Cohomología moderada con soporte en intersecciones no completas

Dickenstein, Alicia

1982

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

COHOMOLOGIA MODERADA
CON SOPORTE EN INTERSECCIONES NO COMPLETAS

TRABAJO PRESENTADO PARA OPTAR AL TITULO

de Doctor en Ciencias Matemáticas

ALICIA DICKENSTEIN

Director: Dr. Miguel Herrera

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

Junio 1982

A RAUL Y MARIANA

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Miguel Herrera, por el tiempo y asesoramiento que me ha brindado, así como por su permanente apoyo, y a mi compañera Carmen I.Sessa, por su constante y cálida colaboración.

Quiero también agradecer al Dr. Nicolás Coleff, por las valiosas y desinteresadas charlas que orientaron el comienzo de este trabajo y al Dr.Adrián Paenza, por su cotidiano aporte de entusiasmo.

Asimismo, quiero expresar mi reconocimiento al CONICET, por las becas que me fueron otorgadas estos años, y a las autoridades del Departamento de Matemática de la F.C.E. y N.,que me han proporcionado un estimulante lugar de trabajo.

INTRODUCCION

El objeto principal de este trabajo es el cálculo efectivo de la cohomología moderada, introducida por J. P. Ramis en [R], y cuya definición exacta será dada más adelante.

Para ello utilizamos dos métodos, uno basado en la construcción de un complejo de Čech con formas meromorfas, y el otro en un complejo de corrientes con soporte analítico, y con diferencial $\bar{\partial}$

Nuestro resultado fundamental es la construcción de un isomorfismo explícito entre las cohomologías de ambos complejos, fácilmente calculable, mediante los operadores residuales de Coleff - Herrera [C - H] .

Existe analogía formal entre nuestros métodos y la construcción de la cohomología local expuesta por estos autores en [C - H - L] . El problema que nos ocupa es, sin embargo, más complejo, ya que trabajamos con coeficientes en el haz Ω^r de formas holomorfas - y no con coeficientes en $\mathbb{C}$, como en [C-H-L]- y con una variedad residual Y que no es necesariamente una intersección completa.

En particular, la necesidad de adaptar los operadores residuales a una intersección no completa nos ha conducido a probar fórmulas que generalizan por una parte la propiedad de antisimetría de dichos operadores, y que, por la otra, bajo hipótesis naturales, permiten obtener inversas a derecha canónicas para el epimorfismo π en la sucesión exacta de haces de corrientes.

$$0 \longrightarrow {}'\mathcal{D}_{A \cap B} \longrightarrow {}'\mathcal{D}_A \oplus {}'\mathcal{D}_B \longrightarrow {}'\mathcal{D}_{A \cup B} \xrightarrow{\pi} 0$$

asociada a conjuntos regularmente separados A y B (cf.[L],[M]).

Quizás el ejemplo siguiente sea la mejor presentación de la cohomología moderada: supongamos que $X = \mathbb{C}$, $Y = \{0\}$, y consideremos las funciones C^∞ en $X - Y$ que son $\bar{\partial}$ - cerradas, o sea, el conjunto $\Gamma(X - Y, \mathcal{O})$ de funciones holomorfas sobre $X - Y$. Es conocido que

$$\Gamma(X - Y, \mathcal{O}) \, / \, \Gamma(X, \mathcal{O}) \simeq H^1_Y(X, \mathcal{O}) \qquad (1)$$

donde el grupo a la derecha representa la cohomología local de X con coeficientes en $\mathcal{O}$ y soporte Y. El espacio $\Gamma(X, \mathcal{O}(* Y))$ de las funciones meromorfas de X con polos en Y define el sub-grupo $\Gamma(X, \mathcal{O}(* Y)) / \Gamma(X, \mathcal{O})$ de $H^1_Y(X, \mathcal{O})$, que se identifica con la cohomología moderada $H^1_{[Y]}(X, \mathcal{O})$ con coeficientes en $\mathcal{O}$ y soporte en Y.

Paralelamente, consideremos el complejo de corrientes $'\mathcal{D}^{0,\cdot}_Y(X)$ sobre X con soporte en Y, de bigrado $(0,q)$, $q = 0,1$, con $\bar{\partial}$ como diferencial. El grupo

$$'\mathcal{D}^{0,0}_Y(X) \,/\, \bar{\partial}\, '\mathcal{D}^{0,1}_Y(X) \tag{2}$$

no representa $H^1_Y(X, \mathcal{O})$, pese a que el haz $'\mathcal{D}^{0,\cdot}$ de corrientes sobre X es una resolución de $\mathcal{O}$ de fibra inyectiva. Esto se debe a que $'\mathcal{D}^{0,\cdot}$ no es una resolución inyectiva de $\mathcal{O}$, y los teoremas generales de haces no se aplican a priori. Además, las corrientes en (2) son de orden finito y permiten representar solamente los elementos de orden finito de (1)

Lo que sucede, en realidad, es que el grupo (2) se identifica con la cohomología moderada $H^1_{[Y]}(X, \mathcal{O})$, obteniéndose un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X, \mathcal{O}(*Y))/\Gamma(X, \mathcal{O}) \arrow[dd, "R"'] \arrow[dr] & \\
& H^1_{[Y]}(X, \mathcal{O}) \\
{'\mathcal{D}_Y^{0,1}(X) / \bar{\partial}\, '\mathcal{D}_Y^{0,0}(X)} \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \quad , \qquad (3)$$

en el que R está inducido por la aplicación $f \longmapsto$ Residuo (f) y donde Residuo (f) es la corriente

$$g \longmapsto \lim_{\delta \to 0} \int_{|z|=\delta} f.g.dz \quad , \quad g \in \mathcal{D}^{\overset{\bullet}{0}}(X)$$

Precisamente, en el presente trabajo generalizamos el diagrama

(3) , en nivel de haces de cohomología, a la situación siguiente X es una variedad holomorfa, Y es un conjunto analítico de codimensión p dado por la intersección de m hipersuperficies Y_1 , , Y_m tales que la intersección de p cuales - quiera de ellas es completa, $\Gamma(X, \mathcal{O}(*Y)) / \Gamma(X, \mathcal{O})$ es reemplazado por los cociclos de Čech de formas con polos en las hipersuperficies Y_i , módulo aquellas formas que se parten como suma de formas meromorfas con polos en una hipersuperficie menos.

Los haces de cohomología moderada se definen como el funtor derivado

$$\mathcal{H}^{\cdot}_{[Y]}\ \Omega^r = \underline{R}\ \varinjlim_{k}\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}\left(\mathcal{O}_{X}/_{J^k}\ ,\ \Omega^r\right)$$

para J un haz de ideales que define Y (cf. [R])

Utilizaremos aquí la representación $\mathcal{H}^{\cdot}_{\bar\partial}({}'\mathcal{D}_Y^{r,\cdot})$ dada por los haces de cohomología del complejo de corrientes de bigrado (r,.) con soporte en Y

$$0 \longrightarrow {}'\mathcal{D}_Y^{r,0} \xrightarrow{\bar\partial} {}'\mathcal{D}_Y^{r,1} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} {}'\mathcal{D}_Y^{r,n} \longrightarrow 0$$

El operador R se construye básicamente a partir del operador residuo múltiple [C - H] asociado a cualquier elección de p hipersuperficies de la familia $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$.

Las fórmulas residuales que debemos utilizar son

a) Antisimetría generalizada

$$\boxed{\sum_{s\in J} \operatorname{Res}_{Y_{i_1},\ldots,Y_{i_{p-1}},\bigcup_{\substack{j\in J\\ j\neq s}} Y_j, Y_s} P_{Y_0} = 0 \quad (*)}$$

b) Descomposición de corrientes soportadas en uniones, como suma de corrientes soportadas en componentes de esa unión

$$\boxed{\operatorname{Res}_{Y_{i_1},\ldots,Y_{i_{p-1}},\bigcup_{j\in J} Y_j} = \frac{1}{|J|-1} \sum_{S\in J} \operatorname{Res}_{Y_{i_1},\ldots,Y_{i_{p-1}},\bigcup_{\substack{j\neq S\\ j\in J}} Y_j, Y_S} P \quad (**)}$$

En el capítulo cero expondremos brevemente la definición de las corrientes residuales junto con las propiedades y algunos adicionales que serán utilizados en el trabajo.

En el capítulo I se demostrará una fórmula residual general de la cual se deducirán las relaciones (*) y (**)

En el capítulo II, con la ayuda de las fórmulas anteriores y recurriendo a la técnica de sucesiones espectrales, se realizará el estudio de los haces de cohomología moderada.

Finalmente, en el capítulo III se dará una demostración analítica directa de la inyectividad de la aplicación

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^{p}_{[\bigcap_{i=1}^{m} Y_i]}\,\Omega^r \longrightarrow \mathcal{H}^{p}_{[\bigcap_{i=1}^{p} Y_i]}\,\Omega^r$$

para $\{Y_1, \quad , Y_m\}$ hipersuperficies tales que
codim $(\bigcap_{i=1}^{m} Y_i) = \operatorname{codim} (\bigcap_{i=1}^{p} Y_i) = p$

Este resultado es conocido para comohología con soporte (sin moderar) y puede obtenerse en el caso moderado aplicando un teorema general de Mebkhout [ME] que requiere el uso de operadores diferenciales de orden infinito.

CAPITULO 0

0.1

Sea X una variedad holomorfa de dimensión n , $\mathcal{Y} = \{Y_1 , Y_2 , \ldots , Y_{p+1}\}$ $(0 \leq p < n)$ una familia de hipersuperficies en X y $\tilde{\lambda} \in \Gamma(X, \mathcal{E}^r (* \cup \mathcal{Y}))$ una r - forma semi-meromorfa en X con polos sobre la unión $\cup \mathcal{Y} = \bigcup_{i=1}^{p+1} Y_i$.

Las corrientes p + 1 - residuo múltiple $R_{\mathcal{Y}} [\tilde{\lambda}]$ y p - residuo múltiple valor principal $RP_{\mathcal{Y}} [\tilde{\lambda}]$ (cuya existencia está demostrada en [C - H]) tienen la siguiente definición local

$$R_{\mathcal{Y}} \; [\tilde{\lambda}] \; (\alpha) = \lim_{\delta \to 0} \int_{T^{P+1}_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi)} \tilde{\lambda} \wedge \alpha \quad , \quad \alpha \in \mathcal{D}^{2n-p-r-1} \quad (W)$$

$$R\, P_{\mathcal{Y}} [\tilde{\lambda}] \; (\beta) = \lim_{\delta \to 0} \int_{D^{P+1}_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi)} \tilde{\lambda} \wedge \beta \qquad \beta \in \mathcal{D}^{2n-p-r} \quad (W)$$

donde

i) $\phi = (\phi_1 , \ldots , \phi_{p+1})$, y las ϕ_j son funciones holomorfas sobre un abierto $W \subseteq X$ tales que

$$(\phi_j = 0) \qquad W \cap Y_j \qquad 1 \leq j \leq \dot{p}+1$$

ii) $\underset{\sim}{\delta}(\delta) = (\delta_1(\delta), \ldots, \delta_{p+1}(\delta)) \in \mathbb{R}^{p+1}_{>} \;\forall\, \delta \in (0,1)$ es una aplicación analítica admisible (i.e.

$$\delta_{p+1}(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0 \quad y \quad \forall j \quad 1 \leq j \leq p \quad y \quad \forall\, q \in \mathbb{N}$$

$$\frac{\delta_j(\delta)}{\delta^q_{j+1}(\delta)} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0 \;)$$

iii) $T^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi)$ es el $p+1$ - tubo $\{|\phi_j| = \delta_j, \; 1 \leq j \leq p+1\}$ orientado de manera conveniente ([C - H])

iv) $D^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi) \qquad T^{P}_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi) \cap \{|\phi_{p+1}| > \delta_{p+1}\}$

donde $T^{P}_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\delta)$ es el p - tubo asociado a

$(\phi_1, \ldots, \phi_p)$.

0.2

$\forall\ \tilde{\lambda} \in \Gamma(X, \Omega^r (* \cup Y))$ forma meromorfa en X con polos en $\cup Y$

i) $R_Y[\tilde{\lambda}]$ tiene bigrado $(r, p+1)$
i.e.
$R_Y[\tilde{\lambda}](\alpha) = 0$ para toda forma C^∞ α de bigrado (t,s) con $(t,s) \neq (n-r, n-(p+1))$

ii) $RP_Y[\tilde{\lambda}]$ tiene bigrado (r,p)
i.e.
$RP_Y[\tilde{\lambda}]\ (\beta) = 0$ para toda forma C^∞ β de bigrado (t,s) con $(t,s) \neq (n-r, n-p)$

0.3

Existen conjuntos analíticos complejos $V_e(Y) \subseteq \bigcap_{i=1}^{p+1} Y_i$ y $\tilde{V}_e(Y) \subseteq \bigcap_{i=1}^{p} Y_i$ de codimensión pura $p+1$ y p respectivamente, tales que

i) El soporte de $R_{\mathcal{Y}}\,[\tilde{\lambda}]$ está contenido en $V_e(\mathcal{Y})$

ii) El soporte de $RP_{\mathcal{Y}}\,[\tilde{\lambda}]$ está contenido en $\tilde{V}_e(\mathcal{Y})$

iii) En el caso de que la familia $\mathcal{Y}$ tenga intersección completa, esto es $\dim \bigcap_{i=1}^{p+1} Y = n - (p+1)$,

$$V_e(\mathcal{Y}) = \bigcap_{i=1}^{p+1} Y_i \qquad \tilde{V}_e(\mathcal{Y}) = \bigcap_{i=1}^{p} Y_i$$

y para toda $\tilde{\lambda} \in \Gamma\,(X, \Omega^r(* \cup \mathcal{Y}))$ se verifica que el soporte de $R_{\mathcal{Y}}\,[\tilde{\lambda}]$ es igual a la unión de algunas componentes irreducibles de $\bigcap_{i=1}^{p+1} Y_i$.

0.4

Los operadores

$$RP_{\mathcal{Y}} : \Omega^r(* \cup \mathcal{Y}) \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,p}_{\tilde{V}_e(\mathcal{Y})}$$

$$R_{\mathcal{Y}} : \Omega^r(* \cup \mathcal{Y}) \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,p+1}_{V_e(\mathcal{Y})}$$

son homomorfismos de haces (sobre $\mathbb{C}$) con la siguiente propiedad:

$$b.\ RP_y[\tilde{\lambda}] + (-1)^{p+1} RP_y[d\tilde{\lambda}] = R_y[\tilde{\lambda}]$$

para toda $\tilde{\lambda} \in \Gamma(W, \Omega^r(* \cup Y))$, W abierto en X.

0.5 Lema

$\forall\ \tilde{\lambda} \in \Omega^r(* \cup Y)$

$$\bar{\partial}(RP_y[\tilde{\lambda}]) \qquad R_y[\tilde{\lambda}]$$

Dem: Por 0.2, basta verificar la igualdad para formas de prueba de bigrado $(n - r,\ n - p - 1)$. Entonces, por 0.4

$$R_y[\tilde{\lambda}](\alpha) = b.\ RP_y[\tilde{\lambda}](\alpha) + (-1)^{p+1} RP_y[d\tilde{\lambda}](\alpha)$$

$$(-1)^{r+p} RP_y[\tilde{\lambda}](d\alpha) + (-1)^{p+1} RP_y(d\tilde{\lambda} \wedge \alpha)$$

Pero $d\tilde{\lambda} \wedge \alpha = \partial \tilde{\lambda} \wedge \alpha = 0$ y $\tilde{\lambda} \wedge \partial \alpha = 0$
luego

$$R_y [\tilde{\lambda}] (\alpha) \qquad (-1)^{r+p} RP_y (\tilde{\lambda} \wedge \bar{\partial} \alpha) =$$

$$= (-1)^{r+p} RP_y [\tilde{\lambda}] (\bar{\partial} \alpha) = \bar{\partial}(RP_y [\tilde{\lambda}]) (\alpha)$$

como queríamos demostrar.

En particular, se deduce que

$$\bar{\partial} \; R_y [\tilde{\lambda}] = 0$$

<u>0.6</u>

En el caso de que la familia y tenga intersección completa, se verifican además las siguientes propiedades

P.1 La corriente $R_y[\tilde{\lambda}]$ depende de manera alternada del orden de la familia y , i.e.

$$R_y [\tilde{\lambda}] = (-1)^{sg(\tau)} R_{\tau y} [\tilde{\lambda}] \quad \text{para toda permutación } \tau y \text{ de } y.$$

La corriente $RP_{\mathcal{Y}}[\tilde{\lambda}]$ depende de manera alternada del orden de la sucesión $Y_1, \ldots, Y_p$.

P.2 Si $\tilde{\lambda} \varepsilon \Omega^r (* \underset{i\neq j}{\cup} Y_i)$ para algún j, $1 \leq j \leq p + 1$ (o sea, si $\tilde{\lambda}$ es regular respecto de Y_j), entonces

$$R_{\mathcal{Y}}[\tilde{\lambda}] \quad 0$$

P.3 Si $\tilde{\lambda} \varepsilon \Omega^r (* \underset{i\neq j}{\cup} Y_i)$ para algún j, $1 \leq j \leq p$

$$RP_{\mathcal{Y}}[\tilde{\lambda}] = 0$$

Si $j = p + 1$

$$RP_{\mathcal{Y}}[\tilde{\lambda}] = R_{\mathcal{Y}(p+1)}[\tilde{\lambda}]$$

donde $\mathcal{Y}(p + 1)$ es la familia $\{Y_1, \ldots, Y_p\}$.

P.4 Sea $\mathcal{Y}' = \{Y_1', \ldots, Y'_{p+1}\}$ otra familia de hipersuperficies en X tal que $\dim_{\mathbb{C}} \bigcap_{i=1}^{p+1} Y_i' = n - (p + 1)$ e $Y_j' \supseteq Y_j \forall j : 1 \leq j \leq p+1$

Entonces, para toda $\tilde{\lambda} \in \Omega^r$ ($* \cup \mathcal{V}$) valen las igualdades

$$R_y [\tilde{\lambda}] = R_{y'} [\tilde{\lambda}]$$

$$RP_y [\tilde{\lambda}] = RP_{y'} [\tilde{\lambda}]$$

0.7 <u>Notación</u>: $|\ |$ denotará cardinal.

N_o denotará el conjunto de números naturales con el cero e I_n el conjunto de los n primeros números naturales.

Si $Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$, $= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_o^n$,

entonces

$$Z^\alpha = \prod_{k=1}^{n} Z_k^{\alpha_k}$$

B denotará la bola unitaria en $\mathbb{C}^n$

$$B = \{Z \in \mathbb{C}^n : \max_{1 \leq i \leq n} |Z_i| < 1\}$$

Para cada $I \subseteq I_n$ notaremos

$$Z(I) \quad (Z_j \quad j \notin I)$$

$$Z(I)^{\alpha} = \prod_{j \notin I} Z_j^{\alpha_j}$$

$$\|Z(I)\| = \text{máx}\{ |Z_j| : j \notin I \}$$

$$B(I) = \{Z(I) \quad \|Z(I)\| < 1\}$$

Asimismo, para cada $\delta > 0$

$$B(I)^{\alpha}_{\delta} = \{ Z(I) \in B(I) \quad \|Z(I)^{\alpha}\| > \delta \}$$

Si $\beta \in N_o^{p\times n}$ es una matriz de p filas por n columnas, denotaremos por $\beta_i \in N_o^n$ a la i-ésima fila.

Si $I = \{i_1, \ldots, i_p\} \subseteq I_n$ y $\beta \in N_o^{p\times n}$,

β_I es la matriz construida con las p filas y las columnas $i_1, \ldots, i_p$ de β.

Si $\beta \in N_o^{(p+1)xn}$, $\beta_I(p+1)$ designa la matriz que tiene las primeras p filas y las columnas $i_1, \ldots, i_p$ de β y $\beta(p+1)$ es la matriz construída con las primeras p filas de β.

Asimismo, notaremos

$$d\,Z_I = d\,Z_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\,Z_{i_p}$$

$$d\,\overline{Z}_I = d\,\overline{Z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\,\overline{Z}_{i_p}$$

$$d\omega_I = dZ_{i_1} \wedge d\overline{Z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge dZ_{i_p} \wedge d\overline{Z}_{i_p}$$

si $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$.

Una forma $\omega \in \Gamma(\mathbb{C}^n, \mathcal{E}^{2n-p})$, $0 \leq p \leq n$, admite una representación única de la forma

$$\omega = \sum_{A,B,M} a_{ABM}(Z, \overline{Z})\, d\,Z_A \wedge d\overline{Z}_B \wedge d\omega_M$$

donde A, B, M son subconjuntos ordenados crecientemente de I_n, dos a dos disjuntos y tales que $|A| + |B| + 2\,|M| = 2n-p$.

Diremos que $\alpha \in N_o^{p\times p}$ es normal si $\det(\alpha) \neq 0$ y si α puede transformarse en una matriz triangular superior mediante una permutación de columnas.

Si $\alpha \in N_o^{(p+1)\times p}$, diremos que

i) α es <u>p-normal</u> si $\alpha(p+1)$ es normal

ii) α es <u>p+1- normal</u> si α es p - normal y $\alpha_{p+1} = 0$.

Diremos también que $\beta \in N_o^{p\times n}$ es normal si existe $A \subseteq I_n$ de cardinal p tal que β_A es normal.

Dado el monomio

$$\omega = b(Z)\; dZ_A \wedge d\overline{Z}_B \wedge d\omega_M \in \Gamma\;(\mathbb{C}^n, \mathcal{E}^{2n-p})$$

decimos que ω es normal respecto de $\beta \in N_o^{p\times n}$ ó $\beta \in N_o^{(p+1)\times n}$, si

$B = \emptyset$, $|M| = n-p$ (lo que implica $|A| = p$) y β_A es normal.

Sea $b \in \Gamma(\mathbb{C}^n, \mathcal{E}^o)$ una función C^∞, $\gamma \in N_o^n$ e

$I \subseteq I_n$, $|I| = p$. Notaremos

$$\partial_j b = \frac{\partial b}{\partial Z_j} \qquad \overline{\partial}_j b = \frac{\partial b}{\partial \overline{Z}_j}$$

$$\partial^\gamma (I)\, b = \partial_{i_1}^{\gamma_{i_1}} \dots \partial_{i_p}^{\gamma_{i_p}} b \ , \quad \text{si} \quad I = \{i_1, \dots , i_p\}$$

$$\gamma (I)! = \gamma_{i_1}! \dots \gamma_{i_p}! \ , \quad \text{y finalmente}$$

$$b^\gamma (I) = \frac{1}{\gamma(I)!} \partial^\gamma(I)\, b \Big|_{Z_{i_1} = \dots = Z_{i_p} = 0}$$

0.8 Proposición (cf. [C - H] , pág. 86)

Sean $\alpha \in N_o^{(p+1)xn}$ $(1 \leq p \leq n)$, $\gamma \in N_o^n$ tal que $(Z^\gamma = 0) \subseteq (\prod_{i=1}^{p+1} Z^{\alpha_i} = 0)$ y $\underset{\sim}{\delta} = (\delta_1, \dots , \delta_p)$ una aplicación admisible. Para toda $\omega \in \Gamma(\mathbb{C}^n, \mathcal{E}^{2n-p})$, el límite iterado

$$\lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta\to 0}\ \int_{D_{\underset{\sim}{\delta},\delta_{p+1}}(Z^{\alpha})\cap B} Z^{-\gamma}\omega$$

existe, es independiente de la trayectoria admisible elegida y es contínuo sobre $\Gamma(\mathbb{C}^n, \mathcal{E}^{2n-p})$ con las seminormas usuales.

Además, si la forma $\omega = b\ d\ Z_A \wedge d\omega_M$ es normal, se tiene

$$\lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta\to 0}\ \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta},\delta_{p+1}}} Z^{-\gamma}\omega = \sigma\ (2\pi i)^{p} \lim_{\delta\to 0} \int_{B(A)^{\gamma}_{\delta}} Z(A)^{-\gamma} b^{\gamma-1}(A)\ d\omega_M$$

donde $\sigma = \operatorname{sgn}(\det \alpha_A(p+1))$

Si $\omega = b\ d\ Z_A \wedge d\overline{Z}_B \wedge d_M$ no es normal, entonces

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta},\delta p+1}} Z^{-\gamma}\ \omega = 0 \quad , \quad \delta_{p+1} > 0$$

0.9 Para cada $A \subseteq I_n$ notaremos

$$P_A = \{Z \in B \qquad Z_i = 0 , i \in A\}$$

<u>Lema</u> (cf. [C - H] pág. 107)

Sean $\alpha \in N_o^{(p+1)xn}$ e $\mathcal{Y} = \{Y_1 , \ldots , Y_{p+1}\}$

$$Y_i = \{Z \in B \qquad Z^{\alpha_i} \qquad 0\}$$

Entonces

$$\tilde{V}_e (\mathcal{Y}) \qquad U (P_A \quad |A| = p \quad y \quad \alpha_A \text{ es normal})$$

0.10 <u>Lema</u> : (cf. [C - H] , pág. 129)

Sean $\phi_i \in \mathcal{O} (\bar{B})$

$$\phi_i (Z) \qquad h_i (Z) . Z^{\alpha_i} \qquad 1 \leq i \leq p + 1$$

con h_i holomorfa no nula en B. Sea α la matriz cuya i - ési-ma línea es α_i, $1 \leq i \leq p+1$, y $\psi_i(Z) = Z^{\alpha_i}$, $1 \leq i \leq p+1$. Existe un entorno $\tilde{B} \subseteq B$ del origen tal que si $\gamma \in N_o^n$ verifica

$$(Z^\gamma = 0) \subseteq \left(\prod_{i=1}^{p+1} Z^{\alpha_i} = 0 \right)$$

y si $\omega \in \mathcal{D}^{2n-p}(\tilde{B})$ entonces

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{D_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi)} Z^{-\gamma}\omega = \lim_{\delta \to 0} \int_{D_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\psi)} Z^{-\gamma}\omega$$

para toda aplicación admisible $\underset{\sim}{\delta}\ (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}_>^{p+1}$

0.11

Sea $W \subseteq X$ abierto; $\phi_1, \ldots, \phi_{p+1} \in \mathcal{O}(W)$ y $\pi\ W_1 \longrightarrow W$ una resolución de singularidades de $Y_o = (\phi_1 \ldots \phi_{p+1} = 0)$. Sean $A, M \subseteq I_n$ y $\tilde{B}$ tales que $|A| = p$, $|M| = n-p$ y $\tilde{B}$ es un entorno de un punto de W_1 como en 0.10.

<u>Proposición</u> : (cf. [C - H] , pág. 135)

Si $\pi\ (P_A)$ está contenido en un conjunto analítico de dimensión menor que $n - p$, entonces para toda función $b \in \mathcal{D}^{\circ}(\tilde{B})$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{D_\delta(\phi^*)} Z^{-\gamma}\, b \,.\, dz_A \wedge d\omega_M = 0$$

donde $\phi^* \quad (\phi_1 \circ \pi, \ldots, \phi_{p+1} \circ \pi)$

0.12

Usaremos además la siguiente notación especial:

Dada $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_{p+1}\}$ una familia de hipersuperficies en X , notaremos

$$RP_{\mathcal{Y}} = \operatorname{Res}_{Y_1, \ldots, Y_p} P_{Y_{p+1}}$$

$$R_{\mathcal{Y}} \quad \operatorname{Res}_{Y_1, \ldots, Y_{p+1}}$$

Dado $I \quad \{i_1, \ldots i_r\} \subseteq I_{p+1}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ notaremos también

$$\mathrm{Res}_{Y^I} \qquad \mathrm{Res}_{Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_r}}$$

y más generalmente, si $J \subseteq I_{p+1}$ e Y es una hipersuperficie en X

$$\mathrm{Res}_{Y^I, Y_J} \quad P_Y = \mathrm{Res}_{Y_{i_1}, \ldots Y_{i_r}, \underset{j \in J}{\cup} Y_j} \; P_Y$$

denotará el $r + 1$ - residuo valor principal RP_F asociado a la familia F

$$F = \{Y_{i_1}, \ldots , Y_{i_r} , \bigcup_{j \in J} Y_j , Y\}$$

y $Y_J = \bigcup_{j \in J} Y_j$.

Además, para todo $s \in J$

$$J(s) \qquad \{j \in J \qquad j \neq s\}$$

y para toda $\phi \in \mathcal{O}(W)$, W abierto en X

$$V(\phi) = \{Z \in W : \phi(Z) = 0\} .$$

0.13

Representaremos consistentemente (cf. [R])

$$H^{\cdot}_{[Y]}\ \Omega^r$$

por la $\bar\partial$ - cohomología $H^{\cdot}_{\bar\partial}\ ('\mathcal{D}_Y^{r,\cdot})$ del complejo de corrientes de bigrado $(r,.)$ y soporte en Y

$$0 \longrightarrow\ '\mathcal{D}_Y^{r,o} \xrightarrow{\bar\partial}\ '\mathcal{D}_Y^{r,1} \xrightarrow{\bar\partial} \ldots\ldots$$

Si $Y \subseteq Y'$ la aplicación natural

$$H^{\cdot}_{[Y]}\ \Omega^r \longrightarrow H^{\cdot}_{[Y']}\ \Omega^r$$

se deduce de la inclusión de complejos $('\mathcal{D}_Y^{r,\cdot}, \bar\partial) \xrightarrow{i} ('\mathcal{D}_{Y'}^{r,\cdot}, \bar\partial)$

CAPITULO I

En este capítulo se demostrarán los siguientes resultados:

Teorema 1.1 :

Sea X una n - variedad holomorfa, p y j números naturales tal que $p < n$, e $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_{p+j}\}$ una familia de hipersuperficies en X que verifica la siguiente propiedad P:

P: = Para cualquier elección de $\ell, k \in \{p, \dots p+j\}$, $\ell \neq k$, la familia $\{Y_1, \dots, Y_{p-1}, Y_\ell, Y_k\}$ tiene intersección completa, es decir

$$\dim_{\mathbb{C}} (Y_\ell \cap Y_k \cap \bigcap_{i=1}^{p-1} Y_i) = n - (p+1)$$

Entonces, llamando $I = \{1, \dots, p-1\}$, $J = \{p, \dots, p+j\}$, para cualquier hipersuperficie Y de X se verifica

$$\operatorname{Res}_{Y^I,\, Y_J} \; P_Y \qquad \frac{1}{j} \sum_{s \,\varepsilon\, J} \operatorname{Res}_{Y^I,\, Y_{J(s)}} \; P_{Y \cup Y_s}$$

Corolario 1.2 : Sea X una n - variedad holomorfa; p, j ε N, $p + 1 \leq n$, e $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots , Y_{p+j}\}$ una familia de hipersuperficies en X que verifica P.

Entonces, si $I = \{1, \ldots , p - 1\}$ $\quad J = \{p, \ldots , p+j\}$

$$\operatorname{Res}_{Y^I,\, Y_J} \qquad \frac{1}{j} \sum_{s \,\varepsilon\, J} \operatorname{Res}_{Y^I,\, Y_{J(s)}} \; P_{Y_s}$$

Proposición 1.3 : Con las mismas hipótesis del corolario 1.2

$$\operatorname{Res}_{Y^I,\, Y_J} \qquad \sum_{s \,\varepsilon\, J} \operatorname{Res}_{Y^I,\, Y_s} \; P_{Y_{J(s)}}$$

Observación 1.4 :

Dada una familia finita $\mathcal{Y}$ de hipersupeficies con intersección completa e $Y_o \varepsilon Y$,

$$Y_o \quad \bigcup_k Z_k$$

donde Z_k son sus componentes irreducibles, si

Cualquiera sea el par de estas componentes

$$(Z_k \cap Z_{k'}) \cap (\bigcap_{\substack{Y \varepsilon \mathcal{Y} \\ Y \neq Y_o}} Y)$$

es completa (i.e. la codimensión de la intersección es igual a la suma de las codimensiones), la proposición 1.3 dice que $\forall\ \tilde{\omega} \in \Gamma(X, \mathcal{E}^q (* \cup \mathcal{Y}))$ es posible descomponer la corriente residuo múltiple $R_{\mathcal{Y}} [\tilde{\omega}]$, con soporte en $\bigcap_{Y \varepsilon \mathcal{Y}} Y$, como una suma de corrientes residuo múltiple - valor principal, cuyos soportes están contenidos en cada una de las componentes irreducibles de Y_o.

Si la condición * es válida para toda $Y_o \varepsilon \mathcal{Y}$. es claro que puede iterarse esta descomposición hasta obtener una suma de residuos múltiples - valores principales con soportes en

$\bigcap_{Y \in \mathcal{Y}} Z_Y$ para cada elección de una componente irreducible Z_Y de la hipersuperficie Y.

Este resultado es claro si la corriente residual define un ciclo de integración en $\bigcap_{Y \in \mathcal{Y}} Y$ (por ejemplo, un residuo logarítmico del tipo $R\,[\frac{d\phi}{\phi}]$).

<u>Proposición</u> <u>1.5</u> : Sea X una n - variedad holomorfa, $p, j \in N$, $p + 1 \leq n$ e $\mathcal{Y}$ $\{Y_1, \ldots, Y_{p+j}, Y\}$ una familia de hipersuperficies que verifica la siguiente propiedad:

Para cualquier elección de $\ell, k \in \{p, \ldots p + j\}$, $\ell \neq k$

$$\dim_{\mathbb{C}} \left(\bigcap_{i=1}^{p-1} Y_i \cap Y_\ell \cap Y_k \cap Y \right) = n - (p + 2)$$

Entonces, llamando $I = I_{p-1}$, $J = \{p, \ldots + p+j\}$

$$\boxed{\sum_{s \in J} \operatorname{Res}_{Y^I,\, Y_{J(s)},\, Y_s} P_Y = 0}$$

Nota

En realidad, la proposición es cierta si la familia verifica la propiedad P del teorema 1.1 sin pedir intersección completa con la hipersuperficie Y , pero se omitirá aquí esta versión más fuerte porque no es necesaria en el resto del trabajo y su demostración requiere una mayor complejidad técnica.

Demostración del Teorema 1.1

Es claro que se trata de un resultado local; luego, basta demostrar la igualdad en un entorno de cada punto $x \in X$.

Sea U entorno de x tal que existen $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{p+j}, \phi \in \mathcal{O}(U)$ ecuaciones locales de las hipersuperficies, es decir

$$Y_i \cap U = V(\phi_i) \qquad i = 1, \ldots, p+j$$

$$Y \cap U = V(\phi)$$

y $\pi: U_1 \longrightarrow U$ una resolución de singularidades ([HI]) de $Y_o = Y \cup V(\phi_1 \ldots \phi_{p+j})$, i.e. π es un morfismo propio de la variedad lisa U_1 sobre U, que induce un isomorfismo $U_1 - \pi^{-1}(Y_o) \longrightarrow U - Y_o$ y tal que $\pi^{-1}(Y_o)$ tiene cruzamientos normales en U_1

Tomemos $x_1 \in U_1$ Existe un entorno abierto V de x_1 y coordenadas $(Z_1, \ldots, Z_n)$ definidas sobre V y centradas en x_1, con $B = \{||z|| \leq 1\} \subseteq V$, y tales que

$$\phi^* \cdot \prod_{i=1}^{p+j} \phi_i^* = g \cdot Z^\nu$$

donde

$$\phi^* = \phi \circ \pi$$

$$\phi_i^* = \phi_i \circ \pi \quad 1 \leq i \leq p + j$$

$$\nu \in N_o^n$$

y $\qquad g \in \mathcal{O}(V)$ es nunca nula.

Es claro que existen vectores $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p+j} \in N_o^n$ y funciones inversibles $h, h_1, \ldots, h_{p+j} \in \mathcal{O}(B)$ tales que

$$\phi_i^* \Big|_B = h_i \cdot Z^{\alpha_i} \quad 1 \leq i \leq p+j$$

$$\phi^* \Big|_B = h \cdot Z^\alpha$$

Más aún, podemos considerar para el cálculo de los residuos que $\phi_i{}^* = Z^{\alpha_i}$ $\quad \forall\ 1 \leq i \leq p + j$, $\phi^* = Z^{\alpha}$

Sea $\beta \in N_o^{(p+1)xn}$ la matriz cuya i - ésima fila es :

$$\begin{cases} \alpha_i & \text{si} \quad 1 \leq i \leq p - 1 \\ \sum\limits_{k=0}^{j} \alpha_{p+k}\,, & \text{si} \quad i = p \\ \alpha & \text{si} \quad i = p + 1 \end{cases}$$

Para todo $k_o \in \{0, 1, \ldots , j\}$, notaremos β^{k_o} la matriz cuya i - ésima fila es :

$$\begin{cases} & \text{si} \quad 1 \leq i \leq p - 1 \\ \sum\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq k_o}}^{j} \alpha_{p+k}\,, & \text{si} \quad i = p \\ \alpha + \alpha_{p+k_o}, & \text{si} \quad i = p + 1 \end{cases}$$

Dada $\tilde{\omega} \in \Gamma_c\,(U,\ \mathcal{E}_X^{2n-p}\,(*\ Y_o))$,

$\pi^*(\tilde{\omega})$ es una forma semi - meromorfa sobre U_1 con polos sobre $\pi^{-1}(Y_o)$ y su soporte K es compacto pues π es propia. Tomemos un cubrimiento finito de K por bolas B que verifiquen todas las condiciones anteriores. Sea $\{\eta_B,\ B \in \mathcal{B}\}$ una partición C^∞ de la unidad subordinada a este cubrimiento. En cada B se tiene la representación •

$$\eta_\beta \cdot \pi^*(\tilde{\omega})\Big|_B \qquad \frac{\omega}{Z^\gamma}$$

donde γ $\qquad N_o^n$

$$V(Z^\gamma) \subseteq V(Z^\alpha \cdot \prod_{i=1}^{p+j} Z^{\alpha_i})$$

y

$$\omega = \sum_{A,B,M} a_{AB}\, dZ_A \wedge d\overline{Z}_B \wedge d\omega_M \in \mathcal{D}^{2n-p}\ (B)$$

En U

$$\mathrm{Res}_{Y^I,\ Y_J}\ P_Y(\tilde{\omega})$$

$$= \sum_{B\in\mathcal{B}} \mathrm{Res}_{Z^{\alpha_1}, \qquad, Z^{\alpha_{p-1}},\ \prod_{k=0}^{j} Z^{\alpha_{p+k}}} \qquad P_{Z^\alpha}\ (\eta_\beta \cdot \pi^*(\tilde{\omega}))$$

Por 0.2 basta considerar el caso en que ω es un mono - mio de la forma

$$a \quad dZ_A \wedge d\omega_M \qquad\qquad |A| = p$$

ya que para monomios de otro bigrado todos los residuos involucrados en la fórmula dan cero.

Si no existe $A' \subseteq A$, $|A'| = p-1$, tal que $\beta_{A'}(p, p+1)$ se puede llevar por una permutación de columnas a una matriz triangular superior de rango $p-1$, lo mismo ocurre con las matrices β^{k_o} $\forall\, k_o \in \{0, \ldots, j\}$, y todos los residuos dan cero por la proposición 0.8.

Supongamos entonces que $A = \{1, \quad , p\}$, $A' = \{1, \ldots, p-1\}$ y $\beta_{A'}(p, p+1)$ es triangular superior.

•) Si $\alpha_{p+k,i} \neq 0$ para algún $0 \leq k \leq j$, $1 \leq i \leq p-1$ todos los residuos dan cero ya que

i) β_A no es p - normal

ii) $\beta_A^{k_o}$ no es p - normal para $k_o \neq i$

iii) β_A^i no es p+1 - normal

Entonces, supongamos que $\alpha_{p+k,i} = 0 \quad \forall\ 0 \leq k \leq j$, $\forall\ 1 \leq i \leq p-1$

··) Si $\sum_{k=0}^{j} \alpha_{p+k,p} = 0$ todos los residuos son nulos ya que $\alpha_{p+k,p} = 0 \quad \forall\ k$ y entonces

$$\text{rg } \beta_A(p+1) < p \quad \text{y} \quad \text{rg } \beta_A^{k_o}(p+1) < p \quad \forall\ k_o$$

Entonces, supongamos que $\sum_{k=0}^{j} \alpha_{p+k,p} \neq 0$.

···) Si hay un único índice k_o tal que $\alpha_{p+k_o,p} \neq 0$

$$\beta_A = \begin{pmatrix} \alpha_{\cdot 1} \\ \vdots \\ \alpha_{p-1} \\ \alpha_{p+k_o} \\ \alpha \end{pmatrix}_A \qquad \beta_A^k \quad \forall\ k \neq k_o$$

y β^{k_o} no es p+1 - normal.

Si alguno de los primeros p-1 lugares del vector α es no nulo, todos los residuos son cero ya que β_A no es p+1-normal.

Si $\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, p-1$, β_A y β_A^k $(k \neq k_o)$ son p + 1 - normales, y los residuos correspondientes son iguales ya que por la proposición 0.8 cualquiera de ellos es igual a

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{B(A)^{\gamma}_{\delta}} Z\,(A)^{-\gamma}\, a^{\gamma-1}(A)\; d\omega_M$$

y vale la fórmula ya que hay exactamente j sumandos no nulos e iguales.

....) Supongamos ahora que hay por lo menos dos índices $k_o \neq k_1$ tales que

$$\alpha_{p+k_o,p} \neq 0 \quad , \quad \alpha_{p+k_1,p} \neq 0$$

Entonces, $\beta_A^{k_o}$ y $\beta_A^{k_1}$ no son p + 1 - normales porque $(\alpha + \alpha_{k_i})_p \neq 0$, $i = 0, 1$.

Luego

$$\mathrm{Res}_{Y^I, Y_{J(p+k_i)}} \; P_{Y \cup Y_{p+k_i}} \left(\frac{\omega}{Z^\gamma}\right) = 0 \qquad i = 0, 1$$

Veamos que en este caso

$$\mathrm{Res}_{Y^I, Y_J} \; P_Y \left(\frac{\omega}{Z^\gamma}\right) = 0$$

Sea $P_A = \{Z \in B \,/\, Z_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p\}$ Como β_A es normal, por el lema 0.9

$$P_A \subseteq V_e \left(\phi_1^*, \dots, \phi_{p-1}^*, \prod_{k=0}^{j} \phi^*_{p+k}\right)$$

y además

$$\pi (P_A) \subseteq \bigcap_{i=1}^{p-1} V(\phi_i) \cap V(\phi_{p+k_o}) \cap V(\phi_{p+k_1})$$

que tiene dimensión $n - p - 1$ por la hipótesis de intersección completa sobre las hipersuperficies. Por la proposición 0.11 , el residuo es entonces nulo.

Similarmente

$$\mathrm{Res}_{Y^I, Y_{J(p+s)}} \; P_{Y \cup Y_{p+s}} \left(\frac{\omega}{Z^Y}\right) = 0 \quad s \neq k_o, k_1$$

ya que como β_A^s es normal,

$$P_A \subseteq V_e \left(\phi_1^* , \ldots, \phi_{p-1}^* , \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq s}}^{j} \phi_{p+k}^* \right)$$

y π (P_A) está contenida en un conjunto analítico de dimensión menor que $n - p$, como ya vimos.//

<u>Observación</u>

En la demostración se usó exactamente la propiedad requerida de intersección completa de $p+1$ hipersuperficies conteniendo las $p-1$ primeras. En el siguiente ejemplo se pone de manifiesto la necesidad real de esta hipótesis:

Sea $X = \mathbb{C}^n$, $Y_1 = (Z_1 = 0)$, $Y_2 = (Z_1 \cdot Z_2 = 0)$

y sea $\tilde{\phi} = \dfrac{dZ_1}{Z_1} \wedge \phi$ con ϕ una $(n-1, n-1)$ forma C^∞ con soporte compacto contenido en $\{|Z_2| > 1\}$.

Entonces

$$\mathrm{Res}_{Y_1 \cup Y_2} (\tilde{\phi}) = \mathrm{Res}_{Y_2} (\tilde{\phi}) = 2\pi i \int_{Z_1=0} \tilde{\phi}$$

En cambio,

$\mathrm{Res}_{Y_1} P_{Y_2} (\tilde{\phi}) = 0$ ya que $\tilde{V}_e (Y_1, Y_2) = \phi$

y $\mathrm{Res}_{Y_2} P_{Y_1} (\tilde{\phi}) = 0$ ya que $\tilde{V}_e (Y_2, Y_1) = (Z_2 = 0)$

tiene intersección vacía con el soporte de $\tilde{\phi}$. //

El corolario 1.2 es una consecuencia inmediata del teorema 1.1. .

<u>Demostración de la proposición 1.3</u> :

La demostración se hará por inducción en $j = |J| - 1$.

El caso $j = 1$ está incluído en el corolario 1.2.

Supongamos entonces cierto el enunciado para $j - 1 \in N$ y demostrémoslo para $|J| - 1 = j$, $J = \{p, \ldots , p+j\}$.

Definamos una nueva familia de hipersuperficies

$$\mathcal{Y}' = \{ Y'_1, \ldots , Y'_{p+j-1}\}$$

donde

$$Y'_i = Y_i \quad i = 1 , \ldots , p+j-2$$

$$Y'_{p+j-1} = Y_{p+j-1} \cup Y_{p+j}$$

y sea $\quad J' = J - \{p+j\}$

Entonces

$$\mathrm{Res}_{Y^I, Y_J} = \mathrm{Res}_{Y^I, Y'_{J'}}$$

Como $|J'| - 1 = j - 1$, por hipótesis inductiva

$$\mathrm{Res}_{Y^I, Y'_{J'}} \quad \sum_{s \in J'} \mathrm{Res}_{Y^I, Y'_s} \; P_{Y'_{J'(s)}} =$$

$$= \sum_{\substack{s \,\varepsilon\, J' \\ s \neq p+j-1}} \operatorname{Res}_{Y^I, Y_s} P_{Y_{J(s)}} + \operatorname{Res}_{Y^I, Y_{p+j-1} \cup Y_{p+j}} P_{\bigcup_{i=p}^{p+j-2} Y_i}$$

y usando el teorema 1.1

$$= \sum_{\substack{s \,\varepsilon\, J \\ s \neq p+j-1 \\ s \neq p+j}} \operatorname{Res}_{Y^I, Y_s} P_{Y_{J(s)}} + \operatorname{Res}_{Y^I, Y_{p+j-1}} P_{Y_{J(p+j-1)}} +$$

$$\operatorname{Res}_{Y^I, Y_{p+j}} P_{Y_{J(p+j)}} \qquad \sum_{s \varepsilon J} \operatorname{Res}_{Y^I, Y_s} P_{Y_{J(s)}} \qquad //$$

Demostración de la proposición 1.5

Si $|J| = 2$, por la propiedad de antisimetría P.1 de 0.6.

$$\operatorname{Res}_{Y^I, Y_p, Y_{p+1}} P_Y + \operatorname{Res}_{Y^I, Y_{p+1}, Y_p} P_Y = 0$$

Supongamos el resultado válido para $j - 1 \in N$ y demostrémoslo para $|J| - 1 = j$, o sea,

$\mathcal{Y} \quad \{Y_1, \ldots, Y_{p+j-2}, Y_{p+j-1}, Y_{p+j}\}$ Dada la sumatoria

$$\text{(A)} \quad \sum_{s \in J} \operatorname{Res}_{Y^I, Y_{J(s)}, Y_s} P_Y$$

$$= \sum_{s=p}^{p+j-2} \operatorname{Res}_{Y^I, Y_{J(s)}, Y_s} P_Y + \operatorname{Res}_{Y^I, Y_{J(p+j-1)}, Y_{p+j-1}} P_Y + \operatorname{Res}_{Y^I, Y_{J(p+j)}, Y_{p+j}} P_Y,$$

consideremos la familia $\mathcal{Y}' = \{Y_1, \ldots, Y_{p+j-2}, (Y_{p+j-1} \cup Y_{p+j})\}$

Por hipótesis inductiva aplicada a $\mathcal{Y}'$, la primera suma es igual a

$$-\operatorname{Res}_{Y^I, \bigcup_{i=p}^{p+j-2} Y_i, Y_{p+j-1} \cup Y_{p+j}} P_Y$$

y esto es, por el teorema 1.1 , igual a

$$(*) \quad -[\operatorname{Res}_{Y^I,\ \bigcup_{i=p}^{p+j-2} Y_i\ ,\ Y_{p+j-1}} P_{Y\cup Y_{p+j}} + \operatorname{Res}_{Y^I,\ \bigcup_{i=p}^{p+j-2} Y_i, Y_{p+j}} P_{Y\cup Y_{p+j-1}}]$$

Por otro lado, usando P.1 (0.6) y nuevamente el teorema 1.1

$$\operatorname{Res}_{Y^I, Y_{J(p+j-1)}, Y_{p+j-1}} P_Y = -\operatorname{Res}_{Y^I, Y_{p+j-1}, (\bigcup_{i=p}^{p+j-2} Y_i) \cup Y_{p+j}} P_Y =$$

$$-[\operatorname{Res}_{Y^I, Y_{p+j-1}, Y_{p+j}} P_{Y\cup(\bigcup_{i=p}^{p+j-2} Y_i)} + \operatorname{Res}_{Y^I, Y_{p+j-1}, \bigcup_{i=p}^{p+j-2} Y_i} P_{Y\cup Y_{p+j}}] =$$

$$= \operatorname{Res}_{Y^I,\ \bigcup_{i=p}^{p+j-2} Y_i, Y_{p+j-1}} P_{Y\cup Y_{p+j}} - \operatorname{Res}_{Y^I, Y_{p+j-1}, Y_{p+j}} P_{Y\cup(\bigcup_{i=p}^{p+j-2} Y_i)}$$

Similarmente

$$\operatorname{Res}_{Y^I,\ Y_{J(p+j)},\ Y_{p+j}} P_Y =$$

$$= \mathrm{Res}_{Y^I, \bigcup_{i=p}^{p+j-2} Y_i, Y_{p+j}} P_{Y \cup Y_{p+j-1}} - \mathrm{Res}_{Y^I, Y_{p+j}, Y_{p+j-1}} P_{Y \cup (\bigcup_{i=p}^{p+j-2} Y_i)}.$$

Luego, nuevamente por la propiedad de antisimetría

$$\mathrm{Res}_{Y^I, Y_{J(p+j-1)}, Y_{p+j-1}} P_Y + \mathrm{Res}_{Y^I, Y_{J(p+j)}, Y_{p+j}} P_Y =$$

$$= \mathrm{Res}_{Y^I, \bigcup_{i=p}^{p+j-2} Y_i, Y_{p+j-1}} P_{Y \cup Y_{p+j}} + \mathrm{Res}_{Y^I, \bigcup_{i=p}^{p+j-2} Y_i, Y_{p+j}} P_{Y \cup Y_{p+j-1}}$$

que es igual a la expresión (*), con signo opuesto. Esto demuestra que la sumatoria (A) es nula, como buscábamos.//

CAPITULO II

Sea X una n - variedad holomorfa e Y un subespacio analítico de codimensión p. Sean $Y_1, \dots, Y_m$ hipersuperficies tales que $Y = \bigcap_{i=1}^{m} Y_i$, $m \geq p$.

En el primer parágrafo demostraremos que los haces de cohomología moderada con coeficientes en el haz de r - formas holomorfas Ω^r y con soporte en Y, son isomorfos a la cohomología del complejo de Čech moderado de r - formas meromorfas asociado al prehaz de cubrimientos que a cada U abierto de X le asigna $\{U - Y_i\}_{i \in I_m}$ (cf. [R]).

Precisamente, si llamamos

$$A_j = \bigoplus_{\substack{|J| = j+1 \\ J \subseteq I_m \\ \text{creciente}}} \Omega^r (* \bigcup_{\ell \in J} Y_\ell)$$

a los haces de r - formas meromorfas con polos en $j+1$ hipersuperficies, la cohomología del complejo de Čech meromorfo es la cohomología del siguiente complejo $(A^{\cdot}, \delta)$

$$0 \longrightarrow \Omega^r \xrightarrow{i} A_o \xrightarrow{\delta_1} A_1 \xrightarrow{\delta_2} \cdots \to A_{j-1} \xrightarrow{\delta_j} A_j \xrightarrow{\delta_{j+1}} \cdots$$

donde

$$i(\omega) = (\omega, \cdots, \omega)^{\bullet} \quad y$$

$$\delta_j \left((\omega)_{|J|=j} \right)_K = \sum_{i=1}^{j+1} (-1)^{i+1} \omega_{K - \{K_i\}}$$

para todo $K = \{K_1, \ldots, K_{j+1}\}$, $K_1 < K_2 < \ldots < K_{j+1}$

$K \subseteq I_m$.

A continuación en el parágrafo 2 se demuestra que, tomando la $\bar{\partial}$ - cohomología del complejo de los haces de gérmenes de corrientes con soporte en Y como representación de los haces de cohomología moderada con coeficientes en Ω^r , el isomorfismo en el nivel p entre

$$\frac{\operatorname{Ker} \delta_p}{I_m \delta_{p-1}} \quad y \quad \frac{\operatorname{Ker} \bar{\partial} \subseteq {'\mathcal{D}}_Y^{r,p}}{\bar{\partial}\ {'\mathcal{D}}_Y^{r,p-1}}$$

viene dado por el resíduo múltiple, siempre que la familia $\{ Y_1, \ldots , Y_m \}$ verifique la hipótesis

Para todo conjunto $J \subseteq I_m$ de cardinal p

$$\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} \left(\bigcap_{i \in J} Y_i \right) \qquad p$$

<u>Nota</u> :

Si X es una variedad de Stein, es posible encontrar $n+1$ hipersuperficies con intersección completa p a p y cuya intersección sea Y , es decir que puede siempre asegurarse localmente la existencia de hipersuperficies que verifiquen la propiedad anterior.

Esto puede deducirse modificando convenientemente el argumento principal de Forster - Ramspott en [F - R] .

2.1

Para un r fijo ≥ 0, definamos los haces

$$K^{s,q} = \bigoplus_{\substack{|J|=q+1 \\ J \text{ creciente } \subseteq I_m}} \mathcal{D}^{r,s+1}_{Y_J}$$

$s \in N$, $q \in N \cup \{0\}$

$$K^{o,q} = \bigoplus_{\substack{|J|=q+1 \\ J \text{ creciente } \subseteq I_m}} \mathcal{D}^{r,1}_{Y_J} / \bar\partial \mathcal{D}^{r,o}_{Y_J} \ , \quad q \in N \cup \{0\} .$$

y los morfismos

$$\bar\partial : K^{s,q} \longrightarrow K^{s+1,q}$$

Si $T \quad (T_J)_{|J|=q+1} \qquad (\bar\partial T)_J = (-1)^q \cdot \bar\partial T_J$

$y \qquad \delta \qquad K^{s,q} \longrightarrow K^{s,q+1}$ deltas de Čech

$$\delta(T)_L = \sum_{i=1}^{q+2} (-1)^{i-1} T_{L - \{L_i\}}, \quad |L| = q+2 \;, \quad L = \{L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_{q+2}\}$$

que quedan bien definidos también para $s = o$ pues

$$\delta\,((\bar{\partial}\, T)_J) \qquad \bar{\partial}\,(\delta\,(T_J))$$

Notemos además

$$Z_\delta \; K^{s,q} = \{T \in K^{s,q} : \delta\, T = 0\}$$

$$Z_{\bar{\partial}} \; K^{s,q} = \{T \in K^{s,q} : \bar{\partial}\, T = 0\}$$

Proposición 2.1.1

Las cohomologías de los complejos

$$(1) \quad Z_\delta\, K^{0,0} \xrightarrow{\bar\partial} Z_\delta\, K^{1,0} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots$$

$$(2) \quad Z_{\bar\partial}\, K^{0,0} \xrightarrow{\delta} Z_{\bar\partial}\, K^{0,1} \xrightarrow{\delta} \cdots$$

son isomorfas.

Dem ;

Consideremos el complejo doble

$$K = (K^{s,q})_{s,q\, \varepsilon\ N\, \cup\, \{0\}}$$

munido de su graduación total y de la diferencial

$$D = \delta + \overline{\partial}$$

Por la teoría de sucesiones espectrales, es suficiente ver que

$$(*)\quad H^{s}_{\overline{\partial}}(H^{q}_{\delta}(K)) = 0 \qquad \forall \quad q \geq 1$$

y

$$(**)\quad H^{q}_{\delta}(H^{s}_{\overline{\partial}}(K)) = 0 \qquad \forall \quad s \geq 1$$

pues entonces las cohomologías de los complejos (1) y (2) serán ambas isomorfas a la de K.

Ahora bien, (*) es una consecuencia de la sucesión exacta de Lojasiewicz para todos A y B conjuntos regularmente separados (cf. [M])

$$0 \longrightarrow {}'\mathcal{D}_{A\cap B} \longrightarrow {}'\mathcal{D}_{A} \oplus {}'\mathcal{D}_{B} \longrightarrow {}'\mathcal{D}_{A\cup B} \longrightarrow 0$$

como ha sido observado por J - B. Poly en una comunicación privada.

En efecto, si $m = 2$

$$0 \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{Y_1 \cap Y_2} \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{Y_1} \oplus {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{Y_2} \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{Y_1 \cup Y_2} \longrightarrow 0$$

es exactamente la sucesión exacta anterior.

En general, supongamos el resultado válido para $m \geq 2$ y demostrémoslo para $m + 1$, i.e. veamos la exactitud de la sucesión

$$0 \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{\bigcap_{i=1}^{m+1} Y_i} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{Y_i} \xrightarrow{\delta} \cdots \bigoplus_{|J|=j} {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{Y_J} \xrightarrow{\delta} \cdots \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{\bigcup_{i=1}^{m+1} Y_i} \longrightarrow 0 \quad (1)$$

en todos sus niveles, admitiendo que la sucesión similar asociada a una familia de m hipersuperficies es exacta.

La suryectividad de

$$\bigoplus_{|J|=m} {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{Y_J} \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{\bigcup_{i=1}^{m+1} Y_i} \longrightarrow 0$$

es una consecuencia trivial del caso $m = 2$ ya que puede pensarse $\bigcup_{i=1}^{m+1} Y_i = (\bigcup_{i=1}^{m} Y_i) \cup Y_{m+1}$.

En cuanto al otro extremo, sea $T = (T_{i,j}) \in \bigoplus_{i<j} {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{Y_i \cup Y_j}$ tal que $\delta T = 0$ y sea $T' = (T_{i,j})_{i,j<m+1}$. T' puede pensarse como un 2 -cociclo respecto de la familia de hipersuperficies $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$. Luego, $\delta T' = 0 \Rightarrow \forall i : 1 \leq i \leq m, \exists S_i \in {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{Y_i}$ tal que

$$T_{i,j} \qquad S_j - S_i \qquad \forall i,j \in I_m$$

Ahora bien, dado $i \in I_m$, cualquiera sea $j \in I_m$

$$T_{i,m+1} + S_i = T_{j,m+1} + S_j$$

ya que $(\delta T)_{<i,j,m+1>} = 0$. Denotemos por α esta corriente.
Luego

$$\mathrm{sop}\ (\alpha) \subseteq \bigcap_{j \in I_m} Y_j \ \cup \ Y_{m+1}$$

y por la exactitud para el caso de dos conjuntos analíticos existen $S \in {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{\bigcap_{j \in I_m} Y_j}$ $\quad S_{m+1} \in {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{Y_{m+1}}$
tales que

$$S + S_{m+1}$$

i.e. $\quad T_{i,m+1} = S_{m+1} - (S_i - S) \quad \forall i : 1 \leq i \leq m$

Como además $\quad \forall i,j \in I_m$

$$T_{i,j} = (S_i - S) \qquad (S_j - S)$$

definiendo la 1-cocadena

$$U \qquad (U_i)_{i \,\varepsilon\, I_{m+1}}$$

$$U_i = S_i - S \qquad 1 \leq i \leq m$$

$$U_{m+1} = S_{m+1}$$

resulta $\delta\, U = T$.

En general, dado $j \quad 2 < j < m+1$ y $\omega = (\omega_J)_{|J|=j}$ con $\delta\, \omega = 0$, definamos

$$\omega' = (\omega_J)_{J \subseteq I_m}$$

Nuevamente, ω' puede pensarse como un j - cociclo asociado a la familia $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$.

Entonces, por hipótesis inductiva

$$\delta\,\omega' = 0 \Rightarrow \forall \text{ conjunto } L \text{ de cardinal } j-1,\ L \subseteq I_m,\ \exists\, \gamma_L \in {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{\underset{j\in L}{\cup} Y_j} \text{ tal que}$$

$$\delta\gamma = \omega'$$

Queremos ver que es posible definir γ_L cuando $m+1 \in L$, de tal modo que resulte

$$(\delta\gamma)_J = \omega_J \quad \forall\, J \subseteq I_{m+1},\ |J| = j\,.$$

Para ello, dado $L \subseteq I_m$, $|L| = j-1$, definamos $\alpha_L \in {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{Y_L \cup Y_{m+1}}$

$$\alpha_L = \omega_{L\,\cup\{m+1\}} + (-1)^j\, \gamma_L$$

Como $Y_L \cup Y_{m+1} = \underset{i\in L}{\cup} (Y_i \cup Y_{m+1})$, α puede pensarse como una $j-1$ cocadena asociada a la familia de m hipersuperficies

$$F = \{Y_1 \cup Y_{m+1}, \ldots , Y_m \cup Y_{m+1}\}$$

Afirmamos que $\delta \alpha = 0$

En efecto, dado $K \subseteq I_m$, $|K| = j$, $K = \{K_1, \ldots , K_j\}$

$$(\delta\alpha)_K = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i-1} \alpha_{K(K_i)} = \sum_{i=1}^{j} [(-1)^{i-1} \omega_{K(K_i)\cup\{m+1\}} + (-1)^{j} \gamma_{K(K_i)}] =$$

$$= (-1)^{j-1} \omega_K + (-1)^j \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i-1} \gamma_{K(K_i)} = 0$$

ya que $(\delta\omega)_{K \cup\{m+1\}} = 0$ y $\delta\gamma = \omega'$

Luego, aplicando la hipótesis inductiva a la familia F ,
$\forall\, I \subseteq I_m$, $|I| = j-2$, existe $\beta_I \in {}'\mathcal{D}^{r,\cdot}_{Y_I \cup Y_{m+1}}$

tal que

$$\delta\ \beta = \alpha$$

Definamos entonces para todo conjunto L de cardinal $j - 1$ que contenga a $m + 1$

$$\gamma_L = \beta_{L(m+1)}$$

y verifiquemos que $(\delta\gamma)_J = \omega_J$, $m + 1 \in J$.

Si $J = \{J_1, \ldots, J_{j-1}, m+1\}$ $\quad J_1 < J_2 < \ldots < J_{j-1}$

$$(\delta\gamma)_J = \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i-1} \gamma_{J(J_i)} + (-1)^{j-1} \gamma_{J(m+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i-1} \beta_{J(m+1)(J_i)} + \omega_J - \alpha_{J(m+1)}$$

$$= (\delta\beta)_{J(m+1)} - \alpha_{J(m+1)} + \omega_J = \omega_J$$

con lo cual queda demostrada la exactitud de la sucesión (1).

En cuanto a (**)

$$H^s_{\bar\partial}(K) = \sum_q H^s_{\bar\partial}(K^{\cdot,q})$$

y como por 0.13

$$H^S_{\bar\partial}(K^{\cdot,q}) \equiv \sum_{\substack{|J|=q+1 \\ J \subseteq I_m \\ \text{creciente}}} \mathcal{H}^{s+1}_{Y_J}\,\Omega^r$$

$H^s_{\bar\partial}(K^{\cdot,q}) = 0 \quad \forall\, s \in \mathbb{N}$ ya que se trata de una suma de haces de cohomología moderada con soporte en una hipersuperficie, a altura $s+1 \geq 2$. En efecto, sea $Z \subseteq X$ una hipersuperficie y $x \in Z$ Sea $f \in \mathcal{O}(U)$ definida en algún entorno U de x tal que

$$V(f) = Z \cap U$$

Los cocientes por los ideales principales $I^k = \langle f^k \rangle$ tienen resoluciones proyectivas de longitud 1

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\alpha_k} \mathcal{O} \xrightarrow{\pi_k} \mathcal{O}/_{I^k} \longrightarrow 0$$

$$\alpha_k(1) = f^k$$

Luego $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/_{I^k}, F) = 0$ $\forall$ haz F sobre U si $j \geq 2$, i.e.

$$(\mathcal{H}^j_{[Z]}\ \Omega^r)_x = (\underline{R}^j \varinjlim_k \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/_{I^k}, \Omega^r))_x \qquad 0\ ,$$

como habíamos afirmado. //

<u>Lema</u> <u>2.1.2</u> :

Sea $\mathcal{M}$ un haz sobre X. El complejo de Čech "constante"

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} \bigoplus_{|J|=1} M \xrightarrow{\delta_1} \cdots \longrightarrow \bigoplus_{|J|=j} M \xrightarrow{\delta_j} \bigoplus_{|J|=j+1} M \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{|J|=m} M \longrightarrow 0$$

es exacto (todos los conjuntos de índices están contenidos en $I_m = \{1, \ldots m\}$).

Dem :

Obviamente $\delta_1 \circ i = 0$, $\delta_{j+1} \circ \delta_j = 0 \quad \forall j \in N$

Verifiquemos entonces que $\operatorname{Ker} \delta_{j+1} \subseteq \operatorname{Im} \delta_j$.

Sea $x \in X$ y $\alpha = (\alpha_J)_{|J|=j+1} \in \bigoplus_{\substack{|J|=j+1 \\ J \subseteq I_m}} M_x$ tal que

$$\delta_j(\alpha) = 0$$

Definamos $\forall \quad K \subseteq I_m$, $|K| = j$

$$\beta_K = \frac{1}{m} \sum_{\substack{i \notin K \\ i \in I_m}} (-1)^{\sigma_K(i)} \alpha_{K \cup \{i\}}$$

donde

$$\sigma_K\ (i) = [\text{lugar u orden de } i \text{ en } K \cup \{i\}] - 1$$

Veamos que $\delta(\beta)$

Dado $J \subsetneq I_m$ $\quad J = \{J_o, \dots J_j\}$,

llamemos $CJ = I_m - J$, $\quad J(i) = J - \{J_i\}$.

Entonces

$$\delta\ (\beta)_J = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \quad \beta_{J(i)}$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \sum_{\ell \varepsilon CJ \cup \{J_i\}} (-1)^{\sigma_{J(i)}(\ell)} \alpha_{J(i) \cup \{\ell\}}$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \ ((-1)^{\sigma_{J(i)}(J_i)} \alpha_J + \sum_{\ell \varepsilon CJ} (-1)^{\sigma_{J(i)}(\ell)} \alpha_J$$

$$= \frac{1}{m}\left(\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i}(-1)^{i}\right)\alpha_J + \frac{1}{m}\sum_{\ell\in CJ}\ \sum_{i=0}^{j}(-1)^{i}(-1)^{\sigma_{J(i)}(\ell)}\alpha_{J(i)U\{\ell\}} =$$

$$\overset{(*)}{=}\quad \frac{j+1}{m}\,\alpha_J + \frac{1}{m}\sum_{\ell\in CJ}\alpha_J = \left(\frac{j+1}{m}+\frac{m-(j+1)}{m}\right)\alpha_J = \alpha_J$$

ya que para todo $\ell \in CJ$, $J\,U\{\ell\} = (J_0, \ldots J_{s-1}, \ell\,, J_s, \ldots J_j)$,

$$0 = (\delta\alpha)_{JU\{\ell\}} \qquad \sum_{i=0}^{s-1}(-1)^{i}\alpha_{J(i)U\{\ell\}} + (-1)^{s}\alpha_J + \sum_{i=s}^{j}(-1)^{i+1}\alpha_{J(i)U\{\ell\}}$$

Luego

$$\alpha_J = \sum_{i=0}^{s-1}(-1)^{i+1}(-1)^{s}\alpha_{J(i)U\{\ell\}} + \sum_{i=s}^{j}(-1)^{i}(-1)^{s}\alpha_{J(i)U\{\ell\}}$$

y como

$$(-1)^{\sigma_{J(i)}(\ell)} = \begin{cases} (-1)^{s-1} & \text{si } i < s \\ (-1)^{s} & \text{si } i > s \end{cases}$$

queda demostrada la igualdad (*) y con ella el lema 2.1.2 . //

El siguiente lema es un caso particular de un resultado demostrado en [S] pero lo incluímos aquí ya que será utilizado con este enunciado preciso en la proposición 2.1.4.

<u>Lema</u> <u>2.1.3</u> :

Dada una hipersuperficie Z en X y $x \in X$, cualquier clase en

$$H^{1}_{[Z]}(\Omega^{r})_{x} \cong \left(\frac{\operatorname{Ker} \bar{\partial} \subseteq {}'\mathcal{D}_{Z}^{r,1}}{\bar{\partial}\ {}'\mathcal{D}_{Z}^{r,0}} \right)_{x}$$

puede representarse unívocamente mediante el germen en x del residuo de una forma meromorfa con polos en Z. Además, dadas $\tilde{\omega}$, $\tilde{\lambda} \in \Omega^{r}(* Z)_{x}$

$$\operatorname{Res}_{Z} [\tilde{\omega}]_{x} = \operatorname{Res}_{Z} [\tilde{\lambda}]_{x} \Rightarrow \tilde{\omega} - \tilde{\lambda} \text{ es regular,}$$

i.e. $\tilde{\omega} - \tilde{\lambda} \in \Omega^r_x$.

<u>Proposición</u> <u>2.1.4</u> :

Las cohomologías de los complejos

$$(2) \quad Z_{\bar{\partial}}\, K^{0,0} \xrightarrow{\delta} Z_{\bar{\partial}}\, K^{0,1} \xrightarrow{\delta} \dots$$

$$(3) \quad A_0 \xrightarrow{\delta_1} A_1 \xrightarrow{\delta_2} A_2 \longrightarrow \dots$$

son isomorfas.

<u>Dem</u> : Definamos los morfismos

$$R_j : A_j \longrightarrow \operatorname{Ker} \bar{\partial} \subseteq K^{0,j}$$

Dado $\omega = (\omega_J)_{|J|=j+1} \in A_{j_x}$ $(x \in X)$

$$R_j\ (\omega) \qquad \overline{(\mathrm{Res}_{Y_J}\ [\ \omega_J\,])}_{|J|=j+1}\ \varepsilon\ \ K_x^{0,j}$$

Veamos entonces que R_j es un cuasi - isomorfismo.

i) $R_{j+1}\ (\delta_{j+1}\ (\omega)) = \delta\ (R_j\ (\omega))$

ya que como $\omega_J\ \varepsilon\ \Omega^r\ (*\ Y_{J_o}\ \cup \ldots \cup\ Y_{J_j})$, para todo $\ell \notin J$

$$\mathrm{Res}_{Y_{J\cup\{\ell\}}}\ [\omega_J] = \mathrm{Res}_{Y_J}\ [\omega_J] \text{ por P.4 de 0.6.}$$

Luego, se inducen morfismos

$$R_j^{\,*} \quad H^j\ (A^{\boldsymbol{\cdot}}) \longrightarrow H^j\ (\mathrm{Ker}\ \bar\partial \subseteq K^{0,\boldsymbol{\cdot}})$$

ii) Sea $\omega = (\omega_J)_{|J|=j+1}\ \varepsilon\ A_{j_x}$, $\delta_{j+1}\ \omega = 0$, y supongamos que $R_j^{\,*}\ (\omega) = 0$. Luego, existe

$$T\ \varepsilon \bigoplus_{|K|=j} \left.\frac{\mathrm{Ker}\ \bar\partial \subseteq {'\mathcal{D}}^{r,1}_{Y_K}}{\bar\partial\ {'\mathcal{D}}^{r,o}_{Y_K}}\right|_x \quad \text{tal que}$$

$$R_j^* \ (\omega) = \delta \ T$$

Por el lema 2.1.3, podemos suponer que

$$T = (\overline{T}_K)_{|K|=j} \ , \quad T_K = \mathrm{Res}_{Y_K} \ [\ \gamma_K]$$

con $\gamma_K \ \varepsilon \ \Omega^r \ (* \ Y_K)_x$

Luego $\forall \ J \subseteq I_m, \quad |J| = j+1$

$$\overline{\mathrm{Res}_{Y_J}[\omega_j]} = \overline{\mathrm{Res}_{Y_J}[(\delta_j \gamma)_J]}$$

por la linealidad del operador residual.

Nuevamente por el lema 2.1.3, existe una única corriente residual en cada clase, luego

$$\mathrm{Res}_{Y_J}\ [\omega_J] = \mathrm{Res}_{Y_J}\ [(\delta_j \gamma)_J]$$

con lo cual

$$\alpha_J = \omega_J - (\delta_j \gamma)_J \in \Omega_X^r \quad (\forall\ |J| = j+1)$$

es una forma regular. Entonces $\alpha = (\alpha_J)_{|J|=j+1}$ define un cociclo ya que

$$\delta_{j+1}\alpha = \delta_{j+1}\omega - \delta_{j+1} \circ \delta_j \gamma = 0$$

Por el lema 2.1.2 existe entonces

$$\beta = (\beta_K)_{|K|=j} \in \bigoplus_{|K|=j} \Omega_X^r \qquad \text{tal que}$$

$\delta_j\ (\beta) =$

Luego

$\omega' = \delta_j\ (\beta + \gamma)$, o sea su clase es nula. Esto demuestra la inyectividad de R_j^* .

iii) Sea $T = (\overline{T}_J)_{|J|=j+1} \in \operatorname{Ker} \overline{\partial} \subseteq K_x^{0,j}$

tal que $\delta(T) = 0$

Por el lema 2.1.3. , existen $\omega_J \in \Omega^r{}_x(* \ Y_J)$ para todo $J \subseteq I_m$ de cardinal $j + 1$, tales que

$$\overline{T}_J = \overline{\operatorname{Res}_{Y_J} [\omega_J]}$$

Dado $L \subseteq I_m$, $|L| = j+2$

$$\overline{\operatorname{Res}_{Y_L} [(\delta_{j+1}\omega)_L]} = (\delta\ T)_L = 0$$

Entonces por el lema 2.1.3 debe ser

$$\mathrm{Res}_{Y_L} \; [(\delta_{j+1}\,\omega)_L] = 0 \,, \quad \text{o sea} \quad \delta_{j+1}\,\omega_L \in \Omega_x^r \,.$$

Como $\delta_{j+2} \circ \delta_{j+1}(\omega) = 0$ por el lema 2.1.2 existen formas regulares $(\alpha_J)_{|J| = j+1}$ tales que

$$\delta_{j+1}\,\omega = \delta_{j+1}\,\alpha$$

es decir $\delta_{j+1}(\omega - \alpha) \quad 0.$

Entonces resulta

$$T = R_j^* \left(\overline{\omega - \alpha} \right) \qquad \text{con lo cual los}$$

morfismos R^* son suryectivos.

Queda demostrada con esto la proposición 2.1.4.//

Notemos que

$${}'\mathcal{D}_Y^{r,s+1} \cong \mathrm{Ker}\;\delta \subseteq K^{s,o}$$

mediante el isomorfismo

$$T \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} T$$

Luego, la cohomología del complejo (1) da precisamente los haces de cohomología moderada con coeficientes en las r-formas holomorfas y soportes en Y.

Entonces, de las proposiciones 2.1.1 y 2.1.4 se deduce que

$$H^{\bullet}_{[Y]}\,\Omega^{r} = H^{\bullet}_{\delta}\,(A^{\cdot})$$

como habíamos enunciado.

para cualquier elección de J y L contenidos en $\{1, \ldots m\}$, $J = \{J_1, \ldots, J_p\}$, $L = \{L_1, \ldots, L_p\}$, son iguales los gérmenes en x de las corrientes

$$\mathrm{Res}_{Y^J} [\omega_J] = \mathrm{Res}_{Y_{J_1}, \ldots, Y_{J_p}} [\omega_J] \qquad \text{y}$$

$$\mathrm{Res}_{Y^L} [\omega_L] = \mathrm{Res}_{Y_{L_1}, \ldots, Y_{L_p}} [\omega_L]$$

En efecto, por el lema 2.2.2 la página 2,31 y usando un argumento recursivo, basta demostrarlo en el caso en que $L = \{J_1, \ldots, J_{i-1}, J_i', J_{i+1} \ldots J_p\}$ (ordenado crecientemente).

Luego

$$J_1 < \ldots < J_{i-1} < J_i < J_i' < J_{i+1} < \ldots < J_p$$

o bien

$$J_1 < \dots < J_{i-1} < J_i' < J_i < J_{i+1} < \dots < J_p$$

Entonces, usando las propiedades de los residuos para intersecciones completas P.1 y P.4 de 0.6.

$$\operatorname{Res}_{Y^J} [\omega_J] \qquad \operatorname{Res}_{Y^L} [\omega_L] =$$

$$= (-1)^{p-i} \{\operatorname{Res}_{Y_{J_1},\dots \hat{Y}_{J_i}, \dots Y_{J_p}, Y_{J_i}} [\omega_J] - \operatorname{Res}_{Y_{J_1}, \dots, \hat{Y}_{J_i'},\dots, Y_{J_i'}} [\omega_L$$

$$= (-1)^{p-i} \operatorname{Res}_{Y_{J_1}, \dots, \hat{Y}_{J_i}, \dots , Y_{J_p}, Y_{J_i} \cup Y_{J_i'}} [\omega_J - \omega_L]$$

Ahora, este último residuo es nulo ya que

$$0 = (\delta\, \omega)_{J\cup\{J_i'\}} = \pm (\omega_J - \omega_L) + \sum_{\ell \neq i} \pm \; \omega_{(J-\{J_\ell\})\cup\{J_i'\}}$$

donde $\forall \ell \neq i \quad \omega_{(J-\{J_\ell\})\cup J'_i} \in \Omega^r_x(*\underset{s\neq\ell}{\cup} Y_{J_s} \cup Y_{J'_i})$

y Y_{J_ℓ} es una de las hipersuperficies del residuo múltiple (P.2)

<u>Lema</u> <u>2.2.2</u>

Dados dos conjuntos ordenados L y J contenidos en I_m de p elementos, existe una cadena finita de r conjuntos ordenados J^ℓ, $0 \leq \ell \leq r$ tales que

i) $r \leq p$

ii) $J_o = J$, $J_r = L$

iii) $\forall \ell \geq 1$ existe un único k_ℓ tal que

$$J_i^{\ell} = J_i^{\ell-1} \quad \forall i \neq k_{\ell}$$

<u>Dem</u> : Supongamos que

$$J \qquad \{J_1 \,, \ldots J_p\} \qquad\qquad J_1 < J_2 < \ldots < J_p$$

$$L = \{L_1 \,, \ldots L_p\} \qquad\qquad L_1 < L_2 < \ldots < L_p$$

y sean

$$A = \{\ell \in I_m / J_\ell < L_\ell\}$$

$$A = \{ a_1 , \ldots , a_{k_1} \} \qquad\qquad a_1 < a_2 < \ldots < a_{k_1}$$

$$B = \{ \ell \in I_m / J_\ell > L_\ell\}$$

$$B = \{ b_1 , \ldots , b_{k_2} \} \qquad\qquad b_1 < \ldots < b_{k_2}$$

Definamos entonces

$$J^{\circ} = J$$

y para $\ell \leq k_2$

$$J_i^{\ell} \quad \begin{cases} J_i^{\ell-1} & i \neq b_{\ell} \\ L_i & i = b_{\ell} \end{cases}$$

(Luego $J_i^{k_2} = \min \{J_i, L_i\} \quad \forall \ i = 1, \dots p$)

Si $k_2 < \ell \leq k_2 + k_1$ definamos

$$J_i^{\ell} \ . \quad \begin{cases} J_i^{\ell-1} & i \neq a_{k_1+k_2-\ell+1} \\ L_i & i \quad a_{k_1+k_2-\ell+1} \end{cases}$$

Resulta $J_i^{k_1+k_2} = L_i \quad \forall i = 1, \dots p$

Veamos que cada J^{ℓ} es un conjunto creciente de índices para $0 < \ell < k_1 + k_2$

i) $0 < \ell \leq k_2$

Hay que ver que

$$J_{b_{\ell}-1}^{\ell-1} < J_{b_{\ell}}^{\ell} = L_{b_{\ell}} < J_{b_{\ell}+1}^{\ell-1}$$

Como $b_\ell \in B$

$$L_{b_\ell} < J_{b_\ell} < J_{b_\ell+1} = J^{\ell-1}_{b_\ell+1}$$

Por la construcción

$$J^{\ell-1}_{b_{\ell-1}} \qquad L_{b_{\ell-1}} < L_{b_\ell}$$

o bien

$$J^{\ell-1}_{b_\ell-1} = J_{b_\ell-1} \leq L_{b_\ell-1} < L_{b_\ell}$$

ii) $k_2 < \ell < k_1 + k_2$

Hay que ver que para $i = a_{k_1+k_2-\ell+1}$

$$J^{\ell-1}_{i-1} < L_i = J^{\ell}_i < J^{\ell-1}_{i+1}$$

Como $i + 1 > i$, o bien $i + 1 \in B \Rightarrow J^{\ell-1}_{i+1} = L_{i+1}$

o bien $i+1 \in A$ y entonces $J^{\ell-1}_{i+1} = L_{i+1}$ por la definición,
o bien $J_{i+1} = L_{i+1}$

Luego, será $J^{\ell-1}_{i+1} = L_{i+1} > L_i$

En cuanto a la otra desigualdad, o bien

$$J^{\ell-1}_{i-1} = L_{i-1} < L_i$$

o bien

$$J^{\ell-1}_{i-1} = J_{i-1} < J_i < L_i \quad \text{pues} \quad i \notin A \, .//$$

<u>Teorema 2.2.3:</u>

Sea $J \subseteq I_m$ un subconjunto cualquiera de p elementos. La aplicación

$$\begin{array}{lcl} H^p(A^\bullet) & \longrightarrow & \dfrac{\operatorname{Ker} \bar{\partial} \subseteq {}'\mathcal{D}^{r,p}_Y}{\bar{\partial}\ {}'\mathcal{D}^{r,p-1}_Y} \simeq H^p_{[Y]}(\Omega^r) \\ \bar{\omega} & \longmapsto & \overline{\operatorname{Res}_{Y^J} [\omega_J]} \end{array}$$

es un isomorfismo.

<u>Dem</u> :

Como por lo observado en 2.2.1 ,

$\mathrm{Res}_{Y^J}[\omega_J] = \mathrm{Res}_{Y^L}[\omega_L]$ $\forall$ L de cardinal p y como para todo L

$$\mathrm{sop}\ (\mathrm{Res}_{Y^L}[\omega_L]) \subseteq \bigcap_{i\varepsilon L} Y_i \qquad (0.3),$$

el soporte del germen de corriente $\mathrm{Res}_{Y^J}[\omega_J]$ está contenido en $Y = Y_1 \cap Y_2 \cap \ldots \cap Y_m$.

La aplicación está bien definida desde el cociente por P.2 , ya que si $\omega = \delta_{p-1}\gamma$, para todo J ω_J se parte como suma de formas con polos en p-1 hipersuperficies y por ende su residuo múltiple respecto de la familia $\{Y_i\}_{i\varepsilon J}$ es nulo.

Por las dos proposiciones anteriores (y sus demostraciones) hay que ver que siguiendo las flechas del cuadrado $K = (K^{s,q})_{s,q\varepsilon\ \mathbb{N}\cup\{0\}}$ de la proposición 2.1.1 desde $K^{0,p-1}$ hasta $K^{p-1,0}$

la o - cocadena α

$$\alpha_i = c \, . \ \operatorname{Res}_{Y^J} [\omega_J] \qquad i \in I_m$$

donde $c \quad (-1)^{\frac{p.(p-1)}{2}} \quad \frac{1}{\binom{m-1}{p-1}} \in \mathbb{R}$,

es la imagen de $T \quad (T_L)_{|L|=p} \in K^{o,p-1}$

$$T_L \qquad \overline{\operatorname{Res}_{Y_L} [\omega_L]} \qquad \frac{\operatorname{Ker} \bar\partial \subseteq {}'\mathcal{D}^{r,1}_{Y_L}}{\bar\partial \ {}'\mathcal{D}^{r,o}_{Y_L}}$$

Definiremos

$$a_j \in K^{(p-1)-j,j} \qquad \forall \ 0 \leq j \leq p-1$$

y $$b_j \in K^{(p-1)-(j+1),j} \qquad \forall \ 0 \leq j \leq p-2$$

tales que

i) $a_o = \alpha$

ii) $a_{p-1} = T$

iii) $\bar\partial b_j = a_j \qquad \forall\ o \leq j \leq p-2$

iv) $\delta b_j = a_{j+1} \qquad \forall\ o \leq j \leq p-2$

Sean

$$c_{p-1} = 1$$

$$c_{p-j} = \frac{1}{\binom{m-1}{j-1}} \cdot (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{j-1}(p-k)}$$

(luego $\quad c_{j-1} = (-1)^j \dfrac{(p-j)}{m-(p-j)} \; c_j \quad (1)$)

y $$d_j \qquad \frac{c_j}{p-(j+1)} \qquad (2)$$

Definamos entonces (cf. 0.2 y 0.3)

$\forall \quad |J| \quad j+1$

$$(a_j)_J = c_j \sum_{\substack{|L|=p-j-1 \\ L \cap J = \phi}} \mathrm{Res}_{Y^L, Y_J} [\omega_{L \cup J}] \qquad , \text{ donde}$$

$$\omega_{LUJ} = (-1)^{\sigma(L,J)} \quad \omega_{"LUJ"} \qquad (*\ *)$$

"LUJ" significa ordenado en forma creciente - $(-1)^{\sigma(L,J)}$ es el signo de la permutación de LUJ que lleva L creciente seguido de J ordenado creciente en "LUJ" .

$\forall\ |K| = j$

$$(b_{j-1})_K = d_{j-1} \cdot \sum_{\substack{|L|=p-j-1 \\ L\cap K=\phi}} \ \sum_{s\notin LUK} \operatorname{Res}_{Y^L, Y_K} P_{Y_s} [\omega_{LUKU\{s\}}]$$

Por el lema 0.5 y la definición de $\bar{\partial}$ en el cuadrado

$$\bar{\partial}\ (b_{j-1})_K = d_{j-1} \cdot (-1)^{j-1} \sum_{\substack{|L|=p-j-1 \\ L\cap K=\phi}} \ \sum_{S\notin LUK} \operatorname{Res}_{Y^L, Y_K, Y_s} [\omega_{LUKU\{s\}}] =$$

$$= d_{j-1} \cdot \sum_{\substack{L=p-j-1 \\ L\cap K=\phi}} \ \sum_{s\notin LUK} \operatorname{Res}_{Y^L, Y_s, Y_K} [\omega_{LU\{s\}UK}]$$

$$= d_{j-1} \cdot (p-j) \sum_{\substack{|M|=p-j \\ M\cap K=\phi}} \operatorname{Res}_{Y^M, Y_K} [\omega_{MUK}] \qquad a_{j-1}$$

pues $d_{j-1} \cdot (p-j) \qquad c_{j-1}$

Para $s \in J$ sea

$(-1)^{\sigma(s,J(s))}$ = signo de la permutación que lleva s seguido de $J(s)$ ordenado crecientemente a J ordenado en forma creciente.

Entonces

$$(\delta b_{j-1})_J \qquad \sum_{s\in J} (-1)^{\sigma(s,J(s))} \quad (b_{j-1})_{J(s)} \quad =$$

$$= d_{j-1} \cdot \sum_{s\in J} (-1)^{\sigma(s,J(s))} \sum_{\substack{|L|=p-j-1\\ L\cap J(s)=\phi}} \ \sum_{r\notin J(s)\cup L} \mathrm{Res}_{Y^L, Y_{J(s)}} \ P_{Y_r}[\omega_{L\cup J(s)\cup\{r\}}] =$$

$$= \underbrace{d_{j-1} \cdot \sum_{s\in J} (-1)^{\sigma(s,J(s))} \sum_{\substack{|L|=p-j-1\\ L\cap J(s)=\phi}} \ \sum_{r\notin J\cup L} \mathrm{Res}_{Y^L, Y_{J(s)}} \ P_{Y_r}[\omega_{L\cup J(s)\cup\{r\}}]}_{(A)} +$$

$$\underbrace{+\ d_{j-1} \cdot \sum_{s \in J} (-1)^{\sigma(s,J(s))} \sum_{\substack{|L|=p-j-1 \\ L \cap J=\phi}} \operatorname{Res}_{Y^L, Y_{J(s)}} P_{Y_s}[\omega_{L \cup J(s) \cup \{s\}}]}_{(B)}$$

$$(B) = d_{j-1} \cdot \sum_{\substack{|L|=p-j-1 \\ L \cap J=\phi}} \sum_{s \in J} (-1)^j \operatorname{Res}_{Y^L, Y_{J(s)}} P_{Y_s} [\omega_{L \cup J}]$$

(ya que $(-1)^j \cdot \sigma(s,J(s)) = \sigma(J(s),s)$)

$$= d_{j-1} \cdot (-1)^j \sum_{\substack{|L|=p-j-1 \\ L \cap J=\phi}} j \cdot \operatorname{Res}_{Y^L, Y_J} [\omega_{L \cup J}]$$ (por el corolario 1.2)

$$= d_{j-1} \cdot (-1)^j \cdot j \cdot (a_j)_J \cdot \frac{1}{c_j} = \frac{(-1)^j \cdot j}{c_j} \cdot d_{j-1} \ (a_j)_J$$

Por otro lado

$$(A) = d_{j-1} \cdot \sum_{r \notin J} \sum_{s \in J} \sum_{\substack{|L|=p-j-1 \\ L \cap (J(s) \cup \{r\})=\phi}} (-1)^{\sigma(s,J(s))} \operatorname{Res}_{Y^L, Y_{J(s)}} P_{Y_r} [\omega_{L \cup J(s) \cup \{r\}}] =$$

$$= \underbrace{d_{j-1} \cdot \sum_{r \notin J} \sum_{s \in J} \sum_{\substack{|L|=p-j-1 \\ L \cap (J(s) \cup \{r\}) = \phi \\ s \in L}} (-1)^{\sigma(s,J(s))} \operatorname{Res}_{Y^L, Y_{J(s)}} P_{Y_r}[\omega_{L \cup J(s) \cup \{r\}}]}_{(C)} +$$

$$+ \underbrace{d_{j-1} \cdot \sum_{r \notin J} \sum_{s \in J} \sum_{\substack{|L|=p-j-1 \\ L \cap (J \cup \{r\}) = \phi}} (-1)^{\sigma(s,J(s))} \operatorname{Res}_{Y^L, Y_{J(s)}} P_{Y_r}[\omega_{L \cup J(s) \cup \{r\}}]}_{(D)}$$

$$(C) = d_{j-1} \cdot \sum_{r \notin J} \sum_{\substack{|K|=p-j-2 \\ K \cap (J \cup \{r\}) = \phi}} \sum_{s \in J} (-1)^{\sigma(s,J(s))} \operatorname{Res}_{Y^{"K \cup \{s\}"}, Y_{J(s)}} P_{Y_r}[\omega_{T(s) \cup \{r\}}]$$

* (con $T(s) = "K \cup \{s\}" \cup J(s)$ para cada $s \in J$)

$$= d_{j-1} \cdot \sum_{r \notin J} \sum_{\substack{|K|=p-j-2 \\ K \cap (J \cup \{r\}) = \phi}} \sum_{s \in J} \operatorname{Res}_{Y^K, Y_s, Y_{J(s)}} P_{Y_r}[\omega_{K \cup J \cup \{r\}}]$$

y para todos r y K fijos

$$\sum_{s \in J} \operatorname{Res}_{Y^K, Y_s, Y_{J(s)}} P_{Y_r}[\omega_{K \cup J \cup \{r\}}]$$

$$= -\Big(\sum_{s\in J} R_{Y^K, Y_{J(s)}, Y_s}\Big) P_{Y_r} [\omega_{KUJU\{r\}}] = 0$$

por la proposición 1.5.

Luego la sumatoria (C) es nula.

En cuanto a (D), usando P.4, dados $r \notin J$ y L tal que $L \cap (JU\{r\}) = \phi$

$$\mathrm{Res}_{Y^L, Y_{J(s)}} P_{Y_r} [\omega_{LUJ(s)U\{r\}}]$$

$$= \mathrm{Res}_{Y^L, Y_J} P_{Y_r} [\omega_{LUJ(s)U\{r\}}]$$

Ahora bien, considerando ω definido para todos los conjuntos de índices de p elementos, ordenados o no, de la forma alternada explícitada en (**) (pág. 2.39), su borde de Čech es también nulo. Luego

$$0 = (\delta\omega)_{LUJU\{r\}} = \sum_{t\in L} \pm \omega_{L(t)UJU\{r\}} +$$

$$(-1)^{(s,J(s))+|L|} \omega_{LUJ(s)U\{r\}} + (-1)^{|J|+|L|} \omega_{LUJ}$$

Por P.2 $\forall\ t \in L$

$$\operatorname{Res}_{Y^L, Y_J} P_{Y_r} [\omega_{L(t) \cup J \cup \{r\}}] = 0$$

Luego

$$(D) = d_{j-1} \cdot \sum_{r \notin J} \sum_{\substack{|L| = p-j-1 \\ L \cap (J \cup \{r\}) = \phi}} \operatorname{Res}_{Y^L, Y_J} P_{Y_r} [(-1)^j \omega_{L \cup J}]$$

$$= (-1)^j \cdot d_{j-1} \sum_{r \notin J} \sum_{\substack{|L| = p-j-1 \\ L \cap (J \cup \{r\}) = \phi}} \operatorname{Res}_{Y^L, Y_J} [\omega_{L \cup J}]$$

ya que $\omega_{L \cup J} \in \Omega^r_x (* \bigcup_{i \in L \cup J} Y_i)$ y $r \notin L \cup J$.

Luego

$$(D) = (-1)^j\ d_{j-1} \cdot (m-p) \sum_{\substack{|L| = p-j-1 \\ L \cap J = \phi}} \operatorname{Res}_{Y^L, Y_J} [\omega_{L \cup J}] =$$

$$= \frac{(-1)^j\ (m-p)\ d_{j-1}}{c_j}\ (a_j)_J$$

Entonces

$$(\delta b_{j-1})_J = (-1)^j\ \frac{d_{j-1}}{c_j}\ (m-p+j)\ (a_j)_J = (a_j)_J$$

pues

$$\frac{(-1)^j\ d_{j-1}}{c_j} \cdot (m-(p-j)) = (-1)^j\ \frac{c_{j-1}}{(p-j)}\ \frac{(m-(p-j))}{c_j} = 1 \text{ por (1) y (2)}$$

de la página 2.38.

<u>Observación</u> <u>2.2.4</u>:

Es posible explicitar el morfismo de conexión de Mayer-Victoris en el siguiente caso :

Sea $\{Y_1, \ldots, Y_{p+1}\}$ una familia de hipersuperficies en X con intersección completa.

Llamando $Y = \bigcap_{i=1}^{p} Y_i$ e $Y' = \bigcap_{i=1}^{p-1} Y_i \cap Y_{p+1}$,

se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^p_{[Y]} \oplus H^p_{[Y']} \longrightarrow H^p_{[Y \cup Y']} \xrightarrow{m} H^{p+1}_{[Y \cap Y']} \longrightarrow 0$$

Como $Y \cup Y' = Y_1 \cap Y_2 \cap \ldots \cap Y_{p-1} \cap (Y_p \cup Y_{p+1})$, por la proposición 2.2.3 cualquier clase T en $H^p_{[Y \cup Y']}$ es de la forma

$$T \quad \overline{\mathrm{Res}_{Y_1, \ldots, Y_{p-1}, Y_p \cup Y_{p+1}} [\tilde{\omega}]}$$

para alguna forma $\Omega^r(* \bigcup_{i=1}^{p+1} Y_i)$.

Afirmamos que $m(T) = \overline{\mathrm{Res}_{y} [\tilde{\omega}]} =$

$$= \overline{\mathrm{Res}_{Y_1, \quad , Y_p, Y_{p+1}} [\tilde{\omega}]}$$

En efecto, por el corolario 1.2

$$\mathrm{Res}_{Y_1, \ldots , Y_{p-1}, Y_p \cup Y_{p+1}}[\tilde{\omega}] = \mathrm{Res}_{Y_1, \ldots, Y_p} P_{Y_{p+1}}[\tilde{\omega}] -$$

$$- (-1)\, \mathrm{Res}_{Y_1, \ldots, Y_{p-1}, Y_{p+1}} P_{Y_p}[\tilde{\omega}]$$

$$y\ \bar{\partial}\, \mathrm{Res}_{Y_1, \ldots, Y_p} P_{Y_{p+1}}[\tilde{\omega}] = \bar{\partial}((-1)\mathrm{Res}_{Y_1, \ldots, Y_{p-1}, Y_{p+1}} P_{Y_p}[\tilde{\omega}]$$

$$= \mathrm{Res}_{y}[\tilde{\omega}]$$

es decir que desde los cocientes de formas con polos en $\bigcup_{i=1}^{p+1} Y_i$ el morfismo es

$$\bar{\tilde{\omega}} \longmapsto \bar{\tilde{\omega}}$$

CAPITULO III

Demostraremos en este capítulo la inyectividad del morfismo natural

$$\mathcal{H}^p_{[Y]}\ \Omega^r \longrightarrow \mathcal{H}^p_{[\bigcap_{j\in J} Y_j]}\Omega^r\ , \qquad |J| = p$$

en las condiciones del teorema 2.2.3.

Para ello daremos en primer término dos importantes propiedades de las corrientes residuales en el caso de intersecciones completas

Lema 3.1 : (*Ley de transformación*)

Sean $\phi_i, \Psi_i \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, $1 \leq i \leq p$, tales que

$\bigcap\limits_{i=1}^{p} V(\phi_i) = \bigcap\limits_{i=1}^{p} V(\Psi_i) = Y$, $\dim_{\mathbb{C}} Y = n-p$

$$\Psi_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\,\phi_j\ , \quad \text{con } M = ||a_{ij}|| \in \mathcal{O}(C^n)^{p\times p}$$

Entonces, $\forall\ \omega \in \mathcal{D}^{2n-p}\ (\mathbb{C}^n)$

$$\operatorname{Res}_{V(\phi_1),\ldots,V(\phi_p)} \left[\frac{\omega}{\phi_1 \ldots \phi_p} \right] = \operatorname{Res}_{V(\psi_1),\ldots,V(\psi_p)} \left[\frac{\omega .\det M}{\psi_1 \ldots \psi_p} \right]$$

<u>NOTA</u>: La demostración utiliza la ley de transformación para el caso puntual ([G - H] , pág. 657) y la función localmente semimeromorfa residuo fibrado de [C - H] .

<u>Dem</u> :

Por un argumento de partición de la unidad, basta suponer que sop $\omega \subseteq U$, para algún abierto U tal que existe un sistema de coordenadas $(z_1, \ldots , z_n)$ de modo que $\pi_P : Y \cap U \longrightarrow P$ tenga fibra finita en cada punto de $\pi_P\ (Y \cap U)$, para todo P , plano coordenado de dimensión $n - p$.

Podemos suponer además que ω es un monomio, o sea

$$\omega = \alpha(z)\ dz_A \wedge dz_B \wedge d\bar{z}_B \quad , \quad A \cup B = \{1, \ldots n\} \ , \ |A| = p$$

Sea $\pi : Y \cap U \longrightarrow \mathbb{C}_B = \{z/z_i = 0 \quad \forall\, i \in A\}$. Entonces

$$\mathrm{Res}_{V(\phi_1), \ldots, V(\phi_p)} \left[\frac{\omega}{\phi_1 \cdots \phi_p}\right]$$

$$P_Y\left(\mathcal{res}_{\pi, x, \phi}\Big|_\pi \left.\frac{\alpha \cdot dz_A}{\phi_1 \cdots \phi_p}\right|_{\pi^{-1}(\pi(x))} dz_B \wedge d\bar{z}_B\right)$$

Pero

$$\mathcal{res}_{\pi, x, \phi}\Big|_\pi \left(\left.\frac{\alpha \, . \, dz_A}{\phi_1 \cdots \phi_p}\right|_{\pi^{-1}(\pi(x))}\right) = \mathcal{res}_{\pi, x, \psi}\Big|_\pi \left(\left.\frac{\alpha . \det M \, . \, dz_A}{\psi_1 \cdots \psi_p}\right|_{\pi^{-1}(\pi(x))}\right)$$

por la ley de transformación puntual, que vale también para coeficientes C^∞ (por el resultado de la página 163 de [C - H] , cualquier residuo puntual de una forma semimeromorfa es expresable como el residuo puntual de una forma meromorfa obtenida por truncación del desarrollo de Taylor del numerador C^∞).

Si ρ es una función tal que $V(\rho)$ contiene los posibles polos de ambos residuos fibrados, resulta entonces :

$$\mathrm{Res}_{V(\phi_1), \; \ldots \; , \; V(\phi_p)} \left[\frac{\omega}{\phi_1 \; \ldots \phi_p}\right] =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \int_{Y \cap |\rho| > \delta} \mathcal{res}_{\pi, x, \psi|_\pi} \left[\frac{\alpha . \det M . dz_A}{\psi_1 \; \ldots \; \psi_p}\right] dz_B \wedge d\overline{z}_B$$

$$= \mathrm{Res}_{V(\psi_1), \; \ldots \; , \; V(\psi_p)} \left[\frac{\omega \; . \det M}{\psi_1 \ldots \psi_p}\right] \qquad \text{c.q.d.//}$$

Proposición 3.2 :

Sea $U \subseteq X$ abierto, $\{Y_1, \; \ldots \; , Y_p\}$ una familia de hipersuperficies con intersección completa, $\tilde{\omega} \in \Gamma \; (U, \; \Omega^r \; (* \bigcup_{i=1}^{p} Y_i))$.

Si existe $S \in \Gamma_Y(U, {}_p\mathcal{D}^{r,p-1})$ corriente de bigrado (r, p-1) con soporte en $Y = \bigcap_{i=1} Y_i$ tal que

$$\mathrm{Res}_{Y_1, \ldots, Y_p} [\tilde{\omega}] = \bar{\partial} S$$

entonces

$$\mathrm{Res}_{Y_1, \ldots, Y_p} [\tilde{\omega}] = 0$$

Nota: Daremos aquí una demostración esencialmente analítica de este hecho. Puede darse también una prueba"cohomológica" (cf. [S]).

Dem : Por la propiedad 0.3 de "puridad" del soporte, basta probar que $\mathrm{Res}_{Y_1, \ldots, Y_p} [\tilde{\omega}] = 0$ en un entorno de cada punto regular de Y.

Sea entonces $x \in \mathrm{reg}\, Y$ y U un entorno de x tal que

i) $\exists$ $f_i \in \mathcal{O}(U)$, $1 \leq i \leq p$ tales que

$$Y_i \cap U = V\,(f_i)$$

ii) $\exists$ un sistema de coordenadas $(z_1, \dots, z_n)$ en U tal que

$$Y \cap U = \{z_1 = \dots = z_p = 0\}$$

iii) $\exists$ $r_i \in N$, $a_{ij} \in \mathcal{O}(U)$ $1 \leq i,j \leq p$, tales que

$$z_i^{r_i} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot f_j \quad \text{en } U, \quad \forall 1 \leq i \leq p$$

(que existen por el Nullstellensatz)

iv) $\tilde{\omega}|_U \qquad \dfrac{\omega}{f_1 \dots f_p} \qquad \omega \in \Omega^r(U)$

Entonces para toda forma $\alpha \in \mathcal{D}^{2n-p-r}(U)$

$$\mathrm{Res}_{Y_1, \dots, Y_p} [\omega](\alpha) = \mathrm{Res}_{V(f_1), \dots, V(f_p)} \left[\frac{\omega}{f_1 \dots f_p}\right](\alpha) =$$

$$= \mathrm{Res}_{V(z_1), \dots, V(z_p)} \left[\frac{\det(a_{ij}) \cdot \omega}{z_1^{r_1} \dots z_p^{r_p}}\right](\alpha) \quad \text{por el lema 3.1.}$$

Por la propiedad 0.2 podemos suponer que $\alpha \in \mathcal{D}^{n-r,n-p}(U)$, más aún, por la linealidad del residuo podemos suponer que en coordenadas $(z_1, \dots z_n)$, α es un monomio.

Además, por la proposición 0.8, basta considerar el caso en que $\tilde{\omega} \wedge \alpha$ es normal, i.e.

$$= \alpha_1 \, dz_A \wedge d\bar{z}_{p+1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \;, \quad \text{con} \quad |A| = n - r, \quad \alpha_1 \in C^\infty(U)$$

Sea $\omega_1 = \det(a_{ij}) \cdot \omega = \sum_{|B|=r} \omega_B \, dz_B$, con $\omega_B \in \mathcal{O}(U)$, y sea $B_o = I_n - A$. Si notamos $dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$, resulta:

$$\mathrm{Res}_{V(z_1), \quad , V(z_p)}\left[\frac{\omega_1}{z_1^{r_1} \dots z_p^{r_p}}\right](\alpha)$$

$$\mathrm{Res}_{V(z_1), \quad , V(z_p)}\left(\frac{\omega_{B_o} \cdot \alpha_1 \cdot dz \wedge d\bar{z}_{p+1} \wedge \dots d\bar{z}_n}{z_1^{r_1} \dots z_p^{r_p}}\right) =$$

$$= c \cdot \int_{\mathbb{C}^{n-p}} \frac{\partial^{r_1 + \dots + r_p - p}}{\partial z_1^{r_1 - 1} \dots \partial z_p^{r_p - 1}} (\omega_{B_o} \cdot \alpha_1)\Big|_{z_1 = \dots = z_p = 0} dz_{p+1} \wedge d\bar{z}_{p+1} \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \qquad \text{(por 0.8)}$$

Consideremos ahora $\alpha_2 \in C^{\infty}(U)$

$$\alpha_2 = \sum_{|t|<r_1+\dots r_p} \frac{1}{t!} z_1^{t_1} \dots z_p^{t_p} \left.\frac{\partial^t \alpha_1}{\partial z_1^{t_1} \dots \partial z_p^{t_p}}\right|_{z_1 = \dots = z_p = 0}$$

y sea $\tilde{\alpha} = \alpha_2 \, dz_A \wedge d\bar{z}_{p+1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$; como α_2 es holomorfa respecto de las variables $z_1, \dots, z_p$

$$\bar{\partial}(\tilde{\alpha}) = 0$$

Además, como

$$\left.\frac{\partial^{r_1+ \dots + r_p - p} \alpha_1}{\partial z_1^{r_1-1} \dots \partial z_p^{r_p-1}}\right|_{z_1= \dots z_p=0} = \left.\frac{\partial^{r_1+ \dots r_p-p} \alpha_2}{\partial z_1^{r_1-1} \dots \partial z_p^{r_p-1}}\right|_{z_1= \dots z_p=0}$$

y $\tilde{\alpha}$ tiene soporte compacto en las variables $(z_{p+1}, \dots, z_n)$,

$$\mathrm{Res}_{Y_1, \ldots, Y_p}[\tilde{\omega}](\alpha) = \mathrm{Res}_{Y_1,\ldots,Y_p}[\tilde{\omega}](\tilde{\alpha}) \qquad (1)$$

(cf. [C - H] , pág. 163).

Consideremos ahora la corriente S tal que sop $S \subseteq Y$ y $\mathrm{Res}_{Y_1\ldots Y_p}[\tilde{\omega}] = \bar{\partial} S$; definamos S_1, extensión de S que se aplica sobre formas regulares β tales que sop $\beta \cap$ sop $S = K$ es compacto.

Sea $\phi \in \mathcal{D}^0$ que cumpla $\phi \equiv 1$ en un entorno de K(*). Definimos

$$S_1(\beta) \qquad S(\phi \,.\, \beta)$$

Esta extensión verifica:

i) es independiente de la elección de ϕ.
(Si ψ verifica (*), sop $(\psi - \phi) \cap K = \phi$ => sop $((\psi-\phi).\beta) \cap$ sop $S = \phi$ => $S(\psi.\beta) = S(\phi.\beta)$)

ii) Coincide con S cuando sop β es compacto.

iii) Si β es tal que sop $\beta \cap Y$ es compacto,

$$\mathrm{Res}_{Y_1 \ldots Y_p} [\tilde{\omega}](\beta) = S_1 (\bar{\partial} \beta)$$

En efecto:

$$S_1 (\bar{\partial}\beta) = S (\phi . \bar{\partial}\beta) = S (\bar{\partial}(\phi . \beta)) \pm S(\bar{\partial}\phi . \beta) =$$

$$= \mathrm{Res}_{Y_1 \ldots Y_p} [\tilde{\omega}](\phi . \beta) = \mathrm{Res}_{Y_1 \ldots Y_p} [\tilde{\omega}] (\beta)$$

Luego, retomando en (1)

$\mathrm{Res}_{Y_1 \ldots Y_p} [\tilde{\omega}](\alpha) = S_1(\bar{\partial}\tilde{\alpha}) = 0$, lo cual concluye la demostración.//

<u>Teorema</u> <u>3.3</u> : Dado Y un conjunto analítico de codimensión p; $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots , Y_m\}$ una familia de hipersuperficies en X tal que

$$Y = \bigcap_{i=1}^{m} Y \qquad \dim_{\mathbb{C}} \bigcap_{j \in J'} Y_j = n - p$$

para todo conjunto $J' \subseteq I_m$ de cardinal p.

Entonces, dado $J \subseteq I_m$, $|J| = p$, la aplicación

$$\mathcal{H}^p_{[Y]}\,\Omega^r \xrightarrow{\Phi} \mathcal{H}^p_{[\bigcap_{j\in J} Y_j]}\,\Omega^r \qquad \text{es inyectiva}$$

Dem:

Por el teorema 2.2.3 , toda clase en $\mathcal{H}^p_{[Y]}\,\Omega^r$ es la clase de un residuo $\mathrm{Res}_{Y^J}[\omega_J]$, para algún cociclo $(\omega_{J'})_{|J'|=p}$ de formas con polos en p hipersuperficies de la familia $\mathcal{Y}$.

Luego

$$\overline{\mathrm{Res}_{Y^J}[\omega_J]} \overset{\Phi}{\longmapsto} \overline{\mathrm{Res}_{Y^J}[\omega_J]}$$

o, desde los cocientes de Čech de formas con polos,

$$\overline{(\omega_{J'})_{|J'|=p}} \longmapsto \overline{\omega_J}$$

Luego, si $\overline{\mathrm{Res}_{Y^J}[\omega_J]} = 0$ en $\mathcal{H}^p_{[\bigcap_{j\in J} Y_j]}\,\Omega^r$, existe $S \in {}'\mathcal{D}^{r,p-1}$ con soporte en $\bigcap_{j\in J} Y_j$ tal que

$$\mathrm{Res}_{Y^J}[\omega_J] = \bar{\partial}\, S$$

Pero entonces, por la proposición 3.2

$$\mathrm{Res}_{Y^J}[\omega_J] = 0$$

con lo cual, su clase en $H^P_{[Y]}\ \Omega^r$ es también nula.//

BIBLIOGRAFIA

[B] Bredon, G. Sheaf Theory. Mc. Graw Hill Series in Higher Mathematics, 1967.

[C-H] Coleff, N. - Herrera, M. Les Courants Résiduels Associés à une Forme Méromorphe, Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics 633, 1978.

[C-H-L] Coleff, N. - Herrera, M. - Lieberman, D. Algebraic Cycles as Residues of Meromorphic Forms, Mathematische Annalen, 73-87, Springer-Verlag, 1980.

[F-R] Forster, O. - Ramspott, S. Uber die Darstellungen analytischer Mengen. Bayer Akad. Wiss. Math.- Natur Kl. Abh. 3, 89-99, 1964.

[G] Godement, Roger : Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux, Hermann, 1958.

[H] Herrera, M. Integration on a Semianalytic Set, Bull Soc. Math. France 94, 141-180, 1966.

[HI] Hironaka, H. : The resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. Math. 19, 109-326, 1964.

[L] Lojasiewicz, S. Sur le problème de la division, Studia Mathematica, 87-136, 1959.

[M] Malgrange, B. Ideals of differentiable functions, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay and Oxford University Press, 1966.

[ME] Mebkhout, Z. Cohomologie Locale des Espaces Analytiques Complexes, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VII, 1979.

[R] Ramis, J. P. Variations Sur le Thème "GAGA", Séminaire Pierre Lelong - Henri Skoda (Analyse) Année 1976-77, 228-277, Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics 694, 1978.

[S] Sessa, C. Sobre levantamiento de datos de Weil generalizados, sin publicar.

Alicia M. Dickenstein

M. HERRERA