Ciertos problemas de contorno de tipo parabólico regidos por semigrupos no lineales de operadores no expansivos

Wolanski, Noemí Irene

1983

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

CIERTOS PROBLEMAS DE CONTORNO DE TIPO PARABOLICO REGIDOS POR SEMIGRUPOS NO LINEALES DE OPERADORES NO EXPANSIVOS

por

Noemí Irene Wolanski

Trabajo de tesis para optar al título

de Doctor en Matemática

Director: Dr. Julio Esteban Bouillet

Marzo 1983

Este trabajo ha sido realizado durante la tenencia de una beca otorgada por el CONICET.

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Julio Bouillet por su apoyo y sus enseñanzas mediante las cuales he podido llevar a cabo este trabajo.

Quiero también agradecer a mis compañeros del Seminario de Ecuaciones Diferenciales por su permanente aliento y consejo.

N. W.

INDICE

INTRODUCCION.................................pág. 1

CAPITULO I..................................pág. 9

CAPITULO II.................................pág. 17

Sección 1...................................pág. 20

Sección 2...................................pág. 35

Sección 3...................................pág. 52

Sección 4...................................pág. 81

CAPITULO III................................pág. 97

Sección 1...................................pág. 102

Sección 2...................................pág. 109

REFERENCIAS.................................pág. 150

INTRODUCCION

En este trabajo se prueban resultados de existencia y unicidad de solución de ciertos problemas de contorno no lineales de tipo parabólico degenerado. Es decir, problemas tales que, dada una solución, puede haber una región donde el problema es parabólico y otra donde no lo es.

Así mismo, se demuestran resultados de comparación de soluciones y de continuidad con respecto a los datos iniciales.

Consideramos dos tipos de problemas. En uno de ellos el dato inicial es una función de L^1, $u_0(x)$, que se alcanza en L^1; es decir, si $u(x,t)$ es la solución, se tiene

$$\lim_{t\to 0} \int_0^1 |u(x,t) - u_0(x)|\, dx = 0.$$

En el otro problema el dato inicial es una medida de Borel finita μ que se alcanza en el sentido de las distribuciones, es decir

$$\lim_{t\to 0} \int_0^1 u(x,t)\, g(x)\, dx = \int_0^1 g(x)\, d\mu(x) \qquad \forall\, g \in C([0,1]).$$

Los resultados de existencia, unicidad y regularidad de la solución del problema con dato en L^1 son usados en forma reiterada para demostrar los correspondientes resultados cuando el dato inicial es una medida.

Los métodos de demostración utilizados en cada problema difieren mucho entre sí. Cuando el dato inicial es una función de $L^1(0,1)$ utilizamos la teoría de semigrupos no lineales en espacios de Banach generados por operadores m-acretivos (en contraposición a m-disipativos), cuyos principales resultados han sido enunciados en el Capítulo I. Estos métodos han sido utilizados previamente para estudiar la ecuación

$$u_t = D_{xx}(\varphi(u)) \qquad (1)$$

ya que el operador $-D_{xx}(\varphi(u))$ es m-acretivo cuando $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, estrictamente creciente con $\varphi(0) = 0$ ([4]). La ecuación que nosotros consideramos en este caso es la siguiente

$$u_t = D_x(A(x, \varphi(u), D_x(\varphi(u)))) \qquad (2)$$

donde $A(x,u,p)$ es una función continua en las 3 variables y estrictamente creciente como función de p para (x,u) fijo y $\varphi(u)$ es una función continua y estrictamente creciente. En el Capítulo II, Sección 1 probamos que en estas condiciones el operador $\mathcal{A}u = -D_x(A(x,\varphi(u),D_x(\varphi(u))))$ con condiciones de contorno fijas es acretivo en $L^1(a,b)$ y demostramos un resultado de comparación de " soluciones por discretización ", es decir, " soluciones " $u(t)$ que se obtienen como límite de " soluciones aproximadas " $u^n(t)$ que corresponden a una sucesión de problemas elípticos obtenidos por discretización de la derivada u_t , es decir $u^n(x,t) = u^n_k(x)$, $(k-1)\lambda_n \leq t < k\lambda_n$

$$\frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{\lambda_n} = D_x(A(x,\varphi(u_k^n(x)),\ D_x(\varphi(u_k^n(x))))) \qquad k = 1,\dots,N_n.$$

Como corolario de estos resultados obtenemos principios del máximo para soluciones por discretización que son utilizados en las siguientes secciones donde se estudia la existencia de solución por discretización (Sección 2) y su regularidad (Sección 3). En conclusión, se demuestra que cuando $A = A(p)$, $|A(p)| \geq c|p|$, $|p| \to \infty$ y $\varphi(x)$ es tal que φ^{-1} es continua Lipschitz hay una única función $u(x,t)$ con $u \in C^1([a,b])$ en la variable x, pp t y $u_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(a,b))$ que satisface la ecuación (2) en casi todo punto. El método utilizado en la Sección 3 es similar al que aplicó Evans ([29]) para la ecuación (1) y consiste en usar los resultados de regularidad de la solución de un problema del tipo

$$\begin{cases} u_t + Pu = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

cuando $u_0 \in L^2(a,b)$ y P es un operador Lipschitziano en $L^2(a,b)$. ([6]) Todos los resultados corresponden al problema de datos de contorno mixtos y nulos.

En la Sección 4 extendemos estos resultados a los problemas de Dirichlet y Neumann por el método de continuidad. Así mismo probamos que si

$A(x,u,p) = B(p) + G(u)$ el operador $\mathcal{A}u$ resulta m-acretivo en $L^1(a,b)$ si las funciones B, G, y φ satisfacen ciertas condiciones, obteniéndose en consecuencia un resultado de existencia de solución por discretización para la ecuación

$$u_t = D_x(B(D_x(\varphi(u))) + G(\varphi(u)))$$

Cuando B es la identidad esta ecuación aparece en la teoría de la filtración bajo un campo gravitatorio ([30]).

Como caso particular de los resultados de este segundo capítulo hemos demostrado que existe una única solución fuerte (es decir con $u_t \in L^1_{Loc}(0,T;L^1(0,1))$ y tal que la ecuación se satisface en casi todo punto) de la ecuación generalizada de la difusión

$$u_t = D_x(k(u) |u_x|^{m-1} u_x)$$

cuando $m \geq 1$ y la difusividad $k(u)$ satisface $k \geq \nu > 0$ que es de la forma $D_x(A(D_x(\varphi(u))))$ con $A(p) = |p|^{m-1} p$ y $\varphi(x) = \int_0^x k(s)^{1/m} ds$. Notemos que esta ecuación puede ser parabólica degenerada aunque se tenga $k \geq \nu > 0$.

En el Capítulo III consideramos la ecuación (1) cuando se da una distribución inicial de masas y no de concentraciones. Esto resulta natural ya que la ecuación (1) describe un fenómeno de difusión donde $k(u) = \varphi'(u)$ (cuando φ es absolutamente continua) es la difusividad que corresponde a la concentración u.

Este problema también aparece naturalmente como consecuencia del hecho de que a cada solución $u \in L^{\infty}(0,T;L^1(0,1))$ de la ecuación (1) (con datos de contorno mixtos y nulos) le corresponde una medida de Borel μ finita en $[0,1)$ tal que $u(x,t) \rightharpoonup \mu$ $(t \to 0)$ (Teorema 1). Un resultado similar para soluciones no negativas de la ecuación del calor en $\mathbb{R}$ fue probado por Widder ([24]) y luego generalizado por Aronson ([1]) para ecuaciones lineales uniformemente parabólicas en $\mathbb{R}^n$. Así mismo, Pierre ([18]) obtuvo este resultado para soluciones no negativas de (1).

$L^{\infty}(0,T;L^1(0,1))$ resulta ser el espacio donde se encuentran las soluciones fuertes de la ecuación (1) con datos de contorno mixtos nulos y dato inicial una medida finita, de acuerdo con lo probado en el Teorema 2 donde se demuestra existencia y unicidad de solución fuerte, es más, se prueba que $u_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,1))$. De este modo se generalizan los resultados del capítulo II para la ecuación (1) con una distribución inicial de masas finita, flujo 0 en $x = 0$ y concentración 0 en $x = 1$.

Se obtienen además dos resultados de comparación de soluciones (Proposiciones 1 y 2). Uno compara las soluciones puntualmente y el otro compara las funciones de distribución

$$v(x,t) = \int_0^x u(s,t)\, ds$$

El primer resultado es conocido cuando los datos iniciales son funciones de $L^1(0,1)$ y en particular damos una versión del mismo en el capítulo II.

El resultado de comparación de las funciones de distribución se tiene como corolario inmediato de nuestros métodos de demostración y fue obtenido anteriormente para datos iniciales en $L^1(0,1)$ o distribuciones de masa concentrada en un punto: δ_{x_0} , en forma independiente por Carmen Cortázar ([9]) y J. L. Vázquez ([22]) quienes lo han utilizado para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones no negativas de (1).

En la proposición 3 se estudia la continuidad con respecto a los datos iniciales. Se demuestra que

$$\int_0^1 |u_1(x,t) - u_2(x,t)|\, dx \leq \int_0^1 d|\mu_1 - \mu_2|$$

si u_1 y u_2 son soluciones de (1) correspondientes a los datos iniciales μ_1 y μ_2. Cuando $\mu_i = f_i(x)dx$ con $f_i \in L^1(0,1)$, $i=1,2$; la desigualdad anterior es consecuencia de la no expansividad del semigrupo generado por el operador $-D_{xx}(\varphi(u))$ ya que éste es acretivo en $L^1(0,1)$.

Estos resultados se basan en el Lema 1 de la Sección 2 gracias al cual se prueba, además, que u es solución de (1) con dato inicial μ si y sólo si la función de distribución $v(x,t)$ es solución de un problema parabólico del tipo de los estudiados en el capítulo II con dato inicial $F(x) = \mu([0,x))$ que se alcanza en $L^1(0,1)$; aplicando en consecuencia los resultados del capítulo II para obtener existencia y unicidad de solución de (1) para cada medida μ.

Anteriormente, Kamin ([16]) y Pierre ([18]) obtuvieron sendos resultados de existencia de solución débil para datos iniciales medidas no negativas en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^n$ respectivamente.

Finalmente notemos que en los comentarios del capítulo III hemos demostrado que el resultado de existencia de solución fuerte probado en el Teorema 2 es un caso particular del hecho de que el semigrupo $S(t)$, $t > 0$ generado por el operador m-acretivo $-D_{xx}(\varphi(u))$ se extiende al espacio de las medidas finitas en $[0,1)$ siempre que cualquiera sea $u_o \in L^1(0,1)$ la función $u(t) = S(t)u_o$ satisfaga que $u_t \in L^1_{Loc}(0,T;L^1(0,1))$. Así mismo, cuando ésto se sabe sólo para u_o no negativa, se obtiene el mismo resultado para el espacio de medidas finitas no negativas si se conocen resultados de regularidad de las soluciones de la ecuación que satisface la función de distribución $v(x,t)$.

Como aplicación de ésto observamos que se tiene existencia de solución fuerte de la ecuación de la difusión en un medio poroso

$$u_t = D_{xx}(|u|^{m-1} u) \qquad m \geq 1$$

cuando se da una distribución inicial de masas no negativa y se mantiene flujo 0 en $x = 0$ y concentración 0 en $x = 1$. La unicidad de solución fuerte para este problema es consecuencia de la Proposición 2.

En [31] se prueba existencia de solución débil para la ecuación de la difusión en un dominio acotado contenido en $\mathbb{R}^n$, cualquiera sea el dato inicial μ, pero no se ha podido demostrar aún la unicidad de solución en esta clase. En cambio, para el correspondiente problema de Cauchy con dato inicial no negativo, la existencia y unicidad de solución débil es un caso particular de los resultados de Kamin y Pierre antes mencionados.

CAPITULO I

TEORIA DE ECUACIONES DE EVOLUCION EN ESPACIOS DE BANACH

En este capítulo enunciaremos algunos resultados generales de la teoría de ecuaciones de evolución en espacios de Banach que utilizaremos en los capítulos siguientes.

Se trata de resolver, en un contexto muy general, el siguiente problema,

$$(\mathrm{PVI}) \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \mathcal{A}(u(t)) \ni f(t) & 0 < t < \infty \qquad (1.1) \\ u(0) = x_0 & \qquad (1.2) \end{cases}$$

donde se supone dado un espacio de Banach X (con norma $\| \ \|$), un operador $\mathcal{A}$ que aplica un dominio $D(\mathcal{A}) \subset X$ nuevamente en X, pudiendo ser multivaluado, un elemento $x_0 \in \overline{D(\mathcal{A})}$ y una función $f : [0,\infty) \to X$. Se busca una función $u : [0,\infty) \to X$ que resuelva (PVI) en algún sentido apropiado. Una vez hallada esta solución se estudia la unicidad, regularidad, comportamiento respecto a perturbaciones de x_0, $\mathcal{A}$ y f, etc.

En las aplicaciones a ecuaciones en derivadas parciales $\mathcal{Q}$ generalmente es no lineal, no está definido en todo X, es discontinuo (involucra derivadas en otras variables distintas de t). Además X no necesariamente es un Hilbert y puede no ser ni siquiera reflexivo (en particular nos interesará el caso $X = L^1$).

En una situación tan general, las preguntas acerca de resolubilidad dad, unicidad, etc..., no tienen respuesta satisfactoria. Es por lo tanto notable que para cierta clase de operadores no lineales $\mathcal{Q}$ se tenga:

1) (PVI) admite una única solución (quizás en un sentido muy débil)

2) Muchas ecuaciones en derivadas parciales interesantes pueden pensarse en la forma (1.1),(1.2) para un operador $\mathcal{Q}$ de esta clase (en particular las ecuaciones con las que trabajaremos en los capítulos siguientes).

Esta clase comprende a los operadores " m-acretivos " (en contraposición a " disipativos ").

DEFINICION:

Un operador $\mathcal{Q} : D(\mathcal{Q}) \subset X \to 2^X$ se llama acretivo si $\forall \lambda > 0$,

$$\| x - \bar{x} \| \leq \| x - \bar{x} + \lambda (y - \bar{y}) \| \quad \forall x, \bar{x} \in D(\mathcal{Q}) \ , \ y \in \mathcal{Q}(x), \ \bar{y} \in \mathcal{Q}(\bar{x}) \qquad (1.3)$$

Si además

$$\text{Rango } (I + \lambda \mathcal{Q}) = X \quad \text{para algún (equivalentemente para todo)} \lambda > 0 \tag{1.4}$$

entonces se dice que $\mathcal{Q}$ es <u>m-acretivo</u> .

Si X es un espacio de Hilbert, $\mathcal{Q}$ se llama monótono y monótono maximal respectivamente y (1.3), (1.4) es equivalente a que

$$(y - \bar{y},\ x - \bar{x}) \geqslant 0 \qquad \forall\ x, \bar{x} \in D(\mathcal{Q})\ ,\ y \in \mathcal{Q}(x),\ \bar{y} \in \mathcal{Q}(\bar{x}) \tag{1.5}$$

y además,

Cualquiera sea $B : D(B) \subset X \to 2^X$ que satisfaga (1.5) con $\mathcal{Q}$ reemplazado por B y tal que $D(\mathcal{Q}) \subset D(B)$ y $\mathcal{Q}(x) \subset B(x)$ para todo $x \in D(\mathcal{Q})$; se tiene $\mathcal{Q} = B$.

Una clase importante de operadores monótonos maximales son los subdiferenciales de funcionales convexas semicontinuas inferiormente, es decir, si $\varphi : D(\varphi) \subset X \to \mathbb{R}$ (X Hilbert) es convexa (i.e.

$$\varphi(tx + (1 - t)\bar{x}) \leqslant t\varphi(x) + (1 - t)\varphi(\bar{x}) \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,\ x, \bar{x} \in D(\varphi) \quad),$$

semicontinua inferiormente y el subdiferencial de φ es :

$$\partial\varphi(x) = \{ y \in X / \ \varphi(\bar{x}) - \varphi(x) \geqslant (y, \bar{x} - x) \qquad \forall\ \bar{x} \in D(\varphi) \} \quad ,$$

entonces $\partial\varphi$ es un operador monótono maximal con dominio

$$D(\partial\varphi) = \{ x \in D(\varphi) / \ \partial\varphi(x) \neq \emptyset \}$$

La idea para resolver el problema (1.1), (1.2) cuando $\mathcal{Q}$ es m-acretivo, es reemplazar (PVI) por una sucesión de problemas aproximados $(PVI)_n$ en los cuales la derivada en t se reemplaza por un cociente incremental, dado un paso de longitud $\lambda_n > 0$, y el término inhomogéneo f(t) se reemplaza por una función escalera aproximante $f^n(t)$ ($= f_k^n$ para $k\lambda_n \leq t < (k+1)\lambda_n$) :

$$
(PVI)_n \quad \begin{cases} \dfrac{x_k^n - x_{k-1}^n}{\lambda_n} + \mathcal{Q}(x_k^n) \ni f_k^n & k = 1,\dots,N(n). \\ x_0^n = x_0 \end{cases}
$$

Como $\mathcal{Q}$ satisface (1.4), podemos resolver recursivamente $(PVI)_n$ y construir una solución aproximada constante a trozos $u^n(t)$ ($= x_k^n$ para $k\lambda_n \leq t < (k+1)\lambda_n$). El siguiente teorema da condiciones en las cuales se asegura que las soluciones aproximadas $u^n(t)$ convergen a una función u(t).

<u>TEOREMA DE GENERACION</u> ([12])

Sea $\mathcal{Q}$ un operador m-acretivo y $x_0 \in \overline{D(\mathcal{Q})} \subset X$. Supongamos que $f \in L^1(0,T;X)$ para algún $T > 0$, y que las aproximantes $f^n \to f$ en $L^1(0,T:X)$ $(n \to \infty)$, $\lambda_n \to 0$.

Entonces las funciones $u^n(t)$ convergen uniformemente en $[0,T]$ a una función límite u(t).

Cuando f = 0 escribiremos $u(t) = S_{\mathcal{Q}}(t)x_o$ y llamaremos a la familia de operadores $S_{\mathcal{Q}}(t)$ $(t \geqslant 0)$ así definida, el semigrupo generado por $\mathcal{Q}$ y cada operador $S_{\mathcal{Q}}(t)$ resulta no expansivo, es decir. satisface

$$\| S_{\mathcal{Q}}(t)x_o - S_{\mathcal{Q}}(t)y_o \| \leq \| x_o - y_o \| \qquad \forall\, x_o, y_o \in \overline{D(\mathcal{Q})}.$$

A la solución dada por el teorema de generación la llamaremos <u>solución por discretización</u> .

Se prueba que existe una única solución por discretización. Es decir, si cambiamos el paso $\lambda_n \to 0$ o las funciones escalonadas $f^n \to f$ en $L^1(0,T;X)$, la función límite $v(t)$ que da el teorema de generación en este caso, coincide con la función $u(t)$ que teníamos.

Hay un teorema análogo a éste cuando se tiene el siguiente problema:

$$(PVI)' \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \mathcal{Q}(t)(u(t)) \ni f(t) \\ u(0) = x_o \end{cases}$$

y la familia de operadores m-acretivos $\mathcal{Q}(t)$ tiene un "módulo de continuidad" en X ([14]). En particular, ésto permitiría estudiar un problema en derivadas parciales con datos de contorno variables.

Se tienen los siguientes resultados para la solución por discretización de (PVI).

TEOREMA DE REGULARIDAD

i) $u(t) \in C([0,T]; X)$; y $u(t)$ es continua Lipschitz como función a valores en X si $f(t)$ lo es y $x_0 \in D(\mathcal{Q})$.

ii) ([7]). Si (PVI) tiene una solución fuerte $v(t)$, es decir si $v(t)$ es diferenciable como función a valores en X con $v' \in L^1_{Loc}(0,T; X)$, $v(t) \in D(\mathcal{Q})$ y

$$f(t) - v'(t) \in \mathcal{Q}(v(t)) \qquad \text{pp } t \in (0,T);$$

entonces $u = v$.

iii) ([11],[14]) Si u es diferenciable en un punto $t_0 > 0$ y si t_0 es un punto de Lebesgue de f, entonces $u(t_0) \in D(\mathcal{Q})$ y

$$f(t_0) - \frac{du}{dt}(t_0) \in \mathcal{Q}(u(t_0))$$

En particular se deduce que no puede haber más de una solución fuerte de (PVI) si $\mathcal{Q}$ es m-acretivo.

Sin embargo hay ejemplos que demuestran que $u(t)$ no siempre es una solución fuerte y que ni siquiera puede afirmarse que $u(t) \in D(\mathcal{Q})$ para algún $t > 0$, aunque se suponga $f = 0$ y $x_0 \in D(\mathcal{Q})$.([11],[23],[19],[13]).

El siguiente teorema asegura que la solución por discretiación construida en el teorema de generación se comporta bien ante pequeños cambios de x_o, $\mathcal{Q}$ y f.

TEOREMA DE PERTURBACION ([3])

Sean $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}^n$ (n = 1,2,....) operadores m-acretivos, f y f^n en $L^1(0,T;X)$ para algún $T > 0$ (n = 1,2,...), y $x_o \in \overline{D(\mathcal{Q})}$, $x_o^n \in \overline{D(\mathcal{Q}^n)}$ (n = 1,2,...). Notemos con u(t) (resp. $u^n(t)$) la solución por discretización construida en el teorema de generación correspondiente a $\mathcal{Q}$, f y x_o (resp. $\mathcal{Q}^n$, f^n y x_o^n). Si

i) $x_o^n \to x_o$ en X

ii) $f^n \to f$ en $L^1(0,T;X)$ y

iii) $\mathcal{Q}^n \to \mathcal{Q}$ en el sentido de que $\forall \lambda > 0$, $x \in X$

$$(I + \lambda \mathcal{Q}^n)^{-1}x \to (I + \lambda\mathcal{Q})^{-1}x \quad \text{en} \quad X$$

cuando $n \to \infty$. Entonces

$$u^n \to u \qquad \text{en } C([0,T];X) \qquad (n \to \infty).$$

Introduzcamos finalmente una notación que permita una caracterización alternativa de la acretividad (que muchas veces es más fácil de verificar en la práctica que (1.3)). Para $x,y \in X$, definimos

$$[x,y]_+ = \inf_{\lambda>0} \frac{\| x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$$

Es fácil verificar que $\mathcal{Q}$ es acretivo si y sólo si

$$0 \leq [x-\bar{x}, y-\bar{y}]_+ \qquad \forall x,\bar{x} \in D(\mathcal{Q}), \; y \in \mathcal{Q}(x), \; \bar{y} \in \mathcal{Q}(\bar{x}) \qquad (1.3)'$$

La ventaja de esta caracterización es que en ciertos espacios X el corchete $[\ ,\ ]_+$ es fácil de calcular:

<u>TEOREMA</u> ([21])

Sea $\Omega \subset R^n$

i) Si $X = L^p(\Omega)$ para $1 < p < \infty$

$$[f,g]_+ = \begin{cases} \dfrac{1}{\|f\|^{p-1}} \displaystyle\int_\Omega |f|^{p-1} \text{ signo } f \quad g \; dx & f \not\equiv 0 \\ \|g\| \quad \text{si} \quad f \equiv 0. \end{cases}$$

ii) Si $X = L^1(\Omega)$

$$[f,g]_+ = \int_{[f>0]} g \; dx - \int_{[f<0]} g \; dx + \int_{[f=0]} |g| \; dx$$

donde $[u > v] = \{ x \in \Omega / \; u(x) > v(x) \}$, y análogamente para $[u = v]$.

CAPITULO II

El objetivo de este capítulo es obtener un resultado de existencia de solución fuerte para una clase bastante amplia de ecuaciones parabólicas, posiblemente degeneradas, que pueden pensarse como ecuaciones de evolución en el espacio de Banach $L^1(0,b)$, $b > 0$, gobernadas por un operador m-acretivo. La unicidad es consecuencia de los resultados generales enunciados en el Capítulo I. De todos modos saldrá como consecuencia de un resultado de comparación de soluciones por discretización que obtendremos en la Sección 1, donde también demostraremos que el operador

$$\mathcal{A}u = -D_x(A(x, \varphi(u(x)), D_x(\varphi(u(x)))))$$

con condiciones de contorno fijas es acretivo en L^1 bajo ciertas condiciones sobre $A(x,u,p)$ y $\varphi(x)$.

En la Sección 2 probaremos que si nos restringimos a considerar el operador $\mathcal{A}u$ con $A = A(p)$ y condiciones de contorno mixtas y nulas, resultará m-acretivo.

A continuación probaremos que si $A(p)$ y $\varphi(x)$ son estrictamente crecientes, continuas con $A(0) = \varphi(0) = 0$, entonces $\overline{D(\mathcal{A})} = L^1(0,b)$ y en consecuencia tendremos el siguiente teorema de existencia de solución por discretización con dato inicial en $L^1(0,b)$, a saber

TEOREMA 1

Si $A(p)$ y $\varphi(x)$ son funciones estrictamente crecientes,continuas con $A(0) = \varphi(0) = 0$ y tales que existe $c > 0$ tal que

$$|A(p)| \geq c|p| \quad ,|p| \to \infty$$

$$|\varphi(x)| \geq c|x| \quad ,|x| \to \infty$$

Entonces, para toda función $u_o \in L^1(0,b)$ ($b > 0$ cualquiera) y para todo $T > 0$ existe una función $u \in C([0,T];L^1(0,b))$ solución por discretización del problema

$$\left.\begin{array}{l} u_t = D_x(A(D_x(\varphi(u)))) \\ \varphi(u)(0,t) = 0 \\ A(D_x(\varphi(u)))(b,t) = 0 \\ u(0) = u_o \end{array}\right\}$$

También probaremos que si $A(x,u,p) = B(p) + G(u)$; B,G,φ son continuas; B,φ son estrictamente crecientes con

$$|B(p)| \geq c_o|p| \quad ,|p| \to \infty$$

$$|\varphi(x)| \geq c_1|x| \quad ,|x| \to \infty$$

$$\lim_{K\to\infty} \frac{M(K)}{K} = \varkappa, \text{ si } M(K) = \sup_{|s|\leq K} |G(s)|$$

Entonces, siempre que c_o, c_1, $\varkappa$ y b satisfagan

$$\varkappa < \frac{c_o c_1}{b^2}$$

$\mathcal{a}u = -D_x(\ \beta(D_x(\varphi(u))) + G(u)\ )$, será m-acretivo en $L^1(0,b)$; obteniendo en consecuencia un resultado análogo al Teorema 1 cuando $u_o \in \overline{D(\mathcal{a})}$.

En la Sección 3 probaremos que si a las hipótesis del Teorema 1 le agregamos que φ^{-1} sea continua Lipschitz, la solución dada por el Teorema 1 es una solución fuerte, más aún obtendremos

$$u_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,b))$$

Finalmente, en la Secoión 4 extenderemos los resultados anteriores al correspondiente problema de Dirichlet y al de Neumann.

SECCION 1

Sea $A(x,u,p)$ una función continua en las 3 variables y estrictamente creciente como función de la variable p para x y u fijos. Sea $\varphi(x)$ una función continua $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona creciente.

PROPOSICION 1

Sea $D(\mathcal{A}) = \{ u \in L^1(0,b) / \varphi(u) \in W^{1,1}(0,b),\ \varphi(u)(0) = g_0,$

$$A(x,\varphi(u(x)),\ D_x(\varphi(u(x)))) \in W^{1,1}(0,b) \text{ y}$$

$$A(x,\varphi(u(x)),\ D_x(\varphi(u(x))))\Big|_{x=b} = g_1 \Big\},$$

donde $W^{1,1}(0,b) = \{ f \in L^1(0,b) / f' \in L^1(0,b) \}$ con lo cuál $W^{1,1}(0,b) \subset C([0,b])$.

Sea $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to L^1(0,b)$ definido por

$$\mathcal{A}u = -D_x(A(x,\varphi(u(x)),\ D_x(\varphi(u(x)))))$$

donde A y φ están en las condiciones anteriores. Entonces $\mathcal{A}$ es acretivo en $L^1(0,b)$.

DEMOSTRACION

De acuerdo con la caracterización de Sato ([21]) basta ver que si $u, v \in D(\mathcal{A})$,

$$\int_{[u\neq v]} (\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v))\operatorname{signo}(u-v)\,dx + \int_{[u=v]} |\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v)|\,dx \geqslant 0$$

Probaremos algo más fuerte que nos permitirá obtener un resultado de comparación de soluciones por discretización, a saber

$$\int_{[u>v]} (\mathcal{a}(u) - \mathcal{a}(v))\, dx \geq 0 \qquad \text{si } u,v \in D(\mathcal{a}),$$

donde $[u>v] = \{ x \in [0,b] / \ u(x) > v(x) \}$ y análogamente para los otros corchetes. En efecto,

$$\int_{[u>v]} (\mathcal{a}(u) - \mathcal{a}(v))\, dx = \int_{\varphi(u)>\varphi(v)} (\mathcal{a}(u) - \mathcal{a}(v))\, dx \quad +$$

$$+\int_{[u>v]\cap[\varphi(u)=\varphi(v)]} (\mathcal{a}(u) - \mathcal{a}(v))\, dx.$$

Probaremos

a) $$-\int_{[\varphi(u)>\varphi(v)]} (D_x(A(x,\varphi(u), D_x(\varphi(u))) - D_x(A(x,\varphi(v), D_x(\varphi(v)))) \, dx \geq 0$$

b) $\mathcal{a}(u)(x) = \mathcal{a}(v)(x) \qquad \text{pp } x \in [\varphi(u) = \varphi(v)]$.

Demostraremos b). Sea

$$C = \{ x \in [0,b] / \ \varphi(u(x)) = \varphi(v(x)) \ \text{ y } \mathcal{a}(u)(x) \neq \mathcal{a}(v)(x) \}$$

Probaremos que C es un conjunto de puntos aislados (salvo medida nula), con lo cual habremos demostrado b). Sean

$C_1 = \{ x \in C/$ existe $D_x(\varphi(u(x))$ y $D_x(\varphi(v(x))$ como límite del cociente incremental y son iguales; y existe $D_x(A(x,\varphi(u), D_x(\varphi(u)))$ y $D_x(A(x,\varphi(v), D_x(\varphi(v)))$ como límite del cociente incremental $\}$

$C_2 = \{ x \in C/$ existe $D_x(\varphi(u(x))$ y $D_x(\varphi(v(x))$ como límite del cociente incremental y son distintas $\}$

Llamaremos $\tilde{C}$ a $C_1 \cup C_2$. Como C y $\tilde{C}$ difieren en un conjunto de medida nula ya que las derivadas existen en casi todo punto como límite del cociente incremental, bastará probar que tanto C_1 como C_2 son conjuntos discretos.

Sea $x_o \in C_1$, entonces $\varphi(u)(x_o) = \varphi(v)(x_o)$ y $D_x(\varphi(u))(x_o) = D_x(\varphi(v))(x_o)$. Supongamos que existe una sucesión $(x_n) \subset C_1$ tal que $x_n \to x_o$. Se tiene entonces,

$$\mathcal{Q}(u)(x_o) - \mathcal{Q}(v)(x_o) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{A(x,\varphi(u), D_x(\varphi(u)))\Big|_{x=x_n} - A(x,\varphi(u), D_x(\varphi(u)))\Big|_{x=x_o}}{x_n - x_o} - \right.$$

$$\left. - \frac{A(x,\varphi(v), D_x(\varphi(v)))\Big|_{x=x_n} - A(x,\varphi(v), D_x(\varphi(v)))\Big|_{x=x_o}}{x_n - x_o} \right) = 0$$

ya que $A(x,\varphi(u), D_x(\varphi(u)))_{x=\bar{x}} = A(x,\varphi(v), D_x(\varphi(v)))_{x=\bar{x}}$ para todo $\bar{x} \in C_1$.

Como ésto es un absurdo se tiene que C_1 es discreto.

Sea $x_o \in C_2$, entonces $D_x(\varphi(u))\Big|_{x=x_o} \neq D_x(\varphi(v))\Big|_{x=x_o}$ y $\varphi(u)(x_o) = \varphi(v)(x_o)$. Supongamos que exista una sucesión $(x_n) \subset C_2$ con $x_n \to x_o$, se tendría

$$D_x(\varphi(u))\Big|_{x=x_o} - D_x(\varphi(v))\Big|_{x=x_o} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\varphi(u)(x_n) - \varphi(u)(x_o)) - (\varphi(v)(x_n) - \varphi(v)(x_o))}{x_n - x_o} = 0$$

lo que es un absurdo. Por lo tanto la medida de C es 0 y hemos probado b). Veamos ahora que vale a).

Como $u,v \in D(\mathcal{Q})$ se sigue que $\varphi(u)$ y $\varphi(v)$ son funciones continuas en $[0,b]$ para las cuales existe $D_x(\varphi(u))$ en casi todo punto y además $A(x,\varphi(u), D_x(\varphi(u)))$ es igual en casi todo punto a una función absolutamente continua en $[0,b]$: $Z(x)$. Por lo tanto en un entorno de cada punto $x \in [0,b]$ se tiene

$$D_x(\varphi(u))(x) = G(x,\varphi(u)(x), Z(x))$$

ya que $A(x,u,p)$ es continua en las 3 variables y estrictamente creciente en p y $\varphi(u)(x)$, $Z(x)$ son continuas. Se tiene entonces que $D_x(\varphi(u))$ es una función continua. Probaremos entonces, para simplificar la notación, lo siguiente:

Sean $z(x)$, $w(x)$ dos funciones continuas en $[0,b]$ con derivadas $z'(x)$ y $w'(x)$ continuas en $[0,b]$ y tales que $A(x, z(x), z'(x))$, $A(x, w(x), w'(x))$ son continuas en $[0,b]$ con derivada total con respecto a x en $L^1(0,b)$. Supongamos que $z(0) = w(0)$ y además

$$A(x,z(x), z'(x))\Big|_{x=b} = A(x,w(x), w'(x))\Big|_{x=b} \qquad (1)$$

entonces,

$$\int_{[z>w]} (D_x(A(x,z(x), z'(x))) - D_x(A(x, w(x), w'(x)))) \, dx \leqslant 0$$

En efecto, como z y w son continuas $[z > w] = \bigcup(x_n,x^n)$ es una unión disjunta de intervalos abiertos donde x_n puede ser 0 o x^n ser b. Si $x_n \in (0,b)$, entonces

$$z(x_n) = w(x_n).$$

$$x^n \in (0,b) \quad \Rightarrow \quad z(x^n) = w(x^n)$$

Si $x_n = 0$ sabemos que $z(x_n) = w(x_n)$ por hipótesis; si $x^n = b$ se tiene (1), por lo tanto

$$\int_{[z > w]} \left(D_x(A(x, z(x), z'(x))) - D_x(A(x, w(x), w'(x)))\right) dx =$$

$$= \sum_n \left(A(x,z(x), z'(x)) - A(x, w(x), w'(x))\right) \Big|_{x_n}^{x^n}$$

Si $x^n = b$, el término correspondiente se anula, por lo tanto será suficiente ver que se $x_n \in [0,b)$, $x^n \in (0,b)$ entonces

$$z'(x_n) \geqslant w'(x_n)$$

$$z'(x^n) \leqslant w'(x^n)$$

pues en ese caso cada término de la suma será $\leqslant 0$ y se tendrá lo buscado.

Como z' y w' son continuas en $[0,b]$ se tiene

$$z'(x_n) - w'(x_n) = \lim_{x \to x_n^+} \frac{1}{x-x_n} \int_{x_n}^{x} (z'(s) - w'(s)) \, ds =$$

$$= \lim_{x \to x_n^+} \frac{z(x) - w(x)}{x - x_n} \geqslant 0.$$

Análogamente, $z'(x^n) \leqslant w'(x^n)$ con lo cuál concluye la demostración.

OBSERVACION

De la demostración se desprende que si $D(\mathcal{Q})$ es el dominio correspondiente a datos de tipo Dirichlet o de tipo Neumann, $\mathcal{Q}$ también resulta acretivo.

PRINCIPIO DE COMPARACION

Probaremos ahora un resultado de comparación de soluciones por discretización que saldrá como consecuencia de que este operador es todavía mejor que acretivo es decir que

$$\int_{[u>v]} (\mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(v)) \, dx \geqslant 0$$

En efecto, sean $A(x,u,p)$ y $\varphi(x)$ como antes, sea $T > 0$ y $f(x,t)$, $F(x,t)$ en $L^1(0,T;L^1(0,b))$; $g_o(t)$, $g_1(t)$, $G_o(t)$, $G_1(t)$ definidas en $(0,T)$, $u_o(x)$, $v_o(x)$ en $L^1(0,b)$. Supongamos que $u,v \in C([0,T];L^1(0,b))$ son soluciones por discretización de (PVI)' (Capítulo I), con

$$\begin{aligned} D(\mathcal{Q}(t)) = \{ u \in L^1(0,b) / \ \varphi(u) \in W^{1,1}(0,b),\ \varphi(u)(0) = g_o(t), \\ A(x, \varphi(u), D_x(\varphi(u))) \in W^{1,1}(0,b) \text{ y} \\ A(x, \varphi(u), D_x(\varphi(u)))\big|_{x=b} = g_1(t) \} \end{aligned}$$

para $u(t)$, y $D(\mathcal{Q}(t))$ es el conjunto que se define análogamente para $v(t)$ reemplazando $g_o(t)$ por $G_o(t)$ y $g_1(t)$ por $G_1(t)$; donde

$$\mathcal{Q}(t)(u(t)) = \mathcal{Q}(u(t)) \qquad \text{si } u(t) \in D(\mathcal{Q}(t)).$$

Supongamos que las soluciones aproximadas $u^n(t)$ y $v^n(t)$ están definidas sobre particiones tales que $f^n(t)$ ($= f(.,t_k^n)$ $\ t_{k-1}^n \leqslant t < t_k^n$);

$F^n(t)$ ($= F(.,t_k^n)$ $\ t_{k-1}^n \leqslant t < t_k^n$) satisfacen $f^n(x,t) \leqslant F^n(x,t)$ pp x.

Supongamos que además se tiene $g_o(t_k^n) \leqslant G_o(t_k^n)$; $g_1(t_k^n) \leqslant G_1(t_k^n)$ y $u_o(x) \leqslant v_o(x)$ pp $x \in (0,b)$. Entonces $u(x,t) \leqslant v(x,t)$ pp (x,t).

OBSERVACION 1

De acuerdo con lo demostrado antes y el Teorema de Generación, si $\mathcal{A}(u)$ es además m-acretivo, (como es el caso cuando $A = A(p)$ y se satisfacen ciertas condiciones de crecimiento en el infinito, como se probará en la Sección 2), y si se toman datos de contorno constantes entonces siempre que

$$f \leqslant F \quad pp$$

$$g_o \leqslant G_o$$

$$g_1 \leqslant G_1$$

$$u_o \leqslant v_o \quad pp$$

se está en las condiciones de este principio de comparación, pues la partición t_k^n puede tomarse en forma arbitraria con tal de que $f^n \to f$, $F^n \to F$. Por lo tanto, en este caso es

$$u(x,t) \leqslant v(x,t) \quad pp.$$

DEMOSTRACION DEL PRINCIPIO DE COMPARACION

Sea $H = \left\{ (x,t) \in (0,b)x(0,T) / \ u(x,t) > v(x,t) \right\}$. Probaremos que la medida de H es 0. Si no fuera así se tendría, para n suficientemente grande, que si $H_n = \left\{ (x,t) \in (0,b)x(0,T) / \ u^n(x,t) > v^n(x,t) \right\}$ entonces la medida de H_n sería positiva. En efecto, como $u^n(t) \to u(t)$ uniformemente , $v^n(t) \to v(t)$ uniformemente, como funciones a valores en $L^1(0,b)$, se tiene

$$\int_0^T \int_0^b \chi_H(x,t)\,(u^n(x,t) - v^n(x.t))\ dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^T \int_0^b \chi_H(x,t)\,(u(x,t) - v(x,t))\ dx\,dt \quad - \quad \varepsilon \quad = K \qquad \text{si } n \geqslant n_o(\varepsilon).$$

Tomando ε suficientemente chico, si la medida de H es positiva, $K > 0$.

Ahora bien, por definición de solución aproximada,

$$\sum_{k=1}^{N(n)} \int_0^T \int_0^b \chi_{H_n}(x,t)\, \chi_{[t^n_{k-1},t^n_k)}(t) \left\{ \left(\frac{u^n_k - u^n_{k-1}}{t^n_k - t^n_{k-1}} - \frac{v^n_k - v^n_{k-1}}{t^n_k - t^n_{k-1}} \right) - \right.$$
$$\left. - (f(x,t^n_k) - F(x,t^n_k)) \right\} \ dx\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{N(n)} \int_0^T \int_0^b \chi_{H_n}(x,t)\, \chi_{[t^n_{k-1},t^n_k)}(t)\ \ D_x(\ A(x,\ \varphi(u^n_k),\ D_x(\ \varphi(u^n_k))) -$$
$$- A(x,\ \varphi(v^n_k),\ D_x(\ \varphi(v^n_k))))\ dx\,dt$$

donde χ_Ω notará siempre la función característica del conjunto Ω .

Tomemos el miembro derecho (md) de la última ecuación. Como por hipótesis el integrando está en $L^1((0,b)x(0,T))$,

$$(md) = \sum_{k=1}^{N(n)} \int_0^T \chi_{[t^n_{k-1},t^n_k)}(t) \left[\int_0^b \chi_{H_n}(x,t)\ \ D_x(\ A(x,\ \varphi(u^n_k),\ D_x(\ \varphi(u^n_k))) - \right.$$
$$\left. - A(x,\ \varphi(v^n_k),\ D_x(\ \varphi(v^n_k))))\ dx \right] dt$$

Fijemos un $t \in [t^n_{k-1}, t^n_k)$, entonces

$$\int_0^b \chi_{H_n}(x,t)\ D_x(\ A(x,\ \varphi(u^n_k),\ D_x(\ \varphi(u^n_k))) - A(x,\ \varphi(v^n_k),\ D_x(\ \varphi(v^n_k))))\ \ dx =$$

$$= \int_{\{x \in (0,b)/\ u^n(x,t) > v^n(x,t)\} = [u^n_k > v^n_k] \subset (\delta^n_k, b) \text{ con } \delta^n_k > 0} D_x(\ A(x,\ \varphi(u^n_k),\ D_x(\ \varphi(u^n_k))) - A(x,\ \varphi(u^n_k),\ D_x(\ \varphi(u^n_k)))\ \ )\ dx \leqslant 0$$

El hecho de que esta integral es $\leqslant$ 0 fue probado en la Proposición 1. Por lo tanto (md) $\leqslant$ 0.

Tomemos entonces el miembro izquierdo (mi). Veremos que es positivo con lo cuál llegaremos a una contradicción que provino de suponer que la medida de H es positiva, y con ésto concluirá la demostración.

Como u_k^n , $v_k^n \in L^1(0,b)$,

$$(mi) = \int_0^b \left[\sum_{k=1}^{N(n)} \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \chi_{H_n}(x,t) \left(\frac{u_k^n - v_k^n}{t_k^n - t_{k-1}^n} - \frac{u_{k-1}^n - v_{k-1}^n}{t_k^n - t_{k-1}^n} \right) dt \right] dx -$$

$$- \int_0^b \left[\sum_{k=1}^{N(n)} \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \chi_{H_n}(x,t) \, (\, f(x,t_k^n) - F(x,t_k^n) \,) \, dt \right] dx$$

Como $f(x,t_k^n) \leqslant F(x,t_k^n)$ pp $x \in (0,b)$ sólo debemos probar que el 1° término es positivo. Fijemos un $x \in (0,b)$ y supongamos que $\chi_{H_n}(x,t) = 1$ para algún $t \in [t_{k-1}^n, t_k^n)$, entonces $\chi_{H_n}(x,t) = 1$ para todo t en el intervalo $[t_{k-1}^n, t_k^n)$ pues $u^n(x,t) = u_k^n(x)$ es constante como función de t en este intervalo. Por definición de H_n se tiene que en este caso $u_k^n(x) > v_k^n(x)$. Si $\chi_{H_n}(x,t) = 0$ para $t \in [t_{k-1}^n, t_k^n)$ es porque $u_k^n(x) \leqslant v_k^n(x)$. Por lo tanto, para cada $x \in (0,b)$ el integrando es de la forma

$$\sum_{j=1}^{J} \left(\; (u_{k_j}^n - v_{k_j}^n)(x) - (u_{k_j-1}^n - v_{k_j-1}^n)(x) \; \right)$$

Sabemos que $u_{k_j}^n(x) > v_{k_j}^n(x)$, $j=1....J$. Si $u_{k_j-1}^n(x) \leqslant v_{k_j-1}^n(x)$, el término j-ésimo será positivo. Supongamos que para algún $j=1....J$

$$u^n_{k_j-1}(x) > v^n_{k_j-1}(x)$$

entonces necesariamente debe haber un m tal que $k_j-1 = m$ y por lo tanto el término negativo

$$-(u^n_{k_j-1}(x) - v^n_{k_j-1}(x))$$

se cancela y no aporta a la suma final.

Observemos que el único inconveniente en este razonamiento sería que k_j-1 fuera 0 con lo cuál no habría un término que lo cancelara. Sin embargo, por hipótesis para casi todo $x \in (0,b)$,

$$u^n_o(x) = u_o(x) \leq v_o(x) = v^n_o(x)$$

De donde el integrando es estrictamente positivo para casi todo $x \in (0,b)$ y se tiene

$$0 < (mi) = (md) \leq 0$$

absurdo.

OBSERVACION 2

El principio de comparación sigue siendo válido si se consideran condiciones de contorno de tipo Dirichlet o de tipo Neumann, sólo que en este último caso se deberá pedir que el flujo de ambas funciones en los puntos de la forma $(0,t)$ coincida pudiendo valer la desigualdad estricta en el borde (b,t). Por lo tanto se tiene el siguiente

PRINCIPIO DEL MAXIMO 1

Sea $u(x,t)$ una solución por discretización del problema

$$\left.\begin{aligned} & u_t = D_x(A(x, \varphi(u(x,t)), D_x(\varphi(u(x,t))))) \\ & \varphi(u)(0,t) = g_o(t) \\ & \varphi(u)(b,t) = g_1(t) \\ & u(x,0) = u_o(x) \end{aligned}\right\} \quad (P1)$$

con $g_o, g_1 \in L^{\infty}(0,T)$, $u_o \in L^{\infty}(0,b)$. Supongamos que $A(x,u,0) = 0$ para todo $(x,u) \in \mathbb{R}^2$. Entonces

$$\min \left\{ \inf u_o(x),\ \inf g_o(t),\ \inf g_1(t) \right\} \leqslant u(x,t) \leqslant$$
$$\leqslant \max \left\{ \sup u_o(x),\ \sup g_o(t),\ \sup g_1(t) \right\}$$

para casi todo $(x,t) \in (0,b)x(0,T)$.

DEMOSTRACION

Sea $v(x,t) = c$ = constante, entonces u y v están en las condiciones del Principio de comparación. En efecto, sea (t_k^n) una sucesión de particiones sobre las cuales hay definida una sucesión $u^n(x,t)$ de soluciones aproximadas del problema (P1) con $u^n(\cdot\ , t) \to u(\cdot\ ,t)$ en $L^1(0,b)$ uniformemente en $[0,T]$ (la existencia de esta sucesión está dada por la definición de solución por discretización).

Sea ahora $v^n(x,t) = c$ para todo $x \in (0,b)$, $t \in [t^n_{k-1}, t^n_k)$. Entonces v^n es una sucesión de soluciones aproximadas definidas sobre la misma sucesión de particiones (t^n_k). En efecto, como $v^n_k = c$ para todo k y n,

$$\frac{v^n_k - v^n_{k-1}}{t^n_k - t^n_{k-1}} = 0 = D_x(\ A(x, \varphi(v^n_k), D_x(\ \varphi(v^n_k))))$$

pues $D_x(\ \varphi(v^n_k)) = 0$ y $A(x,u,0) = 0 \quad \forall\ (x,u)$.

Supongamos ahora que c es tal que

$$u_o(x) \leqslant c \qquad \text{pp } x$$

$$g_o(t) \leqslant c \qquad \text{pp } t$$

$$g_1(t) \leqslant c \qquad \text{pp } t$$

entonces $\qquad u(x,t) \leqslant c \qquad \text{pp } (x,t).$

Análogamente, si

$$u_o(x) \geqslant c \qquad \text{pp } x$$

$$g_o(t) \geqslant c \qquad \text{pp } t$$

$$g_1(t) \geqslant c \qquad \text{pp } t$$

se sigue que $\qquad u(x,t) \geqslant c \qquad \text{pp } (x,t).$

Por lo tanto si tomamos

$$c = \max \{ \sup u_o(x),\ \sup g_o(t),\ \sup g_1(t) \} \qquad \text{ó}$$

$$c = \min \{ \inf u_o(x),\ \inf g_o(t),\ \inf g_1(t) \}$$

se sigue lo enunciado.

PRINCIPIO DEL MAXIMO 2

Si $u(x,t)$ es una solución por discretización del problema

$$\left.\begin{array}{l} u_t = D_x(A(x, \varphi(u(x,t)), D_x(\varphi(u(x,t))))) \\ \varphi(u)(0,t) = 0 \qquad (\text{ó } A(x, \varphi(u(x,t)), D_x(\varphi(u(x,t))))\big|_{x=0} = 0) \\ A(x, \varphi(u(x,t)), D_x(\varphi(u(x,t))))\big|_{x=b} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{array}\right\}$$

con $u_0 \in L^{\infty}(0,b)$ y $A(x,u,0)= 0$, entonces $u \in L^{\infty}((0,b)x(0,T))$ y

$$\| u \|_{L^{\infty}((0,b)x(0,T))} \leq \| u_0 \|_{L^{\infty}(0,b)}$$

DEMOSTRACION

La demostración es igual a la del principio de máximo 1, tomando sucesivamente

$$c = \| u_0 \|_{L^{\infty}(0,b)} ; \qquad - c = \| u_0 \|_{L^{\infty}(0,b)}$$

y observando que las constantes también son soluciones por discretización del problema con datos de contorno

$$\varphi(u)(0,t) = \varphi(c) \text{ pp } t \quad (\text{ó } A(x, \varphi(u(x,t)), D_x(\varphi(u(x,t))))\big|_{x=0} = 0)$$

$$A(x, \varphi(u(x,t)), D_x(\varphi(u(x,t))))\big|_{x=b} = 0 \qquad \text{pp } t$$

y que se las puede aproximar por soluciones aproximadas definidas sobre cualquier sucesión de particiones (t_k^n).

OBSERVACION 3

Se deduce inmediatamente de la demostración de la Proposición 1 el siguiente hecho.

Si $D(\mathcal{Q})$ y $\mathcal{Q}$ están definidos como en dicha proposición con $g_0 = g_1 = 0$, $A(x,u,0) = 0 \ \forall \ (x,u)$ y si $u(x) \in D(\mathcal{Q})$ es una (resulta única por la acretividad) solución de la ecuación

$$u(x) + \lambda \mathcal{Q}(u)(x) = f(x) \qquad \lambda > 0$$

con $f \in L^{\infty}(0,b)$. Entonces $u \in L^{\infty}(0,b)$ y

$$\| u \|_{L^{\infty}(0,b)} \leqslant \| f \|_{L^{\infty}(0,b)}$$

En efecto, nuevamente $v(x) = c$ es solución de

$$v(x) + \lambda \mathcal{Q}(v)(x) = c$$

ya que $\mathcal{Q}(v)(x) = 0$ pues v es constante, y por lo tanto

$$u(x) - v(x) + \lambda \left(\mathcal{Q}(u)(x) - \mathcal{Q}(v)(x) \right) = f(x) - c$$

de donde, si $f(x) \leqslant c$ pp

$$u(x) - v(x) \leqslant \lambda \left(\mathcal{Q}(v)(x) - \mathcal{Q}(u)(x) \right) \qquad (2)$$

y por lo tanto $u(x) \leqslant v(x)$ pp ya que hemos probado que

$$\int_{[u > v]} (\mathcal{Q}(v)(x) - \mathcal{Q}(u)(x)) \ dx \leqslant 0$$

y por lo tanto si la medida de $[u > v] > 0$, integrando (2) sobre este conjunto se llega a una contradicción.

Análogamente, si $f(x) \geqslant c$ pp se tiene $u(x) \geqslant v(x)$ pp. Recordando que $v(x) = c$ y tomando

$$c = \| f \|_{L^\infty(0,b)} \quad ; \quad c = - \| f \|_{L^\infty(0,b)}$$

se tiene lo enunciado.

Como este resultado lo usaremos en la Sección 3 introduciremos ya la notación de esa Sección y lo enunciaremos en los términos en los que será usado.

Llamaremos $H_\lambda f = (I + \lambda \mathcal{Q})^{-1} f$. Por la acretividad de $\mathcal{Q}$ este operador está bien definido en el $R(\mathcal{Q})$ = Rango del operador $\mathcal{Q}$, pues $(I + \lambda \mathcal{Q})^{-1}$ resulta univaluado. Hemos probado lo siguiente:

Si $f \in L^\infty(0,b) \cap R(\mathcal{Q})$, $\lambda > 0$, entonces $H_\lambda f \in L^\infty(0,b)$ y

$$\| H_\lambda f \|_{L^\infty(0,b)} \leqslant \| f \|_{L^\infty(0,b)}$$

SECCION 2

El objetivo de esta sección es obtener un resultado de existencia de solución por discretización para una clase muy amplia de ecuaciones parabólicas posiblemente degeneradas comprendida en la clase estudiada en la Sección 1. Restrigiremos nuestra clase de funciones $A(x,u,p)$ a funciones $A = A(p)$ y exigiremos que $\varphi(x)$ sea estrictamente creciente. A pesar de que esta restricción puede parecer excesiva, esta clase de ecuaciones contiene algunas muy importantes provenientes de la física. Por ejemplo, consideremos la ecuación de la difusión generalizada que aparece en la teoría de fluidos no-newtonianos ([2]) y en la teoría no lineal de la filtración ([15]) en un medio cuya conductividad depende de la densidad u, a saber la ecuación

$$u_t = D_x(k(u) | u_x|^{m-1} u_x) \qquad k \geqslant 0,\ m \geqslant 1, \qquad (2)$$

Esta es una ecuación de evolución de la forma

$$u_t + \mathcal{a}(u) = 0$$

con $\mathcal{a}(u) = - D_x(A(D_x(\varphi(u))))$, en el dominio correspondiente, donde $A(p) = | p|^{m-1} p$ y $\varphi(x) = \int_0^x k(s)^{1/m}\, ds$.

El problema (2) con k(s) constante ha sido estudiado desde diversos puntos de vista por varios autores . Ver por ejemplo [26],[27].

Al final de esta sección veremos que el resultado de existencia de solución por discretización también se obtiene cuando $A = B(p) + G(u)$ con lo que se abarca el caso de filtración bajo gravitación, a saber la ecuación

$$u_t = D_x(k(u) | u_x|^{m-1} u_x) + b(u)\, u_x \qquad k \geqslant 0,\ m \geqslant 1.$$

La introducción de la función $\varphi(x)$ en la definición del operador $\mathcal{A}$, que permite considerar una conductividad no constante hace que este operador pierda la importante propiedad de monotonía que tenía en ese caso cuando $A = A(p)$. Sin embargo en la sección 1 hemos probado que se comporta bien en $L^1(0,b)$, espacio en el cual además es razonable trabajar pues la hipótesis de que el dato inicial $u_0 \in L^1(0,b)$ tiene significado físico, a saber, que la masa total inicial sea finita.

Sean $A, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas, estrictamente crecientes para las cuales existe una constante $c > 0$ tal que

$$|A(x)| \;,\; |\varphi(x)| \geqslant c\,|x| \qquad \text{cuando } |x| \to \infty \qquad (2.1)$$

Sea

$$D(\mathcal{A}) = \{ u \in L^1(0,b) / \varphi(u) \in W^{1,1}(0,b), \varphi(u)(0) = 0;$$
$$A(D_x(\varphi(u))) \in W^{1,1}(0,b) \text{ y } A(D_x(\varphi(u)))(b) = 0 \}$$

Sea

$$\mathcal{A}(u) = - D_x(A(D_x(\varphi(u))) \qquad \text{para } u \in D(\mathcal{A})$$

Probaremos que en estas condiciones $\mathcal{Q}$ es m-acretivo en $L^1(0,b)$ (ya sabemos que es acretivo) (PROPOSICION 1).

También probaremos que si A y φ están en las condiciones anteriores aunque sin necesidad de que satisfagan (2.1) y si $A(0) = \varphi(0) = 0$ entonces $\overline{D(\mathcal{Q})} = L^1(0,b)$ (PROPOSICION 2), y que este resultado sigue siendo válido cuando se reemplaza en la definición de $D(\mathcal{Q})$ las condiciones de contorno mixtas por condiciones de tipo Dirichlet o de tipo Neumann.

En particular habremos probado el Teorema 1 enunciado al comienzo de este capítulo.

PROPOSICION 1

Sean A y φ en las condiciones anteriores y $D(\mathcal{Q})$ y $\mathcal{Q}$ definidas como antes. Entonces $\mathcal{Q}$ es m-acretivo en $L^1(0,b)$.

DEMOSTRACION

Debemos ver que $\exists \lambda > 0$ tal que

$$\text{Rango } (\lambda I + \mathcal{Q}) = L^1(0,b)$$

Veremos que si $\lambda < \frac{c^2}{b^2}$, ésto es cierto.

La condición $\lambda < (c/b)^2$ implica

$$\lim A\left(\frac{\varphi(x)}{b}\right) - \lambda bx = \begin{cases} +\infty & (x \to +\infty) \\ -\infty & (x \to -\infty) \end{cases}$$

En efecto, por hipótesis, para cada $M > 0, |\varphi(x)| \geq c|x| \geq Mb$, si x es suficientemente grande, y por lo tanto, si M es suficientemente grande

$$\left|A\left(\frac{\varphi(x)}{b}\right)\right| \geq c\,\frac{|\varphi(x)|}{b} \geq \frac{c^2}{b}|x|\text{, de donde}$$

$$A\left(\frac{\varphi(x)}{b}\right) - \lambda bx \geq \left(\frac{c^2}{b} - \lambda b\right)|x| \quad \text{si } x \to +\infty\text{ , y por hipótesis} \left(\frac{c^2}{b} - \lambda b\right) > 0.$$

Análogamente,

$$A\left(\frac{\varphi(x)}{b}\right) - \lambda bx = -\left(\left|A\left(\frac{\varphi(x)}{b}\right)\right| - \lambda b|x|\right) \leq -\left(\frac{c^2}{b} - \lambda b\right)|x|$$

si $x \to -\infty$.

Con esta condición podremos resolver la ecuación

$$\lambda u(x) - D_x(A(D_x(\varphi(u(x))))) = g(x) \qquad \text{con } u \in D(\mathcal{A})\text{, para}$$

cada función $g \in L^1(0,b)$, $\lambda < (c/b)^2$ fijo.

Resolver esta ecuación con $u \in D(\mathcal{A})$ es equivalente a encontrar una función $u \in C([0,b])$ tal que

$$u(x) = \varphi^{-1}\left[\int_0^x A^{-1}\left(-\lambda\int_s^b u(z)\,dz + \int_s^b g(z)\,dz\right) ds\right]$$

ya que si u es solución de la ecuación integral, $u \in D(\mathcal{Q})$ y satisface la ecuación diferencial y recíprocamente. Por lo tanto, si

$T : C([0,b]) \rightarrow C([0,b])$ está definido por

$$Tu(x) = \varphi^{-1}\left[\int_0^x A^{-1}\left(-\lambda\int_s^b u(z)\,dz + \int_s^b g(z)\,dz\right) ds\right]$$, debemos encontrar un punto fijo del operador T.

Veremos que existe una bola en $C([0,b])$: K tal que $T(K) \subset K$ y tal que $T|_K$ es completamente continuo. Por el teorema de Schauder, T tiene un punto fijo en K.

LEMA 1

Existe un $M > 0$ tal que si

$$K = \{ u \in C([0,b]) / \|u\|_\infty \leq M \} ,$$

entonces $T(K) \subset K$.

DEMOSTRACION

Sea $M > 0$ tal que

$$A\left(\frac{\varphi(M)}{b}\right) - \lambda bM \geq \|g\|_{L^1(0,b)} \quad y$$

$$A\left(\frac{\varphi(-M)}{b}\right) + \lambda bM \leq -\|g\|_{L^1(0,b)}$$

y suficientemente grande como para que $\varphi(-M) < 0$, $\varphi(M) > 0$. Se tiene

$$A\left(\frac{\varphi(-M)}{b}\right) \leq -\lambda bM - \|g\|_{L^1} \leq -\lambda M(b-s) - \|g\|_{L^1} \leq$$

$$\leq -\lambda \int_s^b u(z)\,dz + \int_s^b g(z)\,dz \leq$$

$$\leq \lambda M(b-s) + \|g\|_{L^1} \leq \lambda bM + \|g\|_{L^1} \leq A\left(\frac{\varphi(M)}{b}\right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\varphi(-M)}{b} \leq A^{-1}\left(-\lambda \int_s^b u(z)\,dz + \int_s^b g(z)\,dz\right) \leq \frac{\varphi(M)}{b}$$

Como $\varphi(-M) < 0$ y $\varphi(M) > 0$,

$$\varphi(-M) \leq \frac{\varphi(-M)}{b}\,x \leq \int_0^x A^{-1}\left(-\lambda \int_s^b u(z)\,dz + \int_s^b g(z)\,dz\right) ds \leq$$

$$\leq \frac{\varphi(M)}{b}\,x \leq \varphi(M)$$

De donde,

$$-M \leq Tu(x) \leq M \qquad \forall\, x \in [0,b], \text{ es decir}$$

$$\|Tu\|_\infty \leq M$$

y por lo tanto $Tu \in K$.

LEMA 2

$T : K \longrightarrow K$ es completamente continuo.

DEMOSTRACION

a) $T : K \longrightarrow K$ es continuo. En efecto, si $u \in K$ se tiene $|u(x)| \leqslant M \quad \forall x \in [0,b]$.

Por lo tanto, de acuerdo con lo visto en el Lema 1,

$$\varphi(-M) \leqslant \int_0^x A^{-1}\left(-\lambda \int_s^b u(z)\,dz + \int_s^b g(z)\,dz\right) ds \leqslant \varphi(M)$$

y además

$$\left| -\lambda \int_s^b u(z)\,dz + \int_s^b g(z)\,dz \right| \leqslant \lambda bM + \|g\|_{L^1} .$$

Como φ^{-1} es continua, existe un $\delta > 0$ tal que

$r,w \in [\varphi(-M), \varphi(M)]$ y $|r - w| < \delta$, entonces

$$|\varphi^{-1}(r) - \varphi^{-1}(w)| < \varepsilon$$

y como A^{-1} es continua, existe un $\eta > 0$ tal que si

$|p|, |m| \leqslant \lambda bM + \|g\|_{L^1}$ y $|p - m| < \eta$ entonces

$$|A^{-1}(p) - A^{-1}(m)| < \delta/b .$$

Por lo tanto, si $u,v \in K$ y

$$\left| \lambda \int_s^b (u(z) - v(z)) \, dz \right| < \eta \qquad \text{para } s \in [0,b],$$

$$\left| A^{-1}\left(-\lambda\int_s^b u(z)\,dz + \int_s^b g(z)\,dz \right) - A^{-1}\left(-\lambda\int_s^b v(z)\,dz + \int_s^b g(z)\,dz \right)\right| < \delta/b.$$

De donde,

$$\left| \int_0^x A^{-1}\left(-\lambda\int_s^b u(z)\,dz + \int_s^b g(z)\,dz \right) ds \right. -$$

$$- \left. \int_0^x A^{-1}\left(-\lambda\int_s^b v(z)\,dz + \int_s^b g(z)\,dz \right) ds \right| < \delta$$

y por lo tanto,

$$\left| Tu(x) - Tv(x) \right| < \varepsilon$$

Es decir, si $u,v \in K$ y $\| u - v \|_\infty < \eta/\lambda b$, entonces

$$\| Tu - Tv \|_\infty < \varepsilon$$

b) $T(K)$ es precompacto. En efecto, como $T(K) \subset K$, $\{ v \in T(K) \}$ está uniformemente acotado. Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema de Arzelá - Ascoli bastará ver que es equicontinuo.

Probaremos que $\forall \delta > 0$, existe $\tau > 0$ tal que si $|h| < \tau$ y $u \in K$, entonces

$$\left| \int_x^{x+h} A^{-1} \left(-\lambda \int_s^b u(z)\, dz + \int_s^b g(z)\, dz \right) ds \right| < \delta \qquad (1)$$

En efecto, como $u \in K$, se tiene

$$\left| A^{-1} \left(-\lambda \int_s^b u(z)\, dz + \int_s^b g(z)\, dz \right) \right| \leq \text{máx} \left(\frac{\varphi(M)}{b} , -\frac{\varphi(-M)}{b} \right) = c$$

Por lo tanto, si $|h| < \delta/c$ se tiene (1), de donde se sigue que $\{v \in T(K)\}$ es equicontinuo ya que si $w = \varphi(Tu)$ con $u \in K$

$$| w(x+h) - w(x) | = \left| \int_x^{x+h} A^{-1} \left(-\lambda \int_s^b u(z)\, dz + \int_s^b g(z)\, dz \right) ds \right| < \delta$$

si $|h| < \delta/c$, y φ^{-1} es uniformemente continua en $[\varphi(-M), \varphi(M)]$. Esto conluye la demostración de la Proposición 1.

OBSERVACION

Si $g \in C(0,b)$, entonces $\varphi(u) \in C^1([0,b])$ y $A(D_x(\varphi(u))) \in C^1(0,b)$; es decir, u es solución clásica. En efecto, sabemos que $\varphi(u) \in C([0,b])$ y $A(D_x(\varphi(u))) \in W^{1,1}(0,b)$ con

$$\lambda u - D_x(A(D_x(\varphi(u)))) = g.$$

Como φ^{-1} es continua, u es continua, además $\varphi(u) \in C^1([0,b])$ siempre pues $A(D_x(\varphi(u)))$ es continua por estar en $W^{1,1}(0,b)$ y A^{-1} es continua. Si además $g \in C(0,b)$, entonces, de la ecuación se deduce que $A(D_x(\varphi(u)))$ está en $C^1(0,b)$

También se ve que si $g \in L^2(0,b)$, entonces $A(D_x(\varphi(u))) \in H^1(0,b)$ donde con $H^1(0,b)$ notaremos el espacio de Hilbert $\{u \in L^2(0,b) / \ u_x \in L^2(0,b)\}$ Como $\varphi(u) \in C^1([0,b])$ se sigue que $\varphi(u) \in H^1(0,b)$. Esto será usado en la Sección 3. Es decir, de acuerdo con la notación introducida antes, si $g \in L^2(0,b)$, entonces $H_\lambda g$ pertenece al dominio de $\mathcal{a}$ pensado como operador en $L^2(0,b)$.

PROPOSICION 2

Sean $A, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas, estrictamente crecientes con $A(0) = \varphi(0) = 0$. Sean $\mathcal{a}$ y $D(\mathcal{a})$ como en la Proposición 1. Entonces $D(\mathcal{a})$ es denso en $L^1(0,b)$.

DEMOSTRACION

Sea $u \in L^1(0,b)$, podemos suponer que u es una función escalera de la forma

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{[t_{i-1},t_i)}$$

con $t_o > 0$, $t_m < b$, pues estas funciones son densas en $L^1(0,b)$. Por lo tanto,

$$\varphi(u)(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(a_i) \chi_{[t_{i-1},t_i)}$$

Construyamos para cada $k \in \mathbb{N}$ una función w_k en $C_o^\infty(0,b)$ tal que si $A_k = [w_k \neq \varphi(u)]$ entonces $|A_k| < 1/k$ y tal que $\|w_k\|_\infty \leq \|\varphi(u)\|_\infty$.

Llamemos $u_k = \varphi^{-1}(w_k)$, entonces $u_k \in C_o(0,b)$ pues φ^{-1} es continua y $\varphi(0) = 0$, por lo tanto $u_k \in L^1(0,b)$ y $\varphi(u_k) \in C_o^\infty(0,b)$. Veamos que $u_k \to u$ en $L^1(0,b)$. En efecto,

$$\int_0^b |u_k - u| = \int_{A_k} \left| \varphi^{-1}(w_k) - u \right| \leq \frac{1}{k} \text{ máx} \left\{ \|u\|_\infty , \sup_{|z| \leq \|\varphi(u)\|_\infty} |\varphi^{-1}(z)| \right\}$$

Por lo tanto podemos suponer que $u \in L^1(0,b)$ es tal que $\varphi(u) \in C_o^\infty(0,b)$.

Sea $v(x) = A(D_x(\varphi(u)))$. Entonces $v \in C_o(0,b)$ pues A es continua y $A(0) = 0$. Sea $v_k \in C_o^\infty(0,b)$ una sucesión que converge a v uniformemente en $[0,b]$ y tal que $\|v_k\|_\infty \leq \|v\|_\infty$. Llamemos

$$p_k(x) = \int_0^x A^{-1}(v_k)(s)\, ds$$

Entonces $p_k \in C^1([0,b])$, $A(D_x(p_k)) \in C_o^\infty(0,b)$, $p_k(0) = 0$. Por lo tanto,

$$h_k(x) = \varphi^{-1}(p_k)(x) \in D(\Omega)$$

y $\|h_k\|_\infty \leq c$ independiente de k. Veamos que $h_k \to u$ pp, con lo cual también converge en $L^1(0,b)$ y habremos completado la demostración.

Como $v_k(x) \to v(x)$ uniformemente en $[0,b]$, $A^{-1}(v_k(x)) \to A^{-1}(v(x)) = D_x(\varphi(u))$ uniformemente en $[0,b]$, de donde

$$p_k(x) = \int_0^x A^{-1}(v_k)(s)\,ds \to \int_0^x D_x(\varphi(u))(s)\,ds = \varphi(u)(x) \quad \forall\, x \in [0,b].$$

Por lo tanto

$$h_k(x) = \varphi^{-1}(p_k)(x) \to u(x) \quad \forall\, x \in [0,b].$$

OBSERVACION

Si en la definición del operador $\mathcal{Q}$ se imponen condiciones de contorno de tipo Dirichlet o de tipo Neumann el conjunto $D(\mathcal{Q})$ sigue siendo denso en $L^1(0,b)$.

En efecto, si

$$D(\mathcal{Q}) = \{ u \in L^1(0,b)/\ \varphi(u) \in W^{1,1}(0,b),\ A(D_x(\varphi(u))) \in W^{1,1}(0,b) \text{ y } A(D_x(\varphi(u)))\big|_{x=0} = A(D_x(\varphi(u)))\big|_{x=b} = 0 \}$$

entonces $\overline{D(\mathcal{Q})} = L^1(0,b)$ y la demostración es la que acabamos de dar.
Si

$$D(\mathcal{Q}) = \{ u \in L^1(0,b)/\ \varphi(u) \in W^{1,1}(0,b),\ \varphi(u)(0) = \varphi(u)(b) = 0 \text{ y } A(D_x(\varphi(u))) \in W^{1,1}(0,b) \}$$

entonces $\overline{D(\mathcal{Q})} = L^1(0,b)$. La demostración se reduce a probar que si $u \in L^1(0,b)$ es tal que $\varphi(u) \in C_0^\infty(0,b)$ entonces existe una sucesión h_n en $D(\mathcal{Q})$ tal que $h_n \to u$ en $L^1(0,b)$, tal como se demostró antes.

Sea $v = A(D_x(\varphi(u)))$, entonces $v \in C_0(0,b)$. Sea $v_n \in C_0^\infty(0,b)$ tal que $v_n \to v$ uniformemente en $[0,b]$. Como la función

$$l_n(x) = \int_0^x A^{-1}(v_n)\, ds$$

no satisface, en general la condición $l_n(b) = 0$ necesaria para que $\varphi^{-1}(l_n)$ pertenezca al dominio de $\mathcal{Q}$, no podemos repetir la demostración que hicimos cuando los datos de contorno eran mixtos. Supongamos entonces que existe una sucesión $(k_n) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^b A^{-1}(v_n - k_n)\, dx = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sea

$$p_n(x) = \int_0^x A^{-1}(v_n - k_n)\, ds \quad \text{y} \quad h_n = \varphi^{-1}(p_n),$$

entonces $h_n \in D(\mathcal{Q})$ pues $p_n = \varphi(h_n) \in C^\infty([0,b])$, $p_n(0) = 0$, $p_n(b) = 0$ y $A(D_x(\varphi(h_n))) = v_n - k_n \in C^\infty([0,b])$.

Veamos que $h_n \to u$ en $L^1(0,b)$. Para ésto supongamos probado que $k_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Como $v_n \to v$ uniformemente en $[0,b]$, $v_n - k_n$ también converge uniformemente a v en $[0,b]$. Por lo tanto,

$$A^{-1}(v_n - k_n) \to A^{-1}(v) = D_x(\varphi(u)) \qquad (n \to \infty).$$

De aquí que $p_n \to \varphi(u)$ uniformemente y por lo tanto también

$$h_n \to u \quad \text{uniformemente en } [0,b].$$

Veamos entonces que necesariamente $k_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Probaremos que (k_n)

está acotada y que 0 es su único punto de acumulación. En efecto,

a) $|k_n| \leq \|v_n\|_\infty$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, pues si por ejemplo, fuera $k_n > \|v_n\|_\infty$ se tendría $v_n - k_n < 0$, de donde

$$0 = \int_0^b A^{-1}(v_n - k_n)\, dx < 0$$

absurdo. Análogamente se ve que no puede ser $k_n < -\|v_n\|_\infty$.

Como $v_n \to v$ uniformemente en $[0,b]$, de a) se sigue que existe una constante $c > 0$ tal que $|k_n| \leq c$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

b) Si para una subsucesión k_{n_j} se sigue que $k_{n_j} \to k$ $(j \to \infty)$ entonces $k = 0$. En efecto, se tiene

$$v_{n_j} - k_{n_j} \to v - k \quad \text{uniformemente en } [0,b], \text{ por lo tanto}$$

$$0 = \int_0^b A^{-1}(v_{n_j} - k_{n_j})\, dx \to \int_0^b A^{-1}(v - k)\, dx$$

Como $\int_0^b A^{-1}(v)\, dx = \int_0^b D_x(\varphi(u))\, dx = 0$, y A^{-1} es estrictamente creciente, se sigue que debe ser $k = 0$.

Por lo tanto 0 es el único punto de acumulación de la sucesión (k_n).

Veamos entonces que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^b A^{-1}(v_n - k_n)\, dx = 0.$$

En efecto, consideremos la aplicación $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$L(k) = \int_0^b A^{-1}(v_n - k)\, dx$$

Entonces L es continua ya que A^{-1} y la integración lo son. Además ya vimos que

$$k > \|v_n\|_\infty \Rightarrow L(k) < 0$$

$$k < -\|v_n\|_\infty \Rightarrow L(k) > 0.$$

Por lo tanto existe $k_n \in \mathbb{R}$ tal que $L(k_n) = 0$.

PROPOSICION 3

Sean $B, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas estrictamente crecientes tales que existen constantes $\lambda_0, \lambda_1 > 0$ tales que $|B(p)| \geqslant \lambda_0 |p|, |p| \to \infty$, $|\varphi(x)| \geqslant \lambda_1 |x|$, $|x| \to \infty$. Sea $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que si $M(x) = \sup\limits_{|s| \leqslant |x|} |G(s)|$, entonces $\dfrac{M(x)}{|x|} \to \varkappa, |x| \to \infty$. Sea $b > 0$ y supongamos que $\varkappa < \lambda_0 \lambda_1 / b$. Sea

$$D(\mathcal{Q}) = \{ u \in L^1(0,b) / \varphi(u) \in W^{1,1}(0,b),\ (B(D_x(\varphi(u))) + G(u)) \in W^{1,1}(0,b),$$
$$\varphi(u)(0) = 0,\ (B(D_x(\varphi(u))) + G(u))(b) = 0 \}.$$

Sea $\mathcal{Q}u = -D_x(B(D_x(\varphi(u))) + G(u))$, $u \in D(\mathcal{Q})$.

Entonces $\mathcal{Q}u$ es m-acretivo en $L^1(0,b)$.

DEMOSTRACION

Sea $A(u,p) = B(p) + G(\varphi^{-1}(u))$. Entonces A está en las condiciones de la Proposición 1 de la Sección 1 de este Capítulo y por lo tanto $\mathcal{Q}$ u es acretivo en $L^1(0,b)$. Por lo tanto sólo hay que probar que existe un $\lambda > 0$ tal que cualquiera sea $g \in L^1(0,b)$ existe $u \in D(\mathcal{Q})$ con

$$\lambda u - D_x(B(D_x(\varphi(u))) + G(u)) = g$$

pues $A(\varphi(u); D_x(\varphi(u))) = - D_x(B(D_x(\varphi(u))) + G(\varphi^{-1}(\varphi(u)))) =$

$$= - D_x(B(D_x(\varphi(u))) + G(u)).$$

La demostración de este hecho es análoga a la de la Proposición 1 de esta Sección. En este caso hay que hallar un punto fijo del operador integral

$$Tu(x) = \varphi^{-1}\left[\int_0^x B^{-1}\left(\int_s^b (g - \lambda u)\, dz \; - G(u)(s) \right) ds \right]$$

Con las hipótesis sobre B, φ y G que tenemos se puede hallar una bola K en $C([0,b])$ tal que $T(K) \subset K$ y $T|_K$ es completamente continuo. Para ésto se usa el hecho de que

$$B\left(\frac{\varphi(x)}{b}\right) - \lambda bx - (\text{signo}(x))\, M(x) \longrightarrow \begin{cases} +\infty & (x \to +\infty) \\ -\infty & (x \to -\infty) \end{cases}$$

Veamos que si $\dfrac{\lambda_0 \lambda_1}{b^2} - \dfrac{\varkappa}{b} > \lambda$, ésto es cierto.

Si x es suficientemente grande

$$B\left(\frac{\varphi(x)}{b}\right) - \lambda bx - M(x) \geq \left(\frac{\lambda_o \lambda_1}{b} - \lambda b - \frac{M(x)}{x}\right) \quad x$$

que tiende a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$ ya que $\frac{M(x)}{|x|} \to \varkappa$ y $\lambda < \frac{\lambda_o \lambda_1}{b^2} - \frac{\varkappa}{b}$

Análogamente, si x es suficientemente chioo

$$B\left(\frac{\varphi(x)}{b}\right) - \lambda bx + M(x) = -\left(\left|B\left(\frac{\varphi(x)}{b}\right)\right| - \lambda b|x| - M(x)\right) \leq$$

$$\leq -\left(\frac{\lambda_o \lambda_1}{b} - \lambda b - \frac{M(x)}{|x|}\right)|x|$$

que tiende a $-\infty$ cuando $x \to +\infty$.

SECCION 3

En esta sección probaremos que si a las hipótesis del Teorema 1 le agregamos que $\varphi^{-1}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sea continua Lipschitz, la solución obtenida en la Sección 2 es una solución fuerte, más aun veremos que $u_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,b))$.

De acuerdo con los resultados generales de la teoría abstracta (ver el punto iii) del Teorema de regularidad del Capítulo I), bastará ver que $u_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,b))$ para deducir inmediatamente que

$$u(t) \in D(\mathcal{a}) \quad \text{pp } t,$$

$$u_t(t) + \mathcal{a}\, u\,(t) = 0 \quad \text{pp } t.$$

Probaremos entonces el siguiente Teorema:

TEOREMA 2

Sean $A, \varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones continuas, estrictamente crecientes con $A(0) = \varphi(0) = 0$ y tales que $\varphi^{-1}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sea continua Lipschitz y exista una constante $c > 0$ tal que $|A(p)| \geq c|p|$ cuando $|p| \to \infty$. Entonces, dado un intervalo $(0,b)$ y una función $u_o \in L^1(0,b)$ existe una única función $u \in C([0,T];L^1(0,b))$ tal que

a) $u_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,b))$,

b) $\varphi(u) \in H^1(0,b)$ en la variable x, pp t y $\varphi(u)(0,t) = 0$ pp t,

c) $A(D_x(\varphi(u))) \in H^1(0,b)$ en la variable x, pp t y $A(D_x(\varphi(u)))(b,t) = 0$ pp t,

d) $u_t = D_x(A(D_x(\varphi(u))))$ pp (x,t),

e) $\lim\limits_{t \to 0} \int_0^b |u(x,t) - u_o(x)| \, dx = 0.$

Además se tiene la siguiente estimación: para cada $\varepsilon > 0$, existe una constante c_ε tal que

$$\left[\operatorname*{supess}_{0 \leq t \leq T} t^{4+\varepsilon} \| \varphi(u) \|^2_{H^1(0,b)} + \int_0^T \int_0^b t^{4+\varepsilon} u_t^2 \, dx \, dt \leq c_\varepsilon T \| u_o \|^2_{L^1} + c_\varepsilon T^{4+\varepsilon}\right] (D)$$

donde c_ε depende únicamente de ε, b, A y de la constante de Lipschitz para φ^{-1}.

Para la demostración necesitaremos 2 Lemas previos.

<u>LEMA 1</u>

Sea $D(B) = \{ u \in W^{1,1}(0,b) / A(u_x) \in W^{1,1}(0,b),\ u(0) = A(u_x)(b) = 0 \}$

y $Bu = - D_x(A(u_x))$ para $u \in D(B)$. Sabemos que B es m-acretivo en $L^1(0,b)$ si A está en las condiciones del Teorema 2. Consideremos la restricción de B a $L^2(0,b)$ es decir, al operador B definido como antes pero con dominio

$$D(B) = \{ u \in H^1(0,b) / A(u_x) \in H^1(0,b),\ u(0) = A(u_x)(b) = 0 \} \subset L^2(0,b)$$

B considerado como operador en este dominio tiene valores en $L^2(0,b)$. Volveremos a llamar a este operador B por abuso de notación. Se tiene,

a) B es monótono maximal en $L^2(0,b)$,

b) Sea j una función convexa, no negativa tal que $j(0) = 0$ y tal que $j' = A$ y sea

$$\Psi(u) = \begin{cases} \int_0^b j(u_x)\, dx & \text{si } u \in H^1(0,b),\ j(u_x) \in L^1(0,b) \text{ y } u(0) = 0 \\ +\infty & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces $B = \partial\Psi$.

DEMOSTRACION

a) i) B es monótono. En efecto, sean $u,v \in D(B)$

$$\int_0^b (B(u) - B(v))(u - v) = - \int_0^b D_x(\ A(u_x) - A(v_x)\ )(u - v) =$$

$$= \int_0^b (\ A(u_x) - A(v_x)\ )\ (u_x - v_x)\, dx \quad - \ (\ A(u_x) - A(v_x)\ )\ (u - v)\Big|_0^b \geq 0$$

pues los términos integrados son nulos por las condiciones de contorno y la integral es no negativa pues el integrando lo es por ser A creciente.

ii) B es monótono maximal. En efecto, sabemos que para cada $f \in L^2(0,b) \subset L^1(0,b)$

existe $u \in W^{1,1}(0,b)$ tal que $A(u_x) \in W^{1,1}(0,b)$, $u(0) = A(u_x)(b) = 0$ y

$$u - \lambda D_x(A(u_x)) = f$$

por lo tanto

$$D_x(A(u_x)) = \frac{u - f}{\lambda} \in L^2(0,b)$$

ya que $u \in C^1([0,b])$ y por lo tanto $u \in D(B)$ y

$$u + \lambda Bu = f$$

Llamaremos $J_\lambda f = (I + \lambda B)^{-1} f = u$, es decir J_λ es la resolvente del operador monótono maximal B.

Nuevamente por abuso de notación llamaremos también J_λ a la resolvente de B como operador m-acretivo en $L^1(0,b)$.

b) $\Psi(u)$ es convexa pues j lo es. $\Psi \not\equiv +\infty$ pues por ejemplo si $u \in C_0^\infty(0,b)$ entonces $\Psi(u) < \infty$. Por lo tanto $\partial\Psi$, el subdiferencial de Ψ , es un operador monótono. Además $B \subset \partial\Psi$, en efecto, debemos ver que $D(B) \subset D(\partial\Psi)$ donde

$$D(\partial\Psi) = \{ u \in D(\Psi) / \partial\Psi(u) \neq \emptyset \}$$

y que $Bu \in \partial\Psi(u)$ para toda $u \in D(B)$. Esto es equivalente a ver que $D(B) \subset D(\Psi)$ y que si $u \in D(B) \Rightarrow Bu \in \partial\Psi(u)$. Sea entonces $u \in D(B)$, con lo cuál $u \in H^1(0,b)$ y $u(0) = 0$, veamos que $j(u_x) \in L^1(0,b)$.

$$j(u_x) = \int_0^{u_x} A(s)\, ds$$

como $u \in D(B) \Rightarrow u_x \in C([0,b])$ y por lo tanto $j(u_x) \in L^\infty(0,b) \subset L^1(0,b)$.

Veamos entonces que si $u \in D(B)$ entonces $Bu \in \partial\Psi(u)$. Sea $v \in D(\Psi)$,

$$\Psi(v) - \Psi(u) = \int_0^b j(v_x) - j(u_x) \geqslant \int_0^b A(u_x)\,(v_x - u_x)$$

pues j es convexa y j' = A. Integrando por partes se tiene

$$A(u_x)\,(v - u)\Big|_0^b - \int_0^b D_x(A(u_x))\,(v - u) = (Bu, v - u)_{L^2(0,b)}$$

pues los términos integrados son nulos por estar u en D(B) y v en $D(\Psi)$.
Por lo tanto $Bu \in \partial\Psi(u)$.

Como B es monótono maximal, $\partial\Psi$ es monótono y $B \subset \partial\Psi$, se tiene $B = \partial\Psi$.

LEMA 2

Existe una constante $c > 0$ tal que

$$\| u_x \|^2_{L^2(0,b)} \leqslant c \int_0^b j(u_x)\, dx + c \qquad \forall\ u \in D(\Psi)$$

DEMOSTRACION

Sea $r > 0$ tal que $|x| \geq r \Rightarrow |A(x)| \geq c|x|$. Sea $x \geq 2r$, entonces

$$j(x) = \int_0^x A(s)\, ds = \int_0^r A(s)\, ds + \int_r^x A(s)\, ds \geq \int_r^x A(s)\, ds \geq$$

$$\geq c \int_r^x s\, ds = \frac{c}{2}\left(x^2 - r^2 \right) \geq \bar{c}\, x^2.$$

Análogamente, si $x < -2r$, $j(x) \geq \bar{c}\, x^2$, de donde

$$\int_0^b |u_x|^2\, dx = \int_{[|u_x| \leq 2r]} |u_x|^2\, dx + \int_{[|u_x| > 2r]} |u_x|^2\, dx \leq$$

$$\leq 4r^2 b + c \int_0^b j(u_x)\, dx$$

Pasamos ahora a la demostración del Teorema 2. Esto se hará en varios pasos. Primero supondremos que u_o y φ son regulares y obtendremos el resultado deseado, a saber que u, solución por discretización resulta ser una solución fuerte. Esto es relativamente sencillo pero las estimaciones que nos permiten concluir rápidamente que u es solución fuerte no se mantienen al cambiar φ o u_o por funciones menos regulares que lo supuesto inicialmente. Por lo tanto se busca obtener la estimación (D) del enunciado ya que ésta permitirá aproximar, primero φ , por funciones regulares φ_n

con constantes de Lipschitz para φ_n^{-1} uniformemente acotadas, y por lo tanto las aproximantes u_n satisfarán la estimación (D) con constantes independientes de n. Por último aproximaremos el dato $u_o \in L^1$ por funciones $u_o^n \in C_o^\infty$, como $\| u_o^n \|_{L^1}$ estarán uniformemente acotadas, nuevamente las aproximantes u_n satisfarán la desigualdad (D) con constantes independientes de n. Esto nos permitirá concluir lo enunciado.

1.- Demostración del Teorema 2 cuando $\varphi \in C^1$ y $u_o \in C^1([0,b])$, $u_o(0) = 0$.

Sea B el operador monótono maximal del Lema 1. Sea B_λ la aproximante de Yosida de B, a saber

$$B_\lambda = \frac{I - J_\lambda}{\lambda}$$

donde J_λ fue introducida en el Lema 1. Como J_λ es no expansivo en L^2 por la monótonía de B, es decir

$$\| J_\lambda f - J_\lambda g \|_{L^2} \leq \|f - g\|_{L^2} \qquad \forall\, f,g \in L^2(0,b),$$

se tiene que B_λ es un operador con dominio $L^2(0,b)$, Lipschitziano con constante de Lipschitz $2/\lambda$.

Como $u_o \in L^\infty$, sabemos que la solución por discretización que queremos probar que es solución fuerte, u(x,t) satisface

$$\| u(x,t)\|_{L^\infty((0,b)x(0,T))} \leq \| u_o\|_{L^\infty(0,b)}$$

Por lo tanto podemos modificar φ fuera del intervalo $[-\| u_o\|_{L^\infty}, \| u_o\|_{L^\infty}]$ sin afectar a la solución u. Como suponemos que φ es C^1, podemos entonces suponer que $\varphi' \leq M$. Por lo tanto el operador $B_\lambda \circ \varphi$ resulta Lipschitziano en L^2. Por lo tanto el problema

$$(P\lambda) \qquad \begin{cases} D_t u_\lambda + B_\lambda \varphi(u_\lambda) = 0 \\ u_\lambda(0) = u_o \end{cases}$$

tiene una única solución absolutamente continua u_λ para cada función $u_o \in L^2(0,b)$, con $D_t u_\lambda \in L^2(0,T;L^2(0,b))$. ([6])

Probaremos que existe una sucesión $\lambda_n \to 0$ tal que si u es la solución por discretización, $u(t) = S_{\mathcal{A}}(t)u_o$ entonces $D_t u_{\lambda_n} \rightharpoonup D_t u$ en $L^2(0,T;L^2(0,b))$ con lo cual el Teorema estará demostrado en este caso. Más aún, habremos probado que $u_t \in L^2(0,T;L^2(0,b))$.

Veamos primero que $u_\lambda(t) \to u(t)$ en $C([0,T];L^1(0,b))$ cuando $\lambda \to 0$. En efecto, sea $\mathcal{A}_\lambda u = B_\lambda \varphi(u)$ donde en este caso por B_λ entenderemos la aproximante de Yosida del operador m-acretivo en $L^1(0,b)$, B.

Veremos que $\mathcal{A}_\lambda$ es m-acretivo en $L^1(0,b)$. A continuación probaremos que si

$$H_\varepsilon^\lambda = (I + \varepsilon \mathcal{A}_\lambda)^{-1} , \qquad H_\varepsilon = (I + \varepsilon \mathcal{A})^{-1} ,$$

entonces

$$H_\varepsilon^\lambda f \longrightarrow H_\varepsilon f \quad \text{en } L^1(0,b) \quad \forall f \in L^1(0,b) \quad (\lambda \to 0).$$

De acuerdo con el Teorema de Perturbación del Capítulo I, tendremos que

$$S_{\mathcal{A}_\lambda}(t)u_o \longrightarrow S_{\mathcal{A}}(t)u_o \quad \text{en } C([0,T];L^1(0,b)) \quad (\lambda \to 0).$$

Como $\mathcal{A}_\lambda$ es acretivo en $L^1(0,b)$ no puede haber dos soluciones por discretización del problema $(P\lambda)$ en $C([0,T];L^1(0,b))$ y por lo tanto se tiene que $u_\lambda(t) = S_{\mathcal{A}_\lambda}(t)u_o \longrightarrow u(t)$ en $C([0,T];L^1(0,b))$.

Veamos entonces primero que $\mathcal{A}_\lambda$ es acretivo.

a) B_λ es acretivo en L^1 pues B lo es. En efecto, debemos ver que

$$\| u - v\|_{L^1} \leq \| u - v + \varepsilon(B_\lambda u - B_\lambda v)\|_{L^1} \qquad \forall u,v \in L^1$$

y sabemos que

$$\| J_\lambda u - J_\lambda v\|_{L^1} \leq \| u - v\|_{L^1} \qquad \forall u,v \in L^1$$

pues B es acretivo en L^1. Por lo tanto

$$\| u - v + \varepsilon(B_\lambda u - B_\lambda v)\|_{L^1} = \| u - v + \tfrac{\varepsilon}{\lambda}(u - v) + \tfrac{\varepsilon}{\lambda}(J_\lambda u - J_\lambda v)\|_{L^1} \geq$$

$$\geq (1 + \varepsilon/\lambda)\| u - v\|_{L^1} - (\varepsilon/\lambda)\| J_\lambda u - J_\lambda v\|_{L^1} \geq$$

$$\geq (1 + \varepsilon/\lambda)\| u - v\|_{L^1} - (\varepsilon/\lambda)\| u - v\|_{L^1} = \| u - v\|_{L^1}$$

b) B_λ acretivo implica que $B_\lambda \circ \varphi$ es acretivo pues φ es estrictamente creciente. En efecto,

$$[u - v, B_\lambda \varphi(u) - B_\lambda \varphi(v)]_+ =$$

$$= \int_{[\varphi(u) \neq \varphi(v)]} (B_\lambda \varphi(u) - B_\lambda \varphi(v)) \operatorname{signo}(\varphi(u) - \varphi(v)) + \int_{[\varphi(u) = \varphi(v)]} | B_\lambda \varphi(u) - B_\lambda \varphi(v) | \geq 0$$

c) $B_\lambda \circ \varphi$ es m-acretivo. En efecto, existe $\varepsilon > 0$/ si $f \in L^1$ existe $u \in L^1$ tal que

$$u + \varepsilon B_\lambda \varphi(u) = f$$

pues si $0 < \varepsilon < (2M/\lambda)^{-1}$, entonces el operador

$$Tu = f - \varepsilon B_\lambda \varphi(u)$$

es una contracción estricta en L^1 (con dominio L^1) y por lo tanto tiene un punto fijo que es la solución buscada. En efecto,

$$\| Tu - Tv \|_{L^1} = \varepsilon \| B_\lambda \varphi(u) - B_\lambda \varphi(v) \|_{L^1} \leq (2\varepsilon/\lambda) \| \varphi(u) - \varphi(v) \|_{L^1} \leq$$

$$\leq (2M\varepsilon/\lambda) \| u - v \|_{L^1}$$

y por la elección de ε resulta $(2M\varepsilon/\lambda) < 1$.

Por lo tanto $\mathcal{Q}_\lambda$ es m-acretivo en $L^1(0,b)$.

Veamos que para toda $f \in L^1(0,b)$ se tiene

$$H_\varepsilon^\lambda f \to H_\varepsilon f \quad \text{en } L^1(0,b) \quad (\lambda \to 0).$$

Supongamos que $f \in L^2$, sabemos que entonces $H_\varepsilon f = v \in L^2, \varphi(v) \in C^1$, $A(D_x(\varphi(v))) \in H^1$, es decir, $\varphi(v) \in D(B)$ como operador en L^2 y por lo tanto

$$B_\lambda \varphi(v) \to B\varphi(v) \quad \text{en } L^2(0,b) \quad (\lambda \to 0)$$

([6]).

Llamemos $v_\lambda = H_\varepsilon^\lambda f$, entonces

$$\| v_\lambda - v \|_1 \leq \| v_\lambda - v + \varepsilon B_\lambda \varphi(v_\lambda) - \varepsilon B_\lambda \varphi(v) \|_1 \leq$$

$$\leq \| v_\lambda - v + \varepsilon B_\lambda \varphi(v_\lambda) - \varepsilon B \varphi(v) \|_1 + \varepsilon \| B_\lambda \varphi(v) - B\varphi(v) \|_1 =$$

$$= \| f - f \|_1 + \varepsilon \| B_\lambda \varphi(v) - B\varphi(v) \|_1 \leq c \| B_\lambda \varphi(v) - B\varphi(v) \|_2$$

y por lo tanto $v_\lambda \to v$ en L^1.

Sea ahora f en L^1 y sea $(f_n) \subset L^2$ tal que $f_n \to f$ en L^1 $(n \to \infty)$, entonces

$$\| H_\varepsilon^\lambda f - H_\varepsilon f \|_1 \leq \| H_\varepsilon^\lambda f - H_\varepsilon^\lambda f_n \|_1 + \| H_\varepsilon^\lambda f_n - H_\varepsilon f_n \|_1 + \| H_\varepsilon f_n - H_\varepsilon f \|_1 \leq$$

$$\leq 2 \| f_n - f \|_1 + \| H_\varepsilon^\lambda f_n - H_\varepsilon f_n \|_1$$

Se tiene entonces para n_o suficientemente grande

$$\| H_\varepsilon^\lambda f - H_\varepsilon f \|_1 \leq \delta + \| H_\varepsilon^\lambda f_{n_o} - H_\varepsilon f_{n_o} \|_1 < 2\delta \quad \text{si } \lambda \text{ es suficien-}$$

temente chico.

Por lo tanto ya sabemos que $u_\lambda \to u$ en $C([0,T];L^1(0,b))$ $(\lambda \to 0)$. En consecuencia si probamos que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\| D_t u_\lambda \|_{L^2(0,T;L^2(0,b))} \leq c \qquad \forall \lambda > 0,$$

tendremos que

$$D_t u \in L^2(0,T;L^2(0,b))$$

y habremos concluido la demostración en este caso.

Sea $\Psi_\lambda(u) = \Psi(J_\lambda u) + (\lambda/2)\| B_\lambda u \|^2_{L^2}$, donde $\Psi(u)$ es la funcional convexa introducida en el Lema 1, se sigue entonces que $\partial\Psi_\lambda = B_\lambda$ ([6]).

$$D_t \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t))) = (\partial\Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t))), D_t\varphi(u_\lambda(t)))_{L^2} =$$

$$= (B_\lambda\varphi(u_\lambda(t)), \varphi'(u_\lambda(t)) D_t u_\lambda(t))_{L^2} =$$

$$= -(D_t u_\lambda(t), \varphi'(u_\lambda(t)) D_t u_\lambda(t))_{L^2} \leq$$

$$\leq -\theta \| D_t u_\lambda(t) \|^2_{L^2} ,$$

donde $\theta > 0$ es tal que $\varphi' \geq \theta$ (que existe pues φ^{-1} es continua Lipschitz). Por lo tanto,

$$\int_0^t D_t \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(s)))\,ds \;+ \theta \int_0^t \| D_t u_\lambda \|_2^2 \;\leq\; 0 \;,\text{ de donde}$$

$$\Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t))) \;+ \theta \int_0^T \| D_t u_\lambda \|_2^2 \leq \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(0)) = \Psi_\lambda(\varphi(u_o)) \leq$$

$$\leq \Psi(\varphi(u_o)) = c < \infty$$

ya que $\Psi_\lambda(v) \leq \Psi(v) \quad \forall \; v \in D(\Psi)$ ([6]) y $\varphi(u_o) \in D(\Psi)$ pues $u_o \in C^1([0,b])$, $u_o(0) = 0$ y por lo tanto $\varphi(u_o) \in C^1([0,b])$, $\dot{\varphi}(u_o)(0) = 0$.

De aquí que, $\forall \; 0 \leq t \leq T$

$$\Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t))) \;+ \theta \int_0^T \| D_t u_\lambda \|_2^2 \;\leq\; c$$

y esta última desigualdad implica que $D_t u \in L^2(0,T;L^2(0,b))$ pues existe una sucesión $\lambda_n \to 0$ y una función $w \in L^2(0,T;L^2(0,b))$ con $D_t w \in L^2(0,T;L^2(0,b))$ tales que $u_{\lambda_n} \to w$ en $L^2(0,T;L^2(0,b))$. Por lo tanto $w = u$ y se tiene lo deseado.

Sin embargo como queremos obtener este resultado para φ y u_o en condiciones más generales trataremos de obtener estimaciones que no dependan de esta regularidad.

Sabemos que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess}\; \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t))) \;\leq\; c \qquad \forall \; \lambda > 0.$$

Veamos que ésto implica

$$\sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 1 \geq \lambda > 0}} \text{ess} \; \| J_\lambda \varphi (u_\lambda(t)) \|_{H^1} \leq c$$

En efecto,

$$\Psi_\lambda (\varphi (u_\lambda(t))) = \Psi (J_\lambda \varphi (u_\lambda (t))) + (\lambda / 2) \| B_\lambda \varphi (u_\lambda(t)) \|_2^2 \leq c$$

Por lo tanto,

$$\Psi (J_\lambda \varphi (u_\lambda(t))) \leq c \qquad \forall \; \begin{matrix} 0 < \lambda \leq 1 \\ 0 \leq t \leq T \end{matrix}$$

Por el Lema 2

$$\| D_x J_\lambda \varphi (u_\lambda (t)) \|_2^2 \leq c \, \Psi (J_\lambda \varphi (u_\lambda (t))) + c \leq c,$$

como $J_\lambda \varphi (u_\lambda (t))(0) = 0$, se tiene

(1) $\quad \| J_\lambda \varphi (u_\lambda (t)) \|_{H^1} \leq c, \qquad 0 < \lambda \leq 1, \; 0 \leq t \leq T.$

Por otro lado, como

$$\int_0^T \| D_t u_\lambda \|_2^2 \leq c ,$$

se sigue que $\{ u_\lambda (t) \}$ es equicontinuo de $[0,T]$ a $L^2(0,b)$ pues

$$u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t) = \int_t^{t+h} D_t u_\lambda(s)\, ds \text{ , de donde .}$$

$$|u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)|^2 \leq h \int_t^{t+h} |D_t u_\lambda(s)|^2\, ds$$

y entonces, $\int_0^b |u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)|^2\, dx \leq h \int_0^T \| D_t u_\lambda \|_2^2 \leq ch.$

Como φ es Lipschitziana y J_λ es no expansivo, se sigue que también el conjunto $\{ J_\lambda \varphi(u_\lambda(t))\}$ es equicontinuo de $[0,T]$ a $L^2(0,b)$. Además, por (1) sabemos que la imagen de cada punto $t \in [0,T]$ es precompacta en $L^2(0,b)$ y por lo tanto de acuerdo con el Teorema de Ascoli se tiene que este conjunto es precompacto en $C([0,T];L^2(0,b))$. Como

$$\int_0^T \| \varphi(u_\lambda(t)) - J_\lambda \varphi(u_\lambda(t))\|_2^2 = \lambda^2 \int_0^T \| B_\lambda \varphi(u_\lambda(t))\|_2^2 \leq$$

se sigue que $\{ \varphi(u_\lambda(t))\}$ es precompacto en $L^2(0,T;L^2(0,b))$. Al ser φ^{-1} continua Lipschitz , también $\{ u_\lambda(t)\}$ resulta precompacto en $L^2(0,T;L^2(0,b))$.

Sean entonces $\lambda_n \to 0$ y $v \in L^2(0,T;L^2(0,b))$ tales que

$$u_{\lambda_n} \to v$$

$$\varphi(u_{\lambda_n}) \to \varphi(v)$$

$$D_t u_{\lambda_n} \rightharpoonup D_t v$$

en $L^2(0,T;L^2(0,b))$. Como $u_\lambda \to u$ en $C([0,T];L^1(0,b))$, se sigue que $v = u$ y los dos primeros límites son en $C([0,T];L^1(0,b))$.

Al ser

$$\int_0^T \| \varphi(u_\lambda(t)) - J_\lambda \varphi(u_\lambda(t))\|_2^2 \leq c\,\lambda$$

se tiene que $J_{\lambda_n} \varphi(u_{\lambda_n}(t)) \to \varphi(u(t))$ en $L^2(0,T;L^2(0,b))$, y por lo tanto hay una subsucesión λ_{n_k} tal que

$$J_{\lambda_{n_k'}} \varphi(u_{\lambda_{n_k}}(t)) \to \varphi(u(t)) \quad \text{en } L^2(0,b) \quad \text{pp } t.$$

Como $\| J_\lambda \varphi(u_\lambda(t))\|_{H^1} \leq c$, se sigue que $\varphi(u(t)) \in H^1(0,b)$ pp t y $J_{\lambda_h} \varphi(u_{\lambda_h}(t)) \rightharpoonup \varphi(u(t))$ en $H^1(0,b)$ pp t.

Veamos que de aquí se deduce que

$$\operatorname*{supess}_{0 \leq t \leq T} t^{k+3} \| \varphi(u(t))\|_{H^1}^2 + \int_0^T \int_0^b t^{k+3} u_t^2 \leq \tau c \int_0^T \int_0^b t^{k+1} \varphi(u(t))^2 + cT^{k+3}$$

donde $\tau = \theta^{-1}$ es la constante de Lipschitz de φ^{-1}. En efecto,

$$\theta \int_0^T \int_0^b t^{k+3} (D_t u_\lambda)^2 \leq \int_0^T \int_0^b t^{k+3} \varphi'(u_\lambda)(D_t u_\lambda)^2 =$$

$$= - \int_0^T \int_0^b t^{k+3}\, D_t \varphi (u_\lambda(t)) \partial \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t))) =$$

$$= - \int_0^T t^{k+3}\, D_t\, \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t))) = - \int_0^T D_t \left[t^{k+3}\, \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t)))\right] +$$

$$+ (k+3) \int_0^T t^{k+2}\, \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t)) = - T^{k+3}\ \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(T))) +$$

$$+ (k+3) \int_0^T t^{k+2}\, \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t)) \leq - T^{k+3}\ \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(T))) +$$

$$+ (k+3) \int_0^T \int_0^b t^{k+2}\, \varphi(u_\lambda(t)) \partial \Psi_\lambda\ (\varphi(u_\lambda(t)))$$

ya que $\Psi_\lambda(0) = 0$ y Ψ_λ es convexa, por lo tanto se tiene

$$- \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t))) = \Psi_\lambda(0) - \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t))) \geq \int_0^b \partial \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t)))(-\varphi(u_\lambda(t)))$$

es decir, $\Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t))) \leq \int_0^b \partial\, \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t)))\ \varphi\ (u_\lambda(t))$

Por lo tanto

$$\Rightarrow \int_0^T \int_0^b t^{k+3}\, (D_t u_\lambda)^2 \leq - T^{k+3}\ \Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(T))) + (k+3) \int_0^T \int_0^b t^{k+2} \varphi(u_\lambda(t)) D_t u_\lambda (t)$$

Usaremos la siguiente desigualdad:

$$ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$$

con $\quad a = (k+3)\ t^{(k+1)/2}\ \varphi\ (u_\lambda(t))\ \Theta^{-1/2}$

$$b = t^{(k+3)/2}\ D_t u_\lambda(t)\ \Theta^{1/2}$$

se tiene entonces,

$$\Theta \int_0^T \int_0^b t^{k+3}\ (D_t u_\lambda(t))^2 \leq -T^{k+3}\Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(T))) +$$

$$+ \frac{\Theta}{2} \int_0^T \int_0^b t^{k+3}\ (D_t u_\lambda(t))^2 + c\,\tau \int_0^T \int_0^b t^{k+1}\ \varphi(u_\lambda(t))^2$$

de donde,

$$T^{k+3}\Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(T))) + \frac{\Theta}{2} \int_0^T \int_0^b t^{k+3}\ (D_t u_\lambda(t))^2 \leq c\,\tau \int_0^T \int_0^b t^{k+1}\ \varphi(u_\lambda(t))^2$$

Observando que se podría haber integrado entre 0 y t para cualquier $t \leq T$, se ve que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} t^{k+3}\Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t))) + \frac{\Theta}{2} \int_0^T \int_0^b t^{k+3}\ (D_t u_\lambda)^2 \leq c\,\tau \int_0^T \int_0^b t^{k+1}\ \varphi(u_\lambda)^2$$

Como $\varphi(u_\lambda(t)) \to \varphi(u(t))$ en $L^2(0,T;L^2(0,b))$, se sigue que

$$\limsup_{\lambda \to 0} t^{k+3}\Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t))) + \frac{\Theta}{2} \limsup_{\lambda \to 0} \int_0^T \int_0^b t^{k+3}\ (D_t u_\lambda)^2 \leq c\,\tau \int_0^T \int_0^b t^{k+1}\varphi(u)^2$$

Como $D_t u_\lambda \rightharpoonup D_t u$ en $L^2(0,T;L^2(0,b))$ se tiene

$$\int_0^T\int_0^b t^{k+3}\,(D_t u)^2 \leq \limsup_{\lambda\to 0}\int_0^T\int_0^b t^{k+3}\,(D_t u_\lambda)^2$$

Recordemos que

$$\Psi_\lambda(\varphi(u_\lambda(t))) = \Psi(J_\lambda\varphi(u_\lambda(t))) + \frac{\lambda}{2}\,\| B_\lambda\varphi(u_\lambda(t))\|_2^2$$

Se tiene entonces,

$$\limsup_{\lambda\to 0} t^{k+3}\Psi(J_\lambda\varphi(u_\lambda(t))) + \frac{\theta}{2}\int_0^T\int_0^b t^{k+3}\,u_t^2 \;\leq\; c\tau\int_0^T\int_0^b t^{k+1}\,\varphi(u)^2$$

Como $\| J_\lambda\varphi(u_\lambda(t))\|_{H^1}^2 \leq c\,\Psi(J_\lambda\varphi(u_\lambda(t))) + c$, se sigue

$$\limsup_{\lambda\to 0} t^{k+3}\| J_\lambda\varphi(u_\lambda(t))\|_{H^1}^2 + \frac{\theta}{2}\int_0^T\int_0^b t^{k+3}\,u_t^2 \leq c\tau\int_0^T\int_0^b t^{k+1}\varphi(u)^2 + c\,t^{k+3}$$

Como $J_{\lambda_h}\varphi(u_{\lambda_h}(t)) \rightharpoonup \varphi(u(t))$ en $H^1(0,b)$, pp t y para una sucesión $\lambda_h \to 0$,

$$t^{k+3}\|\varphi(u(t))\|_{H^1}^2 + \frac{\theta}{2}\int_0^T\int_0^b t^{k+3}\,u_t^2 \;\leq\; c\tau\int_0^T\int_0^b t^{k+1}\,\varphi(u)^2 + c\,T^{k+3}$$

Observemos que las constantes c del 2° miembro sólo dependen de $A(p)$ y b y no de φ o de u_o.

Estimemos $\int_0^T\int_0^b t^{k+1}\,\varphi(u)^2$ en términos de $\| u_o\|_{L^1}$.

Como $\int_0^b \varphi(u)^2 \leq c \int_0^b |D_x\varphi(u)|^2$

pues $J_{\lambda_h}\varphi(u_{\lambda_h}(t)) \rightharpoonup \varphi(u(t))$ en H^1 pp t, y $J_\lambda \varphi(u_\lambda(t))(0) = 0$,

basta estimar

$$\int_0^T\int_0^b t^{k+1} |D_x\varphi(u)|^2$$

Ahora bien,

$$\int_0^b |D_x\varphi(u)|^2 \leq c \int_0^b j(D_x\varphi(u)) + c \leq c \int_0^b D_x\varphi(u)\, A(D_x\varphi(u)) + c$$

pues como A es creciente, $A(0) = 0$, se sigue que $j(x) \leq x\, A(x)$. Por lo tanto,

$$\int_0^b |D_x\varphi(u)|^2 \leq c - c \int_0^b \varphi(u)\, D_x(A(D_x\varphi(u))) = c - c \int_0^b \varphi(u)\, u_t$$

De aquí que,

$$\int_0^T\int_0^b t^{k+1} |D_x\varphi(u)|^2 \leq c\, T^{k+2} - c \int_0^T\int_0^b t^{k+1} \varphi(u)\, u_t =$$

$$= c\, T^{k+2} - c \int_0^T\int_0^b t^{k+1} D_t\Phi(u)$$

donde $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(s)\, ds$

Por lo tanto,

$$\int_0^T\int_0^b t^{k+1}\left|D_x\varphi(u)\right|^2 \leq c\,T^{k+2} - c\int_0^T\int_0^b D_t(\,t^{k+1}\,\Phi(u)\,) \;+$$

$$+\,c\int_0^T\int_0^b t^k\,\Phi(u) \leq c\,T^{k+2} + c\int_0^T\int_0^b t^k\,u\,\varphi(u)$$

ya que

$$-\int_0^b T^{k+1}\;\Phi\,(u(T)) \leq 0$$ pues $\Phi(x) \geq 0$ para todo x, y además $\Phi(x) \leq x\,\varphi(x)$.

Ahora bien, si $p = \dfrac{4+2\varepsilon}{4+\varepsilon}$; $q = \dfrac{4+2\varepsilon}{\varepsilon}$; $\alpha = \dfrac{2}{2+\varepsilon}$

$$\int_0^b u\,\varphi(u) \leq \|u\|_p\;\|\varphi(u)\|_q \leq c\,\|u\|_1^{\alpha}\;\|u\|_2^{1-\alpha}\;\|\varphi(u)\|_q$$

por la desigualdad de Sobolev, ya que $\dfrac{1}{p} = \alpha + \dfrac{1-\alpha}{2}$

El último miembro es menor o igual que

$$c\,\tau^{1-\alpha}\|u\|_1^{\alpha}\;\|\varphi(u)\|_2^{1-\alpha}\|\varphi(u)\|_q \leq c\,\tau^{1-\alpha}\|u\|_1^{\alpha}\;\|\varphi(u)\|_q^{2-\alpha}$$

pues $q > 2$. Ahora bien, como

$$\varphi(u)(x) = \int_0^x D_x\varphi\,(u)(s)\,ds \qquad \text{pp } x$$

$$|\varphi(u)(x)| \leq x^{1/2}\left(\int_0^b |D_x\varphi(u)(s)|^2\, ds\right)^{1/2}$$

y por lo tanto, $\|\varphi(u)\|_q \leq c\,\|D_x\varphi(u)\|_2$

Se tiene entonces

$$\int_0^T\int_0^b t^k\, u\,\varphi(u) \leq \int_0^T c\,\tau^{1-\alpha} t^k\, \|u\|_1^{\alpha}\, \|D_x\varphi(u)\|_2^{2-\alpha} \leq$$

$$\leq c\,\tau^{1-\alpha}\|u_o\|_1^{\alpha} \int_0^T t^k\, \|D_x\varphi(u)\|_2^{2-\alpha} =$$

$$= c\,\tau^{1-\alpha}(T^{\alpha/2}\, \|u_o\|_1^{\alpha})\,(T^{-\alpha/2}\int_0^T t^k\, \|D_x\varphi(u)\|_2^{2-\alpha})$$

pues sabemos que para todo $t > 0$, $\|u(x,t)\|_1 \leq \|u_o\|_1$.

Usaremos la siguiente desigualdad de Young con $r = \dfrac{2}{2-\alpha}$ y $s = \dfrac{2}{\alpha}$

a saber,

$$ab \leq c\, a^s + \frac{1}{2}\, b^r$$

Tenemos,

$$\int_0^T\int_0^b t^k\, u\varphi(u) \leq c(\tau)T\|u_o\|_1^2 + \frac{1}{2}\quad T^{-(\alpha/2-\alpha)}\left(\int_0^T t^k\|D_x\varphi(u)\|_2^{2-\alpha}\right)^{2/2-\alpha} \leq$$

$$\leq c(\tau)T\,\|u_o\|_1^2 + \frac{1}{2}\, T^{-(\alpha/2-\alpha)}\, T^{(2/2-\alpha)(\alpha/2)}\int_0^T t^{2k/2-\alpha}\|D_x\varphi(u)\|_2^2 =$$

$$= c(\tau)T\,\|u_o\|_1^2 + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^b t^{k+1}\,|D_x\varphi(u)|^2$$

si $k = 1 + \varepsilon$ con lo cuál $\dfrac{2k}{2-\alpha} = k + 1$. Por lo tanto,

$$\int_0^T \int_0^b t^{k+1} \left| D_x \varphi(u) \right|^2 \leq c\, T^{k+2} + o(\tau)\, T \| u_o \|_1^2 \leq c\, T^{k+3} + o(\tau)\, T \| u_o \|_1^2$$

de donde se deduce (D) en este caso.

2.- Demostración del Teorema en el caso general.

Supongamos que $u_o \in C_o^\infty$ pero que φ es como en el enunciado del Teorema. Sea $\beta = \varphi^{-1}$, entonces $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua Lipschitz. Sea

$$\beta_\varepsilon(x) = (\beta * \rho_\varepsilon)(x) + \varepsilon\, x + c_\varepsilon$$

donde $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \rho\,(x/\varepsilon)$, $\rho \in C_o^\infty(R)$, $\rho \geq 0$, $\int \rho = 1$, sop $\rho \subset [-1,1]$, y c_ε es una constante tal que $\beta_\varepsilon(0) = 0$.

Entonces $\beta_\varepsilon \in C^\infty$ $\forall\, \varepsilon$ y además las constantes de Lipschitz de las funciones β_ε están uniformemente acotadas por $(\tau + 1)$ si $\varepsilon \leq 1$, donde τ es la constante de Lipschitz de β . Además $\beta_\varepsilon \longrightarrow \beta$ uniformemente sobre compactos pues β es continua.

Como $\beta_\varepsilon' \geq \varepsilon$ pues $(\beta * \rho_\varepsilon)$ es creciente pues β lo es y ρ es no negativa, se sigue que $\varphi_\varepsilon = \beta_\varepsilon^{-1} \in C^1$ con inversa Lipschitz. Por lo tanto si

$$a_\varepsilon u = -\, D_x(A(D_x(\varphi_\varepsilon(u))))$$

con el dominio correspondiente, se tiene que $u_\varepsilon(t) = S_{Q_\varepsilon}(t)u_o$ satisface

$$\sup_{0 \leq t \leq T}\text{ess}\; t^{k+3} \| \varphi_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) \|^2_{H^1} + \frac{\theta}{\theta + 1} \int_0^T \int_0^b t^{k+3} (D_t u_\varepsilon)^2 \leq c(\tau)\; T \| u_o \|^2_1 + c\, T^{k+3}$$

con c independiente de ε.

Veamos que $u_\varepsilon(t) \to S_Q(t)u_o$ en $C([0,T];L^1(0,b))$ cuando $\varepsilon \to 0$. En efecto, nuevamente por el Teorema de Perturbación del Capítulo I, basta ver que si

$$H^\varepsilon_\lambda = (I + \lambda Q_\varepsilon)^{-1} \qquad\qquad H_\lambda = (I + \lambda Q)^{-1},$$

entonces para toda $f \in L^1(0,b)$ se tiene

$$H^\varepsilon_\lambda f \to H_\lambda f \qquad (\varepsilon \to 0) \qquad \text{en } L^1(0,b).$$

Supongamos primero que $f \in L^\infty(0,b)$, sabemos entonces (ver la Observación 3 de la Sección 2 de este capítulo), que si

$$v_\varepsilon - \lambda D_x(A(D_x(\varphi_\varepsilon(v_\varepsilon)))) = f$$

$$v - \lambda D_x(A(D_x(\varphi(v)))) = f$$

entonces v_ε , $v \in L^\infty(0,b)$.

Sea $w_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(v_\varepsilon)$, $w = \varphi(v)$. se tiene,

$$\beta_\varepsilon(w_\varepsilon) - \lambda D_x(A(D_x w_\varepsilon)) = f$$

$$\beta(w) - \lambda D_x(A(D_x w)) = f$$

Por lo tanto,

$$\beta_\varepsilon(w_\varepsilon) - \beta_\varepsilon(w) - \lambda D_x(A(D_x w_\varepsilon)) + \lambda D_x(A(D_x w)) = \beta(w) - \beta_\varepsilon(w).$$

Como $w_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(\beta_\varepsilon(w_\varepsilon))$, $w = \varphi_\varepsilon(\beta_\varepsilon(w))$ y $-D_x(A(D_x(\varphi_\varepsilon(u))))$ es acretivo en $L^1(0,b)$,

$$\| \beta_\varepsilon(w_\varepsilon) - \beta_\varepsilon(w) \|_{L^1} \leq \| \beta(w) - \beta_\varepsilon(w) \|_{L^1} \longrightarrow 0$$

pues w es acotada y $\beta_\varepsilon \longrightarrow \beta$ uniformemente sobre compactos. Se tiene

$$\| v_\varepsilon - v \|_{L^1} \leq \| v_\varepsilon - \beta_\varepsilon(w) \|_{L^1} + \| \beta_\varepsilon(w) - v \|_{L^1}$$

Según probamos antes, $v_\varepsilon - \beta_\varepsilon(w) = \beta_\varepsilon(w_\varepsilon) - \beta_\varepsilon(w) \longrightarrow 0$ en $L^1(0,b)$, como $\beta_\varepsilon(w) - v = \beta_\varepsilon(w) - \beta(w) \longrightarrow 0$ en $L^1(0,b)$, se sigue que $v_\varepsilon \longrightarrow v$ en $L^1(0,b)$.

Como H_λ^ε y H_λ son contracciones en L^1, y L^∞ es denso en L^1, se sigue que

$$H_\lambda^\varepsilon f \longrightarrow H_\lambda f \quad \text{en } L^1 \qquad \forall f \in L^1;$$

y la deducción es análoga a la que se hizo anteriormente cuando aplicamos el Teorema de Perturbación.

Veámos que u satisface la desigualdad (D).

Sea t tal que $\| \varphi_\varepsilon(u_\varepsilon(t))\|_{H^1} \leq c$ (ésto sucede para casi todo t si tomamos una sucesión $\varepsilon_n \to 0$ en lugar de considerar todo $\varepsilon > 0$). Entonces existe una sucesión $\varepsilon_n \to 0$ y un $w \in H^1(0,b)$ tales que

$$\varphi_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}(t)) \rightharpoonup w \quad \text{en } H^1 \qquad \text{y} \quad \varphi_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}(t)) \to w \quad \text{en } L^2.$$

Se tiene,

$$\| u_{\varepsilon_n}(t) - \varphi^{-1}(w) \|_{L^1} \leq \| \beta_{\varepsilon_n}(\varphi_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}(t))) - \beta_{\varepsilon_n}(w) \|_{L^1} +$$

$$+ \| \beta_{\varepsilon_n}(w) - \beta(w) \|_{L^1} \leq c \, \| \varphi_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}(t)) - w \|_{L^1} +$$

$$+ \| \beta_{\varepsilon_n}(w) - \beta(w) \|_{L^1}$$

Sabemos que $\| \varphi_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}(t)) - w \|_{L^1} \to 0$. Veamos que

$$\| \beta_{\varepsilon_n}(w) - \beta(w) \|_{L^1} \to 0.$$

Se tiene que $\beta_{\varepsilon_n}(w) \to \beta(w)$ en casi todo punto. Además

$|\beta_{\varepsilon_n}(w) - \beta(w)| \leq 2(\tau + 1)|w| \in L^1$, pues $\beta_{\varepsilon_n}(0) = 0$ y $\beta(0) = 0.$

Aplicando convergencia mayorada se tiene lo buscado. Por lo tanto,

$$u_{\varepsilon_n}(t) \to \varphi^{-1}(w) \qquad \text{en } L^1(0,b)$$

Como $u_\varepsilon(t) \to u(t)$ en $L^1(0,b)$ para todo $t \in [0,T]$, se tiene que $w = \varphi(u(t)) \in H^1(0,b)$ y $\varphi_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}(t)) \rightharpoonup \varphi(u(t))$ pp t en $H^1(0,b)$.

Como además

$$\int_0^T \int_0^b t^{k+3} (D_t u_\varepsilon)^2 \leq c$$

se sigue que

$$D_t u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup D_t u \qquad \text{en } L^2_{Loo}(0,T;L^2(0,b)).$$

Por lo tanto u satisface la desigualdad (D), (con constantes quizás un poco más grandes), ya que si

$$h_n \rightharpoonup h \qquad \text{en un espacio de Hilbert } H,$$

entonces

$$\| h \| \leq \liminf_{n\to\infty} \| h_n \|$$

Para concluir la demostración supongamos ahora que $u_o \in L^1$ es cualquiera. Sea $(u_o^n) \subset C_o^\infty$ una sucesión que tiende a u_o en L^1. Como $S_Q(t)$ es no expansivo para todo t, se sigue que

$$S_Q(t)u_o^n \rightarrow S_Q(t)u_o \qquad \text{en} \quad C([0,T];L^1(0,b)).$$

Veamos que $u = S_Q(t)u_o$ satisface (D). Con ésto habremos demostrado que $\varphi(u(t)) \in H^1$ pp t y que $D_t u \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,b))$, con lo cuál concluye la demostración del teorema.

Sea $u^n(t) = S_Q(t)u_o^n$, sabemos que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess}\; t^{k+3} \| \varphi(u^n(t)) \|^2_{H^1} + \int_0^T \int_0^b t^{k+3} (D_t u^n)^2 \leq c(\tau)T \| u_o^n \|^2_1 + c(\tau)\, T^{k+3}$$

y por lo tanto, $u_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,b))$ y $D_t u^n \rightharpoonup D_t u$ en $L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,b))$.

Sea t tal que $\| \varphi(u^n(t)) \|_{H^1} \leq c$ (ésto sucede para casi todo t). Existe entonces $w \in H^1$ y una subsucesión que volveremos a llamar $u^n(t)$ tales que

$$\varphi(u^n(t)) \rightharpoonup w \quad \text{en } H^1 \qquad y \qquad \varphi(u^n(t)) \rightarrow w \quad \text{en } L^2 .$$

Entonces,

$$\| u^n(t) - \beta(w) \|_1 = \| \beta(\varphi(u^n(t))) - \beta(w) \|_1 \leq c \, \| \varphi(u^n(t)) - w \|_1 \rightarrow 0.$$

De donde $w = \varphi(u(t)) \in H^1$ y $\varphi(u^n(t)) \rightharpoonup \varphi(u(t))$ en H^1.

Por lo tanto u satisface la desiguladad (D) y con ésto las condiciones a),.....,e) del enunciado, ya que por los resultados generales sabemos que al ser u(t) diferenciable como función a valores en $L^1(0,b)$, se tiene $u(t) \in D(\mathcal{Q})$, y por lo tanto u satisface las condiciones de contorno. Además estos resultados dicen que u(t) satisface la ecuación diferencial para casi todo t. El hecho de que $\varphi(u(t)) \in H^1$ se deduce de la desigualdad (D) pero además es consecuencia de que $\varphi(u(t)) \in C^1([0,b])$ en la variable x para casi todo t, por ser $A(D_x(\varphi(u(t)))) \in C([0,b])$ en x, pp t pues

$$D_x(A(D_x(\varphi(u(t))))) = u_t \in L^2(0,b) \qquad \text{pp } t.$$

Observemos además, que cuando $\varphi \in C^1$ y $u_o \in C^1([0,b])$ con $u_o(0) = 0$, se tiene

$$u_t \in L^2(0,T;L^2(0,b)).$$

SECCION 4

En esta sección extenderemos los resultados de las secciones anteriores a los problemas de Dirichlet y de Neumann.

En la Sección 1 hemos demostrado que el operador

$$\mathcal{Q}\, u = - D_x(A(D_x(\varphi(u))))$$

es acretivo en $L^1(0,b)$ si $A, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y estrictamente crecientes, cuando por $D(\mathcal{Q})$ = dominio de $\mathcal{Q}$, tomamos el conjunto que corresponde a datos mixtos, de tipo Dirichlet o de tipo Neumann.

En la Sección 2 hemos probado que cuando consideramos datos mixtos y A y φ satisfacen la condición (2.1), entonces $\mathcal{Q}$ resulta m-acretivo en $L^1(0,b)$. También probamos que $\overline{D(\mathcal{Q})} = L^1(0,b)$ y que ésto vale tanto para datos de contorno mixtos, como de tipo Dirichlet o Neumann.

Veremos ahora que en estos dos últimos casos, $\mathcal{Q}$ también resulta m-acretivo en $L^1(0,b)$, con lo cuál obtenemos un resultado de existencia de solución por discretización para los problemas

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = D_x(A(D_x(\varphi(u)))) \\ u(0,t) = u(b,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{array} \right. \qquad \text{(P.D.)}$$

$$\begin{cases} u_t = D_x(A(D_x(\varphi(u)))) \\ D_x(\varphi(u))(0,t) = D_x(\varphi(u))(b,t) = 0 \\ u(x,0) = u_o(x) \end{cases} \qquad \text{(P.N.)}$$

para cada función $u_o \in L^1(0,b)$.

La misma demostración del Teorema 2 (Sección 3), da como resultado que la solución por discretización del problema (P.D.): $u(x,t)$, es solución fuerte y que

$$u_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,b))$$

siempre que $\varphi^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sea continua Lipschitz.

Lo único que cambia es la definición de la funcional convexa Ψ para la cuál $B = \partial\Psi$. Para el problema (P.D.) debe tomarse

$$\Psi(u) = \begin{cases} \int_0^b j(u_x)\,dx & \text{si } u \in H^1_o(0,b),\ j(u_x) \in L^1(0,b) \\ +\infty & \text{si no} \end{cases}$$

Para el problema (P.N.) la demostración no puede ser igual pues las estimaciones usan fuertemente que la solución $u(x,t)$ se anula en algún punto $x \in [0,b]$ para casi todo t. Como ésto no tiene por qué suceder en este caso, se puede modificar la demostración si suponemos que el dato

$u_o \in L^{\infty}(0,b)$ y no es cualquier función de $L^1(0,b)$; de esta manera se obtienen estimaciones que dependen de $\| u_o \|_{L^{\infty}(0,b)}$ y no de $\| u_o \|_{L^1(0,b)}$ que permiten concluir que $u(x,t)$, solución por discretización del problema (P.N.), es solución fuerte siempre que $u_o \in L^{\infty}(0,b)$ y $\varphi^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sea continua Lipschitz; además se tiene

$$u_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,b))$$

En este caso

$$\Psi(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^b j(u_x)\, dx & \text{si } u \in H^1(0,b),\ j(u_x) \in L^1(0,b) \\ +\infty & \text{si no} \end{cases}$$

Debemos entonces probar que $\mathcal{Q}$ es m-acretivo cuando se consideran en su definición datos de contorno de tipo Dirichlet o de tipo Neumann.

Observemos primero, que si bien hemos probado que $\mathcal{Q}$ es m-acretivo cuando

$$D(\mathcal{Q}) = \{ u \in L^1(0,b) / \varphi(u) \in W^{1,1}(0,b),\quad A(D_x(\varphi(u))) \in W^{1,1}(0,b),$$

$$\varphi(u)(0) = 0 \quad y \quad A(D_x(\varphi(u)))(b) = 0 \} \quad ,$$

la misma demostración permite concluir que $\mathcal{Q}$ es m-acretivo cuando se reemplazan las condiciones nulas por dos constantes, a saber

$$\varphi(u)(0) = \alpha$$

$$A(D_x(\varphi(u)))(b) = \beta$$

El operador T para el cuál buscamos un punto fijo es, en este caso,

$$Tu(x) = \varphi^{-1}\left[\alpha + \int_0^x A^{-1}\left(\beta + \int_s^b (f - \lambda u)\, dz \right) ds \right]$$

PROPOSICION 1

Sean A, φ como en la Proposición 1 de la Sección 2 de este Capítulo,

$$D(Q) = \{ u \in L^1(0,b) / \ \varphi(u) \in W^{1,1}(0,b), \ \ A(D_x(\varphi(u))) \in W^{1,1}(0,b)$$

$$\text{y} \ \ u(0) = u(b) = 0 \} ,$$

y $Q u = - D_x(A(D_x(\varphi(u))))$ si $u \in D(Q)$.

Entonces Q es m-acretivo en $L^1(0,b)$.

DEMOSTRACION

Sean $\lambda > 0$, $f \in L^1(0,b)$.

De acuerdo con nuestras hipótesis sabemos que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, existe $u_\alpha \in L^1(0,b)$ tal que $\varphi(u_\alpha) \in W^{1,1}(0,b)$, $A(D_x(\varphi(u_\alpha))) \in W^{1,1}(0,b)$, $u_\alpha(0) = 0$, $A(D_x(\varphi(u_\alpha)))(b) = \alpha$ y

$$\lambda u_\alpha + \mathcal{Q} u_\alpha = f$$

Queremos ver que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u_\alpha(b) = 0$, pues u_α será la solución que buscamos del problema

$$\begin{cases} \lambda u + \mathcal{Q} u = f \\ u(0) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Consideremos la aplicación $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$L(\alpha) = u_\alpha(b)$$

Probaremos que L es una función continua, monótona creciente y que si

$$\alpha < -\|f\|_{L^1} \Rightarrow L(\alpha) \leq 0$$

$$\alpha > \|f\|_{L^1} \Rightarrow L(\alpha) \geq 0.$$

y con ésto concluirá la demostración.

De acuerdo con lo observado antes,

$$L(\alpha) = u_\alpha(b) = \varphi^{-1}\left[\int_0^b A^{-1}\left(\alpha + \int_s^b (f - \lambda u_\alpha)\, dz\right) ds\right]$$

La aplicación $R : \mathbb{R} \to L^1(0,b)$, $R(\alpha) = u_\alpha$ es continua y no decreciente. De aquí se deduce inmediatamente que L es continua y no decreciente. Es más probaremos

i) $\| u_\alpha - u_\beta \|_{L^1} \leq \frac{1}{\lambda} |\alpha - \beta|$

ii) $\alpha \leq \beta \Rightarrow u_\alpha(x) \leq u_\beta(x) \quad \forall x \in [0,b]$.

En efecto, supongamos que $\alpha < \beta$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $\beta = \alpha + \varepsilon$,

$$\lambda \int_0^b |u_\alpha - u_\beta| = \lambda \int_{[u_\alpha > u_\beta]} u_\alpha - u_\beta + \lambda \int_{[u_\beta > u_\alpha]} u_\beta - u_\alpha$$

Se tiene,

$$0 \leq \lambda \int_{[u_\alpha > u_\beta]} u_\alpha - u_\beta = \int_{[u_\alpha > u_\beta]} Q u_\beta - Q u_\alpha =$$

$$= \int_{[u_\alpha > u_\beta]} D_x\left(A(D_x(\varphi(u_\alpha))) - A(D_x(\varphi(u_\beta))) \right) =$$

$$= \sum A(D_x(\varphi(u_\alpha))) - A(D_x(\varphi(u_\beta)))\Big|_{x_i}^{x^i}$$

donde $\bigcup (x_i, x^i) = [u_\alpha > u_\beta]$

Como $u_\alpha(0) = u_\beta(0) = 0$, si $x_i, x^i \in [0,b)$ se tiene

$$u_\alpha(x_i) = u_\beta(x_i) \qquad u_\alpha(x^i) = u_\beta(x^i)$$

Si $x^i = b$ entonces

$$A(D_x(\varphi(u_\alpha)))(b) - A(D_x(\varphi(u_\beta)))(b) = -\varepsilon$$

Se tiene entonces,

$$D_x(\varphi(u_\alpha(x_i))) \geqslant D_x(\varphi(u_\beta(x_i))) \qquad \text{si } x_i \in [0,b)$$

$$D_x(\varphi(u_\alpha(x^i))) \leqslant D_x(\varphi(u_\beta(x^i))) \qquad \text{si } x^i \in (0,b)$$

Por lo tanto,

$$0 \leqslant \lambda \int_{[u_\alpha > u_\beta]} u_\alpha - u_\beta \leqslant \begin{cases} 0 & \text{si } x^i < b \quad \forall\, i, \\ -\varepsilon & \text{si } x^i = b \text{ para algún } i. \end{cases}$$

Por lo tanto debe ser $x^i < b \ \ \forall\, i$, es decir, debe ser $u_\alpha(b) \leqslant u_\beta(b)$.
Como además se tiene

$$\int_{[u_\alpha > u_\beta]} u_\alpha - u_\beta = 0$$

se sigue que $u_\alpha = u_\beta$ pp en $[u_\alpha > u_\beta]$ y como ambas funciones son continuas se tiene

$$u_\alpha(x) \leq u_\beta(x) \quad \forall\, x \in [0,b].$$

De aquí que

$$\| u_\alpha - u_\beta \|_1 = \int_{[u_\alpha < u_\beta]} u_\beta - u_\alpha$$

De acuerdo con lo que vimos antes se tiene

$$\lambda \| u_\alpha - u_\beta \|_1 = \sum \; A(D_x(\varphi(u_\beta))) - A(D_x(\varphi(u_\alpha))) \Big|_{x_i}^{x^i}$$

donde $\bigcup (x_i, x^i) = [u_\alpha < u_\beta]$ y por lo tanto,

$$\lambda \| u_\alpha - u_\beta \|_1 \leq \begin{cases} 0 & \text{si } x^i < b \quad \forall\, i \\ \varepsilon & \text{si } x^i = b \text{ para algún } i \end{cases}$$

Recordando que $\varepsilon = |\alpha - \beta|$, se sigue lo enunciado.

Veamos que si $\alpha < -\|f\|_1$ entonces $L(\alpha) \leq 0$. Se tiene

$$0 \leq \lambda \int_{[u_\alpha > 0]} u_\alpha = \int_{[u_\alpha > 0]} f + \int_{[u_\alpha > 0]} D_x(A(D_x(\varphi(u_\alpha))))$$

$$= \int_{[u_\alpha > 0]} f + \sum A(D_x(\varphi(u_\alpha))) \Big|_{x_i}^{x^i}$$

donde $\bigcup (x_i, x^i) = [u_\alpha > 0]$.

Si $x_i, x^i \in [0,b)$, entonces

$$u_\alpha(x_i) = u_\alpha(x^i) = 0$$

Si algún $x^i = b$, sabemos que

$$A(D_x(\varphi(u_\alpha)))(b) = \alpha$$

Si $u_\alpha(b) \leq 0$ se tiene lo que queremos. Si $u_\alpha(b)$ fuera > 0, entonces algún x^i sería b y se tendría

$$0 \leq \lambda \int_{[u_\alpha > 0]} u_\alpha \leq \int_{[u_\alpha > 0]} f + \alpha \leq \|f\|_1 + \alpha < 0$$

lo que es absurdo.

Por lo tanto, $L(\alpha) = u_\alpha(b) \leq 0$ si $\alpha < -\|f\|_1$.

Análogamente se demuestra que si $\alpha > \|f\|_1$, entonces $L(\alpha) \geq 0$.

Con ésto concluye la demostración de la Proposición 1.

PROPOSICION 2

Sean A, φ como en la Proposición 1, sea

$$D(\mathcal{Q}) = \{ u \in L^1(0,b) / \ \varphi(u) \in W^{1,1}(0,b), \ A(D_x(\varphi(u))) \in W^{1,1}(0,b)$$
$$D_x(\varphi(u))(b) = D_x(\varphi(u))(0) = 0 \}$$

y $\mathcal{Q}u = -D_x(A(D_x(\varphi(u))))$ si $u \in D(\mathcal{Q})$. Entonces, $\mathcal{Q}$ es m-acretivo en $L^1(0,b)$.

DEMOSTRACION

Siguiendo la idea de la demostración anterior, sea $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera:

$$L(\alpha) = A(D_x(\varphi(u_\alpha)))(0) = \int_0^b (f - \lambda u_\alpha)\, dx$$

donde u_α es la solución de

$$\begin{cases} \lambda u_\alpha + \mathcal{Q} u_\alpha = f \\ \varphi(u_\alpha)(0) = \alpha \\ A(D_x(\varphi(u_\alpha)))(b) = 0 \end{cases}$$

Queremos ver que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $L(\alpha) = 0$, ya que u_α resultará la solución de

$$\begin{cases} \lambda u + \mathcal{Q} u = f \\ A(D_x(\varphi(u)))(0) = A(D_x(\varphi(u)))(b) = 0 \end{cases}$$

que buscamos.

Probaremos que L es una aplicación continua y no creciente y que

i) $L(\alpha) \longrightarrow -\infty \quad (\alpha \to +\infty)$

ii) $L(\alpha) \longrightarrow +\infty \quad (\alpha \to -\infty)$.

En efecto, si $R : \mathbb{R} - C([0,b])$ está definida por $R(\alpha) = u_\alpha$, resulta que R es continua y no dcoreciente; de donde se deduce inmediatamente que L es continua y no creciente.

Veamos que ésto es así. Para ello probaremos lo siguiente:

Si w_α es solución de

$$\begin{cases} \lambda w_\alpha + \mathcal{Q} w_\alpha \leq f \\ \varphi(w_\alpha)(0) = \alpha \\ A(D_x(\varphi(w_\alpha)))(b) = 0 \end{cases}$$

y w_β es solución de

$$\begin{cases} \lambda w_\beta + \mathcal{Q} w_\beta \geq f \\ \varphi(w_\beta)(0) = \beta \\ A(D_x(\varphi(w_\beta)))(b) = 0 \end{cases}$$

y si $\alpha < \beta$, entonces $w_\alpha(x) \leq w_\beta(x) \quad \forall x \in [0,b]$.

En efecto,

$$0 \leq \lambda \int_{[w_\alpha > w_\beta]} w_\alpha - w_\beta \leq \int_{[w_\alpha > w_\beta]} D_x\big(A(D_x(\varphi(w_\alpha))) - A(D_x(\varphi(w_\beta))) \big) =$$

$$= \sum A(D_x(\varphi(w_\alpha))) - A(D_x(\varphi(w_\beta)))\Big|_{x_i}^{x^i}$$

donde $\bigcup (x_i, x^i) = [w_\alpha > w_\beta]$.

Si $x_i, x^i \in (0,b) \Rightarrow w_\alpha(x_i) = w_\beta(x_i)$, $w_\alpha(x^i) = w_\beta(x^i)$,

y por lo tanto,
$$D_x(\varphi(w_\alpha(x_i))) \geq D_x(\varphi(w_\beta(x_i)))$$
$$D_x(\varphi(w_\alpha(x^i))) \leq D_x(\varphi(w_\beta(x^i)))$$

Si $x_i = 0 \Rightarrow \varphi(w_\alpha)(x_i) = \alpha < \beta = \varphi(w_\beta)(x_i)$, y ésto no puede ser porque $w_\alpha(x_i) \geq w_\beta(x_i)$ $\forall$ i.

Por lo tanto, como

$$A(D_x(\varphi(w_\alpha(b)))) - A(D_x(\varphi(w_\beta(b)))) = 0$$

se sigue que,

$$0 \leq \lambda \int_{[w_\alpha > w_\beta]} w_\alpha - w_\beta \leq 0$$

Es decir, $w_\alpha \leq w_\beta$ pp y como son continuas
$$w_\alpha(x) \leq w_\beta(x) \quad \forall\, x \in [0,b].$$

Veamos que de aquí se deduce que R es continua. En efecto, sean α y β en $\mathbb{R}$ y supongamos que $\alpha < \beta$, entonces sabemos que $u_\alpha \leq u_\beta$.

Sea $\delta > 0$ tal que $\alpha + \delta > \beta$ y sea

$$w_\alpha = \varphi^{-1}(\varphi(u_\alpha) + \delta)$$

Entonces, oomo $w_\alpha = \varphi^{-1}(\varphi(u_\alpha) + \delta) > \varphi^{-1}(\varphi(u_\alpha)) = u_\alpha$ y

$D_x(\varphi(w_\alpha)) = D_x(\varphi(u_\alpha) + \delta) = D_x(\varphi(u_\alpha))$, se sigue que

$$\begin{cases} \lambda w_\alpha + Q w_\alpha = \lambda w_\alpha + Q u_\alpha = \lambda w_\alpha - \lambda u_\alpha + f > f \\ \varphi(w_\alpha)(0) = \alpha + \delta > \beta \\ A(D_x(\varphi(w_\alpha)))(b) = A(D_x(\varphi(u_\alpha)))(b) = 0 \end{cases}$$

Por el principio de comparación anterior (tomando $w_\beta = u_\beta$) se sigue que

$$w_\alpha(x) \geq u_\beta(x) \qquad \forall x \in [0,b].$$

De donde

$$\varphi(u_\beta) \leq \varphi(w_\alpha) = \varphi(u_\alpha) + \delta$$

Como además

$$u_\alpha \leq u_\beta$$

$$\varphi(u_\alpha) \leq \varphi(u_\beta)$$

y por lo tanto

$$|\varphi(u_\alpha) - \varphi(u_\beta)| \leq \delta$$

siempre que $|\alpha - \beta| < \delta$. De aquí que

$$\|\varphi(u_\alpha) - \varphi(u_\beta)\|_\infty \leq |\alpha - \beta|$$

y como φ^{-1} es continua se sigue lo enunciado.

Por lo tanto sólo falta ver que

$$L(\alpha) \longrightarrow -\infty \quad (\alpha \to +\infty)$$

$$L(\alpha) \longrightarrow +\infty \quad (\alpha \to -\infty).$$

Supongamos que $\alpha \to +\infty$. Como la familia $\{u_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ es monótona creciente, existe $h(x)$ tal que

$$h(x) = \lim_{\alpha \to +\infty} u_\alpha(x)$$

Veamos que $h \notin L^1(0,b)$. En efecto, si no fuera así, como

$$u_\alpha(x) \nearrow h(x) \quad \Rightarrow \int_s^b u_\alpha \nearrow \int_s^b h \qquad \forall s,$$

de donde

$$A^{-1}\left(\int_s^b (f - \lambda u_\alpha)\, dz\right) \searrow A^{-1}\left(\int_s^b (f - \lambda h)\, dz\right) \quad \forall s.$$

Como A^{-1} es continua y $u_\alpha \in L^1(0,b)$, resulta

$$A^{-1}\left(\int_s^b (f - \lambda u_\alpha)\, dz\right) \in L^1(0,b), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

De aquí que

$$\int_0^x A^{-1}\left(\int_s^b (f - \lambda u_\alpha)\, dz\right) ds \searrow \int_0^x A^{-1}\left(\int_s^b (f - \lambda h)\, dz\right) ds \quad \forall x \in [0,b].$$

Como $h \in L^1(0,b)$ se sigue que

$$\left| \int_0^x A^{-1}\left(\int_s^b (f - \lambda h)\, dz\right) ds \right| \leq c$$

y por lo tanto para cada $x \in [0,b]$ existen $c(x)$ y $\alpha_0(x)$ tales que

$$\left| \int_0^x A^{-1}\left(\int_s^b (f - \lambda u_\alpha)\, dz\right) ds \right| \leq c(x) \quad \text{si } \alpha \geq \alpha_0(x).$$

De donde,

$$\varphi(u_\alpha(x)) = \alpha + \int_0^x A^{-1}\left(\int_s^b (f - \lambda u_\alpha)\, dz\right) ds \quad \rightarrow +\infty \quad (\alpha \rightarrow +\infty)$$

para todo $x \in [0,b]$ y por lo tanto $h \equiv +\infty$, lo que es un absurdo.

Por lo tanto $h \notin L^1(0,b)$. Esto implica que

$$\int_0^b u_\alpha(x)\, dx \longrightarrow +\infty \qquad (\alpha \to +\infty)$$

y entonces

$$L(\alpha) = \int_0^b (f - \lambda u_\alpha)\, dx \longrightarrow -\infty \qquad (\alpha \to +\infty).$$

Análogamente se demuestra que

$$L(\alpha) \longrightarrow +\infty \quad (\alpha \to -\infty)$$

Y con ésto concluye la demostración de la Proposición 2.

CAPITULO III

En este capítulo estudiaremos la ecuación

$$u_t = D_{xx}(\varphi(u)) \qquad (1)$$

nuevamente en un intervalo acotado, digamos el $[0,1]$, con condiciones de contorno mixtas. En todo el capítulo entenderemos por solución una solución fuerte, es decir, tal que $u_t \in L^1_{Loc}(0,T;L^1(0,1))$.

A diferencia de los capítulos precedentes, aquí consideraremos como dato inicial una medida de Borel finita μ que se alcance en el sentido de las distribuciones, es decir, tal que

$$\int_0^1 u(x,t)\, g(x)\, dx \rightarrow \int_0^1 g(x)\, d\mu(x) \qquad (t\rightarrow 0) \qquad \forall\, g \in C([0,1]) \qquad (2)$$

La consideración de tales datos iniciales resulta natural pues se demuestra que de haber una solución de (1) (con los consiguientes datos de contorno) que pertenezca al espacio $L^{\infty}(0,T;L^1(0,1))$, existe una medida de Borel finita μ tal que se satisface (2). (Teorema 1).

El espacio $L^{\infty}(0,T;L^1(0,1))$ resulta ser el espacio natural para buscar una tal solución. En efecto, en el Teorema 2 se demuestra que a cada medida μ le corresponde una única solución $u(x,t)$ de (1),(2) y se demuestra que $u \in L^{\infty}(0,T;L^1(0,1))$.

Se obtienen además dos resultados de comparación (Proposiciones 1 y 2). Uno compara las soluciones puntualmente y el otro compara las funciones de distribución

$$v(x,t) = \int_0^x u(s,t)\, ds$$

El primer resultado es conocido cuando los datos iniciales son funciones de $L^1(0,1)$ y en particular hemos dado una versión del mismo en el Capítulo II.

El resultado de comparación de las funciones de distribución se obtiene como corolario inmediato de nuestros métodos de demostración y fue obtenido anteriormente para datos iniciales en $L^1(0,1)$ o distribuciones de masa concentrada en un punto: δ_{x_0}, en forma independiente por Carmen Cortázar ([9]) y J.L.Vázquez ([22]). Ambos lo han utilizado para estudiar el comportamente asintótico de las soluciones de (1) con datos iniciales en $L^1(0,1)$ y no negativos.

Una tercera proposición es obtenida como consecuencia del Lema 1, lema éste que será usado en la demostración de todos los resultados antes mencionados. Esta proposición habla de la dependencia de la solución $u(x,t)$ respecto del dato inicial μ, a saber

$$\int_0^1 |u_1(x,t) - u_2(x,t)|\, dx \leq \int_0^1 d|\mu_1 - \mu_2|$$

si u_1 y u_2 son las soluciones de (1) con datos iniciales μ_1 y μ_2 respectivamente.

Este resultado es bien conocido en el caso en que $\mu_i = f_i\, dx$, $i = 1,2$ donde $f_i(x) \in L^1(0,1)$ y habla de la no expansividad del semigrupo asociado al operador acretivo: $-D_{xx}(\varphi(u))$. También fue obtenido por Pierre ([18]) para el caso de medidas no negativas en toda la recta $\mathbb{R}$. (En realidad Pierre trabaja en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$).

Todos estos resultados se obtienen gracias a la equivalencia del problema (1),(2) (con datos de contorno mixtos) y el problema

$$v_t = D_x(\varphi(v_x)) \qquad (3)$$

$$\lim_{t \to 0} \int_0^1 |v(x,t) - F(x)|\, dx = 0 \qquad (4)$$

con datos de contorno mixtos, donde $F(x) = \mu([0,x))$ es la función de distribución de la medida μ ,(con lo cual $F \in L^{\infty} \subset L^1$), estudiado en el Capítulo II.

Esta equivalencia es probada en el Teorema 1 y se basa en demostrar que el problema (3),(4) (con datos mixtos) es equivalente al problema (3), (5) donde (5) es

$$\lim_{t \to 0} v(x,t) = F(x) \quad \text{si } x \in (0,1) \text{ es punto de continuidad de } F. \qquad (5)$$

Para esto se prueba que si v es solución de (3),(4) (con $v(0,t) = 0$, $v_x(1,t) = 0$), entonces

$$V_0^1 \, v(x,t) \leq V_0^1 \, F(x) \qquad \forall \, t > 0$$

donde $V_0^1 \, g$ es la variación total de la función $g(x)$ en el intervalo $[0,1]$.

En realidad se tiene un resultado más general (Lema 1) que permite obtener las Proposiciones 1 y 3 en forma inmediata.

Este capítulo se dividirá en 2 secciones, en la segunda de las cuales demostraremos los resultados antes mencionados.

En la Sección 1 reescribiremos un Principio de comparación de soluciones fuertes debido a J. E. Bouillet y C. Atkinson ([5]) que aplicaremos reiteradamente en la Sección 2. La razón por la cual lo reescribimos es que no lo usaremos en la versión en la que está enunciado en el trabajo antes mencionado y por lo tanto, para claridad, iremos señalando cómo la demostración se adapta a las distintas situaciones en que se usará.

SECCION 1

En esta sección probaremos el siguiente

PRINCIPIO DE COMPARACION

Sea G un abierto contenido en R^2. Supongamos que

$(a,b) \times \{0\}$ = proyección de G sobre el eje t = 0.

$\{a\} \times (\tilde{t},T)$ = proyección de G sobre el eje x = a.

Llamaremos frontera parabólica de G y denotaremos $\partial_p G$ al subconjunto siguiente de la frontera, ∂G, de G:

$(\bar{x},\bar{t}) \in \partial_p G$ si

i) $(\bar{x},\bar{t}) \in \partial G$

ii) $\exists\ \varepsilon > 0 /\ \begin{cases} (\bar{x},\bar{x}+\varepsilon) \times \{\bar{t}\} \subset G & \text{ó} \\ (\bar{x}-\varepsilon,\ \bar{x}) \times \{\bar{t}\} \subset G \end{cases}$

ó $\{\bar{x}\} \times (\bar{t},\bar{t}+\varepsilon) \subset G$

Sea A(x,u,p) una función continua en las 3 variables y estrictamente creciente como función de p para (x,u) fijo.

Consideremos la clase de funciones w que satisfacen,

a) $\chi_G w,\ \chi_G w_x,\ \chi_G w_t \in L^1_{Loc}(\tilde{t},T;L^1(a,b))$,

b) $A(x,w(x,t),w_x(x,t)) \in L^1_{Loc}(G)$,

c) $w_t = D_x(A(x,w(x,t),w_x(x,t)))$ en $D'(G)$,

(y por lo tanto, de acuerdo con a), también en casi todo punto de G),

d) Existe $w_o \in L^1(a,b)$ tal que

$\chi_G(x,t_n)(w(x,t_n) - w_o(x)) \to 0 \quad (n \to \infty)$ en $L^1(a,b)$,

donde t_n es una sucesión que tiende a $\tilde{t}$ independiente de w en la clase.

Sean u y v en esta clase, supongamos que "$u \leq v$ en $\partial_p G$", donde por ésto entendemos

i) $u_o(x) \leq v_o(x)$ pp $x \in (a,b)$ tal que $(x,\tilde{t}) \in \partial G$,

ii) Para casi todo $(\bar{x},\bar{t}) \in \partial_p G$ con $\bar{t} > \tilde{t}$,

si $\{\bar{x}\} \times (\bar{t},\bar{t} + \varepsilon) \subset G \Rightarrow \lim\limits_{t \searrow \bar{t}} u(\bar{x},t) \leq \lim\limits_{t \searrow \bar{t}} v(\bar{x},t)$

$$(1)\begin{cases} \text{si } (\bar{x} - \varepsilon,\bar{x}) \times \{\bar{t}\} \subset G \Rightarrow \lim\limits_{x \to \bar{x}-} u(x,\bar{t}) \leq \lim\limits_{x \to \bar{x}-} v(x,\bar{t}) \\ \text{si } (\bar{x},\bar{x} + \varepsilon) \times \{\bar{t}\} \subset G \Rightarrow \lim\limits_{x \to \bar{x}+} u(x,\bar{t}) \leq \lim\limits_{x \to \bar{x}+} v(x,\bar{t}) \end{cases}$$

Si $\{\bar{x}\} \times (\bar{t},\bar{t}+\delta) \not\subset G$ para ningún $\delta>0$, admitimos que en lugar de (1) se tenga

$$(1')\quad \begin{cases} \text{si } (\bar{x}-\varepsilon,\bar{x}) \times \{\bar{t}\} \subset G, \\ \lim\limits_{x\to \bar{x}-} A(x,u(x,\bar{t}),\ u_x(x,\bar{t})) = \lim\limits_{x\to \bar{x}-} A(x,v(x,\bar{t}),\ v_x(x,\bar{t})) \\ \text{si } (\bar{x},\bar{x}+\varepsilon) \times \{\bar{t}\} \subset G, \\ \lim\limits_{x\to \bar{x}+} A(x,u(x,\bar{t}),\ u_x(x,\bar{t})) = \lim\limits_{x\to \bar{x}+} A(x,\ v(x,\bar{t}),\ v_x(x,\bar{t})). \end{cases}$$

Se tiene entonces que, en estas condiciones,

$$u \leq v \qquad \text{pp en } G.$$

DEMOSTRACION

La demostración es parecida a la del Principio de Comparación de la sección 1 del capítulo II y se debe a J. Bouillet y C. Atkinson ([5]). Aquí la repetiremos para destacar que el principio es válido cuando se admite la condición (1') en los puntos que no se alcanzan por un segmento vertical y cuando el dato inicial se alcanza en el sentido de la condición d). En efecto, supongamos que

$$D = \{(x,t) \in G /\ u(x,t) > v(x,t)\} \neq \emptyset$$

e integremos la ecuación c) en

$$D_{\delta\tau} = D \cap \{\delta < t < \tau\}$$

donde $\tilde{t} < \delta < \tau < T$. Tendremos

$$\iint_{D_{\delta\tau}} (u - v)_t \, dx \, dt = \iint_{D_{\delta\tau}} D_x(A(x,u,u_x) - A(x,v,v_x)) \, dx \, dt$$

Como u y v satisfacen la condición a) podemos aplicar el Teorema de Fubini y por lo tanto tenemos,

$$\int_a^b \int_\delta^\tau \chi_D(x,t) \, (u - v)_t \, dt \, dx = \int_\delta^\tau \int_a^b \chi_D(x,t) \, D_x(A(x,u,u_x) - A(x,v,v_x)) \, dx \, dt$$

Consideremos el miembro derecho. Para $\delta < t < \tau$ fijo, $\chi_D(x,t) \neq 0$ en el conjunto

$$\Delta_t = \{ x \in (a,b) / \ (x,t) \in G \text{ y } u(x,t) > v(x,t) \}$$

que es abierto para casi todo t pues G es abierto y $u(.,t)$, $v(.,t)$ son funciones continuas en la variable x en $\{ x / (x,t) \in G \}$ por la condición a). Por lo tanto existe una sucesión (x_j, x^j) de intervalos abiertos tales que

$$\Delta_t = \bigcup_j (x_j, x^j)$$

y se prueba que

$$\int_{\Delta_t} D_x(A(x,u.u_x) - A(x,v,v_x)) \, dx \leq 0$$

como se hizo en el capítulo II.

De aquí que el miembro derecho (m.d.) sea ≤ 0.

Consideremos el miembro izquierdo. Nuevamente por la hipótesis a) se tiene para casi todo x,

$$\{ t \in (\delta,\tau) \;/\; (x,t) \in G \text{ y } u(x,t) > v(x,t) \} = \bigcup_j (t_j, t^j)$$

donde eventualmente t_o podría ser δ y algún t^j podría ser τ. Si (x,t_j) o (x,t^j) pertenecen a G, $\delta < t_j < t^j < \tau$

$$u(x,\xi) = v(x,\xi) \qquad \xi = t_j \quad \text{o} \quad \xi = t^j.$$

Si $(x,t_j) \in \partial_p G$, $\delta < t_j < \tau$, la igualdad se sigue del hecho de que por hipótesis

$$u(x,t_j) \leq v(x,t_j)$$

y $u > v$ en (t_j,t^j). (Recordemos que una condición sobre el flujo sólo podía imponerse en puntos de $\partial_p G$ que no se alcanzaran desde arriba por un segmento vertical contenido en G como ocurre con los puntos t_j).

Si $(x,t^j) \in \partial G$ sólo sabemos que

$$u(x,t^j) \geq v(x,t^j)$$

por ser $u > v$ en (t_j,t^j). Del mismo modo, si algún $t^j = \tau$, entonces

$$u(x,\tau) \geq v(x,\tau)$$

y si $t_o = \delta \Rightarrow u(x,\delta) \geq v(x,\delta)$. Por lo tanto,

$$\int_{\delta}^{\tau} \chi_D(x,t)\ (u-v)_t\ dt = \sum_j (u-v)\Big|_{t_j}^{t^j}$$

es

i) ≥ 0 si $t_o \neq \delta$ y $t^j \neq \tau\ \forall\ j$,

ii) $\geq (u-v)(x,\tau)$ si algún $t^j = \tau$, $t_o \neq \delta$,

iii) $\geq (u-v)(x,\tau) - (u-v)(x,\delta)$ si no,

es decir, de acuerdo al valor de $\chi_D(x,\tau)$ y $\chi_D(x,\delta)$, resulta

$$\int_{\delta}^{\tau} \chi_D(x,t)\ (u-v)_t\ dt \geq \chi_D(x,\tau)\ (u-v)(x,\tau) - \chi_D(x,\delta)\ (u-v)(x,\delta).$$

De aquí que

$$0 \geq \text{m.d.} = \text{m.i.} \geq \int_a^b \chi_D(x,\tau)\ (u-v)(x,\tau)\ dx - \int_a^b \chi_D(x,\delta)\ (u-v)(x,\delta)\ dx$$

para todo $\tilde{t} < \delta < \tau < T$.

Se tiene entonces

$$0 \leq \int_a^b \chi_D(x,\tau)\ (u-v)(x,\tau)\ dx \leq \int_a^b \chi_D(x,\delta)\ (u-v)(x,\delta)\ dx =$$

$$= \int_a^b \left[\chi_G(x,\delta)(u-v)(x,\delta)\right]^+ dx \leq \int_a^b \left[\chi_G(x,\delta)\ (v_o(x) - v(x,\delta))\right]^+ dx +$$

$$+ \int_a^b \left[\chi_G(x,\delta)\ (u(x,\delta) - u_o(x))\right]^+ dx + \int_a^b \left[\chi_G(x,\delta)\ (u_o(x) - v_o(x))\right]^+ dx$$

donde $[g(x)]^+ = \text{máx}\left\{g(x),0\right\}$. Tomemos $\delta = t_n$, se tiene

$$0 \leq \int_a^b \chi_D(x,\tau)\ (u - v)(x,\tau)\ dx \leq \int_a^b \left| \chi_G(x,t_n)\ (u(x,t_n) - u_o(x)) \right| dx +$$

$$+ \int_a^b \left| \chi_G(x,t_n)\ (v(x,t_n) - v_o(x)) \right| dx \ + \int_a^b \left[\chi_G(x,t_n)\ (u_o(x) - v_o(x)) \right]^+ dx$$

Por hipótesis, los 2 primeros términos del tercer miembro tienden a 0 cuando n tiende a ∞. Veamos que esto también sucede con el tercer término. En efecto, como $u_o, v_o \in L^1(a,b)$, basta ver que

$$\left[\chi_G(x,t_n)\ (u_o(x) - v_o(x)) \right]^+ \to 0 \quad \text{pp } x \in (a,b) \quad (n \to \infty).$$

Sea $x \in (a,b)$ tal que $\chi_G(x,t_n) \not\to 0$. Entonces $(x,\tilde{t}) \in \partial G$ y por hipótesis se sigue que $u_o(x) \leq v_o(x)$ (salvo a lo sumo para x en un conjunto de medida nula). Es decir, para casi todo $x \in (a,b)$ se tiene que $\chi_G(x,t_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ ó $\left[\chi_G(x,t_n)\ (u_o(x) - v_o(x)) \right]^+ = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. De aquí se sigue lo afirmado.

Se tiene entonces que para todo $\varepsilon > 0$,

$$0 \leq \int_a^b \chi_D(x,\tau)\ (u - v)(x,\tau)\ dx \ < \ \varepsilon$$

De donde

$$\int_a^b \chi_D(x,\tau)\ (u - v)(x,\tau)\ dx \ = 0$$

para casi todo $\tilde{t} < \tau < T$. De aquí se deduce que $|D| = 0$, es decir

$$u \leq v \quad \text{pp en } G.$$

SECCION 2

En esta sección probaremos los resultados enunciados al comienzo del capítulo y usaremos tanto los resultados del capítulo II como la versión del Principio de Comparación de la sección precedente.

Probaremos el siguiente lema que será la base de todos los demás resultados. Este lema es una versión de un Teorema de Redheffer y Walter ([20]) para soluciones de un problema parabólico; cuando éstas no son continuas hasta la frontera.

LEMA 1

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente, $\varphi(0) = 0$, tal que se tiene una de las dos propiedades siguientes:

i) $\exists\ c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1|p| \leq |\varphi(p)| \leq c_2|p| \qquad \forall\ p \in \mathbb{R},$$

ó

ii) El problema

$$\begin{cases} u_t = D_{xx}(\varphi(u)) \\ D_x(\varphi(u))(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{en } L^1(0,1) \end{cases}$$

admite una solución fuerte $u(x,t)$ para cada función $u_o \in L^1(0,1)$. (Por ejemplo si $\varphi^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua Lipschitz). (Si φ está en las condiciones anteriores, diremos que " φ satisface la condición (3.1) ").

Sean $v_1(x,t)$ y $v_2(x,t)$ soluciones de

$$\left.\begin{aligned}
&a)\ v_t \in L^1_{Loc}(0,T;L^1(0,1)),\\
&b)\ v \in C^1([0,1]) \text{ en la variable } x, \text{ pp.t y } v_x(1,t) = 0,\\
&c)\ v(0,t) = 0\\
&d)\ v_t = D_x(\varphi(v_x)) \qquad \text{pp } (x,t),
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

tales que $\lim\limits_{t \to 0} \displaystyle\int_0^1 | v_i(x,t) - F_i(x) | \, dx = 0 \qquad i = 1,2$

donde F_i es una función de variación acotada en $[0,1]$, continua a izquierda, $i = 1,2$.

Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, para todo $t_o > 0$ y para toda sucesión

$$0 = x_o < x_1 < \ldots\ldots < x_k \leq 1$$

tal que

$$d_i = (v_2 - v_1)(x_i,t_o) - (v_2 - v_1)(x_{i-1},t_o)$$

resulta de signos alternados y no nula para todo i; existe una sucesión

$$0 = y_o < y_1 < \ldots\ldots < y_k \leq 1$$

tal que

$$\text{signo}\left[(F_2 - F_1)(y_i) - (F_2 - F_1)(y_{i-1})\right] = \text{signo } d_i,$$

$$\left|(v_2 - v_1)(x_i,t_o) - (v_2 - v_1)(x_{i-1},t_o)\right| \leq \left|(F_2 - F_1)(y_i) - (F_2 - F_1)(y_{i-1})\right| + \frac{\varepsilon}{k}$$

DEMOSTRACION .

Como φ satisface la condición (3.1), v_i resulta continua en $(0,1)x(0,T)$, $i = 1,2$. En efecto, si

$$c_1|p| \leq |\varphi(p)| \leq c_2|p| \qquad \forall\, p \in \mathbb{R},$$

la continuidad de $v_i(x,t)$ en $(0,1)x(0,T)$ se debe a resultados clásicos para soluciones débiles de la ecuación

$$v_t = D_x(\varphi(v_x))$$

(ver [17]).

Si en cambio sabemos que cualquiera sea $u_o \in L^1(0,1)$, se tiene una solución fuerte del problema

$$\begin{cases} u_t = D_{xx}(\varphi(u)) \\ D_x(\varphi(u))(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = u_o(x) \qquad \text{en } L^1(0,1) \end{cases}$$

se sigue que $D_{xt}v_i \in L^1_{Loc}(0,T;L^1(0,1))$ y por lo tanto v_i es continua en $(0,1)x(0,T)$. En efecto, sea $v(x,t)$ solución de

$$\begin{cases} v_t = D_x(\varphi(v_x)) \\ v(0,t) = 0 \\ v_x(1,t) = 0 \\ v(x,0) = F(x) \quad \text{en } L^1(0,1) \end{cases}$$

con $F \in L^1(0,1)$. Sabemos que $v_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,1))$. Sea $t_o > 0$ y sea $u(x,t)$ $t > t_o$ la solución fuerte de

$$\begin{cases} u_t = D_{xx}(\varphi(u)) \\ D_x(\varphi(u))(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \\ u(x,t_o) = v_x(x,t_o) \qquad \text{en } L^1(0,1) \end{cases}$$

($v \in C^1([0,1])$, como función de x, para casi todo $t > 0$). Sea

$$w(x,t) = \int_0^x u(s,t)$$

es fácil ver que $w_t \in L^1_{Loc}(0,T;L^1(0,1))$ ya que $w_t(x,t) = \int_0^x u_t(s,t)\,ds$.

Como $u \in L^1(0,1)\ \forall\ t > t_o$, se sigue que $w(0,t) = 0$. Además $w_x = u$ y por lo tanto $w_x(0,t) = 0$

Integrando la ecuación

$$u_t = D_{xx}(\varphi(u))$$

y recordando que $D_x(\varphi(u))(0,t) = 0$, se tiene que

$$w_t = D_x(\varphi(u)) = D_x(\varphi(w_x)) \qquad \text{en } D'$$

Como

$$u(x,t) \longrightarrow v_x(x,t_o) \qquad (t \searrow t_o) \quad \text{en } L^1(0,1),$$

se sigue que

$$\int_0^1 | w(x,t) - v(x,t_o)| \, dx = \int_0^1 \left| \int_0^x u(s,t) \, ds - \int_0^x v_x(s,t_o) \, ds \right| \, dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 | u(s,t) - v_x(s,t_o)| \, ds \longrightarrow 0 \qquad (t \searrow t_o)$$

De aquí que

$$w(x,t) = v(x,t) \qquad \text{pp } (x,t) \in (0,1)x(t_o,T)$$

ya que el problema (1) con dato inicial $v(x,t_o)$, planteado en $(0,1)x(t_o,T)$ tiene solución única.

Se tiene entonces que

$$v(x,t) = \int_0^x u(s,t) \, ds \qquad t > t_o$$

y $u_t \in L^1_{Loc}(t_o,T;L^1(0,1))$, es decir

$$v_{xt} \in L^1_{Loc}(t_o,T;L^1(0,1))$$

para casi todo $t_o > 0$, de donde

$$v_{xt} \in L^1_{Loc}(0,T;L^1(0,1))$$

Veamos que de aquí se deduce que $v \in C((0,1)x(0,T))$. En efecto,

a) $v_x \in C([t_o,T];L^1(0,1)) \quad \forall\, t_o > 0$,

b) $v_t \in C([0,1];L^1_{Loc}(0,T))$.

Por lo tanto,

$$|v(x+h,t+\delta) - v(x,t)| \leq |v(x+h,t+\delta) - v(x,t+\delta)| + |v(x,t+\delta) - v(x,t)| \leq$$

$$\leq \int_x^{x+h} |v_x(s,t+\delta)|ds + \int_t^{t+\delta} |v_t(x,z)|dz \leq \int_x^{x+h} |v_x(s,t)|\, ds +$$

$$+ \int_t^{t+\delta} |v_t(x,z)|dz + \varepsilon \quad , \text{ si } \delta \text{ es suficientemente chico, por a).}$$

De aqui que,

$|v(x+h,t+\delta) - v(x,t)| < 3\varepsilon$, si h y δ son suficientemente chicos; es decir, $v \in C((0,1)x(0,T))$.

Volviendo a las funciones v_i, $i = 1,2$, hemos probado que son continuas en $(0,1)x(0,T)$ como consecuencia de que φ satisface la propiedad (3.1). Si además $F_i \in L^\infty(0,1)$, se tendrá que $v_i \in L^\infty((0,1)x(0,T))$, $i = 1,2$.

Supongamos primero que $F_i \in C^1([0,1])$, $i = 1,2$. Entonces, de acuerdo con lo demostrado en la primera parte del Teorema 2 del capítulo II, se sigue que

$$D_t v_i \in L^2(0,T;L^2(0,1))$$

y por lo tanto

$$v_i(x,t) \longrightarrow F_i(x) \qquad \text{pp } x \in (0,1), \qquad (t \to 0)$$

Sea

$$0 = x_o < x_1 < \dots < x_k \leq 1$$

en las condiciones del enunciado y sea $a > 0$ tal que

$$2a < |d_i| \qquad i = 1,2,\dots,k.$$

$$\text{y} \qquad 2a \leq \frac{\varepsilon}{k}$$

Llamemos

$$A_i = \{(x,t) \in (0,1)x(0,t_o) / (v_2 - v_1)(x,t) > (v_2 - v_1)(x_i,t_o) - a \}$$

si (x_i,t_o) es un punto alto (PA) para $v_2 - v_1$, es decir

$$(v_2 - v_1)(x_i,t_o) > \begin{cases} (v_2 - v_1)(x_{i-1},t_o) \\ (v_2 - v_1)(x_{i+1},t_o) \end{cases}$$

y $A_i = \{(x,t) \in (0,1)x(0,t_o) / (v_2 - v_1)(x,t) < (v_2 - v_1)(x_i,t_o) + a \}$

si (x_i,t_o) es un punto bajo (PB) para $v_2 - v_1$.

Abriremos un corchete cuando exista la alternativa entre punto alto (PA) y punto bajo (PB).

Como v_1 y v_2 son continuas, los conjuntos A_i resultan abiertos, $i = 1,..,k$. Sea H_i la componente conexa del conjunto A_i que tiene al punto (x_i,t_o) en su frontera. (Hay una única componente que tiene a (x_i,t_o) en su frontera pues $(v_2 - v_1)(x,t) > (v_2 - v_1)(x_i,t_o) - a \quad$ para $|x - x_i| < h_i, \;\; 0 \leq t_o - t < \delta_i$, (PA)).

Por definición resulta $H_i \cap H_{i+1} = \emptyset$, $i = 1,\dots,k-1$. En efecto, si

$(x,t) \in H_i \cap H_{i+1}$, supongamos por ejemplo que (x_i,t_o) es (PA), entonces $(v_2 - v_1)(x_i,t_o) - a < (v_2 - v_1)(x,t) < (v_2 - v_1)(x_{i+1},t_o) + a$, de donde

$$|d_{i+1}| = (v_2 - v_1)(x_i,t_o) - (v_2 - v_1)(x_{i+1},t_o) < 2a,$$

absurdo.

Veamos que la proyección del conjunto H_1 sobre el eje $x = 0$ es el segmento $\{0\} \times (0,t_o)$. En efecto, supongamos que no sea así, sea $\tilde{t} > 0$ tal que la proyección de H_1 sobre el eje $x = 0$ sea el segmento $\{0\} \times (\tilde{t},t_o)$. Entonces v_2 satisface en H_1 el siguiente problema

$$\begin{cases} v_t = D_x(\varphi(v_x)) \quad \text{pp en } H_1, \\ \lim\limits_{t \searrow \tilde{t}} \int_0^1 \chi_{H_1}(x,t) \left| v(x,t) - v_1(x,\tilde{t}) - \begin{cases} (v_2 - v_1)(x_1,t_o) - a & \text{(PA)} \\ (v_2 - v_1)(x_1,t_o) + a & \text{(PB)} \end{cases} \right| dx = 0 \\ \text{" } v \leq v_1 + (v_2 - v_1)(x_1,t_o) - a \quad \text{en } \partial_p H_1 \text{ "} \qquad \text{(PA)} \\ \text{" } v \geq v_1 + (v_2 - v_1)(x_1,t_o) + a \quad \text{en } \partial_p H_1 \text{ "} \qquad \text{(PB)} \end{cases}$$

donde por " $v \lesseqgtr w$ en $\partial_p H_1$ " entendemos que se está en las condiciones del Principio de Comparación de la sección precedente.

Veamos que ésto es así. En efecto, si $(x,t) \in \partial_p H_1$, $0 < x < 1$,

$$v_2(x,t) = v_1(x,t) + \begin{cases} (v_2 - v_1)(x_1,t_o) - a & \text{(PA)} \\ (v_2 - v_1)(x_1,t_o) + a & \text{(PB)} \end{cases}$$

debido a la continuidad de v_1 y v_2.

Además,

$$\lim_{x\to 1} D_x v_2(x,t) = 0 = \lim_{x\to 1} D_x \left(v_1(x,t) + \begin{cases} (v_2 - v_1)(x_1,t_o) - a & (PA) \\ (v_2 - v_1)(x_1,t_o) + a & (PB) \end{cases} \right)$$

y

$$\lim_{x\to 0} v_2(x,t) = 0 = \lim_{x\to 0} v_1(x,t)$$

Por lo tanto debemos ver que

$$(v_2 - v_1)(x_1,t_o) - a > 0 \quad (PA)$$

$$(v_2 - v_1)(x_1,t_o) + a < 0 \quad (PB)$$

Como $x_o = 0$, si (x_1,t_o) es (PA) se tiene,

$$(v_2 - v_1)(x_1,t_o) = |d_1| > 2a \quad \Rightarrow \quad (v_2 - v_1)(x_1,t_o) - a > 0$$

y si (x_1,t_o) es (PB) se tiene,

$$(v_2 - v_1)(x_1,t_o) = -|d_1| < -2a \quad \Rightarrow \quad (v_2 - v_1)(x_1,t_o) + a < 0$$

Además,

$$\chi_{H_1}(x,t) \left| v_2(x,t) - v_1(x,\tilde{t}) - \begin{cases} (v_2 - v_1)(x_1,t_o) - a & (PA) \\ (v_2 - v_1)(x_1,t_o) + a & (PB) \end{cases} \right|$$

tiende a 0 en casi todo $x \in (0,1)$ cuando $t \to \tilde{t}$, y por lo tanto también en $L^1(0,1)$ por estar v_i en $L^\infty((0,1)x(0,T))$, $i = 1,2$. En efecto, si $x \in (0,1)$ es tal que $\chi_{H_1}(x,t) = 0$, $\tilde{t} < t < t(x)$, se tiene la convergencia a 0 en este punto. Si ésto no sucede, existe una sucesión $t_n(x) \searrow \tilde{t}$ tal que $\chi_{H_1}(x,t_n(x)) = 1$ y por lo tanto $(x,\tilde{t}) \in \partial H_1$, de donde, debido a la continuidad de v_1 y v_2 se tiene

$$(v_2 - v_1)(x,\tilde{t}) = \begin{cases} (v_2 - v_1)(x_1,t_o) - a & \text{(PA)} \\ (v_2 - v_1)(x_1,t_o) + a & \text{(PB)} \end{cases}$$

De aquí que se tenga lo afirmado. Podemos aplicar el Principio de Comparación de la sección precedente para deducir que

$$v_2(x,t) \begin{cases} \leqslant \ v_1(x,t) + (v_2 - v_1)(x_1,t_o) - a & \text{(PA)} \\ \geqslant \ v_1(x,t) + (v_2 - v_1)(x_1,t_o) + a & \text{(PB)} \end{cases} \qquad \text{pp en } H_1$$

lo que contradice la definición de H_1. Por lo tanto, la proyección de H_1 sobre el eje $x = 0$ es el intervalo $\{0\} \times (0,t_o)$.

Veamos que la medida del conjunto

$$\left\{ x \in (0,1) / \ (x,0) \in \partial H_1 \text{ y } (F_2 - F_1)(x) \begin{cases} > \ (v_2 - v_1)(x_1,t_o) - a & \text{(PA)} \\ < \ (v_2 - v_1)(x_1,t_o) + a & \text{(PB)} \end{cases} \right\}$$

es positiva. En efecto, de no ser así, como v_2 es solución en H_1 de

$v_t = D_x(\varphi(v_x))$ pp en H_1, con

$$\lim_{t \to 0} \int_0^1 | v(x,t) - F_2(x) | \, dx = 0,$$

y la función

$$w_1(x,t) = v_1(x,t) + \begin{cases} (v_2 - v_1)(x_1,t_o) - a & (PA) \\ (v_2 - v_1)(x_1,t_o) + a & (PB) \end{cases}$$

es solución de

$v_t = D_x(\varphi(v_x))$ pp en H_1, con

$$\lim_{t\to 0} \int_0^1 \left| v(x,t) - F_1(x) + \begin{cases} (v_2 - v_1)(x_1,t_o) - a & (PA) \\ (v_2 - v_1)(x_1,t_o) + a & (PB) \end{cases} \right| dx = 0 ,$$

si suponemos que

$$F_2(x) \begin{cases} \leq & F_1(x) + (v_2 - v_1)(x_1,t_o) - a & (PA) \\ \geq & F_1(x) + (v_2 - v_1)(x_1,t_o) + a & (PB) \end{cases}$$

tenemos que v_2 y w_1 son solución en H_1 de la misma ecuación diferencial alcanzan el dato inicial en $L^1(0,1)$ y satisfacen

$$" v_2 \begin{cases} \leq & w_1 & (PA) \\ \geq & w_1 & (PB) \end{cases} \qquad \text{en} \quad \partial_p H_1$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Principio de Compararación de la sección anterior, se tiene

$$v_2 \begin{cases} \leq & w_1 & (PA) \\ \geq & w_1 & (PB) \end{cases} \qquad \text{pp en } H_1$$

lo que contradice la definición de E_1. De aquí que se tenga lo enunciado y podamos entonces elegir un punto y_1 tal que

$(y_1,0) \in \partial H_1$, $(F_2 - F_1)(y_1) \left[\begin{array}{ll} > (v_2 - v_1)(x_1,t_o) - a & (PA) \\ < (v_2 - v_1)(x_1,t_o) + a & (PB) \end{array}\right.$, tal que

$(y_1,t) \in H_1$ si $t < t_o^1$. Esta elección puede hacerse pues como $(v_2 - v_1)(x,t) \longrightarrow (F_2 - F_1)(x)$ pp x cuando $t \to 0$, si $(F_2 - F_1)(x) > c$ debe ser $(v_2 - v_1)(x,t) > c$ si $t < t(c,x)$. En particular, si $c = (v_2 - v_1)(x_1,t_o) - a$ (PA), se sigue que (x,t) está en una componente conexa de A_1 para $t < t(c,x)$ y por lo tanto, $\chi_{H_1}(x,t) = 0 \quad t < t(c,x)$ ó $\chi_{H_1}(x,t) = 1 \quad t < t(c,x)$.

Si se tuviera $\chi_{H_1}(x,t) = 0$ si $t < t(c,x)$ pp x, es decir si se tuviera que $\chi_{H_1}(x,t) \to 0$ $(t \to 0)$ en casi todo punto x tal que $(F_2 - F_1)(x) > c$, podríamos considerar la función

$$f_2(x) = \begin{cases} F_2(x) & \text{si } (F_2 - F_1)(x) \leqslant c \\ F_1(x) + c & \text{si no} \end{cases}$$

que satisface $f_2(x) \leqslant F_1(x) + c$ y $\lim\limits_{t \to 0} \int_0^1 \chi_{H_1}(x,t) \left| v_2(x,t) - f_2(x) \right| dx = 0$

pues v_2 es acotada.

Es decir, se tendría que v_2 sería solución en H_1 de la ecuación diferencial con dato inicial f_2 y por lo tanto, sería

$$v_2 \leqslant w_1 \quad \text{pp en } H_1$$

absurdo. De aquí que podamos elegir el punto y_1 de un conjunto de medida positiva.

De acuerdo con la elección de y_1, como $(x_1,t) \in H_1$ para $t_1(x) < t < t_o$ y H_1 es un abierto conexo, existe un arco de Jordan C_1 contenido en H_1

con extremos $(y_1,0)$ y (x_1,t_o).

Como $x_2 > x_1$ se sigue que ningún punto de la forma $(0,t)$ puede estar en la frontera de H_2. En efecto, como $x_1 > 0$ y $y_1 > 0$ y $x > 0$ para todo x tal que $(x,t) \in C_1$ pues $C_1 \subset H_1$, se sigue que

$\bar{x} = \inf\{x/\ (x,t) \in C_1\} = \min\{x/\ (x,t) \in C_1\} > 0.$

Sea $(y,\bar{t}) \in H_2$ tal que $0 < y < \bar{x}$ (existe si $(0,t) \in \partial H_2$ para algún $t > 0$). Sea $C_2 \subset H_2$ un arco de Jordan con extremos $(y,\bar{t})$ y (x_2,t_o); como el arco

$$C = C_1 \cup \{(x,0),\ 0 \leq x \leq y_1\} \cup \{(0,t),\ 0 \leq t \leq t_o\} \cup \{(x,t_o),\ 0 \leq x \leq x_1\}$$

es un arco de Jordan cerrado; $(y,\bar{t})$ está en una de las regiones en las que divide al plano y (x_2,t_o) está en la otra, debe ser $C_2 \cap C \neq \emptyset$. Como $C_2 \subset H_2 \subset (0,1)x(0,t_o)$, se tiene $C_2 \cap C_1 \neq \emptyset$ y por lo tanto $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, absurdo.

Podemos entonces repetir la demostración anterior en el conjunto H_2 y demostrar que la medida del conjunto

$$\left\{ x \in (0,1)/ \chi_{H_2}(x,t) = 1,\ 0 < t < t(x) \text{ y } (F_2 - F_1)(x) \begin{cases} > (v_2 - v_1)(x_2,t_o) - a & (PA) \\ < (v_2 - v_1)(x_2,t_o) + a & (PB) \end{cases} \right\}$$

es positiva.

Eligiendo y_2 en este conjunto, se prueba que ningún punto de la forma $(0,t)$ esta en ∂H_3 y que

$$\left\{ x \in (0,1) / \chi_{H_3}(x,t) = 1,\ 0 < t < t(x) \text{ y } (F_2 - F_1)(x) \begin{bmatrix} > (v_2 - v_1)(x_3,t_o) - a & (PA) \\ < (v_2 - v_1)(x_3,t_o) + a & (PB) \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto de medida positiva; ya que existe un arco de Jordan $C_2 \subset H_2$ con extremos (x_2,t_o) y $(y_2,0)$. Elegimos y_3 en el conjunto anterior y así sucesivamente.

Se tiene entonces una sucesión de puntos y_i, $i = 0,\dots,k$, donde $y_o = 0$ por definición, $y_1 > 0$ por elección y para cada $i = 1,\dots,k$ existe un arco de Jordan C_i contenido en H_i de extremos $(y_i,0)$ y (x_i,t_o). Podemos entonces demostrar que $y_i < y_{i+1}$ para cada $i = 1,\dots,k-1$. En efecto, sea

$$C = C_i \cup \{(x,0),\ 0 \leq x \leq y_i\} \cup \{(0,t),\ 0 \leq t \leq t_o\} \cup \{(x,t_o),\ 0 \leq x \leq x_i\}$$

C es un arco de Jordan cerrado que divide al plano en dos regiones. Supongamos que $y_{i+1} < y_i$, existe entonces un punto $(\bar{x},\bar{t}) \in H_{i+1}$ en la región interior al arco C, que se une al punto (x_{i+1},t_o) por el arco C_{i+1}. Como (x_{i+1},t_o) está en la región exterior al arco C pues $x_{i+1} > x_i$, debe ser $C_{i+1} \cap C \neq \emptyset$ y como $C_{i+1} \subset H_{i+1}$ se tiene que $C_{i+1} \cap C_i \neq \emptyset$; de donde $H_{i+1} \cap H_i \neq \emptyset$, absurdo. Por lo tanto

$$0 = y_o < y_1 < \dots\dots < y_k \leq 1$$

Veamos que esta sucesión satisface las condiciones requeridas.

Sea i fijo, y supongamos que (x_i,t_o) es punto alto, entonces

$$(F_2 - F_1)(y_i) > (v_2 - v_1)(x_i,t_o) - a$$

$$(F_2 - F_1)(y_{i-1}) < (v_2 - v_1)(x_{i-1},t_o) + a$$

$$(F_2 - F_1)(y_{i+1}) < (v_2 - v_1)(x_{i+1}, t_o) + a$$

Por lo tanto,

$$(F_2 - F_1)(y_i) - (F_2 - F_1)(y_{i-1}) > |d_i| - 2a > 0$$

$$(F_2 - F_1)(y_i) - (F_2 - F_1)(y_{i+1}) > |d_{i+1}| - 2a > 0$$

Es decir

$$\text{signo } d_i = \text{signo } \left((F_2 - F_1)(y_i) - (F_2 - F_1)(y_{i-1}) \right) \qquad i = 1,\ldots,k.$$

Además

$$|(F_2 - F_1)(y_i) - (F_2 - F_1)(y_{i-1})| > |d_i| - 2a \qquad i = 1,\ldots,k, \text{ y como } 2a \leq \frac{\varepsilon}{k}$$

$$|d_i| \leq |(F_2 - F_1)(y_i) - (F_2 - F_1)(y_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{k} \qquad i = 1,\ldots,k.$$

El lema está demostrado en este caso.

El único momento en que usamos la regularidad de las funciones F_i, $i = 1,2$, fue cuando demostramos que podíamos elegir los puntos y_j, $j = 1,\ldots,k$ de manera tal que existieran números $t_o^j > 0$ tales que $(y_j, t) \in H_j$, $0 < t < t_o^j$, $j = 1,\ldots,k$. Esto fue lo que nos permitió demostrar que $y_j < y_{j+1}$ $j = 0,\ldots,k-1$.

La regularidad de las funciones F_i $i = 1,2$, fue la que nos aseguró que

$$(v_2 - v_1)(x,t) \to (F_2 - F_1)(x) \quad \text{pp } x \in (0,1) \quad (t \to 0),$$

y ésta es la única condición que necesitamos sobre las funciones $v_i(x,t)$, $i = 1,2$

que no se sigue de las hipótesis del lema. Sin embargo, cuando las funciones F_i sólo son de variación acotada, veremos que también se tiene la convergencia puntual:

$$v_i(x,t) \to F_i(x) \qquad \text{pp } x \in (0,1) \qquad (t \to 0) \qquad i = 1,2,$$

con lo cual la demostración del lema que hemos dado es válida en el caso general.

Para demostrar que $v_i(x,t) \to F_i(x)$ pp $x \in (0,1)$ $(t \to 0)$ $i = 1,2,$ nos bastará probar que existen constantes $c_i > 0$ tales que

$$V_0^1 \, v_i(x,t) \leq c_i \qquad \forall\, t > 0 \tag{2}$$

como se demostrará en el Lema 2. Para esto aproximaremos las funciones F_i por funciones regulares F_i^n tales que $V_0^1 \, F_i^n \leq c_i$ $\forall\, n \in N$, utilizando los resultados de este lema para demostrar que las correspondientes soluciones de (1), $v_i^n(x,t)$ satisfacen

$$V_0^1 \, v_i^n(x,t) \leq c_i \qquad \forall\, t > 0,\ n \in \mathbb{N},$$

obteniendo la desigualdad (2) como consecuencia del hecho de que

$$v_i^n(x,t) \to v_i(x,t) \quad \text{en } L^1(0,1) \quad (n \to \infty), \quad \forall\, t > 0, \quad i = 1,2.$$

Sea entonces F_i como en el enunciado y sea $(F_i^n) \subset C^1([0,1])$, $F_i^n(0) = 0$, $i = 1,2$ tal que $F_i^n \to F_i$ en $L^1(0,1)$ $(n \to \infty)$ y $V_0^1 \, F_i^n \leq c_i$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $i = 1,2$.

Por ejemplo, consideremos la función

$$f_i(x) = \begin{cases} F_i(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ F_i(0) & x \leq 0 \\ F_i(1) & x \geq 1 \end{cases}$$

y tomemos la función $f_i^n = f_i * \rho_n$ con $\rho_n = n\rho(nx)$, $0 \leq \rho \leq 1$, $\int \rho = 1$, $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, sop $\rho \subset [-1,1]$. Sea H_i^n la restricción de f_i^n al intervalo $[0,1]$. Es claro que $H_i^n \to F_i$ en $L^1(0,1)$ $(n \to \infty)$. Además, si $F_i = G_i^1 - G_i^2$ con G_i^j monótona creciente y no negativa, $f_i^n = (g_i^1 * \rho_n) - (g_i^2 * \rho_n)$ donde g_i^j es la extensión de G_i^j a la recta, $g_i^j(x) = G_i^j(0)$, $x \leq 0$; $g_i^j(x) = G_i^j(1)$, $x \geq 1$. Se tiene que $g_i^j * \rho_n$ es monótona creciente, varía entre $G_i^j(0)$ y $G_i^j(1)$. Por lo tanto $V_0^1 H_i^n$ no supera la suma de las variaciones de $g_i^1 * \rho_n$ y $g_i^2 * \rho_n$ que están acotadas independientemente de n. Es decir, $V_0^1 H_i^n \leq k_i$ $\forall$ n. Tomemos $F_i^n = H_i^n \chi_n$ donde $\chi_n \in C^\infty([0,1])$, $\chi_n(0) = 0$, $\chi_n(x) = 1$ si $x \geq 2/n$, $\|\chi'_n(x)\|_\infty \leq c.n$. La sucesión (F_i^n) es la buscada. En efecto, es claro que $F_i^n \to F_i$ en $L^1(0,1)$, además, $V_0^1 F_i^n = \|(H_i^n \chi_n)'\|_1 \leq c\, k_i + c\, V_0^1 F \leq c_i$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Sea ahora $v_i^n(x,t)$ la solución de (1) que satisface

$$v_i^n(x,t) \to F_i^n(x) \quad \text{en } L^1(0,1) \quad (t \to 0) \qquad i = 1,2.$$

De acuerdo con lo demostrado anteriormente, para cada n fijo, $t_o > 0$ $\varepsilon > 0$ y cada sucesión

$$0 = x_o^i < x_1^i < \ldots\ldots < x_k^i = 1 \qquad i = 1,2$$

tal que

$$v_i^n(x_j^i, t_o) - v_i^n(x_{j-1}^i, t_o) = d_j^i$$

es siempre no nulo y de signos alternados, existe una sucesión

$$0 = y_o^i < y_1^i < \ldots\ldots < y_k^i \leq 1 \qquad i = 1,2$$

tal que

signo d_j^i = signo $(F_i^n(y_j^i) - F_i^n(y_{j-1}^i))$ y

$i = 1,2$

$$|d_j^i| \leq |F_i^n(y_j^i) - F_i^n(y_{j-1}^i)| + \frac{\varepsilon}{k}$$

De donde

$$\sum_{j=1}^{k} |d_j^i| \leq V_0^1 F_i^n + \varepsilon \qquad i = 1,2$$

Por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ y $t_o > 0$,

$$V_0^1 v_i^n (x,t) \leq V_0^1 F_i^n \leq c_i \qquad i = 1,2$$

Como $F_i^n \to F_i$ en $L^1(0,1)$ $(n \to \infty)$ $i = 1,2$, se sigue que

$v_i^n(x,t) \to v_i(x,t)$ en $L^1(0,1)$ $(n \to \infty)$ para todo $t > 0$; donde

v_i es la solución de (1) que satisface

$$\lim_{t \to 0} \int_0^1 |v_i(x,t) - F_i(x)| \, dx = 0$$

Por lo tanto, $v_i(x,t)$ es de variación acotada para cada $t > 0$ $(i = 1,2)$ y

$$V_0^1 v_i(x,t) \leq \liminf_{n \to \infty} V_0^1 v_i^n(x,t) \leq c_i \qquad i = 1,2.$$

De acuerdo con lo que probaremos en el Lema 2, se sigue que

$$v_i(x,t) \to F_i(x) \quad (t \to 0)$$

en los puntos $x \in (0,1)$ donde F_i es continua.

Podemos entonces repetir la demostración de este Lema con las funciones v_i ya que éstas son continuas, y satisfacen

$$\begin{aligned} &v_i(x,t) \to F_i(x) \quad \text{en } L^1(0,1) \quad (t \to 0) \\ &v_i(x,t) \to F_i(x) \quad \text{pp } x \in (0,1) \ (t \to 0) \end{aligned} \qquad i = 1,2$$

obteniéndose el resultado buscado.

LEMA 2

Si F_n, F son funciones de variación acotada tales que $F_n(0) = F(0) = 0$, $F_n \to F$ en $L^1(0,1)$, $V_0^1 F_n \leqslant V_0^1 F$ y F es continua a izquierda, entonces

$$F_n(x) \to F(x) \text{ si } x \text{ es punto de continuidad de } F \text{ y}$$

$$F_n(1) \to F(1)$$

DEMOSTRACION

Como $V_0^1 F_n \leqslant c$, $F_n(0) = 0$ $\forall n$, se tiene $|F_n(x)| \leqslant c$ $\forall x \in [0,1]$.

Por el 2° Teorema de Helly, existe una función $G(x)$ continua a izquierda y una subsucesión n_k tales que

$$F_{n_k}(x) \to G(x) \quad \text{si } x \text{ es punto de continuidad de } G.$$

Como $F_n \to F$ en $L^1(0,1)$, para toda sucesión $n_k \to \infty$, existe una subsucesión n_{k_j} tal que

$$F_{n_{k_j}}(x) \to F(x) \quad \text{pp } x \in (0,1)$$

Por lo tanto, $F_{n_{k_j}} \longrightarrow F$ pp

$$F_{n_{k_j}} \longrightarrow G \text{ pp}$$

Como G y F son continuas a izquierda, resulta F = G y por lo tanto

$$F_{n_{k_j}}(x) \longrightarrow F(x)$$

si x es punto de continuidad de F, $x \in (0,1)$.

Por la arbitrariedad de la sucesión inicial (F_n), se sigue que toda la sucesión (F_n) converge a F en los puntos de continuidad de F.

Sólo falta ver que

$$F_n(1) \longrightarrow F(1)$$

Esto será consecuencia del hecho de que $V_0^1 F_n \leqslant V_0^1 F$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, $x < 1$ punto de continuidad de F tal que existen N-1 puntos de continuidad de F, $x_1, \dots, x_{N-1}$ tales que

$$0 = x_o < x_1 < \dots\dots < x_N = x$$

y $$\sum_{i=1}^{N} | F(x_i) - F(x_{i-1}) | > V_0^1 F - \varepsilon$$

Esta elección puede hacerse con x tan próximo a 1 como se quiera de la siguiente manera. Sean $0 < x_1 < x_2 < \dots\dots < x_N = x < 1$ puntos de continuidad de F tales que

$$\sum_{i=1}^{N} |F(x_i) - F(x_{i-1})| + |F(1) - F(x)| > V_0^1 F - \varepsilon/2$$

Puede elegirse x arbitrariamente próximo a 1 tomando quizás N más grande pues al agregar términos el miembro izquierdo se agranda. Por lo tanto puede suponerse que

$$|F(1) - F(x)| < \varepsilon/2$$

y se tiene lo requerido.

Como $V_0^1 F_n \leq V_0^1 F$,

$$|F_n(1) - F_n(x)| + \sum_{i=1}^{N} |F_n(x_i) - F_n(x_{i-1})| \leq V_0^1 F$$

Además,

$$F_n(x_i) \longrightarrow F(x_i) \quad (n \to \infty), \quad i = 0,\ldots,N.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{N} |F_n(x_i) - F_n(x_{i-1})| > V_0^1 F - 2\varepsilon \qquad \text{si } n \geq n_o(\varepsilon).$$

De donde,

$$|F_n(1) - F_n(x)| + V_0^1 F - 2\varepsilon \leq |F_n(1) - F_n(x)| + \sum_{i=1}^{N} |F_n(x_i) - F_n(x_{i-1})| \leq V_0^1 F$$

si $n \geq n_o(\varepsilon)$. Es decir,

$$|F_n(1) - F_n(x)| \leq 2\varepsilon \qquad \text{si } n \geq n_o(\varepsilon).$$

Como $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ $(n \to \infty)$, se sigue que

$$|\limsup F_n(1) - F(x)| \leq 2\varepsilon$$

$$|\liminf F_n(1) - F(x)| \leq 2\varepsilon$$

Como x puede tomarse arbitrariamente próximo a 1 y F es continua a izquierda,

$$|\limsup F_n(1) - F(1)| \leqslant 2\varepsilon$$

$$|\liminf F_n(1) - F(1)| \leqslant 2\varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario se sigue que

$$F_n(1) \to F(1) \qquad (n \to \infty).$$

LEMA 3

Sean μ_n, μ medidas de Borel finitas tales que $\mu_n \rightharpoonup \mu$, es decir

$$\int_0^1 g(x)\, d\mu_n(x) \longrightarrow \int_0^1 g(x)\, d\mu(x) \qquad \forall\, g \in C([0,1]).$$

Sean F_n, F las funciones de distribución asociadas a las medidas μ_n y μ ; es decir

$$F_n(x) = \mu_n([0,x)) \quad , \qquad F(x) = \mu([0,x)).$$

Entonces, $F_n(x) \to F(x)$ si $x \in (0,1)$ es punto de continuidad de F.

DEMOSTRACION

Como $\mu_n \rightharpoonup \mu$, existe una constante $c > 0$ tal que $V_0^1 F_n \leqslant c \quad \forall\, n$. Como $F_n(0) = 0 \ \ \forall\, n$, se sigue que $|F_n(x)| \leqslant c \ \ \forall\, n$ y por lo tanto, aplicando nuevamente el 2° Teorema de Helly se tiene que existe una subsucesión F_{n_k} y una función G continua a izquierda y de variación acotada tales que

$F_{n_k}(x) \to G(x)$ si $x \in (0,1)$ es punto de continuidad de G. Veamos que $F = G$.

Sea $y < 1$ punto de continuidad de G que puede elegirse arbitrariamente próximo a 1. Consideremos en $[0,y)$ la medida $\tilde{\mu}$ que tiene función de distribución G, a saber $\tilde{\mu}([0,x)) = G(x)$ si $x \leqslant y$.

Como $F_{n_k}(y) \to G(y)$ y podemos suponer que $G(0) = F_{n_k}(0) = 0$, se sigue que $\mu_{n_k} \rightharpoonup \tilde{\mu}$ como medidas en $[0,y)$; es decir, para toda $g \in C([0,y])$,

$$\int_0^y g(x)\, d\mu_{n_k}(x) \longrightarrow \int_0^y g(x)\, d\tilde{\mu}(x).$$

Ahora bien, si $g(y) = 0$ podemos suponer que $g(x) = 0 \ \forall x \geqslant y$, y como $\mu_n \rightharpoonup \mu$ en $[0,1)$,

$$\int_0^y g(x)\, d\mu_{n_k}(x) \longrightarrow \int_0^y g(x)\, d\mu(x).$$

Por lo tanto $\tilde{\mu}$ coincide con μ como medidas en el intervalo $[0,y-\varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$. De aquí que $F(x) = G(x)$ si $x < y - \varepsilon$ es punto de continuidad de ambas. Como F y G son continuas a izquierda se sigue que $F = G$ en $[0,y-\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$, y por lo tanto $F = G$ en $[0,y)$. Como $y < 1$ podía tomarse arbitrariamente próximo a 1, se tiene

$$F = G \qquad \text{en } [0,1)$$

y por lo tanto

$$F_{n_k}(x) \to F(x)$$

si $x \in (0,1)$ es punto de continuidad de F. Por la arbitrariedad de la sucesión inicial (F_n), se verifica

$$F_n(x) \to F(x)$$

en los puntos de continuidad de F.

Ahora pasaremos a demostrar los resultados enunciados al comienzo de este capítulo.

TEOREMA 1

Sea $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, estrictamente creciente con $\varphi(0) = 0$ y $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua Lipschitz o tal que existen constantes c_1 y $c_2 > 0$ tales que $c_1|x| \leq |\varphi(x)| \leq c_2|x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Sea $u(x,t) \in L^{\infty}(0,T;L^1(0,1))$ solución de

$$\left.\begin{array}{l}
\text{a) } u_t \in L^1_{Loc}(0,T;L^1(0,1)), \\
\text{b) } \varphi(u) \in C^1([0,1]) \text{ en la variable } x, \text{ pp } t \text{ y} \\
\qquad\qquad D_x(\varphi(u))(0,t) = 0 \quad \text{pp } t, \\
\text{c) } u(1,t) = 0 \quad \text{pp } t, \\
\text{d) } u_t = D_{xx}(\varphi(u)) \quad \text{pp } (x,t)
\end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

Entonces existe una única medida de Borel finita μ tal que

$$u(x,t) \rightharpoonup \mu \quad (t \to 0)$$

es decir,

$$\int_0^1 g(x)\, u(x,t)\, dx \longrightarrow \int_0^1 g(x)\, d\mu(x) \qquad (t \to 0) \quad \forall\, g \in C([0,1]).$$

Si se tienen dos soluciones u_1 y u_2 de (2.1), con $u_1(x,t) \leq u_2(x,t)$ pp (x,t); las correspondientes medidas μ_1 y μ_2 satisfacen $\mu_1 \leq \mu_2$.

DEMOSTRACION

Sea $v(x,t) = \int_0^x u(s,t)\,ds$. Según vimos en la demostración del Lema 1, v es solución de

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } v_t \in L^1_{Loc}(0,T;L^1(0,1)), \\ \text{b) } v \in C^1([0,1]) \text{ en la variable } x, \text{ pp } t \text{ y} \\ \qquad v_x(1,t) = 0 \quad \text{pp } t, \\ \text{c) } v(0,t) = 0 \quad \text{pp } t, \\ \text{d) } v_t = D_x(\varphi(v_x)) \quad \text{pp } (x,t) \end{array}\right\} \qquad (2.2)$$

Como por hipótesis $u \in L^\infty(0,T;L^1(0,1))$, se sigue que existe una medida de Borel finita μ y una sucesión $t_n \to 0$ tales que

$$u(x,t_n) \rightharpoonup \mu \qquad (n \to \infty)$$

Volviendo a las funciones de distribución $v(x,t_n)$ y $F(x) = \mu([0,x))$, se tiene, de acuerdo con el Lema 3 que

$$v(x,t_n) \longrightarrow F(x) \qquad (n \to \infty)$$

si $x \in (0,1)$ es punto de continuidad de F. Como además $|v(x,t)| \leq c \quad \forall\,(x,t)$ pues $u \in L^\infty(0,T;L^1(0,1))$, se sigue que

$$v(x,t_n) \longrightarrow F(x) \qquad (n \to \infty) \qquad \text{en } L^1(0,1).$$

Probemos que

$$v(x,t) \longrightarrow F(x) \qquad (t \to 0) \qquad \text{en } L^1(0,1).$$

Sea $w(x,t)$ la solución del problema

$$\left.\begin{array}{l} w_t = D_x(\varphi(w_x)) \quad \text{pp } (x,t), \\ w(0,t) = 0 \quad \text{pp } t, \\ w_x(1,t) = 0 \quad \text{pp } t, \\ \lim\limits_{t\to 0} \displaystyle\int_0^1 |w(x,t) - F(x)|\, dx = 0 \end{array}\right\}$$

obtenida en el capítulo II ($F \in L^\infty \subset L^1$). Sabemos que $w_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,1))$. Probaremos que $w(x,t) = v(x,t)$ pp (x,t) y por lo tanto

$$v(x,t) \to F(x) \quad (t \to 0) \qquad \text{en } L^1(0,1).$$

En efecto, consideremos el problema

$$\left.\begin{array}{l} z_t = D_x(\varphi(z_x)) \quad \text{pp } (x,t), \\ z(0,t) = 0 \quad \text{pp } t, \\ z_x(1,t) = 0 \quad \text{pp } t, \\ \lim\limits_{n\to \infty} \displaystyle\int_0^1 | z(x,t_n) - F(x)|\, dx = 0 \end{array}\right\} \qquad (2.3)$$

Por el Principio de Comparación probado en la sección 1 de este capítulo sabemos que (2.3) tiene una única solución z con $z_t \in L^1_{Loc}(0,T;L^1(0,1))$. Por lo tanto $w(x,t) = v(x,t)$ pp (x,t).

Tenemos entonces que v es solución de (2.2) y satisface

e) $\lim\limits_{t\to 0} \int_0^1 |v(x,t) - F(x)|\, dx = 0$

De acuerdo con lo probado en el Lema 1, se tiene

$$V_0^1\, v(x,t) \leq V_0^1\, F(x) \qquad \forall\, t > 0.$$

Por el Lema 2 se sigue que

$$v(x,t) \to F(x) \qquad (t \to 0)$$

si $x \in (0,1)$ es punto de continuidad de F y también en 0 y en 1. Como además $V_0^1\, v(x,t) \leq c \quad \forall\, t > 0$, se tiene que las medidas $u(x,t)$ satisfacen,

$$u(x,t) \to \mu \quad (t \to 0).$$

Como última observación, notemos que si $u_1 \leq u_2$ pp, entonces la función $(v_2 - v_1)$ definida por

$$v_i(x,t) = \int_0^x u_i(s,t)\, ds,$$

es monótona creciente y como

$$(v_2 - v_1)(x,t) \to (F_2 - F_1)(x) \qquad (t \to 0)$$

en los puntos de continuidad de $F_2 - F_1$ (que es continua a izquierda), se sigue que $F_2 - F_1$ también es monótona creciente. De aquí que la medida $\mu_2 - \mu_1$ es no negativa, es decir

$$\mu_1 \leq \mu_2.$$

TEOREMA 2

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, estrictamente creciente tal que $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua Lipschitz y $\varphi(0) = 0$. Sea μ una medida de Borel finita en $[0,1)$. Entonces existe una única función $u(x,t)$ que satisface:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{a) } u_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,1)), \\
\text{b) } \varphi(u) \in C^1([0,1]) \text{ en la variable } x, \text{ pp } t \text{ y} \\
\qquad\qquad D_x(\varphi(u))(0,t) = 0 \quad \text{pp } t, \\
\text{c) } u(1,t) = 0 \quad \text{pp } t, \\
\text{d) } u_t = D_{xx}(\varphi(u)) \quad \text{pp } (x,t), \\
\text{e) } u(x,t) \rightharpoonup \mu \ (t \to 0)
\end{array}\right\} \quad (3.1)$$

La solución $u \in L^\infty(0,T;L^1(0,1))$ con

$$\int_0^1 |u(x,t)| \, dx \leq \int_0^1 d|\mu| \qquad \forall\, t > 0.$$

DEMOSTRACION

1°) Unicidad

Sean u_1 y u_2 dos soluciones de (3.1) y sea

$$v_i(x,t) = \int_0^x u_i(s,t)\, ds.$$

Es fácil ver que $D_t v_i \in L^2_{Loo}(0,T;L^2(0,1))$ pues ésto vale para $D_t u_i$. Por lo tanto v_i es solución de (2.2), i = 1,2. Como además $u_i \rightharpoonup \mu$ se tiene que

e) $v_i(x,t) \to F(x) \quad (t \to 0) \quad$ en $L^1(0,1) \qquad i = 1,2.$

En efecto, de acuerdo con el Lema 3, se tiene que

$$v_i(x,t) \to F(x) \quad (t \to 0) \quad \text{en los puntos de continuidad de } F.$$

Como $\quad V_0^1 v_i(x,t) \leq c_i, \quad i = 1,2 \quad \forall\, t > 0$; se sigue que

$$|v_i(x,t)| \leq c_i \qquad i = 1,2 \qquad \forall\, (x,t) \in (0,1)x(0,T).$$

De aquí que se satisfaga la condición e).

Como el problema (2.2) con la condición e) tiene solución única (según lo probado en el capítulo II, y también consecuencia de los resultados de la sección 1 de este capítulo), se sigue que

$$v_1(x,t) = v_2(x,t) \qquad pp$$

De donde

$$u_1(x,t) = D_x v_1(x,t) = D_x v_2(x,t) = u_2(x,t) \qquad \text{pp } (x,t).$$

2°) Existencia

Motivados por los resultados anteriores veremos que si $v(x,t)$ es la solución de

$$\left.\begin{array}{l}
\text{a) } v_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,1)), \\[2mm]
\text{b) } v \in C^1([0,1]) \text{ en la variable } x, \text{ pp } t \text{ y} \\[2mm]
\qquad\qquad v_x(1,t) = 0 \quad \text{pp } t, \\[2mm]
\text{c) } v(0,t) = 0 \quad \text{pp } t, \\[2mm]
\text{d) } v_t = D_x(\varphi(v_x)) \quad \text{pp } (x,t), \\[2mm]
\text{e) } \lim\limits_{t\to 0} \displaystyle\int_0^1 |v(x,t) - F(x)|\, dx = 0,
\end{array}\right\} \qquad (3.2)$$

que obtuvimos en el Capítulo II, con F la función de distribución de la medida μ ; entonces la función $u(x,t) = v_x(x,t)$ es solución del problema (3.1). En efecto, por (3.2) b) es evidente que $u(1,t) = 0$. También hemos demostrado en el Teorema 1 que si v es solución de (3.2) y $u = v_x$ entonces

$$u(x,t) \rightharpoonup \mu \qquad (t\to 0)$$

Como $v_t = D_x(\varphi(v_x))$ pp y como distribuciones, derivando ambos miembros se tiene, Por lo tanto sólo hay que probar que $u_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,1))$ y de este hecho deduciremos que $D_x(\varphi(u))$ es continua en $[0,1]$ como función de x, pp t, ya que su derivada, u_t es integrable en $(0,1)$ y además probaremos que $D_x(\varphi(u))(0,t) = 0$ pp t, con lo que concluirá la demostración.

Como φ^{-1} es Lipschitziana y φ es estrictamente creciente,

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \left(\frac{u(x,t+h)-u(x,t)}{h}\right)^2 dx\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\left(\frac{v_x(x,t+h)-v_x(x,t)}{h}\right)^2 dx\,dt \leq$$

$$\leq c\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\left(\frac{v_x(x,t+h)-v_x(x,t)}{h}\right)\left(\frac{\varphi(v_x(x,t+h))-\varphi(v_x(x,t))}{h}\right) dx\,dt =$$

$$= -c\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\left(\frac{v(x,t+h)-v(x,t)}{h}\right)\left(\frac{D_x(\varphi(v_x(x,t+h)))-D_x(\varphi(v_x(x,t)))}{h}\right) dx\,dt =$$

$$= -c\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\left(\frac{v(x,t+h)-v(x,t)}{h}\right)\left(\frac{v_t(x,t+h)-v_t(x,t)}{h}\right) dx\,dt =$$

$$= -\frac{c}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 D_t\left[\left(\frac{v(x,t+h)-v(x,t)}{h}\right)^2\right] dx\,dt =$$

$$= \frac{c}{2}\int_0^1\left(\frac{v(x,t_0+h)-v(x,t_0)}{h}\right)^2 dx - \frac{c}{2}\int_0^1\left(\frac{v(x,t_1+h)-v(x,t_1)}{h}\right)^2 dx$$

Como $v_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,1))$, se sigue que el último miembro está acotado para $|h|<\delta(t_o,t_1)$ pp t_o,t_1, ya que

$$\frac{v(x,t+h) - v(x,t)}{h} \longrightarrow v_t(x,t) \qquad (h\to 0) \quad \text{en } L^2(0,1), \quad \text{pp } t.$$

Por lo tanto, $u_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,1))$.

Veamos que $D_x(\varphi(u))(0,t) = 0$. Como $u = v_x$ y $D_x(\varphi(v_x)) = v_t$, queremos probar que

$$\lim_{x\to 0} v_t(x,t) = 0 \qquad \text{pp } t.$$

Probaremos que

$$\lim_{(x,h)\to(0,0)} \frac{v(x,t+h) - v(x,t)}{h} = 0$$

y como el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{v(x,t+h) - v(x,t)}{h}$$

existe pp x y es $v_t(x,t)$, se tiene lo buscado.

$$\frac{v(x,t+h) - v(x,t)}{h} = \int_0^x \frac{v_x(s,t+h) - v_x(s,t)}{h}\, ds \quad \text{pues } v(0,t) = 0 \quad \text{pp } t.$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{v(x,t+h) - v(x,t)}{h}\right| \leq x^{1/2}\left[\int_0^1 \left(\frac{v_x(x,t+h) - v_x(x,t)}{h}\right)^2 dx\right]^{1/2}$$

Según acabamos de probar, $u_t = v_{xt} \in L^2_{Loo}(0,T;L^2(0,1))$ y por lo tanto, pp t existe $\delta = \delta(t)$ tal que si $|h| < \delta(t)$

$$\int_0^1 \left(\frac{v_x(x,t+h) - v_x(x,t)}{h}\right)^2 dx \leq c$$

De donde, si $|h| < \delta(t)$

$$\left|\frac{v(x,t+h) - v(x,t)}{h}\right| \leq x^{1/2}\ c^{1/2} < \varepsilon \qquad \text{si } x < \frac{\varepsilon^2}{c}\ .$$

Veamos que $u \in L^\infty(0,T;L^1(0,1))$. Como ya observamos antes, si v es la solución de (3.2) deducimos del Lema 1 que

$$V_0^1\, v(x,t) \leq V_0^1\, F(x) \qquad \forall\ t > 0,$$

y por lo tanto

$$\int_0^1 |u(x,t)|\ dx = V_0^1\, v(x,t) \leq V_0^1\, F(x) = \int_0^1 d|\mu| \qquad \forall\ t > 0.$$

Sin embargo, al margen del método de demostración, se puede ver que si u es solución de (3.1), necesariamente $u \in L^\infty(0,T;L^1(0,1))$. En efecto, como $u(x,t) \rightharpoonup \mu$, $u = v_x \in L^1(0,1)$ $\forall\ t > 0$, se tiene que existe un $\delta > 0$ tal que

$$V_0^1\, v(x,t) = \int_0^1 |u(x,t)|\ dx \leq c \qquad \text{si } t < \delta\ .$$

Veamos que si $t > t_o$ entonces

$$\int_0^1 |u(x,t)|\, dx \leq \int_0^1 |u(x,t_o)|\, dx$$

con lo que concluirá la demostración.

En efecto, sea $S(t)$ el semigrupo de operadores no expansivos generado por el operador m-acretivo: $-D_{xx}(\varphi(u))$, entonces

$$u(x,t) = S(t - t_o)u(x,t_o) \qquad \text{si} \quad t > t_o$$

En efecto, como u es solución de (3.1) a), b), c), d), si probamos que

$$u(x,t) \to u(x,t_o) \quad (t \searrow t_o) \quad \text{en } L^1(0,1),$$

por unicidad de solución fuerte (ver capítulos I y II) se tendrá lo afirmado.

Como $u_t \in L^2_{Loc}(0,T;L^2(0,1))$, si $t_o > 0$

$$u(x,t) - u(x,t_o) = \int_{t_o}^t u_t(x,z)\, dz \quad , \quad \text{de donde}$$

$$\int_0^1 |u(x,t) - u(x,t_o)|\, dx \leq \int_{t_o}^t \int_0^1 |u_t(x,z)|\, dx\, dz \leq$$

$$\leq (t - t_o)^{1/2} \left(\int_{t_o}^T \int_0^1 |u_t(x,z)|^2 \, dx\, dz \right)^{1/2} < \varepsilon$$

si $|t - t_o|$ es suficientemente chico. Por lo tanto $u \in L^\infty(0,T;L^1(0,1))$.

PROPOSICION 1

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, estrictamente creciente tal que $\varphi(0) = 0$ y satisface la condición (3.1). Supongamos que u_1 y u_2 son soluciones de (2.1) y sean μ_1 y μ_2 dos medidas de Borel finitas tales que

$$u_i(x,t) \rightharpoonup \mu_i \qquad (t \to 0) \qquad i = 1,2.$$

Supongamos que $\mu_1 \leq \mu_2$, entonces

$$u_1(x,t) \leq u_2(x,t) \qquad \text{pp } (x,t).$$

DEMOSTRACION

Sea
$$v_i(x,t) = \int_0^x u_i(s,t)\, ds \qquad i = 1,2.$$

Sabemos que v_i es solución de (2.2) y satisface

$$v_i(x,t) \to F_i(x) \quad (t \to 0) \quad \text{en } L^1(0,1) \quad i = 1,2,$$

donde F_i es la función de distribución de la medida μ_i; como fue demostrado en el Teorema 2.

Podemos entonces aplicar el Lema 1 a las funciones v_1 y v_2. Supongamos que no se satisface $u_1(x,t) \leq u_2(x,t)$ pp, entonces la función $(v_2 - v_1)(x,t)$ no puede ser monótona creciente en la variable x para casi todo $t > 0$. Existe entonces un $t_o > 0$ y dos puntos x_1 y x_2 tales que

$$x_1 < x_2 \qquad \text{y}$$

$$(v_2 - v_1)(x_1,t_o) > (v_2 - v_1)(x_2,t_o)$$

Aplicando el Lema 1 a la sucesión

$$0 = x_o < x_1 < x_2 \leq 1$$

tenemos una sucesión

$$0 = y_o < y_1 < y_2 \leq 1$$

tal que

$$\text{signo}\ \big((F_2 - F_1)(y_i) - (F_2 - F_1)(y_{i-1}) \big) =$$

$$= \text{signo}\ \big((v_2 - v_1)(x_i, t_o) - (v_2 - v_1)(x_{i-1}, t_o) \big) \qquad i = 1,2.$$

En particular,

$$(F_2 - F_1)(y_1) > (F_2 - F_1)(y_2) \qquad \text{y}$$

$$y_1 < y_2$$

lo que contradice la hipótesis de que $\mu_1 \leq \mu_2$ pues ésta se traduce en que la función $F_2 - F_1$ es monótona creciente. Por lo tanto,

$$u_1(x,t) \leq u_2(x,t) \qquad \text{pp } (x,t).$$

PROPOSICION 2

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente. Sean u_1 y u_2 soluciones de (2.1) tales que

$$u_i(x,t) \rightharpoonup \mu_i \qquad (t \to 0) \qquad i = 1,2.$$

Sea F_i la función de distribución de la medida μ_i. Entonces, si

$$F_1(x) \leq F_2(x) \qquad \text{pp } x, \qquad \text{se tiene}$$

$$\int_0^x u_1(s,t)\,ds \leq \int_0^x u_2(s,t)\,ds \qquad \text{pp } (x,t).$$

DEMOSTRACION

- Sea

$$v_i(x,t) = \int_0^x u_i(s,t)\,ds \qquad i = 1,2.$$

Entonces v_i es solución de (2.2) con

$$v_i(x,t) \to F_i(x) \quad (t \to 0) \qquad \text{en } L^1(0,1).$$

Como $F_1 \leq F_2$ pp, se sigue que

$$v_1(x,t) \leq v_2(x,t) \qquad \text{pp } (x,t)$$

que es lo que queríamos demostrar. Esto es consecuencia de los resultados de la sección 1.

PROPOSICION 3

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, estrictamente creciente con $\varphi(0) = 0$ que satisface la condición (3.1). Sean u_1 y u_2 soluciones de (2.1) con

$$u_i(x,t) \rightharpoonup \mu_i \qquad (t \to 0) \qquad i = 1,2.$$

Entonces

$$\int_0^1 |u_1(x,t) - u_2(x,t)|\, dx \leq \int_0^1 d|\mu_1 - \mu_2| \qquad \forall\, t > 0.$$

DEMOSTRACION

Sea nuevamente v_i la función

$$v_i(x,t) = \int_0^x u_i(s,t)\, ds \qquad i = 1,2$$

que es solución de (2.2) con

$$v_i(x,t) \to F_i(x) \quad (t \to 0) \qquad \text{en } L^1(0,1) \qquad i = 1,2$$

con F_i la función de distribución de la medida μ_i. Entonces sabemos que estamos en las condiciones del Lema 1 y por lo tanto, para todo $t_0 > 0$, para todo $\varepsilon > 0$ y para toda sucesión

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k = 1$$

tal que

$$d_i = (v_2 - v_1)(x_i, t_0) - (v_2 - v_1)(x_{i-1}, t_0)$$

resulta de signos alternados y siempre no nulo, existe una sucesión

$$0 = y_0 < y_1 < \dots < y_k \leq 1$$

tal que

$$\text{signo } d_i = \text{signo } \left((F_2 - F_1)(y_i) - (F_2 - F_1)(y_{i-1}) \right)$$

y

$$|d_i| \leq \left|(F_2 - F_1)(y_i) - (F_2 - F_1)(y_{i-1})\right| + \frac{\varepsilon}{k}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{k} \left|(v_2 - v_1)(x_i, t_o) - (v_2 - v_1)(x_{i-1}, t_o)\right| \leq V_0^1 (F_2 - F_1)(x) + \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que

$$V_0^1 (v_2 - v_1)(x, t_o) \leq V_0^1 (F_2 - F_1)(x)$$

cualquiera sea $t_o > 0$; al ser

$$u_2 - u_1 = (v_2 - v_1)_x$$

una función de $L^1(0,1)$ para todo $t > 0$, resulta

$$\int_0^1 |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \, dx = V_0^1 (v_2 - v_1)(x,t) \leq V_0^1 (F_2 - F_1)(x) =$$

$$= \int_0^1 d|\mu_1 - \mu_2|$$

que es lo que queríamos demostrar.

COMENTARIOS

En este capítulo hemos demostrado que cuando $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, estrictamente creciente, $\varphi(0) = 0$ y $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua Lipschitz, el semigrupo $S(t)$, $t > 0$ generado por el operador $- D_{xx}(\varphi(u))$ se extiende de $L^1(0,1)$ al espacio de las medidas de Borel finitas en $[0,1)$.

En realidad ese es un caso particular del hecho de que este semigrupo se extiende al espacio de las medidas finitas siempre que $u(t) = S(t)u_o$ satisfaga $u_t \in L^1_{Loc}(0,T;L^1(0,1))$ para toda función $u_o \in L^1(0,1)$. En efecto, de acuerdo con lo probado en el Teorema 2, dada una medida μ, si $v(x,t)$ es la solución de (3.2) con $F(x) = \mu([0,x))$ y $u(x,t) = v_x(x,t)$ entonces $u(x,t) \rightharpoonup \mu$ $(t \to 0)$ y para ver que u es solución de (2.1) sólo es necesario probar que $u_t \in L^1_{Loc}(0,T;L^1(0,1))$ ya que las otras condiciones se verifican como en la demostración del Teorema 2. La diferenciabilidad de la función $u(t)$ ha sido probada en el Lema 1 bajo las hipótesis que tenemos acá. pues se demostró que $v_{xt} \in L^1_{Loc}(0,T;L^1(0,1))$ que es lo afirmado.

Cuando únicamente se sabe que $u(t) = S(t)u_o$ es diferenciable si u_o es no negativa, puede afirmarse que el semigrupo $S(t)$ se extiende a las medidas finitas no negativas si se tienen resultados de regularidad de la solución $v(x,t)$ del problema (3.2). En efecto, si $v(x,t)$ es continua cualquiera sea $F \in L^1(0,1)$ y μ es no negativa se sigue, como consecuencia del Lema 1, que

$v(x,t)$ es monótona creciente en x para todo $t > 0$ fijo y por lo tanto $u(x,t) = v_x(x,t)$ es no negativa para cada $t > 0$. Como $u(t) = S(t - t_o)u(x,t_o)$ $t > t_o > 0$, se sigue que $u_t \in L^1_{Loc}(0,T;L^1(0,1))$. Las otras condiciones se verifican como antes.

Podemos aplicar estos resultados a la ecuación de la difusión en medios porosos

$$u_t = D_{xx}(|u|^{m-1} u) \qquad\qquad m \geqslant 1.$$

Aquí $\varphi(x) = |x|^{m-1} x$ no satisface que φ^{-1} sea continua Lipschitz. Sin embargo se sabe que $S(t)u_o$ es diferenciable cuando u_o es no negativa ([28]). Además Herrero y Vázquez ([27]) probaron que la solución $v(x,t)$ de

$$v_t = D_x(|v_x|^{m-1} v_x) \qquad\qquad m \geqslant 1$$

es continua. Se sigue entonces que existe solución de la ecuación de la difusión en medios porosos cuando se da una distribución inicial de masas no negativa en $[0,1)$, y se mantiene flujo 0 en $x = 0$ y concentración 0 en $x = 1$. Esta solución resulta diferenciable.

REFERENCIAS

1.- D. G. Aronson, Nonnegative solutions of linear parabolic equations, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Classe di Scienze 22 (1968), 607-694.

2.- G. Astarita, G. Marrucci, Principles of non-newtonian fluid mechanics, Mc Graw - Hill, 1974.

3.- Ph. Benilan, Equation d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications, thesis, Orsay, 1972.

4.- Ph. Benilan, H. Brezis, M. G. Crandall, A semilinear equation in $L^1(R^N)$, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, serie IV, Vol. II (1975), 523-555.

5.- J. E. Bouillet, C. Atkinson, A Generalized diffusion equation: Radial symmetries and comparison theorems, por aparecer en el J. Math. An. Appl.

6.- H. Brezis, Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North Holland, 1973.

7.- H. Brezis, Pazy, Accretive sets and differential equations in Banach spaces, Israel J. Math. 8 (1970), 367-383.

8.- H. Brezis, M. G. Crandall, Uniqueness of solutions of the initial-value problem for $u_t - \Delta \varphi(u) = 0$, J. Math. Pures et Appl.. 58 (1979), 153-163.

9.- C. Cortázar, Tesis, Courant Institute, New York. 1978.

10.- M. G. Crandall, M. Pierre, Regularizing effects for $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$, MRC Technical Summary Report 2166, Enero 1981.

11.- M. G. Crandall, T. Liggett, A theorem and a counterexample in the theory of semigroups of nonlinear transformations, Trans. AMS 160 (1971), 263-278.

12.- M. G. Crandall, L. C. Evans, On the relation of the operator $\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}$ to evolution governed by accretive operators, Israel J. Math. 21 (1975), 261-278.

13.- M. G. Crandall, A generalized domain for semigroup generators, Proc. AMS. 37 (1973), 434-439.

14.- L. C. Evans, Nonlinear evolution equations in an arbitrary Banach space, Israel J. Math. 26 (1977), 1-41.

15.- A. S. Kalashnikov, On a nonlinear equation appearing in the theory of non-stationary filtration, Trud. Sem. I. G. Petrovski (1978). (En ruso).

16.- S. Kamin, Source-type solutions for equations of nonstationary filtration, J. Math. An. Appl. 64 (1978), 263-276.

17.- O. A. Ladyzenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural' ceva, Linear and quasilinear equations of parabolic type, Trans. Math. Monographs, Vol. 23, AMS.

18.- M. Pierre, Uniqueness of the solutions of $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$ with initial datum a measure, MRC Technical Summary Report 2171, Enero 1981.

19.- A. T. Plant, Flow-invariant domains of Hölder continuity for nonlinear semigroups, Proc. AMS 53 (1975).

20.- R. M. Redheffer, W. Walter, The total variation of solutions of parabolic differential equations and a maximum principle in unbounded domains, Math. Ann. 209 (1974), 57-67, Springer Verlag.

21.- K. Sato, On the generators of non-negative contraction semi-groups in Banach lattices, J. Math. Soc. Japan 20 (1968), 431-436.

22.- J. L. Vázquez, Large - time behaviour of the solutions of the one dimensional porous media equation, Proceedings of the Symposium on Free Boundary Problems: Theory and Applications, Montecatini. Italia (1981). Springer Lecture Notes in Mathematics, por aparecer.

23.- G. F. Webb, Nonlinear perturbations of linear accretive operators in Banach spaces, Israel J. Math. 12 (1972), 237-248.

24.- D. V. Widder, Positive temperature on the infinite rod, Trans. AMS 55 (1944), 85-95.

25.- Ya. B. Zel' dovich, Yu. P. Raizer, Physics of shock waves and high-temperature hydrodinamic phenomena, Vol. II, Ac. Press, 1969.

26.- H. Attouch, A. Damlamian, Application des methodes de convexité et monotonie a l' étude de cetaines equationes quasi-lineaires, Proc. Royal Soc. Edinburgh A 79 (1977/78) nº 1-2, 107-129.

27.- M. A. Herrero, J. L. Vázquez, Regularity results for a nonlinear degenerate parabolic equation, por aparecer.

28.- D. G. Aronson, Ph. Bénilan, Régularité des solutions de l'équation des milieux poreux dans R^N, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 288 (1979) 103-105.

29.- L. C. Evans, Differentiability of a nonlinear semigroup in L^1, J. Math. An. Appl. 60 (1977), 703-715.

30.- J. R. Philip, The theory of infiltration, part 1, Soil Sci. 83, (1957) 345-357.

31.- H. Brezis, A. Friedman, Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions, MRC Technical Summary Report 2277, Septiembre 1981.