Convergencia en casi todo punto de promedios formados con grupos multiparamétricos de transformaciones que preservan la medida

Becker, María Elena

1980

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

CONVERGENCIA EN CASI TODO PUNTO DE PROMEDIOS FORMADOS CON GRUPOS MULTIPARAMETRICOS DE TRANSFORMACIONES QUE PRESERVAN LA MEDIDA

por

María Elena Becker

Tesis
presentada para optar al título de
Doctora en Ciencias Matemáticas

1980

INTRODUCCION

La teoría ergódica, hoy una rama de la teoría de la medida y del análisis funcional, ha tenido su origen en la mecánica estadística. Como es bien sabido, la evolución de un sistema mecánico con s grados de libertad está regida por las ecuaciones de Hamilton:

$$(1)\qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1,2,\ldots,s),$$

donde las q_i representan las coordenadas generalizadas y las p_i los momentos o impulsos generalizados del sistema, en tanto que la función $H = H(q_1,\ldots,q_s, p_1,\ldots,p_s)$ llamada la *función de Hamilton* o Hamiltoniano del sistema es una integral del movimiento; es decir, que a lo largo de cualquier trayectoria $q = q(t)$, $p = p(t)$, se verifica $H(q,p) = \text{cte}$. (por brevedad escribimos $q = (q_1,\ldots,q_s)$, $p = (p_1,\ldots,p_s)$). Cada estado del sistema está representado por un punto (q,p) perteneciente a cierto subconjunto Γ del espacio euclideano R^{2s} llamado el *espacio de las fases*, y la evolución del sistema en el tiempo se describe por la aplicación

$$t \to (q(t),p(t))$$

de R en Γ, que representa una solución del sistema (1).

Para cada punto $x_0 = (q_0, p_0) \in \Gamma$, sea

$$x(t) = (q(t), p(t))$$

la única solución del sistema (1) que satisface

$$x(0) = (q(0), p(0)) = x_0 = (q_0, p_0).$$

Si para cada $t \in R$, y cada $x_0 \in \Gamma$ definimos

$$\theta_t(x_0) = x(t)$$

es inmediato comprobar que la familia de aplicaciones $(\theta_t, t \in R)$ de Γ en sí mismo forma un grupo en el siguiente sentido:

$$\theta_0 = id_\Gamma \quad , \quad \theta_t \theta_s = \theta_{t+s} \ .$$

Además, un teorema clásico de Liouville afirma que para cada $t \in R$, la transformación $\theta_t : \Gamma \to \Gamma$ preserva la medida de Lebesgue dentro de Γ; es decir, que para cada conjunto medible $E \subset \Gamma$, se cumple $m(\theta_t(E)) = m(E)$, donde m denota la medida de Lebesgue.

Puesto que la trayectoria real del sistema se realiza sobre una hipersuperficie Σ_c definida por la ecuación $H(q,p) = c$, nos vemos conducidos a estudiar cómo se comportan las trayectorias sobre dicha hipersuperficie, para lo cual resulta importante observar que como consecuencia del teorema de Liouville, el grupo (θ_t) preserva la medida μ definida sobre Σ_c por medio de la fórmula

$$\mu(E) = \int_E \frac{1}{|\text{grad } H|} \, d\sigma_c \quad ,$$

donde $d\sigma_c$ representa el elemento de área de la hipersuperficie Σ_c. Es decir, que para cada conjunto medible E contenido en Σ_c, se tiene

$$\mu(\theta_t(E)) = \mu(E) \qquad\qquad (t \in R)$$

La "hipótesis ergódica" introducida por Boltzman se puede expresar matemáticamente diciendo que para cualquier función $f(x)$ integrable con respecto a μ sobre Σ_c, se tiene

$$(2) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta_t x)dt = \frac{1}{\mu(\Sigma_c)} \int_{\Sigma_c} f \, d\mu .$$

Pero la corrección de esta hipótesis nunca fue demostrada con absoluta generalidad. Sim embargo, en 1931 el matemático norteamericano George Birkhoff probó que el miembro izquierdo de (2) existe en casi todo punto de Σ_c bajo la hipótesis de que f sea integrable; es decir,

$$\int_{\Sigma_c} |f(x)|\mu(dx) < \infty.$$

Posteriormente, sobre la base del teorema de Birkhoff, el matemático ruso A.I.Khinchin probó que la hipótesis ergódica equivale a afirmar que si E es un subconjunto de Σ_c *invariante* bajo el grupo (θ_t) en el sentido de que $\mu(\theta_t(E)\Delta E) = 0$ para todo t, entonces $\mu(E) = 0$ ó $\mu(\Sigma_c - E) = 0$. Un grupo (θ_t) que posea esta propiedad se llama actualmente un *"grupo ergódico"* (antes se decía "métricamente transitivo") con respecto a la medida invariante μ.

Además del teorema de Birkhoff, los teoremas fundamentales en teoría ergódica, que datan de 1931-32 son debidos a Koopman, Carleman y von Neumann. Este último autor prueba que los promedios

$$A_T\, f(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(\theta_t x)dt$$

donde f es una función de cuadrado integrable sobre un espacio de medida finita X y $(\theta_t,\ t \in R^n)$ un grupo de transformaciones de X en sí mismo que preservan la medida, convergen en $L^2(X)$. Una demostración de este hecho puede verse, por ejemplo, en [3, Cap. VIII].

Norbert Wiener generaliza estos resultados reemplazando el grupo (θ_t) por un grupo abeliano dependiente de más de un parámetro. De ellos, mencionamos el siguiente teorema, llamado luego *Teorema ergódico multiparamétrico de Wiener* y cuya demostración puede verse en [8].

TEOREMA. Sea $(\theta_t,\ t \in R^n)$ un grupo de transformaciones de un espacio de medida finita X en sí mismo que preservan la medida. Si $f \in L^1(X)$, entonces existe, salvo eventualmente en un conjunto de medida nula

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{m(B_r)} \int_{|t|\leq r} f(\theta_t x)dt,$$

donde B_r denota la bola de radio r en R^n.

En la primera parte de este trabajo se da una generalización del teorema recién enunciado aplicando los métodos introducidos por Calderón [1] en teoría ergódica y se prueban algunos resultados relativos a las propiedades de la función límite. También se muestra que los mismos métodos pueden ser utilizados para el caso de semigrupos de transformaciones.

La segunda parte está dedicada a dar una versión contínua del siguiente *Teorema de Chacón-Ornstein,* para cuya demostración remitimos al lector a [2].

TEOREMA. Sea T un operador lineal y positivo definido sobre la clase L^1 de un espacio de medida positiva y tal que $\|Tf\|_1 \leq \|f\|_1$. Entonces si f y p son funciones de L^1 y p es no negativa, el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} T^k f}{\sum_{k=0}^{n} T^k p}$$

existe y es finito en casi todo punto del conjunto donde $T^k\ p > 0$ para algún k.

Más precisamente, se estudia la convergencia de los cocientes

$$R_\alpha(f,p)(x) = \frac{\int_{B_\alpha} f(\theta_t x)dt}{\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt}$$

cuando $\alpha \to \infty$, donde $(\theta_t,\ t \in R^n)$ es un grupo de transformaciones de un espacio de medida σ-finita X en sí mismo que preservan la medida, f y p son funciones de $L^1(X)$ y p es no negativa.

AGRADECIMIENTOS

La autora desea expresar su agradecimiento al Profesor Dr. Norberto Fava, por haberla intro ducido en el tema de esta tesis y sugerirle las cuestiones que en ella se tratan.

1. PRELIMINARES

Sea (X,Σ,μ) un espacio de medida σ-finita. Por un grupo de transformaciones dependientes de n parámetros que preservan la medida μ, entenderemos un sistema de aplicaciones $(\theta_t,\ t \in R^n)$ de X en sí mismo, con las siguientes propiedades:

(i) $\theta_t(\theta_s x) = \theta_{t+s}x$; $\theta_0 x = x$, para todo t y s en R^n y todo x en X.

(ii) Para todo subconjunto medible E de X, $\theta_t(E)$ es medible y su medida es igual a la medida de E, para cualquier t en R^n.

(iii) Para toda función f medible sobre X, la función $f(\theta_t x)$ es medible en el espacio producto $R^n \times X$, considerando en R^n la medida de Lebesgue, a la que siempre denotaremos por m.

En virtud de (i), θ_t es biyectiva para todo t en R^n y $\theta_t^{-1} = \theta_{-t}$.

Si f es una función integrable sobre X, o bien es medible y no negativa, notaremos

$$\int_X f(x)\, d\mu = \int f(x)\, dx.$$

Los lemas que damos a continuación serán de uso frecuente en este trabajo. Comenzamos con el siguiente

LEMA 1.1. Si $f(x) = g(x)$ p.p. entonces

(i) para cada t en R^n se cumple $f(\theta_t x) = g(\theta_t x)$ para casi todo x.

(ii) para casi todo x, $f(\theta_t x) = g(\theta_t x)$ para casi todo t.

DEMOSTRACION. Llamemos E al conjunto de los x tales que $f(x)$ es distinto de $g(x)$. Entonces el conjunto de los x para los cuales $f(\theta_t x)$ es distinto de $g(\theta_t x)$ coincide con $\theta_t^{-1}(E)$ para todo t en R^n, y puesto que $\mu(\theta_t^{-1}(E)) = \mu(E) = 0$, (i) queda probado.

Para demostrar la segunda afirmación, consideremos en $R^n \times X$ el conjunto P formado por todos los pares (t,x) tales que $f(\theta_t x)$ es distinto de $g(\theta_t x)$ y sus secciones

$P_x = \{t:(t,x) \in P\}$; $P^t = \{x:(t,x) \in P\}$.

Entonces $P^t = \theta_t^{-1}(E)$ y tomando en el espacio $R^n \times X$ la medida producto $\rho = m \otimes \mu$, tenemos

$$\rho(P) = \int_{R^n} \mu(P^t)dt = 0$$

Por otra parte,

$$\rho(P) = \int m(P_x)dx,$$

de donde $m(P_x) = 0$ para casi todo x, y el lema queda probado.

LEMA 1.2. Si f(x) es medible y no negativa, entonces

$$\int f(\theta_t x)dx = \int f(x)dx, \text{ para todo t en } R^n.$$

DEMOSTRACION. Si f(x) es la función característica de un conjunto medible E, $f(x) = \chi_E(x)$, entonces

$f(\theta_t x) = \chi_E(\theta_t x) = \chi_{\theta_t^{-1}(E)}(x)$, y por lo tanto

$$\int f(\theta_t x)dx = \mu(\theta_t^{-1}(E)) = \mu(E) = \int f(x)dx,$$

luego, también vale la igualdad de las integrales cuando f es simple y por Beppo-Levi para f medible y no negativa.

COROLARIO. Si f es integrable sobre X, entonces

$$\int f(\theta_t x)dx = \int f(x)dx, \text{ para todo t en } R^n.$$

LEMA 1.3. Si f es medible y no negativa, entonces para todo subconjunto medible E de X, vale

$$\int_{\theta_t^{-1}(E)} f(x)dx = \int_E f(\theta_{-t} x)dx, \text{ para todo t en } R^n.$$

DEMOSTRACION. Si f es la función característica de un conjunto medible F, entonces

$$\int_{\theta_t^{-1}(E)} f(x)dx = \mu(\theta_t^{-1}(E) \cap F) = \mu(E \cap \theta_t(F)) =$$

$$= \int_E f(\theta_{-t}x)dx \ .$$

Se sigue que la igualdad también es válida para funciones características y el lema concluye aplicando Beppo-Levi.

COROLARIO. El lema 3.1 es válido para f en $L^1(\mu)$.

LEMA 1.4. Si f y g son funciones medibles no negativas, entonces, para todo t en R^n se verifica

$$\int f(\theta_t x)\ g(x)dx = \int f(x)\ g(\theta_{-t}x)dx.$$

DEMOSTRACION. En virtud del lema 1.3., vale la igualdad cuando $f(x) = \chi_E(x)$, y la demostración sigue con los mismos argumentos empleados en dicho lema.

COROLARIO. Si f y g son funciones de $L^p(\mu)$ y $L^q(\mu)$ respectivamente, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$\int f(\theta_t x)\ g(x)dx = \int f(x)\ g(\theta_{-t}x)dx,$$

para todo t en R^n.

LEMA 1.5. Si $f(x)$ pertenece a $L^p(\mu)$ para algún $p \geq 1$, entonces para casi todo x, $f(\theta_t x)$ es integrable con respecto a t sobre cada conjunto de medida finita $F \subset R^n$.

DEMOSTRACION. Si $F \subset R^n$ es de medida finita, vemos que

$$\int dx \int_F |f(\theta_t x)|^p \, dt = \int_F dt \int |f(\theta_t x)|^p \, dx =$$

$$= m(F) \|f\|^p_{L^p(\mu)} .$$

Entonces, para casi todo x, $\int_F |f(\theta_t x)|^p \, dt < \infty$, luego, $f(\theta_t x)$ resulta integrable sobre F, para casi todo x.

Diremos que una función medible $\ell(x)$ es *invariante* si para cada t en R^n, $\ell(\theta_t x) = \ell(x)$, para casi todo x. Observamos que si ℓ es invariante, entonces para casi todo x, $\ell(\theta_t x) = \ell(x)$, para casi todo t.

Un subconjunto medible E de X se dice *invariante* cuando su función característica, $\chi_E(x)$, lo es. Si E_1 y E_2 son invariantes, entonces para todo t en R^n el conjunto de los x tales que

$$\text{máximo}\{\chi_{E_1}(\theta_t x); \chi_{E_2}(\theta_t x)\} \neq \text{máximo}\{\chi_{E_1}(x); \chi_{E_2}(x)\}$$

está contenido en

$$\{x:\chi_{E_1}(\theta_t x) \neq \chi_{E_1}(x)\} \cup \{x:\chi_{E_2}(\theta_t x) \neq \chi_{E_2}(x)\};$$

de lo que deducimos que

$$\chi_{E_1 \cup E_2}(x) = \text{máximo}\{\chi_{E_1}(x); \chi_{E_2}(x)\}$$

es invariante y por consiguiente $E_1 \cup E_2$ lo es.
En forma análoga podemos probar que $E_1 \cap E_2$ es invariante.
También es fácil ver que si una sucesión de funciones invariantes converge en casi todo punto, su límite es invariante. En particular, el límite de sucesiones monótonas de funciones invariantes también lo es. Por consiguiente, las uniones e intersecciones numerables de conjuntos invariantes conservan esta propiedad.
Finalmente, observamos que el complemento de un conjunto invariante, es invariante. Resumimos lo anterior diciendo que los subconjuntos invariantes de X forman una σ-álgebra, a la que llamaremos $\mathscr{I}$.
Si una función ℓ es invariante, es inmediato verificar que es medible respecto de $\mathscr{I}$. Recíprocamente, si ℓ es medible respecto de $\mathscr{I}$, entonces ℓ es el límite, en casi todo punto, de una sucesión de funciones simples e invariantes y por lo tanto ℓ resulta invariante. Luego, podemos afirmar que una función es invariante si y sólo si es medible con respecto a la σ-álgebra $\mathscr{I}$ formada por todos los subconjuntos invariantes del espacio X.
Hay otra forma de describir a los conjuntos invariantes; a

saber, un conjunto medible $E \subset X$ es invariante si y sólo si para cada $t \in R^n$ se cumple

$$\mu((\theta_t E) \triangle E) = 0,$$

donde $\triangle$ es la diferencia simétrica, Es fácil comprobar la equivalencia de ambas definiciones.

2. GRUPOS DE TRANSFORMACIONES QUE PRESERVAN LA MEDIDA

a) *Una generalización del teorema ergódico multiparamétrico de Wiener.*

Sea $(U_\alpha, \alpha > 0)$ una familia creciente de subconjuntos de R^n que contienen al origen y dependen del parámetro real y positivo α; es decir, supondremos que si $0 < \alpha < \beta$, entonces $U_\alpha \subset U_\beta$ y además, $0 \in U_\alpha$ para cualquier $\alpha > 0$.
Para cada función f tal que $f \in L^p(\mu)$ para algún $p \geq 1$, podemos formar los promedios

$$(1) \quad A_\alpha f(x) = \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} f(\theta_t x)dt \quad .$$

En esta sección daremos condiciones suficientes para la convergencia en casi todo punto de X de estos promedios cuando $\alpha \to \infty$ y f es una función de $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Más precisamente, probaremos que (1) converge en casi todo punto a un límite finito $f^*(x)$ si las siguientes condiciones se satisfacen:

(A) El operador maximal de Hardy-Littlewood m asociado a la familia (U_α), que se define por

$$mg(t) = \sup_{\alpha>0} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} |g(t+s)|ds$$

es de tipo débil (1,1), esto es, existe una constante positi va C tal que

$$m(\{t: mg(t) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|g\|_{L^1(R^n)},$$

para todo número real $\lambda > 0$.

(B) Para cada t en R^n

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{m((t+U_\alpha) \vartriangle U_\alpha)}{m(U_\alpha)} = 0,$$

donde $\vartriangle$ denota la diferencia simétrica.

El hecho de que (A) se verifica cuando U_α es la bola de radio α centrada en el origen, es el contenido del teorema maximal de Hardy-Littlewood. El lema de cubrimiento de Rivière [7] cuya demostración incluímos en un apéndice al final del capí tulo, afirma que si los conjuntos U_α son abiertos y satisfacen

$$m(U_\alpha - U_\alpha + U_\alpha) \leq \text{const. } m(U_\alpha),$$

donde $U_\alpha - U_\alpha + U_\alpha$ denota el conjunto de todos aquellos puntos que pueden ser representados en la forma u - v + w, con u,v y w en U_α, la validez de (A) queda garantizada.

Se comprueba fácilmente que cuando U_α es la bola de radio α, la condición (B) se satisface. Más aún, se puede ver en [5] que esta condición se verifica si (U_α) es una familia substancial de regiones convexas.

Definimos el *operador ergódico maximal* asociado a (U_α) por

$$Mf(x) = \sup_{\alpha>0} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} |f(\theta_t x)|dt,$$

y siguiendo las ideas introducidas por Calderón en [1] probamos el siguiente teorema.

TEOREMA 2.1. Si la familia (U_α) satisface (A), entonces existe una constante positiva C, tal que, para cada $\lambda > 0$

$$\mu(\{x: Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

DEMOSTRACION. Para cada función $g(t)$ integrable sobre R^n y para cada entero positivo k, escribimos

$$m_k\, g(t) = \sup_{\delta(U_\alpha)<k} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} |g(t+s)|ds$$

si $|t| \leq k$, $m_k\, g(t) = 0$ en otro caso, donde $\delta(U_\alpha)$ denota el diámetro de U_α, mientras que

$$mg(t) = \sup_{\alpha>0} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} |g(t+s)|ds,$$

de modo que

$$m_k\, g(t) \le m_{k+1}\, g(t) \quad y \quad \lim_{k\to\infty} m_k\, g(t) = mg(t)\,.$$

De la condición (A) se deducen las desigualdades

$$m(\{t : m_k\, g(t) > \lambda\}) \le m(\{t : mg(t) > \lambda\})$$

$$\le \frac{C}{\lambda}\, \|g\|_{L^1(R^n)} \quad .$$

Definimos la función

$$F(t,x) = \begin{cases} f(\theta_t x) & \text{si} \quad |t| \le 2k \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 2k\,. \end{cases}$$

Se sigue del lema 1.5 que $F(t,x)$ es una función integrable de t para casi todo x. Para un $\lambda > 0$ dado, consideramos el conjunto E de todos los pares (t,x) tales que $m_k\, F(t,x) > \lambda$ y sus secciones

$$E_t = \{x : (t,x) \in E\}; \qquad E^x = \{t : (t,x) \in E\}.$$

Observamos que para $|t| \le k$, $m_k\, F(t,x) = m_k\, F(0,\theta_t x)$, y entonces $E_t = \theta_t^{-1}(E_0)$ para $|t| \le k$, mientras que $E_t = \emptyset$ si $|t| > k$. Si, como antes, ρ denota el producto de la medida de Lebesgue con la medida μ dada sobre X, entonces

$$\rho(E) = \int_{R^n} \mu(E_t)dt = \int_{|t|\leq k} \mu(E_t)dt =$$

$$= \omega_n\ k^n\ \mu(E_0),$$

donde ω_n es la medida de la bola unitaria de R^n.

Por otra parte

$$\rho(E) = \int m(E^x)dx \leq \int dx\ \frac{C}{\lambda} \int_{|t|\leq 2k} |f(\theta_t x)|dt$$

$$= \frac{C}{\lambda} \int_{|t|\leq 2k} dt \int |f(\theta_t x)|dx = \frac{C}{\lambda}\,\omega_n(2k)^n \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

Por lo tanto

$$\mu(E_0) \leq \frac{2^n C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

Puesto que

$$E_0 = \{x: \sup_{\delta(U_\alpha)<k} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} |f(\theta_s x)|ds > \lambda\},$$

el teorema 2.1 se obtiene haciendo $k \to \infty$.

COROLARIO. Mf es tipo fuerte (p, p) para todo p > 1, esto es, para cada p existe una constante positiva C_p tal que

$$\|Mf\|_{L^p(\mu)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mu)} .$$

DEMOSTRACION. Es fácil ver que

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty ,$$

y la desigualdad para todo p es una consecuencia del teorema de interpolación de Marcinkiewicz.

El siguiente teorema representa una generalización del teorema ergódico multiparamétrico de Wiener.

TEOREMA 2.2. Si la familia de regiones U_α satisface las condiciones (A) y (B), entonces para cada f en $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, los promedios

$$A_\alpha f(x) = \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} f(\theta_t x)dt$$

convergen en casi todo punto cuando $\alpha \to \infty$.

DEMOSTRACION. Consideremos el conjunto de todas las funciones h(x) que pueden ser representadas en la forma

$$h(x) = g(x) - g(\theta_s x),$$

donde g es una función acotada con soporte de medida finita y s un punto cualquiera de R^n. Para una función h de esta forma, tenemos

$$A_\alpha\ h(x) = \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} h(\theta_t x)dt = \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} \{g(\theta_t x) - g(\theta_{t+s} x)\}dt$$

$$= \frac{1}{m(U_\alpha)} \{\int_{U_\alpha} g(\theta_t x)dt - \int_{s+U_\alpha} g(\theta_t x)dt\} .$$

Entonces

$$|A_\alpha\ h(x)| \leq \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha \Delta (s+U_\alpha)} |g(\theta_t x)|dt .$$

Como $g(\theta_t x)$ es una función acotada de t para casi todo x, y (U_α) satisface (B), vemos que $A_\alpha\ h(x) \to 0$, cuando $\alpha \to \infty$, para casi todo x.

Si $\ell(x)$ es una función invariante de $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, entonces para casi todo x, $\ell(\theta_t x) = \ell(x)$ para casi todo t. Luego,

$$A_\alpha\ \ell(x) = \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} \ell(\theta_t x)dt = \ell(x),$$

para todo α, en casi todo punto de X.

Así concluimos que los promedios $A_\alpha\ f(x)$ convergen para casi todo x si f está en el espacio vectorial S generado por las funciones h y ℓ. Nuestro próximo paso será probar que S es denso en $L^p(\mu)$. Para este propósito, supongamos que una cierta función $f_0(x)$ en $L^q(\mu)$ es ortogonal a todas las funciones de S, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\int h(x)\ f_0(x)dx = \int \{g(x)-g(\theta_s x)\}\ f_0(x)dx$$

$$= \int g(x)\{f_0(x)-f_0(\theta_{-s}x)\}dx = 0,$$

para cualquier g acotada con soporte de medida finita y cualquier s en R^n. Concluimos que f_0 es invariante. Luego, si

$$\chi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f_0(x) \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad f_0(x) < 0, \end{cases}$$

entonces $|f_0|^{\frac{q}{p}}.\ \chi_0$ es una función de S y por lo tanto

$$\int f_0 . |f_0|^{\frac{q}{p}}\ \chi_0\ dx = \int |f_0|^{\frac{q}{p}+1}\ dx = 0,$$

lo que prueba la densidad de S en $L^p(\mu)$.

La convergencia en casi todo punto de $A_\alpha f(x)$ cuando f es una función de S y el hecho de que Mf es de tipo fuerte (p, p), aseguran la convergencia de $A_\alpha\ f(x)$ para cualquier f de $L^p(\mu)$, en casi todo x. En efecto, si para g en $L^p(\mu)$ escribimos

$$\bar{M}g(x) = \lim_{\alpha\to\infty} \sup\ A_\alpha\ g(x) - \lim_{\alpha\to\infty} \inf\ A_\alpha\ g(x),$$

entonces

(i) $\overline{M}(g_1 + g_2) \leq \overline{M}g_1 + \overline{M}g_2$

(ii) $\overline{M}g \leq 2\, Mg$

(iii) $\overline{M}g = 0$ p.p. si $g \in S$.

Sea ahora f en $L^p(\mu)$ y (f_n) una sucesión de funciones de S tal que $\|f_n - f\|_{L^p(\mu)} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como

$$\overline{M}f \leq \overline{M}(f-f_n) + \overline{M}f_n = \overline{M}(f-f_n) \qquad \text{p.p.,}$$

para todo número real $\lambda > 0$ tenemos

$$\mu(\{\overline{M}f > \lambda\}) \leq \mu(\{\overline{M}(f-f_n) > \lambda\})$$

$$\leq \mu(\{M(f-f_n) > \lambda/2\}) \leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^p C_p \|f-f_n\|_p^p,$$

y haciendo $n \to \infty$, vemos que $\overline{M}f = 0$ en casi todo punto. Puesto que $L^p \cap L^1$ es denso en L^1 y

$$\mu(\{Mf > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mu)}$$

para todo $\lambda > 0$, concluimos, por un razonamiento análogo al recién hecho, que los promedios $A_\alpha f(x)$ convergen a un límite $f^*(x)$ en casi todo punto x cuando $\alpha \to \infty$, para cualquier $f \in L^1(\mu)$, lo que finaliza la demostración del teorema 2.2.

b) *Propiedades de la función límite f^*.*

Comenzaremos con el siguiente teorema.

TEOREMA 2.3. La función límite f^* posee las siguientes propiedades:

(i) $\|f^*\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}$, $\quad 1 \leq p < \infty$.

(ii) La correspondencia $f \to f^*$ es una aplicación lineal .

(iii) f^* es invariante .

(iv) $A_\alpha f$ converge a f^* en $L^p(\mu)$ para $1 < p < \infty$.
Si $\mu(X) < \infty$, entonces vale la misma afirmación para $p = 1$, y en este caso

$$\int_E f^* \, d\mu = \int_E f \, d\mu, \quad \text{para todo } E \in \mathcal{J}$$

DEMOSTRACION. Aplicando la desigualdad generalizada de Minkowsky, tenemos

$$\{\int |A_\alpha f(x)|^p\, dx\}^{\frac{1}{p}} = \{\int |\frac{1}{m(U_\alpha)}\int_{U_\alpha} f(\theta_t x)dt|^p\, dx\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{1}{m(U_\alpha)}\int_{U_\alpha} dt\{\int |f(\theta_t x)|^p\, dx\}^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p(\mu)},$$

y en virtud del lema de Fatou se obtiene (i). Para probar (iii) mostraremos en primer lugar que f^* es invariante cuando f en $L^p(\mu)$ es acotada. En este caso, para todo t en R^n, tenemos

$$|f^*(\theta_t x)-f^*(x)| = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{m(U_\alpha)} |\int_{U_\alpha} f(\theta_{t+s}x)ds - \int_{U_\alpha} f(\theta_s x)ds|$$

$$\leq \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha \triangle (t+U_\alpha)} |f(\theta_s x)|ds = 0,$$

para casi todo x, en virtud de (B). Tomemos ahora una función cualquiera f de $L^p(\mu)$ y una sucesión (f_n) de funciones acotadas que convergen a f en norma p. Entonces, para todo t en R^n

$$\|f^*(\theta_t x) - f^*(x)\|_{L^p(\mu)}$$

$$\leq \|f^*(\theta_t x)-f_n^*(\theta_t x)\|_{L^p(\mu)}+\|f_n^*(\theta_t x)-f_n^*(x)\|_{L^p(\mu)}+\|f_n^*(x)-f^*(x)\|_{L^p(\mu)}$$

$$= 2\,\|f^*-f_n^*\|_{L^p(\mu)} = 2\|(f-f_n)^*\|_{L^p(\mu)}$$

$$\leq 2\,\|f-f_n\|_{L^p(\mu)},$$

y (iii) sigue haciendo $n \to \infty$.

Cuando $1 < p < \infty$, $Mf \in L^p(\mu)$ y el teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue nos asegura la convergencia de $A_\alpha f$ a f^* en la norma de L^p. Por último si $\mu(X) < \infty$, es inmediato verificar que $A_\alpha f$ converge a f^* en $L^1(\mu)$ cuando f es acotada. En virtud de (i) y de la densidad en $L^1(\mu)$ de estas funciones, se deduce la convergencia en norma uno de $A_\alpha f$ a f^*, para toda f integrable. Además, puesto que

$$\int_E A_\alpha f(x)dx = \int_E f(x)dx,$$

para todo $\alpha > 0$ y todo $E \in \mathcal{J}$, tenemos

$$\int_E f^*(x)dx = \int_E f(x)dx,$$

y el teorema 2.3 queda demostrado.

Definimos ahora los promedios

$$T_\alpha f(x) = \frac{1}{m(B_\alpha)} \int_{B_\alpha} f(\theta_t x)dt ,$$

donde B_α es la bola de centro en el origen y radio α, y $f \in L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. En virtud del teorema 2.2 sabemos que $T_\alpha f$ converge en casi todo punto, cuando $\alpha \to \infty$, a un límite finito que llamaremos f^{**}.

Observamos que si ℓ es invariante, entonces

$$\ell^{**}(x) = \ell(x) = \ell^{*}(x) \qquad \text{p.p.}$$

También vemos que para las funciones h(x) de la forma

$$h(x) = g(x) - g(\theta_s x),$$

donde g es acotada con soporte de medida finita, vale

$$h^{**}(x) = 0 = h^{*}(x) \qquad \text{p.p.}$$

Concluimos que $A_\alpha f$ y $T_\alpha f$ convergen en casi todo punto a un mismo límite que seguiremos llamando f^*, para toda f en S, siendo S el espacio vectorial introducido en la demostración del teorema 2.2. Si f pertenece a $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$ y (f_n) es una sucesión de funciones de S que convergen a f en $L^p(\mu)$, tenemos

$$\|f^*-f^{**}\|_{L^p(\mu)} \leq \|f^*-f_n^*\|_{L^p(\mu)} + \|f_n^{**}-f^{**}\|_{L^p(\mu)}$$

$$\leq 2\,\|f-f_n\|_{L^p(\mu)},$$

y haciendo $n \to \infty$, resulta $f^* = f^{**}$ en casi todo punto, para toda f en $L^p(\mu)$. Razonando en forma similar, puesto que

$L^p \cap L^1$ es denso en L^1, se obtiene la igualdad de las funciones límite también cuando f es una función de $L^1(\mu)$ y queda demostrado el siguiente

TEOREMA 2.4. Si $(U_\alpha,\ \alpha > 0)$ y $(V_\alpha,\ \alpha > 0)$ son familias crecientes de subconjuntos de R^n que contienen al origen, tales que se satisfacen las propiedades (A) y (B) entonces, para toda f en $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, tenemos

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} f(\theta_t x)dt = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{m(V_\alpha)} \int_{V_\alpha} f(\theta_t x)dt,$$

para casi todo x en X.

En el teorema 2.3 hemos probado que si E es un subconjunto invariante de X, entonces

$$\int_E f(x)dx = \int_E f^*(x)dx,$$

para cada f en $L^1(\mu)$, siempre que $\mu(X) < \infty$. Esta igualdad deja de ser cierta, en general, cuando la medida del espacio no es finita. Por ejemplo, si tomamos $X = R^n$, μ la medida de Lebesgue y $\theta_t x = x+t$, entonces

$$A_\alpha f(x) = \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} f(\theta_t x)dt = \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{x+U_\alpha} f(t)dt,$$

y por lo tanto

$$|A_\alpha f(x)| \leq \frac{1}{m(U_\alpha)} \|f\|_{L^1(R^n)} ,$$

luego, $f^* = 0$ p.p. si f es integrable. En general, tenemos el siguiente

TEOREMA 2.5. Existe una función invariante $F(x)$, $0 \leq F \leq 1$, tal que

$$\int_E f^* dx = \int_E f.F \, dx ,$$

para cada $E \in \mathcal{I}$, si f es una función de $L^1(\mu)$.
Para la demostración necesitaremos el siguiente

LEMA 2.1. Si $f \in L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$ y k es una función acotada con soporte de medida finita, entonces

$$\int_E k^*.f \, dx = \int_E k.f^* \, dx, \quad \text{para cada } E \in \mathcal{I}.$$

DEMOSTRACION. Sea ℓ una función invariante de $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$. Puesto que $A_\alpha k(x) \leq Mk$ y $Mk \in L^q(\mu)$ si $1 < q \leq \infty$, tenemos

$$\int_E k^*(x)\ell(x)dx = \int_E \{\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} k(\theta_t x)dt\} \, \ell(x)dx$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} \int_E \{\frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} k(\theta_t x)dt\} \, \ell(x)dx$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} dt \int_E k(\theta_t x)\ell(x)dx$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} dt \int_E k(x)\ell(x)dx$$

$$= \int_E k(x)\ell(x)dx = \int_E k(x)\ell^*(x)dx \quad .$$

Si $h(x) = g(x)-g(\theta_s x)$, donde g es acotada y con soporte de medida finita, entonces $h^*(x) = 0$ p.p. y puesto que k^* es invariante

$$\int_E k^*(x)h(x)dx = \int_E k^*(x)(g(x)-g(\theta_s x))dx$$

$$= \int_E k^*(x)g(x)dx - \int_E k^*(\theta_s x)g(\theta_s x)dx = 0$$

y entonces

$$\int_E k^*(x)h(x)dx = 0 = \int_E k(x)h^*(x)dx.$$

Luego, para toda función g en S vale

$$\int_E k^*(x)g(x)dx = \int_E k(x)g^*(x)dx.$$

Si $f \in L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, existe una sucesión (f_n) de funcio nes de S que convergen a f en norma p. Entonces (f_n^*) converge a f^* en la norma de $L^p(\mu)$ y tenemos

$$\int_E k^*(x)f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E k^*(x)f_n(x)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_E k(x)f_n^*(x)dx = \int_E k(x)f^*(x)dx.$$

La igualdad de las integrales cuando f es integrable es consecuencia de la densidad de $L^p \cap L^1$ en L^1.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 2.5. Sea (X_n) una sucesión de subconjuntos de X tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \quad X_n \subset X_{n+1} \quad y \quad \mu(X_n) < \infty,$$

para todo número natural n. Llamemos χ_n a la función característica de X_n. Entonces χ_n^* es invariante y $0 \leq \chi_n^* \leq 1$. Además es $\chi_n^*(x) \leq \chi_{n+1}^*(x)$.
Si $F(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_n^*(x)$, es claro que F es invariante y $0 \leq F \leq 1$. Entonces para toda f en $L^1(\mu)$ tenemos, en virtud del lema previo,

$$\int_E f(x)F(x)dx = \int_E f(x) \lim_{n\to\infty} \chi_n^*(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f(x)\chi_n^*(x)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_E f^*(x)\chi_n(x)dx = \int_E f^*(x)dx.$$

COROLARIO. Son equivalentes

(i) Existe una función h en $L^1(\mu)$, invariante y positiva en casi todo punto.

(ii) Para toda f en $L^1(\mu)$ y para cada $E \in \mathscr{I}$,

$$\int_E f(x)dx = \int_E f^*(x)dx.$$

DEMOSTRACION. Supongamos (i) cierta. En virtud del teorema 2.5

$$\int_E h(x)dx = \int_E h(x)F(x)dx,$$

para cada $E \in \mathscr{I}$, pues $h^*(x) = h(x)$ p.p. En particular, la igualdad debe ser válida cuando E es el conjunto de todos los puntos x para los cuales $F(x) < 1$. Pero entonces, este conjunto debe tener medida nula y por lo tanto vale (ii). Sea ahora g integrable sobre X y positiva en casi todo punto. Si E es el conjunto de puntos de X donde g^* se anula, E es invariante y en virtud de (ii) tenemos

$$\int_E g(x)dx = \int_E g^*(x)dx = 0.$$

Concluimos que $\mu(E) = 0$, luego $g^* > 0$ p.p. y (i) sigue de la invariancia de g^*.

c) *El caso de semigrupos*.

Probaremos aquí que para semigrupos de transformaciones que preservan la medida valen los resultados dados para grupos en las secciones anteriores.

Llamaremos T al conjunto de todos los puntos $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ de R^n cuyas coordenadas son no negativas. Por un semigrupo de transformaciones que preservan la medida entenderemos un sistema de aplicaciones $(\theta_t,\ t \in T)$ de X en sí mismo con las siguientes propiedades:

(i) $\theta_t(\theta_s x) = \theta_{t+s} x$; $\theta_0 x = x$ para todo t y s en T y todo x en X.

(ii) Para todo subconjunto medible E de X, $\theta_t^{-1}(E)$ es medible y su medida es igual a la medida de E.

(iii) Para cada función f medible sobre X, la función $f(\theta_t x)$ es medible en el espacio producto $T \times X$, considerando en T la medida de Lebesgue.

Es inmediato comprobar que los lemas 1.1, 1.2 y 1.5 siguen valiendo en este caso, si R^n es reemplazado por T. Por ello, para cada función f en $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, podemos formar los promedios

$$A_\alpha f(x) = \frac{1}{m(D_\alpha)} \int_{D_\alpha} f(\theta_t x)dt,$$

donde ahora $(D_\alpha, \alpha > 0)$ es una familia creciente de regiones en T, que contienen al origen y dependen de α. Si, como antes, Llamamos M al operador ergódico maximal asociado a (D_α), tenemos el siguiente

TEOREMA 2.6. Si la familia (D_α) satisface la condición (A) enunciada en la sección a), entonces existe una constante positiva C tal que

$$\mu(\{x:Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mu)},$$

para todo $\lambda > 0$.

Reemplazando R^n por T en el teorema 2.1 se obtiene una demostración del teorema 2.6.

COROLARIO. Mf es de tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1$.

TEOREMA 2.7. Si la familia de regiones D_α satisface las condiciones (A) y (B), entonces para cada f en $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, los promedios

$$A_\alpha f(x) = \frac{1}{m(D_\alpha)} \int_{D_\alpha} f(\theta_t x)dt$$

convergen en casi todo punto cuando $\alpha \to \infty$.

DEMOSTRACION. Consideremos el conjunto de todas las funciones

$h(x)$ que pueden ser representadas en la forma

$$h(x) = g(x) - \frac{1}{m(K)} \int_K g(\theta_s x)ds,$$

donde g es una función acotada con soporte de medida finita y K un subconjunto acotado de R^n. Para una función h de esta forma tenemos

$$\begin{aligned}
A_\alpha h(x) &= \frac{1}{m(D_\alpha)} \int_{D_\alpha} h(\theta_t x)dt \\
&= \frac{1}{m(D_\alpha)} \int_{D_\alpha} \{g(\theta_t x) - \frac{1}{m(K)} \int_K g(\theta_{t+s} x)ds\}dt \\
&= \frac{1}{m(D_\alpha)} \{\int_{D_\alpha} g(\theta_t x)dt - \frac{1}{m(K)} \int_K ds \int_{D_\alpha} g(\theta_{t+s} x)dt\} \\
&= \frac{1}{m(D_\alpha)} \{\int_{D_\alpha} g(\theta_t x)dt - \frac{1}{m(K)} \int_K ds \int_{s+D_\alpha} g(\theta_t x)dt\} \\
&= \frac{1}{m(K)} \int_K ds \frac{1}{m(D_\alpha)} \{\int_{D_\alpha} g(\theta_t x)dt - \int_{s+D_\alpha} g(\theta_t x)dt\} .
\end{aligned}$$

Entonces

$$|A_\alpha h(x)| \leq \frac{1}{m(K)} \int_K ds \frac{1}{m(D_\alpha)} \int_{D_\alpha \Delta (s+D_\alpha)} |g(\theta_t x)|dt.$$

Como $g(\theta_t x)$ es una función acotada de t para casi todo x, en virtud de (B) tenemos que $A_\alpha h(x) \to 0$ cuando $\alpha \to \infty$, para casi todo x.

Si ℓ es una función invariante de $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, esto es, si para cada t en T, $\ell(\theta_t x) = \ell(x)$ para casi todo x, entonces

$$A_\alpha \ell(x) = \ell(x) \qquad \text{p.p.,}$$

para todo $\alpha > 0$.

Concluimos que los promedios $A_\alpha f(x)$ convergen para casi todo x si f está en el espacio vectorial S generado por las funciones h y ℓ. Para probar la densidad de S en $L^p(\mu)$ supongamos que una cierta función $f_0(x)$ en $L^q(\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, es ortogonal a todas las funciones de S. Entonces.

$$\int f_0(x)h(x)dx = \int f_0(x)\{g(x) - \frac{1}{m(K)} \int_K g(\theta_s x)ds\}dx = 0.$$

Luego,

$$\int f_0(x)g(x)dx = \int f_0(x) \left(\frac{1}{m(K)} \int_K g(\theta_s x)ds\right)dx,$$

para cualquier g acotada con soporte de medida finita y cualquier subconjunto acotado K de R^n. En particular si llamamos

$$g_n(x) = \frac{1}{m(D_n)} \int_{D_n} g(\theta_s x)ds$$

tenemos

$$\int f_0(x)g(x)dx = \int f_0(x)g_n(x)dx \quad .$$

Por ser (g_n) una sucesión acotada en $L^p(\mu)$, contiene una subsucesión que converge débilmente a una función ℓ. Supondremos, para simplificar la notación, que (g_n) converge débilmente a ℓ. Entonces, para cada t en T, $(g_n(\theta_t x))$ converge débilmente a $\ell(\theta_t x)$.

Se seguirá que ℓ es una función invariante si probamos que la diferencia $g_n(\theta_t x)-g_n(x)$ converge débilmente a cero. Si f es una función de $L^q(\mu)$, entonces

$$\left|\int(g_n(\theta_t x)-g_n(x))f(x)dx\right|$$

$$= \left|\int dx\ f(x)\ \frac{1}{m(D_n)}\left\{\int_{D_n} g(\theta_{t+s}x)ds - \int_{D_n} g(\theta_s x)ds\right\}\right|$$

$$= \frac{1}{m(D_n)}\left|\left(\int_{t+D_n} - \int_{D_n}\right)ds \int f(x)g(\theta_s x)dx\right|$$

$$\leq \|f\|_{L^q(\mu)}\ \|g\|_{L^p(\mu)}\ \frac{m((t+D_n)\triangle D_n)}{m(D_n)}$$

y esta última expresión tiende a cero cuando $n \to \infty$ en virtud de (B).

Puesto que f_0 es ortogonal a toda función invariante,

$$\int f_0(x)g(x)dx = 0,$$

y entonces $f_0 = 0$ p.p., lo que prueba la densidad de S en $L^p(\mu)$. La demostración del teorema concluye por un razonamiento análogo al hecho en el teorema 2.2.

Un teorema con las mismas conclusiones que el teorema 2.7. aunque con más hipótesis sobre la familia (D_α) puede verse en [4].

Es fácil comprobar que para el caso de semigrupos valen teoremas equivalentes a los teoremas 2.3, 2.4 y 2.5.

APENDICE.

Un lema de cubrimiento de N. Rivière .

LEMA 2.2. Sea $(U_\alpha, \alpha > 0)$ una familia dependiente del parámetro α de conjuntos abiertos en R^n, que contienen al origen y tal que

(i) $\alpha < \beta$ implica $U_\alpha \subset U_\beta$,

(ii) $m(U_\alpha - U_\alpha + U_\alpha) \leq \text{const.} m(U_\alpha)$.

Bajo estas condiciones, si $a(x)$ es una función definida sobre el conjunto compacto K a valores en los reales positivos, entonces existe un conjunto finito $x_1,\dots,x_m$ de puntos en K, tal que los conjuntos $x_i + U_{a(x_i)}(i = 1,2,\dots,m)$ son disjuntos y

$$m(K) \leq C \sum_{i=1}^{m} m(U_{a(x_i)})$$

donde C es la misma constante que figura en la condición (ii).

DEMOSTRACION. Como los conjuntos $x + U_{a(x)}$, $x \in K$, forman un cubrimiento abierto de K, existe un conjunto finito $F \subset K$, tal que los conjuntos $y + U_{a(y)}$, $y \in F$, también cubren a K. Elejimos x_1 en F de manera que $a(x_1) = \max\{a(y): y \in F\}$. Si $x_1,\dots,x_m$ han sido elegidos, consideramos el conjunto

$$A_m = K \cap (\bigcup_{i=1}^{m} (x_i + V_{a(x_i)})^C$$

donde $V_a = U_a - U_a + U_a$ y el supra índice C indica complemento. Si $A_m = \emptyset$ nos detenemos, en caso contrario elegimos un punto x_{m+1} en el conjunto

$$B_m = \{y \in F:(y + U_{a(y)}) \cap A_m \neq \emptyset\}$$

tal que $a(x_{m+1}) = \text{máx}\{a(y):y \in B_m\}$. Obviamente, x_{m+1} es distinto a todos los puntos elegidos previamente. Como la sucesión de conjuntos A_m es decreciente, también lo es la sucesión de números $a(x_m)$. Como el conjunto F es finito debe ser $A_m = \emptyset$ para algún m y el proceso se detiene allí.

Para probar el lema será suficiente mostrar que los conjuntos $x_i + U_{a(x_i)}$ son disjuntos. Supongamos, por el contrario, que $(x_i + U_{a(x_i)}) \cap (x_j + U_{a(x_j)}) \neq \emptyset$, con $1 \leq i < j \leq n$. Entonces existen puntos u en $U_{a(x_i)}$ y v en $U_{a(x_j)}$ tales que $x_i + u = x_j + v$. Como $x_j \in B_{j-1}$ existe un punto w en $U_{a(x_j)}$ tal que el punto $z = x_j + w$ está en A_{j-1}. Como $A_{j-1} \subset A_i$ y $U_{a(x_j)} \subset U_{a(x_i)}$ se sigue que $z = x_i + u - v + w$ está en A_i y también en $x_i + V_{a(x_i)}$, pero esto es una contradicción.

COROLARIO. Si la familia (U_α) satisface las hipótesis del lema y para toda g en $L^1(R^n)$ definimos

$$mg(x) = \sup_{\alpha>0} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{x+U_\alpha} |g(y)|dy,$$

entonces m es de tipo débil (1.1).

DEMOSTRACION. Sea K un subconjunto compacto de $E = \{x: mg(x) > \lambda\}$. Para cada x en K existe un número positivo a(x) tal que

$$\int_{x+U_{a(x)}} |g(y)|dy > \lambda m(U_{a(x)}).$$

En virtud del lema precedente existe un número finito $x_1,\ldots,x_m$ de puntos en K tal que los conjuntos $x_i + U_{a(x_i)}$ son disjuntos y

$$m(K) \leq C \sum_{i=1}^{m} m(U_{a(x_i)}) \leq \frac{C}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i+U_{a(x_i)}} |g(y)|dy$$

$$\leq \frac{C}{\lambda} \|g\|_{L^1(R^n)} .$$

3. TEOREMA DE CHACON-ORNSTEIN: EL CASO CONTINUO

a) *Una desigualdad maximal*

Sea p una función no negativa de $L^1(\mu)$. Para cada función f integrable sobre X y cada número real $\alpha > 0$ definimos

$$R_\alpha(f,p)(x) = \frac{\int_{B_\alpha} f(\theta_t x)dt}{\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt}$$

si $\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt > 0$; $R_\alpha(f,p)(x) = 0$ en caso contrario, donde B_α es la bola de radio α centrada en el origen.

Nuestro propósito es establecer condiciones suficientes que aseguren la convergencia de estos cocientes, cuando $\alpha \to \infty$, en casi todo punto donde el denominador se vuelve positivo, esto es, en el conjunto X' cuyos elementos son los puntos x para los cuales

$$\sup_\alpha \int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt > 0.$$

Si $x \in X'$, fijado s en R^n, para todo $\alpha > |s|$ tenemos

$$\int_{B_\alpha} p(\theta_t \theta_s x)dt = \int_{s+B_\alpha} p(\theta_t x)dt \geq \int_{B_{\alpha-|s|}} p(\theta_t x)dt,$$

y a partir de esta desigualdad deducimos la invariancia de X'. Por lo tanto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $X = X'$, lo que haremos de aquí en adelante. Nuestro primer paso en el estudio de la convergencia de $R_\alpha(f,p)$ será probar que si S es el operador maximal asociado a los operadores R_α, esto es, si para cada f en $L^1(\mu)$

$$S(f,p)(x) = \sup_{\alpha>0} R_\alpha(|f|,p)(x),$$

entonces $S(f,p)$ satisface una desigualdad de tipo débil (1,1). Para ello, necesitaremos los siguientes lemas.

LEMA 3.1. Sea $\mathscr{F} = \{B_{r_i}(x_i)\}_{i\in I}$, una familia de esferas en R^n de radios acotados, donde para cada i, $B_{r_i}(x_i)$ es la esfera de centro x_i y radio r_i. Existe entonces una subfamilia $\mathscr{F}_1 = \{B_{r_i}(x_i)\}_{i\in J}$ tal que, si A denota el conjunto de los centros de las bolas de la familia $\mathscr{F}$ y χ_i es la función característica de $B_{r_i}(x_i)$, entonces

$$\chi_A \leq \sum_{i\in J} \chi_i \leq C,$$

donde C es una constante que sólo depende de n.

DEMOSTRACION. Sea $M = \sup\{r_i,\ i \in I\}$. Para cada entero no negativo j, construimos una subfamilia $\mathscr{F}^{(j)}$ de $\mathscr{F}$, maximal y bien ordenada, de modo que, si llamamos $B_1^{(j)},\dots,B_\ell^{(j)},\dots$, a las esferas de $\mathscr{F}^{(j)}$, sus radios r_ℓ cumplen $\frac{M}{2^{j+1}} < r_\ell \leq \frac{M}{2^j}$, y cada $B_\ell^{(j)}$ tiene su centro fuera de todas las esferas que la preceden en $\mathcal{F}^{(j)}$ y de todas las pertenecientes a las subfamilias $\mathcal{F}^{(0)}, \mathcal{F}^{(1)}, \ldots, \mathcal{F}^{(j-1)}$.

Sea $\mathcal{F}_1 = \bigcup_j \mathcal{F}^{(j)}$. Por construcción, las esferas de $\mathcal{F}_1$ contienen a los centros de todas las bolas de $\mathcal{F}$. En efecto, dado $i \in I$, sea j tal que $\frac{M}{2^{j+1}} < r_i \leq \frac{M}{2^j}$. Si $B_{r_i}(x_i)$ no pertenece a $\mathcal{F}_1$, entonces x_i debe pertenecer a alguna esfera de $\mathcal{F}^{(j)}$, pues esta subfamilia es maximal. Veremos ahora que el número máximo de bolas pertenecientes a una misma subfamilia $\mathcal{F}^{(j)}$ con la propiedad de tener por lo menos un punto en común, es finito. Sean entonces $B_{w_1}^{(j)}, \ldots, B_{w_\ell}^{(j)}$ en $\mathcal{F}^{(j)}$ tales que su intersección es no vacía. Supongamos $w_1 < w_2 < \ldots < w_\ell$. Entonces si $x_i (i = 1,2,\ldots,\ell)$ son los centros de estas bolas y $r_i (i = 1,2,\ldots,\ell)$ los radios respectivos, tenemos

$$|x_i - x_h| \geq r_h > \frac{M}{2^{j+1}} \quad , \qquad \text{si} \quad w_i < w_h.$$

Para cada i $(1 \leq i \leq \ell)$, llamamos $\tilde{B}_{w_i}^{(j)}$ a la bola de centro x_i y radio $\frac{M}{2^{j+2}}$. Afirmamos que estas esferas son disjuntas. En efecto, si $z \in \tilde{B}_{w_i}^{(j)} \cap \tilde{B}_{w_h}^{(j)}$ y $w_i < w_h$, entonces

$$|x_i - x_h| \leq |x_i - z| + |z - x_h| < \frac{M}{2^{j+1}},$$

y esto es una contradicción.

Sea ahora x un punto perteneciente a la intersección de todas las bolas $\tilde{B}^{(j)}_{w_i}$ $(1,2,\ldots,\ell)$ y $\tilde{B}$ la bola centrada en x de radio $\frac{M}{2^j}+\frac{M}{2^{j+2}}$. Veremos que $\bigcup_{i=1}^{\ell} \tilde{B}^{(j)}_{w_i} \subset \tilde{B}$. En efecto, si para algún i, $1 \leq i \leq \ell$, $z \in \tilde{B}^{(j)}_{w_i}$, entonces

$$|x-z| \leq |x-x_i| + |x_i-z| \leq \frac{M}{2^j}+\frac{M}{2^{j+2}}.$$

Por lo tanto

$$m(\bigcup_{i=1}^{\ell} \tilde{B}^{(j)}_{w_i}) = \ell\, \omega_n(\frac{M}{2^{j+2}})^n \leq \omega_n(\frac{M}{2^j}+\frac{M}{2^{j+2}})^n,$$

y de esta última desigualdad se deduce $\ell \leq 5^n$.

Mostraremos ahora que el número máximo de bolas pertenecientes a distintas subfamilias $\mathscr{F}^{(j)}$ con algún punto en común es finito. Supongamos que las bolas $B_i^{(j_i)}$, $(i = 1,2,\ldots,\ell)$, tienen intersección no vacía, donde cada $B_i^{(j_i)}$ es una esfera de $\mathscr{F}^{(j_i)}$ y $j_1 < j_2 < \ldots < j_\ell$.

Llamemos x_i y r_i al centro y al radio respectivamente de $B_i^{(j_i)}$. Sea x un punto perteneciente a la intersección de todas estas esferas y consideremos todos los triángulos de vértices x_i,x_h,x. Fijados i y h, supongamos $j_i < j_h$ y veamos que la medida del ángulo α correspondiente al vértice x es mayor que $\frac{\pi}{3}$.

Para ello, observemos que

$$|x_i-x| \leq r_i, \quad |x_h-r| \leq r_h \leq r_i \quad \text{y} \quad |x_i-x_h| > r_i,$$

luego, los ángulos correspondientes a los vértices x_i y x_h deben ser menores que α, y se sigue que la medida de α es mayor que $\frac{\pi}{3}$. Sobre cada semirrecta $\overrightarrow{x\,x_i}$ $(i = 1,2,\ldots,\ell)$ tomemos un punto z_i a distancia fija P de x y llamemos B_i a la bola de centro z_i y radio $\frac{P}{2}$. Supongamos que existen h y k, $1 \leq h,k \leq \ell$, tales que las bolas B_h y B_k tienen un punto z en común. Entonces

$$|z_h - z_k| \leq |z_h - z| + |z - z_k| \leq P,$$

pero como en un triángulo a mayor ángulo se opone mayor lado, tenemos que

$$|z_h - z_k| > |x - z_k| = P.$$

Concluimos que las bolas B_i $(i = 1,2,\ldots,\ell)$ son disjuntas. Además, su unión está contenida en la bola B de radio $\frac{3}{2}P$, centrada en x. En efecto, si $z \in B_i$ para algún i, entonces

$$|z - x| \leq |z - z_i| + |z_i - x| \leq \frac{3}{2}P.$$

Luego

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\ell} B_i\right) = \ell\, \omega_n \left(\frac{P}{2}\right)^n \leq m(B) = \omega_n \left(\frac{3P}{2}\right)^n,$$

de donde obtenemos $\ell \leq 3^n$; y el lema 3.1 sigue tomando $C = 5^n.3^n = (15)^n$.

LEMA 3.2. Sea $q(t)$ una función no negativa e integrable sobre cada subconjunto de R^n de medida finita.
Si para cada g en $L^1(R^n)$ definimos

$$T_\alpha(g,q)(s) = \frac{\int_{B_\alpha} g(s+t)dt}{\int_{B_\alpha} q(s+t)dt}$$

si $\int_{B_\alpha} q(s+t)dt > 0$, $T_\alpha(g,q)(s) = 0$ en caso contrario, y

$$T^*(g,q)(s) = \sup_{\alpha>0} T_\alpha(|g|,q)(s),$$

entonces existe una constante positiva C tal que para todo $\lambda > 0$

$$\int_{\{T^*(g,q)>\lambda\}} q(t)dt \leq \frac{C}{\lambda} \| g \|_{L^1(R^n)} \quad .$$

DEMOSTRACION. Si para cada entero no negativo k,

$$T_k^*(g,q)(s) = \sup_{0<\alpha\leq k} T_\alpha(|g|,q)(s),$$

entonces

$$T_k^*(g,q)(s) \leq T_{k+1}^*(g,q)(s) \text{ y } \lim_{k\to\infty} T_k^*(g,q)(s) = T^*(g,q)(s).$$

Fijado $\lambda > 0$ sea $E = \{s : T_k^*(g,q)(s) > \lambda\}$.

Para cada $s \in E$, existe $\alpha = \alpha(s) \leq k$ tal que

$T_\alpha(|g|,q)(s) > \lambda$ y entonces

$$\int_{B_\alpha} q(s+t)dt = \int_{s+B_\alpha} q(t)dt < \frac{1}{\lambda} \int_{s+B_\alpha} |g(t)|dt.$$

Si $\mathscr{F} = \{s+B_{\alpha(s)},\ s \in E\}$, en virtud del lema anterior es posi ble seleccionar una subfamilia $\mathscr{F}_1 = \{s_i+B_{\alpha(s_i)}\}_{i\in J}$ de manera que si χ_i es la función característica de $s_i + B_{\alpha(s_i)}$, entonces

$$\chi_E \leq \sum_{i\in J} \chi_i \leq C.$$

Luego

$$\int_E q(t)dt \leq \int (\sum_{i\in J} \chi_i(t))q(t)dt$$

$$= \sum_{i\in J} \int_{s_i+B_{\alpha(s_i)}} q(t)dt < \sum_{i\in J} \frac{1}{\lambda} \int_{s_i+B_{\alpha(s_i)}} |g(t)|dt$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int (\sum_{i\in J} \chi_i)|g(t)|dt \leq \frac{C}{\lambda} \|g\|_{L^1(R^n)},$$

y el lema 3.2 finaliza haciendo $k \to \infty$.

Estamos ahora en condiciones de establecer la desigualdad enunciada anteriormente para el operador S.

TEOREMA 3.1. Si para cada f en $L^1(\mu)$

$$R_\alpha(f,p)(x) = \frac{\int_{B_\alpha} f(\theta_t x)dt}{\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt}$$

cuando $\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt > 0$, $R_\alpha(f,p)(x) = 0$ en caso contrario y

$$S(f,p)(x) = \sup_{\alpha>0} R_\alpha(|f|,p)(x)$$

entonces, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\{S(f,p)>\lambda\}} p(x)dx \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

DEMOSTRACION. Definimos sobre el espacio producto $R^n \times X$ la función $P(t,x) = p(\theta_t x)$. El lema 1.5 nos dice que para casi todo x, $P(t,x)$ es integrable sobre cada subconjunto de R^n de medida finita.

Para cada entero no negativo k, definimos

$$F(t,x) = \begin{cases} f(\theta_t x) & \text{si} \quad |t| \le 2k \\ \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 2k, \end{cases}$$

mientras que, como en el lema 3.2

$$T_\alpha(F,P)(s,x) = \frac{\int_{B_\alpha} F(s+t,x)dt}{\int_{B_\alpha} P(s+t,x)dt}$$

donde el denominador es positivo, $T_\alpha(F,P)(s,x) = 0$ en otro caso.

Definimos ahora

$$T_k^*(F,P)(s,x) = \begin{cases} \sup\limits_{0<\alpha\le k} T_\alpha(|F|,P)(s,x) & \text{si} \quad |s| \le k \\ \\ 0 & \text{si} \quad |s| > k \end{cases}$$

y $\quad T^*(F,P)(s,x) = \sup\limits_{\alpha>0} T_\alpha(|F|,P)(s,x).$

Es claro que

$$T_k^* \le T_{k+1}^* \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} T_k^*(F,P)(s,x) = T^*(F,P)(s,x) .$$

Observemos también que para $\alpha \le k$,

$$T_\alpha(|F|,P)(0,x) = R_\alpha(|f|,p)(x)$$

y entonces

$$T_k^*(F,P)(0,x) = \sup_{0<\alpha\leq k} R_\alpha(|f|,p)(x).$$

Fijado $\lambda > 0$, sea $E = \{(s,x):T_k^*(F,P)(s,x) > \lambda\}$

y $E_s = \{x:(s,x) \in E\}$; $E^x = \{s:(s,x) \in E\}$

sus secciones.

Si $|s| \leq k$ entonces, para todo $\alpha \leq k$

$$\frac{\int_{B_\alpha} |F(s+t,x)|dt}{\int_{B_\alpha} P(s+t,x)dt} = \frac{\int_{B_\alpha} |f(\theta_{s+t}x)|dt}{\int_{B_\alpha} p(\theta_{s+t}x)dt}$$

$$= \frac{\int_{B_\alpha} |F(t,\theta_s x)|dt}{\int_{B_\alpha} P(t,\theta_s x)dt},$$

y por lo tanto $T_k^*(F,P)(s,x) = T_k^*(F,P)(0,\theta_s x)$.

Se sigue que $E_s = \theta_s^{-1}(E_0)$ si $|s| \leq k$, mientras que $E_s = \emptyset$ cuando $|s| > k$. Luego,

$$\int_E P(s,x)ds\ dx = \int_{|s|\leq k} ds \int_{E_s} P(s,x)dx$$

$$= \int_{|s|\leq k} ds \int_{E_s} p(\theta_s x)dx = \omega_n\ k^n \int_{E_0} p(x)dx,$$

en virtud del lema 1.3.

Por otra parte, aplicando el lema 3.2 tenemos

$$\int_E P(s,x)ds\ dx = \int dx \int_{E^x} P(s,x)ds$$

$$\leq \int dx\ \frac{C}{\lambda} \int_{|s|\leq 2k} |f(\theta_s x)|ds = \frac{C}{\lambda}\ (2k)^n\ \omega_n \| f \|_{L^1(\mu)},$$

entonces

$$\int_{E_0} p(x)dx \leq \frac{2^n\ C}{\lambda} \| f \|_{L^1(\mu)},$$

y el teorema sigue de la última desigualdad haciendo $k \to \infty$.

Si para cada subconjunto medible E de X definimos

$$\mu_p(E) = \int_E p(x)dx,$$

podemos expresar la desigualdad obtenida en el teorema 3.1 por

$$\mu_p(\{S(f,p) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

Observemos que si $p(x) > 0$ salvo, eventualmente, en un conjunto de medida μ cero entonces $\mu_p(E) = 0$ si y sólo si $\mu(E) = 0$; y por lo tanto $S(f,p)(x) < \infty$ en casi todo punto x, para toda $f \in L^1(\mu)$; lo que nos permite enunciar el siguiente

COROLARIO. Si

$$X_0(p) = \{x : \sup_{\alpha>0} \int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt < \infty\} \qquad \text{y}$$

$$X_\infty(p) = \{x : \lim_{\alpha\to\infty} \int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt = \infty\}$$

entonces estos conjuntos son invariantes. Además, si p y q son dos funciones de $L^1(\mu)$ positivas en casi todo punto, entonces $X_0(p) = X_0(q)$ y $X_\infty(p) = X_\infty(q)$, donde la igualdad debe entenderse módulo medida μ-cero.

DEMOSTRACION. Sea x un punto de X_0. Para todo s en R^n tenemos

$$\int_{B_\alpha} p(\theta_t \theta_s x)dt = \int_{s+B_\alpha} p(\theta_t x)dt \leq \int_{B_{\alpha+|s|}} p(\theta_t x)dt,$$

lo que prueba la invariancia de X_0 y también la de X_∞, por ser éste el complemento en X de X_0.

Si p y q son funciones positivas en casi todo punto, entonces $S(p,q) < \infty$ p.p. y $S(q,p) < \infty$ p.p., por lo tanto, para casi todo x,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt = \infty \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{\alpha\to\infty} \int_{B_\alpha} q(\theta_t x)dt = \infty,$$

y el corolario queda probado.

En adelante notaremos $X_0 = X_0(p)$ y $X_\infty = X_\infty(p)$.

Cuando p es sólo no negativa del teorema 3.1 se sigue que para toda f en $L^1(\mu)$, $S(f,p)(x) < \infty$ para casi todo x en $\{p > 0\}$.

b) *Convergencia de $R_\alpha(f,p)$ para $p > 0$.*

En esta sección supondremos $p(x) > 0$ para casi todo x. En este caso, para casi todo punto de X_0 tenemos

$$\lim_{\alpha\to\infty} R_\alpha(f,p) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_{B_\alpha} f(\theta_t x)dt}{\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt} = \frac{\int_{R^n} f(\theta_t x)dt}{\int_{R^n} p(\theta_t x)dt} .$$

Veremos ahora que los promedios $R_\alpha(f,p)$ convergen en casi todo punto de X_∞ cuando $\alpha \to \infty$, si se satisface la siguiente condición :

(C) Para casi todo x en X_∞,

$$\frac{\displaystyle\int_{B_\alpha \Delta (s+B_\alpha)} p(\theta_t x)dt}{\displaystyle\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt} \to 0, \text{ cuando } \alpha \to \infty$$

para todo s en R^n.

En la sección e) probaremos que esta condición es innecesaria si $\mu(X) < \infty$.

TEOREMA 3.2. Si $p(x)$ satisface (C), entonces $R_\alpha(f,p)$ converge en casi todo punto de X_∞, para $f \in L^1(\mu)$.

DEMOSTRACION. Consideremos el conjunto de funciones $h(x)$ que pueden escribirse en la forma

$$h(x) = p(x)g(x) - p(\theta_s x)g(\theta_s x),$$

donde g es acotada con soporte de medida finita y $s \in R^n$. Para una función $h(x)$ de esta forma tenemos

$$|R_\alpha(h,p)(x)| = \frac{\left|\displaystyle\int_{B_\alpha} h(\theta_t x)dt\right|}{\displaystyle\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt} = \frac{\left|\displaystyle\int_{B_\alpha} \{(pg)(\theta_t x)-(pg)(\theta_{t+s} x)\}dt\right|}{\displaystyle\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt}$$

$$\leq \frac{\displaystyle\int_{B_\alpha \Delta (s+B_\alpha)} |pg|(\theta_t x)dt}{\displaystyle\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt} \leq \|g\|_{L^\infty(\mu)} \frac{\displaystyle\int_{B_\alpha \Delta (s+B_\alpha)} p(\theta_t x)dt}{\displaystyle\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt} ,$$

luego, $R_\alpha(h,p)(x) \to 0$ cuando $\alpha \to \infty$ para casi todo x, en virtud de (C).

Consideremos ahora las funciones q(x) de la forma

$$q(x) = \ell(x)p(x),$$

donde ℓ es invariante y acotada. Para una tal función q tenemos

$$R_\alpha(q,p)(x) = \ell(x) \quad \text{p.p.}$$

Concluimos que los cocientes $R_\alpha(f,p)$ convergen en casi todo punto para las funciones f del espacio vectorial S_p generado por las funciones h y q. Nuestro próximo paso será probar que S_p es denso en $L^1(\mu)$. Para ello, supongamos que una cierta función $k_0(x)$ perteneciente a $L^\infty(\mu)$ es ortogonal a todas las funciones de S_p.

Entonces

$$\int k_0(x)h(x)dx = \int k_0(x)(p(x)g(x)-p(\theta_s x)g(\theta_s x))dx$$

$$= \int p(x)g(x)(k_0(x)-k_0(\theta_{-s}x))dx = 0,$$

y se sigue que k_0 es invariante. Luego,

$$\int k_0(x).k_0(x)p(x)dx = \int k_0^2(x)p(x)dx = 0,$$

y por lo tanto $k_0 = 0$ p.p.
Usando ahora la estimación

$$\mu_p(\{S(f,p) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mu)} ,$$

concluimos que $R_\alpha(f,p)(x)$ converge en casi todo punto, para toda $f \in L^1(\mu)$.

OBSERVACIONES

1. Si solamente suponemos $p \geq 0$, de la demostración del teorema 3.2 se sigue que S_p es denso en $L^1(\{p > 0\},\mu)$ y que $R_\alpha(f,p)$ converge en casi todo punto de $\{p > 0\}$, para toda $f \in L^1(\mu)$.

2. Si $n = 1$, la condición (C) es innecesaria pues en este caso si consideramos las funciones $\overline{h}(x)$ de la forma

$$\overline{h}(x) = g(x) - g(\theta_s x),$$

donde g es acotada y con soporte de medida finita, entonces

$$|R_\alpha(\overline{h},p)(x)| \leq \frac{\displaystyle\int_{B_\alpha \Delta (s+B_\alpha)} |g(\theta_t x)|dt}{\displaystyle\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt} \leq \|g\|_{L^\infty(\mu)} \cdot \frac{m(B_\alpha \Delta (s+B_\alpha))}{\displaystyle\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt} ,$$

luego, $\lim_{\alpha\to\infty} |R_\alpha(\overline{h},p)(x)| = 0$ para x en X_∞ pues $m(B_\alpha \Delta (s+B_\alpha)) \leq 2|s|$ para todo α, y se comprueba fácilmente que el espacio vectorial generado por las funciones $\overline{h}$ y las funciones q definidas en el teorema 3.2 es denso en $L^1(\mu)$.

c) *Caracterización del límite.*

Si $h(x)$ es como en el teorema 3.2, para toda función $t(x)$ invariante y acotada tenemos

$$\int h(x)t(x)dx = \int ((p.g)(x)-(p.g)(\theta_s x))t(x)dx$$

$$= \int (p.g)(x)(t(x)-t(\theta_{-s}x))dx = 0,$$

luego, si S_p es el espacio vectorial introducido en la demostración del teorema 3.2 y $f \in S_p$, es posible representar a f en la forma

(1) $\quad f(x) = \ell(x)p(x) + \overline{h}(x),$

donde ℓ es invariante y acotada y $\overline{h}$ es ortogonal a todas las funciones invariantes y acotadas. Si f es de la forma (1) y

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \ell(x) \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad \ell(x) < 0 \end{cases}$$

entonces χ es invariante y por lo tanto

$$\int |\ell(x)|p(x)\,dx = \int f(x)\chi(x)\,dx \leq \int |f(x)|\,dx.$$

A partir de esta desigualdad deducimos que dada una función f en $L^1(\mu)$, existe a lo sumo una función ℓ, salvo medida μ nula, de modo que f se puede expresar como en (1). Luego, la aplicación $f \to \ell.p$ está bien definida sobre S_p y es lineal y acotada. Por consiguiente, se puede extender en forma única a un operador H de $L^1(\mu)$ en sí mismo, el cual verifica

$$\int |Hf|\,dx \leq \int |f|\,dx \ ,$$

para toda f en $L^1(\mu)$, y tenemos el siguiente

TEOREMA 3.3. Si para cada f en $L^1(\mu)$

$$R(f,p)(x) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_{B_\alpha} f(\theta_t x)\,dt}{\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)\,dt}$$

entonces

$$\text{(i)} \quad R(f,p)(x) = \frac{\int_{R^n} f(\theta_t x)\,dt}{\int_{R^n} p(\theta_t x)\,dt} \quad \text{para casi todo x en } X_0 \ .$$

(ii) $R(f,p)$ es invariante y para cada $E \in \mathcal{J}$ vale

$$\int_E R(f,p).p\, dx = \int_E f\, dx.$$

DEMOSTRACION. (i) es inmediato a partir de la definición de X_0 y el teorema 3.1. Si $h(x) = (pg)(x)-(pg)(\theta_s x)$, donde g ea acotada y con soporte de medida finita entonces, para casi todo x en X_0 tenemos

$$\int_{B_\alpha} h(\theta_t x)dt = \int_{B_\alpha} (p.g)(\theta_t x)dt - \int_{s+B_\alpha} (pg)(\theta_t x)dt \to 0,$$

cuando $\alpha \to \infty$ y por lo tanto
$\int_{B_\alpha} \overline{h}(\theta_t x)dt \to 0$, cuando $\alpha \to \infty$ si $\overline{h}$ es una combinación lineal
de funciones de la forma de h. Luego, si f es como en (1)

$R(f,p) = \ell = \frac{Hf}{p}$ en casi todo punto de X_0, y de la demostración del teorema 3.2 se sigue que esta igualdad es también válida para casi todo x en X_∞.

Sea ahora $f \in L^1(\mu)$, si dado $\varepsilon > 0$ tomamos $f_\varepsilon \in S_p$ tal que $\|f-f_\varepsilon\|_{L^1(\mu)} < \varepsilon$ entonces, para todo $\alpha > 0$

$$|R_\alpha(f,p)-\frac{Hf}{p}| \leq |R_\alpha(f-f_\varepsilon,p)| + |R_\alpha(f_\varepsilon,p) - \frac{Hf_\varepsilon}{p}| + |\frac{H(f_\varepsilon-f)}{p}|,$$

luego,

$$\limsup_{\alpha\to\infty} \left|R_\alpha(f,p) - \frac{Hf}{p}\right| \leq S(f-f_\varepsilon,p) + \left|\frac{H(f_\varepsilon-f)}{p}\right| .$$

Fijado $\lambda > 0$, si $\limsup_{\alpha\to\infty} \left|\left(R_\alpha(f,p) - \frac{Hf}{p}\right)(x)\right| > \lambda$, entonces

$S(f-f_\varepsilon,p) > \lambda/2$ o $\left|\frac{H(f_\varepsilon-f)}{p}\right| > \lambda/2$, y puesto que

$\mu_p(\{S(f-f_\varepsilon,p) > \lambda/2\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|f-f_\varepsilon\|_{L^1(\mu)}$, y

$$\mu_p\left(\left\{\left|\frac{H(f_\varepsilon-f)}{p}\right| > \lambda/2\right\}\right) = \int_{\left\{\left|\frac{H(f_\varepsilon-f)}{p}\right|>\lambda/2\right\}} p(x)dx$$

$$< \frac{2}{\lambda} \int |H(f_\varepsilon-f)(x)|dx \leq \frac{2}{\lambda} \|f_\varepsilon-f\|_{L^1(\mu)} ,$$

se sigue que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mu_p\left(\left\{\limsup_{\alpha\to\infty} \left|R_\alpha(f,p) - \frac{Hf}{p}\right| > \lambda\right\}\right) \leq \frac{C}{\lambda} \varepsilon ,$$

y haciendo $\varepsilon \to 0$ concluimos que

$$R(f,p) = \frac{Hf}{p} \qquad \text{p.p.}$$

Dado que $R(f_\varepsilon,p)$ es invariante, para todo t en R^n tenemos

$$|R(f,p)(x)-R(f,p)(\theta_t x)| \leq |R(f-f_\varepsilon,p)(x)| + |R(f_\varepsilon-f,p)(\theta_t x)|$$

$$\leq S(f-f_\varepsilon,p)(x) + S(f-f_\varepsilon,p)(\theta_t x),$$

para casi todo x, y entonces existe $C > 0$ tal que

$$\mu_p(\{|R(f,p)(x)-R(f,p)(\theta_t x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \| f-f_\varepsilon \|_{L^1(\mu)},$$

para todo $\lambda > 0$, y haciendo $\varepsilon \to 0$ se sigue que $R(f,p)$ es invariante. Además, para cada $E \in \mathcal{J}$,

$$\int_E R(f_\varepsilon,p)\, p\, dx = \int_E f_\varepsilon\, dx ,$$

luego

$$\left|\int_E R(f,p)p\, dx - \int_E f\, dx\right| \leq \left|\int_E R(f-f_\varepsilon,p)p\, dx\right| + \left|\int_E (f_\varepsilon-f)dx\right|$$

$$\leq \int_E |H(f-f_\varepsilon)|dx + \int_E |f-f_\varepsilon|dx \leq 2\varepsilon,$$

y el teorema finaliza haciendo $\varepsilon \to 0$.

NOTA: En esta sección se han tenido en cuenta las ideas expuestas por A. Garsia en [6] al estudiar el comportamiento de la función límite en el caso discreto.

d) *Convergencia en el caso general*.

Estudiaremos en esta sección la convergencia de los cocientes $R_\alpha(f,p)$ cuando p es sólo no negativa. Para ello definimos, para cada número natural k,

$$p^{(k)}(x) = \frac{1}{m(B_k)} \int_{B_k} p(\theta_t x)dt,$$

mientras que $p^{(0)}(x) = p(x)$. Si $X^{(k)} = \{p^{(k)} > 0\}$ entonces $X' = \bigcup_k X^{(k)}$, luego, nuestro problema quedará resuelto si probamos que para todo k, $R_\alpha(f,p)$ converge en casi todo punto de $X^{(k)}$. En primer lugar probaremos que $R_\alpha(f,p^{(k)})$ converge en casi todo punto de $X^{(k)}$. Para estudiar la convergencia en $X^{(k)} \cap X_0$ veamos que

$$\sup_{\alpha>0} \int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt < \infty \quad \text{si y sólo si} \quad \sup_{\alpha>0} \int_{B_\alpha} p^{(k)}(\theta_t x)dt < \infty$$

En efecto, si $\alpha > k$ entonces

$$\int_{B_\alpha} p^{(k)}(\theta_t x)dt = \int_{B_\alpha} dt \frac{1}{m(B_k)} \int_{B_k} p(\theta_{t+s} x)ds$$

$$= \frac{1}{m(B_k)} \int_{B_k} ds \int_{s+B_\alpha} p(\theta_t x)dt \leq \int_{B_{\alpha+k}} p(\theta_t x)dt,$$

y también

$$\int_{B_\alpha} p^{(k)}(\theta_t x)dt \geq \int_{B_{\alpha-k}} p(\theta_t x)dt,$$

lo que prueba nuestra afirmación.

Luego, para casi todo x en $X^{(k)} \cap X_0$ tenemos que

$$\lim_{\alpha\to\infty} R_\alpha(f,p^{(k)})(x) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_{B_\alpha} f(\theta_t x)dt}{\int_{B_\alpha} p^{(k)}(\theta_t x)dt} = \frac{\int_{R^n} f(\theta_t x)dt}{\int_{R^n} p^{(k)}(\theta_t x)dt},$$

y puesto que $\int_{R^n} p^{(k)}(\theta_t x)dt = \int_{R^n} p(\theta_t x)dt$,

concluimos que

$$\lim_{\alpha\to\infty} R_\alpha(f,p)(x) = \lim_{\alpha\to\infty} R_\alpha(f,p^{(k)})(x) = \frac{\int_{R^n} f(\theta_t x)dt}{\int_{R^n} p(\theta_t x)dt},$$

en casi todo punto x de $X^{(k)} \cap X_0$.

En virtud del teorema 3.2, si $p^{(k)}$ satisface (C), entonces $R_\alpha(f,p^{(k)})$ converge en casi todo punto de $X^{(k)} \cap X_\infty$. Para probar que si p verifica (C) entonces $p^{(k)}$ también satisface esta condición, necesitamos el siguiente

LEMA 3.3. Si $g(x) \in L^1(\mu)$ y k es un número natural, entonces existen una función $G(x) \in L^1(\mu)$ y una constante positiva C que sólo depende de k y de la dimensión n tales que

$$\int_{u+B_\alpha} |g(\theta_t x)|dt \leq \int_{B_\alpha} G(\theta_t x)dt,$$

si $|u| \leq k$, $\alpha \geq C$ y $n > 1$.

DEMOSTRACION. Si $|u| \leq k$ entonces

$$\int_{u+B_\alpha} |g(\theta_t x)|dt \leq \int_{B_{\alpha+k}} |g(\theta_t x)|dt = (\int_{B_\alpha} + \int_{B_{\alpha+k}-B_\alpha})|g(\theta_t x)|dt.$$

Para cada número natural i, $1 \leq i \leq n$, llamamos v^i al punto de R^n cuya coordenada i-ésima es nk y sus demás coordenadas son iguales a cero, mientras que $v^{-i} = -v^i$. Si $t = (t_1,t_2,\ldots,t_n) \in B_{\alpha+k}-B_\alpha$, existe j, $1 \leq j \leq n$, tal que $|t_j| > \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$. Supongamos $t_j > \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$, entonces

$$|t-v^j|^2 = |t|^2 + |v^j|^2 - 2\, t_j\, v_j^j \leq (\alpha+k)^2 + n^2k^2 - 2\alpha\sqrt{n}\, k$$

$$= \alpha^2 + 2\alpha k\, (1-\sqrt{n}) + k^2(n^2+1).$$

Luego,

$|t-v^j|^2 \leq \alpha^2$ si y sólo si $2\alpha(1-\sqrt{n}) + k(n^2+1) \leq 0$

y la última desigualdad se verifica si $\alpha \geq \frac{k(n^2+1)}{2(\sqrt{n}-1)} = C$.

En forma análoga se prueba que $|t-v^{-j}| \leq \alpha$ si $t_j < -\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$. Por lo tanto

$$B_{\alpha+k}-B_\alpha \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{(v^i+B_\alpha) \cup (v^{-i}+B_\alpha)\}.$$

Entonces si para cada $v \in R^n$, $g_v(x) = g(\theta_v x)$, tenemos

$$\int_{B_{\alpha+k}-B_\alpha} |g(\theta_t x)|dt \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{v^i+B_\alpha} + \int_{v^{-i}+B_\alpha}\right)|g(\theta_t x)|dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{B_\alpha} (|g_{v^i}(\theta_t x)| + |g_{v^{-i}}(\theta_t x)|)dt,$$

y el lema sigue tomando

$$G(x) = |g(x)| + \sum_{i=1}^{n} (|g_{v^i}(x)| + |g_{v^{-i}}(x)|).$$

Observemos ahora que al ser X_∞ invariante, si p satisface (C) entonces, para todo $s \in R^n$ y para casi todo x en X_∞ tenemos

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_{B_\alpha \Delta (s+B_\alpha)} p(\theta_t \theta_u x)dt}{\int_{B_\alpha} p(\theta_t \theta_u x)dt} = 0,$$

para casi todo $u \in R^n$, y entonces

$$\frac{\int_{B_\alpha \triangle (s+B_\alpha)} p(\theta_{t+u}x)dt}{\int_{B_\alpha} p^{(k)}(\theta_t x)dt} = \frac{\int_{B_\alpha \triangle (s+B_\alpha)} p(\theta_{t+u}x)dt}{\int_{B_\alpha} p(\theta_{t+u}x)dt} \cdot \frac{\int_{B_\alpha} p(\theta_{t+u}x)dt}{\int_{B_\alpha} p^{(k)}(\theta_t x)dt} \to$$

cuando $\alpha \to \infty$, para casi todo x en $X^{(k)}$, pues

$$R_\alpha(p_u, p^{(k)})(x) \leq S(p_u, p^{(k)})(x) < \infty \quad \text{p.p.} \quad \text{en}$$

$X^{(k)}$, donde $p_u(x) = p(\theta_u x)$.

También vemos que si $|u| \leq k$ entonces, en virtud del lema precedente, existe $C > 0$ y $P \in L^1(\mu)$ tal que

$$\int_{B_\alpha \triangle (s+B_\alpha)} p(\theta_{t+u}x)dt \leq \int_{B_\alpha} p(\theta_{t+u}x)dt + \int_{s+B_\alpha} p(\theta_{t+u}x)dt$$

$$= \int_{u+B_\alpha} (p(\theta_t x) + p_s(\theta_t x))dt \leq \int_{B_\alpha} P(\theta_t x)dt,$$

para todo $\alpha \geq C$, y aplicando el teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue tenemos

$$\frac{\int_{B_\alpha \triangle (s+B_\alpha)} p^{(k)}(\theta_t x)dt}{\int_{B_\alpha} p^{(k)}(\theta_t x)dt} = \frac{1}{m(B_k)} \int_{B_k} du \, \frac{\int_{B_\alpha \triangle (s+B_\alpha)} p(\theta_{t+u}x)dt}{\int_{B_\alpha} p^{(k)}(\theta_t x)dt}$$

tiende a cero cuando $\alpha \to \infty$, para casi todo x en $X^{(k)} \cap X_\infty$. Concluimos que si p satisface (C) entonces para cada $f \in L^1(\mu)$, $R_\alpha(f,p^{(k)})(x)$ converge a un límite finito que llamaremos $R(f,p^{(k)})(x)$, para casi todo x en $X^{(k)}$, además

$$R(f,p)(x) = \lim_{\alpha\to\infty} R_\alpha(f,p)(x) = R(f,p^{(k)})(x)$$

para casi todo x en $X^{(k)} \cap X_0$. Probaremos ahora que esta última igualdad también es válida sobre $X^{(k)} \cap X_\infty$. Para ello observemos que

$$R_\alpha(p^{(k)},p)(x) = \frac{\int_{B_\alpha} p^{(k)}(\theta_t x)dt}{\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt} = \frac{\frac{1}{m(B_k)}\int_{B_k} du \int_{B_\alpha} p(\theta_{t+u} x)dt}{\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt}$$

$$= \frac{1}{m(B_k)}\int_{B_k} du \frac{\int_{B_\alpha} p(\theta_{t+u} x)dt}{\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt} = \frac{1}{m(B_k)}\int_{B_k} R_\alpha(p_u,p)(x)du \ .$$

Puesto que

$$|R_\alpha(p_u-p,p)(x)| = \frac{\left|\int_{B_\alpha} (p_u-p)(\theta_t x)dt\right|}{\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt}$$

$$\leq \frac{\displaystyle\int_{(u+B_\alpha)\Delta B_\alpha} p(\theta_t x)dt}{\displaystyle\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt},$$

entonces $R_\alpha(p_u-p,p)(x) \to 0$, cuando $\alpha \to \infty$, en virtud de (C); luego, $R_\alpha(p_u,p)(x) = R_\alpha(p_u-p,p)(x) + 1$ converge a uno cuando $\alpha \to \infty$, para casi todo x. Además, el lema 3.3 nos dice que para cada x, los cocientes $R_\alpha(p_u,p)(x)$ están uniformemente acotados para $|u| \leq k$ y por lo tanto

$$\lim_{\alpha\to\infty} R_\alpha(p^{(k)},p)(x) = R(p^{(k)},p)(x) = 1 \qquad \text{p.p.},$$

luego, $R(p,p^{(k)})(x) = 1$, para casi todo x en $X^{(k)}$.

Entonces, para cada $f \in L^1(\mu)$,

$$R_\alpha(f,p)(x) = R_\alpha(f,p^{(k)})(x).R_\alpha(p^{(k)},p)(x)$$

converge en casi todo punto de $X^{(k)}$ y su límite es $R(f,p^{(k)})(x)$.

e) *El caso* $\mu(X) < \infty$.

En virtud del teorema 2.3 si $\mu(X) < \infty$ entonces

$$\int_E p^*(x)dx = \int_E p(x)dx,$$

para cada $E \in \mathcal{J}$. Además, para cada entero no negativo k,

$$\int_E p(x)dx = \int_E p^{(k)}(x)dx.$$

En particular, si $E = \{p^* = 0\}$, entonces

$$\int_E p^{(k)}(x)dx = 0$$

y observando que $E \cap X' = \bigcup_k (E \cap X^{(k)})$, concluimos que $\mu(E \cap X') = 0$. Luego, $p^* > 0$ en casi todo punto de X' y para cada $s \in R^n$ tenemos

$$\frac{\int_{B_\alpha \Delta (s+B_\alpha)} p(\theta_t x)dt}{\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt} \leq \frac{\left(\int_{B_{\alpha+|s|}} - \int_{B_{\alpha-|s|}}\right) p(\theta_t x)dt}{\int_{B_\alpha} p(\theta_t x)dt}$$

y haciendo $\alpha \to \infty$ se sigue que (C) se satisface.

R E F E R E N C I A S

1. A.P.CALDERON, *Ergodic theory and traslation-invariant operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 59 (1968), 349-353 MR 37 # 2939.

2. R.V.CHACON and D.S.ORNSTEIN, *A general ergodic theorem*, Illinois J. Math. 4, (1960), 153-160.

3. N.DUNFORD and J.SCHWARTZ, *Linear Operators*, Vol. I, Wiley-Interscience, New York, 1958.

4. N.FAVA, *k-parameter semigroups of measure-preserving transformations*. Trans. Amer. Math. Soc. 177 (1973), 345-352.

5. N.FAVA and J.NANCLARES, *Norbert Wiener's ergodic theorem for convex regions*, Trans. Amer. Math. Soc. 235 (1978), 403-406.

6. A.GARSIA, *Topics in almost everywhere convergence*. Lectures in Advanced Math, 4. Markham Publ. Co. Chicago (1970).

7. N.M.RIVIERE, *Singular integrals and multiplier operators*, Arkiv für matematik, Vol. 9 N° 2 (1971), 243-278.

8. N.WIENER, *The ergodic theorem*, Duke Math. Journal 5, (1939), 1-18.

INDICE