Una noción de estabilidad para campos vectoriales complejos

Fauring, Ana María Patricia

1982

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNA NOCION DE ESTABILIDAD PARA CAMPOS VECTORIALES COMPLEJOS

Por

Ana María Patricia Fauring

Director

Angel R. Larotonda

Trabajo presentado para optar
al título de Doctor en Ciencias
Matemáticas.

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Noviembre 1982

MUCHAS GRACIAS

Al Dr. Angel Larotonda, que me propuso el problema aquí resuelto, y me orientó en la búsqueda de la solución.

Al Departamento de Matemática, que me brindó el espacio físico y el apoyo económico indispensables para realizar este trabajo.

Al Instituto Argentino de Matemática, que me facilitó su infraestructura en la etapa de la redacción definitiva.

A los doctores Manuel Balanzat y Norberto Fava, que me expresaron su confianza en reiteradas oportunidades.

A los amigos y compañeros, que me aconsejaron y alentaron a lo largo de los años.

INTRODUCCION

En este trabajo se desarrolla una noción de estabilidad para campos vectoriales complejos semejante a la conocida para campos reales; con ella se obtiene un resultado de estabilidad para campos complejos lineales paralelo - pero no igual - al teorema de Hartman sobre campos lineales en un espacio de Banach real (ver I.1.). Sin embargo la formulación del teorema de Hartman no es conveniente como modelo para un teorema sobre flujos complejos, debido a que en general no es posible hablar de "pequeñas perturbaciones" analíticas acotadas para un campo complejo.

La siguiente idea es más razonable: si T_1 y T_2 son campos complejos lineales "cercanos" - en el sentido de la topología de las aplicaciones lineales - , se trata de decidir cuándo las fibraciones definidas por los flujos Φ_1 y Φ_2 son topológicamente conjugadas.

Se debe resalter que sólo se ha pedido un homeomorfismo que transforme T_1-órbitas en T_2-órbitas, y no una conjugación simultánea de los homeomorfismos $\Phi_1(z,\ )$, $\Phi_2(z,\ )$, para todo z. De manera más precisa, se define en Gl(E) - para E un espacio de Banach complejo - la siguiente relación $T_1 \equiv T_2$ significa "existe un homeomorfismo $h:E \to E$ que transforma T_1-órbitas en T_2-órbitas". (Nótese que las órbitas en este caso no son "curvas" integrales sino variedades reales de dimensión 2, más precisamente, inmersiones de C en E.)

La relación precedente es de equivalencia, según se constata fácilmente: se dirá que un campo lineal T es *estructuralmente estable* si hay un entorno V de T en Gl(E) tal que $T' \equiv T$ para todo $T' \in V$.

Lógicamente el conjunto $\mathcal{E}$ de los campos estructuralmente estables es un abierto en Gl(E) y el objetivo de este trabajo es tratar de caracterizar al conjunto $\mathcal{E}$, o por lo menos a una parte del mismo.

En el caso real una condición suficiente - que además surge en forma muy natural - es que el flujo sea hiperbólico. Sin embargo al trabajar con parámetros complejos esta hipótesis se torna inadecuada, y las demostraciones de los teoremas de estabilidad de campos reales no se adaptan a este caso.

El camino que se adoptó fue asociar a cada campo complejo un campo real sobre una variedad compacta, y la técnica empleada para hacerlo impuso la condición de que el espacio E sea de dimensión finita.

Los resultados obtenidos permiten afirmar que el conjunto $\mathcal{E}$ contiene a todos los campos lineales T que verifican las siguiente dos condiciones:

H1)Los autovalores de T están contenidos en un semiplano abierto cuyo lado pasa por el origen.

H2) Ningún par de autovalores de T está alineado con el origen.

Cabe señalar que la condición H2 es realmente <u>necesaria</u> para la estabilidad estructural. Se ignora aún si lo mismo ocurre con la condición H_1, no pudiendo dar por el momento una respuesta definitiva a esta cuestión. En todo caso la técnica utilizada no es adaptable de ninguna manera al caso en que esta condición no se verifique.

I.1.

Si X es un espacio de Banach real, un isomorfismo lineal $L:X \to X$ es hiperbólico si y sólo si existe una descomposición del espacio $X = X^u \oplus X^s$ invariante por L, de modo tal qu $L|X^u$ es una expansión y $L|X^s$ es una contracción.

Se considera al espacio $C^0_*(X,X)$ de funciones uniformemente continuas y uniformemente acotadas de X en X munido de la topología uniforme, y se definen los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{L}_\mu(L) = \{\Lambda = L+\lambda : \lambda \in C^0_*(X,X) \text{ es lipschitziana, acotada por } \mu, \text{ y con constante de Lipschitz} \leq \mu\}$$

$$\mathcal{H} = \{h = 1+g \quad g \in C^0_*(X,X)\}, \text{ donde } 1:X \to X \text{ es la identidad.}$$

Con esta notación el teorema de Hartman para flujos se puede enunciar así:

<u>TEOREMA DE HARTMAN</u> [P]

Si e^L es hiperbólico, y ν es pequeño, entonces para cada $\Lambda \in \mathcal{L}_\nu(L)$ existe un único $H = H_\Lambda \in \mathcal{H}$ tal que $H\Phi_\Lambda(t,x) \quad \Phi_L(t,Hx)$ para $x \in X$, $t \in R$, donde Φ_L y Φ_Λ son los flujos de L y Λ. H_Λ es un homeomorfismo que depende con continuidad de $\Lambda \in \mathcal{L}_\nu(L)$.

Sea E un espacio de Hilbert sobre C, sea T un campo vectorial en E, que se puede interpretar como una función $T:E \to E$. Una *solución del campo* en $x_0 \in E$ es una función $\phi:\Omega \to E$, donde Ω es un entorno de $0 \in C$, que verifica:

(i) $\phi(0) = x_0$

(ii) $\frac{d\phi}{dz}(z) = \phi'(z) = T(\phi(z))$

Si U es un entorno de $x_0 \in E$ y Ω un entorno de $0 \in C$, una función $\phi_U:\Omega\times U \to E$ es *flujo local* en x_0 del campo T si se verifican:

(i) ϕ_U es diferenciable

(ii) $\phi_U(0,x) = x$ para todo $x \in U$

(iii) $\frac{d}{dz}\phi_U(z,x) = T(\phi_U(z,x))$

Cuando los entornos U de x_0 y Ω de 0 considerados en la definición de flujo local son respectivamente E y C, la función correspondiente $\phi:C\times E \to E$ se denomina *flujo global* de T, y el conjunto de puntos $\{\phi(z,x) \quad z \in C\} \subset E$ es la *órbita* por x correspondiente al campo T, también llamada órbita por x del flujo ϕ.

Hay numerosos teoremas que dan condiciones suficientes para la existencia y unicidad de flujo local o global, por ejemplo el clásico resultado que asegura que si el campo es analítico en un punto entonces existe flujo local en dicho punto, y es único salvo prolongaciones [D]. Cuando el campo T es lineal, existe flujo global, y está dado por:

$$\phi:C\times E \to E \quad , \quad \phi(z,x) = e^{zT}x$$

según puede verificarse en forma directa.

Suponiendo que E tiene dimensión finita, se provee al espacio de campos vectoriales complejos sobre E de la topología compacto abierta; el subespacio formado por los campos lineales resulta homeomorfo al espacio de operadores lineales $\mathcal{L}_C(E,E)$ con la topología uniforme de operadores.

<u>DEFINICION 1:</u> Un campo lineal T_0 en E es *estructuralmente estable* si

existe un entorno W de T_0 en el espacio de los campos lineales tal que para cualquier $T \in W$ existe un homeomorfismo $h:E \to E$ que aplica órbitas de T_0 en órbitas de T.

Es conveniente destacar que en la definición anterior, si ϕ y ψ designan a los flujos de T_0 y T respectivamente, no se exige que $h(\phi(z,x)) = \Phi(z,h(x))$, que es el concepto análogo al de conjugación topológica que se utiliza en el desarrolo de la teoría de estabilidad de operadores reales. Esto se debe a que cuando se usan parámetros complejos, una definición tan rígida produce clases de equivalencia excesivamente chicas.

I.2.

El resto de este capítulo se dedica a remarcar algunas nociones vinculadas a la teoría de estabilidad de campos vectoriales reales, y que serán de utilidad a lo largo del trabajo.

Sea M una variedad real compacta y sean ϕ_t y ψ_t familias uniparamétricas de difeomorfismos de M, es decir, flujos. ϕ_t y ψ_t son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo de M que aplica las órbitas de ϕ_t en órbitas de Ψ_t.

Si $\chi(M)$ es el espacio de campos vectoriales sobre M, y $\chi \in \chi(M)$, existe un flujo ϕ_t tal que $\frac{d\phi}{dt}(x)\Big|_{t=0} = \chi(x)$. Se dice que χ es *estructuralmente estable* cuando pequeñas perturbaciones en $\chi(M)$ no cambian la clase de ϕ_t, o sea que no modifican su estructura de órbitas.

Al analizar la teoría de campos vectoriales desde este punto de vista, se presenta de inmediato la necesidad de distinguir entre sí las órbitas de un flujo $\phi_t : M \to M$ de acuerdo con la siguiente clasificación:

(a) *Puntos fijos* son los puntos $x \in M$ tales que $\phi_t(x) = x$ para todo $t \in R$; son los ceros del campo de vectores.

(b) *Orbitas cerradas* son aquéllas cuyos puntos x tienen la propiedad de que existen números reales positivos s y t tales que $\phi_t(x) = x$ y $\phi_s(x) \neq x$. En este caso se llama *período mínimo* al número t_0, donde $0 < t_0 = \inf\{t \mid t > 0, \phi_t(x) = x\}$.

(c) *Orbitas ordinarias* son aquéllas cuyos puntos x tienen la propiedad de que la aplicación $t \to \phi_t(x)$ para x fijo es inyectiva.

Los dos primeros conceptos se engloban con el nombre de *elementos críticos*, e hipótesis adecuadas sobre los mismos dan condiciones suficientes y condiciones necesarias para la estabilidad.

También será de utilidad precisar la noción de *punto errante* de ϕ_t: es cualquier punto $x \in M$ que tenga un entorno U tal que

$$\left(\bigcup_{|t|>t_0} \phi_t(U)\right) \cap U = \phi \text{ para algún } t_0 > 0.$$

Los puntos no errantes forman un conjunto invariante por el flujo ϕ_t que se denota usualmente $\Omega(\Phi_t)$ o simplemente Ω si no hay posibilidad de confusión.

I.3.

Al buscar condiciones suficientes para la estabilidad de campos vectoriales, surge en forma natural el concepto de *punto fijo hiperbólico* del flujo Φ_t. Un punto fijo de Φ_t se dice hiperbólico si es un punto fijo hiperbólico del difeomorfismo $\Phi_1 : M \to M$, o sea, si existen dos subespacios F^s y F^u de T_xM, invariantes por $T_x\Phi_1 : T_xM \to T_xM$ tales que $T_xM = F^s \oplus F^u$ y además $\| T_x\Phi_1 | F^s \| < 1$ y $\| (T_x\Phi_1 | F^u)^{-1} \| < 1$.

Para que un punto fijo sea hiperbólico es suficiente que $T_x\Phi_1$ no tenga autovalores de módulo 1, y cuando el campo es lineal esto equivale a que ninguno de sus autovalores sea imaginario puro.

Para extender la noción de hiperbolicidad a las órbitas cerradas es menester hacer un trabajo más delicado. Si γ es una órbita cerrada del flujo Φ_t ,y $x \in \gamma$, existe una subvariedad V de M, de codimensión 1, que contiene a x y es trasversal a γ . Esta variedad se llama *sección trasversal al flujo*, y es posible determinar en ella un entorno V' de x tal que para todo $y \in V'$ exista un número real positivo τ que verifica que $\Phi_\tau(y) \in V$. Eligiendo $\tau(y) = \inf\{t > 0 : \Phi_t(y) \in V\}$ se define una función $f: V' \to V$ dada por $f(y) = \Phi_{\tau(y)}(y)$. Esta función es un difeomorfismo local y x es un punto fijo del mismo. Se denomina *transformación de Poincaré* [S]

γ es una *órbita cerrada hiperbólica* si x es un punto fijo hiperbóli- de la transformación de Poincaré f que se describió en el párrafo anterior . Se puede probar que la definición no depende del punto $x \in \gamma$ que se considere, ni de la sección trasversal V que se utilice en la construcción de f.

Si $W^s_{loc}(x,f)$ denota la variedad estable del difeomorfismo f en x, es decir, $W^s_{loc}(x,f) = \{y \in V' \quad f^k(y) \to x,\ k \to \infty\}$, se define la *variedad estable de* Φ_t *en* γ por:

$$W^s(\gamma) = \bigcup_{t\varepsilon R} \Phi_t(W^s_{loc}(x,f)).$$

Esta definición no depende del punto $x \varepsilon \gamma$ que se considere, ni de la transformación de Poincaré que se haya construído.

Las *variedades inestables* de los elementos críticos hiperbólicos de Φ_t son las variedades estables correspondientes a dichos elementos críticos por el flujo $\Psi_t = \Phi_{-t}$.

I.4.

Con la notación que se ha utilizado a lo largo de este capítulo, se tiene el siquiente teorema, debido a Palis y Smale [P.S]

" Sea M una variedad compacta y sea $\chi(M)$ el conjunto de campos vectoriales C^r sobre M. Sea $X \varepsilon \chi(M)$ tal que

(a) $\Omega(X)$ es la unión de un número finito de puntos críticos $x_1,\ldots,x_m$ y un número finito de órbitas cerradas de X, $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$.

(b) Los elementos críticos x_i y γ_j son hiperbólicos para todo i y para todo j.

(c) Las variedades estable e inestable de dos elementos críticos distintos tiene intersección trasversal.

Entonces X es estructuralmente estable".

Sea E un espacio de Hilbert complejo de dimensión finita n, y sea $(\ ,\ ):E\times E \to C$ el producto interno. Se considera en E una base de Hilbert $\beta = \{e_i \quad 1 \leq i \leq n\}$; de este modo, si x es un vector de E resulta $x = \sum_{i=1}^{n} (x,e_i)e_i$, y el producto entre dos vectores de E, x e y, es

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (x,e_i)\overline{(y,e_i)}$$

que utilizando la notación $x_i = (x,e_i)$, $y_i = (y,e_i)$ se transforma en $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$

Sean $\mathcal{L}_C(E,E)$ y $\chi_\omega(E)$ el espacio de transformaciones lineales de E y el espacio de campos vectoriales analíticos de E respectivamente. Se considera la función lineal inyectiva

$$i:\mathcal{L}_C(E,E) \to \chi_\omega(E)$$

que a cada transformación lineal T le asocia el campo i(T) dado por $i(T)(x) = (x,T(x))$. Por comodidad se usará el mismo símbolo T para designar a la transformación T y al campo i(T).

A continuación se distinguen dos subconjuntos del espacio $\mathcal{L}_C(E,E)$ que serán mencionados con frecuencia en el resto del trabajo.

DEFINICION 2: Sea T un isomorfismo lineal de E y sea Sp(T) el conjunto de autovalores de T. T tiene la *propiedad H1* si Sp(T) está contenido en un semiplano cuyo lado pasa por el origen, es decir, si existe una transformación R-lineal $\phi:C \to R$ tal que $\phi(Sp(T)) > 0$, o equivalentemente, si existe $a_T \in C$ tal que $a_T.Sp(T)$ está contenido en el semiplano $\{z \in C \quad Re(z) > 0\}$

<u>DEFINICION 3</u>: Un isomorfismo lineal T de E tiene la *propiedad H2* si ningún par de autovalores de T está alineado con el origen, es decir que si $\lambda_j, \lambda_k \in Sp(T)$, $j \neq k$, entonces $\lambda_j . \lambda_k^{-1} \notin R$.

<u>OBSERVACION 4</u>: El conjunto de isomorfismos de E que verifican H1 y H2 es un subconjunto abierto de $\mathcal{L}_C(E,E)$.

El objetivo central del trabajo es demostrar el siguiente teorema:

<u>TEOREMA 5</u>: Sea T_0 un isomorfismo lineal de E que tiene las propiedades H1 y H2, entonces T_0 es estructuralmente estable.

La demostración se desglosa en una serie de lemas.

II.2.

<u>LEMA 6</u>: Sea A un isomorfismo lineal de E y sea $S = \{x \in E:(Ax,Ax)=1\}$ entonces el conjunto S es una subvariedad real compacta de codimensión 1 en el espacio 2n-dimensional E.

De aquí en adelante T_0 será un isomorfismo lineal de E que tiene las propiedades H1 y H2, y el isomorfismo A será tal que la matriz de la transformación AT_0A^{-1} en la base β sea diagonal.

<u>LEMA 7</u>: Existe un entorno de T_0, $W \subset \mathcal{L}_C(E,E)$, tal que cualesquiera sean $x \in S$ y $T \in W$ los conjuntos S y $\{e^{zT}x \quad z \in C\}$ tienen intersección trasversal.

<u>CONSECUENCIA 8</u>: Cualesquiera sean $T \quad W$ y $x \in S$, si $E(x)$ designa al conjunto $\{e^{zT}x \quad z \in C\}$, entonces $E(x) \cap S$ es una curva diferenciable en S. Las curvas correspondientes a T y T_0, parametrizadas en forma conveniente, son las soluciones de sendos campos vectoriales

sobre S, f_T y f_{T_0} ε $\chi(S)$; estos son campos vectoriales reales sobre una variedad compacta.

Los proximos lemas llevan a demostrar que existe un homeomorfismo de S que aplica las órbitas de f_{T_0} en órbitas de f_T.

<u>LEMA 9</u>: Sea $x \in S$ y sea $E_0(x) = \{e^{zT_0}x \quad z \in C\}$, entonces el conjunto $S \cap E_0(x)$ es conexo.

<u>CONSECUENCIA 10</u>: Si para cada T se considera el campo vectorial real $f_T: S \to TS$ dado por $f_T(x) = \dfrac{-i}{(Ax, ATx)} . Tx$, entonces las curvas solución son las componentes conexas de $S \cap \{e^{zT}x \quad z \in C\}$. Por lo tanto la curva solución de f_{T_0} por un punto $x \in S$ será el conjunto $S \cap E_0(x)$. Es decir que si $\gamma: R \times S \to S$ es el flujo de f_{T_0} entonces $S \cap E_0(x) = \{\gamma(t,x) \quad t \in R\}$

<u>OBSERVACION 11</u>: El campo f_{T_0} no tiene puntos críticos y por lo tanto en su estructura de órbitas no hay puntos fijos.

Con el siguiente lema se completa la descripción de los elementos críticos del campo f_{T_0} .

<u>LEMA 12:</u> El campo f_{T_0} tiene exactamente n órbitas cerradas, una por cada autovalor de T_0.

Si se denota con γ_j $1 \leq j \leq n$ a las órbitas cerradas de f_{T_0} y con $\Omega(f_{T_0})$ al conjunto de sus puntos no errantes, se obtiene:

<u>LEMA 13</u>:

$$\Omega(f_{T_0}) = \bigcup_{j=1}^{n} \gamma_j$$

Con esto queda demostrado que el campo f_{T_0} verifica la condición (a) del teorema de Palis y Smale.

LEMA 14: Las órbitas cerradas de f_{T_0} son hiperbólicas.

En la demostración del lema 14 se construye explícitamente una transformación de Poincaré asociada a cada órbita cerrada de f_{T_0} y se calculan las correspondientes aplicaciones tangentes. Los autovalores de la j-ésima aplicación son de la forma $e^{m_j \lambda_k}$ y $\overline{e^{m_j \lambda_k}}$ donde $k \neq j$, $1 \leq k \leq n$ y m_j es un complejo tal que $Im(m_j \lambda_j) \in 2\pi.Z$. Como por hipótesis T_0 tiene la propiedad H2, se concluye que ninguno de estos autovalores tiene módulo 1.

Los cálculos que se hacen a lo largo de la demostración del lema 14 permiten caracterizar las variedades estable e inestable locales de cada órbita cerrada; a partir de ellas, y utilizando el lema 9 se determinan las variedades estable e inestable correspondientes a cada órbita cerrada de f_{T_0}

LEMA 15: Sean $\gamma_j \neq \gamma_k$ dos órbitas cerradas de f_{T_0}, y sean $W^u(\gamma_j)$ la variedad inestable de γ_j y $W^s(\gamma_k)$ la variedad estable de γ_k, entonces $W^u(\gamma_j)$ y $W^s(\gamma_k)$ tienen intersección trasversal.

Como consecuencia de los lemas 14 y 15, se tiene que f_{T_0} está en las hipótesis del teorema de Palis Smale. Por otra parte, dado un entorno $U(f_{T_0})$ de f_{T_0} en $\chi(S)$, existe un entorno $U(T_0)$ de T_0 en $\chi_\omega(E)$ tal que si $T \in U(T_0)$ entonces $f_T \in U(f_{T_0})$. Por lo tanto, existe un entorno W de T_0 tal que para todo $T \in W$ hay un homeomorfismo de S

$g: S \to S$ que lleva las órbitas de f_{T_0} en órbitas de f_T.

Sea H_ϕ^+ un semiplano abierto que contiene a todos los autovalores de T_0 y cuyo lado pasa por el origen (su existencia la asegura el hecho que T_0 tiene la propiedad H1); es claro que existe un entorno W de T_0 en $\chi_\omega(E)$ tal que cualquier campo vectorial lineal $T \in W$ tiene sus autovalores contenidos en H_ϕ^+. Por consiguiente es posible determinar un número complejo α de tal modo que los isomorfismos lineales αT_0 y αT tengan sus autovalores contenidos en el semiplano $\{Re(z) > 0\}$

Sean $\Phi, \Psi : C \times E \to E$ los flujos correspondientes a T_0 y T respectivamente, es decir

$$\Phi(z,x) = e^{zT_0} x \quad , \text{ y } \quad \Psi(z,x) = e^{zT} x,$$

y sean

$$R_t = \{\Phi(t\alpha,x) \quad x \in S\} \quad \text{y} \quad R'_t = \{\Psi(t\alpha,x) \quad x \in S\}.$$

<u>LEMA 16</u>: Con la notación anterior se tienen las siguientes igualdades de conjuntos:

$$E - \{0\} = \bigcup_{t \in R} R_t \qquad E - \{0\} = \bigcup_{t \in R} R'_t$$

Y finalmente se demuestra un lema que completa el desarrollo del teorema 5.

<u>LEMA 17</u>: Sea $h: E \to E$ la función dada por

$$h(x) = \begin{cases} \Psi_{t\alpha} \circ g \circ \Phi_{-t\alpha}(x) & \text{si } x \in R_t \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

h es un homeomorfismo de E que lle a las órbitas de T_0 en órbitas de T.

NOTA 18: Los lemas 7, 9, 16 y 17 so válidos aún cuando el isomorfismo lineal T_0 no tenga la propied d H2, hecho que puede verificarse con las mismas demostraciones qu se proponen en este trabajo.

DEMOSTRACION DEL LEMA 6:

La función $\rho : E \to R$ dada por $\rho(x) = (Ax,Ax)$ es diferenciable respecto del parámetro real y por lo tanto el conjunto S es una variedad diferenciable real de codimensión 1 en E. Como además se ha supuesto que E es de dimensión finita, se tiene que S es compacto.///

Se ordena la base β y el conjunto de autovalores de T_0 de modo que si $1 \leq k < n$ entonces $0 \leq \arg(\overline{\lambda}_1 \lambda_k) < \arg(\overline{\lambda}_1 \lambda_{k+1}) < \pi$. Esto es posible pues T_0 tiene la propiedad H1.

OBSERVACION 19: Existe un entorno W de T_0 tal que para todo $T \in W$ se verifica que $(Ax,ATx) \neq 0$, cualquiera sea $x \in S$.

En efecto, se prueba en primer lugar que $(Ax,AT_0x) \neq 0$ para todo $x \in S$, pues en caso contrario existiría $y = Ax \in E$ tal que $(y,AT_0A^{-1}y) = 0$, , que equivale a $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j |y_j|^2 = 0$, en contradicción con la propiedad H1 que T_0 posee.

Sea $Gl^{\#}(E)$ el subconjunto abierto de $\mathcal{L}(E,E)$ formado por los isomorfismos lineales que tienen la propiedad H1, y sea $\mu : Gl^{\#}(E) \times E \to C$ la función dada por $\mu(T,x) = (Ax,ATx)$. Es claro que μ es continua, y como S es compacto, $\mu(\{T_0\} \times S)$ es compacto; además se vio en el párrafo anterior que $0 \notin \mu(\{T_0\} \times S)$. Por lo tanto es posible determinar un entorno W de T_0 tal que para todo $T \in W$ y para todo $x \in S$ sea $\mu(T,x) \neq 0$, de donde resulta la validez de la observación 19.

DEMOSTRACION DEL LEMA 7:

Sea W el entorno de T_0 cuya existencia asegura la observación 19.

Si $x \in S \cap E(x)$, los espacios tangentes de S y $E(x)$ en el punto x son:

$$T_xS = \{u \in \quad (Ax,Au) + (Au,Ax) \quad 0\} =$$

$$= \{u \in \quad Re(Ax,Au) = 0\} = \{u \in E \quad (Ax,Au) \in iR\}$$

La última caracterización es equivalente a $\{u \in E : \langle Ax,Au\rangle = 0\}$ donde $\langle\ ,\ \rangle$ designa el producto interno real asociado a $(\ ,\ )$.

$$T_xE(x) = \{\alpha.[\frac{d}{dz} e^{zT}x]_{z=0} \quad \alpha \in C\} = \{\alpha Tx \quad \alpha \in C\}$$

T_xS es un subespacio de codimensión real 1 en E, por lo tanto basta probar que no contiene a $T_xE(x)$ para asgurar que se trata de una intersección trasversal.

Suponiendo lo contrario, sea $T \in W$ tal que para $\alpha \in C$ se verifica que $(Ax,A\alpha Tx) \in iR$;se tiene que para cualquier valor de α,$\bar{\alpha}(Ax,ATx)$ es imaginario puro, y por lo tanto debe ser $(Ax,ATx) = 0$, en contradicción con la observación 19. ///

<u>DEMOSTRACION DEL LEMA 9</u>:

Sea $a:C \to C$ la función dada por $a(z) = (Ae^{zT_0}x,Ae^{zT_0}x)$, y sea

$\Gamma = \{z \in C \quad a(z) = 1\}$. Es claro que $S \cap E_0(x) = \{e^{zT_0}x : z \in \Gamma\}$ y por lo tanto basta probar que Γ es conexo para demostrar el lema.

$$Da(z)(u) = 2Re(Ae^{zT_0}x,AuT_0e^{zT_0}x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} 2Re(\lambda_j u)e^{2Re(\lambda_j z)} c_j^2$$

donde los c_j son constantes reales que dependen de x pero no de z ni de u.

En virtud de la propiedad H1, existen $u_0 \in C$ y $\delta > 0$ tales que si $|u - u_0| < \delta$ entonces $D\alpha(z)(u) > 0$ independientemente de z, lo que asegura que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\alpha(z+tu) - \alpha(z)}{t} > 0$$

y por lo tanto $\alpha(z+tu) > \alpha(z)$ para todo $t > 0$ y todo $u \in C$ tal que $|u - u_0| < \delta$, esto es, en un cono con vértice en z.

Sea $r \in R$ y sea $u \in C$ tal que $|u - u_0| < \delta$, entonces el conjunto $\{r + tu : t \in R\} \cap \Gamma$ tiene a lo sumo un punto, pues la función α es estrictamente monótona a lo largo de rectas con dirección u.

Sea $\pi : C \to R$ la proyección sobre el eje real en la dirección de u_0, entonces π es continua e inyectiva. Se probará que es también abierta y suryectiva.

En efecto, $\pi(\Gamma)$ es unión de intervalos y por lo tanto para todo z $\pi(z)$ es interior o $\pi(z)$ es extremo de un intervalo, pero la última alternativa no es posible si π es inyectiva.

Para demostrar que $\pi|\Gamma$ es suryectiva, se considera $r_0 \in R$ tal que $r_0 \notin \pi(\Gamma)$; en este caso ocurre necesariamente una de las siguientes alternativas:

(i) $\alpha(r_0 + tu) > 1$ para todo $t \in R$,

(ii) $\alpha(r_0 + tu) < 1$ para todo $t \in R$.

Sea $C_t = \{r_0 + tu_0 + \lambda u : \lambda > 0, |u - u_0| < \delta\}$, como $\bigcup_{t \in R} C_t = C$ y además $\alpha(r_0 + tu_0 + \lambda u) > \alpha(r_0 + tu_0)$ cualquiera sea $\lambda > 0$ se obtiene que, si $\alpha(r_0 + tu_0) > 1$ entonces $\alpha(z) > 1$ para todo $z \in C$. Esta contradicción descarta la alternativa (i).

Considerando $C_t' = \{r_0 + iu_0 + \lambda u \quad \lambda < 0,\ |u - u_0| < \delta\}$ se concluye que $\alpha(z) < 1$ para todo $z \in C$, lo cual tampoco es posible, y por lo tanto no existe $r_0 \in R - \pi(\Gamma)$. ///

DEMOSTRACION DEL LEMA 12:

Sea $x \in S$ tal que la órbita que lo contiene, γ_x, es cerrada; entonces existe $z \neq 0$ tal que $e^{zT_0}x = x$. Como e^{zT_0} y T_0 tienen los mismos autovectores, resulta que x debe ser autovector de T_0.

Si x e y son autovectores de T_0 correspondientes a dos autovalores distintos λ_j y λ_k respectivamente, entonces $\gamma_x \cap \gamma_y = \phi$; en caso contrario existen $z,w \in C$ tales que $e^{zT_0}x = e^{wT_0}y$, es decir, $e^{z\lambda_j}x = e^{w\lambda_k}y$, por lo tanto $y = e^{(z\lambda_j - w\lambda_k)}x$ .Aplicando T_0 se tiene que $T_0y = e^{(z\lambda_j - w\lambda_k)}T_0x = e^{(z\lambda_j - w\lambda_k)}\lambda_jx = \lambda_jy$, en contradicción con la elección de $\lambda_j \neq \lambda_k$.

Si x e y son autovectores no nulos de T_0 que corresponden al mismo autovalor λ_j, entonces existe $\lambda \in C$, $\lambda \neq 0$, tal que $y = \lambda x$. Se considera $z \in C$ tal que $e^{z\lambda_j} = \lambda$, y resulta que $y = e^{zT_0}x$ En consecuencia $y \in \gamma_x$. ///

DEMOSTRACION DEL LEMA 13:

Es inmediato que si la órbita γ_x es cerrada entonces todos sus puntos pertenecen a $\Omega(f_{T_0})$.

Sea $x \varepsilon S$ tal que γ_x no es cerrada, entonces existe un entorno V de x en S tal que para todo $y \varepsilon V$ la órbita γ_y no es cerrada. Si se supone que $x \varepsilon \Omega(f_{T_0})$, entonces para todo $t_0 > 0$ y todo entorno U de x en S el conjunto $(\bigcup_{|t|>t_0} \gamma_t(U)) \cap U$ es no vacío, y por lo tanto se pueden determinar dos sucesiones en S y R respectivamente, $(y_r)_{r\geq 1} \subset S$, $(t_r)_{r\geq 1} \subset R$, de manera que $y_r \to x$ cuando $r \to \infty$, $|t_r| \to \infty$ cuando $r \to \infty$ y $\gamma_{t_r}(y_r) \to x$ cuando $r \to \infty$, y en consecuencia existe una sucesión de números complejos $(z_r)_{r\geq 1}$ tal que $e^{z_r T_0} y_r \to x$ cuando $r \to \infty$.

Sea $x_j = A^{-1}e_j$ donde e_j es el j-ésimo vector de la base β, y por lo tanto $T_0 e_j = \lambda_j e_j$. Claramente la familia de vectores $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ constituye una base de E, y para todo j, $x_j \varepsilon S$.Utilizando dicha base se tiene

$$y_r = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jr} x_j \qquad e^{z_r T_0} y_r = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jr} e^{z_r \lambda_j} x_j$$

Como

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jr} x_j \qquad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jr} e^{z_r \lambda_j} x_j \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$

se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jr}(1 - e^{z_r \lambda_j}) x_j \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

De donde se deduce que

$$\alpha_{jr}(1 - e^{z_r\lambda_j}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \qquad \text{pa a todo } 1 \leqslant j \leqslant n,$$

y como γ_x no es cerrada hay por lo menos dos índices j para los cuales $(\alpha_{jr})_{r\geqslant 1}$ no converge a cero, pues en caso contrario x sería autovector de T_0. Para dichos valores de j se tiene

$$1 - e^{z_r\lambda_j} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 .$$

Y por lo tanto

$$z_r\lambda_j \xrightarrow[r\to\infty]{} i2\pi.Z \quad \text{para al menos dos subíndices } j,$$

por lo cual

$$\arg(z_r\lambda_j) = \arg(z_r) + \arg(\lambda_j) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \text{ para al menos dos}$$

índices j, en contradicción con la propiedad H2 que T_0 verifica.En consecuencia , si la órbita γ_x no es cerrada, x no es errante. ///

III. 2.

CONSTRUCCION DE UNA TRANSFORMACION DE POINCARE PARA CADA ORBITA CERRADA:

Si γ es una órbita cerrada de f_{T_0} existe $1 \leqslant j \leqslant n$ tal que γ es la órbita de $x_j = A^{-1}e_j$ y $T_0x_j = \lambda_jx_j$; según la notación adoptada $\gamma = \gamma_j$. Más aún, $\gamma_{x_j}:R \to S$ está dada por $\gamma_{x_j}(t) = e^{itk_j}x_j$, donde k_j es un número real determinado por f_0, ya que

$$\frac{d}{dt}\gamma_{x_j}(t)\Big|_{t=0} = f_{T_0}(\gamma_{x_j}(t)), \text{ según puede verificarse de}$$

inmediato.

Sea $E_j = \{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k : \alpha_j \in R\}$, y sea $V_j = E_j \cap S$, entonces V_j es una sección trasversal al flujo en x_j. En efecto, $T_{x_j} V_j = V_j$ y $T_{x_j}\gamma_j = \{itk_j x_j \quad t \in R\}$, por lo tanto V_j y γ_j tienen intersección trasversal.

Se elige un entorno U_j de x_j de manera que la función que se construye en los próximos párrafos esté bien definida.

$g_j : U_j \cap V_j \to V_j$ es la transformación de Poincaré asociada a γ_j y V_j, dada por:

$g_j(x) = \gamma_\tau(x)$ de modo que

(i) $\gamma_\tau(x) \in V_j$

(ii) $\tau = \inf\{\tau(x),\ 0 < \tau(x),\ \gamma_{\tau(x)}(x) \in V_j\}$

Dado un punto $y \in V_j \cap U_j$, se tiene que $g_j(y) = e^{z_j(y)T_0} y$ para un valor adecuado de $z_j(y) \in C$, pero

$$y = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k \quad \text{con } y_j \in R, \text{ por lo tanto}$$

$$g_j(y) = \sum_{k=1}^{n} y_k e^{z_j(y)\lambda_k} x_k \quad \text{con} \quad y_j e^{z_j(y)\lambda_j} \in R.$$

Luego

$$z_j(y)\lambda_j = \alpha_j + i2h_j(y)\pi \text{ , con } \alpha_j \in R,\ h_j(y) \in Z.$$

Como la función h_j es continua, en un entorno de x_j es constante e igual a $h_j(x_j)$.

En la demostración del lema 14 es necesar o conocer en forma explícita la aplicación tangente de g_j, y un c mino adecuado para calcularla es considerar la siguiente extensión de g_j:

$$G_j : W_j \to E, \text{ con } W_j \text{ un entorno de } V_j \text{ en } E_j, \text{ y } W_j \subset U_j,$$

dada por

$$G_j(x) = (\Lambda x, \Lambda x)^{1/2} . g_j((\Lambda x, \Lambda x)^{-1/2} . x).$$

Es claro que $G_j | S \cap U_j = g_j$, de modo que si $u \in T_{x_j} V_j$, entonces

$T_{x_j} g_j(u) = DG_j(x_j)(u)$.

<u>OBSERVACION 20</u>: Para todo $u \in T_{x_j} V_j$ se tiene que

$$DG_j(x_j)(u) = \frac{d}{dt} w_j(x_j + tu) \Big|_{t=0} . \lambda_j e^{z_j(x_j)\lambda_j} x_j + e^{z_j(x_j)T_0} u$$

donde $w_j(x) = z_j((Ax, Ax)^{-1/2} . x)$

En efecto

$$DG_j(x_j)(u) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} . (G_j(x_j + tu) - G_j(x_j)) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} . \{(A(x_j + tu), A(x_j + tu))^{1/2} . \frac{e^{w_j(x_j + tu)T_0}(x_j + tu)}{(A(x_j + tu), A(x_j + tu))^{1/2}} - x_j\} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} . (e^{w_j(x_j + tu)T_0} x_j + te^{w_j(x_j + tu)T_0} u - x_j) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (e^{w_j(x_j + tu)\lambda_j} - 1)x_j + \lim_{t\to 0} e^{w_j(x_j + tu)T_0} u =$$

$$= \frac{d}{dt} w_j(x_j + tu)\Big|_{t=0} .\lambda_j . e^{z_j(x_j)\lambda_j} x_j \quad e^{z_j(x_j)T_0} u.$$

<u>OBSERVACION 21</u>: Si $u \in T_{x_j} V_j$ entonces $u = \sum_{k\neq j} u_k x_k$, es decir, u no tiene componente según x_j; en consecuencia $e^{\alpha T_0} u$ tampoco tiene componente según x_j.

Para demostrarlo, sea $u = \sum_{k=1}^{n} u_k x_k \in T_{x_j} V_j$, como $u \in T_{x_j} S$ debe ser $Re(Ax_j, Au) = 0$, y como el vector u pertenece a E_j se tiene que su j-ésima coordenada es real, es decir, $u_j \in R$.

Operando

$$Re(u_j) = Re(e_j, \sum_{k=1}^{n} u_k e_k) \quad Re(Ax_j, A(\sum_{k=1}^{n} u_k x_k)) =$$

$$= Re(Ax_j, Au).$$

Por lo tanto $u_j = 0$.

Además, como los x_k son autovectores de $e^{\alpha T_0}$ para todo $\alpha \in C$, se tiene que $e^{\alpha T_0} u = \sum_{k\neq j} u_k e^{\alpha\lambda_k} x_k$,es decir que es un vector sin componente según x_j.

<u>OBSERVACION 22</u>: Los autovalores de $T_{x_j} g_j$ son $e^{z_j(x_j)\lambda_k}$ y $e^{\overline{z_j(x_j)\lambda_k}}$ donde k toma todos los valores entre 1 y n salvo j.

En efecto, si $\lambda \neq 0$ entonces λ es autovalor de $T_{x_j} g_j$ si y sólo si existe $u \in T_{x_j}V_j$ tal que $T_{x_j}g_j(u)$ λu. De acuerdo con las observaciones 20 y 21, esta condición es equivalente a

$\frac{d}{dt} w_j(x_j + tu) \Big|_{t=0} \lambda_j e^{z_j(x_j)\lambda_j} x_j + e^{z_j(x_j)T_0} u = \lambda.u$, donde los vectores u y $e^{z_j(x_j)T_0} u$ no tienen componente según x_j.

Como $e^{z_j(x_j)\lambda_j} \neq 0$, la ecuación tiene solución si y sólo si

$\frac{d}{dt} w_j(x_j + tu) \Big|_{t=0} = 0$, y en tal caso resulta $e^{z_j(x_j)T_0} u = \lambda u$, y por lo tanto λ es un autovalor de $e^{z_j(x_j)T_0}$ correspondiente a un vector sin componente según x_j. Debe ser $\lambda = e^{z_j(x_j)\lambda_k}$ o $\lambda = \overline{e^{z_j(x_j)\lambda_k}}$ para algún $k \neq j$, $1 \leq k \leq n$

DEMOSTRACION DEL LEMA 14:

En virtud de las observaciones 20, 21 y 22 se tiene que el conjunto de autovalores de $T_{x_j}g_j$ es $\{e^{z_j(x_j)\lambda_k}, \overline{e^{z_j(x_j)\lambda_k}} \quad k \neq j\}$.

Este conjunto tiene intersección vacía con la circunferencia unitaria, ya que $|e^{z_j(x_j)\lambda_k}| = 1$ sólo es verdadera cuando $z_j(x_j)\lambda_k \in iR$, y esta última condición es incompatible con el hecho que $z_j(x_j)\lambda_j$ es imaginario puro, pues T_0 tiene la propiedad H2.

En consecuencia $T_{x_j}g_j$ no tiene autovalores de módulo 1, es decir, g_j es hiperbólica. ///

CALCULO DE LAS VARIEDADES ESTABLE E INESTABLE DE γ_j $(1 \leq j \leq n)$

Tal como se comentó en el capítulo I , para calcular las variedades estable e inestable de una órbita cerrada hiperbólica es preciso determinar previamente las variedades estable e inestable locales de una transformación de Poincaré asociada a la órbita que se está analizando:

$$W^s_{loc}(x_j,g_j) = \{x \in V_j \cap U_j \quad g^n_j(x) \to x_j \text{ cuando } n \to \infty\}.$$

Sea $x \in V_j \cap U_j$, entonces

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \ , \ \alpha_j \in R, \ y \quad g_j(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k e^{z_j(x_j)\lambda_k} x_k \ ,$$

donde

$$z_j(x)\lambda_j = r_j + i2\pi k_j, \ r_j \in R, \ k_j \in Z,$$

y además $z_j(x_j) = i2\pi\frac{h_j}{\lambda_j}$, con $h_j \in Z$; ya se vio que por la continuidad de $z_j(x)$ debe ser $h_j = k_j$.

Componiendo g_j consigo misma

$$g^2_j(x) = g_j(g_j(x)) = e^{z_{j2}(x)T_0} x \ ,$$

y en general

$$g^n_j(x) = g_j(g^{n-1}_j(x)) = e^{z_{jn}(x)T_0} x \ , \text{ para todo } n \in N,$$

y los z_{jn} se relacionan por la fórmula:

$$z_{jn}(x)\lambda_j = z_{j(n-1)}(x)\lambda_j + r_{jn} + i2\pi k_j, \quad r_{jn} \in R.$$

Por lo tanto

$$\lambda_j z_{jn}(x) = \lambda_j z_{j(n-1)}(x) + r_{jn} + i2\pi k_j =$$

$$= \lambda_j z_{j(n-2)}(x) + r_{j(n-1)} + i2\pi k_j + r_{jn} + i2\pi k_j =$$

$$= \dots = \lambda_j z_j(x) + (r_{j1} + \dots + r_{jn}) + nk_j i2\pi =$$

$$= (r_j + r_{j1} + \dots + r_{jn}) + (n+1)k_j i2\pi$$

Estas relaciones permiten asegurar que $x \varepsilon W^s_{loc}(x_j, g_j)$ si y sólo si

$$e^{z_{jn}(x)T_0}x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{z_{jn}(x)\lambda_k} x_k \xrightarrow[n\to\infty]{} x_j \quad ,$$

y una condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es:

$$(*) \begin{cases} \alpha_k e^{z_{jn}(x)\lambda_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 & \text{si } k \neq j \\ \alpha_j e^{z_{jn}(x)\lambda_j} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 & \end{cases}$$

Si x está suficientemente próximo a x_j se puede suponer que $\alpha_j > 0$, y en ese caso las condiciones (*) son equivalentes a:

$$\begin{cases} \alpha_k = 0 \quad ó \quad e^{z_{jn}(x)\lambda_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ \alpha_j e^{z_{jn}(x)\lambda_j} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \end{cases}$$

que equivale a

$$\begin{cases} \alpha_k = 0 \quad ó \quad \mathrm{Re}(z_{jn}(x)\lambda_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \\ \alpha_j e^{z_{jn}(x)\lambda_j} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \end{cases}$$

Si la sucesión $\{e^{z_{jn}(x)\lambda_j}\}_{n>0}$ converge, entonces la sucesión $\{Re(\lambda_j z_{jn}(x)) = r_j + r_{j1} + \ldots + r_{jn} \quad n \in N\}$ es acotada.

Por otra parte

$$Re(z_{jn}\lambda_k) = Re\{[(r_j + r_{j1} + \ldots + r_{jn}) + (n+1)k_j i2\pi]\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\},$$

por lo tanto, si $Re(z_{jn}\lambda_k) \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty$ entonces

$$Re(\frac{\lambda_k}{\lambda_j}.(n+1)k_j 2\pi i) \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty$$

La condición recién mencionada equivale a:

$$2\pi n.Re(\frac{\lambda_k}{\lambda_j} . i) \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty$$

y esto ocurre si y sólo si $Re(\frac{\lambda_k}{\lambda_j} . i) < 0$.

En consecuencia, para que se verifiquen las condiciones (*) es necesario que $\frac{\pi}{2} < \arg(\frac{\lambda_k}{\lambda_j} . i) < \frac{3}{2}\pi$, esto es, $0 < \arg(\frac{\lambda_k}{\lambda_j}) < \pi$,o sea que debe ser $0 < \arg(\lambda_k\overline{\lambda}_j) < \pi$

Por el modo en que han sido ordenados los autovalores de T_0, esta inecuación se verifica si y sólo si $\alpha_k = 0$ para todo $k < j$.

Queda entonces caracterizado $W^s_{loc}(x_j,g_j)$ por:

$$W^s_{loc}(x_j g_j) = \{x \in V_j \cap U_j \quad = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \text{ tal que } \alpha_k=0 \text{ si } k<j\}.$$

Por definición

$$W^u_{loc}(x_j,g_j) = W^s_{loc}(x_j,g_j^{-1})$$

y por lo tanto, cálculos análogos a los efectuados para el análisis de la variedad estable local permiten demostrar que

$$W^u_{loc}(x_j, g_j) = \{x \in V_j \cap U_j \; : \; x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \; \alpha_k = 0 \text{ si } k > j\}.$$

Se ha demostrado en el lema 9 qu $E_C(x) \cap S$ es conexo, por lo tanto $y \in W^s(\gamma_j) = \bigcup_{t\in R} \Phi_t(W^s_{loc}(x_j, g_j))$ si y sólo si existen $z \in C$ $x \in W^s_{loc}(x_j, g_j)$ tales que $y = e^{T_0} x$; esta condición equivale a

$$y = \sum_{k\geq j} \alpha_k e^{z\lambda_k} x_k \qquad \alpha \neq 0 \quad , z \in C .$$

En efecto, si $\alpha_k \neq 0$ para un $k < j$, entonces $e^{zT_0} x \notin W^s_{loc}(x_j, g_j)$, independientemente del número complejo z que se considere.

En consecuencia

$$W^s(\gamma_j) = \{x \in S \qquad \sum_{\geq j} \alpha_k x_k \quad , \alpha_j \neq 0\} .$$

Análogamente se obtiene

$$W^u(\gamma_j) = \{x \in S \qquad \sum_{\leq j} \alpha_k x_k \quad , \alpha_j \neq 0\} .$$

DEMOSTRACION DEL LEMA 15:

Sea $x \in W^u(\gamma_j) \cap W^s(\gamma_k)$, con j k, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad , \text{ donde } \alpha_j \neq 0, \; \alpha_k \neq 0 \text{ y además}$$

$$\alpha_i = 0 \text{ para todo } i < k, \text{ y } \alpha_i = 0 \text{ para todo } i > j.$$

Se observa en primer lugar que j es mayor que k. Si para $1 \leq i \leq n$ se denota $E_i^+ = \{y \in E : y = \sum_{t \leq i} y_t x_t\}$, y $E_i^- = \{y \in E : y = \sum_{t \geq i} y_t x_t\}$, entonces los espacios tangentes a las variedades estable e inestable en x son:

$$T_x W^u(\gamma_j) = T_x S \cap E_j^+ \quad y \quad T_x W^s(\gamma_k) = T_x S \cap E_k^- .$$

Por lo tanto $T_x W^u(\gamma_j)$ tiene dimensión $2j - 1$, y $T_x W^s(\gamma_k)$ tiene dimensión $2(n - k) - 1$. Además la intersección de ambos subespacios es:

$$T_x W^u(\gamma_j) \cap T_x W^s(\gamma_k) = \{y \in T_x S \quad y = \sum_{k \leq t \leq j} y_t x_t\} ,$$

cuya dimensión es $2(j - k) - 1$.

Por lo tanto:

$$\dim(T_x W^u(\gamma_j) + T_x W^s(\gamma_k)) = 2j-1+2n-2k-1-(2j-2k-1) =$$

$$= 2n - 1 = \dim T_x S,$$

y en consecuencia la intersección de las variedades considerada es trasversal. ///

DEMOSTRACION DEL LEMA 16:

Sea $0 \neq x \in E$, y sean μ , $\bar{\mu}$ $: R \to R$ las funciones dadas por

$$\mu(s) = (Ae^{s\alpha T_0}x, Ae^{s\alpha T_0}x) \quad y \quad \bar{\mu}(s) = (Ae^{s\alpha T}x, Ae^{s\alpha T}x).$$

Se observa de inmediato que $\mu(0) = \overline{\mu}(0) = (Ax,Ax) > 0$.

Si $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ entonces $Ae^{s\alpha T_0}x = \sum_{j=1}^{n} A\alpha_j e^{s\alpha\lambda_j} x_j$, y como

$Re(\alpha\lambda_j) > 0$, resulta que $Ae^{s\alpha T_0}x \to 0$ cuando $s \to -\infty$.

Considerando el conjunto $\{x_j' , 1 \leq j \leq n\}$ de autovectores de T correspondientes a autovalores$\{\lambda_j' , 1 \leq j \leq n\}$ y $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j' x_j'$,se tiene que $Ae^{s\alpha T}x = \sum_{j=1}^{n} A\alpha_j' e^{s\alpha\lambda_j'} x_j'$, y como $Re(\alpha\lambda_j')$ es positivo para todo j, $Ae^{s\alpha T}x \to 0$ cuando $s \to -\infty$

Si $s \to +\infty$, entonces $|Ae^{s\alpha T_0}x| \to +\infty$ y $|Ae^{s\alpha T}x| \to +\infty$, pues A es isomorfismo lineal y continuo, y tanto $|e^{s\alpha T_0}x|$ como $|e^{s\alpha T}x|$ tienden a infinito con s.

Por otra parte, derivando μ ,

$$\mu'(s) = 2Re(Ae^{s\alpha T_0}x, A\alpha T_0 e^{s\alpha T_0}x) =$$

$$= 2Re(Ae^{s\alpha T_0}A^{-1}y, (A\alpha T_0 A^{-1})(Ae^{s\alpha T_0}A^{-1})y) ,$$

donde se ha tomado $y = Ax$.

Luego

$$\mu'(s) = 2Re(y', A\alpha T_0 A^{-1} y') \quad \text{con} \quad y' = Ae^{s\alpha T_0}A^{-1}y,$$

y por lo tanto:

$$\mu'(s) = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n} y_j'\alpha\lambda_j\bar{y}_j' = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j|y_j'|^2.$$

La elección que se hizo de α permite asegurar que $\mu'(s) > 0$.

La función $Gl^{\#}(E)\times E \to R$, que al par (T,x) le asigna el número $\mathrm{Re}(Ax,A\alpha Tx)$ es continua, y toma valores positivos en (T_0,x) para todo $x \in S$, por lo tanto es positiva en (T,x) para todo $x \in S$ y para todo T en un entorno W de T_0. En consecuencia, para todo $x \in E_*$ y $T \in W$, se tiene que $\mathrm{Re}(Ax,A\alpha Tx) > 0$.

Como $\bar{\mu}'(s) = 2\mathrm{Re}(Ae^{s\alpha T}x, A\alpha Te^{s\alpha T}x)$, queda probado que $\bar{\mu}'(s) > 0$ para todo $s \in R$. Entonces $E_* \subset \bigcup_{t\in R} R_t$ y $E_* \subset \bigcup_{t\in R} R_t'$.

Ambas uniones son disjuntas:

Suponiendo que existen $t_1 \neq t_2$ tales que $\phi(t_1\alpha,S) \cap \phi(t_2\alpha,S) \neq \phi$ deben existir $x,y \in S$ tales que $e^{t_1\alpha T_0}x = e^{t_2\alpha T_0}y$, lo que implica que $x = e^{-t_1\alpha T_0}e^{t_2\alpha T_0}y = e^{(t_2-t_1)\alpha T_0}y$. Como μ es biyectiva, para que esto ocurra deben ser $t_2 = t_1$ y $x = y$.

En forma análoga se demuestra que $R_{t_1}' \cap R_{t_2}' = \phi$. ///

<u>DEMOSTRACION DEL LEMA 17:</u>

Es claro que h lleva las órbitas del campo T_0 en órbitas del campo

T; para probar que es homeomorfismo se consid ra la aplicación

$$\Phi : \dot{C} \times E_{*} \longrightarrow E_{*}$$

$$(z,\ x) \longrightarrow e^{zT_0}x = \Phi(z,x),$$

de la cual sólo será de interés la restı icciói a $R.\alpha\times S$.

Como

$$D\Phi(z,x)(\xi,v) = e^{zT_0}v + \xi e^{zT_0}T_0x = e^{zT_0}(v + \xi T_0 x)$$

resulta que

$$Nu(D\Phi(z,x)) = \{(\xi,v) : v + \xi T_0 x = 0\} = C.(1,-T_0x) .$$

Este conjunto es un espacio vectorial re ıl, y una base del mismo es: $\{(1,-T_0x)\ ,\ (i,-iT_0x)\}$

Por otra parte, el espacio tangente a $R.\alpha\times S$ en un punto está dado por:

$$T_{(z,x)}(R.\alpha\times S) = \{(\xi,v)\quad Re(Ax,Av) = 0 \text{ y } \xi = \alpha t,\ t \in R\},$$

de modo que

$$Nu(D\Phi(z,x)) \cap T_{(z,x)}(R.\alpha\times S) = \{(\alpha t,-\alpha tT_0x)\quad t \in R \text{ y } Re(Ax,A(-\alpha tT_0x))=$$

Se vio en la demostración del lema 16 que $Re(Ax,A\alpha T_0x) > 0$, por lo tanto $Nu(D\Phi(z,x)) \cap T_{(z,x)}(R.\alpha\times S) = \{0\}$

Más aún, como $Re(Ax,\alpha ATx) > 0$ para todo $T \in K$ se obtiene que

$$Nu(D\Psi(z,x)) \cap T_{(z,x)}(R.\alpha\times S) = \{0\} .$$

En consecuencia $\Phi|R.\alpha\times S$ y $\Psi|R.\alpha\times S$ son difeomorfismos, y por lo tanto homeomorfismos entre $R.\alpha\times S$ y E_* .

Lo único que queda por ver es que h y su inversa son continuas en el origen.

Una sucesión $(x_k) \subset E_*$ tiende a cero si y sólo si existe una sucesión $(t_k) \subset R$ de tal modo que

$$t_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} -\infty \qquad , \text{ y } \quad x_k \in R_{t_k} ,$$

por lo tanto si $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ se tiene que $h(x_k) \in R'_{t_k}$ y $t_k \xrightarrow[k\to\infty]{} -\infty$, y en consecuencia $h(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Análogamente se prueba que si $(y_k) \subset E_*$ converge a cero entonces $h^{-1}(y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. ///

IV. CONTRAEJEMPLO

Se desarrolla a continuación un ejemplo que demuestra que no es posible omitir la hipótesis de que T_0 posea la propiedad H2 en el enunciado del teorema 5.

En el espacio $E = C^2$ con la base ortonormal $\beta = \{e_1, e_2\}$, se considera $T_0 \in \mathcal{L}(E,E)$ dada por

$T_0(x_1e_1 + x_2e_2) = \lambda_1x_1e_1 + r\lambda_1x_2e_2$ donde $0 \neq \lambda_1$ es un número complejo y $r = \frac{p}{q}$ es un número racional, cociente de los enteros p y q.

Dado $\varepsilon > 0$ sea $\lambda \in R$ tal que $|\lambda - r| < \frac{\varepsilon}{|\lambda_1|}$ y sea $T_\lambda \in \mathcal{L}(E,E)$ la transformación

$$T_\lambda(x_1e_1 + x_2e_2) = \lambda_1x_1e_1 + \lambda\lambda_1x_2e_2 ,$$

entonces

$$(T_0 - T_\lambda)(x_1e_1 + x_2e_2) = (r - \lambda)\lambda_1x_2e_2 ,$$

y por lo tanto

$$\| T_0 - T_\lambda \| < |r - \lambda||\lambda_1|$$

Es decir que

$$\| T_0 - T_\lambda \| < \varepsilon .$$

Las órbitas de T_0 y T_λ por un punto $x = x_1e_1 + x_2e_2$ son:

$$E_0(x) = \{e^{zT_0}(x_1e_1 + x_2e_2) \quad z \in C$$

$$= \{ e^{z\lambda_1} x_1 e_1 + e^{zr\lambda_1} x_2 e_2 \quad z \in C\} \ , \ y$$

$$E(x) = \{ e^{zT_\lambda}(x_1 e_1 + x_2 e_2) \quad z \in C\} =$$

$$= \{ e^{z\lambda_1} x_1 e_1 + e^{z\lambda\lambda_1} x_2 e_2 \quad z \in C\}$$

Cualquiera sea $x \in E$, la órbita $E_0(x)$ tiene entrecruzamientos, y por lo tanto no es homeomorfa a C. En efecto:

$$\begin{cases} e^{z\lambda_1} x_1 = x_1 \\ e^{zr\lambda_1} x_2 = x_2 \end{cases}$$

tiene soluciones no triviales. Basta considerar $z \in C$ tal que $z\lambda_1$ y $zr\lambda_1$ sean múltiplos enteros de $2\pi i$, lo cual se cumple si

$$z = k \frac{\overline{\lambda_1}}{|\lambda_1|^2} \cdot q \cdot 2\pi i \qquad k \in Z.$$

En campio si $\lambda \notin Q$, las únicas órbitas de T_λ no difeomorfas a C son aquéllas que contienen a e_1 o e_2 , ya que el sistema

$$\begin{cases} e^{z\lambda_1} = 1 \\ e^{z\lambda\lambda_1} = 1 \end{cases}$$

no tiene solución no trivial. En efecto,si para un par de números enteros k y k' el sistema

$$\begin{cases} z\lambda_1 = (2\pi i)k \\ z\lambda\lambda_1 = (2\pi i)k' \end{cases}$$

tiene solución no trivial, se concluye que $\lambda = \frac{k}{k'}$, en contradicción con la elección de λ.

Si en el ejemplo expuesto se considera $|\lambda_1| \neq 1$ y $|r\lambda_1| \neq 1$, se advierte que no es razonable imponer la condición de que e^{T_0} sea hiperbólico para obtener resultados satisfactorios sobre la estabilidad de campos vectoriales complejos.

APENDICE I

VARIEDADES DEFINIDAS EN FORMA IMPLICITA

TEOREMA

Sean X e Y variedades de clase C^r modeladas en espacios de Banach E y F respectivamente, y sea $f:X \to Y$ una aplicación de clase C^r y $A = f^{-1}(b)$. Si $A \neq \phi$ y f es sumersión, entonces A es una subvariedad cerrada de X, y para cada $a \in A$, el espacio tangente $T_a A$ se identifica con $Nu(T_a f)$.

DEMOSTRACION:

Sea $a \in A$ y sean (w,W,E) y (w',W',F) mapas centrados en a y en $b = f(a)$ respectivamente, tales que $f(W) \subset W'$; si $\Omega = w(W)$ y $\Omega' = w'(W')$, sea $g = w' \circ f \circ w^{-1} : \Omega \to \Omega'$. Es inmediato verificar que $Dg(0):E \to F$ es un epimorfismo directo y que $g(0) = 0$.

Sea $\psi:\Omega_1 \to \Omega_0$ un difeomorfismo C^r entre entornos de 0 en E, $\Omega_0 \subset \Omega$, de modo que $g \circ \psi(\xi) = Dg(0)(\xi)$ para todo $\xi \in \Omega_1$; considerando $U = w^{-1} \circ \psi(\Omega_1)$ y $u = \psi^{-1} \circ w : U \to \Omega_1$ se obtiene un difeomorfismo C^r tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & \Omega_1 \arrow[d, "Dg(0)"] \\ V = W' \arrow[r, "v=w'"'] & \Omega' = \Omega_2 \end{tikzcd}$$

es conmutativo

Se obtienen así mapas centrados (u,U,E) en a, (v,V,F) en b, tales que $\qquad v_o f_o u^{-1} = Dg(0):\Omega_1 = u(U) \to \Omega_2 = v(V).$

Por consiguiente $u(A \cap U) = u(f^{-1}(b)) = \Omega_1 \cap Nu(Dg(0))$. Como $Nu(Dg(0))$ es un subespacio directo de E, resulta que A es subvariedad. Para obtener una caracterización de T_aA basta observar que $T_au(T_aA) = Nu(Dg(0))$, de modo que

$$T_aA = (T_au)^{-1}(Nu(Dg(0)) = (T_au)^{-1}(Dg(0)^{-1}(0)) = (T_af)^{-1}(T_bv)^{-1}(0)=$$

$$= (T_af)^{-1}(0) = Nu\ (T_af). \qquad ///$$

APENDICE II

TRASVERSALIDAD

DEFINICION: Sean X e Y variedades diferenciables , $Z \subset Y$ una subvariedad y $f:X \to Y$ una aplicación C^∞, f es *trasversal* a Z en $x_0 \in X$ si $f(x_0) \notin Z$ o $f(x_0) \in Z$ y la composición

$$T_{x_0}X \xrightarrow[T_{x_0}f]{} T_{f(x_0)}Y \longrightarrow T_{f(x_0)}Y \,/\, T_{f(x_0)}Z$$

es un epimorfismo directo. F es trasversal a Z si lo es en todo $x \in X$.

La condición de trasversalidad entre f y Z se puede resumir mediante las siguientes dos condiciones para todo $x \in f^{-1}(Z)$:

(i) $(T_xf)^{-1}(T_{f(x)}Z)$ es subespacio directo de T_xX

(ii) $T_{f(x)}Y = T_{f(x)}Z + \mathrm{Im}(T_xf)$,

remarcando que en el caso de que las variedades sean de dimensión finita la primera condición es superflua.

LEMA: Sean X e Y variedades, $Z \subset Y$ subvariedad y $f:X \to Y$ de clase C^∞; entonces si $x_0 \in f^{-1}(Z)$ son equivalentes

(i) f es trasversal a Z en x_0.

(ii) Existen mapas centrados en x_0 y $f(x_0)$, (u,U,E) y (v,V,F), y subespacios suplementarios F_1 y F_2 de F tales que

(a) $f(U) \subset V$

(b) $v(V) = \Omega_1 \times \Omega_2$ con Ω_i entorno de 0 en F_i $(i = 1,2)$

(c) $v(V \cap Z) = \Omega_1 \times \{0\}$

(d) $p_2 \circ v \circ f \circ u^{-1} : u(U) \to \Omega_2$ es sumersión.

DEMOSTRACION: Si vale (ii) se tiene que la composición $p_2 \circ Dv \circ f \circ u^{-1}(0)$ es epimorfismo directo, y como u y v son difeomorfismos, resulta que f es trasversal a Z.

Si vale (i) y (u,U,E) y (v,V,F) son mapas centrados en x_0 y $f(x_0)$ para los cuales valen (a), (b) y (c), $v \circ f \circ u^{-1}$ debe ser trasversal a $\Omega_1 \times \{0\}$ en 0, así que la diferencial de $g_2 = p_2 \circ v \circ f \circ u^{-1}$ en 0 es epimorfismo directo. Entonces $p_2 \circ v \circ f \circ u^{-1} : \Omega \to \Omega_2$ es una sumersión en un entorno de $0 \in \Omega \subset u(U)$. Considerando $U = u^{-1}(\Omega)$ se verifica (ii). ///

PROPOSICION: Con las mismas hipótesis que en el lema precedente, se supone que f es trasversal a Z, entonces:

(i) $f^{-1}(Z)$ es subvariedad de X

(ii) Si $x_0 \in f^{-1}(Z)$, $T_{x_0}(f^{-1}(Z)) = (T_{x_0} f)^{-1}(T_{f(x_0)} Z)$

(iii) Si $x_0 \in f^{-1}(Z)$ entonces $T_{x_0} f$ induce un isomorfismo entre $T_{x_0} X / T_{x_0}(f^{-1}(Z))$ y $T_{f(x_0)} Y / T_{f(x_0)} Z$.

DEMOSTRACION: Si $f^{-1}(Z) \neq \phi$, con la notación del lema previo se tiene

$f^{-1}(Z) \cap U = f^{-1}(Z \cap V) \cap U = u^{-1}(g_2^{-1}(0))$. Como g_2 es sumersión,

$g_2^{-1}(0)$ es subvariedad de $u(U)$ y por lo tanto $f^{-1}(Z) \cap U$ es subvariedad de U.

$T_{x_0}u(T_{x_0}(f^{-1}(Z))) = Nu(Dg_2(0)) = (Dv_\circ f_\circ u^{-1}(0))^{-1}(F_1)$, lo que prueba (ii), y (iii) es una consecuencia inmediata de (i). ///

<u>DEFINICION</u>: Si X_1, X_2, Y son variedades, dos aplicaciones $f_1 : X_1 \to Y$, $f_2 : X_2 \to Y$ de clase C^∞ se dicen *trasversales* si la aplicación $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y \times Y$ es trasversal a la subvariedad diagonal $\Delta_Y \subset Y \times Y$.

<u>OBSERVACION</u>: La trasversalidad entre f_1 y f_2 equivale a que para todo $(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2$ tal que $f_1(x_1) = f_2(x_2)$ la aplicación

$$T_{x_1}X_1 \times T_{x_2}X_2 \longrightarrow T_{f(x_1)}Y \text{ dada por } (v_1,v_2) \to T_{x_1}f_1(v_1) - T_{x_2}f$$

es epimorfismo directo, que a su vez puede enunciarse mediante el siguiente par de condiciones:

(i) $\{(v_1,v_2) \quad T_{x_1}f_1(v_1) = T_{x_2}f_2(v_2)\}$ es subespacio directo de $T_{x_1}X_1 \times T_{x_2}X_2$

(ii) $Im(T_{x_1}f_1) + Im(T_{x_2}f_2) = T_{f(x_1)}Y$

Por lo tanto, si f_1 y f_2 son trasversales el *producto fibrado*

$X_1 \underset{Y}{\times} X_2 = (f_1 \times f_2)^{-1}(\Delta_Y)$ es vacío o es una subvariedad de $X_1 \times X_2$.

este último caso, si $f_1(x_1) = f_2(x_2)$ entonces

$$T_{(x_1,x_2)}(X_1 \underset{Y}{\times} X_2) = T_{x_1}X_1 \underset{T_{f_1(x_1)}Y}{\times} T_{x_2}X_2$$

$$= \{(v_1, v_2) \quad T_{x_1} f_1(v_1) = T_{x_2} f_2(v_2)\}$$

Es inmediato que la trasversalidad entre una aplicación $f:X \to Y$ y una subvariedad Z de Y equivale a la trasversalidad entre f y j_Z, donde j_Z es la inclusión de Z en Y; en tal caso la aplicación $x \to (x, f(x))$ define un difeomorfismo entre $f^{-1}(Z)$ y $X \times_Y Z$.

Finalmente, dos subvariedades X_1, X_2 de X se dicen trasversales si lo son las inclusiones j_1 y j_2, o lo que es equivalente, si j_1 es trasversal a X_2. En tal caso $X_1 \cap X_2$ es una subvariedad de X, y además $T_x(X_1 \cap X_2) = T_x X_1 \cap T_x X_2$ para todo $x \in X_1 \cap X_2$.

En efecto, $p_j : X_1 \times_X X_2 \to X_j$ $(j = 1,2)$ son inmersiones regulares-

$$X_1 \times_X X_2 = (j_1 \times j_2)^{-1}(\Delta_X) = \{(x,x) \quad x \in X_1 \cap X_2\} \quad \text{y}$$

$$T_{(x,x)}(X_1 \times_X X_2) = T_x X_1 \times_{T_{(x,x)} X \times X} T_x X_2 = \{(v,v) \quad v \in T_x X_1 \cap T_x X_2\}.$$

A.M.P. FAURING

A.R. Larotonda

BIBLOGRAFIA

[D] J. Dieudonné, Fundamentos de Análisis Moderno. Editorial Reverté.

[H.S] Hirsch,M.W. / Smale,S. Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra. Academic Press.

[L] Larotonda, A.R. Notas sobre Variedades Diferenciables.Universidad Nacional del Sur.

[P] Pugh,C. On a Theorem of P. Hartman. American Journal of Math. Vol XCI N°2 1969.

[P.S] Palis,J. / Smale,S. Structural Stability Theorems. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Vol. XIV

[S] Smale,S. Differentiable Dynamical Systems. Bulletin of the American Mathemarical Society. Vol 73 N°6 1967

A.M.P. FAURING

A.R. Larotonda