Sobre el levantamiento de datos de Weil generalizados

Sessa, Carmen I.

1982

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

SOBRE EL LEVANTAMIENTO
DE DATOS DE WEIL
GENERALIZADOS

TRABAJO PRESENTADO PARA OPTAR AL TITULO
DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

CARMEN I. SESSA

Director: Dr. Miguel Herrera

Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias
Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

JULIO 1982

A Rodolfo, mi padre.

Este trabajo fue posible gracias a la guía y apoyo de mi director,el doctor Miguel Herrera y a la constante y cálida colaboración de mi compañera y amiga Alicia Dickenstein. Quiero agradecer a ambos,como así también a mis compañeros del Departamento de Matemática :Pablo Calderón,Adrián Paenza, Fernando Cukierman y Eduardo Dubuc por su entusiasmo cotidiano tan estimulante.

Mi agradecimiento también al Dr. Nicolás Coleff, de la Universidad de La Plata, por su desinteresada colaboración y al Dr. Enzo Gentile por su confianza permanente.

Quiero asimismo expresar mi reconocimiento al CONICET por las becas que me han sido otorgadas estos años y que posibilitaron la concreción de este trabajo.

INTRODUCCION

El punto de partida de este trabajo es el siguiente resultado de André Weil ([W] , pág. 112):

(W) Sea X una variedad Kähleriana compacta, $Y \subseteq X$ una hipersuperficie compleja, $\Lambda = (U_\alpha)$ un cubrimiento abierto de X, $\{\tilde{\omega}_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \Omega^1(*Y))\}$ una familia de 1-formas d-cerradas con polos sobre Y, y tales que $\tilde{\omega}_\alpha - \tilde{\omega}_\beta$ es regular en $U_\alpha \cap U_\beta$, para todo par (α,β). Entonces, la existencia de una forma global d-cerrada $\tilde{\omega} \in \Gamma(X,\Omega^1(*Y))$ tal que $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_\alpha$ sea regular sobre todo U_α es equivalente a que el ciclo polar definido por la familia $(\tilde{\omega}_\alpha)$ sea homólogo a cero en $H^2(X,\mathbb{C})$.

La condición $(d\tilde{\omega}_\alpha = 0)$ es necesaria para que los datos definan un ciclo complejo. Para plantear el problema <u>sin dicha condición</u>, observemos que siempre se puede asociar a los datos $(\tilde{\omega}_\alpha)$ una corriente $\bar{\partial}$-cerrada T sobre X, de bigrado (1,1) y con soporte en Y, mediante las definiciones locales

$$T_{|U_\alpha} = \mathrm{Res}_Y\ [\tilde{\omega}_\alpha]$$

donde Res es el operador residual de Herrera-Lieberman [H-L] . En estas condiciones, el resultado de Weil puede reformularse de la siguiente manera, en el caso en que X es proyectiva o Stein:

(W') La existencia de una forma global $\tilde{\omega} \in \Gamma(X,\Omega^1(*Y))$ tal que $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_\alpha$ sea regular en todo U_α es equivalente a que la clase de T en $H^1(X,\Omega^1)$ sea nula

El objetivo principal del presente trabajo es el estudio de las generalizaciones posibles de este resultado y sus consecuencias. Resulta natural, en primer término, la consideración del grupo de $\bar\partial$-cohomología

$$H^1_{\bar\partial}(\Gamma(X,\mathcal{D}'^{r,\cdot}_Y)) \simeq H^1_{[Y]}(X,\Omega^r)$$

de corrientes de X de bigrado $(r,.)$ y con soporte en la hipersuperficie Y En efecto, veremos más adelante que el resultado (W') caracteriza el núcleo del homomorfismo canónico:

$$H^1_{[Y]}(X,\Omega^r) \longrightarrow H^1(X,\Omega^r)$$

en el caso $r=1$.

En general, sea X una variedad holomorfa de dimensión n, $Y \subseteq X$ una subvariedad analítica de dimensión pura $n-p$. Los haces de cohomología moderada $\mathcal{H}^{\cdot}_{[Y]}\Omega^r$ han sido introducidos por J.P. Ramis en [R] :

$$\mathcal{H}^{\cdot}_{[Y]}\,\Omega^r = \underline{R}\ \lim_{\overrightarrow{k}}\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}/_{I^k},\Omega^k) \cong \mathcal{H}_{\bar\partial}({}'\mathcal{D}'^{r,\cdot}_Y)$$

para I un haz de ideales que defina Y . Estos haces no se identifican con la cohomología local usual $\mathcal{H}^{\cdot}_Y\Omega^r$ porque la resolución $({}'\mathcal{D}'^{r,\cdot}_Y,\bar\partial)$ de Ω^r por corrientes con soporte en Y tiene fibra $\mathcal{O}_X$-inyectiva, pero no es un complejo de haces inyectivos.

Consideremos ahora el p-ésimo grupo de cohomología moderada global:

$$H^p_{[Y]}(X,\Omega^r) = \Gamma(X,\mathcal{H}^p_{[Y]}\Omega^r) \cong \Gamma(X,\mathcal{H}^p_{\bar\partial}({}'\mathcal{D}'^{r,\cdot}_Y)).$$

Mostraremos más adelante (cf. cap.I,§2), que

$$\Gamma(X, \mathcal{H}_{\bar\partial}('\mathcal{D}_Y^{r'}))\qquad H^p_{\bar\partial}(\Gamma(X, '\mathcal{D}_Y^{r''}))\ ,$$

representación que será útil para la interpretación del levantamiento de datos de Weil p-codimensionales, que pasamos a definir.

Sea entonces $\Upsilon = \{Y_1, \ldots, Y_p\}$ una familia de p hipersuperficies de X cuya intersección es Y . Dado $\Lambda = (U_\alpha)$ un cubrimiento abierto de X y $\{\tilde\omega_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \Omega^r(*\cup\Upsilon))\}$ una colección de r-formas meromorfas con polos en la unión de la familia Υ , diremos que es un <u>dato de Weil</u> si en $U_\alpha \cap U_\beta$ se verifica

$$\tilde\omega_\alpha - \tilde\omega_\beta = \sum_{i=1}^{p} \tilde\omega(i)$$

donde $\tilde\omega(i) \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \Omega^r(*\bigcup_{j\neq i} Y_j))$, o sea $\tilde\omega(i)$ es regular respecto de Y_i .

Observemos que la colección $(\tilde\omega_\alpha)$ define una corriente $\bar\partial$-cerrada R sobre X , de bigrado (r,p) y con soporte en Y , definida localmente por

$$R_{|U_\alpha} = \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p}[\tilde\omega_\alpha]$$

donde $\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p}$ es el operador residuo-múltiple ([C-H]).

En efecto, en $U_\alpha \cap U_\beta$

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p}[\tilde\omega_\alpha - \tilde\omega_\beta] = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p}[\tilde\omega(i)]$$

y todas estas corrientes son nulas pues la forma es regular en alguna de las hipersuperficies del residuo (cf. cap.0). En el caso en que X sea Stein, o X proyectiva e Y_i amplia para $1 \leqslant i \leqslant p$, se demostrará que las siguientes condiciones son equivalentes:

a) existe una forma meromorfa global $\tilde{\omega} \subset \Gamma(X,\Omega^r(*\cup\Upsilon))$, tal que en cada abierto $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_\alpha$ se parte como una suma de formas cada una de ellas regular respecto de alguna hipersuperficie de Υ.

b) la clase de R en $H^p(X,\Omega^r)$ es nula.

Por otra parte, mostraremos (cap.II, §2) que toda corriente $\bar{\partial}$-cerrada $T \in \Gamma(X,'\mathcal{D}'^{r,p}_Y)$ admite una descomposición única

$$T = R + \bar{\partial}S$$

donde R es una corriente localmente residual asociada a un dato de Weil y $S \in \Gamma(X, '\mathcal{D}'^{r,p-1}_Y)$. En realidad este resultado vale para conjuntos Y que sean intersecciones completas locales con modificaciones técnicas que serán expuestas en cap.II, §2.

Estos resultados caracterizan por un lado el núcleo del homomorfismo canónico

$$H^p_{[Y]}(X,\Omega^r) \longrightarrow H^p(X,\Omega^r) \qquad ,(\text{cf.cap II}, \S 2) \quad ,$$

y además permiten definir el "cup-product" en cohomología moderada (cf. cap.IV).

En el capítulo III, se estudiará una generalización del problema de Weil para colecciones de datos que cumplan las siguientes condiciones más fuertes de compatibilidad:

Sea $\Upsilon = \{Y_1,\ldots,Y_p\}$ una familia de hipersuperficies en X con intersección completa (X Stein, ó X proyectiva e Y_i amplias, $1 \leq i \leq p$), y sea $j \in N$ $(1 \leq j \leq p)$. Para todo conjunto $J \subseteq \{1,\ldots,p\}$ de cardinal j, notemos $Y_J = \bigcup_{i \in J} Y_i$. Dado $\Lambda = (U_\alpha)$

un cubrimiento abierto de X y $\{\tilde{\omega}_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \Omega^r(*\Upsilon))\}$ una colección de r-formas meromorfas con polos en la union de la familia Υ, diremos que es un j-dato de Weil si en $U_\alpha \cap U_\beta$, $\tilde{\omega}_\alpha - \tilde{\omega}_\beta$ se parte como una suma de formas cada una de ellas regular en j hipersuperficies de Υ.

A cada j-dato de Weil pueden asociarse las corrientes de X $\{R_J\}_{|J|=j}$ con las siguientes definiciones locales

$$R_J|_{U_\alpha} = \mathrm{Res}_{Y_{i_1},\dots,Y_{i_{p-j}},Y_J}[\tilde{\omega}_\alpha]$$

donde $\{i_1,\dots,i_{p-j}\} = \{1,\dots,p\} - J$ (consideraciones análogas a las anteriores demuestran que $R_J|_{U_\alpha} = R_J|_{U_\beta}$ en $U_\alpha \cap U_\beta$).

Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) existe una forma meromorfa global $\tilde{\omega} \in \Gamma(X,\Omega^r(*\cup\Upsilon))$ tal que en cada abierto $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_\alpha$ es una suma de formas cada una de ellas regular respecto de j hipersuperficies de la familia Υ.

b) la clase de R_J es nula en $H^{p-j+1}(X,\Omega^r)$ para todo conjunto J de cardinal j tal que $p \in J$.

I N D I C E

CAPITULO 0

En este capítulo recordaremos la definición de las corrientes residuo múltiple y residuo múltiple-valor principal de Coleff-Herrera junto con las propiedades que serán usadas más adelante (cf. [C - H]). Fijaremos también la notación.

0.1 Sea X una variedad holomorfa de dimensión n y sea $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_{p+1}\}$ $(0 \leq p < n)$ una familia de hipersuperficies en X.

Notaremos $\cap \mathcal{Y} = \bigcap_{i=1}^{p+1} Y_i$

$\cup \mathcal{Y} = \bigcup_{i=1}^{p+1} Y_i$

y $\forall j : 1 \leq j \leq p+1$, $\mathcal{Y}(j) = \{Y_1, \ldots, \hat{Y}_j, \ldots, Y_{p+1}\} = \mathcal{Y} - \{Y_j\}$.

Sea $\tilde{\lambda} \in \Gamma(X, \mathcal{E}^r(* \cup \mathcal{Y}))$ una r-forma semimeromorfa en X con polos sobre la unión $\cup \mathcal{Y} = \bigcup_{i=1}^{p+1} Y_i$.

Las corrientes p+1-residuo múltiple $R_{\mathcal{Y}}[\tilde{\lambda}]$ y p-residuo múltiple-valor principal $RP_{\mathcal{Y}}[\tilde{\lambda}]$ cuya existencia está demostrada en [C - H], tienen la siguiente definición local:

Sea W un abierto de X y $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_p)$ funciones holomorfas en W tales que $(\phi_j = 0) = W \cap Y_j$, $\forall\ 1 \leq j \leq p+1$.

Entonces dada $\alpha \in \mathcal{D}^{2n-p-r-1}(W)$

$$R_{\mathcal{Y}}[\tilde{\lambda}](\alpha) = \lim_{\delta \to 0} \int_{T^{p+1}_{\tilde{\delta}(\delta)}(\phi)} \tilde{\lambda} \wedge \alpha$$

y dada $\beta \in \mathcal{D}^{2n-p-r}(W)$

$$R P_{\mathcal{Y}}[\tilde{\lambda}](\beta) = \lim_{\delta \to 0} \int_{D^{p+1}_{\tilde{\delta}(\delta)}(\phi)} \tilde{\lambda} \wedge \beta$$

donde

i) $\underset{\sim}{\delta}(\delta) = (\delta_1(\delta), \dots, \delta_{p+1}(\delta)) \in \mathbb{R}^{p+1}_{>0}$, $\forall\, \delta \in (0,1)$ es una aplicación analítica admisible, o sea

$\delta_{p+1}(\delta) \to 0$ y $\forall j : 1 \leq j \leq p$ y $\forall\, q \in \mathbb{N}$

$$\frac{\delta_j(\delta)}{\delta^q_{j+1}(\delta)} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$$

ii) $T^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi)$ es el p+1 - tubo

$\{|\phi_j| = \delta_j \;;\; 1 \leq j \leq p+1\}$ orientado convenientemente ([C - H])

y $D^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi) = T^{p}_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi) \cap \{|\phi_{p+1}| > \delta_{p+1}\}$

donde $T^{p}_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}$ es el p-tubo asociado a $(\phi_1, \dots, \phi_p)$

0.2

$\forall\, \tilde{\lambda} \in \Gamma(X, \Omega^r(* \cup Y))$ forma meromorfa con polos en $\cup Y$

i) $R_Y[\tilde{\lambda}]$ tiene bigrado $(r, p+1)$

o sea $R_Y[\tilde{\lambda}](\alpha) = 0$ para toda forma C^∞ α de bigrado (t,s) con $(t,s) \neq (n-r, n-(p+1))$

ii) $RP_Y[\tilde{\lambda}]$ tiene bigrado (r,p)

0.3

$$\mathrm{sop}\,(R_Y[\tilde{\lambda}]) \subseteq \bigcap_{i=1}^{p+1} Y_i, \quad \mathrm{sop}\; RP_Y[\tilde{\lambda}] \subseteq \bigcap_{i=1}^{p} Y_i = \cap Y(p+1)$$

0.4. Los operadores

$$R\,P_{\mathcal{Y}}:\ \Omega^r(*\ U\ \mathcal{Y}) \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,p}_{\mathcal{Y}(p+1)}$$

$$R_{\mathcal{Y}}\ :\ \Omega^r(*\ U\ \mathcal{Y}) \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,p+1}_{\mathcal{Y}}$$

son homomorfismos de haces (sobre $\mathbb{C}$) con la siguiente propiedad:

$\forall\ \tilde{\lambda} \in \Gamma\ (W,\ \Omega^r(*\ U\ \mathcal{Y}))$, W abierto de X ,

$\bar{\partial}(RP_{\mathcal{Y}}\ [\tilde{\lambda}]) = R_{\mathcal{Y}}\ [\tilde{\lambda}]$

y si además $d\tilde{\lambda} = 0$

$b\ R\ P_{\mathcal{Y}}\ [\tilde{\lambda}] = R_{\mathcal{Y}}\ [\tilde{\lambda}]$

En particular se deduce que

$$\bar{\partial}\ R_{\mathcal{Y}}\ [\tilde{\lambda}] = 0$$

0.5.

Cuando la familia $\mathcal{Y} = \{Y_1,\dots,Y_{p+1}\}$ tiene intersección completa (i.e: $\dim \bigcap_{i=1}^{p+1} Y_i = n - (p+1)$) se verifican además las siguientes propiedades:

i) Si $\tilde{\lambda} \in \Omega^r\ (*\ U\ \mathcal{Y}(j))$ para algún j, $1 \leq j \leq p+1$, (o sea, si $\tilde{\lambda}$ es regular respecto de Y_j), entonces

$$R_{\mathcal{Y}}\ [\tilde{\lambda}] = 0$$

Además, si $j \leq p$

$$R\,P_{\mathcal{Y}}\ [\tilde{\lambda}] = 0$$

y si $j = p+1$

$$R\,P_{\mathcal{Y}}\,[\tilde{\lambda}] = R_{\mathcal{Y}(p+1)}\,[\tilde{\lambda}]$$

ii) Sea $\mathcal{Y}' = \{Y_1', \ldots, Y_{p+1}'\}$ otra familia de hipersuperficies en X tales que $\dim_C \bigcap_{i=1}^{p+1} Y_i' = n - (p+1)$ e $Y_j' \subseteq Y_j$ para todo j : $1 \leq j \leq p+1$.

Entonces $\forall\, \tilde{\lambda} \in \Omega^r(* \cup \mathcal{Y})$, valen las igualdades

$$R_{\mathcal{Y}}\,[\tilde{\lambda}] = R_{\mathcal{Y}'}\,[\tilde{\lambda}]$$

$$R\,P_{\mathcal{Y}}[\tilde{\lambda}] = R\,P_{\mathcal{Y}'}\,[\tilde{\lambda}]$$

<u>0.6. Notación</u>

I) Dada $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_{p+1}\}$ notaremos

$$R\,P_{\mathcal{Y}} = \mathrm{Res}_{Y_1, \ldots, Y_p}\ P_{Y_{p+1}}$$

$$R_{\mathcal{Y}} = \mathrm{Res}_{Y_1, \ldots, Y_p}$$

Si $\{\phi_1, \ldots, \phi_p\}$ son ecuaciones de las hipersuperficies notaremos

$$\mathrm{Res}_{V(\phi_1), \ldots, V(\phi_p)} = \mathrm{Res}_{\phi_1, \ldots, \phi_p} = \mathrm{Res}_{\phi}$$

Si $X' \subseteq X$, la restricción de la corriente residuo múltiple a X' se notará

$$\mathrm{Res}_{X', \phi}$$

II) Notaremos $\Lambda(j,p)$ al conjunto de familias crecientes de j elementos tomados entre los primeros p naturales.

Además, $\forall J \in \Lambda(j,p)$ notaremos $Y_J = \bigcup_{i \in J} Y_i$

CAPITULO 1

§.1. CARACTERIZACION DEL HAZ DE COHOMOLOGIA MODERADA

Sea X una n-variedad holomorfa; $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_p\}$ una familia de hipersuperficies en X, $Y = \cap \mathcal{Y}$; Ω^r el haz de gérmenes de r-formas holomorfas de X.

Por propiedades generales de los funtores derivados (cf[R]), el haz de cohomología moderada con soporte en el conjunto analítico Y y coeficientes en Ω^r es igual a

$$H^{\cdot}_{[Y]}(\Omega^r) = \varinjlim_k \mathcal{E}xt^{\cdot}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X/I^k}, \Omega^r) = H^{\cdot}('\mathcal{D}^{r,\cdot}_Y, \bar\partial)$$

para I un haz de ideales cuya variedad de ceros sea Y, y donde $('\mathcal{D}^{r,\cdot}_Y, \bar\partial)$ denota el complejo $\bar\partial$ de haces de gérmenes de corrientes con soporte en Y.

La fibra del haz $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X/I}, \Omega^r)$ en un punto $x \in X$, es precisamente el grupo $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x/I_x}, \Omega^r_x)$.

Dado I un haz de ideales sobre X, llamemos $'\mathcal{D}^{r,\cdot}_I$ al subhaz del haz $'\mathcal{D}^{r,\cdot}$ cuya fibra es

$$'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{I,x} = \{T \in {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_x : f.T = 0, \ \forall f \in I_x\}$$

Claramente, identificando un morfismo con su valor en la clase del 1, se obtiene un isomorfismo ϕ

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X/I}, {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}) \xrightarrow{\phi} {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_I$$

Sea $I.\Omega^r$ el haz de gérmenes de r-formas holomorfas de X

cuyos coeficientes están en el ideal I

$$I \,.\, \Omega^r = I \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^r$$

Lema 1.1.1

Si I es un haz de ideales cuya variedad de ceros es Y entonces

$$\mathcal{H}^{\cdot}_{\bar\partial}\,({}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{Y}) = \varinjlim_{k}\ \mathcal{H}^{\cdot}_{\bar\partial}({}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{I^k})$$

donde los morfismos del límite directo están inducidos por las inclusiones

$${}'\mathcal{D}_J \subseteq {}'\mathcal{D}_{J'} \quad \text{si } J' \subseteq J$$

Demostración:

Sea $T \in {}'\mathcal{D}^q_{Y,x}$ de orden m en un entorno V coordenado de x en X . Por el teorema XXVIII, Cap. III, de [S] , $I^{m+1}.\, T = 0$ ya que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}^{2n-q}(V)$$

$$\left.\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}(f^{m+1}.\phi)}{\partial z^{\alpha_1}\ \partial \bar z^{\alpha_2}}\right|_Y = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{O}(V) \quad \text{tal que} \quad (f = 0) \supseteq Y$$

y este hecho demuestra el lema//.

Lema 1.1.2

Sea U un abierto de X, $(f_i)_{1\leq i\leq p}$, $f_i \in \mathcal{O}(U)$, tales que $(f_i=0) = Y_i \cap U$. Sea $I = \langle f_1,\ldots,f_p \rangle$.

Definamos para todo $k \in N$, los haces de ideales sobre U $I_k = \langle f_1^k,\ldots,f_p^k \rangle$. Entonces los siguientes haces sobre U son isomorfos :

$$\varinjlim_k \mathcal{H}^{\cdot}_{\bar\partial}({}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{I^k}) \simeq \varinjlim_k \mathcal{H}^{\cdot}_{\bar\partial}({}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{I_k})$$

Demostración :

Como I tiene p generadores, $\forall\, k \geq 1$ resulta

$$I_{k.p} \subseteq I^{k.p} \subseteq I_k ,$$

lo cual demuestra el lema.//

Sea $\Omega^r\,(*\;U\,\mathcal{Y})$ el haz de gérmenes de r-formas meromorfas con polos en $\bigcup_{i=1}^{p} Y_i$, y $\mathcal{A}$ el sub haz

$$\mathcal{A} = \{\sum_{i=1}^{p} \tilde\omega(i) \colon \tilde\omega(i) \in \Omega^r\,(*\;U\,\mathcal{Y}(i))\}$$

i.e., los gérmenes de formas que se descomponen como suma de formas con polos en p-1 hipersuperficies de la familia $\mathcal{Y}$.

Llamemos $\mathcal{Q} = \Omega^r\,(*\;U\,\mathcal{Y})\big/\mathcal{A}$

Lema 1.1.3

Sea U un abierto de X, $(f_i)_{1\leq i\leq p}$, $f_i \in \mathcal{O}(U)$, tales que

$(f_i = 0) = Y_i \cap U$. Sea $I = \langle f_1, \dots f_p \rangle$, $I_k = \langle f_1^k, \dots f_p^k \rangle$.

Entonces existe un isomorfismo de haces sobre U

$$\varinjlim_k \Omega^r / I_k . \Omega^r \xrightarrow{\beta_f} \mathcal{Q}$$

donde el límite directo está construído con los morfismos

$$\Omega^r / I_k . \Omega^r \xrightarrow{\sigma_k} \Omega^r / I_{k+1} . \Omega^r$$

$$\overline{\omega}_x \xmapsto{\sigma_k} \overline{f_1 \dots f_p . \omega_x} \quad .$$

Demostración:

Para cada $k \in N$ definamos un morfismo β_k

$$\Omega^r / I_k . \Omega^r \xrightarrow{\beta_k} \mathcal{Q}$$

$$\overline{\omega}_x \xmapsto{\beta_k} \left(\overline{\frac{\omega}{f_1^k \dots f_p^k}}\right)_x$$

Como el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega^r / I_k . \Omega^r & & \\ \downarrow \sigma_k & \overset{\beta_k}{\searrow} & \mathcal{Q} \\ \Omega^r / I_{k+1} . \Omega^r & \underset{\beta_{k+1}}{\nearrow} & \end{array}$$

es conmutativo, queda definido un morfismo β_f

$$\beta_f : \varinjlim_k \Omega^r / I_k . \Omega^r \longrightarrow \mathcal{Q}$$

que es claramente sobreyectivo.

Para la inyectividad, basta ver que si

$$\frac{\omega}{f_1^{k}\ldots f_p^{k}} = \sum_{i=1}^{p} \tilde{\omega}(i) \text{ con } \tilde{\omega}(i) \in \Omega^r(* \cup Y(i))$$

entonces $(\sigma_{s-1} \circ \sigma_{s-2} \circ \ldots \circ \sigma_k)(\omega) \in I_s \,.\, \Omega^r$ para algún $s \geq k$

Pero existen $\omega_i \in \Omega^r$ y $s > k$ tales que

$$\tilde{\omega}(i) = \frac{\omega_i}{f_1^s \ldots \hat{f}_i \ldots f_p^{s}} \quad ;$$

luego, $(\sigma_{s-1} \circ \sigma_{s-2} \circ \ldots \circ \sigma_k)(\omega) = \omega \,.\, (f_1 \ldots f_p)^{s-k} = \sum_{i=1}^{p} f_i^s \,\omega_i$

lo que concluye el lema//.

Proposición 1.1.4

Con las mismas hipótesis de los lemas anteriores y si además $\dim_{\mathbb{C}} \bigcap_{i=1}^{p} Y_i = n-p$, la aplicación de haces sobre U

$$\Omega^r \longrightarrow {}'\mathcal{D}_I^{r,p}$$

$$\omega \longmapsto \mathrm{Res}_Y \left[\frac{\omega}{f_1 \ldots f_p}\right]$$

define un isomorfismo R_f

$$\Omega^r / I.\Omega^r \xrightarrow{R_f} \mathcal{H}^p_{\partial}({}'\mathcal{D}_I^{r,\cdot})$$

NOTA: La demostración de la biyectividad se hará en cada fibra pero omitiremos señalar el punto en el que estamos trabajando cuando no haya lugar a confusión.

Demostración:

Observemos que

i) la imagen de la primera aplicación está en $'\mathcal{D}_I^{r,\cdot}$ por las propiedades 0.2 y 0.5-i).

ii) R_f está bien de definida por las propiedades 0.4 y 0.5-i).

Consideremos

a) la resolución proyectiva de Koszul de $(\mathcal{O}/_I)_x$

$$0 \to \Lambda^p\mathcal{O}^p \xrightarrow{\alpha_p} \Lambda^{p-1}\mathcal{O}^p \xrightarrow{\alpha_{p-1}} \cdots \to \Lambda^1\mathcal{O}^p \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{O} \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}/_I \to 0$$

donde, si $(e_i)_{i=1}^{p}$ es la base canónica de $\mathcal{O}^p$, para todo $J \subseteq \{1,\ldots,p\}$, $|J| = k$

$$\alpha_k(e_J) = \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu-1} f_{j_\nu}\, e_{j_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{j_\nu} \wedge \ldots \wedge e_{j_k} .$$

y b) la resolución inyectiva de Ω^r por corrientes

$$0 \to \Omega^r \to {}'\mathcal{D}_x^{r,o} \xrightarrow{\bar\partial} {}'\mathcal{D}_x^{r,1} \to \cdots \xrightarrow{\bar\partial} {}'\mathcal{D}_x^{r,p} \to \cdots$$

Aplicando a la resolución (a) el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\cdot,\Omega^r)$ y a la resolución (b) el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}/_I,\cdot)$ se obtienen dos complejos con cohomologías isomorfas que representan el grupo $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}/_I, \Omega^r)$.

Este isomorfismo se deduce del doble complejo :

$$\begin{array}{l}
0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/_I,\Omega^r) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O},\Omega^r) \xrightarrow{\alpha_1^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Lambda^1\mathcal{O}^p,\Omega^r) \to \cdots \xrightarrow{\alpha_p^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Lambda^p\mathcal{O},{}^p\Omega^r) \\
\qquad\quad \downarrow i^* \hspace{22em} \vdots \\
\qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/_I,{}'\mathcal{D}^{r,o}) \to \cdots \\
\qquad\quad \downarrow \bar\partial
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\downarrow\bar\partial & & & & \downarrow\bar\partial \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/_I,{}'\mathcal{D}^{r,1}) & \to & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Lambda^p\mathcal{O}^p,{}'\mathcal{D}^{r,1}) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\vdots\ \bar\partial & & & & \vdots\ \bar\partial \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/_I,{}'\mathcal{D}^{r,p}) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O},{}'\mathcal{D}^{r,p}) & \cdots\cdots\to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Lambda^p\mathcal{O}^p,{}'\mathcal{D}^{r,p}) \\
\downarrow\bar\partial & & & & \downarrow\bar\partial
\end{array}$$

Veremos que el morfismo $\phi = \left[\ \bar{1} \mapsto \mathrm{Res}_Y\left[\frac{\omega}{f_1\ldots f_p}\right]\right]$ se levanta, siguiendo el diagrama, a $\eta_\omega \in \mathrm{Hom}\,(\Lambda^p\mathcal{O}^p,\Omega^r)$ $\eta_\omega\,(e_1\wedge\ldots\wedge e_p) = \omega$.

En general definamos objetos

$\phi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\,(\Lambda^{i-1}\,\mathcal{O}^p,\ {}'\mathcal{D}^{j,p-i})$, para $1 \leq i \leq p$,

$$\phi_i(e_J) = \begin{cases} 0 & \text{si } J \neq e_{p-(i-2)}\wedge\ldots\wedge e_p \\ R_{Y_1,\ldots,Y_{p-i}}\ P_{Y_{p-i+1}}\left[\dfrac{\omega}{f_1\ldots f_{p-i+1}}\right] & \text{si } J=e_{p-(i-2)}\wedge\ldots\wedge e_p \end{cases}$$

Por la propiedad 0.5-i) resulta

$$(\alpha_i{}^*\,\phi_i)(e_J)=\phi_i(\alpha_i\ (e_J)) = \begin{cases} 0 & \text{si } J \neq e_{p-(i-1)}\wedge\cdots\wedge e_p \\ \mathrm{Res}_{\ Y_1,\ldots,Y_{p-i}}\left[\dfrac{\omega}{f_1\ldots f_{p-i}}\right] & \text{si } J=e_{p-(i-1)}\wedge\ldots\wedge e_p \end{cases}$$

Tenemos entonces que

$\alpha_i{}^*\ \phi_i = \bar\partial\phi_{i+1} \quad \forall\ 1 \leq i \leq p-1$

y $\quad \bar\partial\phi_1 \quad = \phi$, $\quad$ por la propiedad 0.4.

Luego, siguiendo el diagrama, ϕ se levanta a la aplicación ϕ_p

$(\alpha_p^* \phi_p)(e_1\wedge\ldots\wedge e_p)=P_{Y_1}[\omega] = i^*\eta_\omega(e_1\wedge..\wedge e_p)$ ya que la forma es regular, y tenemos lo que queríamos.

Como claramente la aplicación σ

$$\sigma : \operatorname{Hom}(\Lambda^p O^p, \Omega^r) \longrightarrow \Omega^r$$

$$[(e_1 \wedge\ldots\wedge e_p) \longmapsto \omega] \xmapsto{\sigma} \omega$$

es un isomorfismo, para completar la demostración basta ver que $\sigma(\alpha_p^*(\operatorname{Hom}_O(\Lambda^{p-1} O^p,\Omega^r))) = I \,.\, \Omega^r$

y efectivamente

$$\sigma(\alpha_p^* \ [(e_1 \wedge\ldots\wedge \hat{e}_i \wedge\ldots\wedge e_p) \longmapsto \omega_i]) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} f_i\omega_i$$

con lo cual se tiene demostrada la proposición//.

Proposición 1.1.5

Sea $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_p\}$ una familia de hipersuperficies complejas en X, tal que $Y = \cap\, \mathcal{Y}$ tiene dimensión pura n-p.

El siguiente morfismo de haces sobre X

$$\Omega^r(* \bigcup_{i=1}^{p} Y_i) \longrightarrow {}'\mathcal{D}_Y^{r,p}$$

$$\tilde{\omega} \longmapsto \operatorname{Res}_{\mathcal{Y}} [\tilde{\omega}]$$

induce un isomorfismo R

$$Q \xrightarrow{R} \mathcal{H}^p_{\bar\partial}({}'\mathcal{D}_Y^{r,\cdot})$$

Demostración

La aplicación R está bien definida por las propiedades 0.2 , 0.4 y 0.5-i).

Sea $x \in X$, U entorno de X y $(f_i)_{i=1}^{p}$, $f_i \in \mathcal{O}(U)$ tales que $(f_i=0) = Y_i \cap U$. Estamos entonces en las condiciones de los resultados anteriores y basta ver, por lo tanto, que los isomorfismos

$$\Omega^r/_{I_k \cdot \Omega^r} \xrightarrow{R_{fk}} H^p_{\bar\partial}\,({}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{I_k})$$

conmutan con los morfismos de los límites directos, i.e. que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega^r/_{I_k \cdot \Omega^r} & \xrightarrow{R_f k} & H^p_{\bar\partial}\,({}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{I_k}) \\ \downarrow{\sigma_k} & & \downarrow{i*} \\ \Omega^r/_{I_{k+1}\Omega^r} & \xrightarrow{R_{fk+1}} & H^p_{\bar\partial}\,({}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{I_{k+1}}) \end{array}$$

lo cual es obvio a partir de la definición de σ_k//.

En los siguientes corolarios se supondrá siempre que $Y = \bigcap_{i=1}^{p} Y_i$ es un conjunto analítico de dimensión pura n-p.

Corolario 1.1.6

Si $\tilde\omega \in \Omega^r{}_x\,(*\ \bigcup_{i=1}^{p} Y_i)$ es tal que el germen de corriente en x $\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p}\,[\tilde\omega] = 0$, entonces existen formas meromorfas ω_i, $\omega_i \in \Omega^r{}_x(*\ \cup\ Y(i))$, $\forall\ 1 \leq i \leq p$, tales que $\tilde\omega = \sum_i \omega_i$

Más precisamente,

Ley de dualidad: Sea f_i una ecuación local para Y_i en un entorno de x, $\forall\ 1 \leq i \leq p$, $\tilde{\omega} = \dfrac{\omega}{f_1 \dots f_p}$, $\omega \in \Omega_x^r$, entonces

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p}\ [\tilde{\omega}] = 0 \iff \omega \in I.\Omega^r \ , \text{ para } I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle_x$$

Demostración

Es una consecuencia inmediata de la inyectividad de la flecha R_f de la proposición 1.1.4. y de la propiedad 0.5-i)//.

Corolario 1.1.7

Sea $\tilde{\omega} \in \Omega^r \ (* \bigcup_{i=1}^{p} Y_i)$, $S \in {}'\mathcal{D}_{Y,x}^{r,p-1}$ tal que

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p}\ [\tilde{\omega}] = \bar{\partial} S \ , \text{ entonces } \mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p}\ [\tilde{\omega}] = 0$$

Demostración

Este corolario es una consecuencia inmediata de la inyectividad de la aplicación R de la proposición 1.1.5 y de la propiedad 0.5-i)//.

Corolario 1.1.8

Sea $T \in {}'\mathcal{D}_{Y,x}^{r,p}$ tal que $\bar{\partial} T = 0$. Existen $\tilde{\omega} \in \Omega_x^r \ (* \cup Y)$ y $S \in {}'\mathcal{D}_{Y,x}^{r,p-1}$ tales que

$$T = \mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p}\ [\tilde{\omega}] + \bar{\partial} S \ ,$$

y esta descomposición es única en el siguiente sentido :

si $\quad T = \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p} [\tilde{\omega}_1] + \bar{\partial} S_1$, entonces

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p} [\tilde{\omega}] = \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p} [\tilde{\omega}_1] \quad \text{y} \quad \bar{\partial} S = \bar{\partial} S_1$$

<u>Demostración</u>

Es una consecuencia de la suryectividad de la aplicación R de la proposición 1.1.5 y del Corolario 1.1.7.//

§.2. EL GRUPO DE COHOMOLOGIA MODERADA GLOBAL

Sea $Y \subseteq X$ un conjunto analítico de codimensión p dado localmente por los ceros de p funciones. (i.e. Y es localmente una intersección completa).

Definamos el p-ésimo grupo de cohomología moderada con coeficientes en Ω^r y soporte en Y como

$$H^p_{[Y]} (X, \Omega^r) = \Gamma (X, \mathcal{H}^p_{[Y]} (\Omega^r)) .$$

Como ya hemos visto, los haces de cohomología moderada $\mathcal{H}^{\cdot}_{[Y]} (\Omega^r)$ pueden obtenerse con el prehaz

$$U \longmapsto \text{Ker } \bar\partial \subseteq \Gamma_Y (U, {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}) \big/ \bar\partial\Gamma_Y(U, {}'\mathcal{D}^{r,\cdot-1})$$

Veremos en este parágrafo que $H^p_{[Y]} (X, \Omega^r)$ es isomorfo al p-ésimo grupo de cohomología del complejo de secciones globales $\Gamma(X,\mathcal{D}_Y^{r,o}) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma (X, {}'\mathcal{D}^{r,1}_Y) \to \cdots \to \Gamma (X, {}'\mathcal{D}^{r,p}_Y) \to \cdots$

Si además existen p hipersuperficies en $X, \{Y_1, \ldots, Y_p\}$, tales que $Y = \bigcap_{i=1}^{p} Y_i$, la proposición 1.1.5 provee un isomorfismo de grupos de secciones globales :

$$\Gamma(X, Q) \xrightarrow{R} H^p_{[Y]} (X, \Omega^r)$$

Lema 1.2.1

$$\mathcal{H}^{j}_{[Y]}(\Omega^{r}) = 0 \quad , \quad \forall\, j \neq p .$$

Demostración

La fibra del haz en un punto $x \in X$ es

$$\varinjlim_{k} \operatorname{Ext}^{j}_{\mathcal{O}_{X,x}}\left((\mathcal{O}/_{I_k})_x \, , \, \Omega^{r}_{x} \right)$$

donde I está generado por p funciones $\{f_1,\ldots,f_p\}$ tales que $\bigcap\limits_{i=1}^{p} (f_i = 0) = Y$.

Aplicando el funtor $\mathcal{H}om$ a la resolución de Koszul de longitud p de $\mathcal{O}/_{I_k}$ se obtiene un complejo que resulta exacto salvo a nivel p (cf [G - H] , pág. 690) lo cual demuestra el lema//.

Proposición 1.2.2

Sea X una variedad holomorfa e Y un subconjunto analítico de codimensión p que sea localmente una intersección completa, entonces

$$H^{p}_{[Y]}(X, \Omega^{r}) \cong H^{p}_{\bar\partial}(\Gamma(X, {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{Y}))$$

Demostración

Como $H^{p}_{[Y]}(X, \Omega^{r}) = \Gamma(X, \mathcal{H}^{p}_{[Y]}(\Omega^{r})) \simeq \Gamma(X, \mathcal{H}^{p}_{\bar\partial}({}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{Y}))$

hay que probar que

$$H^p_{\bar\partial}(\Gamma(X, {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_Y)) \cong \Gamma(X, H^p_{\bar\partial}({}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_Y)).$$

La demostración será una adaptación al caso moderado del Lema 0.6 de [S - T].

A partir de los complejos

$$0 \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,o}_Y \xrightarrow{\bar\partial_0} {}'\mathcal{D}^{r,1}_Y \xrightarrow{\bar\partial_1} \cdots \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,i}_Y \xrightarrow{\bar\partial_i} \cdots$$

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, {}'\mathcal{D}^{r,o}_Y) \xrightarrow{\bar\partial^*_0} \Gamma(X, {}'\mathcal{D}^{r,1}_Y) \xrightarrow{\bar\partial^*_1} \cdots \longrightarrow \Gamma\ (X, {}'\mathcal{D}^{r,i}_Y) \xrightarrow{\bar\partial^*_i} \cdots$$

definimos

$$Z^i = \operatorname{Ker}\ \bar\partial^*_i \qquad\qquad B^i = \operatorname{Im} \bar\partial^*_{i-1}$$

$$\mathcal{Z}^i = \operatorname{Ker}\ \bar\partial_i \qquad\qquad \mathcal{B}^i = \operatorname{Im} \bar\partial_{i-1}$$

con lo cual las sucesiones cortas

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{Z}^i \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,i}_Y \longrightarrow \mathcal{B}^{i+1} \longrightarrow 0, \quad i \geq 0$$

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{B}^i \longrightarrow \mathcal{Z}^i \longrightarrow \mathcal{H}^i_{[Y]}(\Omega^r) \longrightarrow 0\ , \quad i \geq 1$$

son exactas.

Luego, por el lema 1.2.1 , $\mathcal{B}^i = \mathcal{Z}^i$, $\forall\ 1 \leq i < p$.
Además, para todo i se tiene

$$Z^i = \Gamma\ (X, \mathcal{Z}^i)$$

y $\quad Z^{o} = H^{o}_{[Y]}\ \Omega^{r} = 0$, luego $Z^{o} = 0$.

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & B^{p} & \longrightarrow & Z^{p} & \longrightarrow & H^{p}_{[Y]}(X,\Omega^{r}) & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma(X, B^{p}) & \longrightarrow & \Gamma(X,Z^{p}) & \longrightarrow & \Gamma(X, H^{p}_{[Y]}(\Omega^{r})) & \longrightarrow & H^{1}(X,B^{p}) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Demostraremos que $B^{p} \to \Gamma(X, B^{p})$ es un isomorfismo y que $H^{1}(X,B^{p}) = 0$ por lo cual, por el lema de los cinco, resultará

$H^{p}_{[Y]}(X,\Omega^{r}) \simeq \Gamma(X, H^{p}_{[Y]}\ \Omega^{r})$ como queríamos.

Para ello, probemos por inducción en i , para $0 \leq i \leq p-1$ que

$$(\#)_{i} \quad \begin{cases} H^{k}(X,Z^{i}) = 0 , & \forall\ k \geq i \\ H^{k}(X, B^{i+1}) = 0 , & \forall\ k \geq 1 \\ B^{i+1} = \Gamma X, B^{i+1}) & \end{cases}$$

Si $i < p-1$, y $(\#)_{i}$ vale ,

$H^{k}(X, Z^{i+1}) = 0 \quad , \quad \forall\ k \geq 1$

pues $i + 1 < p \implies Z^{i+1} = B^{i+1}$ como ya vimos.

De (*) y lo anterior se deduce la sucesión exacta

$0 \to \Gamma(X,Z^{i+1}) \longrightarrow \Gamma(X, {}'\mathcal{D}^{r,i+1}_{Y}) \longrightarrow \Gamma(X,B^{i+2}) \to 0$;

como $\Gamma(X,Z^{i+1}) = Z^{i+1}$ y

$$0 \longrightarrow Z^{i+1} \longrightarrow \Gamma(X, {}'\mathcal{D}^{r,i+1}) \to B^{i+2} \longrightarrow 0$$

es exacta, resulta

$$B^{i+2} = \Gamma\ (X, \mathcal{B}^{i+2})\ .$$

Como los haces ${}'\mathcal{D}_Y^{r,\cdot}$ son finos, todas sus cohomologías positivas son nulas. Luego, por la sucesión exacta larga de cohomología asociada a (*),

$H^k\ (X, \mathcal{B}^{i+2}) \simeq H^{k+1}\ (X, Z^{i+1})$, $\forall\ k \geq 1$, y ya hemos visto que las cohomologías de Z^{i+1} son nulas.

Para terminar la inducción, veamos la validez de $(\#)_o$:

Como $Z^o = 0$, $\mathcal{B}^1 \simeq {}'\mathcal{D}_Y^{r,o}$; luego

$H^k(X, Z^o) = 0$ y $H^k(X, \mathcal{B}^1) = 0$, $\forall\ k \geq 1$;

además como $Z^o = 0$, $B^1 = \Gamma(X, {}'\mathcal{D}_Y^{r,o}) = \Gamma(X, \mathcal{B}^1)$.

En particular, para $i = p-1$, hemos demostrado

$H^k\ (X, \mathcal{B}^p) = 0 \quad \forall\ k \geq 1$

y $B^p = \Gamma(X, \mathcal{B}^p)$,

como queríamos probar//.

CAPITULO II

§1. SOBRE EL PROBLEMA DE LEVANTAMIENTO DE "DATOS DE WEIL" Y CARACTERIZACION DEL NUCLEO DE $H^p_{[Y]}(X,\Omega^r) \longrightarrow H^p(X,\Omega^r)$

Sea X una variedad holomorfa de dimensión n.

$\mathcal{Y} = \{Y_1,\dots,Y_p\}$ una familia de hipersuperficies en X con intersección completa.

Definamos, $\forall j$, $1 \leq j \leq p$

I) $A_{j-1} = \underset{J\in\Lambda(j,p)}{\oplus} \Omega^r(* Y_J) \qquad 0 \leq r \leq n$

II) $\alpha_j : A_{j-1} \longrightarrow A_j$

$$\alpha_j\left((\omega_J)_{J\in\Lambda(j,p)}\right)_K = \sum_{i=1}^{j+1} (-1)^{i-1}\ \omega_{\{K_1,\dots,\hat{K}_i,\dots,K_{j+1}\}},$$

$\forall\ K \in \Lambda(j+1,p)$, donde $\omega_L \in \Omega^r(* \bigcup_{i\in L} Y_i)$

III) $i_o : \Omega^r \longrightarrow A_o$

$i_o(\omega) = (\omega,\omega,\dots,\omega)$

Con estas definiciones

$$\alpha_{p-1}(A_{p-2}) = \{\ \sum_{i=1}^{p} \omega(i) : \omega(i) \in \Omega^r(* \cup \mathcal{Y}(i))\}$$

Proposición 2.1.1

La sucesión de haces

$$0 \longrightarrow \Omega^r \xrightarrow{i_o} A_o \xrightarrow{\alpha_1} \dots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} A_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \dots \xrightarrow{\alpha_{p-1}} A_{p-1} \xrightarrow{\Pi} \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración : Para $p = 1$ es trivial. Supondremos $p \geq 2$.

Es claro que $\alpha_{j+1} \circ \alpha_j = 0 \quad \forall\, j \geq 1$.

Además

$$[\alpha_1 \circ i_o(\omega)]_{\{k_1,k_2\}} = [\alpha_1 (\omega,\ldots,\omega)]_{\{k_1,k_2\}} = \omega-\omega= 0$$

$\forall\, \{k_1, k_2\} \in \Lambda\, (2,p)$;

recíprocamente $\operatorname{Ker} \alpha_1 \subseteq \operatorname{Im} i_o$ ya que si $\alpha_1((\omega_i)_{i=1}^{p}) = 0$, entonces, $\forall\, k < \ell$, $\omega_k - \omega_\ell = 0$, i.e. todos los ω_i coinciden fuera de $Y_1 \cup \ldots \cup Y_p$ y sus coeficientes definen funciones holomorfas fuera de $Y = Y_1 \cap \ldots \cap Y_p$, de codimensión mayor o igual que 2; luego, se extienden holomórficamente a todo X y queda definida una r-forma holomorfa ω tal que $\omega = \omega_i\, V_i$, i.e. $(\omega_i)_{i=1}^{p} = i_o\, (\omega)$.

Queremos ver entonces que dado j : $2 \leq j \leq p-1$

$$\operatorname{Ker} \alpha_j = \operatorname{Im} \alpha_{j-1}$$

i.e. dada $(\omega_J)_{J\in\Lambda(j,p)} \in A_{j-1,x}$ $(x\in X)$, si $\alpha_j\, ((\omega_J)) = 0$, existe

$(\gamma_L)_{L\in\Lambda(j-1,p)} \in A_{j-2,x}$ tal que

$\omega_J = [\alpha_{j-1}\, ((\gamma_L))]_J \quad , \quad \forall\, J \in \Lambda(j,p)$.

Dada $(\omega_J)_{J\in\Lambda(j,p)}$, existe un entorno coordenado (z,U) de

x y p funciones $f_i \varepsilon \mathcal{O}(U)$ tales que:

I) $(f_i=0) = Y_i \cap U$

II) $\omega_J = \dfrac{\lambda_J}{f_{J_1} \cdots f_{J_j}}$, con $\lambda_J \varepsilon \Omega^r(U)$, $\forall J \varepsilon \Lambda(j,p)$

será luego $\lambda_J = \sum_{A \varepsilon \Lambda(r,n)} a_J^A \, dz_A$, $(dz_A = dz_{A_1} \wedge \ldots \wedge dz_{A_r})$, $a_J^A \varepsilon \mathcal{O}(U)$.

Entonces, $\alpha_j((\omega_J)) = 0 \iff$

$$\iff \forall K \varepsilon \Lambda(j+1,p) \quad 0 = \sum_{i=1}^{j+1} (-1)^{i-1} \omega_{\{K_1,\ldots,\hat{K}_i,\ldots,K_{j+1}\}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{j+1} (-1)^{i-1} f_{K_i} \lambda_{\{K_1,\ldots,\hat{K}_i,\ldots,K_{j+1}\}}}{f_{K_1} \cdots\cdots f_{K_{j+1}}} =$$

$\iff \forall K \varepsilon \Lambda(j+1, p)$ y $\forall A \varepsilon \Lambda(r,n)$

$$0 = \sum_{i=1}^{j+1} (-1)^{i-1} f_{K_i} a^A_{\{K_1,\ldots,\hat{K}_i,\ldots K_{j+1}\}}$$

Probaremos que existe $(\gamma_L)_{L \varepsilon \Lambda(j-1,p)}$ con la misma polaridad que (ω_j) (con los mismos denominadores) tal que $\omega_J = [\alpha_{j-1}((\gamma_L))]_J$, $\forall J \varepsilon \Lambda(j,p)$. Buscamos entonces $\sigma_L \varepsilon \Omega^r(U)$,

$$\sigma_L = \sum_A b_L^A \, dz_A \text{ tal que } \omega_J = \frac{\sum_{i=1}^{j} (-1)^{i-1} f_{J_i} \sigma_{\{J_1,\ldots,\hat{J}_i,\ldots J_j\}}}{f_{J_1} \cdots\cdots f_{J_j}}$$

y esto ocurre si y sólo si

$$a_J^A = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i-1} f_{J_i} b^A_{\{J_1,\ldots,\hat{J}_i,\ldots,J_j\}}, \qquad \forall\ A\in\Lambda(r,n), \forall J\in\Lambda(j,p).$$

Tomemos la sucesión exacta de Koszul asociada a $I=\langle f_1,\ldots,f_p\rangle \subseteq \mathcal{O}_x$:

$$0 \longrightarrow \Lambda^p\, \mathcal{O}^p \xrightarrow{\beta_p} \Lambda^{p-1}\mathcal{O}^p \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^j\mathcal{O}^p \xrightarrow{\beta_j} \cdots \Lambda^1\mathcal{O}^p \xrightarrow{\beta_1} \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}/_I \longrightarrow 0$$

donde

$$\beta_j(e_J) = \sum_{\nu=1}^{j} (-1)^{\nu-1} f_{J_\nu}\, e_{J_1,\ldots,\hat{J}_\nu,\ldots,J_j}, \qquad \forall\ J\in\Lambda(j,p),$$

$(e_1,\ldots,e_p)$ la base canónica de $\mathcal{O}_p$, $e_J = e_{J_1}\wedge\ldots\wedge e_{J_j}$.

Sea d_j : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Lambda^j\mathcal{O}^p,\mathcal{O}) \to \Lambda^{p-j}\,\mathcal{O}^p$ el isomorfismo

$$d_j(\phi) = \sum_{J\in\Lambda(j,p)} (-1)^{\sigma(J)}\ \phi(e_J)\ e_{CJ}$$

(CJ = complemento de J en $\{1,\ldots p\}$ ordenado en forma creciente , y $\sigma(J)$ es tal que $(-1)^{\sigma(J)}\, e_{J\cup CJ} = e_1\wedge\ldots\wedge e_p$) .

Como el siguiente cuadrado conmuta (cf [G - H] , pág. 690)

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Lambda^j\mathcal{O}^p,\mathcal{O}) & \xrightarrow{d_j} & \Lambda^{p-j}\,\mathcal{O}^p \\
\downarrow{\scriptstyle \beta^*_{j+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{p-j}} \\
\mathrm{Hom}\,(\Lambda^{j+1}\mathcal{O}^p,\mathcal{O}) & \xrightarrow{d_{j+1}} & \Lambda^{p-j-1}\,\mathcal{O}^p
\end{array}$$

aplicando Hom a la sucesión de Koszul, se obtiene una sucesión exacta (salvo en las puntas).

Definamos $\phi^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Lambda^j \mathcal{O}^p, \mathcal{O})$, $\forall\, A \in \Gamma(r,n)$

$$\phi^A(e_J) = a_J^A \qquad \forall\, J \in \Lambda(j,p)$$

Entonces $\forall\, A \in \Lambda(r,n)$ y $\forall\, K \in \Lambda(j+1,p)$

$$\beta_{j+1}^* \quad \phi^A(e_K) = \phi^A(\beta_{j+1}(e_K)) =$$

$$= \phi^A\Big(\sum_{\nu=1}^{j+1} (-1)^{\nu-1} f_{K_\nu}\, e_{\{K_1,\ldots,\hat{K}_\nu,\ldots,K_{j+1}\}}\Big) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{j+1} (-1)^{\nu-1} f_{K_\nu} \quad a^A_{\{K_1,\ldots,\hat{K}_\nu,\ldots,K_{j+1}\}} \qquad = 0$$

Como $(e_K)_{K\in\Lambda(j+1,p)}$ son base de $\Lambda^{j+1}\mathcal{O}^p$,

$\beta_{j+1}^* \quad \phi^A = 0 \Rightarrow \forall\, A \in \Gamma(r,n)$, $\exists\, \psi^A$ tal que $\phi^A = \beta_j^* \,\psi^A$

Basta definir entonces

$$b_L^A = \psi^A(e_L) \quad \forall\, L \in \Lambda(j-1,p) \;,\; \forall\, A \in \Lambda(r,n)$$

para obtener lo que queríamos//.

<u>2.1.2</u>

Sea $\omega \in \Gamma(x,\mathcal{Q})$, es decir, datos locales $\omega_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \Omega^r(*UY))$ asociados a un cubrimiento $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X por abiertos, tales que en $U_\alpha \cap U_\beta$

$$\omega_\alpha - \omega_\beta = \sum_{K \in \Lambda(p-1,n)} \omega_K \qquad \omega_K \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \Omega^r(*Y_K)).$$

En esta sección estudiaremos cuándo existe una forma meromorfa global con polos en $(Y_1 \cup \ldots \cup Y_p)$, cuya clase en $\Gamma(X,Q)$ sea ω.

Observemos que estas formas meromorfas locales $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ permiten definir una corriente global que denotaremos

$\mathrm{Res}_{Y_1,..,Y_p}[\omega]$, que en cada U_α está definida por

$\mathrm{Res}_{Y_1,...,Y_p}[\omega_\alpha]$, ya que en $U_\alpha \cap U_\beta$

$$\mathrm{Res}_{Y_1,..,Y_p}[\omega_\alpha] - \mathrm{Res}_{Y_1,...,Y_p}[\omega_\beta] =$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Res}_{Y_1,...,Y_p}[\omega_{\{1,...,\hat{i},...p\}}] = 0 \text{ , por la propiedad 0.5-i).}$$

Teorema 2.1.2

Sea X una n-variedad holomorfa e $\mathcal{Y} = \{Y_1,...,Y_p\}$ una familia de hipersuperficies en X con intersección completa. Sea $r \in \mathbb{N}$, $0 \le r \le n$.

Si $H^q(X,\Omega^r(* \bigcup_{i \in J} Y_i)) = 0$, $\forall q \ge 1$ y $\forall J \subseteq \{1,..,p\}$, entonces dada $\omega \in \Gamma(x,Q)$, existe $\phi \in \Gamma(X,\Omega^r(* \cup \mathcal{Y})$ tal que $\Pi^* \phi = \omega$ si y sólo si la corriente global $\mathrm{Res}_{Y_1,...,Y_p}[\omega]$ define la clase nula en $H^p(X,\mathcal{F})$ (i.e. $\exists S \in \Gamma(X,{}'\mathcal{D}^{r,p-1})$ tal que $\bar\partial S = \mathrm{Res}_{Y_1,...,Y_p}[\omega]$).

NOTA : La hipótesis de anulación de los grupos de cohomología $H^q(X,\Omega^r(* Y_J))$ se verifica si, por ejemplo X es una variedad proyectiva e Y es una familia de hipersuperficies amplias, o si X es Stein.

Demostración

La necesidad es clara ya que si $\omega = \Pi^*\phi$, $\phi \in \Gamma(X, A_{p-1})$

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p}[\omega] = \mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p}[\phi] = \bar\partial(\mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_{p-1}} P_{Y_p}[\phi])$$

por la propiedad 0.4.

Demostremos entonces la suficiencia.

Sea

$$0 \longrightarrow \Omega^r \xrightarrow{i} {}'\mathcal{D}^{r,o} \xrightarrow{\bar\partial} {}'\mathcal{D}^{r,1} \longrightarrow \dots \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,n} \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

la resolución acíclica ${}'\mathcal{D}^{r,o\cdot}$ del haz de r-formas holomorfas por corrientes.

Por la proposición anterior

$$0 \longrightarrow \Omega^r \xrightarrow{i_o} A_o \xrightarrow{\delta_1} A_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_{p-1} \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \ (2)$$

es exacta, luego $A^\cdot$ es una resolución de Ω^r.

Como por hipótesis $H^q(X,A_i) = 0 \quad \forall q \geq 1$, $\forall\ i=0,\dots,p-1$, se tiene

$$\frac{\Gamma(X,Q)}{\Pi^*(\Gamma(X,A_{p-1}))} \overset{\delta_p}{\simeq} H^p(X,\Omega^r) \overset{\lambda_p}{\simeq} \frac{\mathrm{Ker}\,\bar\partial \subseteq \Gamma(X,{}'\mathcal{D}^{r,p})}{\bar\partial(\Gamma(X,{}'\mathcal{D}^{r,p-1}))} .$$

nuestro dato ω define un elemento en el primer cociente y queremos ver precisamente cuando su clase allí es nula.

Ya que λ_p y δ_p son isomorfismos,

$$\phi \in \Gamma(X, \Lambda_{p-1}) \,/\, \Pi^* \phi = \omega \Leftrightarrow \lambda_p \circ \delta_p (\bar{\omega}) = 0$$

Demostraremos que

$$\lambda_p \circ \delta_p (\bar{\omega}) = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \operatorname{Res}_{Y_1,\dots,Y_p} [\omega]$$

Definiremos para ello un morfismo de resoluciones

$$\sigma : A^{\cdot} \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}$$

que envíe a nivel de secciones globales

$$\omega \longmapsto (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \operatorname{Res}_{Y_1,\dots,Y_p} [\omega]$$

σ inducirá un isomorfismo en cohomología por la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^p(\Gamma(A^{\cdot})) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\wr" ', "\delta_p"] & H^p(\Gamma(\mathcal{D}^{r,\cdot})) \arrow[d, "\wr" ', "\lambda_p^{-1}"] \\
H^p(X, \Omega^r) \arrow[r, "id" '] & H^p(X, \Omega^r)
\end{tikzcd}$$

(cf. [G] , teorema 4.7.2, pág. 182)

Definamos para $0 \leq j \leq p-1$.

$$\sigma_j : A_j \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,j}$$

$$\sigma_j\left(\left(c_J\right)_{J\in\Lambda(j+1,p)}\right) = (-1)^{\frac{j(j+1)}{2}} \operatorname{Res}_{Y_1,\ldots,Y_j} P_{Y_{j+1}}\left[c_{\{1,\ldots,j+1\}}\right]$$

y $\sigma_p : \mathcal{Q} \longrightarrow \operatorname{Ker} \bar\partial \subseteq {}'\mathcal{D}^{r,p}$

$$\sigma_p(\bar\omega) = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \operatorname{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p}[\omega]$$

(en ambos casos y en todo lo que sigue debe entenderse que, dado un germen de r-forma meromorfa en $x \in X$, los gérmenes de las corrientes son también en x).

Veamos la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^r \arrow[r, "i_o"] & A_o \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\sigma_o"] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_1"] & \cdots \arrow[r, "\partial_{p-1}"] & A_{p-1} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\sigma_{p-1}"] & \mathcal{Q} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^r \arrow[r, "i"] & {}'\mathcal{D}^{r,o} \arrow[r, "\bar\partial"] & {}'\mathcal{D}^{r,1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\bar\partial"] & {}'\mathcal{D}^{r,p-1} \arrow[r] & \operatorname{Ker}\bar\partial \subseteq \mathcal{D}^{r,p} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En cuanto al primer cuadrado, sea $\beta \in \Omega^r_x$,

$$\sigma_o \circ i_o(\beta) = (-1)^o \; P_{Y_1}\left[i_o(\beta)_{\{1\}}\right] =$$

$= P_{Y_1}[\beta] = \int \beta \wedge \cdot = i(\beta)$, pues β es un germen de r-forma regular.

En general, para $0 \leq j \leq p-2$, tenemos :

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{\delta_{j+1}} & A_{j+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_j} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{j+1}} \\ {}'\mathcal{D}^{r,j} & \xrightarrow{\overline{\partial}} & {}'\mathcal{D}^{r,j+1} \end{array}$$

sea $c = (c_J)_{J\in\Lambda(j+1,p)} \in A_{j,x}$

$$\overline{\partial} \circ \sigma_j((c_J)_{J\in\Lambda(j+1,p)}) = \overline{\partial}\left((-1)^{\frac{j(j+1)}{2}} \operatorname{Res}_{Y_1,\ldots,Y_j} P_{Y_{j+1}}[c_{\{1,\ldots,j+1\}}]\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{j(j+1)}{2}} \operatorname{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{j+1}} [c_{\{1,\ldots,j+1\}}]$$, por la propiedad

0.4.

Por otro lado

$$\sigma_{j+1} \circ \delta_{j+1}(c) = (-1)^{\frac{(j+1)(j+2)}{2}} \operatorname{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{j+1}} P_{Y_{j+2}}[(\delta_{j+1}(c))_{\{1,\ldots,j+2\}}] =$$

$$= (-1)^{\frac{(j+1)(j+2)}{2}} \sum_{i=1}^{j+2} (-1)^{i-1} \operatorname{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{j+1}} P_{Y_{j+2}} [c_{\{1,\ldots,\hat{i},\ldots,j+2\}}] =$$

$$= (-1)^{\frac{(j+1)(j+2)}{2}} . (-1)^{j+1} \operatorname{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{j+1}} P_{Y_{j+2}} [c_{\{1,\ldots,j+1\}}] \quad (*)$$

pues $\forall\ i < j+2$, $c_{\{1,..,\hat{i},..,j+2\}}$ no tiene polos en una de las hipersuperficies del residuo y luego, por la propiedad 0.5-i),

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{j+1}} P_{Y_{j+2}} [c_{\{1,..,\hat{i},..,j+2\}}] = 0 .$$

Nuevamente por 0.5-i), (*) es igual a

$$(-1)^{\frac{j(j+1)}{2}} \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{j+1}} [c_{\{1,\ldots,j+1\}}] = \bar{\partial} \circ \sigma_j (c) .$$

En el último cuadrado tendremos

$$\sigma_p \circ \Pi (\omega) = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p} [\omega] =$$

$$= \bar{\partial} ((-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{p-1}} P_{Y_p} [\omega]) = \bar{\partial} \circ \sigma_{p-1} (\omega)$$

lo cual concluye con la demostración del teorema//.

2.1.3

A partir del teorema 2.1.2. es posible responder al problema resuelto por A. Weil en [W]:

"Sea X una variedad compacta Kähleriana, $Y \subseteq X$ una hipersuperficie, $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \varepsilon A}$ un cubrimiento de X por abiertos y $\omega_\alpha \varepsilon\ \Gamma (U_\alpha, \Omega^1 (* Y))$ formas meromorfas d-cerradas tales que

$\omega_\alpha - \omega_\beta \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \Omega^1)$. Entonces, la existencia de una forma meromorfa ω d-cerrada, tal que $\omega - \omega_\alpha$ sea regular en cada abierto U_α, es equivalente a que el ciclo polar que los datos definen sea homólogo a cero en $H^2(X,\mathbb{C})$."

Demostración

Al ser los datos $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ cerrados, la corriente de tipo residual y globalmente definida $\mathrm{Res}_Y[(\omega_\alpha)]$ resulta d-cerrada por la propiedad 0.4 y su d-clase en $H^2(X,\mathbb{C})$ representa precisamente el ciclo polar (cf [C-H-L]).

Por el teorema 2.1.2 sabemos que existe una forma meromorfa global ω_1 no necesariamente cerrada tal que $\omega_1|_{U_\alpha} - \omega_\alpha$ es regular, $\forall\ \alpha \in A$, si la clase $\bar\partial$ de la corriente $R_Y[(\omega_\alpha)]$ es nula en $H^1(X,\Omega^1)$; y esta condición es equivalente a la pedida por Weil pues como X es Kähleriana y $R_Y[(\omega_\alpha)]$ es d y $\bar\partial$ cerrada, la aplicación inyectiva de Hodge

$$H^1(X,\Omega^1) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{C})$$

envía

$$\overline{\mathrm{Res}_Y[(\omega_\alpha)]}^{\bar\partial} \longmapsto \overline{\mathrm{Res}_Y[(\omega_\alpha)]}^{d}.$$

Veamos ahora que la forma buscada ω puede elegirse d-cerrada.

En efecto, como $\omega_1|_{U_\alpha} - \omega_\alpha$ es regular

$$R_Y[\omega_1] = R_Y[(\omega_\alpha)] = b\,S.$$

Luego por 0.4

$$P_Y[d\omega_1] = b(S - P_Y[\omega_1]) .$$

Pero $d\omega_\alpha = 0 \Rightarrow \theta = d\omega_1$ es regular, luego

$$P_Y[d\omega_1] = \int \theta\,\Lambda .$$

es homológicamente nulo, con lo cual existe una forma global σ regular tal que $d\sigma = \theta$.

Entonces $\omega = \omega_1 - \sigma$ es la forma cerrada buscada.

La recíproca es evidente ya que si existe una forma meromorfa global ω que difiera de los datos localmente en formas regulares

$$\mathrm{Res}_Y[(\omega_\alpha)] = \mathrm{Res}_Y[\omega] = b\,P_Y[\omega]$$

luego es homológicamente nulo//.

Después de esta observación llamaremos <u>dato de Weil</u>, asociado a $\mathcal{Y} = \{Y_1,..,Y_p\}$ y $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ cubrimiento, a toda colección de formas meromorfas $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ que defina un elemento de $\Gamma(X,\mathcal{Q})$ i.e:

$$\omega_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \Omega^r(*\cup\mathcal{Y})), \forall\,\alpha\in A$$

y $$\omega_\alpha - \omega_\beta = \sum_{i=1}^{p} \omega(i)\ ,\ \omega(i) \in \Gamma\,(U_\alpha \cap U_\beta,\ \Omega^r(*\cup Y(i))),$$

para todo par (α,β).

2.1.4 Caracterización del núcleo de $H^p_{[Y]}(X,\Omega^r) \longrightarrow H^p(X,\Omega^r)$

Si X es una variedad holomorfa e $Y = \{Y_1,..,Y_p\}$ flia. de hipersuperficies en X con intersección completa, hemos demostrado en particular que el núcleo de la aplicación

$$\Gamma(X,\Omega) \xrightarrow{\text{Res}} H^p\,(X,\Omega^r)$$

$$(\omega_\alpha)_{\alpha\in A} \longmapsto \overline{\text{Res}_{Y_1,..Y_p}\quad[(\omega_\alpha)]}$$

es la proyección al cociente de las r-formas meromorfas globales $\Gamma\,(X,\Omega^r(*\bigcup_{i=1}^{p} Y_i))$.

Si $Y = \bigcap_{i=1}^{p} Y_i$ y

$$i\ :\ H^p_{[Y]}\,(X,\Omega^r) \longrightarrow H^p(X,\Omega^r)$$

es la aplicación natural deducida de la inclusión $'\mathcal{D}^{r,\cdot}_Y \subseteq {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}$, resulta claramentre

$$i \circ R = \text{Res}$$

donde R es el isomorfismo del capítulo anterior.

Luego

$$\boxed{\text{Ker } i = \{\text{clases de residuos de formas meromorfas globales}\}}$$

§2. TEOREMAS DE CARACTERIZACION DEL GRUPO DE COHOMOLOGIA MODERADA

Reuniendo los resultados del primer parágrafo con los obtenidos en el capítulo 1, se tienen los siguientes teoremas:

Teorema 2.2.1

Sea X una variedad holomorfa de dimensión n e Y un conjunto analítico de dimensión $n-p$ que sea la intersección de p-hipersuperficies globales.

Sea $T \in \Gamma(X, {}'\mathcal{D}^{r,p})$ una corriente con sop $T \subseteq Y$, $\bar\partial T = 0$.

Si $\mathcal{Y} = \{Y_1,\dots,Y_p\}$ es una familia de hipersuperficies en X tal que $Y = \bigcap_{i=1}^{p} Y_i$, entonces:

a) Existen

i) un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X

ii) un dato de Weil $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$, $\omega_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \Omega^r(* \cup \mathcal{Y}))$, asociado a $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{U}$

iii) $S \in \Gamma(X, {}'\mathcal{D}^{r,p-1})$, sop $S \subseteq Y$

tales que

$$T = \mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p}[(\omega_\alpha)] + \bar\partial S$$

b) Esta descomposición es única en el siguiente sentido:

Si $\mathcal{Y}' = \{Y_1', .., Y_p'\}$ es otra familia que verifica $Y = \cap \mathcal{Y}'$, $\mathcal{V} = (V_\beta)_{\beta\in B}$ un cubrimiento, $(\omega_\beta')_{\beta\in B}$ un dato de Weil asociado a $\mathcal{V}$ e $\mathcal{Y}'$ y $S' \in \Gamma_Y(X, '\mathcal{D}^{r,p-1})$ tales que

$$T = \mathrm{Res}_{Y_1',\ldots,Y_p'} [(\omega_\beta')] + \bar\partial S'$$

entonces

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p} [(\omega_\alpha)] = \mathrm{Res}_{Y_1',\ldots,Y_p'} [(\omega_\beta')]$$

y $$\bar\partial S = \bar\partial S'$$

c) Si además se verifica

$$H^q(X,\Omega^r(*\bigcup_{j\in J} Y_j)) = 0 \quad \forall q \geq 1, \ \forall J \in \Lambda(j,p), \ \forall 1 \leq j \leq p,$$

la colección $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ puede reemplazarse por una forma global

$$\omega \in \Gamma(X,\Omega^r(X \underset{*i=1}{\overset{p}{\cup}} Y_i))$$

si y sólo si la clase de T es cero en $H^p(X,\Omega^r)$, i.e. si y sólo si $\exists\, T' \in \Gamma(X, '\mathcal{D}^{r,p-1})$ tal que

$$\bar\partial T' = T$$

Demostración

a) Es una consecuencia del corolario 1.1.8 y de la proposición 1.2.2.

b) Veamos que la descomposición es única en cada punto $x \in X$. Sean $\alpha \in A$, $\beta \in B$ tales que $x \in U_\alpha \cap V_\beta$. Existe un entorno de x, $U_x \subset U_\alpha \cap V_\beta$ y $(f_i)_{i=1}^{p} \in \mathcal{O}(U_x)$, $(g'_j)_{j=1}^{p} \in \mathcal{O}(U_x)$, tales que en U_x :

1) $Y_i = (f_i = 0)$, $Y'_i = (g'_i = 0)$ $(\forall\ 1 \leq i \leq p)$

2) $\omega_\alpha = \dfrac{\sigma_\alpha}{f_1 \ldots f_p}$, $\omega'_\beta = \dfrac{\sigma'_\beta}{g'_1 \ldots g'_p}$ con σ_α, σ'_β regulares en U_x.

Por el Nullstellensatz, achicando eventualmente el entorno U_x, $\exists\ q \in \mathbb{N}$ y $\|a_{ij}\| \in \mathcal{O}^{p\times p}(U_x)$ tales que

$$g'^{q}_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ji}\, f_i \quad , \quad \forall\ 1 \leq j \leq p .$$

Sea $g_j = g'^{p}_j$, resulta $\omega'_\beta = \dfrac{\sigma'_\beta \cdot g'^{q-1}_1 \ldots g'^{q-1}_p}{g_1 \ldots g_p} = \dfrac{\sigma_\beta}{g_1 \ldots g_p}$

donde σ_β es holomorfa en U_x.

Entonces $\operatorname{Res}_{Y'_1,\ldots,Y'_p}[(\omega_\alpha)]_x = \operatorname{Res}_{Y'_1,\ldots,Y'_p}\left[\dfrac{\sigma_\alpha \det(a_{ij})}{g_1 \ldots g_p}\right]_x$

por la ley de transformación ([D]) .

Reemplazando, obtenemos que

$$\mathrm{Res}_{Y'_1,\ldots,Y'_p}\left[\frac{\sigma_\alpha \cdot \det(a_{ij}) - \sigma_\beta}{g_1 \cdots g_p}\right]_x = \bar\partial S''_x \quad \text{con} \quad \mathrm{sop}\, S'' \subseteq Y$$

y por el corolario 1.1.7 resulta

$$\mathrm{Res}_{Y'_1,\ldots Y'_p}\left[\frac{\sigma_\alpha \cdot \det(a_{ij})}{g_1 \cdots g_p}\right]_x = \mathrm{Res}_{Y'_1,\ldots Y'_p}\left[(\omega'_\beta)\right]_x$$

como buscábamos.

En cuanto a c), después de a) y b), no es más que una reformulación del Teorema 2.1.2//.

<u>Proposición 2.2.2</u>

Sea X una variedad holomorfa de dimensión n ; $\mathcal{Y} = \{Y_1,\ldots,Y_p\}$ una familia de hipersuperficies en X con intersección completa, $Y = \bigcap_{i=1}^{p} Y_i$. Bajo las hipótesis de anulación de los grupos de cohomología

$$H^q\,(X,\ \Omega^r(*\,Y_J)) = 0 \quad \forall\, q > 0\ ,\quad \forall\, J \subseteq \{1,\ldots,p\}\ ,$$

dada $T \in \Gamma_Y(X, '\mathcal{D}^{r,p})$, $\bar\partial\, T = 0$ las siguientes condiciones son equivalentes

a) Existe $S \in \Gamma(X, '\mathcal{D}^{r,p-1})$ tal que $T = \bar\partial\, S$

b) Existe en X un subconjunto analítico Y' que con-tiene a Y, con $\dim_{\mathbb{C}} Y' = \dim_{\mathbb{C}} Y + 1$,

y $S' \in \Gamma_{Y'}(X, {}'\mathcal{D}^{r,p-1})$ tal que $T = \bar{\partial} S'$

Demostración

Si $T = \bar{\partial} S$ para alguna corriente $S \in \Gamma(X, {}'\mathcal{D}^{r,p-1})$, por c) del teorema 2.2.1 existe $\omega \in \Gamma(X, \Omega^r(*\bigcup_{i=1}^{p} Y_i))$ tal que

$$T = \operatorname{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p}[\omega] + \bar{\partial} T_1 \qquad \text{con sop } T_1 \subseteq Y$$

luego $S' = \operatorname{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{p-1}} P_{Y_p}[\omega] + T_1$ cumple lo requerido: $\bar{\partial} S' = T$ y sop $S' \subseteq \mathcal{Y}(p) = Y'$ (cf. propiedad 0.3)//.

La unicidad en b) del teorema 2.2.1. permite obtener una caracterización de $H^p_{[Y]}(X, \Omega^r)$ en el caso en que Y sea localmente una intersección completa.

Teorema 2.2.3.

Sea X una variedad holomorfa de dimensión n, y sea Y un conjunto analítico de codimensión p dado localmente por la intersección de p hipersuperficies.

Dada $T \in \Gamma(X, {}'\mathcal{D}^{r,p})$, $\bar{\partial} T = 0$

existen

i) $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ cubrimiento de X por abiertos.

ii) $\mathcal{Y}^\alpha = \{Y_1^\alpha, \ldots, Y_p^\alpha\}$ flia. de hipersuperficies en U_α:

$$Y \cap U_\alpha = \bigcap_{i=1}^{p} Y^\alpha$$

iii) $\omega_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \Omega^r(*\ \bigcup \mathcal{Y}^\alpha))$, $\forall \alpha \in A$

iv) $\quad S \in \Gamma_Y(X, {}'\mathcal{D}^{r,p-1})$

tales que

$$\mathrm{Res}_{Y_1^\alpha,\dots,Y_p^\alpha}[\omega_\alpha] = \mathrm{Res}_{Y_1^\beta,\dots Y_p^\beta}[\omega_\beta] \text{ en } U_\alpha \cap U_\beta$$

y $\quad T = (\mathrm{Res}_{Y_1^\alpha,\dots,Y_p^\alpha}[\omega_\alpha]) + \bar\partial S$

Demostración

Sea $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ un cubrimiento que verifique ii) ; eventualmente refinando $\mathcal{U}$, a) del teorema 2.2.1. provee la escritura local

$$T\Big|_{U_\alpha} = \mathrm{Res}_{Y_1^\alpha,\dots,Y_p^\alpha}[\omega_\alpha] + \bar\partial S_\alpha$$

donde $\omega_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \Omega^r(*\bigcup_{i=1}^{p} Y_i^\alpha))$, $\quad S_\alpha \in \Gamma_Y(X, {}'\mathcal{D}^{r,p-1})$

Por b), en $U_\alpha \cap U_\beta$

$$\mathrm{Res}_{Y_i^\alpha,\dots,Y_p^\alpha}[\omega_\alpha] = \mathrm{Res}_{Y_1^\beta,\dots,Y_p^\beta}[\omega_\beta]$$

y $\bar\partial S_\alpha = \bar\partial S_\beta$

Por la inyectividad de

$$H^p_{[Y]}(X,\Omega^q) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H}^p_{[Y]}\Omega^q)$$

de la proposición 1.2.2 , existe

$S \in \Gamma_Y(X, {}'\mathcal{D}^{r,p-1})$ tal que

$$\bar{\partial} S \Big|_{U_\alpha} = \bar{\partial} S_\alpha$$

lo cual concluye la demostración del teorema//.

CAPITULO III

DATOS DE WEIL GENERALIZADOS

En este capítulo se estudiará una generalización del problema de Weil para colecciones de datos que cumplan las siguientes condiciones de compatibilidad:

Sea $\mathcal{Y} = \{Y_1,\dots,Y_p\}$ una familia de hipersuperficies en X con intersección completa (X una variedad holomorfa de dimensión n), y sea $j \in \mathbb{N}(1 \leq j \leq p)$. Dado $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\varepsilon A}$ un cubrimiento abierto de X y $\omega = \{\omega_\alpha \in \Gamma(U_\alpha,\Omega^r(*\mathcal{Y}))\}$ una colección de r-formas meromorfas con polos en la unión de la fami - lia $\mathcal{Y}$, diremos que es un <u>j-dato</u> de Weil si en $U_\alpha \cap U_\beta$, $\omega_\alpha-\omega_\beta$ se parte como una suma de formas cada una de ellas regular en j hipersuperficies de $\mathcal{Y}$ (para todo par (α,β)).

¿Bajo qué condiciones existirá una forma global $\phi \in \Gamma(X,\Omega^r(*\ \mathcal{Y}))$ que difiera localmente del dato en una suma de formas con polos en p-j hipersuperficies (a lo sumo) de la familia $\mathcal{Y}$?

Notemos que dado un j-dato de Weil $\omega = (\omega_\alpha)_{\alpha\varepsilon A}$, quedan globalmente definidas, para todo conjunto $J \in \Lambda(j,p)$, las corrien - tes de tipo residual $R^{\mathcal{Y}}_J[\omega]$ definidas localmente por:

$$R^{\mathcal{Y}}_J[\omega]\Big|_{U_\alpha} = \mathrm{Res}_{Y_{i_1},\dots,Y_{i_{p-j}},\ \bigcup\limits_{j\varepsilon J} Y_j}[\omega_\alpha] =$$

$$= \mathrm{Res}_{Y_{i_1},\dots,Y_{i_{p-j}},\ Y_J}[\omega_\alpha]$$

donde $i_1 < \ldots < i_{p-j}$ y $J \cup \{i_1, \ldots, i_{p-j}\} = \{1, \ldots, p\}$.

En efecto, en $U_\alpha \cap U_\beta$

$$\omega_\alpha - \omega_\beta = \sum_{J' \varepsilon \Lambda(j,p)} \omega(J')$$

donde $\omega(J') \; \varepsilon \; \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \Omega^r(*\bigcup_{i \notin J'} Y_i))$.

Por la propiedad 0.5 i) resulta

$$R_J^y \; [\omega(J')] = \mathrm{Res}_{Y_1, \ldots, Y_{i_{p-j}}, Y_J} [\omega(J')] =$$

$$= 0 \qquad\qquad \forall \; J, \; J' \varepsilon \; \Lambda(j,p)$$

pues o bien $J = J'$ o bien $i_\ell \; \varepsilon \; J'$ para algún ℓ, $1 \leq \ell \leq p-j$

Sea A_{p-j-1} el haz ya definido (cap. II, §1) de formas con polos en p-j hipersuperficies (si j=p, $A_{-1} = \Omega^r$) y $\sigma : A_{p-j-1} \longrightarrow A_{p-1}$ el morfismo definido por

$$\sigma((\omega_L)_{L \varepsilon \Lambda(p-j,p)}) = \sum_{L \varepsilon \Lambda(p-j,p)} \omega_L \quad , \omega_L \varepsilon \; \Omega^r(* \; Y_L).$$

Consideremos el haz cociente

$$\mathcal{Q}_j = A_{p-1} / \sigma(A_{p-j-1})$$

y la proyección

$$\Pi_j : A_{p-1} \longrightarrow Q_j$$

El problema puede plantearse entonces de la siguiente manera : dada una sección al haz Qj, ¿cuándo será la proyección al cociente de una forma meromorfa global?

Antes de responder a esta pregunta damos el siguiente Lema

Lema 3.1

Sea $Y = \{Y_1,\dots,Y_p\}$ una familia de hipersuperficies en B , una bola en $\mathbb{C}^n$ tal que $\dim_{\mathbb{C}} \bigcap_{i=1}^{p} Y_i = n-p$; sea $s<p$, $s \in N$; para todo $J \in \Lambda(s,p)$, sea $\gamma_J \in \Gamma(B,\Omega^r(* Y_J))$; si se verifica

$$\sum_{J\in\Lambda(s,p)} \gamma_J = 0$$

entonces, $\forall\, J \in \Lambda(s,p)$ y $\forall\, \ell \in J$, existe $\omega_{J-\{\ell\}} \in \Gamma(B,\Omega^r(* \bigcup_{\substack{i\neq\ell \\ i\in J}} Y_i))$ tales que

$$\gamma_J = \sum_{\ell\in J} \omega_{J-\{\ell\}}$$

Demostración

Sean $\{f_1,\dots,f_p\}$, $f_i \in \mathcal{O}(B)$, $(f_i=0)\cap B = Y_i$, tales que $\forall\, J \in \Lambda(s,p)$

$$\gamma_J = \frac{\alpha_J}{\prod_{i\in J} f_i} , \quad \text{donde } \alpha_J \in \Gamma(B, \Omega^r).$$

Sea J_o un conjunto fijo, $J_o \varepsilon \Lambda(s,p)$ y sea $g = \prod_{i \notin J_o} f_i$

$$\sum_{J \varepsilon \Lambda(s,p)} \gamma_J = 0 \Rightarrow g \cdot \gamma_{J_o} = \sum_{\substack{J \varepsilon \Lambda(s,p) \\ J \neq J_o}} g \cdot \gamma_J \qquad \text{(i)}$$

Para cualquier conjunto $J \neq J_o$, $\ell_J \varepsilon J_o - J$, entonces

$$g \cdot \gamma_J = \prod_{i \notin J_o} f_i \cdot \frac{\alpha_J}{\prod_{i \varepsilon J} f_i} = \frac{\alpha'_J}{\prod_{i \varepsilon J \cap J_o} f_i} = \frac{\alpha''_J}{\prod_{\substack{i \varepsilon J_o \\ i \neq \ell_J}} f_i}$$ donde α'_J y α''_J

son formas regulares.

Reemplazando en (i)

$$g \cdot \gamma_{J_o} = \frac{g \cdot \alpha_{J_o}}{\prod_{i \varepsilon J_o} f_i} = \sum_{\substack{J \varepsilon \Lambda(s,p) \\ J \neq J_o}} \frac{\alpha''_J}{\prod_{\substack{i \varepsilon J_o \\ i \neq \ell_J}} f_i} = \frac{\sum_{\substack{J \varepsilon \Lambda(s,p) \\ J \neq J_o}} f_{\ell_J} \alpha''_J}{\prod_{i \varepsilon J_o} f_i},$$

luego $g \cdot \alpha_{J_o} = \sum_{\substack{J \varepsilon \Lambda(s,p) \\ J \neq J_o}} f_{\ell_J} \alpha''_J$, donde $\ell_J \varepsilon J_o \vee J$,

o sea $g \cdot \alpha_{J_o} \varepsilon I < \{f_\ell\}_{\ell \varepsilon J_o} > \cdot \Omega^r$;

luego los coeficientes de la forma α_{J_o} multiplicados por g

están en el ideal $I < \{f\}_{\ell \varepsilon J_o} >$ (ii)

Como $(g=0) \cap (\bigcap_{\ell \varepsilon J_o} (f_\ell = 0)) = \bigcup_{i \notin J_o} (Y_i \cap (\bigcap_{\ell \varepsilon J_o} Y_\ell))$ y por hipótesis la familia $\mathcal{Y}$ tiene intersección completa, resulta

$$\dim_{\mathbb{C}} (g=0) \cap (\bigcap_{\ell \varepsilon J_o} (f_\ell = 0)) = n-(s+1)$$, o sea

$\{\{f_\ell\}_{\ell\in J_o}\ , g\}$ es una secuencia regular; entonces de (ii) se deduce que los coeficientes de la forma α_{J_o} están en el ideal $I' < \{f_\ell\}_{\ell\in J_o} >$, lo cual permite escribir

$$\gamma_{J_o} = \sum_{\ell\in J_o} \omega_{J_o-\{\ell\}} \text{ donde } \omega_{J_o-\{\ell\}} \in \Gamma\,(B,\Omega^r(*\bigcup_{\substack{i\in J_o\\ i\neq\ell}} Y_i))$$

tal como queríamos//.

Estamos ahora en condiciones de enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.2

Sea X una variedad holomorfa de dimensión n ; $\mathcal{Y} = \{Y_1,\ldots,Y_p\}$ una familia de hipersuperficies en X con intersección completa que verifica

$$H^q(X,\Omega^r(* Y_J)) = 0 \quad \forall q \geq 1, \quad \forall J\in\Lambda(s,p) \ , \quad \forall\, s\leq p \ .$$

Dado $j \leq p$ y $\omega\in\Gamma(X,Q_j)$, existe $\phi \in \Gamma(X,A_{p-1})$ tal que $\Pi_j^* \phi=\omega$ sí y sólo sí $R_J^{\mathcal{Y}}[\omega]$ tiene clase de cohomología nula en $H^{p-j+1}(X,\Omega^r)$, $\forall\, J\in\Lambda(j,p)$ tal que $p \in J$.

Demostración

a) $j = p$

Sea $Y = \bigcup_{i=1}^{p} Y_i$, los datos locales (ω_α) son formas con polos en Y cuyas diferencias son formas regulares en la intersección de cada par de abiertos.

Por el teorema 2.1.2

$\exists \phi \in \Gamma(X, \Omega^r(* Y))$ tal que $\Pi^*(\phi) = \omega \iff \overline{Res_Y[\omega]} = 0$ en $H^1(X,\Omega^r)$ que es exactamente lo que hay que demostrar.

b) $j < p$

La condición es claramente necesaria ya que

$$\omega = \Pi_j^* \phi \Rightarrow R_J^{\mathcal{Y}}[\omega] = Res_{Y_{i_1},\dots,Y_{i_{p-j}},Y_J}[\phi] =$$

$$= \bar{\partial}(Res_{Y_{i_1},\dots,Y_{i_{p-j}}} P_{Y_J}[\phi])$$

luego $R_J^{\mathcal{Y}}[\omega]$ tiene clase de cohomología nula en $H^{p-j+1}(X,\Omega^r)$ $\forall J \in \Lambda(j,p)$.

En cuanto a la suficiencia, se demostrará por inducción en $j < p$.

Si $j=1$ el resultado es cierto $\forall p \in N$, según lo demostrado en el teorema 2.1.2.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para j, cualquiera sea q la cantidad de hipersuperficies de la familia $\mathcal{Y}$, con $j < q$.

Dada una familia $\mathcal{Y} = \{Y_1,\dots,Y_p\}$ con $j+1<p$, debemos probar lo siguiente:

"Si $\omega \in \Gamma(X,\Omega_{j+1})$ es tal que $R_L^{\mathcal{Y}}[\omega]$ es nulo en

$H^{p-(j+1)+1}(X,\Omega^r)$ para todo conjunto $L \in \Lambda(j+1,p)$, $p \in L$, existe entonces una forma meromorfa global $\phi \in \Gamma(X,\Omega^r(*\bigcup_{i=1}^{p} Y_i))$ tal que $\Pi^*_{j+1}(\phi)=\omega$."

Dada $\omega \in \Gamma(X, Q_{j+1})$, existe $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ cubrimiento de X por abiertos y $\omega_\alpha \in \Gamma(U_\alpha,\Omega^r(*\bigcup_{i=1}^{p} Y_i))$, $\forall \alpha \in A$, que definen ω. Podemos suponer que cada U_α es isomorfo analíticamente a una bola en $\mathbb{C}^n$.

Sean $Y_i' = Y_i$ si $1 \le i \le p-2$ y $Y'_{p-1} = Y_{p-1} \cup Y_p$ y consideremos la familia $\mathcal{Y}' = \{Y_1', \ldots, Y'_{p-2}, Y'_{p-1}\}$ que resulta tener también intersección completa.

Llamemos

$$A'_{\ell-1} = \bigoplus_{L\in\Lambda(\ell,p-1)} \Omega^r(*\bigcup_{i\in L} Y_i') \qquad \forall\ 1\le\ell\le p-1$$

$$\sigma' : A'_{p-2-j} \longrightarrow A'_{p-2}$$

$$\sigma'\left((\omega_L)_{L\in\Lambda(p-j-1,p-1)}\right) = \sum_L \omega_L$$

$$Q_j' = A'_{p-2}/\sigma(A'_{p-2-j})$$

$$\Pi_j' : A'_{p-2} \longrightarrow Q_j'$$

Como $\cup\mathcal{Y} = \cup\,\mathcal{Y}'$, $\omega_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, A'_{p-2})$ y por la compatibilidad en las intersecciones, la colección $(\omega_\alpha)_{\alpha\varepsilon A}$ define una sección $\omega' \varepsilon \Gamma(X,\Omega_j')$.

$\forall$ conjunto $K \varepsilon \Lambda(j,p-1)$ tal que $p-1 \varepsilon K$

$$R_K^{Y'}[\omega'] = R_{KU\,p}^{Y}[\omega]$$

luego, por hipótesis, es nulo en $H^{p-(j+1)+1}(X,\Omega^r) =$

$$= H^{(p-1)-j+1}(X,\Omega^r) \ .$$

Podemos entonces aplicar la hipótesis inductiva:

$$\exists \quad \phi' \varepsilon \Gamma(X,A'_{p-2}) \text{ tal que } \Pi_j'^{*}(\phi') = \omega' \quad ;$$

luego $\forall\ \alpha \varepsilon A$, existe una familia de formas $\{\theta_L^\alpha\}_{L\varepsilon\Lambda(p-1-j,p-1)}$ $\theta_L^\alpha \varepsilon \Gamma(U_\alpha,\Omega^r(*\ Y'_L))$ que verifica

$$\phi' - \omega_\alpha = \sum_{L\varepsilon\Lambda(p-1-j,p-1)} \theta_L^\alpha \qquad (*)$$

(eventualmente refinando el cubrimiento).

Dado $L \varepsilon \Lambda(p-1-j,p-1)$, si $p-1 \not\varepsilon L$, θ_L^α tiene polos en $p-(j+1)$ hipersuperficies de la familia original. Si $p-1 \varepsilon L$, $\theta_L^\alpha \varepsilon \Gamma(U_\alpha,\Omega^r(* \bigcup_{i\varepsilon L\cup\{p\}} Y_i))$, es decir tiene polos en p-j hipersuperficies de Y. Para concluir la demostración, basta ver entonces que para cada conjunto $L \varepsilon \Lambda(p-1-j,p-1)$ tal que $p-1 \varepsilon L$, existe una forma meromorfa global $\phi'_L \varepsilon \Gamma(X,\Omega^r(* \cup Y))$ tal que en cada U_α, ϕ'_L difiera de e^α_L en una suma de formas con polos en una hipersuperficie menos. En efecto, si tomamos

$$\phi = \Phi' - \sum_{\substack{L\in\Lambda(p-j-1,p-1)\\ p-1\,\varepsilon L}} \Phi_L$$

resulta

$$\Pi^*_{j+1}(\phi) = \omega$$

como queríamos.

Dado $L\,\varepsilon\,\Lambda(p-j-1,p-1), p-1\ \varepsilon L$, consideremos la familia de $p-j$ hipersuperficies $\mathcal{Y}_L = \{Y_i,\ i\varepsilon L \cup \{p\}\} =$

$$= \{Y_{L_1},\ldots,Y_{L_{p-j-2}},\ Y_{p-1},\ Y_p\}.$$

Llamemos

$$A^L_{(p-j)-1} = \Omega^r(*\ \cup\ \mathcal{Y}_L)$$

$$A^L_{(p-j)-2} = \bigoplus_{\ell\varepsilon L\cup\{p\}} \Omega^r(*\ Y_{L\cup\{p\}-\{\ell\}})$$

$$\sigma_L : A^L_{(p-j)-2} \longrightarrow A^L_{(p-j)-1}$$

$$\sigma_L\left((\gamma_\ell)_{\ell\varepsilon L\cup\{p\}}\right) = \sum_{\ell\varepsilon L\cup\{p\}} \gamma_\ell$$

$$Q^L_1 = A^L_{(p-j)-1} \big/ \sigma_L(A^L_{(p-j)-2})$$

$$\Pi_1^L : A^L_{p-j-1} \longrightarrow \mathcal{Q}_1^L$$

Veremos :

a) $(\theta_L^\alpha)_{\alpha\varepsilon A}$ define una sección global θ de $\mathcal{Q}_1^L$, con lo cual las corrientes locales

$$\mathrm{Res}_{Y_{L_1},\ldots,Y_{L_{p-j-2}},\, Y_{p-1},\, Y_p} [\theta_L^\alpha]$$

definen una corriente global T

b) $\overline{T} = 0$ en $H^{p-j}(X,\Omega^r)$,

con lo cual como el resultado es cierto para la familia Y_L y $j=1$, existe la forma global buscada

$$\Phi_L' \,\varepsilon\,\Gamma(X,\Omega^r(*\bigcup_{Y\varepsilon\mathcal{Y}_L} Y)) \subseteq \Gamma(X,A_{p-1})$$

Demostración de a):

por (*)

$$\theta_L^\alpha - \theta_L^\beta = \omega_\beta - \omega_\alpha + \sum_{\substack{K\varepsilon\Lambda(p-j-1,p-1)\\ K\neq L}} (\theta_K^\beta - \theta_K^\alpha)$$

o sea

$$(\theta_L^\alpha - \theta_L^\beta) + (\omega_\alpha - \omega_\beta) + \sum_{K\neq L} (\theta_K^\alpha - \theta_K^\beta) = 0 \qquad (**)$$

donde $(\theta_K^\alpha - \theta_K^\beta)\varepsilon\Gamma(U_\alpha \cap U_\beta\, ,\, \Omega^r\, (*\bigcup_{i\varepsilon K\cup\{p\}} Y_i)$; por otro lado $\omega_\alpha - \omega_\beta$ es igual, por hipótesis, a una suma de formas con polos en p-j-1 hipersuperficies de la familia $\mathcal{Y}$, luego cada uno de estos sumandos puede considerarse como una forma con polos en una familia de p-j hipersuperficies distinta de $\mathcal{Y}_L$; (**) tiene entonces la forma

$$\sum_{J\in\Lambda(p-j,p)} \gamma_J = 0$$

donde $\gamma_J \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \Omega^r(* \bigcup_{i\in J} Y_i))$ y $\gamma_{L\cup\{p\}} = \theta_L^\alpha - \theta_L^\beta$

Por el lema 3.1 resulta a).

Demostración de b)

Llamemos $I = \{1,\ldots p\} - L$. Como $L \subseteq \{1,\ldots,p-1\}$, $p\in I$. Entonces

$T = R_I^Y[\theta]$, ya que en cada U_α

$$T = \mathrm{Res}_{Y_{L_1},\ldots,Y_{L_{p-j-2}},\, Y_{p-1},\, Y_p}[\theta_L^\alpha] =$$

$$= \mathrm{Res}_{Y_{L_1},\ldots,Y_{L_{p-j-2}},\, Y_{p-1},\, Y_I}[\theta_L^\alpha] \quad \text{(cf. propiedad 0.5 ii))} .$$

Por (*)

$$\theta_L^\alpha = \Phi' - \omega_\alpha - \sum_{\substack{K\in\Lambda(p-1-j,p-1)\\ K\neq L}} \theta_L^\alpha$$

Ahora bien , $\forall\ K \neq L$

$$\mathrm{Res}_{Y_{L_1},\ldots,\, Y_{L_{p-j-2}},\, Y_{p-1},\, Y_I}[\theta_K^\alpha] = 0$$

pues existe algún índice $s \in \{L_1,\ldots,L_{p-j-2}, p-1\}$ tal que $s \notin K$.

Luego

$$T = \mathrm{Res}_{Y_{L_1},\dots,Y_{L_{p-j-2}},\ Y_{p-1},\ Y_I}[\phi'] - R_I^{y}[\omega]$$

y ambas corrientes son nulas en $H^{p-j}(X,\Omega^r)$ ya que

$$\mathrm{Res}_{Y_{L_1},\dots,Y_{L_{p-j-2}},\ Y_{p-1},\ Y_I}[\phi'] =$$

$$= \overline{\partial}(\mathrm{Res}_{Y_{L_1},\dots,Y_{L_{p-j-2}},\ Y_{p-1}}\ P_{Y_1}[\phi'])$$

y $\qquad R_I^{y}[\omega] = 0$ por hipótesis.

Queda entonces demostrado b), y por lo tanto el teorema 3.2.//.

3.3 Observación

Notemos que la condición requerida es la anulación de las $\binom{p-1}{j-1}$ corrientes residuales de la forma $R_J^{y}[\omega]$ $(|J| = j)$ con $p \in J$. Esto asegura que las clases de todas las corrientes $R_J^{y}[\omega]$ son nulas, cualquiera sea $J \in \Lambda(j,p)$.

En efecto, de acuerdo con las fórmulas residuales siguientes (demostradas en [D]):

$$\forall\ L \in \Lambda(j+1,\ p)\ ,\ CL = \{1,\dots,p\} - L = \{I_1,\dots,I_{p-(j+1)}\}$$

$$\sum_{\ell \in L} \mathrm{Res}_{Y_{I_1},\dots,\ Y_{I_{p-(j+1)}},\ Y_\ell\ ,\ \bigcup_{\substack{i\in L\\ i\neq \ell}} Y_i} = 0\ ,$$

dado $J \in \Lambda(j,p)$, $p \notin J$, $CJ = \{I_1, \ldots, I_{p-(j+1)}, p\}$ resulta:

$$R_J^y = \mathrm{Res}_{Y_{I_1}, \ldots, Y_{I_{p-(j+1)}}, Y_p, \underset{i \in J}{\cup} Y_i}$$

$$= - \sum_{j \in J} \mathrm{Res}_{Y_{I_1}, \ldots, Y_{I_{p-(j+1)}}, Y_\ell, \underset{\substack{i \in J \\ i \neq \ell}}{\cup} Y_i \cup Y_p}$$

Es claro que podría hacerse en el enunciado del teorema 3.2 la elección de otros $\binom{p-1}{j-1}$ residuos cuya nulidad implique la de todos los $R_J^y\,[\omega]$ en $H^{p-j+1}\ (X, \Omega^r)$.

3.4 Por el tipo de condiciones obtenidas en el teorema 3.2, es de esperar la existencia de una sucesión exacta

$$0 \to (\Omega^r)^{\binom{p-1}{j-1}} \to A_o^{\binom{p-2}{j-1}} \to \cdots \to A_{p-j-2}^{\binom{j}{j-1}} \to A_{p-j-1}^{\binom{j-1}{j-1}} \to A_{p-1} \to \mathcal{Q}_j \to 0$$

Es posible dar demostraciones de este hecho en algunos casos particulares (j=2, p-1, p-2, p-3).

CAPITULO IV

CUP-PRODUCT EN COHOMOLOGIA MODERADA

De acuerdo al teorema 2.2.1 toda clase en $H^p_{[Y]}(X,\Omega^q)$ es la clase de un residuo de un dato de Weil (para Y una variedad analítica de codimensión p, intersección de p hipersuperficies globales).

Dadas Y e Y' dos variedades analíticas de codimensiones p y p' respectivamente, expresables como intersección de p(y p') hipersuperficies globales, usaremos esta representación del grupo de cohomología moderada para definir el "cup-product":

$$H^p_{[Y]}(X,\Omega^q) \otimes H^{p'}_{[Y']}(X,\Omega^{q'}) \longrightarrow H^{p+p'}_{[Y\cap Y']}(X,\Omega^{q+q'})$$

si se verifica además que $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}}(Y \cap Y') = p+p'$.

Esta aplicación lineal hará conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
H^p_{[Y]}(X,\Omega^q) \otimes H^{p'}_{[Y']}(X,\Omega^{q'}) & \longrightarrow & H^{p+p'}_{[Y\cap Y']}(X,\Omega^{q+q'}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^p(X,\Omega^q) \otimes H^{p'}(X,\Omega^{q'}) & \xrightarrow{\ \cup\ } & H^{p+p'}(X,\Omega^{q+q'})
\end{array}$$

donde $\cup$ denota el "cup-product" en cohomología a valores en las formas holomorfas.

4.1

Dada $\mathcal{Y} = \{Y_1,\dots,Y_t\}$ una familia de hipersuperficies con intersección completa, consideremos $A^\bullet$ la resolución de longitud t de Ω^r por formas con polos (como en el capítulo II).

La exactitud de $A^\bullet$ dice en particular que dadas t formas α_i,

$$\alpha_i \in \Omega^r\left(* \bigcup_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{t} Y_j\right) \quad \text{tales que}$$

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i = 0 \quad ,$$

$\forall\, i$, $1 \leq i \leq t$ y $\forall\, j\neq i$ existen formas meromorfas con polos en $t-2$ hipersuperficies $\beta_{ij} \in \Omega^r\left(* \bigcup_{\substack{k=1\\ k\neq i\\ k\neq j}}^{t} Y_k\right)$ tales que

$$\alpha_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{t} \beta_{ij}$$

En este caso, diremos que la forma α_i "se parte" y que β_{ij} es una parte j- regular de α_i.

Sea, como antes, $\mathcal{Q} = A_{t-1}/_{\mathrm{Im}(A_{t-2})}$

y $\omega = (\omega_\alpha)_{\alpha\in A} \in \Gamma(X, \mathcal{Q})$ un dato de Weil asociado al cubrimiento $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X por abiertos Stein.

Construiremos a partir del dato una colección de cocadenas de formas $(\sigma^\ell)_{0\leq\ell\leq t}$ que verifiquen:

i) $\sigma^{\ell} \varepsilon \check{C}^{\ell} (\mathcal{U}, \Omega^r (* \bigcup_{i=1}^{t-\ell} Y_i)$, $\forall\, 0 \leq \ell \leq t$

ii) $\sigma^{o}_{\alpha} = \omega_{\alpha}$, $\forall\, \alpha \varepsilon A$

iii) $\sigma^{j+1}_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_{j+1}>}$ es una parte $(t-j)$- regular de $(\check{\delta}\sigma^j)_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_{j+1}>}$, $\forall\, 0 \leq j < t-1$

iv) $\sigma^t = \check{\delta}\, \sigma^{t-1}$

y veremos en el lema 4.2 que estas condiciones aseguran que la t-cocadena σ^t es un representante en cohomología de Čech, de la clase en $H^t (X,\Omega^r)$ de la corriente global $\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_t}[\omega]$ definida por el dato.

<u>Existencia de la colección</u> $(\sigma^{\ell})_{0\leq\ell\leq t}$ <u>asociada a</u> $\omega \varepsilon \Gamma(X,\mathcal{Q})$

Por definición de $\mathcal{Q}$, $\omega = (\omega_{\alpha})_{\alpha\varepsilon A} \varepsilon \check{C}^{o}(\mathcal{U},\Omega^r(*\bigcup_{i=1}^{t} Y_i))$ y $\forall\, \alpha_o, \alpha_1 \varepsilon A$, $(\check{\delta}\omega)_{<\alpha_o, \alpha_1>}$ se parte.

<u>Definamos</u> $\sigma^1 \varepsilon \check{C}^1 (\mathcal{U},\Omega^r (*\bigcup_{i=1}^{t-1} Y_i))$:

$\sigma^1_{<\alpha_o, \alpha_1>}$ es una parte t-regular de $(\check{\delta}\omega)_{<\alpha_o, \alpha_1>}$

Como $\check{\delta}\check{\delta}\omega = 0$, por lo observado en la página anterior $\forall\, \alpha_o, \alpha_1, \alpha_2 \varepsilon A$ $(\check{\delta}\, \sigma^1)_{<\alpha_o, \alpha_1, \sigma_2>}$ se parte; <u>definamos</u> $\sigma^2 \varepsilon \check{C}^2 (\mathcal{U}, \Omega^r (*\bigcup_{i=1}^{t-2} Y_i))$:

$\sigma^{2}_{<\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2>}$ es una parte $(t-1)$ - regular de $(\check{\delta}\sigma^1)_{<\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2>}$.

En general, dado $j < t-1$ y $\sigma^j \in \check{C}^j(U,\Omega^r(*\bigcup_{i=1}^{t-j} Y_i)$ tal que $\sigma^j_{<\alpha_0,\ldots,\alpha_j>}$ es una parte $(t-(j-1))$ -regular de $(\check{\delta}\sigma j-1)_{<\alpha_0,\ldots,\alpha_j>}$, se verifica que

$$(\check{\delta}\sigma^j)_{<\alpha_0,\ldots,\alpha_{j+1}>} \quad \text{se parte} \quad \forall\ \alpha_0,\ldots,\alpha_{j+1} \in A$$

ya que $\check{\delta}\check{\delta}\sigma^{j-1} = 0$. <u>Definimos</u> entonces $\sigma^{j+1} \in \check{C}^{j+1}(U,\Omega^r(*\bigcup_{i=1}^{t-j-1} Y_i)$ como

$$\sigma^{j+1}_{<\alpha_0,\ldots,\alpha_{j+1}>} \quad \text{una parte } (t-j) \text{ - regular de}$$

$(\check{\delta}\sigma^j)_{<\alpha_0,\ldots,\alpha_{j+1}>}$

Resulta $\check{\delta}\ \sigma^{t-1} \in \check{C}^t(U,\Omega^r)$.

Llamemos $\begin{cases} \sigma^t = \check{\delta}\,\sigma^{t-1} \\ \sigma^o = (\omega_\alpha)_{\alpha\in A} \end{cases}$

<u>Lema</u> <u>4.2</u>

El isomorfismo canónico

$$H_{\bar{\partial}}(\Gamma(X,'\mathcal{D}^{q,t})) \longrightarrow \check{H}^t(U,\Omega^q) = H^t(X,\Omega^q)$$

envía

$$\overline{\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_t}[\omega]} \longmapsto \overline{\sigma^t}$$

Demostración

Para cada i , $0 \leq i \leq t-1$, definiremos objetos $T_i \in \check{C}^i(\mathcal{U}, {}'\mathcal{D}^{q,t-1-i})$ tales que:

a) $\bar{\partial}\, T_o = \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_t}[\omega]$

b) $\forall\ 1 \leq i \leq t-1 \ ,\ \bar{\partial}\, T_i = \check{\delta}\, T_{i-1}$

c) $\forall \alpha_o,\ldots,\alpha_t \in \Lambda,\ (\check{\delta}\, T_{t-1})_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_t>} = \int \sigma^t_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_t>} \wedge \cdot$

de donde resultará el lema.

Sea

$$T_{i<\alpha_o,\ldots,\alpha_i>} = \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{t-1-i}}\ P_{Y_{t-i}}[\sigma^i_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_i>}]$$

a) $(\bar{\partial}\, T_o)_{\alpha_o} = \bar{\partial}\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{t-1}}\ P_{Y_t}[\omega_{\alpha_o}] = \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_t}[\omega_{\alpha_o}]$

b) $(\check{\delta}\, T_{i-1})_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_i>} = \sum\limits_{j=o}^{i} (-1)^j\ T_{i-1<\alpha_o,\ldots,\hat{\alpha}_j,\ldots,\alpha_i>} =$

$= \sum\limits_{j=o}^{i} (-1)^j \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{t-i}} P_{Y_{t-i+1}}[\sigma^{i-1}_{<\alpha_o,\ldots,\hat{\alpha}_j,\ldots,\alpha_i>}] =$

$= \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{t-i}}\ P_{Y_{t-i+1}}[(\check{\delta}\sigma^{i-1})_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_i>}]$

y como $\check{\delta}\sigma^{i-1}$ se parte, por la propiedad 0.5 i), esto es igual a

$\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{t-1}}[\sigma^i_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_i>}] = \bar{\partial}(\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_{t-i-1}}\ P_{Y_{t-i}}[\sigma^i_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_i>}]) =$

$= (\bar{\partial}\, T_i)_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_i>}$

c) $(\check{\delta}\, T_{t-1})_{<\alpha_o,\dots,\alpha_t>} = P_{Y_1}\,[(\check{\delta}\sigma^{t-1})_{<\alpha_o,\dots,\alpha_t>}] =$

$= \int \sigma^t_{<\alpha_o,\dots,\alpha_t>}\ \Lambda$.

ya que σ^t es regular//.

Proposición 4.2

Sea X una variedad holomorfa; $\mathcal{Y} = \{Y_1,\dots,Y_p\}$, $\mathcal{Y}' = \{Y'_1,\dots,Y'_{p'}\}$ dos familias de hipersuperficies en X tales que $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} \bigcap_{Z\in\mathcal{Y}\cup\mathcal{Y}'} Z = p+p'$; $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ y $(\omega'_\alpha)_{\alpha\in A}$ datos de Weil de q y q' formas asociados a las familias $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y}'$ respectivamente y al cubrimiento $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X por abiertos.

Entonces

$$\overline{\operatorname{Res}_{Y_1,\dots,Y_p}[(\omega_\alpha)]} \cup \overline{\operatorname{Res}_{Y'_1,\dots,Y'_{p'}}[(\omega'_\alpha)]} =$$

$$= \overline{\operatorname{Res}_{Y_1\dots,Y_p,Y'_1,\dots,Y'_{p'}}[(\omega_\alpha\wedge\omega'_\alpha)]}$$

en $H^{p+p'}(X,\Omega^{q+q'})$

Demostración: Por 4.1 existen

$$\sigma^j \in \check{C}^j(\mathcal{U},\Omega^q(*\bigcup_{i=1}^{p-j} Y_i)),\quad \forall\ 0 \le j \le p$$

$$\sigma'^k \in \check{C}^k(\mathcal{U},\Omega^{q'}(*\bigcup_{i=1}^{p'-k} Y'_i)),\quad \forall\ 0 \le k \le p'$$

tales que:

$\sigma^{o} = (\omega_{\alpha})_{\alpha\varepsilon\Lambda}$, $\sigma'^{o} = (\omega'_{\alpha})_{\alpha\varepsilon\Lambda}$

$\sigma^{j+1}_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_{j+1}>}$ es una parte $(p-j)$-regular de $(\check{\delta}\sigma^{j})_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_{j+1}>}$, $\forall\ 0 \leq j < p-1$

$\sigma'^{j+1}_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_{j+1}>}$ es una parte $(p'-j)$ - regular de $(\check{\delta}\sigma'^{j})_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_{j+1}>}$, $\forall\ 0 \leq j < p'-1$

$\sigma^{p} = \check{\delta}\ \sigma^{p-1}$, $\sigma'^{p'} = \check{\delta}\ \sigma'^{p'-1}$

$\overline{\sigma^{p}}$ en $\check{H}^{p}(\mathcal{U},\Omega^{q})$ representa $\overline{\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p}[(\omega_{\alpha})]}$ en $H^{p}(X,\Omega^{q})$

$\overline{\sigma'^{p}}$ en $\check{H}^{p'}(\mathcal{U},\Omega^{q'})$ representa $\overline{\mathrm{Res}_{Y'_1,\ldots,Y'_{p'}}[(\omega'_{\alpha})]}$ en $H^{p'}(X,\Omega^{q'})$

Por la definición del "cup-product" a nivel de cocadenas de Čech de formas, basta exhibir una colección de cocadenas de formas meromorfas $(\gamma^{\ell})_{0\leq\ell\leq p+p'}$ con la siguiente propiedad:

Si llamamos $Z_i = Y_i$, $\forall\ 1 \leq i \leq p$, $Z_i = Y'_{i-p}$, $\forall\ p < i \leq p'+p$, debe ser :

i) $\gamma^{\ell} \in \check{C}^{\ell}(\mathcal{U},\Omega^{q+q'}(*\bigcup_{i=1}^{p+p'-\ell} Z_i))$, $\forall\ 0 \leq\ell\leq p+p'$

ii) $\gamma^{o} = (\omega_{\alpha} \wedge \omega'_{\alpha})_{\alpha\varepsilon A}$

iii) $\gamma^{j+1}_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_{j+1}>}$ una parte (p+p'-j)-regular de

$(\check{\delta}\gamma^j)_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_{j+1}>} \quad \forall\ 0 \leq j < p+p'-1$

iv) $\gamma^{p+p'} = \check{\delta}\ \gamma^{p+p'-1}$

y además debe verificar

v) $\gamma^{p+p'}{}_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_p,\alpha_{p+1},\ldots,\alpha_{p+p'}>} = \sigma^p{}_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_p>} \wedge \sigma'^{p'}_{<\alpha_p,\ldots,\alpha_{p+p'}>}.$

Definamos entonces

$$\gamma^j_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_j>} = \omega_{\alpha_o} \wedge \sigma'^j_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_j>} \quad \forall\ 0 \leq j \leq p'$$

$$\gamma^{p'+k}{}_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_{p'+k}>} = \sigma^k{}_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_k>} \wedge \sigma'^{p'}{}_{<\alpha_k,\ldots,\alpha_{p'+k}>},$$

$\forall\ 0 \leq k \leq p$

Claramente i), ii) y v) se verifican

Probemos en primer término que si $c \in \check{C}^{r+s}(\mathcal{U}, \Omega^{\cdot}(*))$ es de la forma

$$c_J = c^r{}_{<j_o,\ldots,j_r>} \wedge c^s{}_{<j_r,\ldots j_{r+s}>} \quad \text{para}$$
$$|J| = r + s + 1$$

donde c^r y c^s son r y s cocadenas de formas meromorfas respectivamente, entonces

$$(\check{\delta} c)_K = (\check{\delta} c^r)_{<k_o,\dots,k_{r+1}>} \wedge c^s_{<k_{r+1},\dots,k_{r+s+1}>} +$$

$$+ (-1)^r c^r_{<k_o,\dots,k_r>} \wedge (\check{\delta} c^s)_{<k_r,\dots,k_{r+s+1}>} ,$$

para $|K| = r+s+2$.

En efecto:

$$(\check{\delta} c)_K = \sum_{\ell=o}^{r+s+1} (-1)^\ell c_{<k_o,\dots,\hat{k}_\ell,\dots,k_{r+s+1}>} =$$

$$= \sum_{\ell=o}^{r} (-1)^\ell c^r_{<k_o,\dots,\hat{k}_\ell,\dots,k_{r+1}>} \wedge c^s_{<k_{r+1},\dots,k_{r+s+1}>} +$$

$$+ \sum_{\ell=r+1}^{r+s+1} (-1)^\ell c^r_{<k_o,\dots,k_r>} \wedge c^s_{<k_r,\dots,\hat{k}_\ell,\dots,k_{r+s+1}>} =$$

$$= \left(\sum_{\ell=o}^{r} (-1)^\ell c^r_{<k_o,\dots,\hat{k}_\ell,\dots,k_{r+1}>} \right) \wedge c^s_{<k_{r+1},\dots,k_{r+s+1}>} +$$

$$+ c^r_{<k_o,\dots,k_r>} \wedge \left(\sum_{\ell=r+1}^{r+s+1} (-1)^\ell c^s_{<k_r,\dots,\hat{k}_\ell,\dots,k_{r+s+1}>} \right) =$$

$$= \left[(\check{\delta} c^r)_{<k_o,\dots,k_{r+1}>} + (-1)^r c^r_{<k_o,\dots,k_r>} \right]$$

$$\wedge c^s_{<k_{r+1},\dots,k_{r+s+1}>} +$$

$$+ c^r_{<k_o,\dots,k_r>} \wedge \left[(-1)^r (\check{\delta} c^s)_{<k_r,\dots,k_{r+s+1}>} - \right.$$

$$\left. - (-1)^r c^s_{<k_{r+1},\dots,k_{r+s+1}>} \right] =$$

$$= (\check{\delta} c^r)_{<k_o,\dots,k_{r+1}>} \wedge c^s{}_{<k_{r+1},\dots,k_{r+s+1}>} +$$

$$+ (-1)^r c^r_{<k_o,\dots,k_r>} \wedge (\check{\delta} c^s)_{<k_r,\dots,k_{r+s+1}>} .$$

Probemos ahora iii)

a) Si $j < p'$

$$(\check{\delta}\gamma^j)_{<\alpha_o,\dots,\alpha_{j+1}>} = (\check{\delta}\sigma^o)_{<\alpha_o,\alpha_1>} \wedge \sigma'^j{}_{<\alpha_1,\dots,\alpha_{j+1}>} +$$

$$+ \omega_{\alpha_o} \wedge (\check{\delta}\sigma'^j)_{<\alpha_o,\dots,\alpha_{j+1}>} .$$

Como $(\check{\delta}\sigma^o)_{<\alpha_o,\alpha_1>} \in \check{C}^1(\mathcal{U},\Omega^r(* \bigcup_{i=1}^{p} Z_i))$ se parte y

$\sigma'^{j+1}{}_{<\alpha_o,\dots,\alpha_{j+1}>}$ es una parte $(p'-j)$-regular

de $(\check{\delta}\sigma'^j)_{<\alpha_o,\dots,\alpha_{j+1}>}$ resulta ser

$\omega_{\alpha_o} \wedge \sigma'^{j+1}{}_{<\alpha_o,\dots,\alpha_{j+1}>}$ una parte $(p+p'-j)$-regular

de $(\check{\delta}\gamma^j)_{<\alpha_o,\dots,\alpha_{j+1}>}$ y esto es precisamente

$\gamma^{j+1}{}_{<\alpha_o,\dots,\alpha_{j+1}>}$.

b) si $0 \leq k < p-1$

$$(\check{\delta}\gamma^{p'+k})_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_{p'+k+1}>} =$$

$$= (\check{\delta}\sigma^k)_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_{k+1}>} \wedge \sigma'^{p'}_{<\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_{k+p'+1}>} +$$

$$+ (-1)^k \sigma^k_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_k>} \wedge (\check{\delta}\sigma'^{p'})_{<\alpha_k,\ldots,\alpha_{k+p'+1}>} =$$

$$= (\check{\delta}\sigma^k)_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_{k+1}>} \wedge \sigma'^{p'}_{<\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_{k+p'+1}>} \quad , \text{ ya que}$$

$$(\check{\delta}\sigma'^{p'}) = \check{\delta}\,\check{\delta}\,\sigma'^{p'-1} = 0$$

Como σ^{k+1} es una parte $(p-k)$-regular de $\check{\delta}\,\sigma^k$ y $\sigma'^{p'}$ es una cocadena regular, $\sigma^{k+1}_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_{k+1}>} \wedge \sigma'^{p'}_{<\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_{k+p'+1}>} =$

$$= \gamma^{p'+k+1}$$

es una parte $(p+p'-k)$-regular de $(\check{\delta}\gamma^{p'+k})_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_{k+p'+1}>}$

En cuanto a iv)

$$(\check{\delta}\,\gamma^{p+p'-1})_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_{p+p'}>} =$$

$$= (\check{\delta}\sigma^{p-1})_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_p>} \wedge \sigma'^{p'}_{<\alpha_p,\ldots,\alpha_{p+p'}>} =$$

$$= \sigma^p_{<\alpha_o,\ldots,\alpha_p>} \wedge \sigma'^{p'}_{<\alpha_p,\ldots,\alpha_{p+p'}>}$$

y esto concluye la demostración de la proposición 4.2.

4.3 <u>Definición del "cup-product" en cohomología moderada</u>

Sea X una variedad holomorfa de dimensión n. Y (respect. Y') una variedad analítica de codimensión p (resp. p') expresable como la intersección de p hipersuperficies globales.

Supongamos además que $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} (Y \cap Y') = \operatorname{codim}_{\mathbb{C}} Y + \operatorname{codim}_{\mathbb{C}} Y'$.

Dadas $T \in H^p_{[Y]}(X,\Omega^q)$ y $T' \in H^{p'}_{[Y']}(X,\Omega^{p'})$ e $\mathcal{Y} = \{Y_1,\dots,Y_p\}$, $\mathcal{Y}' = \{Y'_1,\dots,Y'_{p'}\}$ familias de hipersuperficies globales cuyas intersecciones son Y e Y' respectivamente, por el teorema 2.2.1 existen datos de Weil $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ asociados a $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y}'$ respectivamente (para algún cubrimiento de X por abiertos) tales que

$$T = \overline{\operatorname{Res}_{Y_1,\dots,Y_p} [(\omega_\alpha)]}$$

$$T' = \overline{\operatorname{Res}_{Y'_1,\dots,Y'_{p'}} [(\omega'_\alpha)]}$$

La aplicación

$$H^p_{[Y]}(X,\Omega^q) \otimes H^{p'}_{[Y']}(X,\Omega^{q'}) \longrightarrow H^{p+p'}_{[Y\cap Y']}(X,\Omega^{q+q'})$$

$$T \otimes T' \longmapsto \overline{\operatorname{Res}_{Y_1,\dots,Y_p,Y'_1,\dots,Y'_{p'}} [(\omega_\alpha \wedge \omega'_\alpha)]}$$

hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
H^p_{[Y]}(X,\Omega^q) \otimes H^{p'}_{[Y']}(X,\Omega^{q'}) & \longrightarrow & H^{p+p'}_{[Y \cap Y']}(X,\Omega^{q+q'}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^p(X,\Omega^q) \otimes H^{p'}(X,\Omega^{q'}) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+p'}(X,\Omega^{q+q'})
\end{array}$$

como se deduce de la proposición 4.2.

El siguiente lema demuestra la bondad de la definición en el sentido que el objeto final no depende de las particulares familias $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y}'$ consideradas.

Lema 4.3

Sean $\mathcal{Y} = \{Y_1,\ldots,Y_p\}$; $\mathcal{F} = \{Z_1,\ldots,Z_p\}$; $\mathcal{Y}' = \{Y'_1,\ldots,Y'_p\}$; $\mathcal{F}' = \{Z'_1,\ldots,Z'_p\}$ familias de hipersuperficies en X tales que $Y = \bigcap_{i=1}^{p} Y_i = \bigcap_{i=1}^{p} Z_i$, $Y' = \bigcap_{i=1}^{p'} Y'_i = \bigcap_{i=1}^{p'} Z'_i$. Sea $U \subseteq X$ abierto

$$\tilde{\omega} \in \Gamma(U,\Omega^q(*\bigcup_{i=1}^{p} Y_i))$$

$$\tilde{\gamma} \in \Gamma(U,\Omega^q(*\bigcup_{i=1}^{p} Z_i))$$

$$\tilde{\omega}' \in \Gamma(U,\Omega^{q'}(*\bigcup_{i=1}^{p'} Y'_i))$$

$$\tilde{\gamma}' \in \Gamma(U,\Omega^{q'}(*\bigcup_{i=1}^{p'} Z'_i))$$

si en U

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p}[\tilde{\omega}] = \mathrm{Res}_{Z_1,\ldots,Z_p}[\tilde{\gamma}] \quad y \quad \mathrm{Res}_{Y'_1,\ldots,Y'_{p'}}[\tilde{\omega}'] =$$

$$= \mathrm{Res}_{Z'_1,\ldots,Z'_{p'}}[\tilde{\gamma}']$$

entonces

$$\mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p,Y'_1,\ldots,Y'_{p'}}[\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}'] =$$

$$= \mathrm{Res}_{Z_1,\ldots,Z_p,Z'_1,\ldots Z'_{p'}}[\tilde{\gamma} \wedge \tilde{\gamma}'] \quad \text{en } U$$

Demostración

Basta ver la igualdad en un entorno de cada punto $x \in X$. Sea U_x un entorno de x tal que

i) todas las hipersuperficies tengan una ecuación en U_x

$$Y_i = (f_i=0) \;,\; Z_i = (g_i = 0) \;,\; \forall\, 1 \leq i \leq p$$

$$Y'_i = (f'_i=0) \;,\; Z'_i = (g'_i = 0) \;,\; \forall\, 1 \leq i \leq p'$$

ii) existan

$A \in \mathcal{O}^{p\times p}(U_x)$, $B \in \mathcal{O}^{p'\times p'}(U_x)$ tales que

$g = A\cdot f$

$g' = B\cdot f'$

iii) $\tilde{\omega} = \dfrac{\omega}{f_1\ldots f_p}$, $\tilde{\gamma} = \dfrac{\gamma}{g_1\ldots g_p}$, $\tilde{\omega}' = \dfrac{\omega'}{f'_1\ldots,f'_{p'}}$, $\tilde{\gamma} = \dfrac{\gamma'}{g'_1\ldots g'_{p'}}$, donde los numeradores son formas holomorfas en U_x.

Luego

$\mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p}[\tilde{\omega}] = \mathrm{Res}_{Z_1,\dots,Z_p}[\tilde{\gamma}] \Rightarrow$ (por la ley de transformación en U_x, cf [D])

$$\mathrm{Res}_{Z_1,\dots,Z_p}\left[\frac{\omega\cdot\det A}{g_1\cdots g_p}\right] = \mathrm{Res}_{Z_1,\dots,Z_p}\left[\frac{\gamma}{g_1\cdots g_p}\right] \Rightarrow$$ (por la Ley de Dualidad)

$\omega.\ \det A - \gamma \in I < g_1,\dots,g_p >$

De la misma manera, $\omega'\cdot \det B - \gamma' \in I < g_1',\dots,g_p' >$; y de aquí resulta $\omega\wedge\omega'.\ \det A\cdot\det B - \gamma\wedge\gamma' \in I < g_1,\dots,g_p,g_1',\dots,g_{p'}' >$.

Como

$$\begin{vmatrix} g \\ g' \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right| \begin{vmatrix} f \\ f' \end{vmatrix},$$

usando nuevamente la ley de transformación,

$\mathrm{Res}_{Y_1,\dots,Y_p,Y_1',\dots,Y_{p'}'}[\tilde{\omega}\wedge\tilde{\omega}'] =$

$\mathrm{Res}_{Z_1,\dots,Z_p,Z_1',\dots,Z'_{p'}}\left[\dfrac{\omega\wedge\omega'\det A.\det B}{g_1\cdots g_p.g_1'\cdots g'_{p'}}\right] =$

$= \mathrm{Res}_{Z_1,\dots,Z_p,Z_1',\dots,Z_{p'}'}[\tilde{\gamma}\wedge\tilde{\gamma}']$

como queríamos//.

BIBLIOGRAFIA

[C - H] COLEFF,N. - HERRERA,M.
Les Courants Résiduel Associés a une Forme Meromorphe.
Springer-Verlag,Lectures Notes 633,1978.

[C - H - L] COLEFF,N. - HERRERA,M. - LIEBERMAN,D.
Algebraic Cycles as Residues of Meromorphic Forms.
Springer-Verlag,Mathematische Annalen 73-87,1980

[D] DICKENSTEIN,A.
Cohomología Moderada con Soporte en Intersecciones no Completas.Tesis Doctoral.

[G] GODEMENT,R.
Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux.
Hermann,1958.

[G - H] GRIFFITHS,P. - HARRIS,J.
Principles of Algebraic Geometry.
Jhon Wiley and Sons,1978.

[H - L] HERRERA,M. - LIEBERMAN,D.
Residues and Principal Values on Complex Spaces.
Springer-Verlag,Mathematische Annalen 194,259-294,1971.

[R] RAMIS,J.P.
Variations Sur le Thème "GAGA".
Seminaire Pierre Lelong-Henri Skoda (Analyse)
Spriger-Verlag,Lectures Notes 694,1976-77.

[S] SCHWARTZ,L.
Théorie des Distributions.
Hermann,Paris 1966.

[S - T] SIU,Y.Y. - TRAUTMAN,G.
Gap-Sheaves and Extensionof Coherent Analitic Subsheaves.
Springer-Verlag,Lectures Notes 172,1972.

[W] WEIL,A.
Sur la Théorie de Formes Differentielles attacheés a une Variété Analytique Complexe.
Societate Mathematica Helvetica,Commentarii M.H.20,110-116,1947.

C. J. SESSA

M. HERRERA