El operador maximal fuerte y su relación con la teoría de diferenciación de integrales

Gómez, Marcelo Enrique

1982

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

EL OPERADOR MAXIMAL FUERTE Y SU RELACION CON LA TEORIA DE DIFERENCIACION DE INTEGRALES

por

Marcelo Enrique Gómez

Trabajo de tesis para optar al
título de Doctor en Matemática

Director: Dr. Norberto A. Fava

- 1 9 8 2 -

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Norberto [illegible] Fava por su apoyo mediante el cual hé podido llevar a cabo este trabajo.

Introducción y definiciones:

La teoría de diferenciación de integrales tiene su origen en el bien conocido teorema de Lebesgue (1910):

Sea $f \in L^1(R^n)$, luego para casi todo $x \in R^n$ se tiene,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|B(x,r_k)|} \int_{B(x,r_k)} f(y)dy = f(x) \qquad \text{para toda}$$

sucesión de bolas $(B(x,r_k))_{k\geq 1}$ con centro en x y radios $r_k \to 0$.

De este teorema, surge naturalmente la siguiente pregunta: ¿Qué ocurre si se toma el límite sobre promedios donde en vez de bolas, intervienen otro tipo de conjuntos que se contraen al punto x? En 1927 H. Bohr exhibió un ejemplo, en el cual se demostraba que los intervalos en R^2 (o sea los rectángulos de lados paralelos a los ejes) se comportan mucho peor que los intervalos cúbicos respecto a una propiedad de cubrimiento (lema de Vitali), que es fundamental para el resultado de Lebesgue. Ver Teorema 1 Capítulo I de este trabajo.

De esta manera, se convirtió en un desafiante problema el conocer si el reemplazo de bolas por intervalos centrados en un punto x en el teorema de Lebesgue llevaría a un resultado correcto o no.

El primer resultado en esta dirección, es el llamado teorema fuerte de densidad, demostrado por primera vez por Saks (1933) que dice lo siguiente:

Si f es la función característica de un conjunto medible, las bolas pueden ser reemplazadas por intervalos y el resultado de Lebesgue sigue siendo válido. ver [6].

Más adelante Zygmund (1934) mostró que el teorema de Lebesgue es cierto para intervalos si $f \in L^p(R^n)$ $1 < p \leqslant +\infty$. Ver [7].

Un año más tarde Jessen, Marcinkiewicz y Zygmund probaron que el mismo es válido si $f \in L\,(1 + \log^+ L)^{n-1}\,(R^n)$, siendo $L(1 + \log^+ L)^{n-1}(R^n)$ la clase de todas las funciones f tales que $\int |f|\ (1 + \log^+ |f|)^{n-1} < +\infty$.

Por otro lado, Saks probó en 1934 que existe una función $g \in L^1(R^n)$ de manera tal, que el Teorema de Lebesgue es falso para g si se promedia sobre intervalos. Ver Teorema 2, Capítulo I de este trabajo.

Dada una función $f \in L_{loc}(R^n)$, Hardy y Littlewood definieron la función maximal Mf para cada $x \in R^n$ como

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} f(y)\, dy,$$

siendo Q(x,r) un intervalo cúbico abierto de centro x y de lados de longitud 2r.

El lema de Vitali referido a una propiedad de cubrimiento de los cubos, se utiliza para demostrar que el operador $f \to Mf$ es de tipo débil (1,1), o sea

(1) $$|x/Mf(x) > \lambda| \leqslant \frac{C}{\lambda} \|f\|_1$$

C constante independiente de f y λ.

La desigualdad (1) permite demostrar el teorema de Lebesgue.

El operador maximal fuerte $f \to f^*$ se define,

$$f^*(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y)| dy$$

siendo I un intervalo abierto (rectángulo con lados paralelos a los ejes) que contiene al punto x.

En 1971 N.A.Fava demostró lo siguiente: ver [4].

Sea $f \in L(\log^+ L)^{n-1}(R^n)$ con soporte en el cubo unitario $S = \{x/0 \leqslant x_i \leqslant 1;\ i = 1,2,...,n\}$ entonces se cumple que

(2) $$|x/f^*(x) > 4\lambda| \leqslant C \int \frac{|f|}{\lambda} (\log^+ \frac{|f|}{\lambda})^{n-1} dy$$

C constante independiente de λ y f.

La desigualdad (2) permite demostrar rápidamente el resultado de Jessen, Marcinkiewickz y Zygmund. Ver [4].

Usando un teorema de cubrimiento debido a Whitney, se demuestra que dada $f \in L^1(R^n)$ es

$$(3) \qquad \frac{C}{\lambda} \int_{(Mf>\lambda)} |f| \leq |x/Mf(x) > \lambda|$$

C constante independiente de f y λ. Ver Teorema 3, Capîtulo I.

Las desigualdades (1) y (3) permiten demostrar el siguiente teorema: ver [3] p. 60.

Sea $f \in L^1(R^n)$, las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $\int_{(Mf>1)} Mf\, dx < +\infty$

ii) $f \in L(1 + \log^+ L)$

Ahora teniendo en cuenta la desigualdad (2) y este teorema, dada $f \in L^1(R^2)$ con soporte incluido en el cubo unitario se esta en condiciones de preguntar;

¿Son equivalentes las siguientes condiciones?

i) $\int_{(f^*>1)} f^*\, dx < +\infty$

ii) $f \in L(\log^+ L)^2$ ver [3] p. 64

Mediante la desigualdad (2) se prueba que,

$$\text{si} \quad f \in L(\log^+ L)^2 \quad \text{entonces} \quad \int_{(f^*>1)} f^*(x)dx < +\infty.$$

En este trabajo se demuestra que las condiciones *no* son equivalentes, o sea que existe una función f no perteneciente a $L(\log^+ L)^2$ con sop $f \subseteq S$, para la cual

$$\int_{(f^*>1)} f^*(x)dx < +\infty$$

Dada $f \in L^1(R^2)$ con soporte en el cubo unitario S, se definen los operadores maximales M_i $(i = 1,2)$

$$M_1 f(y_1,y_2) = \sup_{a<y_1<b} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\theta, y_2)d\theta$$

$$M_2 f(y_1,y_2) = \sup_{a<y_2<b} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y_1, \eta)d\eta$$

para cada punto $(y_1,y_2) \in R^2$. Estos operadores son de tipo débil (1,1) ver [4]. Se demostrará que $M_i f(y_1,y_2) \leq f^*(y_1,y_2)$ para casi todo $(y_1,y_2) \in R^2$, $i = (1,2)$.

Dado un intervalo I se define su excentricidad,

$$e(I) = \frac{\text{longitud del lado mayor de I}}{\text{longitud del lado menor de I}}$$

Si dado $(y_1,y_2) \in R^2$, $f^*(y_1,y_2)$ es exclusivamente límite de promedios sobre intervalos I_n tales que

$$e(I_n) \to +\infty,$$

el punto (y_1,y_2) se llamará de excentricidad absoluta. Se observa que los promedios que tienden a $f^*(y_1,y_2)$ se toman sobre intervalos cada vez mas "achatados".

Se probará, que "casi todas las funciones" no negativas con soporte en el cubo unitario que son integrables, tienen casi todo punto de ese cubo de excentricidad absoluta. "Casi todas las funciones" significa todas las funciones, salvo un conjunto de primera categoria.

Se exhibirá una función que cumple con estos requerimientos.

De existir una función f en L $\log^+ L$, para la cual casi todo punto de S es de excentricidad absoluta se mostrará que

$$f^*(y_1,y_2) = \max_{i=1,2} (M_i f(y_1,y_2)) \text{ para casi todo } (y_1,y_2) \in S.$$

O sea que el operador maximal fuerte restringido a este tipo de funciones, se comporta en S como un operador de tipo débil (1,1), aunque se sabe que $f \to f^*$ no es de tipo débil (1,1).

Luego se demostrará que si $f \in L \log^+ L$ y sop $f \subseteq S$ entonces $f^*(y_1,y_2)$ es un promedio para casi todo $(y_1,y_2) \in R^2$.

Se verá luego que si f es tal que sop $f \subseteq S$, $V_0^1[f(.,\eta)] \leq k(\eta)$ para todo $\eta \in [0,1]$

o $V_0^1[f(\theta,.)] \leq k(\theta)$ para todo $\theta \in [0,1]$ y $\int_0^1 k(x)(\log^+ k(x)^2 dx < +\infty$

siendo la función medible $k(x)$ no negativa y

siendo $V_0^1 f(\theta,.)$ la variación respecto de $f(\theta,.)$ en $[0,1]$,

$V_0^1 f(.,\eta)$ la variación respecto de $f(.,\eta)$ en $[0,1]$

y si además $f \in L \log^+ L$, son equivalentes:

i) $\int_{(f^*>1)} f^* dx < +\infty$

ii) $f \in L(\log^+ L)^2$

Como se ha mencionado anteriormente, esto no es cierto con las únicas hipótesis sop $f \subseteq S$ y $f \in L \log^+ L$.

Dada la función $g: R^2 \to R$ definida por

$$g(x,y) = \frac{\chi_B(x,y)}{(y-1/4)|\log(y-1/4)|^3}$$

siendo $B = \{(x,y)/\max(|x-1/2|;|y-1/2| \leq 1/4\}$, se sabe que $g \in L \log^+ L$ y $g \notin L(\log^+ L)^2$. Demostraremos que g^* es localmente integrable pero como $V_{1/4}^{3/4}[g(.,y)] = 0$ para casi todo $y \in R$, luego g^* no es integrable sobre el conjunto $\{(x,y)/g^*(x,y) > 1\}$. Por lo tanto $\{(x,y)/g^*(x,y) > 1\}$ no es acotado pero es de medida finita debido a la desigualdad (2), de lo que se desprende que g^* no es integrable sobre todo conjunto de medida finita.

Ahora dada la rotación en un ángulo de 45° con centro en (1/2, 1/2) definida por

$$R(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + 1/2,\ \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) + 1/2\right)$$

Se demostrará que $(g \circ R)^*$ es integrable sobre todo conjunto de medida finita.

Se verá que el conjunto $\{(x,y)/(g \circ R)^*(x,y) > 1\}$ es acotado. Comparando estos resultados con los dos resultados mencionados anteriormente sobre g^*, la naturaleza geométrica del operador maximal fuerte se observa inmediatamente.

La operación M_2M_1f esta bien definida si $f \in L \log^+ L$ y sop $f \subseteq S$ ver [4]. Fava, Gatto y Gutierrez probaron lo siguiente:

Sea f una función tal que sop $f \subseteq S$ y tal que $f \in L \log^+ L(R^2)$ son equivalentes:

i) M_2M_1f es integrable sobre cada conjunto de medida finita

ii) $f \in L(\log^+ L)^2(R^2)$ ver [2].

Luego este trabajo, demuestra en cierta forma la diferencia existente entre el operador maximal fuerte y el producto de operadores M_2M_1.

CAPITULO I

Resultados de otros autores:

TEOREMA 1. (H. Bohr)

Sea S el cubo unitario abierto de R^2. *Existe un subconjunto F de S para el cual* $|F| = 1$, *tal que se puede asignar a cada* $x \in F$ *una sucesión* $(I_k(x))_{k\geq 1}$ *de intervalos abiertos conteniendo a x y contrayendose a x y tal que para cada sucesión disjunta* $(R_k)_{k\geq 1}$ *extraida de* $(I_k(x))_{\substack{x\in F\\ k=1,2,\ldots}}$ *se tiene*

$$|F - \bigcup_{k\geq 1} R_k| > \frac{1}{2}$$

Para probar el teorema se utiliza la siguiente construcción auxiliar.

Sea $H \in N$, $H > 1$ y considérese en R^2 la colección de intervalos abiertos $I_1, I_2, \ldots, I_H$, como se indica en la Fig. 1, con $H = 3$.

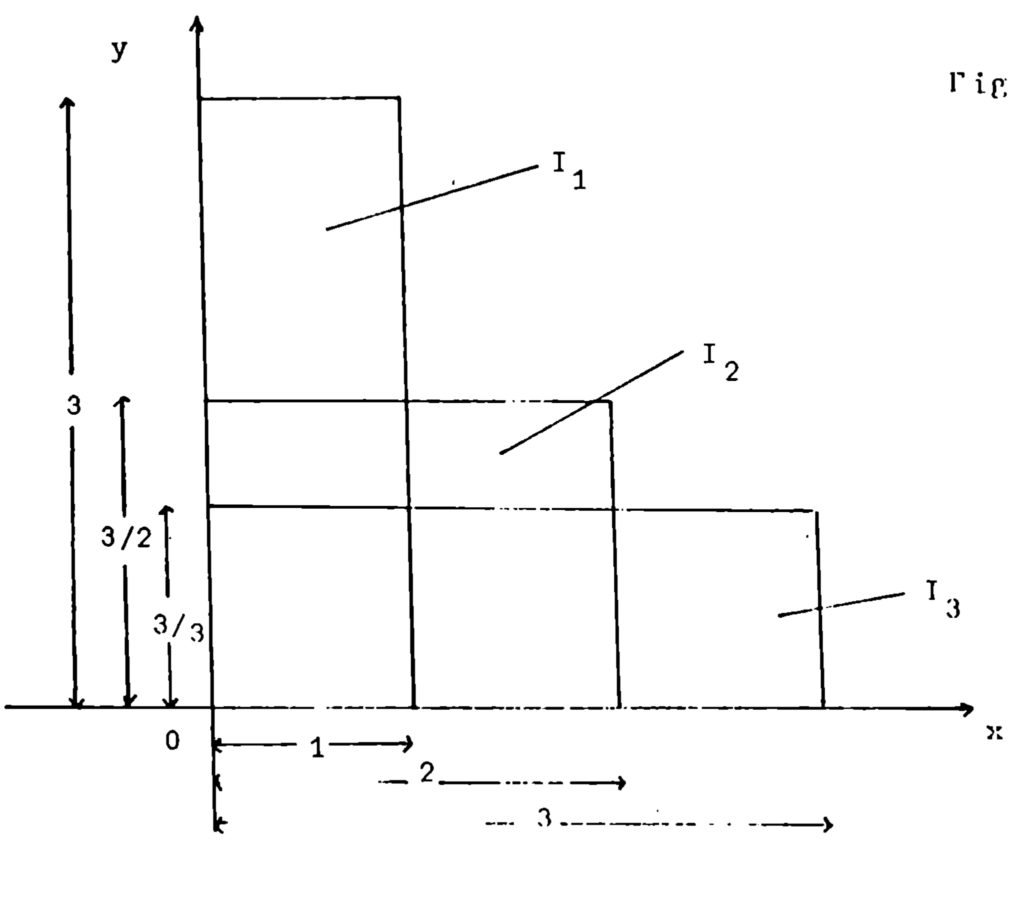


Fig. 1

Cada I_J es un intervalo abierto con vértice en 0, un lado en la parte positiva del eje x de longitud J, y el otro lado en la parte positiva del eje y de longitud $\frac{H}{J}$. Luego el área de I_J es H, el de la intersección $E = \bigcap_{J=1}^{H} I_J$ es 1 y el de la unión

$$J_H = \bigcup_{J=1}^{H} I_J \quad \text{es} \quad H(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{H}) = H.\alpha(H)$$

Consideremos una sucesión creciente $(H_k)_{k\geq 1}$ de números naturales. Se fija uno de ellos H_i. Se puede cubrir salvo un conjunto de medida nula el cubo unitario S con una sucesión disjunta $(S_k^i)_{k=1,2,\ldots}$ de conjuntos homotéticos a I_{H_i} de la construcción auxiliar, estando todos los conjuntos S_k^i, k = 1,2,... contenidos en S y teniendo estos diámetros menores que $1/_{2^i}$.

Sean $\{I^i_{k,J}\}_{J=1,2,\ldots H_i}$ los H_i intervalos abiertos homotéticos a los intervalos I_J $(\bigcup_{J=1}^{H_i} I_J = J_{H_i})$ tales que $\bigcup_{J=1}^{H_i} I^i_{k,J} = S^i_k$. Sea A^i la familia de todos los intervalos $(I^i_{K,J})_{k\geq 1, J=1,\ldots,H_i}$. La unión de todos los intervalos de A^i la llamaremos Γ^i. Es $|\Gamma^i| = |S| = 1$.

Sea $\{R^i_h\} = \{I^i_{k_h, J_h}\}$ una sucesión disjunta de intervalos de A_i, luego como $I^i_{k,J} \cap I^i_{k,m} \neq \emptyset$ si $1 \leq J,m \leq H_i$ $\{R^i_h\}$ puede contener a lo sumo un intervalo $I^i_{k,J}$ de los que constituyen S^i_k. Como para cada k y cada J = 1,2,...,H_i se tiene

$$\frac{|I^i_{k,J}|}{|S^i_k|} = \frac{1}{\alpha(H_i)} \quad \text{y además} \quad \sum_k |S^i_k| = 1$$

se tiene,

$$\sum_{h=1}^{\infty} |R_h^i| = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{|I^i_{k_h},J_h|}{|S^i_{k_h}|} |S^i_{k_h}| \leqslant \frac{1}{\alpha(H_i)}$$

sea ahora $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ obviamente $|F| = 1$.

Sea $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, o sea la familia de todos los intervalos que estan en A_i para todo $i \geqslant 1$.

A cada punto $x \in F$ se le asigna los intervalos $I_k(x)$ de A que contienen a x (Estos se contraen hacia x pues los diâmetros decrecen). Si se extrae de A una sucesiôn disjunta $(R_k)_{k\geqslant 1}$ se tiene,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha(H_k)}$$ y como

$$\alpha(H_k) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{H_k} > \frac{1}{2} \log H_k$$

eligiendo (H_i) de tal manera que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha(H_i)} < \frac{1}{2}$$ se concluye que

$|F - \cup R_k| > \frac{1}{2}$.

TEOREMA 2. (S. Saks)

El conjunto F de funciones f en L^1 tales que $\overline{D}(\int f, x) < +\infty$ en algún punto $x \in R^n$ es de primera categoría en L^1.

Se hará la demostración para $n = 2$.

Se verá que F es la unión numerable de conjuntos F_k nunca densos.

Sea $F_k = \{f \in L^1 / |\int_I f| \leqslant k|I|$ para todo intervalo I que contiene algún punto x que verifica $|x| \leqslant k$ siendo además $\delta(I) < \frac{1}{k}\}$.

Claramente $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Veamos que F_k es nunca denso. Es $\overline{F}_k = F_k$ $(k \geqslant 1)$. Supongamos $(f_J)_{j\leqslant 1} \subseteq F_k$ tal que $f_J \xrightarrow{L^1} f$. Para cada J existe algún punto x_J, con $|x_J| \leqslant k$, tal que si I es un intervalo que contiene a x y $\delta(I) < \frac{1}{k}$, es $|\int_I f_J| \leqslant k|I|$. Como $\overline{B}(0,k)$ es compacto, se puede extraer de $(x_J)_{J\geqslant 1}$ una subsucesión convergente. Supongamos luego que $x_J \to x$.

Obviamente $|x| \leqslant k$ y si I es un intervalo tal que $x \in I$ con $\delta(I) < 1/k$, I abierto se tiene

$$|\int_I f| \leqslant \int_I |f-f_J| + |\int_I f_J|$$

Como $x \in I$ que es abierto y $x_J \to x$ luego $x_J \in I$ para J suficientemente grande, luego $|\int_I f_J| \leqslant k|I|$.

Además como $\int_I |f_J - f| \xrightarrow[J\to\infty]{} 0$ se concluye que $|\int_I f| \leqslant k|I|$ o sea que $f \in F_k$.

F_k es nunca denso: Se necesitará probar el siguiente lema:

Para cada número natural N existe una función no negativa ϕ_N tal que

(a) $\int \phi_N \leq 1/N$

(b) *Para cada* $x \in \overline{B}(0,N)$ *existe un intervalo* I $(x \in I)$ *con* $\delta(I) < 1/N$ *tal que*

$$\int_I \phi_N > N|I|$$

Supongamos demostrado el lema y veamos como se concluye la demostración.

Sea $f \in F_k$. Dado $\eta > 0$ existe $g \in L^1$, $g \notin F_k$ tal que $\|g-f\|_1 \leq \eta$. Veamos esto:

Sea $h \in L^\infty \cap L^1$ tal que $\|f-h\|_1 \leq \eta/2$. Se define $g = h+\phi_N$ siendo ϕ_N la función del lema con un N que va a ser elegido en un momento. Se tiene,

$$\|g-f\|_1 \leq \|h-f\|_1 + \|\phi_N\|_1 \leq \eta/2 + \frac{1}{N}$$

De acuerdo a (b) del lema, para cada $x \in \overline{B}(0,N)$ existe un intervalo I, con $x \in I$ y $\delta(I) < 1/N$ tal que

$$\int_I \Phi_N > N|I|$$

Sea N tal que $\frac{1}{N} \leqslant \frac{\eta}{2}$ y $N-\|h\|_\infty > k$. Luego es $\|g-f\|_1 \leqslant \eta$ y

$$\left|\int_I g\right| \geqslant \left|\int_I \phi_N - \left|\int_I h\right|\right| \geqslant (N-\|h\|_\infty)\ |I| > k|I|$$

por lo que $g \notin F_k$.

Demostración del lema: Para la demostración del lema se empezará usando la construcción de Bohr (Teorema 1) con un H que se fijará en un instante.

Se puede cubrir casi completamente la bola $\overline{B}(0,N)$ por medio de una sucesión disjunta $(S_k)_{k\geqslant 1}$ de conjuntos homotéticos al J_H de la construcción, de tal manera que $\delta(S_k) < 1/N$. Sea $R = \overline{B}(0,N) - \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, es $|R| = 0$ luego, para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto abierto $G \supseteq R$ tal que $|G| \leqslant \varepsilon$. Para cada $x \in R$ se considera un cubo abierto $I(x)$ centrado en x con diámetro menor que 1/N contenido en G. Aplicando el teorema de Besicovitch a $(I(x))_{x\in R}$ se tiene

(a) $R \subset \cup I_k \subseteq G$

(b) $\sum \chi_{I_k} \leqslant \theta$ siendo θ una constante absoluta.

Sea E_k el conjunto homotético al E de la construcción auxiliar vía la misma homotecia que transforma J_H en S_k. Se definen las siguientes funciones;

$$\psi_N(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N|B(0,N)|}\dfrac{|S_k|}{|E_k|} & \text{si} \quad x \in E_k \\ 0 & \text{si} \quad x \notin E_k \quad (k \geq 1) \end{cases}$$

$$\rho_k(x) = \begin{cases} 2N & \text{si} \quad x \in I_k \\ 0 & \text{si} \quad x \notin I_k \end{cases}$$

Sea $\rho_N = \sum_k \rho_k$ y $\phi_N = \psi_N + \rho_N$ luego

$$\int \phi_N = \int \psi_N + \int \rho_N = \frac{1}{2N|B(0,N)|} \sum_{k=1}^{\infty} |S_k| + \sum_{k=1}^{\infty} \int \rho_k =$$

$$= \frac{1}{2N} + 2N \sum_{k=1}^{\infty} \int \chi_{I_k} \leqslant \frac{1}{2N} + 2\theta N\varepsilon \qquad \text{luego}$$

$$\int \phi_N < \frac{1}{N} \quad \text{si} \quad \varepsilon < \frac{1}{4N^2\theta}$$

Ahora si $x \in \overline{B}(0,N)$ esta en algún S_k, entonces $x \in I_{k,J}$ para algún $J = 1,2,\ldots,H$ por definición de S_k,

$$y \quad \int_{I_{k,J}} \phi_N \geq \frac{1}{2N} \frac{|S_k|}{|E_k|} |E_k| = \frac{1}{2N} \frac{|S_k|}{|I_{k,J}|} |I_{k,J}| = \frac{\alpha(H)}{2N} |I_{k,J}|$$

siendo $\alpha(H) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{H}$. Eligiendo H de tal forma que

$$\frac{\alpha(H)}{2N} > N, \qquad \text{es}$$

$$\int_{I_{k,J}} \phi_N > N \, |I_{k,J}|$$

Si $x \notin S_k$ entonces $x \in I_k$ para algún k y por definición de ρ_N y ϕ_N,

$$\int_{I_k} \phi_N > N \, |I_k|$$ lo que concluye la demostración del lema.

<u>TEOREMA 3</u>. (Stein-De Guzmán)

Sea $B_1(x)$ la colección de todos los cubos abiertos de R^n que contienen a x y sea M el operador maximal de Hardy y Littlewood. Luego, para cada $f \in L^1(R^n)$ y para cada $\lambda > 0$, se tiene

$$\frac{C_n^*}{\lambda} \int_{(Mf>\lambda)} |f| \leq |Mf > \lambda| \leq \frac{C_n}{\lambda} \int_{(|f|>\lambda/2)} |f|$$

siendo C_n, C_n^* constantes que solo dependen de la dimensión.

La segunda desigualdad es un refinamiento de la desigualdad de tipo débil (1,1) para $f \to Mf$.

La primera desigualdad se obtiene de la siguiente manera:

Sea $A = \{Mf > \lambda\}$ A es abierto.

Si $A = \emptyset$ la desigualdad es trivial. Como $f \in L^1(R^n)$ es $A \neq R^n$. Luego se aplica el teorema de Whitney. (Para ello ver siguiente teorema de este capítulo).

Se obtiene una sucesión disjunta de cubos semi-abiertos tales que $A = \cup Q_k$ y

$$1 \leq \frac{d(Q_k,\partial A)}{\delta(Q_k)} \leq 3$$

Sea Q_k^* una expansión de Q_k con centros iguales. Luego $|Q_k^*| = C_n|Q_k|$. Eligiendo convenientemente la constante C_n que determina la expansión y que depende únicamente de la dimensión, se tiene

$$Q_k^* \cap A^c \neq \emptyset \quad \text{o sea} \quad \frac{1}{|Q_k^*|}\int_{Q_k^*} |f| \leq \lambda \qquad \text{y}$$

$$|A| = \sum_{k\geq 1} |Q_k| = (C_n)^{-1} \sum_{k\geq 1} |Q_k^*| \geq \frac{1}{\lambda C_n} \sum_{k\geq 1} \int_{Q_k^*} |f| \geq$$

$$\geq \frac{1}{\lambda C_n} \sum_{k\geq 1} \int_{Q_k} |f| = \frac{1}{\lambda C_n} \int_{A} |f|.$$

TEOREMA 4. (Whitney)

Sea G un conjunto abierto de R^n, $G \neq R^n$; $G \neq \emptyset$. Luego $G = \bigcup_{J\geq 1} Q_J$, siendo los conjuntos Q_J cubos semi-abiertos o sea conjuntos del tipo

$$Q(x,a) = \{z \in R^n : x_i - a \leq z_i < x_i + a,\ i = 1,2,\ldots,n\}$$

disjuntos dos a dos y tales que para cada J es

$$1 \leq \frac{d(Q_J, \partial G)}{\delta(Q_J)} < 3$$

Demostración. Utilizaremos los cubos diádicos de R^n. Primero consideramos en R^n la familia D_1 de todos los cubos semi-abiertos con lados de longitud 1 con vértices en los puntos de R^n con coordenadas enteras. Ahora sometemos D_1 a una homotecia de centro 0 y radio 2^k con k entero y obtenemos D_k. Cada cubo de D_J es la unión de 2^n cubos disjuntos de D_{J-1}. Los cubos de D_J tienen lados de longitud 2^J. Es claro que si $Q_1 \in D_J$ y $Q_2 \in D_k$ siendo $J \leq k$, es $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ o $Q_1 \subseteq Q_2$. Cada D_J contiene un número de cubos numerable y la familia $D = \bigcup_{k \in Z} D_k$ de intervalos diádicos en R^n es también numerable.

Para la demostración del teorema se puede suponer, utilizando una traslación si es necesario que $0 \in \partial G$.

Para cada $x \in G$ existe por lo menos un cubo diádico $Q(x)$ tal que $x \in Q(x)$ y $0 \in \partial Q(x)$. Luego, si se considera la sucesión de todos los intervalos diádicos que contienen a x y que se contraen a x, se puede seleccionar una cola de esta sucesión $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$d(T_1,\partial G) = 0 \quad T_2 \subset G, \quad d(T_2,\partial G) > 0$$

y $T_k \in D_{J_1-k+1}$. Como $d(x,\partial G) > 0$ y (T_k) se contrae a x, es

$$\frac{d(T_k,\partial G)}{\delta(T_k)} \underset{k\to\infty}{\to} +\infty$$

Sea T_h el primer cubo de los cubos T_k que cumplen,

$$\frac{d(T_k,\partial G)}{\delta(T_k)} \geqslant 1$$

Es $h > 1$ pues $d(T_1,\partial G) = 0$

Se tiene, $\dfrac{d(T_{h-1},\partial G)}{\delta(T_{h-1})} < 1$ luego

$$1 \leqslant \frac{d(T_h,\partial G)}{\delta(T_h)} \leqslant \frac{d(T_{h-1},\partial G)+\delta(T_h)}{\delta(T_h)} = \frac{d(T_{h-1},\partial G)}{\delta(T_{h-1})} + 1$$

< 3. Luego para cada $x \in G$ se tiene un cubo diádico $Q^*(x)$ tal que $x \in Q^*(x) \subseteq G$ y

$$1 \leqslant \frac{d(T_h,\partial G)}{\delta(T_h)} < 3.$$

Consideremos todos los cubos $Q^*(x)$, $x \in G$. Estos cubos satisfacen todas las condiciones del teorema excepto la de ser disjuntos. Vamos entonces a seleccionar de $A = (Q^*(x))_{x\in G}$ una sucesión de cubos disjuntos 2 a 2 que sigan cubriendo a G. Sea

$$\ldots \subset Q^*(x_{-2}) \subseteq Q^*(x_{-1}) \subset Q^*(x_0) \subset Q^*(x_1) \subset \ldots$$

una cadena de cubos de A tal que todos sus miembros son diferentes. Se tiene, para cada $J > 0$

$$1 \leqslant \frac{d(Q^*(x_J),\partial G)}{\delta(Q^*(x_J))} \leqslant \frac{d(x_0,\partial G)}{\delta(Q^*(x_J))}$$

Si la cadena tiene un número infinito de términos a la derecha de $Q^*(x_0)$ luego, como todos son diferentes, $\delta(Q^*(x_J)) \underset{J\to\infty}{\to} +\infty$ y esto contradice que

$$1 \leqslant \frac{d(x_0),\partial G)}{\delta(Q^*(x_J))} \qquad (J > 0)$$

Luego la cadena tiene un elemento maximal.

Se toma el elemento maximal de cada una de las posibles cadenas de A. Esta familia $(Q_k)_{k\geqslant 1}$ de intervalos diádicos es numerable, pues D lo es. Es disjunta, pues son diádicos y maximales en el sentido recién explicado y cubren a G, dado que cubren a cada $Q^*(x)$ de A.

CAPITULO II

Todas las funciones consideradas serán no negativas con soporte en el cubo unitario de R^2 que llamaremos S.

Definición 1. Sea $f \in L^1(R^2)$. Un punto $(y_1,y_2) \in R^2$ es de *K-excentricidad parcial* para esta función, si existen intervalos $(I_n \times Q_n)_{n\geq 1}$ que satisfacen:

$$f^*(y_1,y_2) = \lim_n \frac{1}{|I_n||Q_n|} \int_{I_n\times Q_n} f(\theta,\eta)\,d\theta\, d\eta ,$$

siendo $y_1 \in I_n$; $y_2 \in Q_n$ $(n \geq 1)$ y $\frac{1}{k} \leq \frac{|I_n|}{|Q_n|} \leq k$ para todo $n \geq n_0$.

Definición 2. Sea $f \in L^1(R^2)$. Un punto $(y_1,y_2) \in R^2$ es de *semi excentricidad absoluta* para esta función, si existen intervalos $(I_n \times Q_n)_{n\geq 1}$ que satisfacen:

$$f^*(y_1,y_2) = \lim_n \frac{1}{|I_n||Q_n|} \int_{I_n\times Q_n} f(\theta,\eta)\,d\theta\, d\eta$$

siendo $y_1 \in I_n$; $y_2 \in Q_n$ $(n \geq 1)$ y

$$\frac{|I_n|}{|Q_n|} \to +\infty \qquad \text{o} \qquad \frac{|Q_n|}{|I_n|} \to +\infty \qquad (n \to +\infty)$$

Definición 3. Sea $f \in L^1(R^2)$. Un punto $(y_1,y_2) \in R^2$ es de *excentricidad absoluta* para esta función, si para cualquier sucesión de intervalos $(I_n \times Q_n)_{n\geq 1}$ que satisface

$$f^*(y_1,y_2) = \lim_n \frac{1}{|I_n||Q_n|} \int_{I_n \times Q_n} f(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta$$

siendo $y_1 \in I_n$; $y_2 \in Q_n$ $(n \geq 1)$ se tiene

$$\frac{|I_n|}{|Q_n|} \to +\infty \qquad \text{o} \qquad \frac{|Q_n|}{|I_n|} \to +\infty \qquad (n \to \infty).$$

Definición 4. Sea $f \in L^1(R^2)$. Un punto $(y_1,y_2) \in R^2$ es de *K-excentricidad* para esta función, si para cualquier sucesión de intervalos $(I_n \times Q_n)_{n\geq 1}$, que satisfacen

$$f^*(y_1,y_2) = \lim_n \frac{1}{|I_n||Q_n|} \int_{I_n \times Q_n} f(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta$$

siendo $y_1 \in I_n$; $y_2 \in Q_n$ $(n \geq 1)$, se tiene

$$\frac{1}{K} \leq \frac{|I_n|}{|Q_n|} \leq K \qquad (n \geq n_0).$$

Observaciones

i) un punto de *excentricidad absoluta* es de *semi-excentricidad absoluta*, no siendo la propiedad recíproca verdadera.

ii) Un punto de *K-excentricidad* es de *K-excentricidad parcial*.

iii) Un punto de *semi-excentricidad absoluta* puede ser de *K-excentricidad parcial* y recíprocamente.

Por ejemplo: Si definimos

$$f(y_1,y_2) = \begin{cases} \text{constante} & \text{si} \quad (y_1,y_2) \in S \\ 0 & \text{si} \quad (y_1,y_2) \notin S \end{cases}$$

luego todo punto de S es de *semi-excentricidad absoluta* y de *K-excentricidad parcial*, para todo $K \geq 1$.

PROPOSICION 1. *Si un punto (y_1,y_2) no es de K-excentricidad parcial para ningún $K \geq 1$, entonces es de excentricidad absoluta, y recíprocamente.*

Supongamos que (y_1,y_2) no es de *excentricidad absoluta*; luego existen intervalos $(I_n \times Q_n)_{n\geq 1}$ que satisfacen:

$$f^*(y_1,y_2) = \lim_n \frac{1}{|I_n||Q_n|} \int_{I_n \times Q_n} f(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta$$

siendo $y_1 \in I_n$; $y_2 \in Q_n$ $(n \geq 1)$, de manera tal que

$$\alpha = \lim_n \frac{|I_n|}{|Q_n|} < +\infty \qquad \beta = \lim_n \frac{|Q_n|}{|I_n|} < +\infty;$$

luego $\frac{1}{y} \leq \frac{|I_n|}{|Q_n|} \leq y$ si $n \geq n_0$ donde $y > \max(\alpha,\beta) > 0$ $(y \in N)$. Por lo tanto (y_1,y_2) es de y-excentricidad parcial. La recíproca es obvia.

<u>PROPOSICION 2</u>. *Si un punto (y_1,y_2) no es de K-excentricidad para ningún $K \geq 1$, luego es de semi-excentricidad absoluta, y recíprocamente.*

Supongamos que (y_1,y_2) no es de K-excentricidad para ningún $K \geq 1$. Luego, dado $K \in N$, existen intervalos $(I_n^k \times Q_n^k)_{n\geq 1}$, que satisfacen

$$(1) \qquad f^*(y_1,y_2) = \lim_n \frac{1}{|I_n^k|\,|Q_n^k|} \int_{I_n^k \times Q_n^k} f(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta,$$

siendo $y_1 \in I_n^k$; $y_2 \in Q_n^k$ $(n \geq 1)$ y

$$\frac{|I_n^k|}{|Q_n^k|} > K \text{ para todo } n \geq 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{|Q_n^k|}{|I_n^k|} > K \text{ para todo } n \geq 1$$

Se selecciona una subsucesión de $(I_n^k \times Q_n^k)_{\substack{n\geq 1\\ k\geq 1}}$ que llamaremos nuevamente $(I_n^k \times Q_n^k)_{\substack{n\geq 1\\ k\geq 1}}$, de tal manera que (1) se cumple para esta subsucesión cuando $n \to \infty$ para cualquier $k \geq 1$ fijo, y

$$\frac{|I_n^k|}{|Q_n^k|} \underset{k\to\infty}{\to} +\infty \qquad \text{o} \qquad \frac{|Q_n^k|}{|I_n^k|} \underset{k\to\infty}{\to} +\infty \qquad \text{si } n \geq 1.$$

Claramente

$$f^*(y_1,y_2) = \lim_k \lim_n \frac{1}{|I_n^k||Q_n^k|} \int_{I_n^k \times Q_n^k} f(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta$$

Por lo tanto se concluye que

$$f^*(y_1,y_2) = \lim_j \frac{1}{|I_{n_j}^{k_j}||Q_{n_j}^{k_j}|} \int_{I_{n_j}^{k_j} \times Q_{n_j}^{k_j}} f(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta,$$

y $$\frac{|I_{n_j}^{k_j}|}{|Q_{n_j}^{k_j}|} \underset{j\to\infty}{\to} +\infty \qquad \text{o} \qquad \frac{|Q_{n_j}^{k_j}|}{|I_{n_j}^{k_j}|} \underset{j\to\infty}{\to} +\infty$$

para alguna subsucesión $(I_{n_j}^{k_j} \times Q_{n_j}^{k_j})_{j\geq 1}$.

Esta conclusión esta basada en el hecho siguiente:

Dada una sucesión doble $(\alpha_{k,n})_{k,n\geq 1}$ tal que $\lim_k \lim_n \alpha_{k,n} = \alpha$ se puede extraer una subsucesión $(\alpha_{k_j,n_j})_{j\geq 1}$ que verifica $\lim_j \alpha_{k_j,n_j} = \alpha$.

<u>TEOREMA 1</u>. *Sea $f \in L\, \log^+ L$. Luego*

$$M_i f(y_1,y_2) \leq f^*(y_1,y_2) \qquad (i = 1,2)$$

para casi todo punto $(y_1,y_2) \in R^2$.

Se define

$$T = \{(y_1,y_2)/M_i f(y_1,y_2) < +\infty \ (i = 1,2),\ f^*(y_1,y_2) < +\infty,$$

$$f(y_1,y_2) = \lim_{\substack{y_1\in I \\ \delta I\to 0}} \frac{1}{|I|}\int_I f(\theta,y_2)d\theta = \lim_{\substack{y_2\in Q \\ \delta Q\to 0}} \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y_1,\eta)d\eta;$$

$$\int_B M_i f(y_1,\eta)d\eta < +\infty;\quad \int_B M_i f(\theta,y_2)d\theta < +\infty \quad (i = 1,2)$$

para todo intervalo B, $\int f(\theta,y_2)d\theta < +\infty;\ \int f(y_1,\eta)d\eta < +\infty\}$

a) T es medible: Consideremos las *derivadas parciales superiores* de $(\int f)$, definidas para cada (y_1,y_2) por

$$\overline{D_1}\left(\int f,(y_1,y_2)\right) = \sup\left\{ \overline{\lim_{\substack{k\\ \delta I_k\to 0}}} \frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} f(\theta,y_2)d\theta : y_1 \in I_k\right\}$$

$$\overline{D_2}\left(\int f,(y_1,y_2)\right) = \sup\left\{ \overline{\lim_{\substack{k\\ \delta I_k\to 0}}} \frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} f(y_1,\eta)d\eta : y_2 \in I_k\right\},$$

y las *derivadas parciales inferiores* de $(\int f)$

$$\underline{D_1}\left(\int f,(y_1,y2)\right) = \inf\left\{ \underline{\lim_{\substack{k\\ \delta I_k\to 0}}} \frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} f(\theta,y_2)d\theta : y_1 \in I_k\right\}$$

$$\underline{D_2}\left(\int f,(y_1,y_2)\right) = \inf\left\{ \underline{\lim_{\substack{k\\ \delta I_k\to 0}}} \frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} f(y_1,\eta)d\eta : y_2 \in I_k\right\},$$

siendo $(I_k)_{k\geq 1}$ cualquier sucesión de intervalos en R
$\overline{D_i}\left(\int f\right)$ y $\underline{D_i}\left(\int f\right)$ son medibles (i = 1,2); luego

(1) $L_i = \{(y_1,y_2)/\underline{D_i}\left(\int f,(y_1,y_2)\right) = \overline{D_i}\left(\int f,(y_1,y_2)\right) = f(y_1,y_2)\}$

(i = 1,2) son conjuntos medibles.

Sea $H_n = \{(y_1,y_2)/\int_{-n}^{n} M_i f(y_1,\eta)d\eta < +\infty;\ \int_{-n}^{n} M_i f(\theta,y_2)d\theta < +\infty\ (i=1,2)\}$

Como $f \in L\log^+L$, $M_i f$ es localmente integrable $(i = 1,2)$, por lo tanto dado $n \geqslant 1$, casi todo $(y_1,y_2) \in H_n$.
Luego, casi todo (y_1,y_2) pertenece a $\bigcap_{n\geqslant 1} H_n$. Como $f \in L\log^+L$, también se sabe que $f^*(y_1,y_2) < +\infty$ en casi todo punto.
Se concluye entonces que T es medible.

b) Casi todo punto $(y_1,y_2) \in T$: Por (1) tenemos que demostrar únicamente que $|S \cap L_i| = |S|$ $(i = 1,2)$, dado que si $(y_1,y_2) \notin S$, luego $f(y_1,y_2) = 0$ por hipótesis, y

$$\frac{1}{|I|}\int_I f(\theta,y_2)d\theta = 0 = f(y_1,y_2)$$

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y_1,\eta)d\eta = 0 = f(y_1,y_2), \quad \text{si}$$

$\delta(I) < \varepsilon$; $\delta(Q) < \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.
Los conjuntos $S \cap L_i$ $(i = 1,2)$ son medibles; luego

$$|L_i \cap S| = \int_0^1 |(L_i \cap S)_{y_1}|dy_1 = \int_0^1 |(L_i \cap S)_{y_2}|dy_2$$

Para casi todo (y_1,y_2) se tiene,

(2) $$\int f(y_1,\eta)d\eta < +\infty \quad y \quad \int f(\theta,y_2)d\theta < +\infty$$

Luego considerando (y_1,y_2) que verifica (2), se tiene

$$\lim_{\substack{\theta_1\in I\\ \delta I\to 0}} \frac{1}{|I|}\int_I f(\theta,y_2)d\theta = f(\theta_1,y_2) \quad \text{pp}$$

Estos son exactamente los puntos de diferenciación de $f(.,y_2):R \to R$, luego $|(L_1 \cap S)_{y_2}| = 1$ para casi todo y_2 que cumple $0 \leqslant y_2 \leqslant 1$. Por lo tanto $|L_1 \cap S| = |S| = 1$.

En forma similar, $|L_2 \cap S| = |S| = 1$.

Ahora sea

$$\Omega = \{(y_1,y_2) \in T/|T \cap S)_{y_1}| = |(T \cap S)_{y_2}| = 1 \quad si \quad 0 \leqslant y_1,y_2 \leqslant$$

c) Casi todo punto $(y_1,y_2) \in \Omega$: claramente casi todo punto $(y_1,y_2) \notin S$ pertenece a Ω.

Veamos que $|\Omega \cap S| = 1$

Como

$$\Omega \cap S = (T \cap S) \cap \{(y_1,y_2)/|(T \cap S)_{y_1}| = |(T \cap S)_{y_2}| = 1\}$$

$$= (T \cap S) \cap (\{y_1/|(T \cap S)_{y_1}| = 1\} \times \{y_2/|(T \cap S)_{y_2}| = 1\});$$

y $$\int_0^1 |(T \cap S)_{y_1}| dy_1 = |T \cap S| = 1$$

siendo $|(T \cap S)_{y_1}| \leqslant 1$ para todo y_1, se tiene que
$|(T \cap S)_{y_1}| = 1$ pp. Se concluye entonces que
$|\{y_1/|(T \cap S)_{y_1}| = 1\}| = 1$. En forma fimilar
$|\{y_2/|(T \cap S)_{y_2}| = 1\}| = 1$. Luego $|\Omega \cap S| = 1$ como se quería.

Sea $(y_1,y_2) \in \Omega$. Luego $M_2 f(y_1,y_2) < +\infty$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe un intervalo (a,b) con $a < y_2 < b$, tal que

(3) $$M_2 f(y_1,y_2) < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y_1,\eta)d\eta + \varepsilon$$

(a,b) dependiente de (y_1,y_2) y ε.

$$f(y_1,\eta) = \lim_{\substack{\delta I \to 0 \\ y_1 \in I}} \frac{1}{|I|} \int_I f(\theta,\eta)d\theta$$ para casi todo η pues $(y_1,y_2) \in \Omega$

Ahora dado $g_n(y_1,\eta) = \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} f(\theta,\eta)d\theta$, $y_1 \in I_n$; $n \geq 1$ con $\delta I_n \to 0$, obviamente

$$g_n(y_1,\eta) \leq M_1 f(y_1,\eta)$$

Dado que $(y_1,y_2) \in \Omega$, $M_1 f(y_1,.)$ es localmente integrable luego se tiene

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y_1,\eta)d\eta = \frac{1}{b-a}\int_a^b \lim_n g_n(y_1,\eta)d\eta$$

$$= \lim_n \frac{1}{b-a}\int_a^b g_n(y_1,\eta)d\eta =$$

$$= \lim_n \frac{1}{b-a}\frac{1}{|I_n|}\int_a^b \left(\int_{I_n} f(\theta,\eta)d\theta\right)d\eta \leq f^*(y_1,y_2)$$

Luego por (3) es,

$$M_2 f(y_1,y_2) \leq f^*(y_1,y_2) + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0 \text{ arbitrario})$$

por lo tanto $M_2 f(y_1,y_2) \leq f^*(y_1,y_2)$ si $(y_1,y_2) \in \Omega$

En forma similar

$$M_1 f(y_1,y_2) \leq f^*(y_1,y_2) \quad \text{si} \quad (y_1,y_2) \in \Omega.$$

<u>COROLARIO 1</u>. *Sea* $f \in L^1(R^2)$. *Luego se cumple,*

$$(i = 1,2) \quad M_i f(y_1,y_2) \leq f^*(y_1,y_2) \quad \text{pp} \quad (y_1,y_2).$$

Se toma $f_n \xrightarrow{L^1} f$ de manera tal que $f_n \in L \log^+ L$ para todo $n \geq 1$. Sea $\varphi_n = \inf_{k \geq n} f_n$. Luego $\varphi_n \nearrow f$ y $\varphi_n \in L \log^+ L$ $(n \geq 1)$

Por lo tanto,

$$M_i f(y_1,y_2) = \lim_n M_i \varphi_n(y_1,y_2) \leq \lim_n \varphi_n^*(y_1,y_2) \leq f^*(y_1,y_2)$$

es casi todo punto (y_1,y_2).

<u>TEOREMA 2</u>. *Sea* $f \in L \log^+ L$. *Sea* (y_1,y_2) *un punto de semi-excentricidad absoluta para esta función. Se supone además que* (y_1,y_2) *es un punto de diferenciación y que* $(y_1,y_2) \in \Omega$, *entonces se cumple*

$$f^*(y_1,y_2) \leq M_1 f(y_1,y2)$$

$$\text{o} \qquad f^*(y_1,y_2) \leq M_2 f(y_1,y_2)$$

Existen intervalos $(I_n \times Q_n)_{n\geq 1}$, tales que

$$f^*(y_1,y_2) = \lim_n \frac{1}{|I_n||Q_n|} \int_{I_n \times Q_n} f(\theta,\eta)d\theta\, d\eta$$

Sin pêrdida de generalidad, supongamos que

$$\frac{|I_n|}{|Q_n|} \to +\infty$$

Como $0 \leqslant |I_n|;|Q_n| \leqslant$ constante. Existen subsucesiones $|I_n|$; $|Q_n|$ $(n \geqslant 1)$ tales que $|I_n| \to c$ y $|Q_n| \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, como $f^*(y_1,y_2) < +\infty$ si $(y_1,y_2) \in \Omega$, se tiene

$$(1) \qquad f^*(y_1,y_2) < \frac{1}{|I_n||Q_n|} \int_{I_n \times Q_n} f(\theta,\eta)d\theta\, d\eta + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad n \geqslant n_0$$

Por otro lado

$$\frac{1}{|Q_n|} \int_{Q_n} f(\theta,\eta)d\eta \to f(\theta,y_2) \text{ para casi todo } \theta \text{, dado}$$

que $|Q_n| \to 0$ y $(y_1,y_2) \in \Omega$.

Luego

$$f^*(y_1,y_2) \leq \lim \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} (f(\theta,y_2))d\theta + \varepsilon$$

pues si

$$\lim \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} f(\theta,y_2)d\theta + \varepsilon < f^*(y_1,y_2)$$

usando (1) se tendría

$$0 = \lim \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} \left(\frac{1}{|Q_n|} \int_{Q_n} f(\theta,\eta)d\eta\right)d\theta -$$

$$- \lim \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} f(\theta,y_2)d\theta > (\varepsilon - f^*(y_1,y_2)) + (f^*(y_1,y_2) - \frac{\varepsilon}{2}) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Si $|I_n| \to 0$, dado que (y_1,y_2) es un punto de diferenciación que pertenece a Ω, y si $|I_n| \to |I| = c > 0$, se tiene

$$\frac{\varepsilon}{2} < \lim \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} \left[\frac{1}{|Q_n|} \int_{Q_n} f(\theta,\eta)\,d\eta - f(\theta,y_2) \right] d\theta =$$

$$= \frac{1}{|I|} \int_{I} \left[\lim_n \frac{1}{|Q_n|} \int_{Q_n} f(\theta,\eta)\,d\eta - f(\theta,y_2) \right] d\theta = 0,$$

en ambos casos absurdo, luego

$$f^*(y_1,y_2) \leqslant \lim_n \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} f(\theta,y_2)\,d\theta + \varepsilon \leqslant M_1 f(y_1,y_2) + \varepsilon$$

como $\varepsilon > 0$ es arbitrario se tiene

$$f^*(y_1,y_2) \leqslant M_1 f(y_1,y_2)$$

<u>COROLARIO 2</u>. *Sea $f \in L \log^+ L$. Si casi todo punto $(y_1,y_2) \in S$ es de semi-excentricidad absoluta para esta función, se cumple*

$$f^*(y_1,y_2) = \max(M_1 f(y_1,y_2);\ M_2 f(y_1,y_2)) \quad \text{pp en } S.$$

<u>TEOREMA 3</u>. *Sea $f \in L \log^+ L$. Sea $(y_1,y_2) \in \Omega$ un punto de diferenciación de esta función. Luego una de las siguientes igualdades es válida:*

i) $f^*(y_1,y_2) = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta; \quad (y_1,y_2) \in Q$

ii) $f^*(y_1,y_2) = \frac{1}{|I|} \int_I f(\theta,y_2)\,d\theta; \quad y_1 \in I$

iii) $f^*(y_1,y_2) = \frac{1}{|H|} \int_H f(y_1,\eta)\,d\eta; \quad y_2 \in H$

iv) $f^*(y_1,y_2) = f(y_1,y_2)$

siendo Q, I y H intervalos.

Consideremos $\psi_{(y_1,y_2)}: F \to R$, definida de la siguiente manera:

$$F = \{(a,b,c,d)/a \leqslant y_1 \leqslant b;\ c \leqslant y_2 \leqslant d\}$$

$$\psi_{(y_1,y_2)}(a,b,c,d) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d f(\theta,\eta)\,d\eta\right) d\theta & \text{si } a \neq b,\ c \neq d \\ \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\theta,y_2)\,d\theta & \text{si } a \neq b,\ c = d \\ \frac{1}{d-c} \int_c^d f(y_1,\eta)\,d\eta & \text{si } a = b,\ c \neq d \\ f(y_1,y_2) & \text{si } a = b,\ c = d \end{cases}$$

$\psi_{(y_1,y_2)}$ es continua:

Caso I: $a \neq b;\ c \neq d$

Consideremos $(a_n,b_n,c_n,d_n) \to (a,b,c,d)$, luego $b_n-a_n > 0$; $d_n-c_n > 0$ si $n \geqslant n_0$ y

$$\frac{1}{b_n-a_n}\,\frac{1}{d_n-c_n}\int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{c_n}^{d_n} f(\theta,\eta)\,d\eta\right)d\theta \to \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{d-c}\int_a^b\left(\int_c^d f(\theta,\eta)\,d\eta\right)d\theta$$

Caso II. $a \neq b;\ c = d$

Se toma $(a_n,b_n,c_n,d_n) \to (a,b,c,d)$ $b_n-a_n > 0;\ 0 \leqslant d_n-c_n$ si $n \geqslant n_0$.

Supongamos que $0 < d_n-c_n$ si $n \geqslant n_0$ luego

$$\lim_n \frac{1}{b_n-a_n}\int_{a_n}^{b_n}\left(\frac{1}{d_n-c_n}\int_{c_n}^{d_n} f(\theta,\eta)\,d\eta\right)d\theta =$$

$$(1) \qquad = \lim_n \frac{1}{b_n-a_n}\,\lim_n \int_{a_n}^{b_n}\left(\frac{1}{d_n-c_n}\int_{c_n}^{d_n} f(\theta,\eta)\,d\eta\right)d\theta\,,$$

y como $\frac{1}{d_n-c_n}\int_{c_n}^{d_n} f(\theta,\eta)\,d\eta \leqslant M_2 f(\theta,y_2)$ que es localmente integrable dado que $(y_1,y_2) \in \Omega$ (1) es igual a

$$\frac{1}{b-a}\int \lim_n{}' \chi_{[a_n,b_n]}(\theta)\ \lim_n\left(\frac{1}{d_n-c_n}\int_{c_n}^{d_n} f(\theta,\eta)d\eta\right)d\theta$$

$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\theta,y_2)d\theta$, dado que como $(y_1,y_2)\in\Omega$ es

$$\lim_n \frac{1}{d_n-c_n}\int_{c_n}^{d_n} f(\theta,\eta)d\eta = f(\theta,y_2) \quad \text{pp}$$

Si existe una subsucesión $(c_{n_k},d_{n_k})_{n\geq 1}$ tal que $c_{n_k} = d_{n_k}$ $k \geq 1$, obviamente

$$\frac{1}{b_{n_k}-a_{n_k}}\int_{a_{n_k}}^{b_{n_k}} f(\theta,y_2)d\theta \underset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\theta,y_2)d\theta$$

<u>Caso III</u>. $a = b$; $c \neq d$ análogo al caso II.

<u>Caso IV</u>. $a = b$; $c = d$. Como (y_1,y_2) es un punto de diferenciación,

$$\lim_n \frac{1}{(b_n-a_n)}\frac{1}{(d_n-c_n)}\int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{c_n}^{b_n} f(\theta,\eta)d\eta\right)d\theta = f(y_1,y_2)$$

si $(a_n,b_n,c_n,d_n)\to(a,b,c,d)$ $b_n-a_n > 0$, $d_n-c_n > 0$ $(n \geq n_0)$

Además, si existe una subsucesión $(a_{n_k},b_{n_k})_{k\geq 1}$, tal que $a_{n_k} = b_{n_k}$, $d_{n_k}-c_{n_k} > 0$ $(k \geq 1)$, luego

$$\frac{1}{d_{n_k}-c_{n_k}}\int_{c_{n_k}}^{d_{n_k}} f(y_1,\eta)d\eta \to f(y_1,y_2), \text{ pues } (y_1,y_2)\in\Omega.$$

En consecuencia $\psi_{(y_1,y_2)}$ es continua.

Ahora supongamos sin pérdida de generalidad que $(y_1,y_2)\in S$, luego

$$\sup_{(a,b,c,d)\in F} \psi_{(y_1,y_2)}(a,b,c,d) = \sup_{(a,b,c,d)\in(S\times S)\cap\Gamma} \psi_{(y_1,y_2)}(a,b,c,d)$$

donde $\quad S\times S = \{(a,b,c,d)/0 \leqslant a,b,c,d \leqslant 1\}$

Esto es claro pues f tiene soporte en S, luego el promedio

$$\frac{1}{b-a}\,\frac{1}{d-c}\int_a^b \left(\int_c^d f(\theta,\eta)d\eta\right)d\theta \quad \text{es más grande}$$

si seleccionamos $(a,b)\times(c,d) \subseteq S$, o sea $(a,b,c,d)\in(S\times S)\cap\Gamma$.

Similarmente para intervalos (a,b); (c,d) los promedios

$$\text{(A)}\qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\theta,y_2)d\theta\,; \qquad \frac{1}{d-c}\int_c^d f(y_1,\eta)d\eta \qquad \text{(B)}$$

son más grandes si (a,b); $(c,d) \subseteq [0,1]$, siendo en el caso (A) $0 \leqslant c = y_2 = d \leqslant 1$, y en el caso (B) $0 \leqslant a = y_1 = b \leqslant 1$.

Luego existe $(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d})\in\Gamma$ tal que

$$\sup_{(a,b,c,d)\in F} \psi_{(y_1,y_2)}(a,b,c,d) = \psi_{(y_1,y_2)}(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d})$$

Definición. Sea $f \in L^1(R^2)$. Se definen las *derivadas parciales amplias superiores* de $(\int f)$ en (y_1,y_2) por

$$\overline{D_w^1}\left(\int f,(y_1,y_2)\right) = \sup\Big\{ \overline{\lim_{\substack{(y_1,y_2)\in I_n \\ |I_n^\theta|\to 0}}} \frac{1}{|I_n|}\int_{I_n} f(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta \Big\}$$

$$\overline{D_w^2}\left(\int f,(y_1,y_2)\right) = \sup\Big\{ \overline{\lim_{\substack{(y_1,y_2)\in I_n \\ |I_n^\eta|\to 0}}} \frac{1}{|I_n|}\int_{I_n} f(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta \Big\},$$

siendo $|I_n^\theta|$ = altura del intervalo I_n

$|I_n^\eta|$ = longitud de la base de I_n

COROLARIO 3. *Sea $f \in L\, log^+ L$, luego*

$$\overline{D_w^1}\left(\int f,(y_1,y_2)\right) = M_1 f(y_1,y_2) \quad pp \quad (y_1,y_2)$$

$$\overline{D_w^2}\left(\int f,(y_1,y_2)\right) = M_2 f(y_1,y_2) \quad pp \quad (y_1,y_2)$$

Para cualquier sucesión de intervalos $(I_n)_{n\geq 1}$, tal que $|I_n^\eta| \to 0$ siendo (y_1,y_2) un punto de diferenciación tal que $(y_1,y_2) \in I_n$ $(n \geq 1)$, se tiene:

$$(1)\qquad \overline{\lim_{|I^\eta_n|\to 0}}\ \frac{1}{|I_n|}\int_{I_n} f(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta = \lim_{|I^\eta_{n_k}|\to 0} \frac{1}{|I_{n_k}|}\int_{I_{n_k}} f(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta$$

$$= \lim_{|I^\eta_{n_k}|\to 0} \frac{1}{d_{n_k}-c_{n_k}}\int_{c_{n_k}}^{d_{n_k}} \Big(\frac{1}{|I^\eta_{n_k}|}\int_{I^\eta_{n_k}} f(\theta,\eta)\,d\theta\Big)d\eta$$

$$= \frac{1}{d-c}\int_c^d f(y_1,\eta)\,d\eta \quad \text{si} \quad |I^\theta_{n_k}| = d_{n_k}-c_{n_k} \to d-c > 0,$$

y (1) es igual a $f(y_1,y_2)$ si $|I^\theta_{n_k}| \to 0$ (dado que (y_1,y_2) es un punto de diferenciación).

Luego $\overline{D^2_w}\,(f,(y_1,y_2)) \leqslant M_2 f(y_1,y_2)$ pp

Ahora sea $M_2 f(y_1,y2) < \frac{1}{d-c}\int_c^d f(y_1,\eta)\,d\eta + \varepsilon$

con $c < y_2 < d$, ($M_2 f(y_1,y_2) < +\infty$ pues $(y_1,y_2) \in \Omega$) siendo (c,d) dependiente de (y_1,y_2) y ε.

Se selecciona $I_n = H_n \times Q_n$ $(n \geqslant 1)$, tal que

$$|Q_n| = |I^\theta_n| \to d-c \quad \text{y} \quad |H_n| = |I^\eta_n| \to 0 \quad \text{luego,}$$

$$\overline{\lim_{|I^\eta_n|\to 0}}\ \frac{1}{|I_n|}\int_{I_n} f(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta = \frac{1}{d-c}\int_c^d f(y_1,\eta)\,d\eta\,,$$

o sea que, $\overline{D_w^2}\left(\int, (y_1, y_2)\right) + \varepsilon > M_2 f(y_1, y_2)$ para ε arbitrario si $(y_1, y_2) \in \Omega$. Luego

$$\overline{D_w^2}\left(\int f, (y_1, y_2)\right) \geqslant M_2 f(y_1, y_2) \quad \text{pp.}$$

PROPOSICION 3. *Existe una función $f \in L \log^+ L$, y algún intervalo $I \subseteq S^0$, siendo S^0 el interior de S, tal que $\chi_I f \notin L(\log^+ L)^2$ y $M_1 f(y_1, y_2) = M_1 M_2 f(y_1, y_2)$ para todo $(y_1, y_2) \in S$*

Sea $g: R \to R$ tal que

$$g \equiv 0 \text{ en } C[0,1]; \; g \neq 0 \text{ en } [0,1]; \; g \in L \log^+ L \quad \text{y}$$

$\chi_{(\alpha,\beta)} g \notin L(\log^+ L)^2$ siendo $0 < \alpha < \beta < 1$.

Sea $f: R^2 \to R$ definida por

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} g(y_1) & \text{si} \quad S_{y_2} \neq \emptyset \\ \\ 0 & \text{si} \quad S_{y_2} = \emptyset \end{cases}$$

luego sop $f \subseteq S$.

Sea $(y_1, y_2) \in S^0$ entonces

$$M_1M_2f(y_1,y_2) = \sup_{a<y_1<b} \frac{1}{b-a}\int_a^b \Big(\sup_{c<y_2<d} \int_c^d \frac{f(\theta,\eta)}{d-c}\, d\eta \Big) d\theta$$

$$= \sup_{a<y_1<b} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\theta,y_2)d\theta = M_1f(y_1,y_2),$$

pues si $c \leqslant \eta \leqslant d$ es $f(\theta,\eta) = f(\theta,y_2) = g(\theta)$ y el promedio $\frac{1}{d-c}\int_c^d f(\theta,\eta)d\eta$ es mayor si $(c,d) \subseteq [0,1]$.

Obviamente $f \in L\log^+L$ y $X_I f \notin L(\log^+L)^2$ para algún intervalo I, $I \subseteq S^0$.

<u>COROLARIO 4</u>. *Existe $f \in L\log^+L$ tal que $X_I f \notin L(\log^+L)^2$ (I un intervalo tal que $I \subseteq S^0$) y que satisface*

$$\int_S M_1 f = \int_S f^* = \int_S M_1M_2 f < +\infty$$

El resultado es consecuencia del teorema 1 y la Proposición 3. Este último corolario nos demuestra, que la integrabilidad sobre todo conjunto de medida finita, es una condición esencial para la caracterización del producto de operadores M_1M_2 con $L(\log^+L)^2$. Ver [2].

<u>TEOREMA 4</u>. *Sea $f \in L^1(R^2)$ tal que $\int_S f^* < +\infty$; luego $(X_I f)^*$ es integrable sobre todo conjunto acotado cualquiera sea el intervalo $I \subseteq S^0$.*

Sea

$$A = \{(y_1,y_2) \in S / \int_0^1 f^*(y_1,\eta)d\eta < +\infty ; \int_0^1 f^*(\theta,y_2)d\theta < +\infty$$

y $\quad f^*(y_1,y_2) < +\infty\}$ luego $|A| = |S| = 1.$

Ahora definimos

$$B = \{(y_1,y_2) \in A / |A_{y_1}| = |A_{y_2}| = 1\} \quad \text{y}$$

$$C = \{(y_1,y_2) \in B / |B_{y_1}| = |B_{y_2}| = 1\} \quad \text{luego}$$

$$|B| = |C| = |S| = 1$$

Dado $\delta_0 > 0$ se elige $(p_1,q_1) \in C$ tal que

$$\|(p_1,q_1) - (0,0)\| = \|(p_1,q_1)\| < \delta_0.$$

Por definición $\quad |B_{q_1}| = |B_{p_1}| = 1$

Como $|B_{q_1}| = 1$, se puede seleccionar (p_2,q_1) tal que

$$\|(p_2,q_1) - (1,0)\| < \delta_0 \quad \text{siendo} \quad (p_2,q_1) \in B.$$

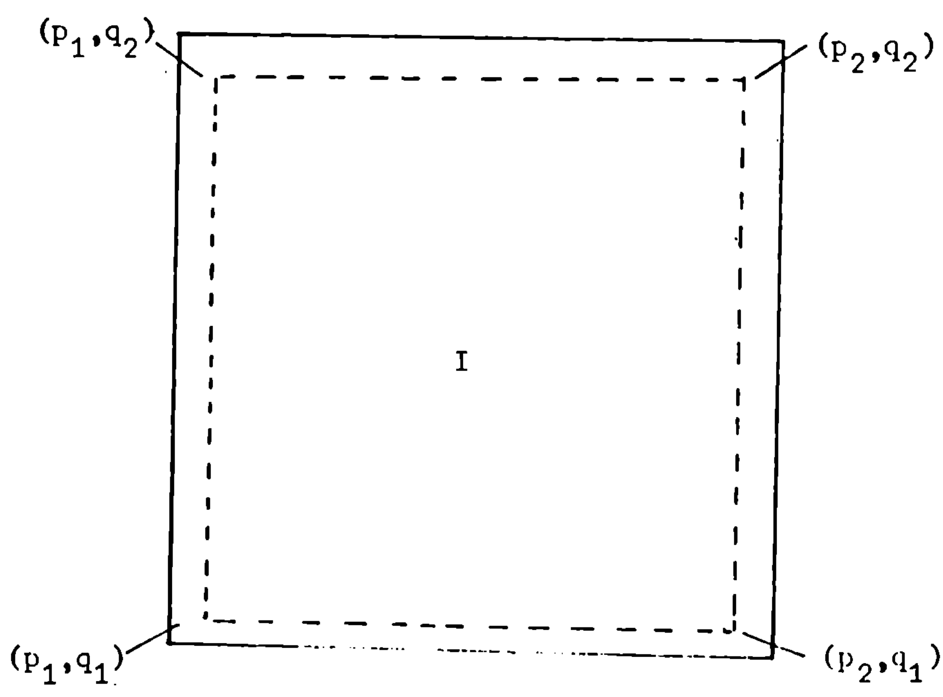
Puesto que $|B_{p_1}| = |A_{p_2}| = 1$, se considera $q_2 \in B_{p_1} \cap A_{p_2}$ que satisface;

$$\|(p_1,q_2) - (0,1)\| < \delta_0, \ \|(p_2,q_2) - (1,1)\| < \delta_0$$

Luego $(p_1,q_1) \in C$; (p_2,q_1) y $(p_1,q_2) \in B$; $(p_2,q_2) \in A$.

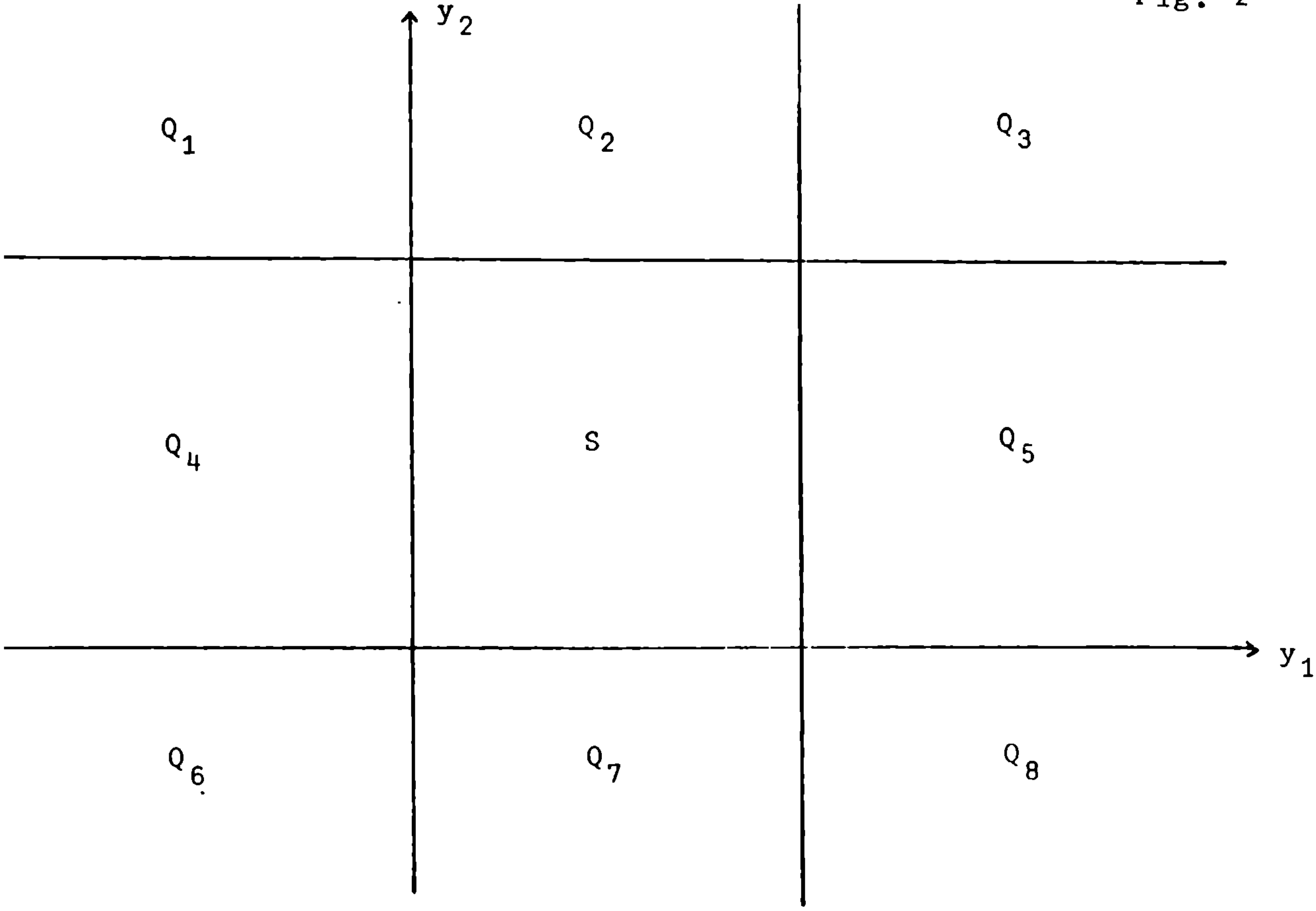
En consecuencia, existe un intervalo $I \subseteq S^0$ con vértices (p_i,q_j) $(i = 1,2,;\ j = 1,2)$ arbitrariamente cercanos a los vértices del cubo unitario S, de tal manera que $(p_i,q_j) \in A$. $(i = 1,2;\ j = 1,2)$.

Fig. 1



Ahora consideremos los conjuntos $(Q_i)_{1\leqslant i\leqslant\infty}$ que se muestran en la fig. 2.

Fig. 2



Sea $g = X_I f$, siendo I el intervalo recientemente construido, y f la función de la hipótesis.

Dado $\varepsilon > 0$, si $g^*(y_1,y_2) < +\infty$ ($g^* < +\infty$ pp) y $(y_1,y_2) \in Q_8$, existe un intervalo H para el cual $(y_1,y_2) \in H$, y

$$g^*(y_1,y_2) < \frac{1}{|H|}\int_H g(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta + \varepsilon =$$

$$= \frac{1}{|H|}\int_{H\cap I} g(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta + \varepsilon \leqslant \frac{1}{|H\cap S|}\int_{H\cap I} g(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta + \varepsilon$$

$$\leq \frac{1}{|H\cap S|} \int_{H\cap S} f(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta + \varepsilon \leq f^*(p_2,q_1) + \varepsilon,$$

pues si H es un intervalo, tal que $|H \cap I| > 0$ y $(y_1,y_2) \in H \cap Q_8$, entonces

$$(p_2,q_1) \in H \cap S \qquad \text{(ver Fig. 1; Fig. 2)}$$

Por lo tanto $g^*(y_1,y_2) \leq f^*(p_2,q_1)$ pp en Q_8.

Sea D un conjunto acotado

$$\int_{D\cap Q_8} g^* \leq f^*(p_2,q_1)|D \cap Q_8| < +\infty \quad \text{pues} \quad (p_2,q_1) \in \Lambda.$$

El procedimiento es análogo con $D \cap Q_6$; $D \cap Q_1$; $D \cap Q_3$.

Sea $(y_1,y_2) \in Q_5$ y $g^*(y_1,y_2) < +\infty$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe H, tal que $(y_1,y_2) \in H$ siendo

$$g^*(y_1,y_2) < \frac{1}{|H|} \int_H g(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta + \varepsilon \leq$$

$$\leq \frac{1}{|H\cap S|} \int_{H\cap S} f(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta + \varepsilon \leq f^*(p_2,y_2)$$

Luego,

$$\int_{D\cap Q_5} g^*(y_1,y_2)dy_1dy_2 = \int_0^1 \Big(\int_{(D\cap Q_5)_{y_2}} g^*(y_1,y_2)dy_1\Big)dy_2 \leq$$

$$\leq \int_0^1 \Big(\int_{(D\cap Q_5)_{y_2}} f^*(p_2,y_2)dy_1\Big)dy_2 = \int_0^1 |(D\cap Q_5)_{y_2}|\, f^*(p_2,y_2)dy_2$$

$$= M \int_0^1 f^*(p_2,y_2)dy_2 < +\infty$$

pues (p_2,q_1), $(p_2,q_2) \in A$ y como D es acotado,

$$|(D \cap Q_5)_{y_2}| \leq M.$$

El procedimiento es análogo para $Q_4 \cap D$; $Q_7 \cap D$; $Q_2 \cap D$. Luego $\int_D (X_I f)^* < +\infty$.

<u>COROLARIO 5</u>. *Existe $f \in L\log^+ L$ tal que $f \notin L(\log^+ L)^2$, y tal que f^* es localmente integrable.*

<u>Demostración</u>. Es consecuencia inmediata del teorema precedente.

<u>TEOREMA 5</u>. *Sea $f \in L\log^+ L$, y sea f^* integrable en $\{f^* > 1\}$, si $\varphi(x) = x(\log^+ x)^2$ se cumple;*

$$\overline{\lim_N}\ \frac{1}{N^2}\int_{\{g_N^i\geq(f-k)\}\cap S}\varphi\left(\frac{f}{2}\right)d\theta\, d\eta < +\infty \qquad (i = 1,2),$$

siendo

$$g_N^1(\theta,\eta) = \sum_{k=1}^{N}\chi_{I_k}(\eta)\ \frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} f(\theta,\eta)\,d\eta$$

$$g_N^2(\theta,\eta) = \sum_{k=1}^{N}\chi_{I_k}(\theta)\ \frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} f(\theta,\eta)\,d\theta \quad ,$$

con I_k *intervalos disjuntos en* R *tales que* $\bigcup_{k=1}^{N} I_k = [0,1]$; $|I_k| = \frac{1}{N}$, *y* K:R → R *una función medible no negativa que verifica;* $\int_0^1 \varphi(k)dx < +\infty$.

Sea $\quad A = \{(y_1,y_2)/f^*(y_1,y_2) > \alpha\}$,

A_{y_1} es abierto y $A_{y_1} \neq R$ para casi todo y_1 pues A es un conjunto de medida finita.

Luego $A_{y_1} = \bigcup_{j\geq 1} Q_j$, siendo los conjunto Q_j cubos semi-abiertos, disjuntos y tales que para cada j se tiene,

$$1 \leq \frac{d(Q_j,\partial A_{y_1})}{\delta(Q_j)} < 3 \qquad \text{ver Teorema 4, Capítulo I}$$

(Teorema de cubrimiento de Whitney).

Luego, existe una expansión Q_j^* de Q_j con mismo centro que Q_j y tal que $|Q_j^*| = c_2\,|Q_j|$. Es claro que eligiendo convenientemente la constante c_2, que depende únicamente de la dimensión, se tiene

$Q_j^* \cap A_{y_1}^c \neq \emptyset$, y por lo tanto si $a < y_1 < b$

se tiene,

$$\frac{1}{|Q_j^*|}\int_{Q_j^*}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\theta,\eta)\,d\theta\right)d\eta \leqslant \alpha$$

luego,

$$|A_{y_1}| = \sum_{j\geqslant 1}|Q_j| \geqslant \frac{1}{\alpha . c_2}\sum_{j\geqslant 1}\int_{Q_j^*}\frac{1}{b-a}\int_a^b f \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\alpha . c_2}\int_{\bigcup_{j\geqslant 1} Q_j}\frac{1}{b-a}\int_a^b f = \frac{1}{\alpha . c_2}\int_{A_{y_1}}\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

luego,

$$(1)\quad |\{y_2/f^*(y_1,y_2) > \alpha\}| \geqslant \frac{c}{\alpha}\sup_{a<y_1<b}\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_{(f^*>\alpha)_{y_1}} f,$$

siendo c una constante que depende únicamente de la dimensión.

Por (1) y la hipótesis:

$$+\infty > \int_{(f^*>1)} f^* > \int_1^\infty |f^* > \alpha|\,d\alpha = \int\left(\int_1^\infty |(f^* > \alpha)_{y_1}|\,d\alpha\right)dy_1$$

$$\geqslant c\int\left(\int_1^\infty \left(\frac{1}{\alpha}\sup_{a<y_1<b}\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_{(f^*>\alpha)_{y_1}} f(\theta,\eta)\,d\eta\right)d\theta\right)d\alpha\right)dy_1$$

$$\geqslant c\int\left(\sup_{a<y_1<b}\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\int\left(\int_1^\infty f(\theta,\eta)\chi_{(f^*>\alpha)}(\eta)\cdot\frac{1}{\alpha}\,d\alpha\right)d\eta\right)d\theta\right)dy_1$$

$$= c\int\left(\sup_{a<y_1<b}\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\int f(\theta,\eta)\,\mathrm{Log}^+ f^*(y_1,\eta)\,d\eta\right)d\theta\right)dy_1$$

Para obtener mayor claridad en la notación sea $g_N^1(\theta,\eta) = g_N(\theta,\eta)$ definida al enunciar el teorema.

Claramente

$$f^*(y_1,\eta) \geqslant M_1 g_N(y_1,\eta) = \sum_{k=1}^N \chi_{I_k}(\eta)\, Mh_k(y_1)$$

(siendo $h_k(\theta) = \frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} f(\theta,y_2)\,dy_2$) pues

$$M_1 g_N(y_1,\eta) = \sup_{a<y_1<b} \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{N} \chi_{I_k}(\eta)\,\frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} f(\theta,y_2)dy_2\right)d\theta$$

$$= \sup_{a<y_1<b} \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(\theta,y_2)dy_2\right)d\theta = Mh_j(y_1) \quad \text{si} \quad \eta \in I_j$$

Luego

$$c\int \left(\sup_{a<y_1<b} \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int f(\theta,\eta)\log^+ f^*(y_1,\eta)d\eta\right)d\theta\right)dy_1 \geqslant$$

$$c\int \left(\sup_{a<y_1<b} \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_0^1 f(\theta\ \eta)\ \mathrm{Log}^+\ M_1 g_N(y_1,\eta)d\eta\right)d\theta\right)dy_1$$

$$= c\int \left(\sup_{a<y_1<b} \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Log}^+\ Mh_k(y_1)\int_{I_k} f(\theta,\eta)d\eta\right)d\theta\right)dy_1$$

$$= c\int \left(\sup_{a<y_1\leq b} \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{N}\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Log}^+\ Mh_k(y_1)\left(\frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} f(\theta,\eta)d\eta\right)\right)d\theta\right)dy_1$$

$$= c\int \frac{1}{N}\, M\left(\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{Log}^+\ Mh_k(y_1).h_k)\right)(y_1)dy_1 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{c}{2N^2}\int \sum_{k=1}^{N} h_k(y_1)(\mathrm{Log}^+\ h_k(y_1))^2 dy_1 \qquad \text{pues,}$$

$$\frac{1}{N} M(\mathrm{Log}^+ Mh_1(y_1).h_1) + \ldots + \frac{1}{N} M(\mathrm{Log}^+ Mh_N(y_1).h_N$$

$$\leqslant M\Big(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Log}^+ Mh_k(y_1).h_k\Big) \qquad \text{y}$$

$$\int (\mathrm{Log}^+ Mh_k).Mh_k \, dy_1 \geqslant \int_1^{\infty} (1+\log^+\alpha)|Mh_k > \alpha| d\alpha \geqslant$$

$$\geqslant \text{cte} \int_1^{\infty} \Big(\frac{1+\log^+\alpha}{\alpha}\Big) \int_{(h_k>\alpha)} h_k(y_1)dy_1 \, d\alpha \geqslant$$

$$\geqslant \text{cte} \int_0^1 \Big(\int_1^{h_k} \frac{\log^+\alpha}{\alpha} d\alpha\Big) h_k \, dy_1 = \frac{\text{cte}}{2} \int_0^1 h_k(y_1)(\log^+ h_k(y_1))^2 dy_1$$

En consecuencia si $k:R \to R$ es la función antes definida;

$$\frac{c}{2N^2} \int_0^1 \sum_{k=1}^{N} h_k(y_1)(\log^+ h_k(y_1))^2 dy_1 \geqslant \frac{c}{2N^2} \sum_{k=1}^{N} \int_{\{h_k \geqslant f-k\}\cap S} (f-k)(\mathrm{Log}^+(f-k))^2 dy_1 dy_2$$

$$\geqslant \frac{c}{2N^2} \int_{(\bigcup_{k=1}^{N} \{h_k \geqslant f-k\})\cap S} (f-k)(\mathrm{Log}^+(f-k))^2 dy_1 dy_2 \geqslant \frac{c}{2N^2} \int_{\{g_N \geqslant (f-k)\}\cap S} (f-k)(\mathrm{Log}^+(f-k))^2 dy_1 dy_2$$

por definición de g_N.

Sea $\varphi(x) = x(\log^+ x)^2$. Como φ es convexa entonces

$$\frac{c}{N^2}\int_{\{g_N\geq f-k\}\cap S}\frac{1}{2}\varphi(f-k)dy_1dy_2 \geq \frac{c}{N^2}\int_{\{g_N\geq f-k\}\cap S}[\varphi(\tfrac{f}{2})-\frac{\varphi(k)}{2}]dy_1dy_2 ,$$

luego,

$$\frac{c}{N^2}\int_{\{g_N\geq f-k\}\cap S}\varphi(\tfrac{f}{2})dy_1dy_2 \leq \frac{c}{N^2}\int_{\{g_N\geq f-k\}\cap S}\frac{1}{2}\varphi(f-k)dy_1dy_2 +$$

$$+\frac{c}{2N^2}\int_0^1\varphi(k)dy_1 < \int_{(f^*>1)} f^*\, dy_1dy_2 + \frac{c}{2N^2}\int\varphi(k) < +\infty.$$

<u>COROLARIO 6</u>. *Sea* $f:R^2 \to R$ *una función que satisface lo siguiente:*

$V_0^1\,[f(\theta,.)] < k(\theta)$ *para todo* $\theta \in [0,1]$, o

$V_0^1\,[f(.,\eta)] < k(\eta)$ *para todo* $\eta \in [0,1]$, *siendo*

$V_0^1\,[f(\theta,.)]$ *y* $V_0^1\,[f(.,\eta)]$ *las variaciones en* $[0,1]$ *de*

$f(\theta,.)$ *y de* $f(.,\eta)$ *respectivamente, y* $k:R \to R$ *tal que*

$\int_0^1 k(\mathrm{Log}^+k)^2 < +\infty$, $k \geq 0$. *Supongamos además que*

$f \in L \log^+ L$. *Luego* $f \in L(\log^+ L)^2$, *si y sólo si* f^* *es integrable en* $\{f^* > 1\}$.

Supongamos que $V_0^1 [f(\theta,.)] < k(\theta)$ para todo $\theta \in [0,1]$ y $\int_{(f^*>1)} f^* < +\infty$, luego

$$|f(\theta,\eta)-g_N(\theta,\eta)| = \left|f(\theta,\eta)-\sum_{k=1}^{N} \frac{\chi_{I_k}(\eta)}{|I_k|} \int_{I_k} f(\theta,y_2)dy_2\right| =$$

$$= \left|f(\theta,\eta) - \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(\theta,y_2)dy_2\right| \quad (\text{si } \eta \in I_j) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} |f(\theta,\eta)-f(\theta,y_2)|dy_2 \leqslant V_0^1 [f(\theta,.)] < k(\theta)$$

para todo $(\theta,\eta) \in S$.

Luego $\{g_N \geqslant (f-k)\} \cap S = S$ para todo $N \geqslant 1$

En consecuencia $\int \varphi(\frac{f}{2})dy_1dy_2 < +\infty$.

Ahora si $f \in L(\log^+ L)^2$ la desigualdad

$$|\{(y_1,y_2)/f^*(y_1,y_2) > 4\alpha\}| \leqslant \frac{c}{\alpha}\int f(\log^+\frac{f}{\alpha})dy_1dy_2 \qquad \text{Ver [4]}$$

prueba la propiedad recíproca.

<u>Puntos de excentricidad absoluta.</u>

<u>Observaciones</u>: Sea $f \in L^1(R^2)$ y $f \not\equiv 0$. Si (y_1,y_2) es un punto

tal que $S_{y_1} = S_{y_2} = \emptyset$ luego (y_1,y_2) no puede ser de *semi-excentricidad absoluta*. Por lo tanto, tampoco puede ser de *excentricidad absoluta*.

<u>TEOREMA 6</u>. *Sea* $L^1_{\geq 0}(R^2) = \{f \in L^1(R^2)/f \geq 0$ y sop $f \subseteq S\}$

$H = \{f \in L^1_{\geq 0}(R^2)/$ casi todo punto de f en S es de excentricidad absoluta$\}$.

Luego H es de segunda categoría en $L^1_{\geq 0}(R^2)$. *Más explícitamente,* H^c *es de primera categoría en* $L^1_{\geq 0}(R^2)$.

Sea $E^M_L = \{f \in L^1_{\geq 0}(R^2)/|A^M_f| \geq \frac{1}{L}\}$, donde A^M_f denota el conjunto de todos los puntos $(y_1,y_2) \in S$ de *M-excentricidad parcial* para f.

Las siguientes condiciones se verifican:

i) E^M_L es cerrado en $L^1(R^2)$.

ii) E^M_L es nunca denso en $L^1_{\geq 0}(R^2)$.

i) Sea $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq E^M_L$ tal que $f_n \overset{L^1}{\to} f$.

Sea $R_M = \{I$ intervalos $/ \frac{1}{M} \leq \frac{|I_1|}{|I_2|} \leq M,\ I=I_1\times I_2\}$

y sea

$$f^M(y_1,y_2) = \sup_{\substack{(y_1,y_2)\in I \\ I \in R_M}} \frac{1}{|I|} \int_I f(\theta,\eta)\,d\theta\,d\eta .$$

Claramente, $(y_1,y_2) \in A^M_f$ si, y sólo si $f^M(y_1,y_2) = f^*(y_1,y_2)$

Se cumple

$$|\{(y_1,y_2)/|f_n^M-f^M| > \alpha\}| \leqslant |\{(y_1,y_2)/(f_n-f)^M > \alpha\}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c.M}{\alpha} \int |f_n-f| \to 0,$$

siendo c una constante que depende únicamente de la dimensión, luego $f_n^M \overset{m}{\to} f^M$, en consecuencia existe una subsucesión $(f_n^M)_{n\geq 1}$ tal que $f_n^M \to f^M$ pp

Sea $\varphi_n = \inf_{k\geqslant n} f_k$, $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f_n$ y $\varphi_n \nearrow f$. Luego $\varphi_n^* \nearrow f^*$. Veamos esto; sea $(y_1,y_2) \in R^2$ y $\beta \in R$, $\beta > 0$ tal que $f^*(y_1,y_2) > \beta$, luego existe un intervalo I tal que $\frac{1}{|I|}\int f > \beta$, $(y_1,y_2) \in I$, además $\frac{1}{|I|}\int_I \varphi_n \to \frac{1}{|I|}\int_I f$, por lo que $\frac{1}{|I|}\int_I^I \varphi_n > \beta$ si $n \geqslant n_0$. En consecuencia, $\varphi_n^*(y_1,y2) > \beta$ si $n \geqslant n_0$. Por este razón es $\lim_n \varphi_n^*(y_1,y_2) \geqslant f^*(y_1,y_2)$, se concluye entonces que $\lim_n \varphi_n^*(y_1,y_2) = f^*(y_1,y_2)$ para todo $(y_1,y_2) \in R^2$.

Sea $A = \overline{\lim_n} A_{f_n}^M$ y

$$B = \{(y_1,y_2)/f_n^M(y_1,y_2) \neq f^M(y_1,y_2)\},$$

luego $|B| = 0$.

Como $|A| = |\overline{\lim} A_{f_n}^M| \geqslant \overline{\lim} |A_{f_n}^M| \geqslant \frac{1}{L}$, es $|A-B| = |A| \geqslant \frac{1}{L}$.

Sea $(y_1,y_2) \in A-B$, luego $(y_1,y_2) \in \bigcup_{j\geq 1} A_{f_{n_j}}^M$ y $(y_1,y_2) \notin B$ por lo que

$$\varphi^*_{n_j}(y_1,y_2) \leqslant f^*_{n_j}(y_1,y_2) = f^M_{n_j}(y_1,y_2) \qquad \text{y}$$

$$f^*(y_1,y_2) = \lim_j \varphi^*_{n_j}(y_1,y_2) \leqslant \lim_j f^M_{n_j}(y_1,y_2) = f^M(y_1,y_2);$$

que implica que $f^*(y_1,y_2) = f^M(y_1,y_2)$ para todo $(y_1,y_2) \in A-B$. En consecuencia $A-B \subseteq A^M_f$ y $|A^M_f| \geqslant |A-B| \geqslant \frac{1}{L}$.

ii) E^M_L es nunca denso en $L^1_{\geqslant 0}(R^2)$:

Dado $\varepsilon > 0$, si $V_\varepsilon(f) = \{g \in L^1_{\geqslant 0}(R^2)/\|g-f\|_1 < \varepsilon\}$ veamos que $V_\varepsilon(f) \cap L\log^+ L \not\subseteq E^M_L \cap L\log^+ L$.

Se define para $N \geqslant 1$, $H \in N$

$$g_N(y_1,y_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\dfrac{|S_k|}{|E_k|} & \text{si} \quad (y_1,y_2) \in E_k \\ \\ 0 & \text{si} \quad (y_1,y_2) \notin E_k \quad (k \geqslant 1) \end{cases}$$

siendo $\dfrac{|S_k|}{|E_k|} = H\,\alpha(H)$ $(k \geqslant 1)$ S_k, E_k intervalos $\alpha(H) = \sum_{k=1}^{H} \frac{1}{k} \sim \log H$; $|\bigcup_{k\geqslant 1} S_k| = 1$ y $\bigcup_{k\geqslant 1} E_k \subseteq S$.

(Construcción de Bohr; Ver Teorema 2, Capítulo I). Dado $\varepsilon > 0$, sea $\tilde{f}$ una función simple tal que $0 \leqslant \tilde{f} \leqslant f$ y $\|\tilde{f}-f\|_1 < \varepsilon/_2$. Luego $\tilde{f} + g_N \xrightarrow[N\to\infty]{L^1} f$, dado que $g_N \xrightarrow[N\to\infty]{L^1} 0$.

$\tilde{f}+g_N \in L\log^+ L$, $\tilde{f}+g_N \in L^1_{\geqslant 0}(R^2)$ y $\|(\tilde{f}+g_N)-f\|_1 < \varepsilon$ si $N \geqslant N_\varepsilon$.

Falta ver que $\tilde{f}+g_N \notin E^M_L$ si $N \geqslant N_0$. Se sabe que

$$(1) \qquad |\{(y_1,y_2)/g^M_N(y_1,y_2) > \alpha\}| \underset{N\to\infty}{\to} 0, \quad \text{para todo} \quad \alpha > 0,$$

y para casi todo (y_1,y_2), existe un intervalo I_N para el cual (para H suficientemente grande)

$$(2) \qquad \frac{1}{|I_N|}\int_{I_N} g_N > N, \text{ y } \quad (y_1,y_2) \in I_N \quad \text{Ver Teorema 3, Capítulo I}$$

Ahora dado $\alpha > 0$, $Q \in R_M$ con $(y_1,y_2) \in Q$, existe cierta subsucesión $(g_N)_{N\geqslant 1}$ $(N \geqslant 1)$ tal que por (1)

$$|\{(y_1,y_2)/g^M_N(y_1,y_2) > \alpha\}| < \frac{1}{2^{N+1}.L}$$

Además, si $N > R+\alpha$ donde $R = \|\tilde{f}\|_\infty$, se tiene usando (2) que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q g_N + \frac{1}{|Q|}\int_Q \tilde{f} \leqslant g_N^M(y_1,y_2) + R \leqslant \alpha+R < N <$$

$$< \frac{1}{|I|}\int_I g_N < \frac{1}{|I|}\int_I g_N + \frac{1}{|I|}\int_I \tilde{f},$$

si $(y_1,y_2) \notin \{(y_1,y_2)/g_N^M(y_1,y_2) > \alpha$ para algûn $N \geqslant 1\} = B$

Luego, para casi todo $(y_1,y_2) \in B^c = S-B$, dado $Q \in R_M$ tal que $(y_1,y_2) \in Q$, existe un intervalo I_N siendo $(y_1,y_2) \in I_N$ que satisface,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \tilde{f}+g_N \leqslant \alpha+R < \frac{1}{|I_N|}\int_{I_N} \tilde{f}+g_N \quad \text{para} \quad N > R+\alpha.$$

$I_N \notin R_M$ si $N > R+\alpha$, pues si se cumple a la vez que

$$\frac{1}{|I_N|}\int_{I_N} g_N > N \quad \text{y} \quad I_N \in R^M \quad \text{para algûn} \quad N > R+\alpha$$

entonces $g_N^M(y_1,y_2) > N > R+\alpha \geqslant \alpha$ siendo $(y_1,y_2) \notin B$; lo que es absurdo.

Por lo tanto casi todo $(y_1,y_2) \in B^c$ no esta en $A^M_{\tilde{f}+g_N}$ si $N > R+\alpha$, y $|B^c| \geqslant 1 - \frac{1}{2L}$ pues $|B| \leqslant \frac{1}{2L}$.

En consecuencia $|A^M_{\tilde{f}+g_N}| < \frac{1}{L}$ si $N > R+\alpha$.

Se concluye que,

$$\tilde{f}+g_N \notin E_L^M \quad \text{si} \quad N > \|f\|_\infty+1 \qquad (\text{se elige } \alpha < 1)$$

Por lo tanto $V_\varepsilon(f) \cap L\log^+L \not\subseteq E_L^M \cap L\log^+L$, con lo que $V_\varepsilon(F) \not\subseteq \overline{E_L^M} = E_L^M$.

Como $H^c = \bigcup_{L,M\geq 1} E_L^M$, la tesis se verifica.

<u>Problema abierto</u>: Existe $f \in L\log^+L$, con sop $f \subseteq S$, tal que casi todo punto de f en S es de *excentricidad absoluta*.

<u>*TEOREMA 7*</u>. *Sea* $C = \{ \sum_{n\in L} \frac{H(n)\mathrm{Log}\,H(n)}{n}\, \chi_{\bigcup_{k\geq 1} E_k^n}(y_1,y_2) : L \in P_f(N)\}$

siendo $P_f(N)$ *la clase de todos los subconjuntos finitos de N,* E_k^n *los cubos que se utilizan en la construcción de Bohr y* $g_n = \frac{H(n)\mathrm{Log}\,H(n)}{n}\, \chi_{\bigcup_{k\geq 1} E_k^n}$ *las funciones definidas en el Teorema 6.*

Luego existe $f \in \overline{C}$ *tal que casi todo punto* $(y_1,y_2) \in S$ *es de excentricidad absoluta para* f. (Ver Capítulo I, Teorema 2) ($\overline{C}$ es la clausura de C en $L^1_{\geq 0}(R^2)$).

Considero los conjuntos $(E_L^M)_{L,M\geq 1}$ definidos en el teorema 6.

Obviamente i) $\overline{C} \cap E_L^M$ es cerrado $(L,M \geq 1)$

Veamos que ii) $\overline{C} \cap E_L^M$ es nunca denso en $L^1_{\geq 0}(R^2)$ $(L,M \geq 1)$

Sea $\varepsilon > 0$ y $f \in \overline{C} \cap E_L^M$.

Sea $\tilde{f} \in C$ tal que $\|f-\tilde{f}\|_1 < \varepsilon/2$.

Como $\tilde{f} \in L^\infty$ con los mismos argumentos del teorema 6 para N suficientemente grande $\tilde{f}+g_N \notin E_L^M$ pero $\tilde{f}+g_N \in C$. Esta última afirmación se verifica tomando $N > \max L$ siendo

$\tilde{f} = \sum_{n \in L} \frac{H(n) \operatorname{Log} H(n)}{n} \chi_{\cup E_k}(y_1, y_2)$; $L \in P_f(N)$. Además

$\|\tilde{f}+g_N-f\|_1 < \|\tilde{f}-f\|_1 + \|g_N\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ si $N \geq N_\varepsilon$.

Luego para N suficientemente grande

$\tilde{f}+g_N \in V_\varepsilon(f) \cap \overline{C}$ y $\tilde{f}+g_N \notin E_L^M$ con lo que

$V_\varepsilon(f) \cap \overline{C} \nsubseteq E_L^M \cap \overline{C}$

Entonces como se verifican las condiciones i) y ii) y $\overline{C}$ es completo

$\bigcup_{L,M \geq 1} \overline{C} \cap E_L^M \subsetneq \overline{C}$ o sea que existe

$f \in \overline{C}$ tal que $f \notin \bigcup_{L,M \geq 1} E_L^M$.

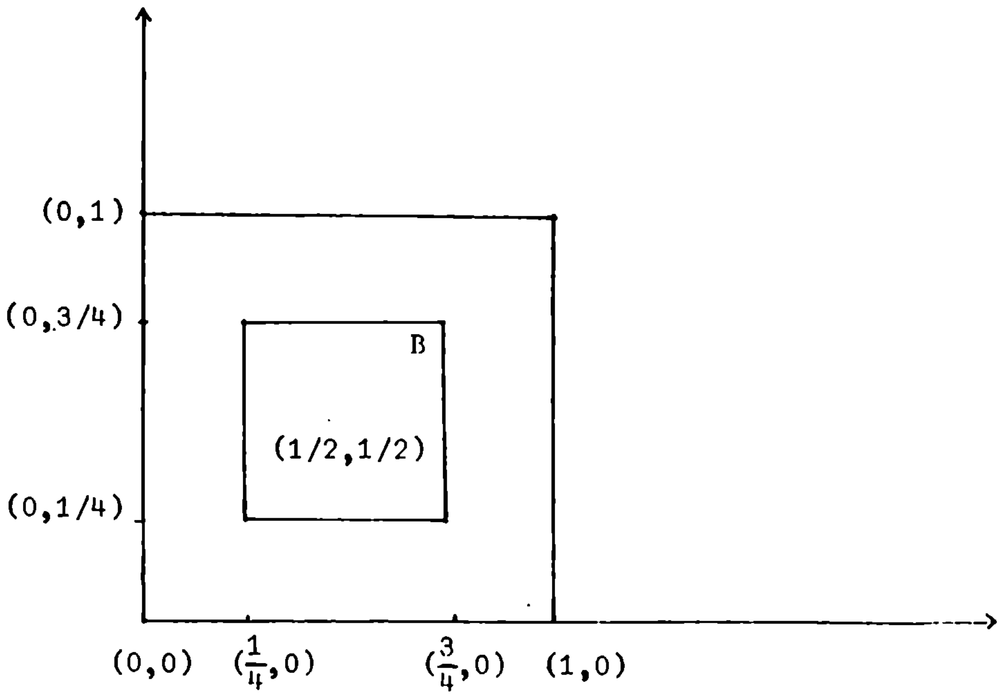
CAPITULO III

<u>TEOREMA</u>. *Existe una función $f \in L\log^+ L$ tal que $f \notin L(\log^+ L)^2$ y tal que f^* es integrable en el conjunto* $\{(x,y)/f^*(x,y) > 1\}$.

<u>Demostración</u>

Sea $B = \{(x,y)/\mathrm{Max}(|x-1/2|;\ |y-1/2| \leq 1/4\}$

Fig. 1



Se considera la rotación en un ángulo $\pi/4$ centrada en $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

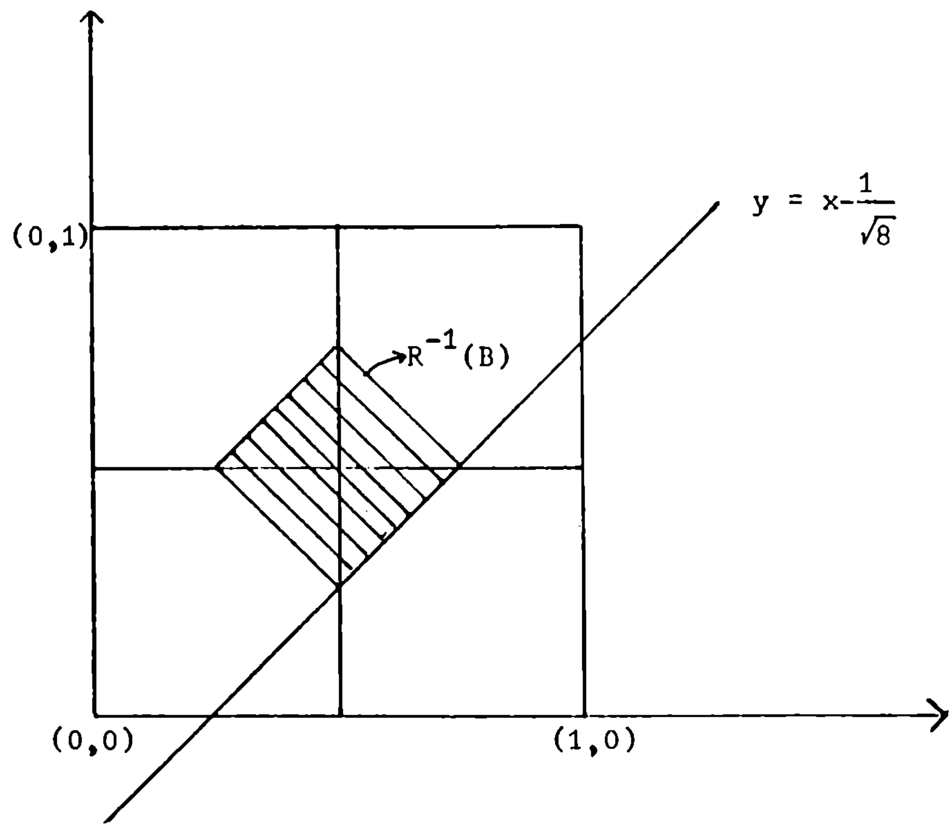
$$R(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}(x+y)+1}{2},\ \frac{\sqrt{2}(y-x)+1}{2}\right) \qquad \text{sea}$$

$$g(x,y) = \frac{\chi_B(x,y)}{(y-1/4)|\log(y-1/4)|^3}; \text{ y sea } f:R^2 \to R \text{ definida por}$$

$$f(x,y) = goR(x,y) = \frac{\chi_B\left(\frac{\sqrt{2}(x+y)+1}{2}, \frac{\sqrt{2}(y-x)+1}{2}\right)}{\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4}\left|\log\left(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4}\right)\right|^3} =$$

$$= \frac{\chi_{R^{-1}(B)}(x,y)}{\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4}\left|\log\left(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4}\right)\right|^3}$$

, 2

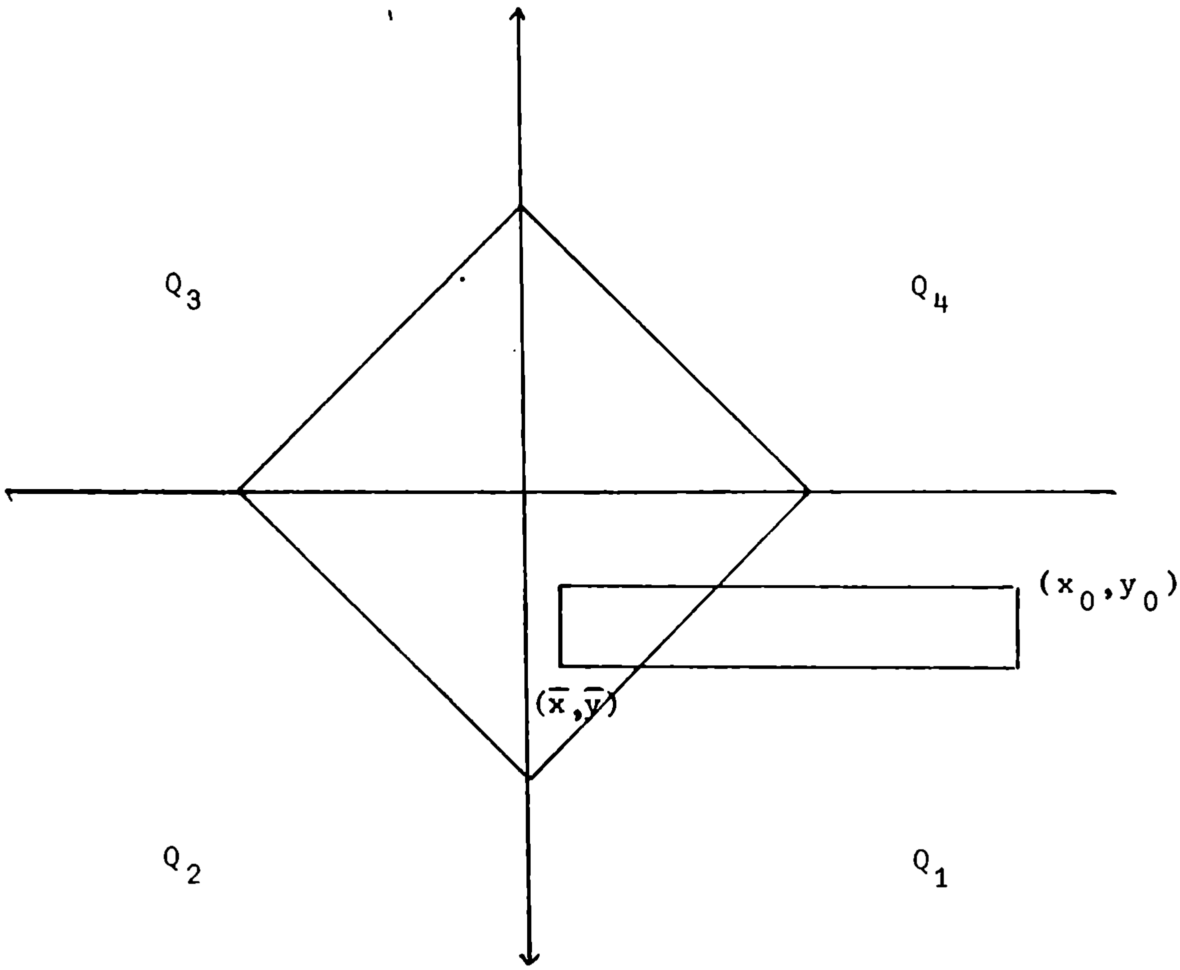


f es infinita en $C = \{(x,y)/\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{8}};\ y = x - \frac{1}{\sqrt{8}}\}$ y es decreciente en las rectas perpendiculares a C que estan incluidas en $R^{-1}(B)$.

Veamos que $\{(x,y)/f^*(x,y) > 1\}$ es acotado.

Para probar esto será suficiente calcular promedios sobre intervalos I con lado mayor paralelo al eje x y tal que $I \subseteq Q_1$

3



siendo $(\bar{x},\bar{y})$, $(\bar{x},y_0) \in \{(x,y)/\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant y + \frac{1}{\sqrt{8}};\ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{8}} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\}$

y

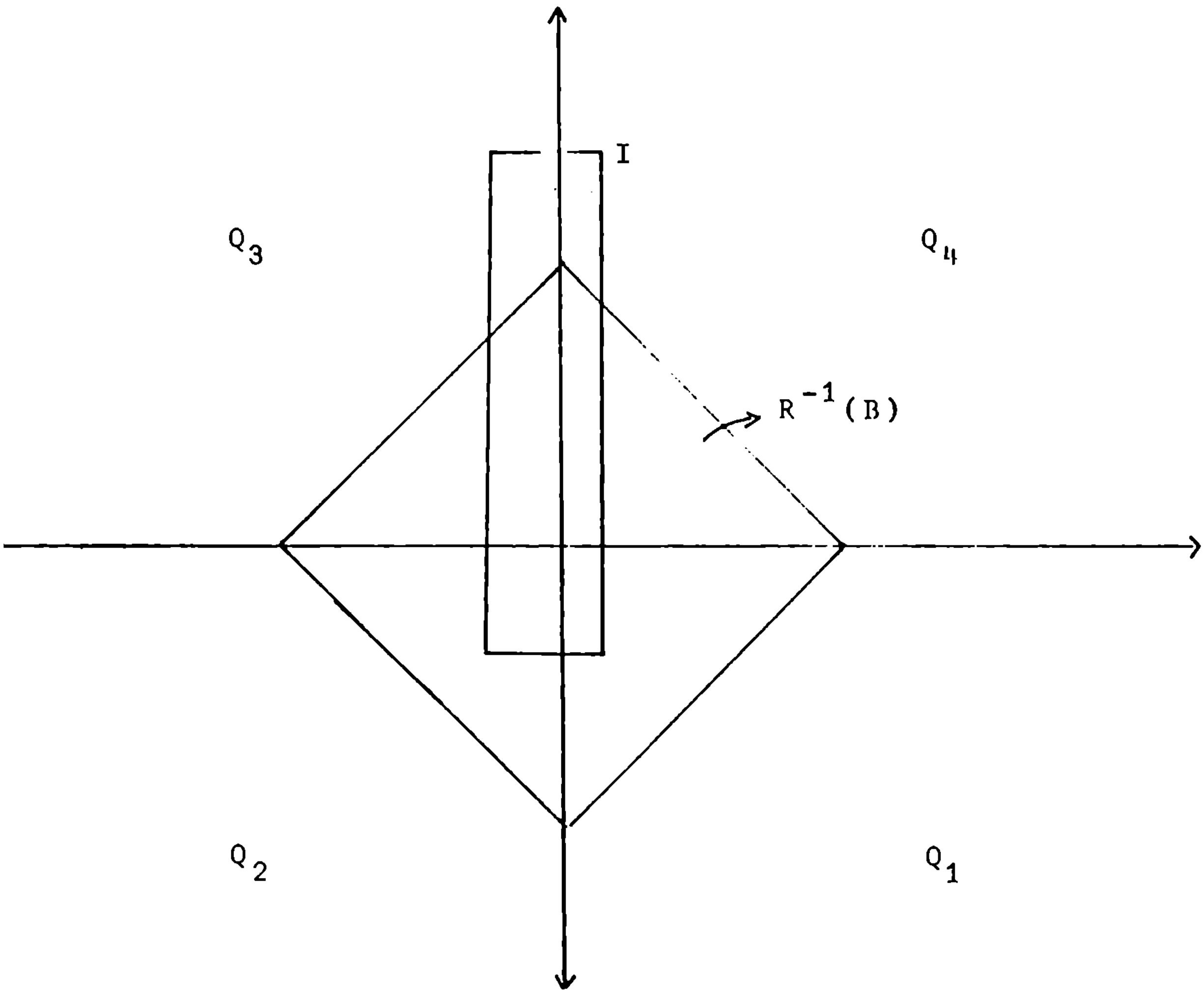
$$Q_1 = \{(x,y)/x \geqslant \tfrac{1}{2};\ y \leqslant \tfrac{1}{2}\} \qquad Q_2 = \{(x,y)/x \leqslant \tfrac{1}{2};\ y \leqslant \tfrac{1}{2}\}$$

$$Q_3 = \{(x,y)/x \leqslant \tfrac{1}{2};\ y \geqslant \tfrac{1}{2}\} \qquad Q_4 = \{(x,y)/x \geqslant \tfrac{1}{2};\ y \geqslant \tfrac{1}{2}\}$$

Veamos esta última afirmación:

Dado un promedio sobre un intervalo I que no es como el que se indica en la Fig. 3, más explícitamente $I \nsubseteq Q_1$ o lado mayor que no es paralelo al eje x como se indica en la Fig. 4.)

Fig. 4



se considera el intervalo $\tilde{I}$ que satisface;

i) $|\tilde{I}| = |I|$

ii) Sea $e(I) = \dfrac{\text{longitud del lado mayor de } I}{\text{longitud del lado menor de } I}$, luego $e(I) = e(\tilde{I})$

iii) $h_i(I \cap R^{-1}(B) \cap Q_i) = \tilde{I} \cap R^{-1}(B) \cap Q_{\pi(i)}$ $(i = 1,2,3,4)$ siendo $\pi:\pi_4 \to \pi_4$ una permuación, $\pi_4 = \{1,2,3,4\}$ y siendo las funciones h_i composiciones de S_x (simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{2}$), S_y (simetría respecto de la recta $x = \frac{1}{2}$) y S (simetría respecto de la recta $y = -x+1$), pudiendo repetirse en la composición alguna de las simetrías o pudiendo cualquiera de ellas no ser usadas.

iv) $\max\limits_{i\in\pi_4} |Q_i \cap I \cap R^{-1}(B)| = |Q_1 \cap \tilde{I} \cap R^{-1}(B)|$

v) Lado mayor de $\tilde{I}$ paralelo al eje x

Existe un único $\tilde{I}$ asociado a I que satisface estas 5 propiedades.

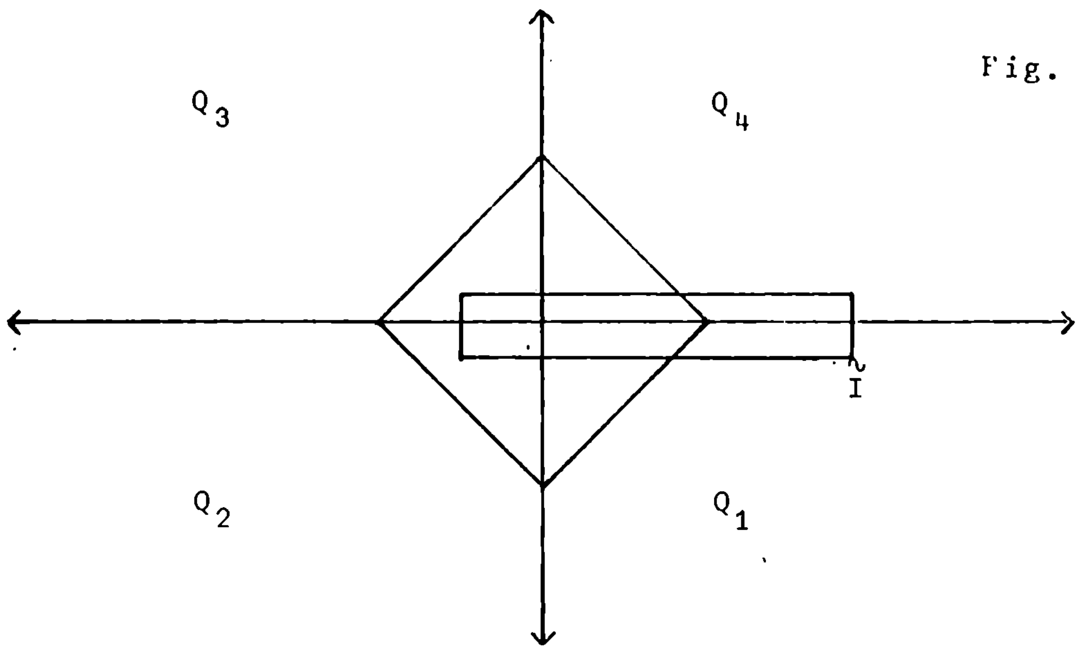


Fig. 5

Supongamos que $\displaystyle\int_{I\cap Q_i\cap R^{-1}(B)} f \leqslant \int_{\tilde{I}\cap Q_1\cap R^{-1}(B)} f \qquad (i = 1,2,3,4)$

que será demostrado enseguida. Luego,

$$\frac{1}{|I|}\int_{I\cap R^{-1}(B)} f = \frac{1}{|\tilde{I}|}\int_{I\cap R^{-1}(B)} f = \frac{1}{|\tilde{I}|}\sum_{i=1}^{4}\int_{I\cap Q_i\cap R^{-1}(B)} f \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{|\tilde{I}|}\int_{\tilde{I}\cap Q_1\cap R^{-1}(B)} f \leqslant \frac{4}{|\tilde{I}\cap Q_1|}\int_{(\tilde{I}\cap Q_1)\cap R^{-1}(B)} f$$

a) Si $(\overline{x},\overline{y}) \in Q_3 \cap I \cap R^{-1}(B)$ (ver Figs. 4,5 y 2)

$$f(\overline{x},\overline{y}) \leqslant f(S_x(\overline{x},\overline{y}) \leqslant f(S_yS_x(\overline{x},\overline{y})) = f(SS_yS_x(\overline{x},\overline{y}))$$

pues cuando $a \in Q_1 \cap R^{-1}(B)$, $f(a) = f(Sa)$. Además,

$$SS_yS_x(Q_3 \cap I \cap R^{-1}(B)) \subseteq Q_1 \cap \tilde{I} \cap R^{-1}(B)$$ por propiedades iii) y iv)

b) Similarmente si $(\overline{x},\overline{y}) \in Q_4 \cap I \cap R^{-1}(B)$, es

$$f(\overline{x},\overline{y}) \leqslant f(S_x(\overline{x},\overline{y})) = f(SS_x(\overline{x},\overline{y})),$$ y

$$SS_x(Q_4 \cap I \cap R^{-1}(B)) \subseteq Q_1 \cap \tilde{I} \cap R^{-1}(B)$$ por propiedades iii) y iv)

Se usa la simetría S cuando el lado mayor de $I \cap Q_i$ $(i = 1,2,3,4)$ es paralelo al eje y como en la Fig. 4).

c) Si $(\overline{x},\overline{y}) \in Q_2 \cap I \cap R^{-1}(B)$, es

$$f(\overline{x},\overline{y}) \leqslant f(S_y(\overline{x},\overline{y})) = f(SS_y(\overline{x},\overline{y}))$$ y

$$SS_y(Q_2) \cap I \cap R^{-1}(B)) \subseteq Q_1 \cap \tilde{I} \cap R^{-1}(B)$$

d) Si $(\overline{x},\overline{y}) \in Q_1 \cap I \cap R^{-1}(B)$

$$f(\overline{x},\overline{y}) = f(S(\overline{x},\overline{y})) \quad y$$

$$S(Q_1 \cap I \cap R^{-1}(B)) \subseteq Q_1 \cap \tilde{I} \cap R^{-1}(B)$$

Usando a) se tiene,

$$\int_{Q_3 \cap I \cap R^{-1}(B)} f(\overline{x},\overline{y}) \leqslant \int_{Q_3 \cap I \cap R^{-1}(B)} f(SS_yS_x(\overline{x},\overline{y})) \leqslant \int_{Q_1 \cap \tilde{I} \cap R^{-1}(B)} f(\overline{x},\overline{y})$$

Igualmente en los casos b; c) y d).

Consideremos ahora un promedio sobre un intervalo $I \subseteq Q_1$ con lado mayor paralelo al eje x. Se tiene,

$$\frac{1}{|I|} \int_{I \cap R^{-1}(B)} \frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4}\right) \left|\mathrm{Log}\left(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4}\right)\right|^3} \, dxdy =$$

$$= \frac{1}{|I|} \int_{\overline{y}}^{y_0} dy \int_{\overline{x}}^{y+\frac{1}{\sqrt{8}}} \frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4}\right) \left|\mathrm{Log}\left(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4}\right)\right|^3} \, dx$$

(Ver Fig. 3)

Como

$$\int_{\beta}^{\alpha} \frac{dx}{(ax+b)\,|\mathrm{Log}(ax+b)|^3} = \frac{1}{2a(\mathrm{Log}(ax+b))^2}\Bigg|_{\beta}^{\alpha} \quad \text{si } 0 < \beta < \alpha < \frac{1-b}{a}$$

se tiene,

$$\frac{1}{|I|}\int_{\bar{y}}^{y_0} - \frac{1}{\sqrt{2}}\, \frac{1}{[\log(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4})]^2}\Bigg|_{\bar{x}}^{y+\frac{1}{\sqrt{8}}} =$$

$$= \frac{1}{(x_0-\bar{x})(y_0-\bar{y})\sqrt{2}} \int_{\bar{y}}^{y_0} \frac{dy}{[\log(\frac{2\sqrt{2}(y-\bar{x})+1}{4})]^2} \qquad |I| = (x_0-\bar{x})(y_0-\bar{y})$$

(Ver Fig. 3)

Como $(\bar{x},\bar{y})$; $(\bar{x},y_0) \in R^{-1}(B)$

si $\quad \bar{y} \leqslant y \leqslant y_0$, es $\mathrm{Max}(|\bar{x}+y|;|\bar{x}-y|) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$

En consecuencia,

$\frac{\sqrt{2}}{2}(y-\bar{x}) + \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1 \qquad$ por lo que

$$h(y) = \frac{1}{[\log(\frac{\sqrt{2}}{2}(y-\bar{x})+\frac{1}{4})]^2}$$ es creciente y acotada en

$[\bar{y},y_0]$, luego

$$\sup_{\bar{y}\leq y\leq y_0} \frac{1}{[\log(\frac{\sqrt{2}}{2}(y-\bar{x})+\frac{1}{4})]^2} = \frac{1}{[\log(\frac{\sqrt{2}}{2}(y_0-\bar{x})+\frac{1}{4})]^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{[\log(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{4})]^2} = \frac{1}{(\log 2)^2},$$ con lo que

$$\frac{1}{\sqrt{2}(x_0-\bar{x})(y_0-\bar{y})}\int_{\bar{y}}^{y_0} h(y)dy \leq \frac{1}{\sqrt{2}\,(\log 2)^2(x_0-\bar{x})} < 1$$

si $x_0-\bar{x} > \dfrac{1}{\sqrt{2}\,(\log 2)^2} \sim 1$

En consecuencia $\{f^* > 1\}$ es acotado.

$f \in L\log^+L$ y $f \notin L(\log^+L)^2$, pues $f = g\circ R$ siendo

$$g(x,y) = \frac{\chi_B(x,y)}{(y-1/4)|\log(y-1/4)|^3}$$ y $g \in L\log^+L$, $g \notin L(\log^+L)^2$.

Ahora veamos que

$$\int_{R^{-1}(B)} f^* < +\infty.$$

Si $a \in Q_3 \cap R^{-1}(B)$ se sabe ya que

(1) $$f^*(a) \leq 4 \sup_{I \subseteq Q_1} \frac{1}{|I|} \int_{I \cap R^{-1}(B)}$$ siendo

$S_y S_x a \in I \cap R^{-1}(B) \subseteq Q_1 \cap R^{-1}(B)$. Similarmente si $a \in Q_i \cap R^{-1}(B)$ $i = 1,2,4$.

Se afirma que para todo $a \in Q_1 \cap R^{-1}(B)$ es

(2) $$4 \sup_{a \in I \subseteq Q_1} \frac{1}{|I|} \int_{I \cap R^{-1}(B)} \leq \frac{32}{(\log 2)^2} f_R^*(a)$$

siendo f_R^* la función maximal sobre intervalos rotados en un ángulo $\pi/4$ en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Dado $a \in R^{-1}(B) \cap Q_1$, $f_R^*(a) = g^*(Ra)$.

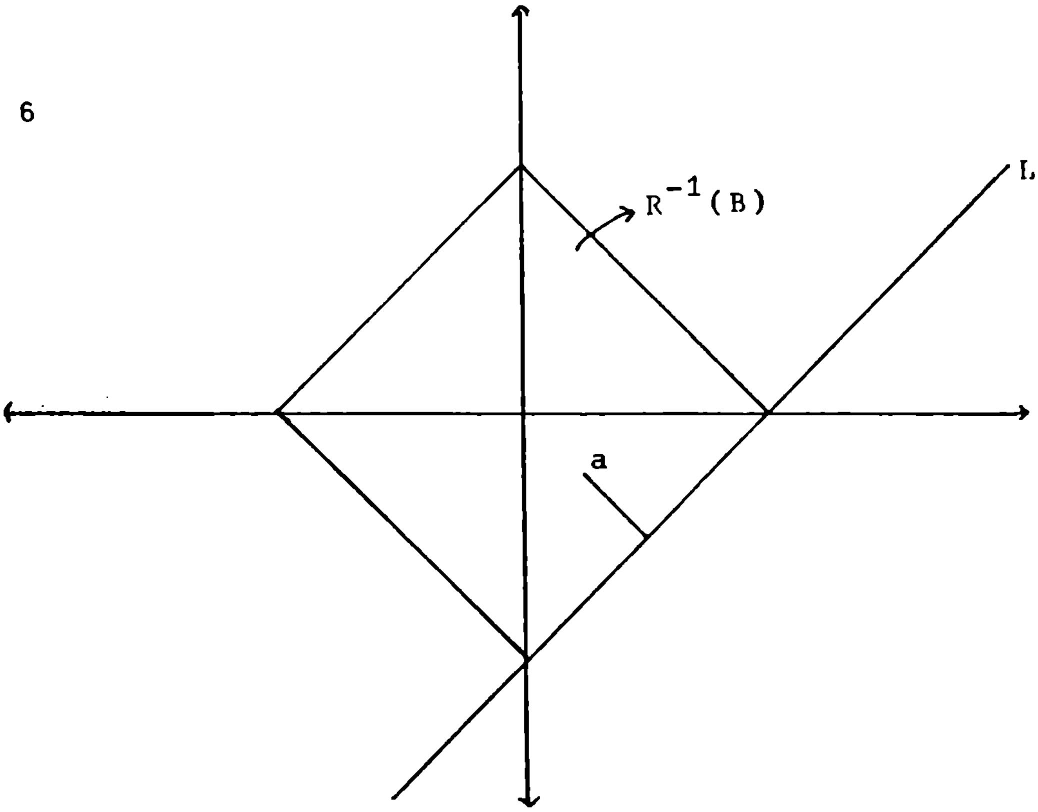
Si $Ra = (\alpha,\beta)$ luego

$$g^*(Ra) = \frac{-1}{(\beta-\frac{1}{4})} \int_{1/4}^{\beta} \frac{dy}{(y-1/4)[\log(y-1/4)]^3} =$$

$$= \frac{1}{2(\beta-\frac{1}{4})[\log(\beta-1/4)]^2} = \frac{1}{2d(a,L)[\log(d(a,L))]^2}$$

siendo $L = \{(x,y)/y = x - \frac{1}{\sqrt{8}}\}$

Fig. 6



y $d(a,L) = d(Ra,RL) = \beta - \frac{1}{4} = (\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) + \frac{1}{2}) - \frac{1}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) + \frac{1}{4}$ siendo $a = (x,y)$ y

$RL = \{(x,y)/y = 1/4\}$.

Luego,

$$f^*_R(x,y) = \frac{2}{2\sqrt{2}(y-x)+1} \cdot \frac{1}{[\log(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4})]^2} \cdot$$

Ahora dado un intervalo $I \subseteq Q_1$ con lado mayor paralelo al eje x es:

$$\frac{1}{|I|}\int_{I\cap R^{-1}(B)} f = \frac{1}{|I|}\int_{\bar{y}}^{\tilde{y}} dy \int_{\bar{x}}^{y+\frac{1}{\sqrt{8}}} \frac{dx}{\left(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4}\right)\left|\log\left(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4}\right)\right|^3}$$

$$+ \frac{1}{|I|}\int_{\tilde{y}}^{y_0} dy \int_{\bar{x}}^{x_0} \frac{dx}{\left(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4}\right)\left|\log\left(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4}\right)\right|^3} \qquad \text{(Ver Fig. 7)}$$

$$= \frac{1}{|I|}\int_{\bar{y}}^{\tilde{y}} \left.\frac{-1}{\sqrt{2}\left[\log\left(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4}\right)\right]^2}\right|_{\bar{x}}^{y+\frac{1}{\sqrt{8}}} dy \; +$$

$$+ \frac{1}{|I|}\int_{\tilde{y}}^{y_0} \left.\frac{-1}{\sqrt{2}\left[\log\left(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4}\right)\right]^2}\right|_{\bar{x}}^{x_0} dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\tilde{y}-\bar{y})}{\sqrt{2}(x_0-\bar{x})(y_0-\bar{y})} \cdot \frac{1}{\left[\log\left(\frac{2\sqrt{2}(\tilde{y}-\bar{x})+1}{4}\right)\right]^2} \; +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}\;|I|}\int_{\tilde{y}}^{y_0} \frac{dy}{\left[\log\left(\frac{2\sqrt{2}(\tilde{y}-\bar{x})+1}{4}\right)\right]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}(x_0-\bar{x})}\left[\frac{1}{\left[\log \frac{\sqrt{2}}{2}\ (x_0-\bar{x})\right]^2} \quad \frac{1}{\left[\log\left(\frac{2\sqrt{2}(y_0-x)+1}{4}\right)\right]^2}\right] =$$

(pues $\tilde{y} = x_0-\frac{1}{\sqrt{8}}$ (Ver Fig. 7))

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(x_0-\bar{x})}\left[\frac{1}{\left[\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ (x_0-\bar{x})\right)\right]^2} + \frac{1}{\left[\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ (x_0-\bar{x}+\delta)\right)\right]^2}\right] \qquad (4)$$

pues $y_0 = x_0-\frac{1}{\sqrt{8}} + \delta$ $(0 \leqslant \delta \leqslant 1/\sqrt{8})$ $\delta = y_0-\tilde{y}$.

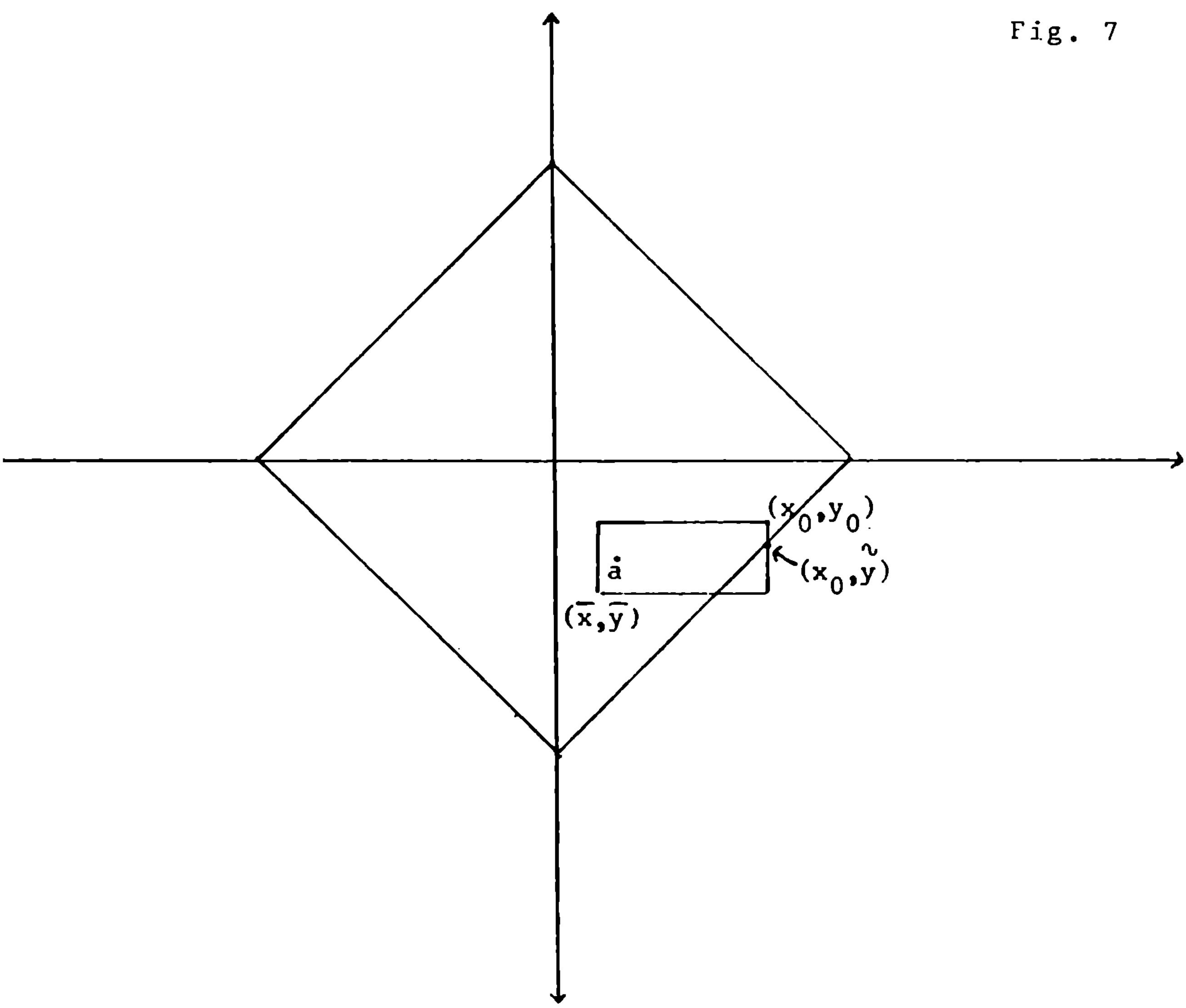


Fig. 7

Ahora $0 \leq \delta \leq y_0-\bar{y} \leq x_0-\bar{x}$ pues los promedios se toman sobre intervalos con lado mayor paralelo al eje x. Luego,

$$\frac{1}{[\log(\frac{\sqrt{2}}{2}(x_0-\bar{x}+\delta))]^2} \leq \frac{1}{[\log(\sqrt{2}(x_0-\bar{x}))]^2}$$

y usando (4) basta probar que

$$(5) \qquad \frac{2}{\sqrt{2}(x_0-\bar{x})} \cdot \frac{1}{[\log(\sqrt{2}(x_0-\bar{x}))]^2} \leq C\, f_R^*(a) =$$

$$= \frac{2C}{(2\sqrt{2}(y-x)+1)[\log(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4})]^2}$$

o equivalentemente

$$(6) \quad (\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4})[\log(\frac{2\sqrt{2}(y-x)+1}{4})]^2 \leq \frac{C}{4}\sqrt{2}(x_0-\bar{x})[\log(\sqrt{2}(x_0-\bar{x}))]^2$$

para cierta constante C que no depende de $a = (x,y)$. La función $x(\log x)^2$ es creciente en el intervalo $[0,1/e^2]$ y decreciente en $[1/e^2,1]$ con máximo $(\frac{2}{e})^2 < 1$ en $[0,1]$. Por otro lado es,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ (y-x) + 1/4 \leqslant \sqrt{2}\ (x_0-\overline{x}) \leqslant \sqrt{2}\ \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$ pues

como $x_0-\overline{x} \geqslant y_0-\tilde{y}$ luego

$(x_0-\overline{x})+\tilde{y}-y \geqslant y_0-y \geqslant 0 \geqslant \overline{x}-x$, por lo que

$y+\overline{x}-x \leqslant (x_0-\overline{x})+\tilde{y} = (x_0-\overline{x})+x_0-\frac{1}{\sqrt{8}}$ y en consecuencia

$$y - x + \frac{1}{\sqrt{8}} \leqslant 2(x_0-\overline{x})$$

Luego es suficiente que

$$\frac{C}{4}\ \frac{1}{2}\ (\log\ \frac{1}{2})^2 = 1 > (\frac{2}{e})^2$$ por lo tanto

es $C = \dfrac{8}{(\log\ 2)^2}$ con lo que se obtiene (2).

Usando (1) y (2) se obtiene,

$$\int_{R^{-1}(B)} f^* = \sum_{i=1}^{4} \int_{Q_i \cap R^{-1}(B)} f^* \leqslant \frac{128}{(\log\ 2)^2} \int_{Q_1 \cap R^{-1}(B)} f^*_R < +\infty$$

pues claramente,

$$\int_{R^{-1}(B)} f^*_R = \int_{R^{-1}(B)} g^*R = \int_B g^* < +\infty.$$

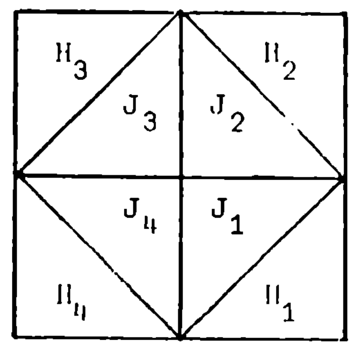
Ahora sea $R^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^{4} J_i$ y sean $S_i : H_i \to J_i$ las correspondientes simetrías. Obviamente si $a \in H_i$ luego $f^*(a) \leqslant f^*(S_i a)$ $(i = 1,2,3,4)$

Luego

$$\int_P f^* < +\infty \qquad \text{siendo}$$

$$P = R^{-1}(B) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{4} H_i\right)$$

Fig. 8



P

Sea

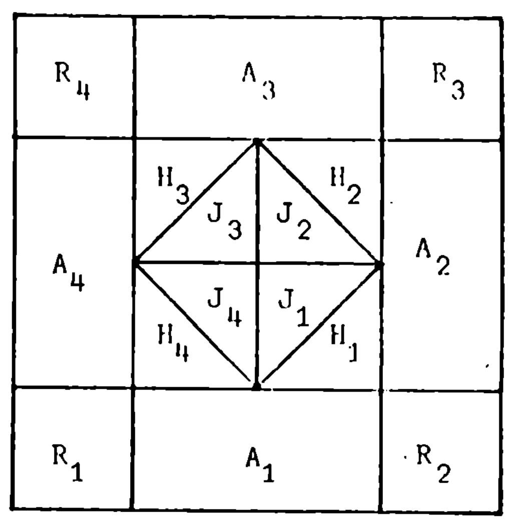
$S_1 = H_1 \cup J_1 \cup J_4 \cup H_4$

$S_2 = H_2 \cup J_2 \cup J_1 \cup H_1$

$S_3 = H_3 \cup J_3 \cup J_2 \cup H_2$

$S_4 = H_4 \cup J_4 \cup J_3 \cup H_3$

Fig.



y sean

$S_i : A_i \to S_i$ las correspondientes simetrías. Claramente $f^*(a) \leqslant f^*(S_i a)$ si $a \in A_i$, $(i = 1,2,3,4)$.

Lo mismo ocurre con R_i y los cubos $(H_i \cup J_i)$ $(i = 1,2,3,4)$.

Luego si $T = (\bigcup_{i=1}^{4} A_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{4} R_i) \cup P$ se tiene, $\int_T f^* < +\infty$.

Con un procedimiento recursivo se obtiene que $\int_H f^* < +\infty$ para todo conjunto acotado H.

En particular se cumple que

$$\int_{(f^*>1)} f^* < +\infty.$$

<u>COROLARIO</u>. *Existe una función $f \in L(\log^+ L)$ tal que $f \notin L(\log^+ L)^2$ y tal que f^* es integrable sobre todo conjunto de medida finita.*

Sea $f = g \circ R$ siendo

$$g(x,y) = \frac{\chi_B(x,y)}{(y-1/4)\,|\log(y-1/4)|^3}$$

si $a = (a_1,a_2)$ es tal que $\mathrm{Max}(|a_1-1/2|;\ |a_2-1/2|) \geqslant M$ con M suficientemente grande luego por el teorema anterior se tiene que $f^*(a) \leqslant 1$.

Luego si

$$H = \{(a_1,a_2)/\mathrm{Max}(|a_1-1/2|;|a_2-1/2|) \leq M\}$$

y D es un conjunto de medida finita, es

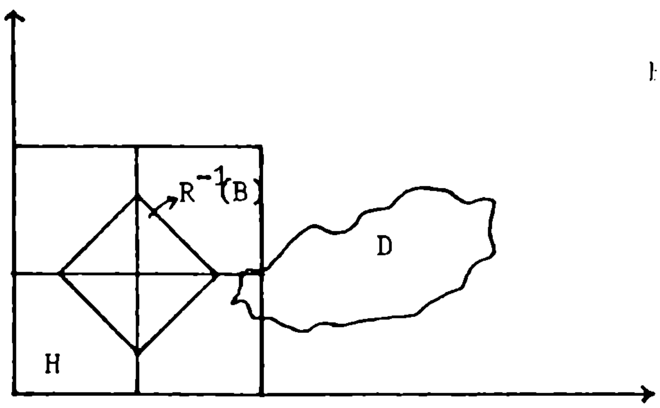


Fig. 10

$$\int_{H^c \cap D} f^* \, dxdy \leq |H^c \cap D| \leq |D|$$

y como

$$\int_{H \cap D} f^* \, dxdy \leq \int_H f^* \, dxdy < +\infty$$

pues H es acotado, se concluye que

$$\int_D f^* < +\infty.$$

Referencias

[1] B.Jessen, J.Marcinkiewicz y A.Zygmund. Note on the differentiability of multiple integrals. Fund. Math. 25 (1935) pp. 217-234.

[2] N.A.Fava, E.A.Gatto y C.Gutierrez. On the strong maximal function and Zygmund's class $L(\log^+ L)^n$. Studia Math. LXIX (1980).

[3] M. de Guzmán. Differentiation of Integrals in R^n. Springer-Verlag. Vol. 481.

[4] N.A.Fava, Weak type inequalities for product operators Studia Math. XLII (1972) pp. 271-288.

[5] S.Saks, Remarks on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral. Fund. Math 22 (1934) 257-261.

[6] S.Saks. Theorie de l'integrale, Monografie Matematyczne, Volume II (Warszawa, 1933).

[7] A.Zygmund. On the differentiability of multiple integrals. Fund. Math 23 (1934) 143-149.

[8] E.M.Stein. Note on the class $L \log^+ L$. Studia Math. 31 (1969) 305.310.