k-1} & k &\geq 1 \end{aligned}$$

y con la estimación de error

$$(4.40) \quad |U_n^k - U_n^k| \leq (I-P)^{-1} \cdot P \cdot |U_n^k - U_n^{k-1}| \quad k \geq 1$$

Demostración: por (4.35) y (4.32) tenemos que  $\frac{1}{\tau} B_n$  definido por (4.7) verifica las hipótesis del teorema (4.36). En consecuencia  $T_n$  es una P-contracción con  $P$  definida por (4.39). Finalmente por aplicación de (4.37) obtenemos la convergencia del esquema iterativo y la estimación de error (4.40) como queríamos demostrar // .

(4.41) Nota: debe observarse que el proceso iterativo (4.21) es de sencilla implementación computacional. Básicamente es un algoritmo de tipo Gauss-Seidel modificado con un orden lineal de convergencia (ver [O-R],



pág. 301). También puede pensarse como una variante del método de Newton-Gauss-Seidel (ver [O-R], págs. 216 y 321) que consiste en el proceso:

Se desea hallar la solución de

$$F x = A x + \frac{1}{\tau} B x = b$$

con  $B$  como en (4.7), para lo cual siendo  $F'(x_k) = D_k - (L_k + U_k)$  y  $B'(x_k) = B_D^k - (B_L^k + B_U^k)$  la descomposición de los Jacobianos de  $F$  y  $B$  (en  $x_k \in \mathbb{R}^I$ ) en sus partes diagonal y estrictamente inferior y superior se propone el algoritmo iterativo.

$$(D_k - L_k) x_{k+1} = U_k x_k + F'_k x_k - Fx_k = (D_k - L_k)x_k - Fx_k$$

que es equivalente a

$$x_{k+1} = [(D + \frac{1}{\tau} B_D^k) - (L - \frac{1}{\tau} B_L^k)] \cdot (U + \frac{1}{\tau} B_D^k + \frac{1}{\tau} B_L^k - \frac{1}{\tau} B) x_k$$

llamado iteración de Newton-Gauss-Seidel a un paso para la ecuación  $Fx = b$ .

El método propuesto en este trabajo consiste en reemplazar

$$\frac{1}{\tau} B_D^k \text{ por } \frac{1}{2\varepsilon\tau} M_1 \text{ y } \frac{1}{\tau} B_L^k \text{ por } \frac{1}{2} L \text{ (recordar que } B_D^k \leq \frac{1}{\varepsilon} M_1 \text{ por (4.35) y } \frac{1}{\tau} B_L^k \leq L \text{ por (4.32)) // .}$$

### §4.3. PROPAGACION DEL ERROR INTRODUCIDO POR EL ALGORITMO

En la sección anterior fue estudiado el esquema iterativo (4.21) como algoritmo de resolución del problema elíptico discreto que resulta al fijar la etapa en el tiempo. En consecuencia el error estimado en (4.40) presupone el conocimiento exacto de la solución discreta  $U_{n-1}$  correspondiente al paso de tiempo anterior, y que influye en la definición de la no homogeneidad  $b_n$ .

Esto induce a pensar que este algoritmo empleado para la resolución de problemas parabólicos tiene dos fuentes de error. La primera se debe al proceso iterativo y ha sido estudiada en §4.2., en cambio la segunda es originada por el conocimiento impreciso de  $U_{n-1}$ , que distorsiona

$b_n$ , y genera una sucesión de iteraciones convergente a un límite distribuido de  $U_n$ .

El propósito de esta sección es estudiar la evolución del error al aumentar los pasos en el tiempo, y proporcionar una cota teórica del error en norma  $L^\infty(\Omega_h)$  para cada problema elíptico, de modo que el error global medido en norma  $L^2$  del espacio-tiempo tenga el orden  $\varepsilon^{1/2}$  previsto en los capítulos 2 y 3.

#### 4.3.1 Control del Error

Comenzaremos observando que en lugar de resolver (4.15) para cada  $n$ ,  $1 \leq n \leq L$ , el resultado que proporciona la computadora es una sucesión  $V_n^k \in \mathbb{R}^I$ ,  $k \geq 1$ , que verifica

$$(4.42) \quad \begin{aligned} V_n^0 &= \tilde{U}_{n-1} \quad (\tilde{U}_0 = u_0^I) \\ V_n^k &= (D - \frac{1}{2}L + \frac{1}{2\varepsilon\tau} M_1)^{-1} [(\frac{1}{2}L + U + \frac{1}{2\varepsilon\tau} M_1 - \frac{1}{\tau} B_n) V_n^{k-1} + \tilde{b}_n] \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{b}_{n_i} = b_{n_i} + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} [\beta_\varepsilon(\tilde{U}_{n-1}) - \beta_\varepsilon(U_{n-1})] \omega_i \quad 1 \leq i \leq I$$

Luego para  $k = k_n$  tal que el error en norma  $l^\infty$  entre dos iteraciones sucesivas está por debajo de una cota prefijada, que nos interesa predecir, se define  $\tilde{U}_n = V_n^{k_n}$

Denotaremos con  $\varepsilon_n$ ,  $e_n \in \mathbb{R}^I$  a los vectores

$$(4.43) \quad \varepsilon_n = |U_n - \tilde{U}_n| \quad e_n = |V_n^{k_n} - V_n^{k_n-1}|$$

El siguiente resultado muestra la evolución del error  $\varepsilon_n$ .

(4.44) LEMA. Siendo  $Q = (I-P)^{-1}P$  se verifica

$$(4.45) \quad \varepsilon_n \leq \sum_{i=1}^n 2^{i-1} Q^i e_{n-i+1}, \quad 1 \leq n \leq L$$

Demostración: La prueba se hace por inducción en  $n$ . Para  $n=1$  la estimación (4.45) coincide con (4.40). Supongamos válida la tesis para  $n > 1$ , y llamemos

$$G = D - \frac{1}{2} L + \frac{1}{2\tilde{\epsilon}\tau} M_1 \quad S = U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{2\tilde{\epsilon}\tau} M_1$$

Entonces

$$U_{n+1} - \tilde{U}_{n+1} = G^{-1} \left( S - \frac{1}{\tau} B_{n+1} \right) U_{n+1} - G^{-1} \left( S - \frac{1}{\tau} B_{n+1} \right) V_{n+1}^{k-1} + G^{-1} (b_{n+1} - \tilde{b}_{n+1})$$

de donde resulta la acotación

$$\begin{aligned} |U_{n+1} - \tilde{U}_{n+1}| &\leq P |U_{n+1} - V_{n+1}^{k-1}| + G^{-1} |b_{n+1} - \tilde{b}_{n+1}| \\ &\leq P |U_{n+1} - \tilde{U}_{n+1}| + P |V_{n+1}^k - V_{n+1}^{k-1}| + G^{-1} |b_{n+1} - \tilde{b}_{n+1}| \end{aligned}$$

De aquí claramente se sigue

$$\epsilon_{n+1} \leq (I-P)^{-1} P \epsilon_{n+1} + (I-P)^{-1} G^{-1} |b_{n+1} - \tilde{b}_{n+1}|$$

De la expresión para  $\tilde{b}_{n+1}$  obtenemos

$$|b_{n+1} - \tilde{b}_{n+1}| \leq \frac{1}{\tilde{\epsilon}\tau} M |U_n - \tilde{U}_n| \quad (\tilde{\epsilon} = (1 + \epsilon^{-1})^{-1})$$

pero como de (4.32)  $L + U \geq \frac{1}{\tilde{\epsilon}\tau} M_2$ , entonces

$$\frac{1}{\tilde{\epsilon}\tau} G^{-1} M \leq 2 G^{-1} \left( U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{2\tilde{\epsilon}\tau} M_1 \right) = 2 G^{-1} . S = 2P$$

Luego volviendo a la estimación de  $\epsilon_{n+1}$  tenemos

$$\epsilon_{n+1} \leq (I-P)^{-1} P \epsilon_{n+1} + 2(I-P)^{-1} P \epsilon_n \leq \sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1} Q^i \epsilon_{n+1-i+1},$$

que es lo que queríamos demostrar // .

Nos interesa acotar el error  $E$  entre  $\{U_n\}$  y  $\{\tilde{U}_n\}$  en norma  $L^2$  del espacio-tiempo, vale decir

$$(4.46) \quad E = \left( \sum_{n=1}^L \tau \| U_n - \tilde{U}_n \|_{L^2(\Omega_n)}^2 \right)^{1/2}$$

donde cometemos el abuso de notación de emplear el mismo símbolo  $U_n$  (o  $\tilde{U}_n$ )

para indicar la función de  $V_h(g_n)$  y el vector que representa sus valores nodales.

(4.47) Nota: por simple cálculo resulta

$$E \leq \tau^{1/2} \left( \sum_{n=1}^L \langle \epsilon_n, M \epsilon_n \rangle \right)^{1/2} // .$$

Ahora es importante observar que de (4.45) y (4.47) el estudio de propagación del error que deseamos realizar requerirá del conocimiento de la norma de  $Q$  como operador en  $L^2(\mathbb{R}^I)$

(4.48) LEMA. Supongamos que la triangulación espacial es regular y satisface las hipótesis (4.10) y (4.14). Entonces existe una constante independiente de  $\epsilon, h$  y  $\tau$  tal que

$$(4.49) \quad \|Q\|_2 \leq c h^{-2}$$

Demostración: Con  $G$  y  $S$  como en (4.44) resulta  $P = G^{-1}S$  y entonces

$$I - P = I - G^{-1}S = G^{-1}(G - S) = G^{-1}A$$

Luego tenemos para  $Q$  la estimación

$$Q = (I - P)^{-1}P = A^{-1} \cdot G \cdot G^{-1} \cdot S = A^{-1}S \leq A^{-1} \cdot |A| ,$$

donde  $|A|$  indica la matriz obtenida con los módulos de las componentes de  $A$ . En esta desigualdad se ha asumido que  $S \leq |A|$ , que aplicando (4.32) se reduce a suponer  $\frac{1}{2\epsilon\tau} M_1 \leq D$ . Esta condición es válida bajo la hipótesis (4.10) y se prueba como en (4.31). Llamemos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  al mayor y menor autovalor de  $|A|$  y  $A$  respectivamente. Entonces

$$\|Q\|_2 \leq \lambda_1 \lambda_2^{-1}$$

En lo que sigue estimaremos estos dos autovalores. Por el teorema de Gerschgorin (ver [O-R], pág. 49) será

$$\lambda_1 \leq a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \leq 2a_{ii} \leq c h^{N-2} ,$$

porque  $A$  es diagonalmente dominante bajo la hipótesis (4.10). Además  $c$  es independiente de  $h$ .

Para estimar  $\lambda_2$  notemos que basta obtener una cota  $\alpha > 0$  tal que

$$\langle x, Ax \rangle_{1^2} \geq \alpha \|x\|_{1^2}^2$$

Pero

$$\langle x, Ax \rangle_{1^2} = \int_{\Omega_h} |\nabla(\sum_{i=1}^I x_i \omega_i)|^2 \geq c \int_{\Omega_h} (\sum_{i=1}^I x_i \omega_i)^2$$

donde  $C$  sólo depende de  $\Omega_h$ . Aquí se ha usado la desigualdad de Poincarè para  $\sum_i x_i \omega_i \in H_0^1(\Omega_h)$ . Sea  $K \in F_h$  un elemento finito cualquiera. Sea  $x_T$  la mayor componente de  $x = (x_i) \in \mathbb{R}^I$  en  $K$ . Entonces

$$\int_K (\sum_{i=1}^I x_i \omega_i)^2 \geq c h^N |x_K|^2 \geq c h^N \sum_{i \in K} |x_i|^2$$

donde nuevamente  $c$  es independiente de  $h$ . Luego como un nodo pertenece a un número máximo de elementos independiente de  $h$  para una malla regular, se sigue que

$$\int_{\Omega_h} (\sum_{i=1}^I x_i \omega_i)^2 = \sum_{K \in F_h} \int_K (\sum_{i \in K} x_i \omega_i)^2 \geq c h^N \sum_{K \in F_h} \sum_{i \in K} |x_i|^2 \geq c h^N \|x\|_{1^2}^2$$

Luego resulta  $\lambda_2 \geq c h^N$ , y obtenemos la estimación  $\|Q\|_2 \leq c h^{-2}$  como queríamos probar //.

De los Lemas (4.44) y (4.48) comprobamos que los errores evolucionan de manera exponencial, siendo muy notables al final ( $n=L$ ) los errores cometidos al principio del proceso. Esto sugiere que debemos que ser muy cuidadosos al iniciar el proceso, permitiéndose una pérdida de precisión al transcurrir el mismo. Por lo tanto parece razonable proponer una cota de error no uniforme en el tiempo que contemple esta situación.

Sean:

$$e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^I, \quad e_n \leq \delta^{L+1-n} e \quad \text{con } 1 \leq n \leq L$$

El problema es hallar  $\delta$ .

(4.49) TEOREMA. Supongamos que la triangulación  $F_h$  es regular y satisface las hipótesis (4.10) y (4.14). Entonces existen constantes  $c_1, c_2 > 0$  independientes de  $\epsilon, h$  y  $\tau$ , tales que si se elige

$$\begin{aligned} \delta &\leq c_1 h^2 \\ \text{resulta} \\ E &\leq c_2 \tau^{1/2} \end{aligned}$$

Demostración: de acuerdo con (4.45) tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \epsilon_n, M \epsilon_n \rangle_{12} &\leq \left\langle \sum_{i=1}^n 2^{i-1} Q^i e_{n-i+1}, M \sum_{i=1}^n 2^{i-1} Q^i e_{n-i+1} \right\rangle_{12} \\ &\leq \frac{\delta^{2(L-n)}}{2} \|M\|_2 \|e\|_{12}^2 \left( \sum_{i=1}^n (2\delta)^i \|Q\|_2^i \right)^2 \end{aligned}$$

Por el teorema de Gerschgorin (ver [O-R], pág. 49) resulta

$$\begin{aligned} \|M\|_2 &\leq \max_{1 \leq i \leq I} \left( \sum_{j=1}^I m_{ij} \right) = \max_{1 \leq i \leq I} \left( \int_{\Omega_h} \omega_i \sum_{j=1}^I \omega_j \right) \leq \max_{1 \leq i \leq I} \int_{\Omega_h} \omega_i \\ &\leq c h^N. \end{aligned}$$

Además como la malla es regular el número de nodos internos y el número de triángulos es equivalente, con constantes independientes de  $h$ . Por otra parte el número de triángulos se puede estimar como

$$|\Omega_h| = \sum_{K \in F_h} |K| \geq c h^N \cdot \text{N}^\circ \text{Elementos},$$

de donde  $\|e\|_{12}^2 = I \leq c h^{-N}$ .

En consecuencia usando el Lema (4.48), sea  $c_1 > 0$  tal que  $c_1 h^2 \|Q\|_2 \leq \frac{1}{4}$ . Tomando  $\delta \leq c_1 h^2$  resulta

$$\sum_{i=1}^n (2\delta)^i \|Q\|_2^i < 1 \quad 1 \leq n \leq L$$

y de esta expresión obtenemos

$$E^2 \leq \tau \sum_{n=1}^L \langle \epsilon_n, M \epsilon_n \rangle_{12} \leq c \tau \delta^{2L} \sum_{n=1}^L \delta^{-2n} \leq c_2 \tau$$

como queríamos demostrar // .

(4.50) Nota: dado que  $\varepsilon \sim h \sim \tau$  según (3.99), el teorema (4.49) establece un orden de convergencia  $\varepsilon^{1/2}$  tal como la teoría de los capítulos 2 y 3 // .

4.3.2 Comentarios: El problema regular ( $P_\varepsilon$ ) da origen a un problema discreto ( $P_{\varepsilon, h, \tau}$ ) que puede ser tratado en principio con los métodos desarrollados para problemas parabólicos débilmente irregulares.

Uno de los métodos más atractivos es el de "extrapolación" desarrollado por Douglas y Dupont (ver [D-D]), y más recientemente por Luskin (ver [L]). Este procedimiento requiere excesiva regularidad de la solución  $u_\varepsilon$  no siendo clara la dependencia de las constantes que intervienen en las estimaciones con respecto al parámetro de regularización  $\varepsilon$ , y además deben recalcularse las matrices de rigidez y masa al avanzar en el tiempo (ver [M-1], pág. 25).

Por otra parte están los métodos iterativos, de tipo Gauss-Seidel no lineal (ver [Z] ó [C-Z]). Requieren una regularidad mínima de la solución y parecen más precisos que los de extrapolación (ver [M-1], pág. 25). Resuelven el problema elíptico que resulta para cada paso en el tiempo y emplean una cota uniforme en el tiempo para la diferencia entre dos iteraciones espaciales sucesivas (ver [C-Z] donde la cota es  $10^{-4}$ ).

El algoritmo presentado en este capítulo es de tipo iterativo como en [Z] ó [C-Z], pero la estimación (4.40) del error del problema elíptico permite estudiar la evolución del error global para el problema parabólico. Parece natural para los algoritmos iterativos de tipo Gauss-Seidel que la cota de error no sea uniforme en el tiempo, porque los errores al comienzo son los que producen mayor distorsión del resultado. No obstante la estimación de (4.49) es difícil de implementar para mallas

muy finas y muchas etapas temporales, porque requiere para el primer paso en el tiempo un error  $\|e_1\|_1 = h^{2L}$ , que puede escapar a la precisión de una computadora estándar.

Cuando el problema estudiado tiene alguna regularidad mayor que la supuesta en este trabajo, tal como monotonía de los datos  $f$  y  $g$  en el tiempo, la experiencia numérica evidencia que no es necesario ser tan cuidadoso con la elección de los errores  $e_n$ , pudiendo proponerse un error pequeño pero uniforme como se muestra en el Capítulo 5.

#### §4.4. MONOTONIA DE LA SOLUCION DISCRETA CON RESPECTO A LOS DATOS

En esta sección veremos como el algoritmo propuesto en (4.21) permite probar, para una malla de tipo estrictamente no negativo, las propiedades de monotonía del problema continuo (ver [F-1], pág. 64) para el problema discreto. Resultados de esta naturaleza se prueban en [K], pág 506, bajo hipótesis mas restrictivas.

Vamos a suponer que los parámetros  $\epsilon, h$  y  $\tau$  se eligen en (4.31) de forma que se verifique

$$(4.51) \quad L + U \geq \frac{2}{\epsilon\tau} M_2$$

Esta condición junto con (4.35) implican que

$$0 \leq \frac{1}{\tau} J(B_n) \leq \frac{1}{2} A \quad ,$$

y entonces reemplazando  $\frac{1}{2\epsilon\tau} M_1$  por  $\frac{1}{\epsilon\tau} M_1$  en la definición (2.17) de  $T_n$  resulta  $J(T_n) \geq 0$ , que es la propiedad de base empleada en el siguiente teorema.

(4.52) TEOREMA. Supongamos que la triangulación  $F_h$  es regular y satisface (4.10) y (4.14). Sean  $\{U_n\}_{n=1}^L$  y  $\{\hat{U}_n\}_{n=1}^L$  las soluciones del problema discreto correspondientes a datos iniciales  $u_0$  y  $\hat{u}_0$ , datos de contorno  $g$  y  $\hat{g}$  y términos de generación interna  $f$  y  $\hat{f}$ . Entonces si



$$(4.53) \quad u_0 \leq \hat{u}_0 \quad g \leq \hat{g} \quad f \leq \hat{f}$$

las soluciones discretas conservan la relación de monotonía, es decir

$$(4.54) \quad U_n \leq \hat{U}_n \quad 1 \leq n \leq L$$

Demostración: la prueba es por inducción en  $n$ ,  $1 \leq n \leq L$ . Por la relación (4.51) y razonando como en la demostración de (4.36) resulta para  $1 \leq n \leq L$

$$(U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{\varepsilon\tau} M_1 - \frac{1}{\tau} B_n) x_1 \geq (U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{\varepsilon\tau} M_1 - \frac{1}{\tau} B_n) x_2, \quad \text{si } x_1 \geq x_2$$

Para  $n=1$  notemos que  $b_1 \leq \hat{b}_1$  donde  $b$ , es el vector dato definido en (4.8). Ello se debe a la hipótesis (4.53) y a que  $F_h$  satisface (4.10) que implica  $-\tilde{A} \geq 0$ . Como  $(D - \frac{1}{2} L + \frac{1}{\varepsilon\tau} M_1)^{-1} \geq 0$  por ser una M-matriz, tenemos que las iteraciones  $U_1^k$  y  $\hat{U}_1^k$  ( $k \geq 0$ ) verifican  $U_1^0 = u_0^I \leq \hat{u}_0^I = \hat{U}_1^0$ ,

$$\begin{aligned} U_1^{k+1} &= (D - \frac{1}{2} L + \frac{1}{\varepsilon\tau} M_1)^{-1} [(U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{\varepsilon\tau} M_1 - \frac{1}{\tau} B_1) U_1^k + b_1] \\ &\leq (D - \frac{1}{2} L + \frac{1}{\varepsilon\tau} M_1)^{-1} [(U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{\varepsilon\tau} M_1 - \frac{1}{\tau} B_1) \hat{U}_1^k + \hat{b}_1] = \hat{U}_1^{k+1}, \end{aligned}$$

claramente por inducción en  $k$ . Por (4.38), que aún es válido con el reemplazo de  $\frac{1}{2\varepsilon\tau} M_1$  por  $\frac{1}{\varepsilon\tau} M_1$ , sabemos que  $U_1^k$  y  $\hat{U}_1^k$  convergen en  $l^\infty$  a  $U_1$  y  $\hat{U}_1$  respectivamente. Entonces  $U_1 \leq \hat{U}_1$  lo que prueba la inducción para  $n=1$ .

Supongamos por hipótesis inductiva que  $U_n \leq \hat{U}_n$  para  $n \geq 1$ . Como  $B_{n+1}$  es isótono (ver (4.34)) por (4.53) y (4.10) resulta  $b_{n+1} \leq \hat{b}_{n+1}$ . Entonces las iteraciones  $U_{n+1}^k$  y  $\hat{U}_{n+1}^k$  ( $k \geq 0$ ) verifican  $U_{n+1}^0 = U_n \leq \hat{U}_n = \hat{U}_{n+1}^0$ ,

$$\begin{aligned} U_{n+1}^{k+1} &= (D - \frac{1}{2} L + \frac{1}{\varepsilon\tau} M_1)^{-1} [(U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{\varepsilon\tau} M_1 - \frac{1}{\tau} B_{n+1}) U_{n+1}^k + b_{n+1}] \\ &\leq (D - \frac{1}{2} L + \frac{1}{\varepsilon\tau} M_1)^{-1} [(U + \frac{1}{2} L + \frac{1}{\varepsilon\tau} M_1 - \frac{1}{\tau} B_{n+1}) \hat{U}_{n+1}^k + \hat{b}_{n+1}] = \hat{U}_{n+1}^{k+1} \end{aligned}$$

que puede probarse por inducción en  $k$ . Entonces por la convergencia en  $l^\infty$  de  $U_{n+1}$  y  $\hat{U}_{n+1}$  a  $U_{n+1}$  y  $\hat{U}_{n+1}$  respectivamente se sigue que

$U_{n+1} \leq \hat{U}_{n+1}$  y con esto queda demostrada la desigualdad (4.54) // .

#### §4.5. OTRAS PROPIEDADES DE LA SOLUCION DISCRETA

En esta sección veremos que la solución discreta está uniformemente acotada en  $L^\infty(Q)$  y a partir de esta propiedad obtendremos una estimación de error para las funciones entalpía.

##### 4.5.1 Acotación Uniforme en $L^\infty(Q_h)$

Vamos a probar que la solución discreta hereda la propiedad (2.25) de la solución continua. La idea consiste en proponer una familia de funciones auxiliares  $\{\hat{U}_n\}_{n=1}^L$  en las hipótesis de (4.52) con respecto a  $\{U_n\}_{n=1}^L$  y luego aplicar el resultado.

Sea  $\sigma(x) = \|x\|_2^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ . Claramente la función  $\sigma$  es subarmónica ( $\Delta_x \sigma = 2N > 0$ ). El siguiente resultado muestra que su interpolante de Lagrange  $\sigma^I$  conserva esta propiedad.

(4.55) LEMA. Supongamos que  $F_h$  es regular y satisface las hipótesis (4.10) y (4.14). Entonces existen constantes positivas  $\delta_0, \delta_1$  tales que

$$-\delta_0 \int_{\Omega_h} \omega_i \leq \int_{\Omega_h} \nabla \sigma^I \cdot \nabla \omega_i \leq -\delta_1 \int_{\Omega_h} \omega_i \quad 1 \leq i \leq I$$

Demostración: ver [B-C] // .

(4.56) TEOREMA. En las mismas hipótesis de (4.55) existe una constante  $c > 0$  independiente de  $\epsilon, h$  y  $\tau$  tal que

$$\max_{1 \leq n \leq L} \|U_n\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq c$$

Demostración: consideremos la función

$$v(x) = c_1 - c_2 \sigma(x)$$

con  $c_1, c_2 > 0$  constantes a determinar. Definiendo  $\hat{U}_n = v^I$ ,  $0 \leq n \leq L$ , como  $\hat{U}_n$  es independiente de  $n$  eligiendo  $c_1$  y  $c_2$  suficientemente

grandes (en función de los datos  $u_0, f$  y  $g$ ) se verifica

$$A \hat{U}_n + \frac{1}{\tau} B_n \hat{U}_n = \hat{b}_n \quad 1 \leq n \leq L$$

con  $\hat{U}_0 \geq u_0^I$  y  $\hat{b}_n \geq b_n$ . Entonces como en (4.52) resulta

$$U_n \leq \hat{U}_n = v^I \quad 1 \leq n \leq L$$

Análogamente se obtiene que  $-v^I \leq U_n$ , de donde resulta

$$|U_n| \leq v^I \quad 1 \leq n \leq L$$

y como  $v^I$  es claramente acotada uniformemente en  $\epsilon, h$  y  $\tau$  se sigue la tesis // .

#### 4.5.2 Estimación de $\max_{1 \leq n \leq L} \|\beta_\epsilon(u_\epsilon^n) - \beta_\epsilon(U_n)\|_{H^{-1}(\Omega)}$

Seguidamente obtendremos una versión discreta de la estimación (2.63), con una demostración que sigue la idea general de aquella.

(4.57) TEOREMA. Supongamos que se satisfacen las hipótesis (2.1) a (2.3), (2.5) a (2.8) y que  $F_h$  es una malla regular que verifica (4.10) y (4.14). Entonces existe una constante  $c > 0$  independiente de  $\epsilon, h$  y  $\tau$ , tal que

$$(4.58) \quad \max_{1 \leq n \leq L} \|\beta_\epsilon(u_\epsilon^n) - \beta_\epsilon(U_n)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c \epsilon^{1/2},$$

si  $h \sim \epsilon \sim \tau$  de acuerdo con (1.99) .

Demostración: Observemos que si en la prueba de (3.74) proponemos como función de prueba

$$\psi_n = \tau \sum_{k=n}^{n_0} (U_k - Y_k), \quad 1 \leq n \leq n_0 < L$$

obtenemos una estimación

$$\int_{\Omega_h} \left( \tau \sum_{k=1}^{n_0} \nabla(U_k - Y_k) \right)^2 \leq c \epsilon$$

supuesta la relación  $h \sim \epsilon \sim \tau$

Sean  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  y  $\phi_h$  su proyección  $H_0^1$  sobre el subespacio

$V_h(0)$  , i.e.

$$\int_{\Omega_h} \nabla(\tilde{\phi} - \phi_h) \cdot \nabla \psi_h = 0 \quad ,$$

para toda  $\psi_h \in V_h(0)$  . Entonces procediendo como en (B.24) y (B.12) (notar que  $\phi = 0$  en un entorno de  $\partial\Omega$ ) resulta

$$\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq c h \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

donde  $c$  es una constante sólo dependiente de  $\Omega$  . Tomando  $\phi_h$  como función de prueba en (3.35) y (3.70), restando ambas ecuaciones y sumando luego en  $n$  ,  $1 \leq n \leq n_0$  , obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} (\beta_\epsilon(U_{n_0}) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon^{n_0})) \cdot \phi_h &= \int_{\Omega_h} \left( \tau \sum_{k=1}^{n_0} \nabla(Y_k - U_k) \right) \cdot \nabla \phi_h \\ &+ \int_{\Omega_h} (\beta_\epsilon(u_0^I) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_0)) \phi_h \\ &+ \int_{\Omega_h \setminus \Omega} (\beta_\epsilon(\tilde{u}_0) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon^n)) \phi_h \\ &+ \int_{\Omega_h \setminus \Omega} \left( \tau \sum_{k=1}^{n_0} f_k \right) \phi_h = \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV} \end{aligned}$$

Para acotar los sumandos II, III y IV razonamos como en (3.74), y para I aplicamos la estimación enunciada inicialmente, resultando

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} (\beta_\epsilon(U_{n_0}) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon^{n_0})) \phi_h &\leq \left\| \tau \sum_{k=1}^{n_0} \nabla(Y_k - U_k) \right\|_{L^2(\Omega_h)} \cdot \|\nabla \phi_h\|_{L^2(\Omega_h)} \\ &+ (\|\beta_\epsilon(u_0^I) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_0)\|_{L^2(\Omega_h)}) \\ &+ \|\beta_\epsilon(\tilde{u}_0) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon^n)\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \\ &+ \left( \left\| \tau \sum_{k=1}^{n_0} f_k \right\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \right) \|\phi_h\|_{L^2(\Omega_h)} \\ &\leq c \epsilon^{1/2} \|\phi_h\|_{H_0^1(\Omega_h)} \end{aligned}$$

$$\leq c \varepsilon^{1/2} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

con  $c$  independiente de  $\varepsilon$ ,  $h$ ,  $\tau$  y  $n_0$ . Luego

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\beta_{\varepsilon}(U_{n_0}) - \beta_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}^{n_0})) \phi &= \int_{\Omega_h} (\beta_{\varepsilon}(U_{n_0}) - \beta_{\varepsilon}(\tilde{u}_{\varepsilon}^{n_0})) (\phi - \phi_h) \\ &+ \int_{\Omega_h} (\beta_{\varepsilon}(U_{n_0}) - \beta_{\varepsilon}(\tilde{u}_{\varepsilon}^{n_0})) \phi_h \\ &+ \int_{\Omega \setminus \Omega_h} (\beta_{\varepsilon}(U_{n_0}) - \beta_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}^{n_0})) \phi \\ &\leq c(h + \varepsilon^{1/2}) \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

donde hemos usado la acotación uniforme en  $L^{\infty}(\Omega_h)$  obtenida en (4.56), de modo que  $c$  es independiente de  $\varepsilon$ ,  $h$ ,  $\tau$  y  $n_0$ .

Como  $n_0$  es arbitrario,  $1 \leq n_0 \leq L$ , la estimación anterior implica la tesis // .

(4.59) Nota: Naturalmente (4.58) es válida bajo las hipótesis de (3.82) si los parámetros se condicionan como en (3.100), i.e.

$$h \sim \varepsilon^{3/4}, \quad \tau \sim \varepsilon,$$

y también es válida para el 2º esquema discreto // .

(4.60) Nota: si la solución  $u$  es no degenerada (ver (2.62)) entonces la estimación (4.58) resulta

$$\max_{1 \leq n \leq L} \|\beta_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}^n) - \beta_{\varepsilon}(U_n)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c \varepsilon,$$

para la relación  $h \sim \varepsilon$ ,  $\tau \sim \varepsilon^{3/2}$  (ver (§3.4.3)) // .

## CAPITULO 5

### EXPERIMENTOS NUMERICOS

El objetivo de este capítulo es presentar en  $R^2$  varios ejemplos de problemas de transmisión de calor con cambio de fase que poseen solución exacta elemental y que son empleados para comprobar las relaciones teóricas entre los parámetros  $\epsilon, h$  y  $\tau$  en función del orden de convergencia  $\epsilon^{1/2}$  previsto en el Capítulo 3, y la eficiencia del algoritmo para la resolución de problemas parabólicos.

#### §5.1. COMENTARIOS GENERALES

##### 5.1.2 Fórmula de Cuadratura

Dado que uno de los motivos de la experiencia numérica es la verificación de las estimaciones de error del Capítulo 3, y teniendo en cuenta que no es clara la evolución de los errores debidos a la integración numérica en problemas parabólicos, se prefirió realizar un cálculo exacto de las integrales que definen las diversas componentes del operador  $T_n$  (ver (4.17)), aún a costa de la mayor complejidad del programa y de la necesidad de un tiempo de cómputo mayor.

Es interesante observar que para la relación  $\epsilon \sim h$  y para soluciones no degeneradas, el conjunto

$$A_{\epsilon}^n = \{x \in \Omega_h : |U_n(x)| < \epsilon\} \quad 1 \leq n \leq L ,$$

debería ser una banda de ancho  $ch$  alrededor de la frontera libre discreta  $F_{\epsilon}^n$  y efectivamente esto es lo que resulta en la experiencia. Más aún el número de elementos finitos incluidos por esta banda en el sentido transversal es pequeño dependiendo de la pendiente de la solución exacta de la frontera libre  $F_{t_n}$ . Por ejemplo si la pendiente de  $u^+$  es 1 es razonable pensar que el crecimiento de  $U_n$  desde 0 a  $\epsilon$  se producirá

en un solo elemento finito (ver ejemplos que siguen). Luego la función  $\beta_\epsilon(U_n)$  tiene una variación muy brusca en un mismo triángulo por lo que una imprecisa fórmula de cuadratura puede introducir errores que distorsionen sustancialmente la diferencia entre las soluciones continua y discreta. Por ello se ha optado por una fórmula exacta de cuadratura.

Notemos que si  $T$  es un triángulo en  $\mathbb{R}^2$  con  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) los puntos medios de cada lado, entonces

$$(5.1) \quad \int_T f \approx \frac{1}{3} |T| (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$$

es una fórmula de cuadratura exacta para polinomios  $f$  de grado 2 (ver [C-1], pág. 183).

Para  $\beta_\epsilon(s) = s + \chi_\epsilon(s)$  definida en (2.19), la función  $\beta_\epsilon(U_n)$  es seccionalmente lineal, puesto que  $U_n \in V_h(g_n)$  es lineal en cada elemento finito. Luego todo triángulo  $K \in F_h$  puede descomponerse en un número no mayor de cinco triángulos tales que la función  $f_i = \beta_\epsilon(U_n)\omega_i$  ( $1 \leq i \leq I$ ,  $1 \leq n \leq L$ ) es un polinomio de 2º grado en cada uno de ellos, siendo  $\omega_i$  un miembro genérico de la base de funciones del espacio discreto (ver (3.11)). Por otra parte observemos que el algoritmo  $U_n^{k+1} = T_n U_n^k$  del Capítulo 4 requiere el cálculo de  $B_n U_n^k$  con  $B_n$  definido por (3.12) y  $U_n^k$  el resultado de la iteración anterior, vale decir un dato para esta nueva iteración. El programa con el cual han sido probados los ejemplos realiza el cálculo de  $B_n U_n^k$  con el criterio recién enunciado.

Las integrales que definen las matrices de rigidez  $A$  y de masa  $M$  y los vectores  $F_n$  son más simples de evaluar ya que en cada triángulo se integran polinomios de 2º grado y (5.1) es aplicable directamente.

(5.2) Nota: en los ejemplos las densidades de generación interna  $f$  son funciones regulares excepto en la frontera libre donde tienen una discontinuidad

finita. Se elige en (3.41)  $\tilde{f} = f^I$  vale decir lineal en cada elemento finito (si un nodo pertenece a la frontera libre entonces la elección de la ordenada de  $f$  es arbitraria) // .

### 5.1.2 Sobre las Hipótesis (2.1), (3.25) y (3.26)

La condición (2.1) que impone  $\partial\Omega \in C^2$  no es estrictamente necesaria para desarrollar la teoría del Capítulo 2, bastando con  $\partial\Omega$  Lipschitz. En efecto la prueba de existencia de solución se realiza por aproximación de  $\Omega$  (ver [LSU], pág. 457) y la estimación a priori de (2.42) que no requiere regularidad de  $\partial\Omega$ , puede emplearse para la prueba de las estimaciones de error.

Por otra parte la hipótesis (2.1) se usa en el Apéndice B y el Capítulo 3 al realizar la aproximación de un problema elíptico (ver (B.2) para el que resulta  $u \in H^2(\Omega)$ ). Esta situación aún es válida si el dominio  $\Omega$  es convexo (ver [C-1], pág. 138) como ocurre en todos los ejemplos que siguen con excepción del segundo y para los cuales será  $\Omega = \Omega_h$ . Este último en cambio corresponde a un dominio de forma anular para el que podemos suponer que  $\Omega$  es ligeramente diferente al dibujado, con  $\partial\Omega \in C^2$ ,  $\Omega \neq \Omega_h$  y aplicar la teoría del Apéndice B.

Es importante observar aquí que la forma anular del dominio  $\Omega$  supuesta en el Capítulo 2 no es esencial en el mismo ni tampoco en la prueba de las estimaciones de error del Capítulo 3. Sólo permite asegurar que el problema en estudio es de dos fases en todo el período  $(0, T)$ .

La hipótesis (3.25) de regularidad del dato de contorno  $g$  es satisfecha por todos los ejemplos, ya que son funciones muy suaves en  $x$  y  $t$  al permanecer la frontera libre lejos del borde.

En cambio la condición (3.26) sobre  $f$  no es válida en ningún caso, por ser  $f$  discontinua en la frontera libre. No obstante las esti



maciones de error y relaciones entre  $\epsilon, h$  y  $\tau$  se mantienen ya que puede razonarse como sigue.

(5.3) LEMA. Sean  $f \in L^\infty(Q)$  tal que  $f_t \in L^2(Q^+)(L^2(Q^-))$  y  $F$  una superficie regular, entonces existe una constante  $c > 0$  independiente de  $\epsilon, h$  y  $\tau$  tal que

$$(5.4) \quad \|f(\cdot, t_1) - f(\cdot, t_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq c |t_1 - t_2|^{1/2}$$

Demostración: Como se supone que la frontera libre  $F$  es una superficie regular, digamos descripta por una función  $\phi$  (ver (1.23) y (1.24)), resulta que el subconjunto de  $\Omega$  delimitado por las curvas  $F_{t_1}$  y  $F_{t_2}$ , que llamamos  $\Lambda_{t_1, t_2}$ , verifica

$$|\Lambda_{t_1, t_2}| \leq c |t_1 - t_2|$$

con  $c$  independiente de  $t_1$  y  $t_2$ ,  $0 \leq t_1, t_2 \leq T$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|f(\cdot, t_1) - f(\cdot, t_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega \setminus \Lambda_{t_1, t_2}} |f(\cdot, t_1) - f(\cdot, t_2)|^2 \\ &\quad + \int_{\Lambda_{t_1, t_2}} |f(\cdot, t_1) - f(\cdot, t_2)|^2 \\ &\leq c |t_1 - t_2|, \end{aligned}$$

donde hemos usado la regularidad de  $f$  en  $\Omega \setminus \Lambda_{t_1, t_2}$  y la acotación anterior. Con esto queda probado (5.4) // .

(5.5) LEMA. Supongamos que los datos satisfacen las hipótesis (2.1) a (2.3), (2.5) a (2.8),  $f \in W_\infty^{1,1}(Q^+)(W_\infty^{1,1}(Q^-))$  y  $F$  es una superficie regular. Entonces si  $(U_n)_{n=1}^L$  es la solución del problema discreto  $(P_{\epsilon, h, \tau})$  para  $f_n = f^I(\cdot, t_n)$ ,  $1 \leq n \leq L$ , existe una constante  $c > 0$  sólo dependiente de los datos, pero no de  $\epsilon, h$  ó  $\tau$ , tal que

$$(5.6) \quad \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega_h} (\beta_\epsilon(U_n) - \beta_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon^n))(U_n - \tilde{u}_\epsilon^n) \leq c \epsilon,$$

para la relación  $\epsilon \sim h \sim \tau$ .

Demostración: Sea como en (3.88) la función auxiliar  $W(\cdot, t)$  que resuelve el mismo problema pero con  $\hat{f}_n = \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\cdot, t) dt$  en lugar de  $f_n = f^I(\cdot, t_n)$ .

Claramente (3.90) y (3.92) permanecen ciertas. Luego para probar (5.6) hacemos la diferencia de las ecuaciones que satisfacen  $W_n$  y  $U_n$  resultando una expresión similar a (3.76) con la novedad del término  $I = \sum_{n=1}^L \tau \int_{\Omega} (f_n - \hat{f}_n) \cdot \psi_n$ .

Elegimos la misma función de prueba que en (3.74) y acotamos como en ese teorema todos los sumandos excepto  $I$  para el cual tenemos:

$$\begin{aligned} I &\leq c \left( \sum_{n=1}^L \tau \| f_n - \hat{f}_n \|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{n=1}^L \tau \| U_n - W_n \|_{L^2(\Omega_n)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq [A^{1/2} + c(\frac{h^2}{\epsilon^{1/2}} + \tau)] \left[ \left( \sum_{n=1}^L \tau \| f^I(\cdot, t_n) - f(\cdot, t_n) \|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{n=1}^L \tau \| f(\cdot, t_n) - \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\cdot, t) dt \|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right] \\ &\leq [A^{1/2} + c(\frac{h^2}{\epsilon^{1/2}} + \tau)] (h^{1/2} + \tau^{1/2}) \end{aligned}$$

donde hemos usado (3.92), (3.47) y (5.4). La estimación obtenida conserva el orden de convergencia  $\epsilon$  para la relación  $\epsilon \sim h \sim \tau$  como queríamos probar // .

(5.7) Nota: naturalmente la hipótesis de regularidad de  $F$  es muy restrictiva y no forma parte de la teoría general de aproximación de los Capítulos 2 y 3. No obstante es una condición válida para los ejemplos que se presentan luego, y necesaria porque permite manejar soluciones exactas elementales y por lo tanto muy simples de programar. En efecto las soluciones exactas  $u$  han sido construidas con funciones elementales previendo un salto en sus derivadas primeras ubicado sobre la curva de nivel cero (frontera libre) que respete la ecuación (1.24) de movimiento

de la interfase, obteniéndose  $f$  de :  $f = -\Delta_x u + u_t //$ .

### 5.1.3 Sobre la Malla de Elementos Finitos

En todos los casos los dominios  $\Omega$  han sido cubiertos por una malla regular formada por elementos triangulares casi equiláteros. Esto asegura que la malla es estrictamente no negativa y satisface una hipótesis inversa (ver (4.10) y (4.11)) y en consecuencia es aplicable la teoría del Capítulo 4. Además la ubicación de los nodos es independiente de la forma y posición de la frontera libre.

Para cada ejemplo se presentan varios cálculos correspondientes a mallas e intervalos temporales de distinto tamaño, pero conservando la relación  $h = c_1 \epsilon$ ,  $\tau = c_2 \epsilon$ , con  $c_1, c_2 > 0$  fijas en cada ejemplo. Al afinar la malla espacial se mantiene la forma de los elementos asegurándose así que las variaciones de los errores son únicamente debidas al cambio del tamaño.

El número de elementos finitos así como el de iteraciones temporales han sido limitados en función del tiempo de cómputo necesario y de la evolución de errores debidos al algoritmo de resolución. No obstante los ejemplos muestran un orden de convergencia algo mejor que el previsto teóricamente.

Se ha fijado la cota uniforme  $10^{-5}$  como error entre iteraciones espaciales sucesivas en norma  $l^\infty$  y en el Ejemplo 1 se muestra un cálculo con cota de error no uniforme según fue estudiado en §4.3.

### 5.1.4 Notación IV

(5.8)  $\epsilon$   $2/\sqrt{5}$  veces el parámetro de regularización

(5.9)  $h$   $2/\sqrt{5}$  veces el tamaño de la malla espacial

(5.10)  $\tau$  tamaño de la partición temporal

- (5.11) T lapso total de tiempo del fenómeno.
- (5.12) IT número de iteraciones temporales.
- (5.13) IX número promedio de iteraciones espaciales.
- (5.14) E error en norma  $L^2(Q)$  entre las soluciones continua  $u$  y discreta  $u_{\epsilon, h, \tau}$ .
- (5.15) NN número de nodos.
- (5.16) NE número de elementos finitos.
- (5.17) CPU tiempo de cálculo en segundos.
- (5.18) Nota: los resultados que se exhiben han sido obtenidos en una computadora VAX 11/780 - VMS (versión 3) trabajando con simple precisión // .

## §5.2. EJEMPLOS

### 5.2.1 Ejemplo 1: Solución Radialmente Simétrica

Sean  $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$  ,  $T = 0.4$

$$u^+(x, y, t) = 2.5 \left( (x-0.15)^2 + y^2 - \frac{1}{3} e^{-3t} \right)$$

$$u^-(x, y, t) = (x-0.15)^2 + y^2 - \frac{1}{3} e^{-3t} \quad ,$$

las funciones  $u_0$  y  $g$  son las que resultan de evaluar en  $\Omega \times \{0\}$  ,  $\partial\Omega \times (0, T)$  y  $f$  se obtiene por aplicación del operador  $Hu = -\Delta_x u + u_t$  . Notar que la condición (1.24) se satisface en la interfase ( $\lambda = 2$ ,  $k = 1$ ).

Este ejemplo es una modificación del presentado en [C-2]. Dada la simetría del problema en la variable  $y$  se trabaja en  $\Omega = (-1, 1) \times (0, 1)$  con condición de Neumann nula en  $\{y = 0\}$  .

Si bien la solución es radialmente simétrica el problema es claramente bidimensional, no sólo por la forma del dominio  $\Omega$  sino también por la ubicación relativa de éste y la solución.

En la Tabla 5-1 se muestran los resultados obtenidos para una cota de error uniforme  $10^{-5}$ . Luego se repitió la experiencia pero con una

cota de error variable con la iteración temporal tal como fue estudiado en §4.3 y los resultados se resumen en la tabla 5.2.

En la Fig. 5.1 se ha dibujado la frontera libre discreta para las iteraciones temporales 1, 4 y 8 y en la Fig. 5.2 se graficó la solución discreta sobre el conjunto  $\{y=0\}$  para las mismas iteraciones (Caso 3).

h	$\epsilon$	$\tau$	IT	IX	NN	NE	CPU	E
0.25	0.25	0.1	4	24	47	68	11	$1.765 \cdot 10^{-2}$
0.2	0.2	0.08	5	31	69	105	22	$1.375 \cdot 10^{-2}$
0.125	0.125	0.05	8	51	157	264	109	$1.005 \cdot 10^{-2}$
0.1	0.1	0.04	10	64	236	410	233	$0.685 \cdot 10^{-2}$
0.08333	0.08333	0.03333	12	75	331	588	432	$0.622 \cdot 10^{-2}$

Tabla 5-1: Cota de Error Uniforme  $10^{-5}$

h	$\epsilon$	$\tau$	IT	IX	NN	NE	CPU	$\delta$	E
0.25	0.25	0.1	4	14	47	68	12	0.05	$2.658 \cdot 10^{-2}$
0.2	0.2	0.08	5	26	69	105	31	0.032	$2.146 \cdot 10^{-2}$
0.125	0.125	0.05	8	104	157	264	329	0.0125	$1.449 \cdot 10^{-2}$

Tabla 5-2: Cota de Error Variable (Se toma  $\delta^{IT-k}$  en la iteración k-ésima en el tiempo).

(5.19) Nota: puede observarse que el error disminuye más rápidamente que  $\epsilon^{1/2}$ , y en particular la dependencia en la Tabla 5-2 es  $E \sim \epsilon$ , como corresponde a soluciones no degeneradas (ver (2.62)). Por otra parte el criterio de error no uniforme no da resultados substancialmente distintos del otro en el rango de aplicación empleado: ha sido utilizado con precisión doble //.

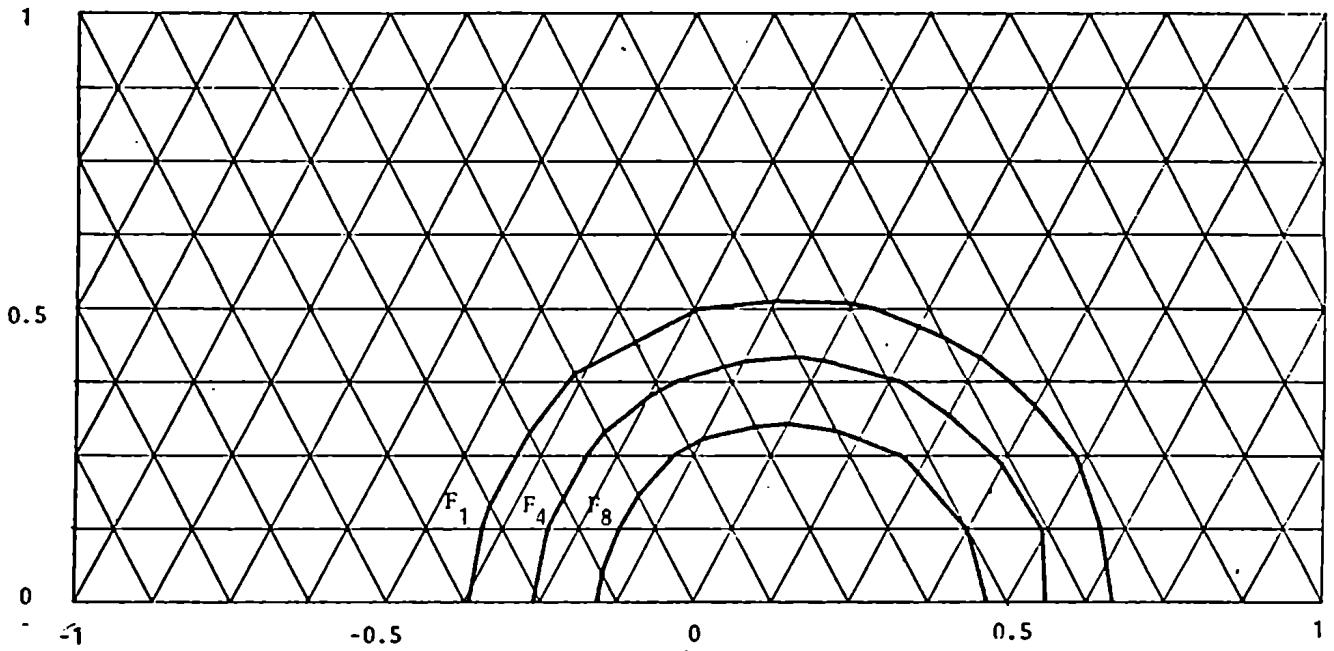


Fig 5.1: Frontera Libre Discreta para las iteraciones temporales '1,4 y 8.

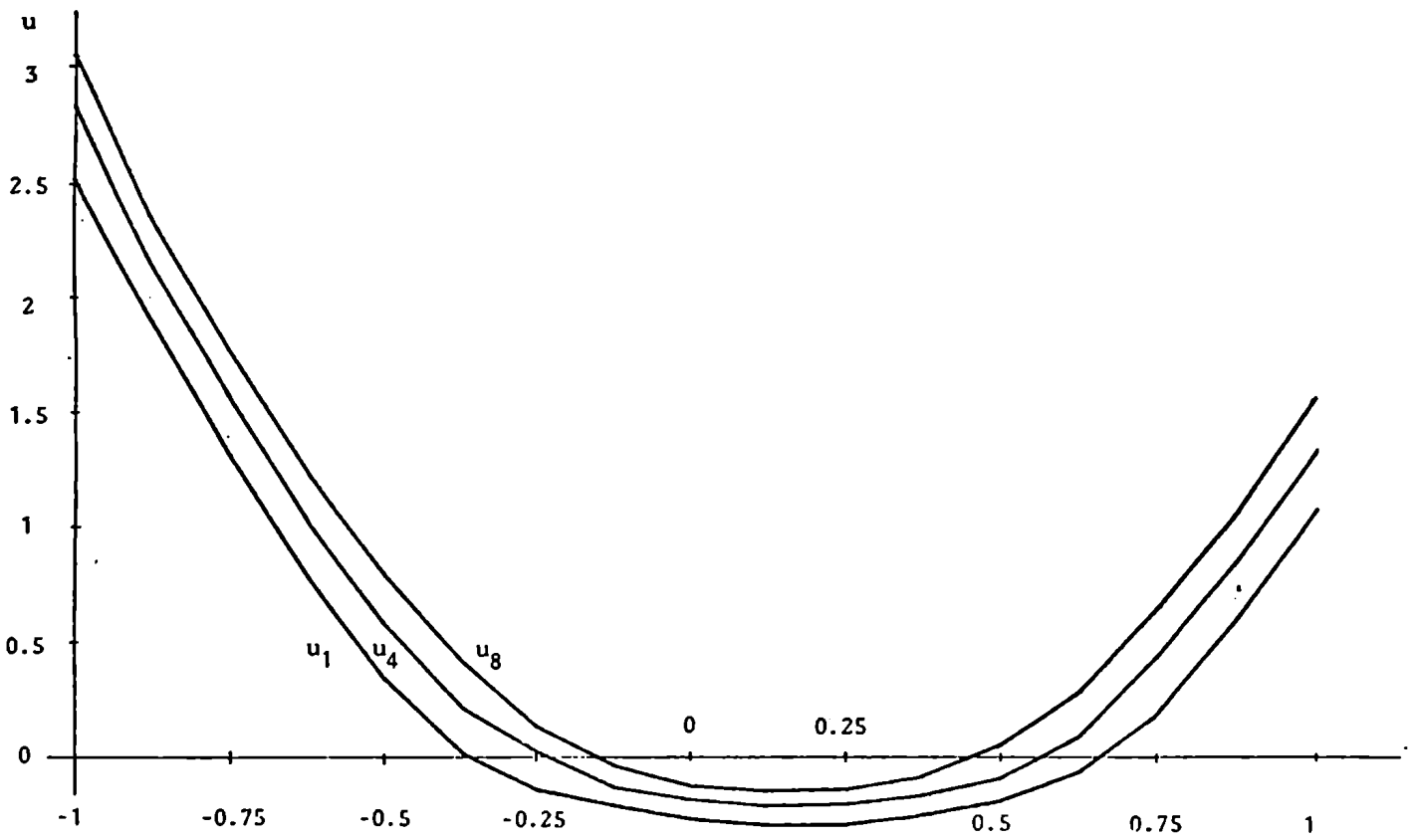


Fig 5.2: Solución Discreta para  $y=0$  e iteraciones temporales 1,4 y 8.

5.2.2 Ejemplo 2: Solución Radialmente Simétrica

Sean  $\Omega = (-1.2, 1.2) \times (-1.2, 1.2) \setminus (0, 0.4) \times (-0.4, 0.4)$ ,  $T = 0.36$

$$u^+(x,y,t) = 2[((x - 0.1)^2 + y^2)^{1/2} + 0.25 t - 1]$$

$$u^-(x,y,t) = 1.5[((x - 0.1)^2 + y^2)^{1/2} + 0.25 t - 1]$$

y las funciones  $u_0$ ,  $g$  y  $f$  se obtienen procediendo como en el Ejemplo 1. Por simetría respecto de la variable  $y$  se toma  $\Omega = (-1.2, 1.2) \times (0, 1.2) \setminus (0, 0.4) \times (0, 0.4)$  y se impone condición de Neumann cero en  $\{y = 0\}$ .

h	$\epsilon$	$\tau$	IT	IX	NN	NE	CPU	E
0.2	0.2	0.06	6	21	93	144	46	$3.382 \cdot 10^{-3}$
0.13333	0.13333	0.04	9	34	192	320	158	$1.961 \cdot 10^{-3}$
0.1	0.1	0.03	12	44	321	560	389	$1.380 \cdot 10^{-3}$

Tabla 5-3: Cota de Error Uniforme  $10^{-5}$

En la Fig. 5.3 se ha dibujado la frontera libre discreta para el tercer caso y la última iteración temporal, teniendo un excelente acuerdo con la frontera libre real: las discrepancias resultan incluidas en los errores del dibujo. Además se ha graficado la zona  $\{x : |U(x)| < \epsilon\}$  que resulta una banda de ancho aproximadamente  $2h$  como habíamos indicado en §5.1.2.

(5.20) Nota: el error disminuye ligeramente más rápido que  $\epsilon$ , orden de convergencia probado para soluciones no degeneradas (ver (2.62)) // .

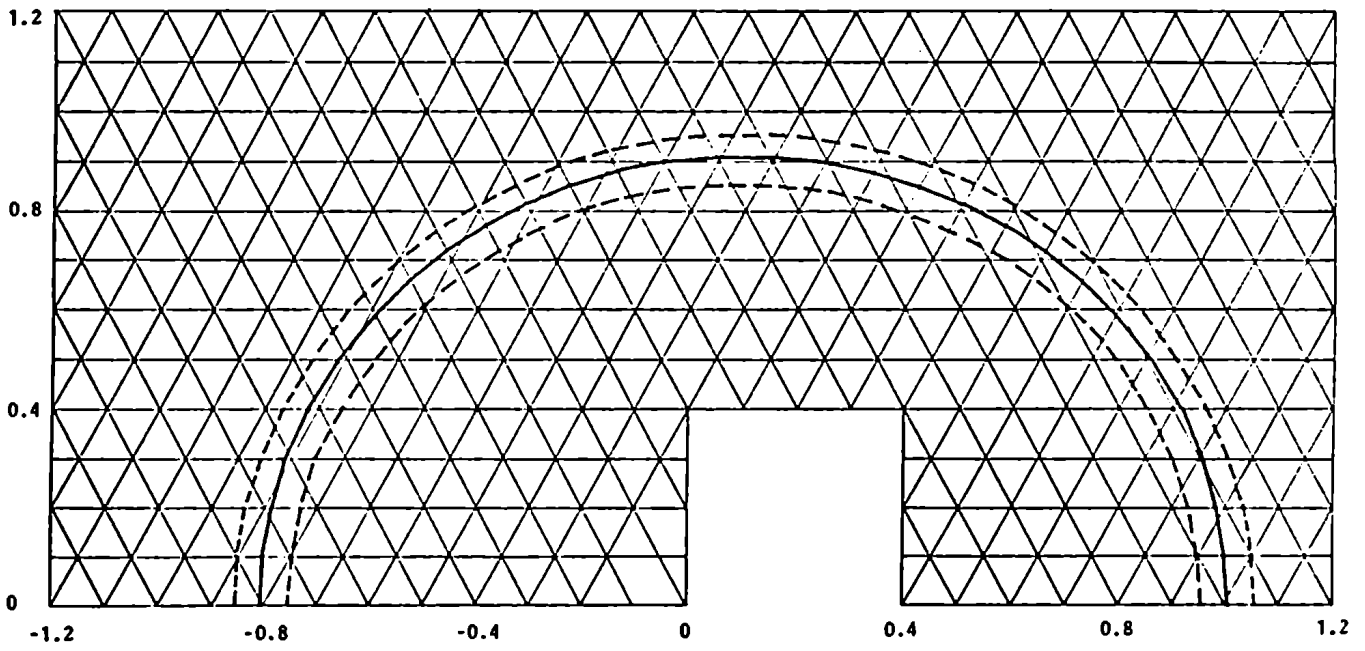


Fig 5.3: Frontera Libre Discreta y Curvas Discretas de Nivel  $\epsilon$  para la iteración temporal 12 (caso3)

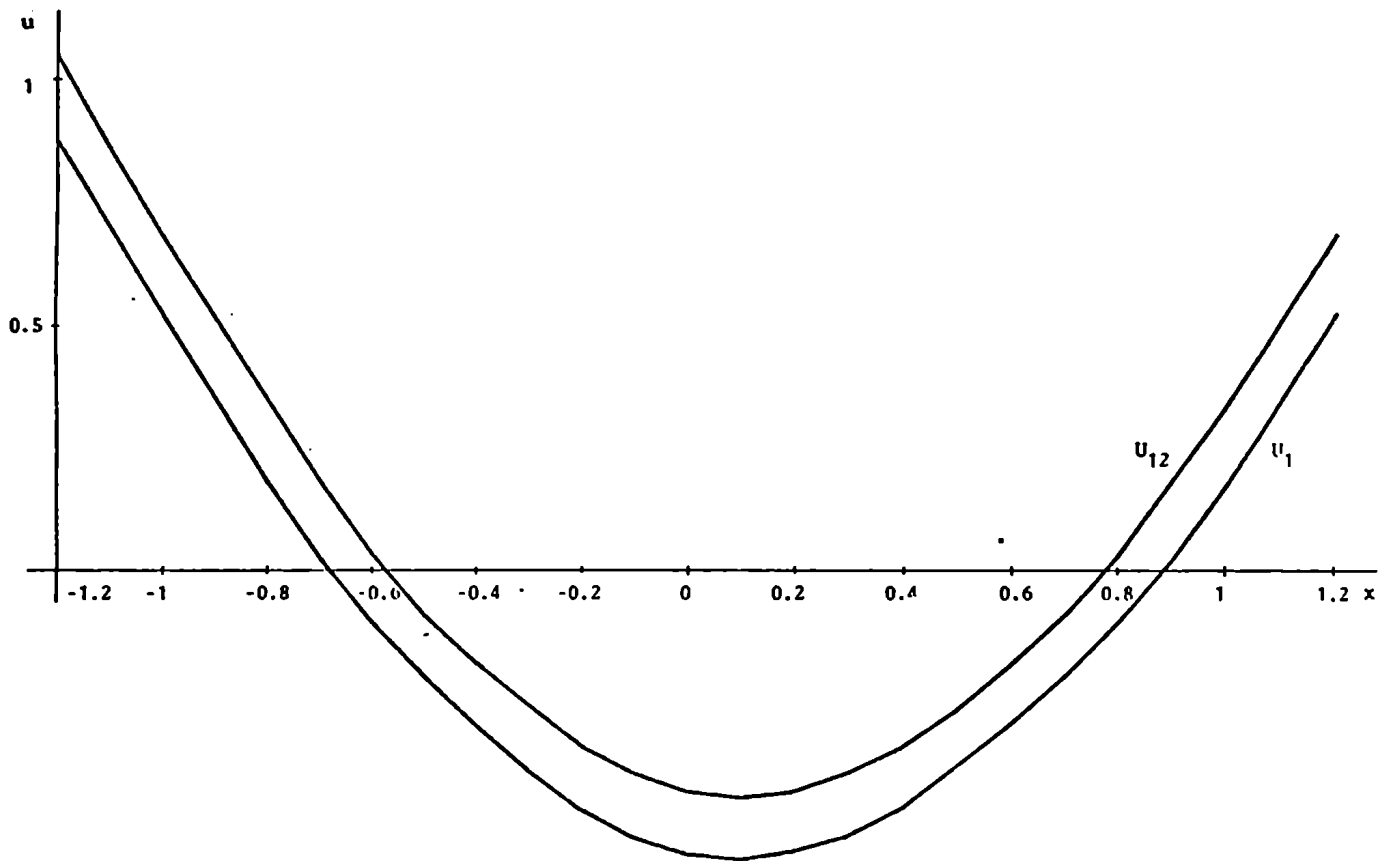


Fig 5.4: Soluciones Discretas para  $\gamma=0.6$  e iteraciones temporales 1 y 12 ( caso 3 ).



### 5.2.3 Ejemplo 3: Problema Degenerado

Consideremos  $\Omega = (-1.2, 1.2) \times (0, 0.1)$ ,  $T = 0.4$ , y el problema unidimensional siguiente:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= 2t^2 - x^2 & , \text{ si } |x| < \sqrt{2}t \\ &= 0 & , \text{ si } \sqrt{2}t \leq |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(t+1) \\ &= -3\left(|x| - \frac{1}{\sqrt{2}}(t+1)\right)^2 & , \text{ si } |x| > \frac{1}{\sqrt{2}}(t+1) \end{aligned}$$

Tal como hemos indicado en §2.4.4 es necesario disponer de la entalpía  $b(x,y,t)$  para que un problema degenerado quede completamente descrito. Sea

$$\begin{aligned} (5.21) \quad b(x,y,t) &= 1 + 2t^2 - x^2 & , \text{ si } |x| < \sqrt{2}t \\ &= -2\sqrt{2}|x| + 2t + 1 & , \text{ si } \sqrt{2}t \leq |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(t+1) \\ &= -1 - 3\left(|x| - \frac{1}{\sqrt{2}}(t+1)\right)^2 & , \text{ si } |x| > \frac{1}{\sqrt{2}}(t+1) \end{aligned}$$

que es una posible función entalpía asociada a  $u$ . Pero en (2.91) hemos probado que la entalpía es única, en consecuencia basta verificar que el par  $(u,b)$  resuelve el problema (2.17). Definimos  $f$  como la función que resulta de aplicar  $Hu = -\Delta_x u + u_t$  en  $\{|x| < \sqrt{2}t\}$  y  $\{|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}(t+1)\}$ , y  $f = b_t$  en el dominio restante. La condición (1.24) de la interfase se transforma en:

$$(5.22) \quad u_v^+ - u_v^- = \Delta b \cdot V(x,t) \quad ,$$

donde  $\Delta b$  es el salto de entalpía al pasar de una fase a otra. En nuestro caso la condición (5.22) se verifica con

$$\begin{aligned} \Delta b &= 2t & , \text{ en } |x| = \sqrt{2}t \\ &= 0 & , \text{ en } |x| = \frac{1}{\sqrt{2}}(t+1) \quad , \end{aligned}$$

que es compatible con la definición (5.21). Luego el par  $(u,b)$  es la única solución del problema propuesto.

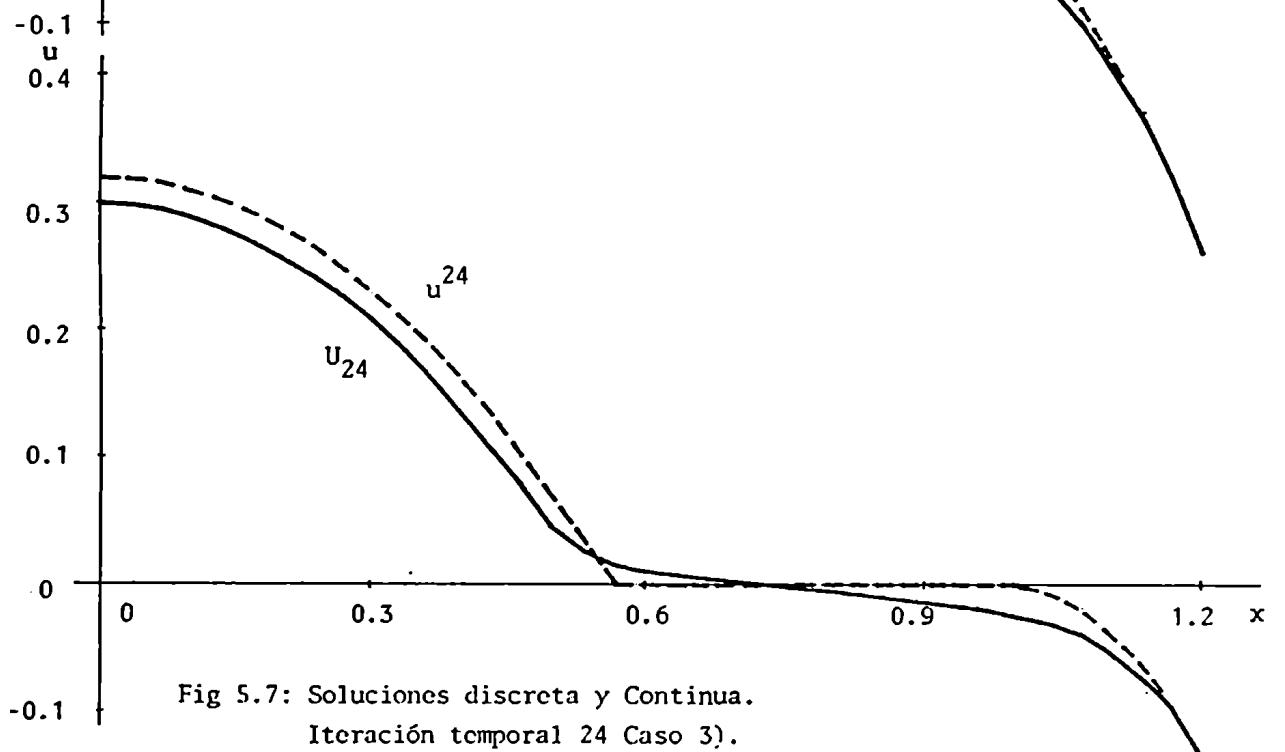
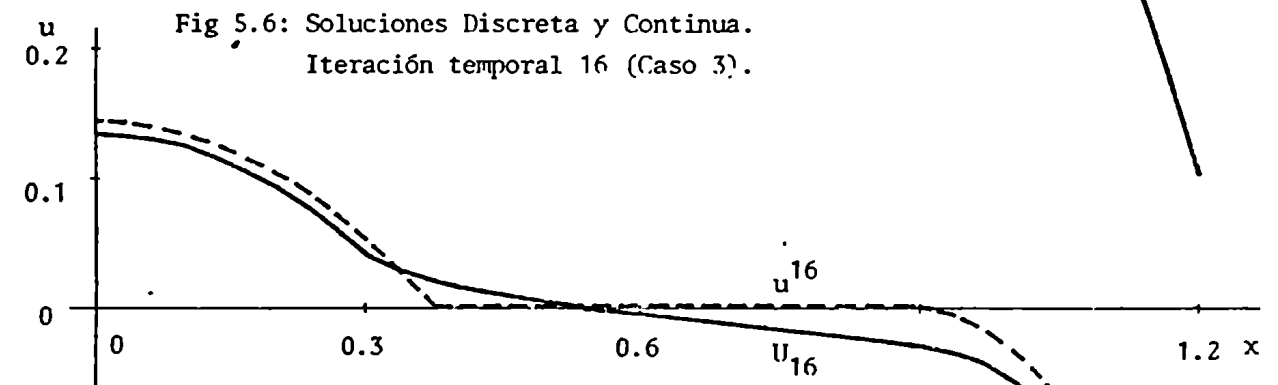
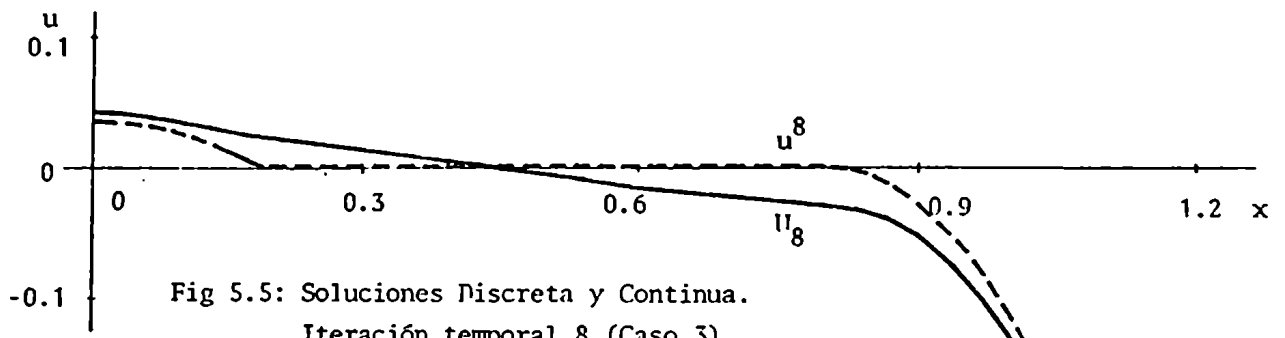
Por simetría se toma  $\Omega = (0,1.2) \times (0,0.1)$  y se impone una condición de Neumann nula en  $x=0$ ,  $y=0,0.1$ . El dato inicial  $U_0$  se elige de acuerdo con §2.4.4., vale decir tal que  $\| \beta_\epsilon(U_0) - \beta(\tilde{u}_0) \|_{L^2(\Omega_h)} \leq c \epsilon^{1/2}$ .

h	$\epsilon$	$\tau$	IT	IX	NN	NE	CPU	E
0.1	0.05	0.05	8	42	27	25	10	$8.663 \cdot 10^{-3}$
0.05	0.025	0.025	16	100	76	98	116	$4.977 \cdot 10^{-3}$
0.03333	0.016666	0.016666	24	145	150	219	462	$3.637 \cdot 10^{-3}$

Tabla 5-4: Cota de Error Uniforme  $10^{-5}$

En las Figs. 5-5, 5-6 y 5-7 se muestran las soluciones discretas (línea continua) y las soluciones continuas (líneas de trazos) para las iteraciones temporales 8, 16 y 24 respectivamente (Caso 3).

(5.23) Nota: el error disminuye más rápidamente que  $\epsilon^{1/2}$  pero no alcanza a ser de orden  $\epsilon$ . Por otra parte debe notarse que la determinación de las curvas de nivel cero de  $u^+$  y  $u^-$  es muy imprecisa a partir de la solución discreta, sobre todo  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(t+1)$  (notar que allí la solución tiene gradiente nulo) // .



5.2.4 Ejemplo 4: Problema de Una Fase

Sean  $\Omega = (-1.2, 1.2) \times (-1.2, 1.2)$  ,  $T = 0.4$  ,

$$u(x,y,t) = -(x^2 + y^2) + \frac{1}{8} e^{4t} \quad , \quad \text{si } x^2 + y^2 < \frac{1}{8} e^{4t}$$

$$= 0 \quad , \quad \text{si } x^2 + y^2 \geq \frac{1}{8} e^{4t} .$$

Consideremos que  $b(x,y,t) = 0$  cuando  $u(x,y,t) = 0$  , lo que equivale a suponer que  $\chi(o) = 0$  (ver(2.90)). Entonces el par  $(u,b)$  resuelve el problema (2.17) para el cual  $f = -\Delta_x u + u_t$  en  $x^2 + y^2 < \frac{1}{8} e^{4t}$  y  $f=0$  en el resto.

Por simetría se toma  $\Omega = (0,1.2) \times (0,1.2)$  y se fijan condiciones de Neumann nulas en  $\{x=0\}$  y  $\{y=0\}$  .

h	$\epsilon$	$\tau$	IT	IX	NN	NE	CPU	E
0.2	0.1	0.1	4	36	52	78	12	1.382 $10^{-2}$
0.13333	0.06666	0.06666	6	60	105	171	49	0.775 $10^{-3}$
0.1	0.05	0.05	8	82	175	300	131	0.555 $10^{-3}$
0.08	0.04	0.04	10	103	264	465	290	0.456 $10^{-3}$
0.06666	0.03333	0.03333	12	122	370	666	558	0.368 $10^{-3}$

Tabla 5-5: Cota de Error Uniforme  $10^{-5}$

En la Fig.5-7 se han dibujado las curvas de nivel  $\epsilon$  de la solución discreta para el último caso e iteraciones temporales 6 y 12. Se puede observar un excelente acuerdo con la solución exacta. En la Fig.5-8 se han graficado las soluciones discretas para  $y=0$  y las mismas iteraciones temporales.

(5.24) Nota: el error disminuye casi como  $\epsilon$  a pesar de ser un problema degenerado. Es conveniente observar que en problemas de una fase será  $u_\epsilon \geq 0$  de donde en (2.57) resulta  $(\chi_\epsilon(u_\epsilon) - \chi(u))(u_\epsilon - u) \geq 0$  cuando  $u=0$  ( $\chi(0) = 0$ ). Entonces cabe esperar un orden de convergencia  $\epsilon$  como en los problemas no degenerados (ver (2.62)) // .

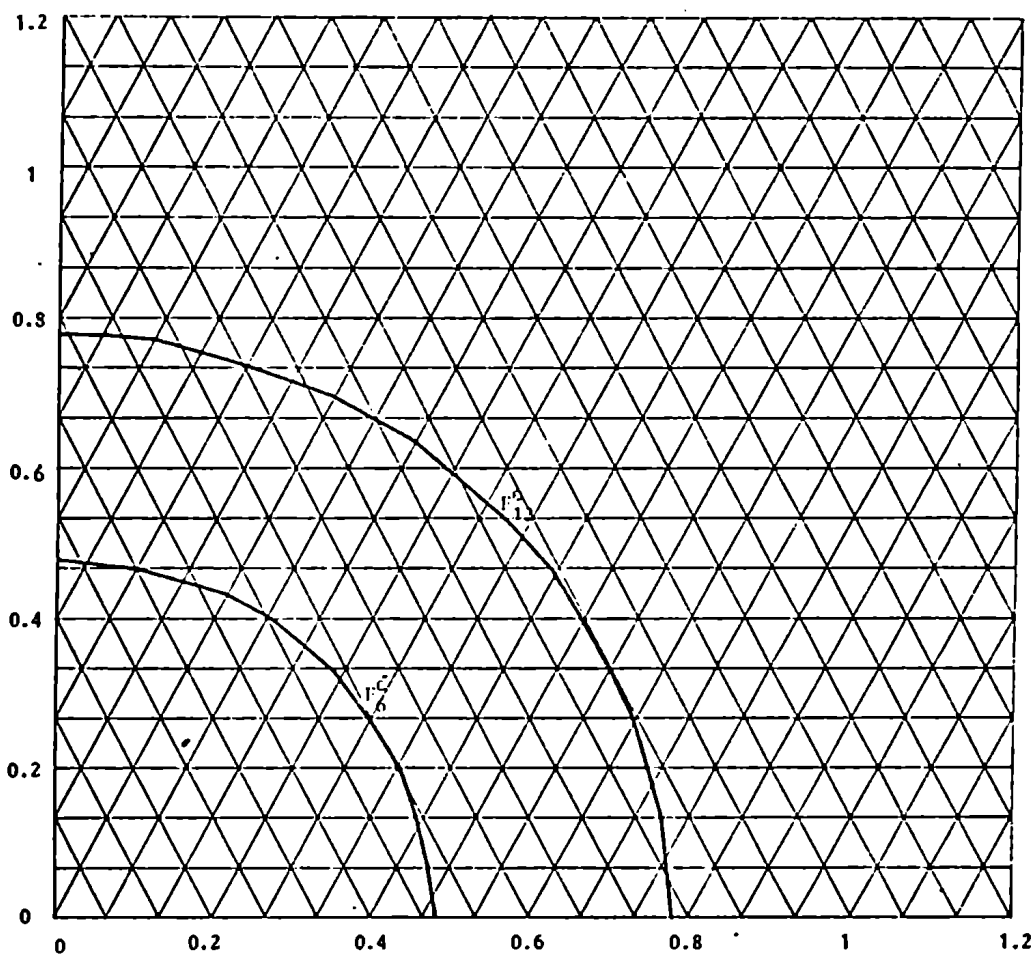


Fig 5.8: Fronteras Libres Discretas para las iteraciones temporales 6 y 12 ( Caso 5 ).

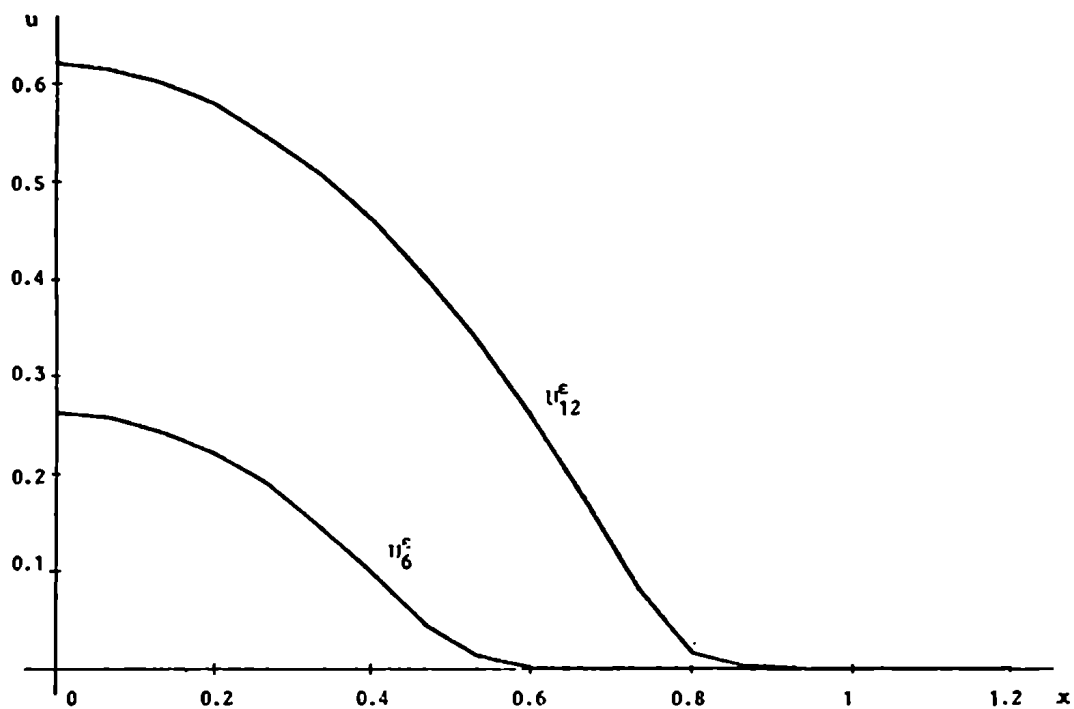


Fig 5.9: Curvas Discretas de Nivel c para  $y=0$  e iteraciones temporales 6 y 12. ( Caso 5 ).

### 5.2.5 Conclusiones

En todos los ejemplos se observa un orden de convergencia ligeramente mejor que  $\epsilon^{1/2}$  como prevé la teoría de los Capítulos 2 y 3. En algunos casos (ejemplos 1, 2 y 4) el orden de convergencia es casi  $\epsilon$ . Todos los resultados han sido obtenidos con la relación:  $\epsilon \sim h \sim \tau$ .

Cuando la solución es no degenerada hay un buen acuerdo entre las fronteras libres discreta y continua. La relación se deteriora con la presencia de zonas degeneradas y particularmente cuando la solución exacta tiene derivadas espaciales nulas (ver (5.23)). Esto exhibe las dificultades de una prueba de convergencia de la frontera libre discreta a la continua para la formulación entálpica del problema de Stefan en condiciones generales (ver [B-C] para el problema elíptico).

Para soluciones no degeneradas (Ejemplos 1 y 2) el conjunto  $\{x \in \Omega: |U(x)| < \epsilon\}$  es una banda de ancho  $ch$  alrededor de la frontera libre. Esto muestra la importancia de una buena integración numérica de la función  $\beta(U)$  que es fuertemente variable en un conjunto de ancho pequeño.

El algoritmo propuesto en el Capítulo 4 es razonablemente eficiente para un número limitado de iteraciones temporales. Luego los errores introducidos por el algoritmo distorsionan sustancialmente la solución en condiciones generales sobre los datos. Si los datos son monótonos el comportamiento es mucho mejor. Por otro lado tiene la ventaja de requerir una regularidad mínima de la solución continua y de tener una relativamente elemental implementación computacional.

APENDICE A

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION DEL PROBLEMA SEMIDISCRETO

El propósito de este apéndice es mostrar que el problema de valor inicial (3.27)-(3.29) posee una única solución que resulta Lipschitz continua.

Recordemos que el problema consiste en hallar la función  $(t \rightarrow (U_i(t))_{i=1}^I)$  que en c.t.p.  $t$ ,  $0 < t < T$  y para  $1 \leq i \leq I$  satisface:

$$(A.1) \quad U_i(0) = u_0(x_i)$$

$$(A.2) \quad \sum_{j=1}^{\tilde{I}} U_j(t) \int_{\Omega_h} \nabla \omega_j \cdot \nabla \omega_i + \sum_{j=1}^{\tilde{I}} \dot{U}_j(t) \int_{\Omega_h} \beta'_\epsilon \left( \sum_{k=1}^{\tilde{I}} U_k(t) \omega_k \right) \omega_i \omega_j = \int_{\Omega_h} \bar{f}(\cdot, t) \omega_i$$

donde  $U_j(t) = g(x_j, t)$  para  $I < j \leq \tilde{I}$

Dado que  $\beta_\epsilon$  se supone con la regularidad mínima, es decir Lipschitz continua, entonces la matriz de coeficiente (i-j)-ésimo  $\int_{\Omega_h} \beta'_\epsilon \left( \sum_{k=1}^{\tilde{I}} U_k(t) \omega_k \right) \omega_i \omega_j$  no es continua, y por ello la teoría clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias no proporciona información sobre (A.2)

Observemos que el problema de valor inicial (A-1)-(A-2) es equivalente a la ecuación integral

$$\sum_{j=1}^{\tilde{I}} \int_0^t U_j(s) ds \cdot \int_{\Omega_h} \nabla \omega_j \cdot \nabla \omega_i + \int_{\Omega_h} \beta_\epsilon \left( \sum_{j=1}^{\tilde{I}} U_j(t) \omega_j \right) \omega_i = \int_{\Omega_h} \beta_\epsilon(u_0^I) \omega_i + \int_0^t \int_{\Omega_h} \bar{f} \omega_i, \quad 1 \leq i \leq I,$$

que basándonos en la Notación III del Capítulo 4 se puede escribir en forma vectorial como:

$$(A.3) \quad A \cdot \int_0^t U(s) ds + B(t, U(t)) = F(t)$$

donde  $U(t) = (U_i(t))_{i=1}^I$  ,  $B_i(t,U) = \int \beta_\epsilon \left( \sum_{j=1}^I U_j \omega_j + \sum_{j=I+1}^{\tilde{I}} g(x_j,t) \omega_j \right) \omega_i$   
 y  $F_i(t) = \int_{\Omega_h} \beta_\epsilon(u_0^I) \omega_i + \int_0^t \int_{\Omega_h} \bar{f} \omega_i - \sum_{j=I+1}^{\tilde{I}} \int_0^t g(x_j,s) ds \cdot \int_{\Omega_h} \nabla \omega_j \cdot \nabla \omega_j$

Veremos seguidamente una caracterización del operador  $B$  que será útil en la prueba de existencia y unicidad de (A.3).

(A.4) LEMA. El operador  $B(t,\cdot): \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^I$  es un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^I$  sobre sí mismo para todo  $t$  ,  $0 < t < T$  . Además  $B(t,\cdot)$  y  $B^{-1}(t,\cdot)$  son Lipschitz continuos uniformemente en  $t$  ,  $0 < t < T$  .

La aplicación  $B(\cdot,U): [0,T] \rightarrow \mathbb{R}^I$  es Lipschitz continua uniformemente en  $U$  para todo  $U \in \mathbb{R}^I$  .

Demostración: Es claro que  $B(t,\cdot)$  es Lipschitz continuo, pues  $\beta_\epsilon$  es una aplicación Lipschitz de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  . Además la constante es  $\tilde{\epsilon}^{-1} = 1 + \epsilon^{-1}$  independiente de  $t$  .

Por otra parte  $B(t,\cdot)$  es uniformemente monótono pues llamando  $\zeta(t) = \sum_{j=I+1}^{\tilde{I}} g(x_j,t) \omega_j$  resulta para todo  $U^1, U^2 \in \mathbb{R}^I$

$$\begin{aligned} & \langle B(t,U^1) - B(t,U^2), U^1 - U^2 \rangle_{1,2} \\ &= \int_{\Omega_h} [\beta_\epsilon \left( \sum_{j=1}^I U_j^1 \omega_j + \zeta(t) \right) - \beta_\epsilon \left( \sum_{j=1}^I U_j^2 \omega_j + \zeta(t) \right)] \left[ \sum_{j=1}^I (U_j^1 - U_j^2) \omega_j \right] \\ &\geq \int_{\Omega_h} \left[ \sum_{j=1}^I (U_j^1 - U_j^2) \omega_j \right]^2 \geq \alpha \|U^1 - U^2\|_{1,2}^2 \end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad (2.21) sobre el crecimiento de  $\beta_\epsilon$  y que la matriz de masa es definida positiva con mínimo autovalor  $\alpha > 0$  . Notar que  $\alpha$  es independiente de  $t$  , pero sí depende de la triangulación espacial  $F_h$  (ver (4.48) donde se prueba que  $\alpha \geq c h^N$  , con  $c$  constante sólo dependiente de la dimensión  $N$  ) .



Con las propiedades enunciadas sobre  $B(t, \cdot)$  es aplicable un resultado para operadores monótonos (ver [O-R], pág. 167) que afirma que  $B$  es un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^I$  sobre si mismo.

Como  $B(t, \cdot)$  es uniformemente monótono resulta

$$\|B(t, U^1) - B(t, U^2)\|_{1,2} \geq \alpha \|U^1 - U^2\|_{1,2}, \quad U_1, U_2 \in \mathbb{R}^I$$

y entonces  $B^{-1}(t, \cdot)$  es Lipschitz continuo con constante  $\alpha^{-1}$  independiente de  $t$ .

Por hipótesis (2.2) es  $g_t \in L^\infty(\Omega)$ , entonces

$$\begin{aligned} & |(B(t_1, U) - B(t_2, U))_i| \\ & \leq \int_{\Omega_h} |\beta_\varepsilon \left( \sum_{j=1}^I U_j \omega_j + \sum_{j=I+1}^{\tilde{I}} g(x_j, t_1) \omega_j \right) \\ & \quad - \beta_\varepsilon \left( \sum_{j=1}^I U_j \omega_j + \sum_{j=I+1}^{\tilde{I}} g(x_j, t_2) \omega_j \right)| \omega_i \\ & \leq \frac{c}{\varepsilon} \int_{\Omega_h} \sum_{j=I+1}^{\tilde{I}} |g(x_j, t_1) - g(x_j, t_2)| \omega_j \omega_i \leq \frac{c}{\varepsilon} |t_1 - t_2|, \end{aligned}$$

con lo que queda probada la última parte del Lema //.

Dado que  $B(t, \cdot)$  es inversible la ecuación (A.3) es equivalente a la ecuación no lineal

$$(A.5) \quad U(t) = B^{-1}(t, -A \cdot \int_0^t U(s) ds + F(t)) = (R U)(t)$$

que tiene la forma apropiada para aplicar un teorema de Punto Fijo.

(A.6) LEMA. El operador  $R$  definido en (A.5) transforma  $C^0[0, T]$  en si mismo y es continuo. Más aún es compacto.

Demostración: Sean  $U \in C^0[0, T]$  y  $V$  tal que  $V(t) = B^{-1}(t, U(t))$ . Sean  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , entonces por (A.4) resulta

$$\|V(t_1) - V(t_2)\|_{1,2} \|U(t_1) - U(t_2)\|_{1,2} \geq \langle V(t_1) - V(t_2), U(t_1) - U(t_2) \rangle_{1,2}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \langle B(t_1, V(t_1)) - B(t_2, V(t_2)), V(t_1) - V(t_2) \rangle_{1^2} \\
 &= \langle B(t_1, V(t_1)) - B(t_1, V(t_2)), V(t_1) - V(t_2) \rangle_{1^2} \\
 &\quad + \langle B(t_1, V(t_2)) - B(t_2, V(t_2)), V(t_1) - V(t_2) \rangle_{1^2} \\
 &\geq \alpha \|V(t_1) - V(t_2)\|_{1^2}^2 - c_\epsilon |t_1 - t_2| \|V(t_1) - V(t_2)\|_{1^2},
 \end{aligned}$$

y de aquí se sigue que

$$\|V(t_1) - V(t_2)\|_{1^2} \leq c (\|U(t_1) - U(t_2)\|_{1^2} + |t_1 - t_2|)$$

Luego como  $U$  es continua, resulta  $V$  continua y el operador  $R$  está bien definido.

Más aún, la función  $\tilde{U}(t) = -A \int_0^t U(s) ds + F(t)$  es Lipschitz continua, ya que  $U \in C^0[0, R]$  y  $f, g$  satisfacen (2.2) y (2.8). Entonces el cálculo anterior demuestra que  $RU$  es Lipschitz continua, con una constante independiente de  $U$  si ésta pertenece a un conjunto acotado en  $C^0[0, T]$ .

Además la aplicación  $R$  es continua. En efecto sean  $U^1, U^2 \in C^0[0, T]$ , entonces como  $B^{-1}(t, \cdot)$  es Lipschitz con constante  $\alpha^{-1}$  independiente de  $t$ , resulta

$$\begin{aligned}
 \|RU^1(t) - RU^2(t)\|_{1^2} &\leq \alpha^{-1} \left\| A \cdot \int_0^t (U^1(s) - U^2(s)) ds \right\|_{1^2} \\
 &\leq c t \|U^1 - U^2\|_{L^\infty(0, T; 1^2)}
 \end{aligned}$$

y en consecuencia tenemos la estimación

$$(A.7) \quad \|RU^1 - RU^2\|_{L^\infty(0, T; 1^2)} \leq c T \|U^1 - U^2\|_{L^\infty(0, T; 1^2)},$$

que muestra la continuidad de  $R$ .

Como el espacio de funciones Lipschitz en  $[0, T]$  se inmerge compactamente en  $C^0[0, T]$ , la aplicación continua  $R$  lleva acotados de

$C^0[0,T]$  en compactos de  $C^0[0,T]$  y entonces es compacta como queríamos probar // .

Ahora vamos a enunciar el resultado de existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial (A-1) - (A-2), que consiste en la prueba de la existencia de un único punto fijo de  $R$  en  $C^0[0,T]$  .

(A.8) LEMA. La ecuación (A.5) tiene un único punto fijo en  $C^0[0,T]$  , y es una función Lipschitz continua en  $t$  ,  $0 \leq t \leq T$  .

Demostración: Sea  $\tau$  ,  $0 \leq \tau \leq T$  , tal que  $c\tau < 1$  en (A.7). Entonces  $R$  es una contracción de  $L^\infty(0,\tau;1^2)$  en sí mismo, por ende existe una única función  $U(t)$  ,  $0 \leq t \leq \tau$  , punto fijo de  $R$  . Además de (A.5) resulta  $U$  Lipschitz continua.

Ahora notemos que en todo el argumento lo esencial es que la longitud del intervalo en estudio sea  $\tau$  , pero no que se inicie en 0 . En efecto para  $t > \tau$  podemos escribir (A.5) como

$$U(t) = B^{-1}(t, -A \int_{\tau}^t U(s) ds + \tilde{F}(t))$$

donde  $\tilde{F}(t) = F(t) - A \cdot \int_0^{\tau} U(s) ds$  , con  $U$  obtenida recientemente para  $0 \leq s \leq \tau$  . Esto muestra que el argumento puede repetirse en cada intervalo  $[k\tau, (k+1)\tau]$  ( $k \geq 0$ ) , con  $\tau$  fijo independiente de las funciones  $U$  . Luego de un número finito de pasos se ha obtenido la función buscada definida en  $[0,T]$  como queríamos probar // .

(A.9) Nota: dado que  $R$  es compacto también se puede usar en (A.9) el teorema de punto fijo de Schauder // .

APENDICE B

ESTIMACION DEL ERROR  $\| \tilde{u} - u_h \|_{L^2(\Omega_h)}$  CUANDO  $\Omega \neq \Omega_h$

El objetivo de este apéndice es estudiar el error  $\| \tilde{u} - u_h \|_{L^2(\Omega_h)}$  entre la extensión  $\tilde{u}$  de una función  $u$  solución en  $\Omega (\Omega \subset \mathbb{R}^I)$  de un problema elíptico de contorno y  $u_h$  la solución en  $\Omega_h$  del problema discreto asociado.

Se pretende probar que bajo ciertas condiciones sobre los datos  $\Omega$ ,  $g$  y  $f$ , el error es de orden  $h^2$ , es decir una potencia más que el error en  $H^1(\Omega)$ . Este tipo de resultados se muestran en [C-1] pág. 136, pero suponiendo  $g = 0$ ,  $\Omega = \Omega_h$ .

Supongamos que:

$$(B.1) \quad \partial\Omega \in C^2, \quad f \in L^2(\Omega), \quad g \in W_\infty^2(\Omega).$$

Consideremos el problema modelo que consiste en hallar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que

$$(B.2) \quad \begin{aligned} u &= g \quad \text{en } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi &= \int_{\Omega} f \psi \end{aligned}$$

para toda  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ . Bajo las hipótesis (B.1) claramente resulta  $u \in H^2(\Omega)$  (ver [F-2], pág. 68). Además existe  $\tilde{u} \in H^2(\Omega)$  extensión  $H^2$  de  $u$  al abierto  $\tilde{\Omega} (\tilde{\Omega} \subset \tilde{\Omega})$  tal que

$$(B.3) \quad \| \tilde{u} \|_{H^2(\tilde{\Omega})} \leq C \| u \|_{H^2(\Omega)}$$

con  $C$  independiente de la función (ver [F-2], pág. 10).

Sea  $F_h$  una familia de elementos finitos del 1º tipo y  $\Omega_h$  el dominio aproximado de  $\Omega$  tal que los vértices de  $\partial\Omega_h$  están sobre  $\partial\Omega$ . Con la misma Notación II del Capítulo 3 sean  $V_h(g)$  el espacio discreto de funciones continuas, lineales en cada elemento finito, y que en los nodos del borde coinciden con  $g$ , y  $\tilde{v}$  la extensión de la función  $v$  a  $\tilde{\Omega}$ .

El problema discreto asociado a (B.2) consiste en hallar  $u_h$  tal que

$$(B.4) \quad \begin{aligned} &u_h \in V_h(g) \\ &\int_{\Omega_h} \nabla u_h \cdot \nabla \psi_h = \int_{\Omega} f \psi_h \end{aligned}$$

para toda  $\psi_h \in V_h(0)$ . Naturalmente consideramos a  $\psi_h$  extendida por cero a  $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$  para dar sentido a la integral  $\int_{\Omega} f \psi_h$ .

En el Lema (B.24) probaremos que

$$(B.5) \quad \left\| \tilde{u} - u_h \right\|_{L^2(\Omega_h)} \leq c h^2 (1 + \|u\|_{H^2(\Omega)})$$

con  $c$  una constante sólo dependiente de los datos.

(B.6) Nota: el problema (B.2) se puede generalizar al de hallar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que

$$(B.7) \quad \begin{aligned} &u = g \text{ en } \partial\Omega \\ &\int_{\Omega} (K(x) \nabla u) \cdot \nabla \psi + b(x) u \psi = \int_{\Omega} f \psi \end{aligned}$$

para toda  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ , que es el problema elíptico asociado a la ecuación parabólica (2.49) ( $K$  y  $b$  se definen en (2.11) y (2.12)).

Si bien en el apéndice nos referiremos a (B.2) y (B.4) todos los resultados e incluso las demostraciones son válidas para este caso más general, obteniéndose también (B.5) // .

Inicialmente vamos a centrar el estudio en el conjunto  $\Omega_h \setminus \Omega$ . Tomemos una cara  $\Sigma$  de  $\partial\Omega_h$  y un sistema de coordenadas  $(x', x_N)$  tal que  $\Sigma = \{x_N = 0\}$ , y sea  $\phi \in C^2(\Sigma)$  que describa a  $\partial\Omega$ . Entonces como  $\phi$  se anula en los vértices de  $\Sigma$  resulta

$$(B.8) \quad |\phi(x')| \leq c h^2 \quad x' \in \Sigma$$

donde  $C$  es una constante sólo dependiente de  $\Omega$ .

Luego es fácil probar el siguiente resultado.

(B.9) LEMA. Existe una constante  $c > 0$  sólo dependiente de  $\Omega$  tal que

$$(B.10) \quad \|g^I - \tilde{g}\|_{L^\infty(\Sigma)} \leq c h^2 \|g\|_{W_\infty^2(\Omega)}$$

$$(B.11) \quad \|g^I - g(\cdot, \phi(\cdot))\|_{L^\infty(\Sigma)} \leq c h^2 \|g\|_{W_\infty^2(\Omega)}$$

(B.12) LEMA. Existe una constante  $c > 0$  sólo dependiente de  $\Omega$  tal que

$$(B.13) \quad \|\psi_h\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \leq c h \|\psi_h\|_{L^2(\Omega_h)}$$

para toda  $\psi_h \in V_h(0)$ .

Demostración: podemos escribir

$$\psi_h(x', x_N) = \psi_h(x', 0) + \int_0^{x_N} \frac{\partial}{\partial x_N} \psi_h(x', s) ds = \int_0^{x_N} \frac{\partial}{\partial x_N} \psi_h(x', s) ds .$$

Llamemos  $A_\Sigma = \{(x', x_N) : x' \in \Sigma, 0 < x_N < \phi(x')\}$ , donde hemos supuesto sin pérdida de generalidad que  $\phi$  definida en (B.8) es no negativa. Luego

$$\begin{aligned} \|\psi_h\|_{L^2(A_\Sigma)}^2 &= \int_\Sigma \int_0^{\phi(x')} \psi_h^2 \leq \int_\Sigma \phi(x')^2 \int_0^{\phi(x')} |\nabla \psi_h|^2 \leq \\ &\leq c h_K^4 \|\nabla \psi_h\|_{L^2(A_\Sigma)}^2 \leq c h_K^4 \|\nabla \psi_h\|_{L^2(K)}^2 , \end{aligned}$$

donde  $K \in F_h$  es el elemento finito de cara exterior  $\Sigma$ . Empleando la desigualdad inversa (ver [C-1], pág. 142).

$$\|\nabla \psi_h\|_{L^2(K)} \leq c h_K^{-1} \|\psi_h\|_{L^2(K)}$$

obtenemos

$$\|\psi_h\|_{L^2(A_\Sigma)} \leq c h_K \|\psi_h\|_{L^2(K)} \leq c h \|\psi_h\|_{L^2(K)}$$

Luego sumando esta desigualdad para todas las caras  $\Sigma$  de  $\partial\Omega_h$  obtenemos (B.13) como queríamos probar // .

Con la misma técnica que en el Lema (B.12) podremos comparar  $\tilde{u}$  y  $u_h$  en  $\Omega_h \setminus \Omega$ .

(B.15) LEMA. Existe una constante  $c > 0$  sólo dependiente de los datos  $\Omega$ ,  $g$  y  $f$  tal que

$$(B.16) \quad \|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \leq c h^2 .$$

Demostración: como  $u = g$  en  $\partial\Omega$  y  $u_h = g^I$  en  $\partial\Omega_h$  resulta en  $A_\Sigma$  (ver (B.12))

$$u_h(x', x_N) = g^I(x', 0) + \int_0^{x_N} \frac{\partial}{\partial x_N} u_h(x', s) ds$$

$$\tilde{u}(x', x_N) = g(x', \phi(x')) + \int_{\phi(x')}^{x_N} \frac{\partial}{\partial x_N} \tilde{u}(x', s) ds$$

Entonces restando ambas igualdades obtenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(A_\Sigma)} &\leq |A_\Sigma|^{1/2} \|g^I - g(\cdot, \phi(\cdot))\|_{L^\infty(\Sigma)} + c h^2 \|\nabla \mathbf{u}_h\|_{L^2(A_\Sigma)} \\ &\quad + c h^2 \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(A_\Sigma)} = \text{I}_\Sigma + \text{II}_\Sigma + \text{III}_\Sigma . \end{aligned}$$

Sumando para todas las caras exteriores  $\Sigma$  queda

$$\begin{aligned} \text{I} &\leq (\sum |A_\Sigma| \|g^I - g(\cdot, \phi(\cdot))\|_{L^\infty(\Sigma)})^{1/2} \leq c h^2 |\Omega_h \setminus \Omega|^{1/2} \|g\|_{W_\infty^2(\Omega)} \\ &\leq c h^3 , \end{aligned}$$

$$\text{II} \leq c h^2 (\sum \|\nabla \mathbf{u}_h\|_{L^2(A_\Sigma)}^2)^{1/2} \leq c h^2 \|\nabla \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq c h^2 ,$$

$$\text{III} \leq c h^2 (\sum \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(A_\Sigma)}^2)^{1/2} \leq c h^2 \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega_h)} \leq c h^2 ,$$

donde hemos usado la desigualdad (B.11), las estimaciones a priori

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq c (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)})$$

$$\|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq c (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g^I\|_{H^1(\Omega_h)})$$

que se obtienen de (B.2) y (B.4) proponiendo  $u - g$  y  $u_h - g^I$  como funciones de prueba, y que (ver [C-1], pág. 133)

$$\|\tilde{g} - g^I\|_{H^1(\Omega_h)} \leq c h \|g\|_{H^2(\Omega)}$$

Luego

$$\| \tilde{u} - u_h \|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \leq I + II + III \leq c h^2 ,$$

como queríamos demostrar // .

Ahora probaremos que  $\| \tilde{u} - u_h \|_{H^1(\Omega_h)}$  es de orden  $h$  , tal como ocurre si  $\Omega = \Omega_h$  (ver [C-1], pág 134).

(B.17) LEMA. Existe una constante  $c > 0$  sólo dependiente de los datos  $\Omega$ ,  $f$  y  $g$  tal que

$$(B.18) \quad \| \tilde{u} - u_h \|_{H^1(\Omega_h)} \leq c h \| u \|_{H^2(\Omega)}$$

Demostración: Sea  $\tilde{f} = -\Delta \tilde{u}$  en  $\tilde{\Omega}$  . Entonces por (B.3)

$$\| \tilde{f} \|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \| \Delta \tilde{u} \|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \| u \|_{H^2(\Omega)}$$

Tomemos  $\psi_h \in V_h(0)$  , y notemos que

$$(B.19) \quad \int_{\Omega_h} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \psi_h = - \int_{\Omega_h} \Delta \tilde{u} \cdot \psi_h = \int_{\Omega_h} \tilde{f} \psi$$

Restando (B.4) de (B.19) obtenemos la ecuación

$$\int_{\Omega_h} \nabla (\tilde{u} - u_h) \cdot \nabla \psi_h = \int_{\Omega_h \setminus \Omega} \tilde{f} \psi_h ,$$

para toda  $\psi_h \in V_h(0)$  . Luego tomando  $\psi_h = \tilde{u}^I - u_h$  resulta

$$\begin{aligned} \| \nabla (\tilde{u}^I - u_h) \|_{L^2(\Omega_h)}^2 &= \int_{\Omega_h} \nabla (\tilde{u} - u_h) \cdot \nabla (\tilde{u}^I - u_h) + \int_{\Omega_h} \nabla (\tilde{u}^I - \tilde{u}) \cdot \nabla (\tilde{u}^I - u_h) \\ &\leq \| \tilde{f} \|_{L^2(\Omega_h)} \| \tilde{u}^I - u_h \|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \\ &\quad + \| \nabla (\tilde{u}^I - \tilde{u}) \|_{L^2(\Omega_h)} \cdot \| \nabla (\tilde{u}^I - u_h) \|_{L^2(\Omega_h)} . \end{aligned}$$

Con la misma técnica de demostración que la empleada en (B.12) puede obtenerse que

$$\| \tilde{u}^I - u_h \|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \leq c h^2 \| \nabla (\tilde{u}^I - u_h) \|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}$$



puesto que  $\tilde{u}^I - u_h \in V_h(0)$  . Además como  $\tilde{u} \in H^2(\Omega_h)$  resulta (ver [C-1], pág. 133)

$$(B.20) \quad \|\tilde{u}^I - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega_h)} \leq c h \|\tilde{u}\|_{H^2(\Omega_h)}$$

En consecuencia hemos obtenido la estimación

$$\|\nabla(\tilde{u}^I - u_h)\|_{L^2(\Omega_h)} \leq c h \|u\|_{H^2(\Omega)} ,$$

y de ésta, la anterior, y la desigualdad de Poincarè se sigue que

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq \|\tilde{u} - \tilde{u}^I\|_{H^1(\Omega_h)} + \|\tilde{u}^I - u_h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq c h \|u\|_{H^2(\Omega)} ,$$

como queríamos probar // .

A continuación vamos a suponer que  $u$  tiene un crecimiento lineal a partir de  $\partial\Omega$  . En efecto:

(B.21) Existe un entorno  $V$  de  $\partial\Omega$  y una función  $\omega(y, \cdot) \in W_\infty^1(V)$  para todo  $y \in \partial\Omega$  , tal que  $\omega(y, y) = 0$

$$|u(x) - g(x)| \leq \omega(y, x) \quad \text{para todo } x \in V ,$$

con  $\|\omega(y, \cdot)\|_{W_\infty^1(V)}$  independiente de  $y \in \partial\Omega$

(B.22) Nota: la existencia de una barrera  $\omega(y, \cdot)$  fue probada para todo  $t$  ,  $0 < t < T$  , en el problema de Stefan (ver (2.31)) // .

(B.23) Nota: la propiedad (B.21) es válida para el problema (B.2) si  $f \in L^\infty(\Omega)$  . En efecto notemos que  $v = u - g$  verifica

$$-\Delta v = f + \Delta g = F \in L^\infty(\Omega)$$

$$v = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

Sea  $\omega$  la solución del problema de contorno

$$-\Delta\omega = 1 \quad \text{en } \Omega$$

$$\omega = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

Consideremos la función  $\|F\|_{L^\infty} \cdot \omega \pm v$  , que por aplicación del Principio de Máximo es no negativa. Entonces resulta

$$|v(x)| \leq \|F\|_{L^\infty} \cdot \omega(x) \quad x \in \Omega$$

que implica (B.21) // .

Ahora probaremos la estimación en norma  $L^2(\Omega_h)$  que ha motivado este apéndice.

(B.24) LEMA. Bajo las hipótesis (B.1) y (B.20) existe una constante  $c > 0$  sólo dependiente de los datos  $\Omega$ ,  $f$  y  $g$  tal que

$$(B.25) \quad \|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq c h^2 (1 + \|u\|_{H^2(\Omega)})$$

Demostración: Sabemos que

$$(B.26) \quad \|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h)} = \sup_{\psi \in L^2(\Omega_h)} (\|\psi\|_{L^2(\Omega_h)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_h} (\tilde{u} - u_h)\psi) .$$

Sea  $\phi \in H^2(\Omega)$  la solución de

$$-\Delta\phi = \psi \quad \text{en } \Omega$$

$$\phi = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

donde  $\psi \in L^2(\Omega_h)$  se considera extendida por cero a  $\tilde{\Omega} \setminus \Omega_h$  . Como  $\partial\Omega \in C^2$  es válida la estimación (ver [F-2], pág. 68)

$$\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|\psi\|_{L^2(\Omega_h)}$$

con  $c$  sólo dependiente de  $\Omega$  . Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} (\tilde{u} - u_h)\psi &= \int_{\Omega_h} (u_h - \tilde{u})\Delta\tilde{\phi} + \int_{\Omega_h} (\tilde{u} - u_h)(\Delta\tilde{\phi} + \psi) \\ &= \int_{\Omega_h} \nabla(\tilde{u} - u_h)\nabla\tilde{\phi} + \int_{\partial\Omega_h} (u_h - \tilde{u})\tilde{\phi}_\nu + \int_{\Omega_h \setminus \Omega} (\tilde{u} - u_h)\Delta\tilde{\phi} \\ &= I + II + III \end{aligned}$$

Recordando (B.19) tenemos para el primer sumando

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega_h} \nabla(\tilde{u} - u_h) \cdot \nabla(\tilde{\phi} - \tilde{\phi}^I) + \int_{\Omega_h \setminus \Omega} \tilde{f} \cdot \tilde{\phi}^I \\ &\leq \|\nabla(\tilde{u} - u_h)\|_{L^2(\Omega_h)} \cdot \|\nabla(\tilde{\phi} - \tilde{\phi}^I)\|_{L^2(\Omega_h)} + \|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h)} \|\tilde{\phi}^I\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (c h^2 \|\tilde{\phi}\|_{H^2(\Omega_h)} + c h^2 \|\nabla \tilde{\phi}^I\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}) \|u\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq c h^2 \|u\|_{H^2(\Omega)} \cdot \|\psi\|_{L^2(\Omega_h)}, \end{aligned}$$

donde nuevamente hemos usado la técnica de demostración de (B.12) para acotar  $\|\phi^I\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}$  ( $\tilde{\phi}^I = 0$  en  $\partial\Omega_h$ ) y la estimación (B.20) para  $\tilde{u}$  y  $\tilde{\phi}$

Para el segundo sumando notemos que

$$\begin{aligned} \text{II} &\leq \int_{\partial\Omega_h} |u_h - \tilde{u}| |\tilde{\phi}_\nu| \leq \|u_h - \tilde{u}\|_{L^2(\partial\Omega_h)} \|\tilde{\phi}_\nu\|_{L^2(\partial\Omega_h)} \\ &\leq c (\|g^I - \tilde{g}\|_{L^2(\partial\Omega_h)} + \|\tilde{g} - \tilde{u}\|_{L^2(\partial\Omega_h)}) \|\tilde{\phi}\|_{H^2(\Omega_h)} \end{aligned}$$

Por (B.10) tenemos

$$\|g^I - \tilde{g}\|_{L^2(\partial\Omega_h)} \leq c h^2$$

Por otra parte por hipótesis (B.21) resulta

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{g}(x)| \leq \tilde{\omega}(y, x), \quad x \in V,$$

ya que las extensiones  $\tilde{u}$  y  $\tilde{g}$  conservan la propiedad (B.21) por la forma como se las construye (ver [F-2], pág.10). Dado  $x \in \partial\Omega_h$  sea  $y \in \partial\Omega$  el punto más cercano. Entonces claramente  $|x-y| \leq c h^2$  (c depende de  $\Omega$ ) y se verifica

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{g}(x)| \leq \tilde{\omega}(y, x) = \tilde{\omega}(y, x) - \tilde{\omega}(y, y) \leq c |x-y| \leq c h^2$$

Como esta desigualdad es válida para todo  $x \in \partial\Omega_h$  resulta

$$\|\tilde{g} - \tilde{u}\|_{L^2(\Omega_h)} \leq c h^2$$

y entonces

$$\text{II} \leq c h^2 \|\tilde{\phi}\|_{H^2(\Omega_h)} \leq c h^2 \|\psi\|_{L^2(\Omega_h)}$$

Para el tercer sumando tenemos por (B.16)

$$\text{III} \leq \|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \cdot \|\Delta \tilde{\phi}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \leq c h^2 \|\psi\|_{L^2(\Omega_h)}$$

Finalmente llevando a (B.26) las estimaciones para I, II y III obtenemos la tesis // .

Ahora probaremos una generalización de (B.24) que es necesaria en el estudio del 2º esquema discreto (ver (3.89)). Consideremos para  $i = 1, 2$  los problemas

$$(B.27) \quad \begin{aligned} u^i &= g_i \quad \text{en } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} \nabla u^i \cdot \nabla \psi &= \int_{\Omega} f_i \psi \end{aligned}$$

para toda  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  , y los problemas discretos asociados

$$(B.28) \quad \begin{aligned} u_h^i &\in V_h(g_i) \\ \int_{\Omega_h} \nabla u_h^i \cdot \nabla \psi &= \int_{\Omega} f_i \psi_h \end{aligned}$$

para toda  $\psi_h \in V_h(0)$  .

(B.29) LEMA. Supongamos que los datos  $\Omega, f_i, g_i$  ( $i = 1, 2$ ) verifican la hipótesis (B.1) y  $u^1$  satisface la condición (B.21). Entonces existe una constante  $c > 0$  sólo dependiente de los datos tal que

$$(B.30) \quad \begin{aligned} \|\tilde{u}^2 - u_h^1\|_{L^2(\Omega_h)} &\leq c [h^2 (1 + \|u^1\|_{H^2(\Omega)}) \\ &\quad + \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} + \|g_1 - g_2\|_{H^1(\Omega)}] \end{aligned}$$

Demostración: Como se verifica

$$\|\tilde{u}^2 - u_h^1\|_{L^2(\Omega_h)} \leq \|\tilde{u}^2 - \tilde{u}^1\|_{L^2(\Omega_h)} + \|\tilde{u}^1 - u_h^1\|_{L^2(\Omega_h)}$$

acotaremos cada sumando separadamente. Para el primero notemos que  $v = u^1 - u^2$  satisface

$$(B.31) \quad \begin{aligned} v &= g_1 - g_2 \quad \text{en } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \psi &= \int_{\Omega} (f_1 - f_2) \psi \end{aligned}$$

para toda  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  . Entonces resulta la estimación a priori

$$(B.32) \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} + \|g_1 - g_2\|_{H^1(\Omega)})$$

con  $c$  sólo dependiente de  $\Omega$  (se prueba proponiendo  $\psi = v - (g_1 - g_2)$  en (B.31)). Luego por la continuidad del operador de extensión (ver (3.20)) tenemos

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}^1 - \tilde{u}^2\|_{L^2(\Omega_h)} &\leq c \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c(\|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} + \|g_1 - g_2\|_{H^1(\Omega)}) . \end{aligned}$$

Para el segundo sumando, y dado que  $u^1$  satisface (B.21) por hipótesis, resulta por (B.24)

$$\|\tilde{u}^1 - u_h^1\|_{L^2(\Omega_h)} \leq ch^2 (1 + \|u^1\|_{H^2(\Omega)}) .$$

Con las estimaciones obtenidas es inmediata la tesis // .



Dr. Néstor E. Aguilera



Lic. Ricardo H. Nochetto

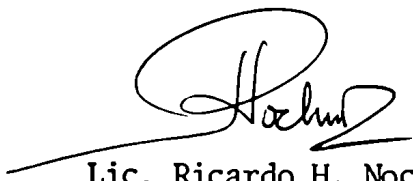
## REFERENCIAS

- [B-C] F. BREZZI - L. CAFFARELLI, "Convergence of the discrete free boundaries for finite element approximations", (a aparecer).
- [C-1] P. CIARLET, "The finite element method for elliptic problems", North Holland (1978).
- [C-2] J.F. CIAVALDINI, "Analyse numérique d'un probleme d'Stefan à deux phases par une méthode d'elements finis", SIAM J. Numer. Anal. 12, 464-487 (1975).
- [C-E] L. CAFFARELLI - L. EVANS, "Continuity of the temperature in the two-phase Stefan problem", Arch. Rational Mech. Anal., 81, 3 (1983), 199-220.
- [C-R] P. CIARLET - P. RAVIART, "Maximum principle and uniform convergence for the finite element method", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2, 17-31, (1973).
- [C-Z] L. CERMAK - M. ZLAMAL, "Transformation of dependent variables and the finite element solution of non-linear evolution equations", Int. J. Numer. Meth. Eng. 15 (1980), 31-40.
- [D] T. DUPONT, "Some  $L^2$  error estimates for parabolic Galerkin methods", The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, 491-504, Academic Press (1972).
- [D-D] J. DOUGLAS - T. DUPONT, "Galerkin methods for parabolic equations with non linear boundary conditions", Num. Math., 20 (1973), 213-217.
- [F-1] A. FRIEDMAN, "The Stefan problem in several space variables", Trans. AMS, 133 (1968), 51-87.

- [F-2] A. FRIEDMAN, "Partial Differential Equations", Robert E. Krieger Publishing Co., Inc. (1969).
- [J-R] J. JEROME - M. ROSE, "Error Estimates for the Multidimensional Two-Phase Stefan Problem", Math. of Comp., 39-160; (1982), 377-414.
- [K] S.L. KAMENOMOSTSKAJA, "On the Stefan problem", Math. Sb., 53 (1961), 489-514.
- [L] M. LUSKIN, "A Galerkin method for non-linear parabolic equations with non-linear boundary conditions", SIAM J. Numer. Anal., 16 (1979), 284-299.
- [LSU] D. LADYŽENSKAJA - V. SOLONNIKOV - N. URAL'CEVA, "Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type", Translations of Mathematical Monographs A.M.S. (1968).
- [M-1] E. MAGENES, "Problemi di Stefan bifase in piu variabili spaziali", Conference tenute al V S.A.F.A., Catania 17-24 Settembre 1981.
- [M-2] G.H. MEYER, "Multidimensional Stefan problems", SIAM J. Numer. Anal., 10 (1973), 522-538.
- [M-3] A.M. MEIRMANOV, "On the classical solution of the multidimensional Stefan problem for quasi linear parabolic equations", Math. of the U.S.S.R. - Sbornik, 40, 2 (1981), 157-178.
- [O-R] J. ORTEGA - W. RHEINBOLDT, "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables", Academic Press (1970).
- [W] M.F. WHEELER, "A priori  $L^2$  error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations", SIAM J. Numer. Anal. 10 (1973), 723-759.

[Z] M. ZLAMAL, "A finite element solution of the nonlinear heat equation",  
RAIRO Vol.14 N°2 (1980), 203-216.

  
Dr. Néstor E. Aguilera

  
Lic. Ricardo H. Nochetto