

Tesis de Posgrado

Estrategias de particionado de un segmento y su aplicación a la localización del cero de una ecuación que involucra a una función y sus derivadas

Sanz, Jorge Luciano Claudio

1980

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Sanz, Jorge Luciano Claudio. (1980). Estrategias de particionado de un segmento y su aplicación a la localización del cero de una ecuación que involucra a una función y sus derivadas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1651_Sanz.pdf

Cita tipo Chicago:

Sanz, Jorge Luciano Claudio. "Estrategias de particionado de un segmento y su aplicación a la localización del cero de una ecuación que involucra a una función y sus derivadas". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1980.

http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1651_Sanz.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

ESTRATEGIAS DE PARTICIONADO DE UN
SEGMENTO Y SU APLICACION A LA LOCALIZACION
DEL CERO DE UNA ECUACION QUE
INVOLUCRA A UNA FUNCION Y SUS DERIVADAS

por

Jorge Luciano Claudio Sanz

Trabajo de Tesis para optar al grado
de Doctor en Matemática

Departamento de Matemática,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales;
Universidad de Buenos Aires.

1980

4651
J.C.

El presente trabajo fue desarrollado durante la tenencia de una beca de investigación otorgada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

Quisiera dejar expresado mi más profundo agradecimiento al doctor Alberto González Domínguez por el permanente apoyo y estímulo que me ha brindado. También quisiera agradecer sinceramente a mi maestro y amigo ingeniero Hugo Ryckeboer por su extraordinaria generosidad, por sus múltiples enseñanzas y por su guía profesional coronada en la realización de mucho de lo original de este escrito. Mi agradecimiento al Centro de Computación en Salud de la Universidad de Buenos Aires, en nombre de su director, señora Alicia Rodríguez Trelles, por las largas horas otorgadas para el proceso de programas. Mi sincero agradecimiento al señor Kevin Ennis por sus valiosísimos comentarios y sugerencias y por fin, a la señorita Claudia Clemares quien tuvo a su cargo la tediosa tarea de mecanografiar y componer el trabajo.

Jorge L. C. Sanz

INDICE

§ 1. INTRODUCCION.

1.1. Nociones básicas.

1.1.1. Complejidad de un problema P .

1.1.2. Refinamiento de la localización de puntos notables de funciones.

1.1.3. Descripción de algoritmo de búsqueda secuencial.

1.2. 2 Problemas clásicos.

1.2.1. Búsqueda de ceros por bisección de intervalos.

1.2.2. Búsqueda de mínimos por Fibonacci.

1.3. Generalizaciones.

§ 2. ESTRATEGIAS DE PARTICIONADO DE UN SEGMENTO.

2.1. Planteo de los problemas.

a. Con pesos unitarios.

b. Con pesos arbitrarios.

2.2. Resolución del problema 2.1.a.

2.2.1. Fórmula de residuos límite para estrategias en $[a,b]$, de orden n y profundidad k .

2.2.2. Expresión de la performance límite apartir de la fórmula de residuos límite.

- 2.2.3. Performance límite para el caso $n = 1$.
- 2.2.4. Performance límite para el caso $n = 2$.
- 2.2.5. Realización computacional del cálculo de las fórmulas de residuos y performances.
 - 2.2.5.1. Resultados necesarios.
 - 2.2.5.2. Primera versión del programa resolvente.
 - 2.2.5.3. Caracterización de las expresiones que genera el programa.
 - 2.2.5.4. Segunda versión del programa.
- 2.2.6. Cota superior para las performances límites:
 $S_k^{(n)}$.
- 2.2.7. Resolución completa para los órdenes n impar.
- 2.2.8. Resolución para $n = 4$.
- 2.2.9. Cotas asintóticamente realizables.

§ 3. BUSQUEDA DEL CERO DE UNA ECUACION QUE INVOLUCRA A UNA FUNCION Y SUS DERIVADAS.

- 3.1. Planteo de los problemas.
 - a. Recurso: evaluación del dato.
 - b. Recurso: evaluación del dato y sus derivadas.
- 3.2. Posibilidad de resolución.
 - 3.2.1. Teorema del valor medio para operadores del

$$\text{tipo: } \sum_{i=0}^n R_{n-i}(x) \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^{(i)}$$

3.2.1.1. El caso coeficientes constantes y polinomio característico con todas sus raíces reales.

3.2.1.2. El caso en que los coeficientes son funciones continuas.

3.2.2. Teorema del valor medio para un par de operadores del tipo:

$$P_n^+ = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(\frac{d}{dx}\right)^{(i)} + \left(\frac{d}{dx}\right)^{(n)+} \quad y$$

$$P_n^- = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(\frac{d}{dx}\right)^{(i)} + \left(\frac{d}{dx}\right)^{(n)-}$$

3.2.3. Aplicaciones a los problemas propuestos.

3.3. Teorema central de cotas inferiores para algoritmos que hacen m observaciones sobre los datos.

3.3.1. Conclusiones sobre el problema 3.1.a.

3.3.2. Resolución de los problemas de particionado con pesos arbitrarios.

§4. CONCLUSIONES.

4.1. Enfoque geométrico de la resolución de los problemas de

particionado. Posibles generalizaciones.

4.2. Conjeturas centrales en los problemas abiertos.

APENDICE I: Simplificación de fórmulas.

APENDICE II: Listado de programas.

APENDICE III: Listado de programas.

§ I. Introducción.

1.1. Nociones básicas y advertencias.

Es la intención de este apartado, recordar ciertos elementos y lenguaje básico, que suponemos conocidos, y que resultan necesarios para el posterior contenido de este escrito.

Queremos formular la advertencia que los tópicos tratados en el presente párrafo no son objeto de discusión en el trabajo que desarrollamos posteriormente.

1.1.1. Complejidad de un problema P.

Sea P un determinado problema sobre una familia de datos \mathcal{H} . Supongamos que P es resoluble por una cierta familia de algoritmos, que denotamos \mathcal{E} .

Dada una función

$$c : \mathcal{E} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{R}^+,$$

que llamamos función costo, y otra función:

$$e : (\mathbf{R}^+)^{\mathcal{H}} \rightarrow \overline{\mathbf{R}^+}$$

que llamamos función de evaluación, entonces llamamos e-complejidad del problema P , al número:

$$\inf_{A \in \mathcal{E}} \left\{ e(c(A, D)) \right\}_{D \in \mathcal{J}}$$

Ejemplos de funciones de evaluación.

1. $e = \sup.$

$$\sup: (\mathbf{R}^+)^{\mathcal{J}} \rightarrow \overline{\mathbf{R}^+}$$

$$g \rightarrow \sup_{D \in \mathcal{J}} g(D)$$

2. Dada una medida p sobre \mathcal{K} de forma tal que: (\mathcal{K}, χ, p) sea espacio de probabilidad, donde χ es la familia de subconjuntos medibles en \mathcal{K} .

Si denotamos $M(\mathcal{K}, \chi, p)$ al conjunto de funciones de \mathcal{K} en \mathbf{R}^+ medibles, se tiene:

a. $e = \text{v.m.}$ (valor medio)

$$\text{v.m.}: M(\mathcal{K}, \chi, p) \rightarrow \mathbf{R}^+$$

$$g \rightarrow \int_{\mathcal{K}} g \, dp$$

b. $e = m(q)$ (media q)

$$m(q) : M(\mathcal{K}, \chi, p) \rightarrow \mathbf{R}^+$$

$$g \rightarrow \int_{\mathcal{K}} g(d)^q \, dp(d)$$

para $0 < q < \infty$.

En todo el escrito sólo utilizaremos la función de evaluación $e = \sup$, lo que nos exime de hacer más consideraciones sobre el ejemplo 2.

Denominaremos complejidad del problema P , cuando hablemos de e -complejidad de P y $e = \sup$.

1.1.2. Refinamiento de la localización de puntos notables de funciones.

Dada $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que P denota cierto subconjunto, no vacío, de $[a, b]$; dado $\varepsilon > 0$ definimos el problema de refinar la localización de elementos de P con aproximación ε como aquel que consiste en: hallar un intervalo $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$:
: $|I_\varepsilon| \leq \varepsilon$, de forma tal que $I_\varepsilon \cap P \neq \emptyset$.

Ejemplos:

1. $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $P: \{x: F(x) = 0\}$ es supuesto no vacío.
2. Nos interesa como caso particular de 1. la siguiente situación:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: f tiene derivadas hasta el orden n en todo punto de (a, b) . Supongamos dadas

$R_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$, funciones continuas.

$$P = \{c \in [a, b] \mid \sum_{i=0}^n \mathbb{R}_i(c) \cdot \left[\frac{d}{dx} \right]^{(i)} (f)(c) = 0\},$$
 con la suposición $P \neq \emptyset$.

3. Un ejemplo de naturaleza ligeramente distinta es:

$F = [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : F(a) \cdot F(b) \leq 0.$ Tomamos como P :

$$\{c \in [a, b] : \forall \delta > 0, \exists \eta_1 \leq c \leq \eta_2 : \eta_2 - \eta_1 \leq \delta \wedge F(\eta_1) \cdot F(\eta_2) \leq 0\}.$$

Es fácil verificar que, en estas condiciones de F , $P \neq \emptyset$.

Nota. En lo sucesivo denominaremos puntos notables de F a los elementos del conjunto P , cuando sea claro, en el contexto, de qué P se trata.

Al problema de: "refinar la localización de elementos de P ", lo entendemos, en tal sentido, como: "refinar la localización de puntos notables de F ", sobreentendiendo que P es el conjunto con el cual se trabaja. Frecuentemente mencionaremos "localización de puntos notables de F ", por comodidad.

En todos los ejemplos que trataremos, P será un conjunto unitario, con lo cual la condición $P \cap I_\epsilon \neq \emptyset$ se traduce en $P \subseteq I_\epsilon$.

1.1.3. Descripción de algoritmo de búsqueda secuencial.

Sea F un subconjunto de las funciones con n -derivadas continuas en $[0,1]$. Supongamos dado un punto notable para las funciones de F , caracterizado por la aplicación:

$$\begin{aligned} \eta &: F \rightarrow [0,1] \\ f &\rightarrow \eta(f) \end{aligned}$$

Es nuestra intención definir lo que entendemos por algoritmo de búsqueda secuencial que requiere N informaciones sobre sus datos. Intuitivamente un tal algoritmo será simplemente elegir k puntos sobre $[0,1]$ donde se observarán el dato: f y eventualmente alguna de sus derivadas; la metodología de elección de puntos estará sujeta a una dependencia funcional sobre los puntos ya elegidos y los valores observados del dato sobre ellos (descartamos por tanto cualquier aporte del azar). El producto del algoritmo será un intervalo que dependa del dato en curso y que garantice contener el punto notable. Sistematizando esta idea:

Sea $k \in \mathbb{N}$ y demos $k-1$ funciones:

$$\alpha_i: [0,1] \times \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow [0,1], \quad 2 \leq i \leq k.$$

Dado un dato $f \in F$, seleccionamos k puntos en $[0,1]$ así:

x_1 (independiente de f)

$$x_2 = \alpha_2(x_1, f^{\binom{j_1^1}{n_1}}(x_1), \dots, f^{\binom{j_1^1}{n_1}}(x_1)) \quad j_i^1 \in \mathbb{N}, \quad j_i \leq n$$

\vdots

$$x_k = \alpha_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, f^{\binom{j_1^1}{n_1}}(x_1), \dots, f^{\binom{j_1^{k-1}}{n_{k-1}}}(x_{k-1}), f^{\binom{j_1^{k-1}}{n_{k-1}}}(x_{k-1}))$$

$$j_i^{k-1} \in \mathbb{N}, \quad j_i^{k-1} \leq n$$

Hemos denotado con n_i la cantidad de información que se requiere sobre el dato en x_i ; por ello se pide

$$\sum_{i=1}^k n_i = N \quad \text{con lo cual se justifica la terminología usada}$$

para este tipo de algoritmos.

Como hemos mencionado la salida de un tal algoritmo sobre un dato $f \in F$ será un intervalo:

$$[d_1(f), d_2(f)] \subseteq [0, 1] : \quad \eta(f) \in [d_1(f), d_2(f)].$$

En este trabajo, utilizaremos estas nociones con alguna de las siguientes 2 restricciones:

1) $n_i = 1$. Además, solamente admitiremos sea requerida infor-

mación sobre los datos y no sobre sus derivadas.

2) $\{j_1^i, \dots, j_{n_i}^i\} = \{0, \dots, n_i-1\}$. Es decir sobre cada punto x_i , la información es "consecutiva" sobre las derivadas del dato; o sea no se puede exigir la derivada k-ésima sin estar presentes todas las anteriores. (Información hermítica).

El lector podrá observar que la localización del punto notable de la familia \mathbb{F} , por medio de estos algoritmos consistiría, dar un $\epsilon > 0$, la aproximación, encontrar un A_m , algoritmo de m informaciones: $d_{A_m}^2(f) - d_{A_m}^1(f) \leq \epsilon$ para cualquier dato $f \in \mathbb{F}$.

En este orden de cosas, el lector comprenderá el porqué de definirla performance de un algoritmo A_m como:

$$\sup_{f \in \mathbb{F}} |d_{A_m}^1(f) - d_{A_m}^2(f)| = d(A_m).$$

Lo mejor que podemos esperar entre la clase \mathcal{E}_m de algoritmos que hacen m observaciones secuenciales sobre los datos es:

$$\inf_{\mathcal{E}_m} d(A_m) \text{ y } \tilde{A}_m \text{ quien, quizás, lo realice.}$$

Interpretando como el esfuerzo de un algoritmo de búsqueda secuen

cial, a la cantidad de información que requiere sobre los datos, el problema de localizar el punto notable de los miembros de F con aproximación ϵ , admite, también, el planteo de la problemática de resolución con "esfuerzo" mínimo posible; es decir, la búsqueda del número:

$$\min \{ m : \exists A_m \text{ algoritmo en } \mathcal{E}_m : d(A_m) \leq \epsilon \}.$$

Es claro que, teniendo caracterizados los números:

$$\inf_{\mathcal{E}_m} d(A_m)$$

y el algoritmo que realice el ínfimo (si es que lo hay), para todo natural m , tendremos resuelto mucho más que el problema anterior. No debe perderse de vista, que la posibilidad de resolución del problema de localización con este tipo de algoritmos, queda fuertemente determinada por el tipo de punto notable que estemos tratando.

En el capítulo III, calcularemos estos números: $\forall m \in \mathbf{N}$

$$(*) \quad \inf_{A \in \mathcal{E}_m} \sup_{f \in F} |d_{A_m}^1(f) - d_{A_m}^2(f)|, \text{ fijando } F \text{ y por su-}$$

puesto la función n . Un adelanto de esto se puede observar en la sección próxima.

Para cerrar este apartado, digamos que si definimos como \mathbb{P} el problema que consiste en refinar la localización de $\eta(f)$ para todo $f \in F$, haciendo uso de algoritmos de la familia \mathcal{E}_m , tomando como costo, $c : F \times \mathcal{E}_m \rightarrow \mathbf{R}^+$

$$(f, A_m) \rightarrow c(f, A_m) = |d_{A_m}^1(f) - d_{A_m}^2(f)|,$$

el número (*) no es más que la complejidad del problema \mathbb{P} (ver 1.1.1).

El problema de localizar con aproximación ϵ dada, el punto notable, con esfuerzo mínimo entre los algoritmos de búsqueda secuencial, también puede ser explicitado en términos de complejidad (ver 1.1.1). Denotemos con

$$\mathcal{E}_\epsilon : \bigcup_{m \geq 0} \left\{ A_m \in \mathcal{E}_m : |d_{A_m}^1(f) - d_{A_m}^2(f)| \leq \epsilon \quad \forall f \in F \right\} \quad \text{y esta-}$$

blezcamos el costo: $c : \mathcal{E}_\epsilon \times F \rightarrow \mathbf{R}^+$.

$$(A_\epsilon, f) \rightarrow n(A_\epsilon, f)$$

donde $n(A_\epsilon, f)$ es el monto de información requerida por A_ϵ sobre f (esto está bien definido pues $A_\epsilon \in \mathcal{E}_m$ para algún m .) Entonces la complejidad del problema será el esfuerzo mínimo buscado.

1.2. 2 problemas clásicos.

En este apartado desarrollamos el planteo de los problemas que son el punto de partida de nuestros resultados posteriores.

1.2.1. Búsqueda de ceros por bisección de intervalos.

Es bien conocido el siguiente problema:

Sea $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, con la siguiente propiedad:

$$\exists c \in [0,1] : f(c) = 0; f(x) < 0 \text{ si } x < c; f(x) > 0 \text{ si } x > c.$$

Denominaremos $D_{<}^{\circ}$ a esta familia de funciones.

1. Se pretende localizar con aproximación ε el cero de los miembros de $D_{<}^{\circ}$, teniendo como único recurso la evaluación de los datos en su dominio.
2. Se desea conocer el mejor método entre aquellos que logran el objetivo propuesto en 1.

Para tener correctamente definidos los objetivos 1. y 2. recurrimos a lo expuesto en 1.1.3. Sea $F = D_{<}^{\circ}$ y consideremos como $\eta : F \rightarrow [0,1]$ la función que a cada miembro de $D_{<}^{\circ}$ le atribuye su cero : $\eta(f) = c$.

Consideremos los algoritmos de búsqueda secuencial de esfuerzo $n : \mathcal{E}_n$; recordemos que, por definición, todo miembro de \mathcal{E}_n sólo explora los valores de los datos sobre $[0,1]$. Ahora, el mejor método, lo entendemos como aquel algoritmo de \mathcal{E}_ε que realiza la complejidad del problema: localizar con aproximación ε ,

la raíz de cualquier dato en D_{ϵ}° .

Es bien sabido que la complejidad no es más que:

$$\left(\log_2 \frac{1}{\epsilon} \right)^*$$

, por el hecho de que, entre los algoritmos de búsqueda secuencial que hacen k observaciones de sus datos: ξ_k , la mejor performance la tiene quien logre:

$$\sup_{f \in F} |d^1(f) - d^2(f)| = \frac{1}{2^k}.$$

Nos interesa hacer incapié en que la metodología para resolver la cuestión sigue 2 instancias bien definidas:

a. El problema tiene solución, pues evaluando cualquier dato

$f \in D_{\epsilon}^{\circ}$ en un valor interior a su dominio se logra un efectivo refinamiento en la localización de $\eta(f)$; en efecto, tomando $x_0 \in (0,1)$ y evaluando f en x_0 se tienen las siguientes alternativas:

$$f(x_0) \leq 0, \text{ con lo cual } \eta(f) \in [x_0, 1] \quad \delta$$

$$f(x_0) \geq 0, \text{ y por lo tanto } \eta(f) \in [0, x_0]. \text{ Es decir, la}$$

evaluación en un punto x_0 , produce un descarte, un intervalo sobre el que se tiene la certidumbre de que el punto notable no se encuentra allí.

b. Sabiendo que los algoritmos que evalúan f solamente, progresan la localización de su cero, el segundo problema consiste en determinar la manera óptima de poner secuencialmente los puntos, utilizando así la menor cantidad posible. Una forma de realizar esto es la siguiente:

b.1 Encontrar el algoritmo secuencial que hace n evaluaciones, que explota lo mejor posible la propiedad que hace que el problema sea resoluble.

b.2 Probar que la performance de ese algoritmo no es mejorable por ningún otro de la clase \mathcal{A}_n .

La distinción entre b.1 y b.2 parece innecesaria, porque es difícil pensar que el algoritmo que mejor explote la propiedad propuesta en a. no es "ad-hoc" el mejor. Sin embargo la distinción es conceptual para lo que sigue, en virtud de que no parece tan trivial lograr sistematizar la siguiente idea:

"no hay mejor método que el expuesta en a. para refinar la localización de $\alpha(f)$ ", y de poder hacerlo, la misma cuestión para los casos que nos ocuparemos en el futuro, directamente es insensata como se podrá comprobar.

En el capítulo III daremos una prueba de que la bisección es óptima como parte de un resultado mucho más general.

1.2.2. Búsqueda de mínimos por Fibonacci.

Es bien conocido el siguiente problema: Sea $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, con la propiedad : f tiene un sólo mínimo relativo en su dominio. Denotemos con M a esa clase de funciones, dado $\epsilon > 0$:

1. Se pretende localizar el mínimo relativo de $f \in M$ con aproximación ϵ , mediante la sola evaluación de cada dato f , en los puntos de su dominio.
2. Se desea conocer el mejor método entre aquellos que logran el objetivo propuesto en 1.

En el contexto de 1.1.3., denotamos $\mathbb{F} = M$, y trabajamos con esa subfamilia de $C^0[0,1]$. Como punto notable de cada miembro de \mathbb{F} tomamos a su mínimo relativo: $\eta(f)$. Observando que los algoritmos de búsqueda secuencial sólo exploran los valores de sus datos (por estar considerando $\mathbb{F} \subseteq C^0[0,1]$, ver 1.1.3) el problema de encontrar el mejor método entre los que resuelven 1. lo entendemos como la búsqueda del algoritmo de \mathcal{E}_ϵ que realiza la complejidad del problema: localizar con aproximación ϵ el mínimo relativo de cuali

quier dato en M .

Es bien sabido que el valor de esta complejidad es

$$\min \left\{ k : \frac{1}{F_k} < \epsilon \right\} \text{ donde } (F_k)_{k \geq 0} \text{ es la sucesión de Fibonacci:}$$

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \quad k \geq 2.$$

En realidad, es bien conocido el resultado: Si $k \geq 2$

$$\inf_{\mathcal{E}_k} \sup_f |d_{A_k}^1(f) - d_{A_k}^2(f)| = \frac{1}{F_k}^*, \text{ y no hay ningún algoritmo}$$

en \mathcal{E}_k que realice el ínfimo. Como hicimos en 1.2.1, y a los efectos de remarcar un lineamiento común entre la resolución de este problema y aquel, tenemos 2 instancias:

a. La posibilidad de encontrar un algoritmo que evaluando los datos localice el mínimo está garantizada por el hecho siguiente:

Tomemos $x_1 < x_2$ ambos en $(0,1)$, sea $f \in M$ el dato en curso; se tienen las siguientes alternativas, de prueba elemental:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \rightarrow \eta(f) \in [0, x_1]$$

$$f(x_2) \leq f(x_1) \rightarrow \eta(f) \in [x_2, 1]$$

Esto indica que es posible progresar la localización de $\eta(f)$.

* ver (1), (2), (4), (6), (8), (9).

b. El camino posible a seguir ahora consistiría en explotar la propiedad dada en a. lo mejor posible, para ubicar n evaluación de cualquier dato, y luego probar que la performance de este algoritmo no es mejorada por ningún otro de \mathcal{E}_n .

Este lineamiento se cumple excepto por el hecho de que ningún algoritmo realiza el ínfimo en \mathcal{E}_n . para lo cual habrá que encontrar una familia de algoritmos cuyo límite de performances realice $\frac{1}{F_n}$ y probar que no es mejorable.

La prueba completa de esto lo haremos en el capítulo III, como parte de un problema más general.

Para terminar con este inciso, digamos que es posible estudiar el mismo problema con una clase de funciones más restrictiva: el subconjunto de funciones de $M: \tilde{M}$ que son derivables en su dominio. Cabe aclarar que, el recurso de los algoritmos de búsqueda podría ser ampliado a la evaluación de la derivada de los datos, pero, como anunciamos en 1.3.3., el algoritmo debe requerir en primera instancia el valor del dato en aquellos puntos donde invoque su derivada. Esta restricción puede considerarse de esta otra forma: el costo de evaluar una derivada corresponde a 2 veces el de evaluar un dato en un punto y la evaluación del dato donde sea requerida su derivada no tiene costo (de esta forma nos sentimos liberados de la supuesta molestia de que se nos cobre lo que no nos interesa!)

Será probado que entre los algoritmos de búsqueda secuenciales $\tilde{\mathcal{E}}_n$ que hacen uso de n informaciones del dato $f \in \tilde{M}$, la mejor performance la tiene quien logra, exactamente:

$$\sup_{f \in \hat{M}} |d_1(f) - d_2(f)| = \frac{1}{F_n}, \quad n \geq 0.$$

No debe sorprender que la única mejora sea lograr en forma exacta lo que antes se hacía como límite de performances. Este problema no nos consta como tratado previamente y su resolución, bajo un planteo mucho más general, se realizará en § III.

1.3. Generalizaciones.

En esta sección delineamos los temas que son objeto de estudio de todo el resto del trabajo.

1. Los dos problemas expuestos en 1.2 admiten una rápida generalización de sus planteos en la siguiente dirección:

Consideremos las funciones $C^n[0,1]$. Tomemos un subconjunto: F , formado por aquellas con la propiedad:

$$\begin{aligned} \exists c \in (0,1): \quad f^{(n)}(x) < 0 \quad \text{si} \quad x < c, \\ f^{(n)}(x) > 0 \quad \text{si} \quad x > c. \end{aligned}$$

Distingamos a ese punto $c : n(f)$ como notable en la clase que nos ocupa. Demos $\epsilon > 0$, nos preguntamos cuál es el algoritmo de

búsqueda secuencial que localiza $\eta(f)$ con aproximación ϵ con esfuerzo mínimo, evaluando solamente f .*

Mas aún se podría plantear el mismo problema sustituyendo F por las funciones que logran un cambio de signo en el operador diferencial lineal:

$$\sum_{i=0}^n c_i \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)}, \quad c_i \in \mathbf{R},$$

contexto en el cual, el caso anterior es un caso muy particular.

La factibilidad y la optimalidad de resolución de este y otros problemas relacionados, es el objeto del capítulo III.

2. Por otro lado, en el punto b. de 1.2.1 (y 1.2.2) insistimos en que una metodología que aparecía como aconsejable era tratar de explotar lo mejor posible, aquella propiedad mencionada en 1.2.1 (y 1.2.2 respectivamente), que hacía factible la resolución del problema planteado.

Ambos problemas arrojaban la siguiente situación común: Dado un dato f , explorando su valor en un $x \in (0,1)$, para el problema 1.2.1 o explorando sus valores en x_0 y $x_1 \in (0,1)$ para el problema 1.2.2, se obtiene un intervalo de descarte: D para el cual existe la seguridad de no encontrarse $\eta(f)$. Una vez producido el descarte, se agrega un nuevo punto en $(0,1)-D$ diferente de los ya existentes, y

* ver (5).

nuevamente cabe la reducción anterior; así seguimos hasta completar, digamos k evaluaciones.

En el capítulo II tratamos, en principio, de sistematizar la idea de lo que entendemos por "lograr el máximo de provecho" de esta metodología para ubicar k puntos; esto dará origen a lo que hemos llamado: estrategias de particionado de un segmento, de orden n y profundidad k .

El parámetro n , sugiere al lector que estas estrategias sistematizarán, más en general, "el mejor provecho obtenible" de las propiedades que permitirán resolver cada una de las generalizaciones en 1. ¡Y de hecho lo son!

Para concluir este esbozo de propósitos digamos que, el cálculo de las estrategias óptimas de particionado y de sus performances, y la relación de ellas con los problemas expuestos en el capítulo III son la médula de este trabajo.

§ II. Estrategias de particionado de un segmento.

2.1 Planteo del problema.

a. Con pesos unitarios.

Dados $n \geq 1$, $k \geq 1$ números naturales vamos a definir que entendemos por estrategia de particionado de $[a,b]$, de profundidad k y orden n de decisión.

La idea es la siguiente: tenemos una arborescencia G , binaria, de profundidad k ; a cada nodo θ , le asignamos un estado que consiste de la siguiente información: un par de puntos x_0, x_1 que denotan los extremos de un intervalo abierto no vacío, llamado segmento base de θ ; un subconjunto distinguido de $(x_0, x_1) : A$, de cardinal $n-1$; si θ no es terminal, un punto $P \in (x_0, x_1) - A$; si el nodo no es la raíz de G , un número positivo que indica la longitud del segmento que le falta a (x_0, x_1) para obtener el segmento base del nodo padre de θ .

Para explicitar como se obtiene el estado de un nodo a partir de sus antecesores necesitamos ser más precisos.

Para la definición formal procedemos inductivamente en la profundidad : k (recomendamos seguir la definición con los ejemplos 1 y 2)

Si $k = 1$, llamamos estrategia de particionado de profundidad 1 y orden n de decisión, al par: (G,f) , donde:

G es una arborescencia binaria de 3 vértices (y por lo tanto de profundidad 1) (ver figura I)

f es una función con dominio en los vértices de G que verifica

$$(i) \quad f \text{ (raíz de } G) = (A, a, b, e, P)$$

donde:

$$A \subset (a, b) : |A| = n-1$$

a, b extremos del segmento en cuestión.

$$e \in \mathbb{R}_{>0} .$$

$$P \in (a, b) - A.$$

$$(ii) \quad f \text{ (sucesor izquierdo de raíz)} = (A_i, x_i, b, e_i)$$

donde:

e_i : distancia del punto $A \cup \{P\}$ más próximo de a .

$$\text{o sea : } \min_{x \in A \cup \{P\}} |a-x|$$

x_i : punto de $A \cup \{P\}$ que realiza la distancia e_i .

$$A_i : A \cup \{P\} - \{x_i\} .$$

$$(iii) \quad f \text{ (sucesor derecho de raíz)} = (A_d, x_d, a, e_d)$$

e_d : distancia del punto de $A \cup \{P\}$ más próximo de b .

$$\text{o sea } \min_{x \in A \cup \{P\}} |b-x|$$

x_d : punto de $A \cup \{P\}$ que realiza la distancia e_d .

$$A_d : A \cup \{P\} - \{x_d\} .$$

Vamos a dar un ejemplo concreto para el caso $[a, b] = [0, 1]$ y $n=3$.

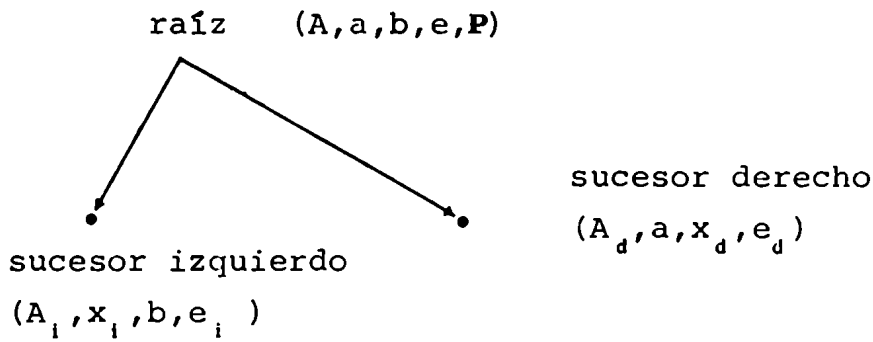
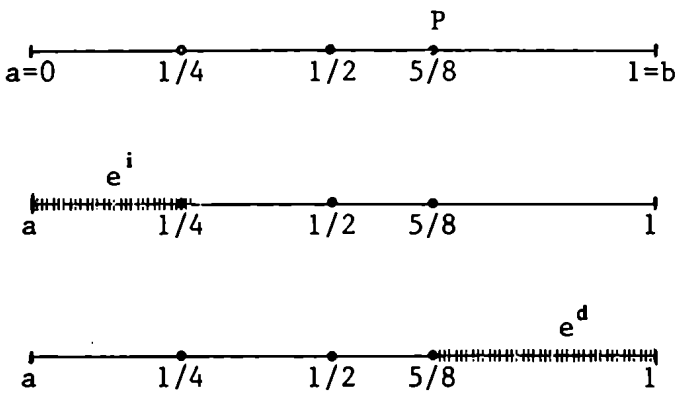


FIG I. Estrategia de profundidad 1, para $[a, b]$.

Ejemplo 1.



$$A = \{1/4, 1/2\}.$$

$$P = 5/8.$$

$$x^i = 1/4.$$

$$e^i = 1/4.$$

$$A^i = \{1/2, 5/8\}.$$

$$x^d = 5/8.$$

$$e^d = 3/8.$$

$$A^d = \{1/4, 1/2\}.$$

Suponiendo definido el concepto de estrategia de particionado para segmentos $[x, y]$ con profundidad $h \leq k$, definidos estrategia de particionado de $[a, b]$ de profundidad $k+1$, como:

(G, f) , donde G es arborescencia binaria de profundidad $k+1$ y f es una función con dominio en los vértices de G que verifica:

1. (H, g) es estrategia de particionado de $[a, b]$ de profundidad 1, donde:

H es el subárbol generado por la raíz de G y por sus dos sucesores: el izquierdo: I y el derecho: D .

g es la función definida como:

$$g(\text{raíz de } H) = f(\text{raíz de } G)$$

$$g(I) = (f_j(I))_{j=1,2,3,4}$$

$$g(D) = (f_j(D))_{j=1,2,3,4}$$

2. (H^i, g^i) y (H^d, g^d) son estrategias de particionado de profundidad k para los segmentos: $(f(I)_2, f(I)_3)$ y $(f(D)_2, f(D)_3)$

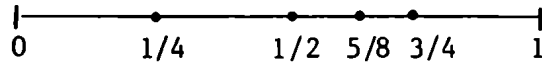
H^i, H^d son las arborescencias de profundidad k generadas por los vértices de G excepto su raíz y que tienen como raíces al sucesor izquierdo I de la raíz de G , y al sucesor derecho D de la raíz de G , respectivamente.

g^i, g^d son restricciones de f a los vértices de H^i , y H^d respectivamente.

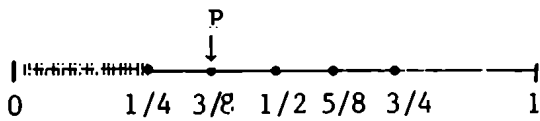
Vamos a dar un ejemplo de estrategia de particionado de $[0,1]$ para $n=4$ y profundidad 2.

Ejemplo 2.

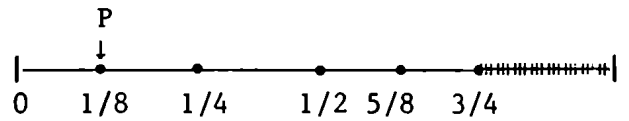
$(\{1/4, 1/2, 5/8\}, 0, 1, 3/4)$



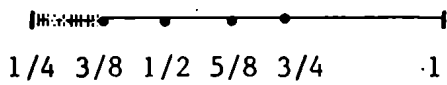
$(\{1/2, 5/8, 3/4\}, 1/4, 1, 1/4, P)$



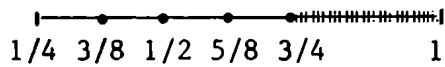
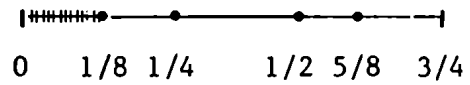
$(\{1/4, 1/2, 5/8\}, 0, 3/4, 1/4, P)$



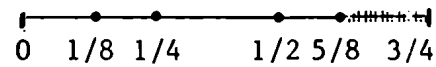
$(\{1/2, 5/8, 3/4\}, 3/8, 1, 1/8)$



$(\{1/4, 1/2, 5/8\}, 1/8, 3/4, 1/8)$



$(\{3/8, 1/2, 5/8\}, 1/4, 3/4, 1/4)$



$(\{1/8, 1/4, 1/2\}, 0, 5/8, 1/8)$

Observaciones.

Como se ve, el valor de e en el estado inicial no tiene ningún papel.

Dada $E_n(k) = (G, f)$ estrategia de particionado de $[a, b]$ y denotando F a la familia de caminos en G , que tienen extremo inicial en un sucesor de la raíz de G y extremo final en un vértice terminal de G , denominamos, descarte de la estrategia, al número:

$$\min_{C \in F} \left\{ \sum_{v \in V(C)} f_4(v) \right\} = \text{desc}(E_n(k)),$$

donde $V(C)$ denota el conjunto de vértices afectados por el camino C ; llamamos valor de la estrategia a:

$$b-a-\text{desc}(E_n(k)) = \text{val}_{[a, b]}(E_n(k)).$$

Para el ejemplo 2, el descarte de la estrategia es $3/8$ y el valor $5/8$.

Por último, definimos performance límite para estrategias de particionado de $[a, b]$ de profundidad k y orden n de decisión, al número real: $\inf \{ \text{val}_{[a, b]}(E_n(k)) : E_n(k) \text{ estrategia de profundidad } k \}$ que notaremos $PL_{[a, b]}(k)$ (sobreentendiendo que el

orden de decisión es fijo: n).

Ahora estamos en condiciones de enunciar la nueva clase de problemas que hemos logrado:

Dado $n \geq 1$ natural y $\epsilon > 0$, llamamos $Q_n^\epsilon [a,b]$ al problema que consiste en encontrar una estrategia de particionado de $[a,b]$ de orden n de decisión y con profundidad mínima posible, $E_n(k)$, de forma tal que:

$$\text{val}_{[a,b]} (E_n(k)) \leq \epsilon \quad (*).$$

Llamamos estrategias óptimas a estas estrategias, y profundidad óptima a la profundidad de las arborescencias que las definen.

Observaciones.

1. Si calculásemos los números $PL_{[a,b]}(k)$, $k \geq 1$ tendríamos re

suelto potencialmente mucho más que el problema $Q_n^\epsilon [a,b]$. Esto es precisamente lo que haremos en los próximos parágrafos: calcular $PL_{[a,b]}(k)$.

2. El concepto "estrategia óptima" está bien definido, pues siempre se encuentra una estrategia $E_n(k)$ que verifique (*). En otras

palabras, $\zeta_n^c[a,b]$ tienen solución.

3. El término "pesos unitarios" se debe a que el orden de decisión n coincide con la cantidad de puntos distinguidos: $A \cup \{P\}$ en cada instancia de decidir que intervalo extremo descartar, así decimos que cada punto seleccionado tiene un "peso unitario", a diferencia de lo que exponemos seguidamente.

b. Con pesos no unitarios.

En las estrategias anteriores el número total de puntos que se colocan o distinguen es: $n+k-1$, si se trata de una estrategia de orden n y profundidad k . Esto sugiere que podríamos haber tomado como parámetro la cantidad de puntos que se ubican en lugar de la profundidad; llamemos m a esa cantidad. Supongamos ahora que en lugar de exigir que cada instancia de decisión esté acompañada por n puntos ubicados en el segmento base, admitimos menos puntos, pero cada uno de ellos acompañado de un número natural o peso: p_i , y exigimos que

$$\sum_{i=1}^k p_i = n, \text{ donde } k \text{ es la cantidad de puntos presentes.}$$

Luego de descartar un segmento extremo, procedemos a ubicar más puntos con sus respectivos pesos y redefinimos los de los

ya existentes conservando, en esta nueva instancia, la propiedad mencionada antes. La terminación de la estrategia está controlada por el número natural m_p que indica la cantidad máxima de pesos que se tienen ante cualquier alternativa de colocación de puntos; $m_p = m$ para el caso de estrategias de particionado con pesos unitarios.

Si ahora fijásemos un natural $\ell : 1 \leq \ell \leq n$, y pidiésemos que el peso de cualquier punto que se ubica en la estrategia tenga valor menor o igual que ℓ , nuestras estrategias dependerían de 3 parámetros: (n, m_p, ℓ) . El caso $(n, m, 1)$ es el tratado en a. y de hecho sólo nos resultará útil, fuera de este, el otro caso extremo: (n, m_p, n) , por motivos que detallaremos oportunamente.

Vamos a definir rigurosamente la noción de estrategia que hemos esbozado sólo para mayor referencia del lector: Una estrategia de particionado del tipo (n, m_p, ℓ) , es un par (G, f) , donde G es un arborescencia binaria (ahora puede no ser balanceada) y f es una función sobre sus nodos, tal que si θ denota uno de ellos, f le asigna la siguiente información; un intervalo (x_0, x_1) : el segmento base de θ ; un subconjunto $A \subset (x_0, x_1)$, dotado de una aplicación: $p_A : A \rightarrow \mathbb{N} : p_A(a) \leq \ell$; si el nodo no es terminal, un $B \subset (x_0, x_1) - A : |A| + |B| \leq n$ dotado de una aplicación:

$$p : A \cup B \rightarrow \mathbf{N} : 0 < p(x) \leq \ell, \quad x \in B \quad \text{y} \quad 0 \leq p(x) \leq \ell \quad \text{si} \quad x \in A,$$

con la propiedad

$$\sum_{a \in A} \left(p_A(a) + p(a) \right) + \sum_{b \in B} p(b) = n.$$

Como se ve el objeto de p es aportar nuevos pesos a los puntos ya existentes en A y definir los del subconjunto B . Por último, a cada nodo distinto de la raíz se le asigna "la eliminación", que se define igual que en a . pero considerando $A \cup B$ un lugar de $A \cup \{P\}$.

Finalmente formalicemos la consistencia con m_p . sea F la familia de caminos que tienen vértice inicial en un sucesor de la raíz de G y final en un nodo terminal de G ; dado $C \in F$, denotemos $V(C)$ el conjunto de vértices afectados por C , entonces se debe cumplir:

$$\forall C \in F : \sum_{\theta \in V(C)} \left(\sum_{b \in B_\theta} p_\theta(b) + \sum_{a \in A_\theta} p_\theta(a) \right) \leq m_p,$$

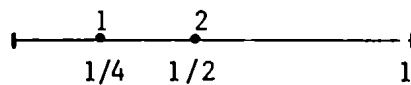
y que por lo menos para un $C \in F$ valga la igualdad.

El lector logrará, sin dificultad alguna, la noción de descarte y valor de una estrategia (n, m_p, ℓ) como también la noción de performance límite, que denotaremos: $PL(n, m_p, \ell)$.

Seguidamente, damos un ejemplo de estrategia de particionado de pesos no unitarios: $(3, 5, 2)$, en el que se puede observar que sólo una rama cubre el valor 5 de asignación total de pesos.

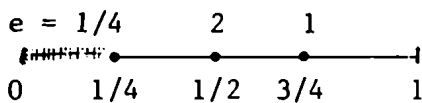
Ejemplo 3.

$$A = \{1/4\}, B = \{1/2\}.$$



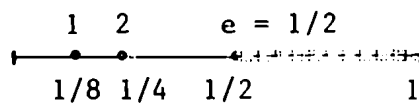
$$p : A \cup B \rightarrow N, p(1/4)=0, p(1/2)=2$$

$$p(1/4) = 1.$$



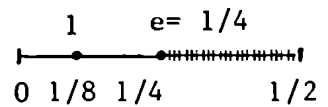
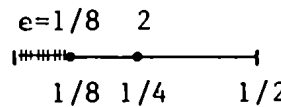
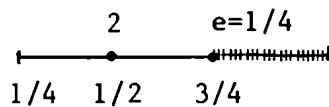
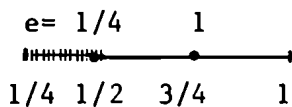
$$A = \{1/2\}, p(1/2) = 2$$

$$B = \{3/4\}, p(1/2) = 0, p(3/4) = 1$$



$$A = \{1/4\}, B = \{1/8\}$$

$$p(1/4) = 1, p(1/8) = 1, p(1/8) = 1$$



Descarte: 1/2, valor = 1/2

Para concluir este apartado, digamos que el cálculo de los números $PL(n, m_p, \ell)$ será hecho con el capítulo III y no aquí por razones técnicas.

2.2. Resolución del problema 2.1.a.

Dados $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_*$. Vamos a atacar la resolución del problema: encontrar estrategias óptimas para resolver $\Omega_n^\epsilon[a, b]$, para cualquier $\epsilon > 0$. (y en particular calcular la profundidad óptima), de la siguiente manera:

Para cada $k \in \mathbb{N}_*$, calcular la performance límite:

$PL_{[a, b]}(k)$, y conocer si existe o no, una estrategia de particionado de $[a, b] : E_n(k)$, de forma tal que: $PL_{[a, b]}(k) =$

$= \text{val}_{[a, b]}(E_n(k))$. (Recordemos que $PL_{[a, b]}(k)$ no tiene porqué

ser realizado, en general como el valor de una estrategia de profundidad k).

Una vez determinada la sucesión: $(PL_{[a, b]}(k))_{k \in \mathbb{N}}$ y la pro-

piedad adicional mencionada, habremos calculado las profundidades óptimas, pues dado $\epsilon > 0, \epsilon < b-a$, determinamos el mínimo del siguiente conjunto:

$$\{ k \in \mathbb{N}_* : \text{PL}_{[a,b]}(k) < \epsilon \vee (\text{PL}_{[a,b]}(k) = \epsilon \wedge \exists E(k) :$$

$$: \text{val}_{[a,b]}(E_n(k)) = \text{PL}_{[a,b]}(k) \} ; \text{ dicho valor será el bus}$$

cado óptimo, como se comprueba por simple inspección.

Por último, para aquellos k en que no exista una estrategia de particionado de $[a,b]$ cuyo valor realice $\text{PL}_{[a,b]}(k)$, daremos estrategias que lo aproximen, tanto como se quiera.

2.2.1. Fórmula de residuos límite para estrategias en $[a,b]$ de orden n y profundidad k .

Dados $n \in \mathbb{N}$, y $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, cada vez que tomamos $n+1$ números reales $x_1, \dots, x_{n+1} > 0 : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = b-a$ quedan de terminados n puntos en $[a,b] :$

$$p_i = p_{i-1} + x_i \quad i \geq 2; \quad p_1 = a + x_1, \quad \text{que verifican}$$

$$a < p_1 < p_2 < \dots < p_n < b.$$

Ahora, si $k \in \mathbb{N}_*$, llamamos valor límite de las estrategias de particionado de $[a, b]$ de orden n y profundidad k , sujetas a la posición inicial $\{p_1, \dots, p_n\}$, al número real $F_k^{[a, b]}(x_1, \dots, x_{n+1})$, que definimos como:

$$\begin{aligned} \inf \{ \text{val}_{[a, b]}((G(k), f)) : f(\text{raíz de } G(k)) = \\ = (\{p_1, \dots, p_{n-1}\}, a, b, 0, p_n) \end{aligned}$$

Definición. Con las notaciones anteriores:

Llamamos fórmula de residuos límite a la función:

$$F_k^{[a, b]} : \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i > 0 \ (\forall i \in I_{n+1}), \ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = b-a \} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow F_k^{[a, b]}(x_1, \dots, x_{n+1})$$

(Sobreentendemos que el orden de decisión es fijo: n)

Es claro que $\inf_{\bar{x} \in \text{Dom } F_k^{[a,b]}} F_k^{[a,b]}(\bar{x}) = \mathbb{P}L_{[a,b]}(k)$; sin embargo, la

partición de $\mathbb{P}L_{[a,b]}(k)$ en estos dos ínfimos tiene la gran ven

taja de que las funciones $F_k^{[a,b]}$ se pueden calcular recursivamen

te en k :

Teorema 1.

Dado $n \geq 1$.

$$1. F_1^{[a,b]}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \text{máx} \left(\begin{array}{l} n \\ \sum_{i=1}^n x_i, \end{array} \begin{array}{l} n+1 \\ \sum_{i=2}^{n+1} x_i \end{array} \right).$$

2. Si $k > 1$:

$$F_k^{[a,b]}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \text{máx} \{ g_{k-1}(x_1, \dots, x_n), h_{k-1}(x_2, \dots, x_{n+1}) \},$$

donde g_{k-1}, h_{k-1} son funciones definidas así:

$$g_{k-1}(x_1, \dots, x_n) = \text{mín}_{l=1, \dots, n} \{ \inf_{0 < y < x_l} F_{k-1}^{[a, p_n]}(x_1, \dots, x_{l-1}, y, x_l, \dots, x_{l+1}, \dots, x_n) \}.$$

$$h_{k-1}(x_2, \dots, x_{n+1}) = \text{mín}_{l=2, \dots, n+1} \{ \inf_{0 < y < x_l} F_{k-1}^{[p_1, b]}(x_2, \dots, x_{l-1}, y, x_l, \dots, x_{n+1}) \}.$$

$$-y, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})\}.$$

Demostración.

1. Trivial.

2. Comenzamos por observar que las funciones $F_{k-1}^{[a, p_n]}$ y $F_{k-1}^{[p_1, b]}$ están correctamente evaluadas en los puntos $(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_i - y, x_{i+1}, \dots, x_n)$ y $(x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_i - y, \dots, x_{n+1})$ respectivamente, pues

$$(x_1, \dots, x_{i-1} + x_i + \dots + x_n = p_n - a \text{ y } x_2 + \dots + x_{i-1} + x_i + \dots + x_{n+1}$$

= $b - p_1$, con todas las coordenadas positivas.

Sea $E_n(k) = (G(k), f)$ estrategia de particionado de $[a, b]$:

: f (raíz de $G(k)$) = $(\{p_1, \dots, p_{n-1}\}; a, b, 0, p_n)$; llamemos

$E_n^i(k-1)$ y $E_n^d(k-1)$ a las estrategias de particionado de $[a, p_n]$

y $[p_1, b]$ que subtienden los sucesores izquierdo y derecho de la

raíz de $G(k)$ respectivamente. Es claro que se verifican:

$$\text{val}_{[a, p_n]}^i(E_n^i(k-1)) \geq g_{k-1}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{val}_{[p_1, b]} (E_n^d(k-1)) \geq h_{k-1}(x_2, \dots, x_{n+1}).$$

Teniendo presente que:

$$\text{val}_{[a, b]} (E_n(k)) = \text{máx} (\text{val}_{[a, b_n]} (E_n(k-1)), \text{val}_{[p_1, b]} (E_n^d(k-1)))$$

resulta la desigualdad:

$$\text{val}_{[a, b]} (E_n(k)) \geq \text{máx} \{g_{k-1}(x_1, \dots, x_n), h_{k-1}(x_2, \dots, x_{n+1})\}.$$

Por lo tanto:

$$F_k^{[a, b]}(x_1, \dots, x_{n+1}) \geq \text{máx} \{g_{k-1}(x_1, \dots, x_n), h_{k-1}(x_2, \dots, x_{n+1})\}.$$

Veamos que la desigualdad anterior no es estricta.

Supongamos lo contrario:

$\exists x_1^0, \dots, x_{n+1}^0, \in \mathbb{R}_{>0} : \sum_{i=0}^{n+1} x_i^0 = b-a$, de forma tal que:

$$F_k^{[a,b]}(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0) > \max \{ g_{k-1}(x_1^0, \dots, x_n^0), h_{k-1}(x_2^0, \dots, x_{n+1}^0) \} .$$

Por lo tanto se cumplen conjuntamente:

(i) $F_k^{[a,b]}(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0) > g_{k-1}(x_1^0, \dots, x_n^0)$.

(ii) $F_k^{[a,b]}(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0) > h_{k-1}(x_2^0, \dots, x_{n+1}^0)$.

de (i) tenemos:

$$\exists i \in \mathbb{I}_n : \exists y^0 : 0 < y^0 < x_i^0 : F_k^{[a,b]}(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0) > F_{k-1}^{[a, p_n^0]}(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, y^0, x_i^0 - y^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$$

y de (ii):

$$\exists j : 2 \leq j \leq n+1 : \exists z^0 : 0 < z^0 < x_j^0 : F_k^{[a,b]}(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0) > F_{k-1}^{[p_1^0, b]}(x_2^0, \dots, x_{j-1}^0, z^0, x_j^0 - z^0, x_{j+1}^0, \dots, x_{n+1}^0) .$$

Pero las últimas dos proposiciones nos permiten afirmar que existen estrategias $E_n^i(k-1)$ para $[a, p_n^0]$ y $E_n^j(k-1)$ para $[p_1^0, b]$ que verifican:

$$a) f^i \text{ (raíz de } G^i(k-1)) = (\{p_1^0, \dots, p_{i-1}^0, p_i^0, \dots, p_{n-1}^0\}, a,$$

$$p_n^0, 0, P_i) \quad \text{donde } E_n^i(k-1) = (G^i(k-1), f^i) \text{ y}$$

$$P_i = a + \sum_{r=1}^{i-1} x_r^0 + y^0.$$

$$b) f^j \text{ (raíz de } G^j(k-1)) = (\{p_2^0, \dots, p_n^0\}, p_1^0, b, 0, P_j)$$

$$\text{donde } E_n^j(k-1) = (G^j(k-1), f^j) \text{ y } P_j = a + \sum_{r=1}^{j-1} x_r^0 + z^0.$$

$$c) \text{ val}_{[a, p_n^0]} (E_n^i(k-1)) < F_k^{[a, b]} (x_1^0, \dots, x_{n+1}^0).$$

$$d) \text{ val}_{[p_1^0, b]} (E_n^j(k-1)) < F_k^{[a, b]} (x_1^0, \dots, x_{n+1}^0).$$

Con las propiedades a y b es inmediato construir una estrategia de particionado de $[a, b]$: $E_n(k) = (G(k), f)$ de forma tal que:

$$f \text{ (raíz de } G(k)) = (\{p_1^0, \dots, p_{n-1}^0\}, a, b, 0, p_n^0)$$

$$y \quad \text{val}_{[a,b]}(E_n(k)) = \text{máx} (\text{val}_{[a,p_n^0]}(E_n^i(k-1)), \text{val}_{[p_1^0,b]}(E_n^j(k-1))).$$

Pero entonces $\text{val}_{[a,b]}(E_n(k)) < F_k^{[a,b]}(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0)$ lo que resulta un absurdo, por definición de $F_k^{[a,b]}$.

Nota 1.

En el teorema anterior, para la resolución por recurrencia de $F_k^{[a,b]}$, necesitamos las funciones $F_{k-1}^{[a,p_n]}$ y $F_{k-1}^{[p_1,b]}$; esto es consecuencia de un hecho general, cuya prueba dejamos al lector:

Teorema 2.

Dados $[a,b] \subset \mathbf{R}$, $[c,d] \subset \mathbf{R}$. Sea $\gamma = \frac{d-c}{b-a}$.

Se verifican:

i) Si $n \in \mathbf{N}_*$, $k \in \mathbf{N}_*$,

$$PL_{[c,d]}(k) = \gamma \cdot PL_{[a,t]}(k)$$

ii) Si $k \in \mathbb{N}_*$, $n \in \mathbb{N}_*$, $y_1, \dots, y_{n+1} > 0$: $\sum_{i=1}^{n+1} y_i = d-c$

$$F_k^{[c,d]}(y_1, \dots, y_{n+1}) = \gamma \cdot F_k^{[a,b]}(\gamma^{-1} \cdot y_1, \dots, \gamma^{-1} \cdot y_{n+1}).$$

Definimos, por simplicidad, las funciones

$$G_k^{[a,b]} : (\mathbb{R}_{>0})^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \gamma \cdot F_k^{[a,b]}(\gamma^{-1} \cdot x_1, \dots, \gamma^{-1} \cdot x_{n+1})$$

donde $\gamma = \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \right) / b-a$, $n \in \mathbb{N}_*$, y k es un natural arbitrario.

Ahora, se verifica simplemente:

$$1) G_k^{[a,b]}(x_1, \dots, x_{n+1}) = F_k^{[a,b]}(x_1, \dots, x_{n+1}) \text{ si } \sum_{i=1}^{n+1} x_i = b-a$$

$$2) G_1^{[a,b]}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=2}^{n+1} x_i \right\} \cdot \forall x_1, \dots, x_{n+1} > 0.$$

$$3) \forall \lambda > 0 \quad G_k^{[a,b]}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) = \lambda \cdot G_k^{[a,b]}(x_1, \dots, x_{n+1}).$$

La ventaja de introducir $G_k^{[a,b]}$ es que su cálculo es claramente recursivo:

1°)

Teorema 3. Dados $n \in \mathbb{N}_*$, $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $k > 1$.

$$G_k^{[a,b]}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \max \{ \tilde{g}_{k-1}(x_1, \dots, x_n), \tilde{h}_{k-1}(x_2, \dots, x_{n+1}) \}.$$

donde $\tilde{g}_{k-1}(x_1, \dots, x_n) = \min_{i=1, \dots, n} \{ \inf_{0 < y < x_i} G_{k-1}^{[c,b]}(x_1, \dots, x_{i-1}, y,$

$$x_i - y, x_{i+1}, \dots, x_n) \}.$$

y $\tilde{h}_{k-1}(x_2, \dots, x_{n+1}) = \min_{i=2, \dots, n+1} \{ \inf_{0 < y < x_i} G_{k-1}^{[a,t]}(x_2, \dots, x_{i-1}, y,$

$$x_i - y, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \}.$$

2°) La función $G_k^{[a,b]}$ no depende del intervalo $[a,b]$

Teorema 4. Sean $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$, n y k naturales:

$$\forall x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}_{>0} : G_k^{[a,b]}(x_1, \dots, x_{n+1}) = G_k^{[c,d]}(x_1, \dots, x_{n+1})$$

Las demostraciones de los teoremas 3 y 4 las dejamos a cargo del lector.

Nota 2. El teorema 2 es consecuencia de un hecho bastante natural que es conveniente destacar para lo que sigue.

Dados $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $[c,d] \subset \mathbb{R}$ y $r : [a,b] \rightarrow [c,d]$ definida

$r(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$, entonces r "transporta" estrategias de

$[a,b]$ en $[c,d]$: $E_n(k) \rightarrow r(E_n(k))$ de forma tal que:

$$\text{val}_{[c,d]}(r(E_n(k))) = \frac{d-c}{b-a} \cdot \text{val}_{[a,b]}(E_n(k)).$$

Creemos innecesario hacer más inquisiciones sobre lo que entendemos por "transporte de una estrategia".

Nota 3.

De ahora en más escribiremos simplemente G_k para denotar cualquier función $G_k^{[a,b]}$.

2.2.2. Expresión de la performance límite a partir de la fórmula de residuos límite.

Como expusimos antes, la performance límite $PL_{[a,b]}(k)$ para cualquier $k \in \mathbb{N}_*$, se calcula como:

$$\begin{aligned} & \text{Ínfimo } G_k(x_1, \dots, x_{n+1}), \text{ con } n \text{ fijo } \in \mathbb{N}_*. \\ & x_1, \dots, x_{n+1} > 0 \\ & \sum_{i=1}^{n+1} x_i = b-a \end{aligned}$$

Este problema se puede describir como el siguiente problema de optimización:

$$(\Delta) \text{ mínimo } c : \begin{cases} G_k(x_1, \dots, x_{n+1}) \leq c. \\ x_1, \dots, x_{n+1}, c \geq 0. \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = b-a. \end{cases}$$

De aquí que $PL_{[a,b]}(k) = \text{mínimo } c$, donde c verifica

$$\begin{cases} G_k\left(\frac{x_1}{c}, \dots, \frac{x_{n+1}}{c}\right) \leq 1. \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = b-a. \end{cases}$$

Pero si denotamos $X_i = \frac{x_i}{c}$, $i = 1, \dots, n+1$, el problema se convierte en: hallar $\max \left[\sum_{i=1}^{n+1} X_i \right]$, con las restricciones:

$$G_k(X_1, \dots, X_{n+1}) \leq 1, \quad X_1, \dots, X_{n+1} \geq 0. \quad (\Delta\Delta)$$

Denotando $\alpha_{k,n}$ al valor óptimo de este problema, se tiene

$$PL_{[a,b]}(k) = \frac{b-a}{\alpha_{k,n}}. \quad \text{Indudablemente, que para poder progresar al}$$

cálculo de las performances límites, debemos tener una idea más precisa de las funciones G_k , a título de ilustración del manejo recursivo de las G_k desarrollamos, en los 2 próximos apartados, el cálculo por recurrencia de las funciones $(G_k)_{k \in \mathbb{N}_*}$ para $n = 1$ y $n = 2$, y el cálculo de las performances límites, siguiendo los lineamientos expuestos en este apartado.

Nota 1.

Nos interesa remarcar que si (X_1, \dots, X_{n+1}) es posición óptima para el problema $(\Delta\Delta)$, entonces:

$$\left(\frac{b-a}{\alpha_{k,n}} X_1, \dots, \frac{b-a}{\alpha_{k,n}} X_{n+1}, \frac{b-a}{\alpha_{k,n}} \right) \text{ es posición óptima para } (\Delta).$$

En particular los primeros n puntos que ubique una estrategia, que tenga un valor que realice la performance límite, estarán caracterizados por los segmentos:

$$\left(\frac{b-a}{\alpha_{k,n}} \cdot X_i \right)_{i=1, \dots, n+1}, \text{ donde } (X_i)_{i=1, \dots, n+1} \text{ se encuen-}$$

tran resolviendo $(\Delta\Delta)$, para lo cual, no importa el intervalo sobre el que se está trabajando.

2.2.3. Performances límites para el caso $n = 1$.

Comenzamos con el orden de decisión más simple, a efectos de afiatar las ideas expuestas hasta aquí.

Teorema 1. Si $n = 1$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, se cumple:

$$G_k(x_1, x_2) = \text{máx} \left(\frac{x_1}{2^{k-1}}, \frac{x_2}{2^{k-1}} \right).$$

Demostración.

1. Si $k = 1$, la igualdad se tiene en virtud del teorema 1, 2.2.1, y por la definición de G_1 .

2. Supongamos la igualdad válida hasta k y probémosla para $k+1$.

$$G_{k+1}(x_1, x_2) = \text{máx} \{ \tilde{g}_k(x_1), \tilde{h}_k(x_2) \}, \text{ donde:}$$

$$\tilde{g}_k(x_1) = \inf_{0 < y < x_1} G_k(y, x_1 - y) = \inf_{0 < y < x_1} \left\{ \text{máx} \left[\frac{y}{2^{k-1}}, \frac{x_1 - y}{2^{k-1}} \right] \right\}$$

$$\tilde{h}_k(x_2) = \inf_{0 < y < x_2} G_k(y, x_2 - y) = \inf_{0 < y < x_2} \left\{ \text{máx} \left[\frac{y}{2^{k-1}}, \frac{x_2 - y}{2^{k-1}} \right] \right\}.$$

Mediante simple cómputo se tiene:

$$\tilde{g}_k(x_1) = \frac{x_1}{2^k} \quad \text{y} \quad \tilde{h}_k(x_2) = \frac{x_2}{2^k} .$$

De esto se tiene lo buscado.

Corolario. Si $n = 1$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$, entonces $PL_{[a,b]}^{(k)} = \frac{b-a}{2^k}$.

Demostración.

Inmediato, por cierto. Tener presente Nota 1,2.2.2, y el hecho de que $\alpha_{k,1} = 2^{-k}$, $\forall k \geq 1$.

Con el objeto de completar la resolución del problema $Q_1^E [a,b]$, vamos a probar que la performance límite : $\frac{b-a}{2^k}$ es alcanzable por una estrategia de profundidad k .

Teorema 2. Dado $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$.

Existe una estrategia de particionado de $[a,b]$ de orden 1 de de cisión y profundidad k : B_k , de forma tal que:

$$\text{val}_{[a,b]}(B_k) = \frac{b-a}{2^k} .$$

Demostración.

Considérese como B_k la estrategia de bisección, es decir aquella que elige el punto P , dentro del intervalo base de cada nodo de la arborescencia, exactamente en su punto medio. Es inmediato verificar que su valor es el pedido, pues en cada camino C desde un sucesor de la raíz hasta un nodo terminal,

$$\sum_{c \in v(c)} f_4(c) \text{ es constante e igual a } \frac{(b-a) \cdot (2^k - 1)}{2^k} .$$

2.2.4. Performances límites para el caso $n = 2$.

El resultado principal de este párrafo lo sintetiza el siguiente:

Teorema: Si $n = 2$ y $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, se cumple:

$$G_k(x_1, x_2, x_3) = \min \left\{ \begin{array}{l} \max \left[\frac{x_1}{F_{k-1}}, \frac{x_2}{F_{k-2}}, \frac{x_3}{F_{k-1}} \right], \\ \max \left[\frac{x_1}{F_{k-2}}, \frac{x_2}{F_{k-1}}, \frac{x_3}{F_{k-2}} \right] \end{array} \right\}.$$

donde x_1, x_2, x_3 son reales positivos arbitrarios y $(F_r)_{r \in \mathbb{N}}$ es la sucesión de Fibonacci.

Demostración:

1. $k = 2$.

$$G_2(x_1, x_2, x_3) = \max \{ \tilde{g}_1(x_1, x_2), \hat{h}_1(x_2, x_3) \}$$

$$\text{donde } \tilde{g}_1(x_1, x_2) = \min \left\{ \begin{array}{l} \inf_{0 < y < x_1} (\max(x_1, x_1 + x_2 - y)), \\ \inf_{0 < y < x_2} (\max(x_1 + y, x_2)) \end{array} \right\}$$

y

$$\hat{h}(x_2, x_3) = \min \left\{ \inf_{0 < y < x_2} (\max(x_2, x_2 + x_3 - y)), \right. \\ \left. \inf_{0 < y < x_3} (\max(x_2 + y, x_3)) \right\}.$$

Ahora, es claro:

$$\hat{h}_1(x_1, x_2) = \min \{ \max(x_1, x_2); \max(x_1, x_2) \} \\ = \max(x_1, x_2)$$

y $\hat{h}(x_2, x_3) = \max(x_2, x_3)$; con ello, la fórmula final es:

$$G_2(x_1, x_2, x_3) = \max(x_1, x_2, x_3).$$

Recordando que si $k = 0, 1$, $F_k = 1$ se tiene lo buscado.

2. Procedemos por inducción en k . Si $k = 2$ está verificado.

Si $k > 2$,

$$G_k(x_1, x_2, x_3) = \max \{ \hat{g}_{k-1}(x_1, x_2), \hat{h}_{k-1}(x_2, x_3) \}, \text{ donde}$$

$$\tilde{g}_{k-1} = \min \left\{ \inf_{0 < y < x_1} G_{k-1}(y, x_1 - y, x_2), \inf_{0 < y < x_1} G_{k-1}(x_1, y, x_2 - y) \right\}.$$

$$\tilde{h}_{k-1} = \min \left\{ \inf_{0 < y < x_2} G_{k-1}(y, x_2 - y, x_3), \inf_{0 < y < x_3} G_{k-1}(x_2, y, x_3 - y) \right\}.$$

Utilizamos la hipótesis inductiva:

$$G_{k-1}(x_1, x_2, x_3) = \min \left\{ \max \left(\frac{x_1}{F_{k-2}}, \frac{x_2}{F_{k-3}}, \frac{x_3}{F_{k-2}} \right); \max \left(\frac{x_1}{F_{k-3}}, \frac{x_2}{F_{k-2}}, \frac{x_3}{F_{k-3}} \right) \right\},$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} \inf_{0 < y < x_1} G_{k-1}(y, x_1 - y, x_2) &= \inf_{0 < y < x_1} \min \left\{ \max \left(\frac{y}{F_{k-2}}, \frac{x_1 - y}{F_{k-3}}, \frac{x_2}{F_{k-2}} \right), \max \left(\frac{x}{F_{k-3}}, \frac{x_1 - y}{F_{k-2}}, \frac{x_2}{F_{k-3}} \right) \right\}, \\ &= \min \left\{ \inf_{0 < y < x_1} \left\{ \max \left(\frac{y}{F_{k-2}}, \frac{x_1 - y}{F_{k-3}}, \frac{x_2}{F_{k-2}} \right) \right\}, \inf_{0 < y < x_1} \left\{ \max \left(\frac{y}{F_{k-3}}, \frac{x_1 - y}{F_{k-2}}, \frac{x_2}{F_{k-3}} \right) \right\} \right\}; \end{aligned}$$

$$= \min \left(\max \left(\frac{x_1}{F_{k-1}}, \frac{x_2}{F_{k-2}} \right), \max \left(\frac{x_1}{F_{k-1}}, \frac{x_2}{F_{k-3}} \right) \right)$$

$$= \max \left(\frac{x_1}{F_{k-1}}, \frac{x_2}{F_{k-2}} \right) \quad (*) .$$

Por otra parte

$$\inf_{0 < y < x_2} G_{k-1}(x_1, y, x_2 - y) = \inf_{0 < y < x_2} \left\{ \max \left(\frac{x_1}{F_{k-2}}, \frac{y}{F_{k-3}}, \frac{x_2 - y}{F_{k-2}} \right), \max \left(\frac{x_1}{F_{k-3}}, \frac{y}{F_{k-2}}, \frac{x_2 - y}{F_{k-3}} \right) \right\} ;$$

$$= \min \left\{ \inf_{0 < y < x_2} \left\{ \max \left(\frac{x_1}{F_{k-2}}, \frac{y}{F_{k-3}}, \frac{x_2 - y}{F_{k-2}} \right) \right\}; \inf_{0 < y < x_2} \left\{ \max \left(\frac{x_1}{F_{k-3}}, \frac{y}{F_{k-2}}, \frac{x_2 - y}{F_{k-3}} \right) \right\} \right\}$$

$$= \min \left(\max \left(\frac{x_1}{F_{k-2}}, \frac{x_2}{F_{k-1}} \right); \max \left(\frac{x_1}{F_{k-3}}, \frac{x_2}{F_{k-1}} \right) \right)$$

$$= \max \left(\frac{x_1}{F_{k-2}}, \frac{x_2}{F_{k-1}} \right) \quad (**) .$$

De (*) y (**) deducimos que:

$$\hat{g}_{k-1}(x_1, x_2) = \min \left\{ \max \left(\frac{x_1}{F_{k-1}}, \frac{x_2}{F_{k-2}} \right); \max \left(\frac{x_1}{F_{k-2}}, \frac{x_2}{F_{k-1}} \right) \right\} .$$

En forma similar:

$$\hat{h}_{k-1}(x_2, x_3) = \min \left\{ \max \left(\frac{x_2}{F_{k-1}}, \frac{x_3}{F_{k-2}} \right); \max \left(\frac{x_2}{F_{k-2}}, \frac{x_3}{F_{k-1}} \right) \right\} .$$

Pero teniendo presente la sencilla relación:

$$\max \{ \min [\max (A, B); \max (C, D)]; \min [\max (E, F); \max (G, H)] \}$$

$$= \min \{ \max (A, B, E, F); \max (A, B, G, H); \max (C, D, E, F); \max (C, D, G, H) \}$$

donde A, B, C, D, E, F, G, H son números reales arbitrarios, y aplicándola para la situación que nos ocupa:

$$G_k(x_1, x_2, x_3) = \max (\hat{g}_{k-1}(x_1, x_2); \hat{h}_{k-1}(x_2, x_3)), \text{ se llega a la}$$

fórmula deseada.

Corolario 1 Si $n = 2$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_*$:

$$PL_{[a,b]}(k) = \frac{b-a}{F_{k+1}}.$$

Demostración.

Siguiendo los lineamientos del párrafo 3.3, tenemos

$PL_{[a,b]}(k) = \frac{b-a}{\alpha_{k,2}}$, donde $\alpha_{k,2}$ es el óptimo del problema:

$$\begin{cases} G_k(X_1, X_2, X_3) \leq 1, X_1, X_2, X_3 \geq 0 \\ \text{máx} \left(\sum_{i=1}^3 X_i \right). \end{cases}$$

Pero si $k \geq 2$ por la forma de G_k , $\alpha_{k,2} = \max(\overline{\alpha_{k,2}}, \overline{\alpha_{k,2}})$

donde $\overline{\alpha_{k,2}}$ es el óptimo del problema:

$$(\Delta) \begin{cases} \text{máx} \left(\frac{X_1}{F_{k-1}}, \frac{X_2}{F_{k-2}}, \frac{X_3}{F_{k-1}} \right) \leq 1, X_i \geq 0. \\ \text{máx} (X_1 + X_2 + X_3) \end{cases}$$

Y $\overline{\alpha_{k,2}}$ lo es del siguiente otro:

$$(\Delta\Delta) \left\{ \begin{array}{l} \text{máx} \left(\frac{X_1}{F_{k-2}}, \frac{X_2}{F_{k-1}}, \frac{X_3}{F_{k-2}} \right) \leq 1, \quad X_i \geq 0. \\ \text{máx} (X_1 + X_2 + X_3). \end{array} \right.$$

Ahora, es claro que tanto (Δ) como $(\Delta\Delta)$ son problemas de programación lineal, cuyos valores óptimos son:

$$\overline{\alpha_{k,2}} = F_{k+1} \quad \text{y} \quad \overline{\overline{\alpha_{k,2}}} = F_k + F_{k-2}. \quad \text{De aquí resulta}$$

$$\alpha_{k,2} = \text{máx} (F_{k+1}, F_k + F_{k-2}) = F_{k+1}. \quad \text{En el caso } k = 1, \text{ la}$$

conclusión es inmediata.

Nota 1.

Es importante recalcar para lo que sigue, cuáles son los valores de X_1 , X_2 y X_3 que realizan el valor óptimo $\alpha_{k,2}$, si $k \geq 2$.

Por simple inspección sobre el problema (Δ), resulta:

$x_1^0 = F_{k-1}$, $x_2^0 = F_{k-2}$, $x_3^0 = F_{k-1}$, siendo la única en esas condiciones.

Por la observación hecha en Nota 1 de 2.2.2., la posición inicial óptima es:

$$x_1^0 = \frac{b-a}{F_{k-1}} \cdot F_{k-1}, \quad x_2^0 = \frac{b-a}{F_{k-1}} \cdot F_{k-2}, \quad x_3^0 = F_{k-1} \cdot \frac{b-a}{F_{k+1}}$$

que resulta también única.

Corolario 2. Dado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $n = 2$, y $k \in \mathbb{N}_*$, no existe estrategia de particionado de profundidad k y orden de desición 2 para $[a,b]$: $E_2(k)$, que verifique:

$$\text{val}_{[a,b]} (E_2(k)) = \frac{b-a}{F_{k+1}}.$$

Demostración.

Si $k = 1$ el resultado es inmediato.

Consideramos el conjunto A formado por los naturales k , para los cuales no se verifica el enunciado.

Sea $k_0 = \text{mín } A$. Existe una estrategia de particionado de $[a,b]$, de profundidad k_0 y de orden de decisión 2 : $E_2(k_0) =$
 $= (G(k_0), f)$ tal que:

$$\text{val}_{[a,b]}(E_2(k_0)) = \frac{b-a}{F_{k_0+1}} ; \text{ llamemos } p_1 < p_2 \text{ a los dos}$$

primeros puntos que ubica $E_2(k_0)$, o sea

$$f(\text{raíz de } G(k_0)) = (\{p_1\}, a, b, 0, p_2). \text{ Para que } E_2(k_0)$$

verifique lo pedido debe cumplirse necesariamente:

$$p_1 - a = \frac{b-a}{F_{k_0+1}} \cdot F_{k_0-1}, \quad p_2 - p_1 = \frac{b-a}{F_{k_0+1}} \cdot F_{k_0-2}, \quad b - p_2 = \frac{b-a}{F_{k_0+1}} \cdot F_{k_0-1}.$$

(esto es en virtud de la nota 1 anterior).

Como $k_0 > 1$, tomamos la estrategia de profundidad $k_0 - 1$:

$E_2(k_0 - 1)$, generada por cualquiera de los dos sucesores de la raíz de $G(k_0)$; esta es una estrategia de particionado de un intervalo de longitud $\frac{(b-a) \cdot F_{k_0}}{F_{k_0+1}}$, y su valor es, claro está,

$\frac{b-a}{F_{k_0+1}}$ como lo asegura el corolario 1; por otra parte

$$\text{PL} \left(a, a + \frac{(k_0 - 1) \cdot F_{k_0}}{F_{k_0+1}} \right) = \frac{b-a}{F_{k_0+1}}.$$

Entonces existe una estrategia: $E_2(k_0 - 1)$, de profundidad $k_0 - 1$,

de $\left(a, a + F_{k_0} \cdot \frac{(b-a)}{F_{k_0+1}} \right)$ que verifica:

$$\text{val} \left(a, a + F_{k_0} \cdot \frac{(b-a)}{F_{k_0+1}} \right)_{(E_2(k_0 - 1))} = \text{PL} \left(a, a + F_{k_0} \cdot \frac{(b-a)}{F_{k_0+1}} \right)_{(k_0 - 1)}.$$

Pero ahora podemos transportar $E_2(k_0 - 1)$ a $[a, b]$: obteniendo

$r(E_2(k_0 - 1))$, de forma que

$$\text{val}_{[a,b]} (r(E_2(k_0-1))) = \text{PL}_{[a,b]}(k_0-1) \quad (*) . \quad (\text{Ver nota 2.2.1})$$

Pero (*) contradice la elección de k_0 .

Nota 2. Obsérvese que es fundamental para la prueba del corolario 2, la unicidad de la posición óptima. Sin embargo este corolario será probado con absoluta generalidad cuando encontremos cotas superiores de los números $\alpha_{k,n}$ para culaquier orden de decisión n , par.

2.2.5. Realización computacional del cálculo de las fórmulas de residuos y performances límites.

El objetivo central de este párrafo es lograr un algoritmo que realice el cálculo recursivo de las fórmulas de residuos límite G_k , para cualquier orden de decisión: n , y su posterior adaptación para su ejecución por computadora. Este trabajo se desarrolla en 2 etapas: Se construye el algoritmo mencionado en un lenguaje del tipo de Pascal para su rápida comprensión; utilizando este algoritmo se llega a caracterizar las fórmulas G_k de forma de lograr una implementación bastante eficiente. El programa final lo transcribimos en FORTRAN, por el tipo de representación y operaciones que se hace sobre la información que se maneja. Este programa puede recuperar las estrategias de particionado que realizan o aproximan a las performances límites de cada profundidad.

Con esto, podemos decir que los problemas planteados son, potencialmente, resueltos. Decimos "potencialmente" pues el programa por ejemplo, no devuelve una fórmula por recurrencia para calcular $(\alpha_{k,n})_{k \geq 1}$, sino que los computa uno por uno.

2.2.5.1. Resultados necesarios.

En la expresión recursiva de G_k , dada en Teorema 3, 2.2.1. queda claro a simple vista la necesidad de computar un

ínfimo sobre un intervalo real, donde tanto la función, como su dominio, dependen de parámetros. Sin embargo, vamos a sortear este aparente obstáculo, probando que las funciones G_k tienen la forma siguiente:

$$G_k(x_1, \dots, x_{n+1}) = \min_{i=1, \dots, m} \{ \max_{j=1, \dots, l_i} (E_j^i(x_1, \dots, x_{n+1})) \},$$

donde:

$$E_j^i(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{h=1}^{n+1} a_{ij}^h \cdot x_h \text{ y } a_{ij}^h \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Para poder hacer esto, necesitamos 2 resultados:

Lema 1.

Dado el siguiente problema de programación lineal:

mínimo y , con las restricciones:

$$a_1^1 x + b_1^1 \leq y \quad 0 \leq x \leq c.$$

$$0 \leq y.$$

$$\begin{array}{ll}
 a_r^1 x + b_r^1 \leq y & c, a_1^1, \dots, a_r^1 > 0; a_1^2, \dots, a_s^2 < 0 \\
 a_1^2 (x-c) + b_1^2 \leq y & b_1^1, \dots, b_r^1, b_1^2, \dots, b_s^2 \geq 0, \text{ son todas} \\
 & \text{constantes.}
 \end{array}$$

$$a_s^2 (x-c) + b_s^2 \leq y.$$

Denotando con $e_i^1: i = 1, \dots, r$ a las ecuaciones de las rectas:
 $y = a_i^1 x + b_i^1: i = 1, \dots, r$ y con $e_i^2, i = 1, \dots, s$ a las
de $y = a_i^2 x + b_i^2: i = 1, \dots, s$ resulta que el óptimo es la
ordenada máxima entre los puntos de \mathbb{R}^2 :

$$(e_i^1 \cap e_j^2)_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, s}}, (\{x = c\} \cap e_j^2)_{j=1, \dots, s} \text{ y } (\{x = 0\} \cap e_i^1)_{i=1, \dots, r}$$

Demostración.

Dejamos los formalismos al lector; en realidad basta con observar un gráfico típico de la situación (ver fig. 1). Digamos que la región factible es un poliedro \mathbb{P} , contenido en la semibanda: $\{(x,y): 0 \leq x \leq c, 0 \leq y\}$.

Los vértices de \mathbb{P} están contenidos en el conjunto unión de los siguientes:

$$(e_i^1 \cap e_i^1)_{i \in \Pi_r}, (e_j^2 \cap e_j^2)_{j \in \Pi_s}, (e_j^2 \cap e_i^1)_{\substack{i \in \Pi_r \\ j \in \Pi_s}},$$

$$(e_i^1 \cap \{x=0\})_{i \in \Pi_r}, (e_i^1 \cap \{x=c\})_{i \in \Pi_r}, (e_j^2 \cap \{x=c\})_{j \in \Pi_s}, (e_j^2 \cap \{x=0\})_{j \in \Pi_s}.$$

Pero según el criterio de optimalidad: "mínima ordenada", es fácil descartar los conjuntos:

$$(e_i^1 \cap e_i^1)_{i \in \Pi_r}, (e_j^2 \cap e_j^2)_{j \in \Pi_s}, (e_j^1 \cap \{x=c\})_j; \text{ y } (e_j^2 \cap \{x=0\})_j.$$

Por último, observamos que las ordenadas de los puntos que integran el máximo del enunciado son:

$$(b_i^1)_{i \in \Pi_r}, (b_j^2)_{j \in \Pi_s}, \left[\frac{a_i^1 b_j^2 - a_j^2 b_i^1 - c \cdot a_j^2 a_i^1}{a_i^1 - a_j^2} \right]_{\substack{i \in \Pi_r \\ j \in \Pi_s}}$$

Véase que, como $a_j^2 < 0$, las últimas expresiones están bien definidas, pues $a_i^1 - a_j^2 > 0$, y además son positivas.

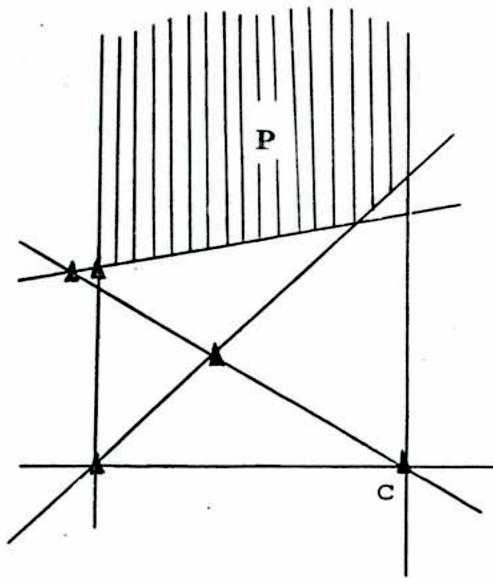


fig. 1. caso típico del poliedro P ; los puntos cuyas ordenadas se computan en el máximo están indicados con el signo: \blacktriangle .

Lema 2.

Sean $(a_{ij})_{\substack{i \in \Pi_m \\ j \in \Pi_n}}$, $(\bar{a}_{ij})_{\substack{i \in \Pi_m \\ j \in \Pi_n}}$ familias de números reales. En

tonces se verifica:

$$(1) \quad \max_{i \in \Pi_m} \left(\min_{j \in \Pi_n} \left(\max_{j \in \Pi_n} (a_{ij}) \right) \right); \quad \min_{i \in \Pi_m} \left(\max_{j \in \Pi_n} (\bar{a}_{ij}) \right) \right) \text{ es igual a:}$$

$$(2) \quad \min_{\substack{i \in \Pi_m \\ k \in \Pi_m}} \left(\max_{\substack{j \in \Pi_n \\ l \in \Pi_n}} (a_{ij}, \bar{a}_{kl}) \right).$$

Demostración.

(1) \geq (2). Sea $\max_{j \in \Pi_n} (a_{i_0 j}) = N$ el número que realiza a la expresión (1), es decir:

$$\max_{j \in \Pi_n} (a_{i_0 j}) \geq N \geq \min_{i \in \Pi_m} \left(\max_{j \in \Pi_n} (\bar{a}_{ij}) \right) = \max_{j \in \Pi_n} (\bar{a}_{i_0 j})$$

Luego: $N = \max_{\substack{j \in \Pi_n \\ i \in \Pi_n}} (a_{ij}, a_{i'j'})$, por lo tanto se tiene la desigualdad buscada.

(2) \geq (1). Supongamos que $M = \max_{\substack{j \in \Pi_n \\ i \in \Pi_n}} (a_{ij}, a_{i'j'})$ realiza a (2).

Luego:

$$M = \max \left(\max_{j \in \Pi_n} (a_{ij}); \max_{i \in \Pi_n} (\overline{a_{i'j'}}) \right).$$

Supongamos que:

$$M = \max_{j \in \Pi_n} (a_{ij}) \geq \max_{i \in \Pi_n} (\overline{a_{i'j'}}); \text{ entonces se tienen:}$$

$$M \geq \min_{i \in \Pi_m} (\max_{j \in \Pi_n} (a_{ij}))$$

$$M \geq \min_{i \in \Pi_m} (\max_{j \in \Pi_n} (\overline{a_{ij}})), \text{ o sea } M \geq (1).$$

Ahora demostramos el teorema central que permite la resolución algorítmica del cálculo de las funciones G_k :

Teorema.

Sea $k \in \mathbf{N}_*$, y G_k las funciones definidas en teorema 3 2.2.1,

por recurrencia en k . Afirmamos, $\forall x_1, \dots, x_{n+1}$:

$$G_k(x_1, \dots, x_{n+1}) = \min_{j \in \Pi_{m_k}} \{ \max_{i \in \Pi_{n_j}} (E_i^j(x_1, \dots, x_{n+1})) \}$$

donde $m_k, n_j \in \mathbf{N}$ y E_i^j son expresiones lineales en las variables x_1, \dots, x_{n+1} , de coeficientes no negativos.

Demostración.

Procedemos por inducción en k .

$k = 1$. Trivial, pues $G_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = \max \left(\begin{array}{c} n \\ \sum_{i=1} x_i \end{array}, \begin{array}{c} n+1 \\ \sum_{i=2} x_i \end{array} \right)$.

Tomemos el índice $k+1$, supuesta válida la proposición para los índices $\leq k$. En tonces existen expresiones $F_i^j(x_1, \dots, x_{n+1}) =$

$= \sum_{k=1}^{n+1} a_{ij}^k x_k$ de forma tal que

$$G_k(x_1, \dots, x_{n+1}) = \min_{j \in \Pi_{m_k}} \{ \max_{i \in \Pi_{n_j}} (\sum_{k=1}^{n+1} a_{ij}^k x_k) \}; \text{ como}$$

$$G_{k+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \max \{ \tilde{g}_k(x_1, \dots, x_n); \tilde{h}_k(x_2, \dots, x_{n+1}), \text{ donde}$$

$$\tilde{g}_k(x_1, \dots, x_n) = \min_{\bar{l}=1, \dots, n} \{ \inf_{0 < y < x_{\bar{l}}} G_k(x_1, \dots, x_{\bar{l}-1}, y, x_{\bar{l}} - y, x_{\bar{l}+1}, \dots,$$

$$\dots, x_n) \} \text{ y } \tilde{h}_k(x_2, \dots, x_{n+1}) =$$

$$= \min_{i=2, \dots, n+1} \{ \inf_{0 < y < x_i} G_k(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_i - y, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \}$$

bastará con ver la forma de \tilde{g}_k y \tilde{h}_k .

$$1^\circ. \inf_{0 < y < x_i} G_k(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_i - y, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$

$$= \inf_{0 < y < x_i} \min_{j \in \Pi_{m_h}} \{ \max_{l \in \Pi_{n_j}} (F_l^j(x_1, \dots, y, x_i - y, \dots, x_n)) \}$$

$$= \min_{j \in \Pi_{m_k}} \{ \inf_{0 < y < x_i} (\max_{e \in \Pi_{n_j}} F_e^j(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_i - y, \dots, x_n)) \}.$$

Reescribimos cada expresión: $F_e^j(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_i - y, x_{i+1}, \dots, x_n)$ como:

$$1. (a_{ej}^i - a_{ej}^{i+1}) \cdot y + \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} a_{ej}^k \cdot x_k + \sum_{h=1}^n a_{ej}^{h+1} \cdot x_h \right\} = a_e^i \cdot y + b_e^i$$

en caso de que $a_{ej}^i - a_{ej}^{i+1} > 0$.

$$2. \quad (a_{ej}^i - a_{ej}^{i+1}) \cdot (y - x_1) + \left\{ \sum_{h=1}^i a_{ej}^h \cdot x_h + \sum_{h=i+1}^n a_{ej}^{h+1} \cdot x_h \right\} =$$

$$= a_e^2 (y - x_1) + b_e^2$$

si e es tal: $a_{ej}^i - a_{ej}^{i+1} < 0$.

Ahora apliquemos el Lema 1 para las expresiones:

$$a_e^1 y + b_e^1, \quad e : a_{ej}^i - a_{ej}^{i+1} > 0$$

$$a_e^2 y + b_e^2, \quad e : a_{ej}^i - a_{ej}^{i+1} < 0$$

con $c = x_1$.

Resulta así que:

$$\max_{e, \bar{e}} \left(b_e^1, b_{\bar{e}}^2, \frac{a_e^1 b_{\bar{e}}^2 - a_{\bar{e}}^2 \cdot b_e^1 - x_1 a_{\bar{e}}^2 \cdot a_e^1}{a_e^1 - a_{\bar{e}}^2} \right) \text{ es la solución}$$

del problema:

$$\inf_{0 < y < x_i} \max_{e \in \Pi_{n_j}} (F_e^j(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_i - y, x_{i+1}, \dots, x_n)).$$

Pero, en virtud de que, b_e^1, b_e^2 y $\frac{a_e^1 b_e^2 - a_e^2 b_e^1 - x_i a_e^2 a_e^1}{a_e^1 - a_e^2}$

son expresiones lineales en las variables x_1, \dots, x_n , tenemos:

$$\inf_{0 < y < x_i} (\max_{e \in \Pi_{n_j}} \{ F_e^j(x_1, \dots, y, x_i - y, \dots, x_n) \}) = \max_{h \in \Pi_{r_{ij}}} (E_h^{ij}(x_1, \dots, x_n)) \quad (\Delta)$$

donde $r_{ij} \in \mathbb{N}$ y E_h^{ij} son lineales.

De la misma manera se prueba que:

$$2^\circ) \inf_{0 < y < x_i} G_k(x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_i - y, \dots, x_{n+1}) =$$

$$= \min_{j \in \Pi_{n_i}} \{ \max_{h \in \Pi_{r_{ij}}} (\bar{E}_h^{ij}(x_2, \dots, x_{n+1})) \}.$$

Con lo cual tenemos:

$$G_{k+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \max \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} \min_{j \in \Pi_{n_k}} \{ \max_{h \in \Pi_{r_{ij}}} (E_h^{ij}(x_1, \dots, x_n)) \} ; \right. \\ \left. \min_{2 \leq i \leq n+1} \min_{j \in \Pi_{n_k}} \{ \max_{h \in \Pi_{r_{ij}}} (\bar{E}_h^{ij}(x_2, \dots, x_{n+1})) \} \right\}. \text{ Agrupando \u00edndices:}$$

$$G_{k+1} \equiv \max \left\{ \min_{j \in \Pi_m} (\max_{h \in \Pi_{n_j}} (E_h^j)), \min_{j \in \Pi_{\bar{m}}} (\max_{h \in \Pi_{\bar{n}_j}} (\bar{E}_h^j)) \right\} ;$$

utilizando lema 2, se tiene:

$$G_{k+1} = \min_{\substack{j \in \Pi_m \\ s \in \Pi_{\bar{m}}}} \{ \max_{\substack{h \in \Pi_{n_j} \\ i \in \Pi_{\bar{n}_j}}} (E_h^j, \bar{E}_i^s) \}, \text{ donde}$$

E_h^j y \bar{E}_i^s son expresiones lineales en x_1, \dots, x_{n+1} .

Nota 1. Obs\u00e9rvese que las expresiones $F_e^j(x_1, \dots, x_n)$ en donde $a_{ej}^i = a_{ej}^{i+1}$ arrojan una sustituci\u00f3n:

$F_e^j(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_i - y, x_{i+1}, \dots, x_n)$, que no depende

de y , y que resulta lineal en x_1, \dots, x_{n+1} . Esta expresión está contemplada desde ya, en la fórmula (Δ).

Nota 2. Es importante tener presente que en el teorema hemos encontrado como se escribe la fórmula G_{k+1} a partir de G_k donde de cada paso está perfectamente definido y es computable, digamos, manualmente.

Nota 3. El cálculo de los números $\alpha_{k,n} \forall k \geq 1$, se realiza de la siguiente manera: como $G_k(x_1, \dots, x_{n+1})$ es:

$$\min_{j \in \Pi_m} \{ \max_{i \in \Pi_{n_j}} (E_i^j) \}, \text{ resulta fácil ver que la solución}$$

óptima del funcional: $\sum_{i=1}^{n+1} x_i$ (máximo), sujeto a las restric-

ciones:

$$G_k(x_1, \dots, x_{n+1}) \leq 1,$$

es el número : $\max_{j \in \Pi_m} (\alpha_{k,n}^j)$ donde cada $\alpha_{k,n}^j$ está dado por

el valor óptimo del siguiente problema de programación lineal:

$$\text{máximo de } \sum_{i=1}^{n+1} x_i, \text{ sujeto a:}$$

$$E_1^j(x_1, \dots, x_{n+1}) \leq 1, \dots, E_{n_j}^j(x_1, \dots, x_{n+1}) \leq 1.$$

$$x_1, \dots, x_{n+1} \geq 0.$$

Nota 4.

Es bueno notar que hasta ahora nada se ha supuesto sobre

$G_1(x_1, \dots, x_{n+1})$, más que fuese un mínimo de máximos de expresiones lineales en las $n + 1$ variables, de coeficientes positivos.

Nota 5.

Es importante, desde el punto de vista de la implementación que, por definición de \tilde{g}_k y \tilde{h}_k se verifica:

$$\tilde{g}_k(x_1, \dots, x_n) = \tilde{h}_k(x_1, \dots, x_n).$$

Es decir que, calculada $\hat{g}_k(x_1, \dots, x_n)$, la fórmula

$\hat{h}_k(x_2, \dots, x_{n+1})$ se logra como: \tilde{g}_k evaluada en (x_2, \dots, x_{n+1})

2.2.5.2. Primera versión del programa resolvente.

Comenzamos haciendo una descripción del tipo de estructuras que maneja el algoritmo:

```
type mínimo-global = sequence of máximo-global;  
type máximo-global = sequence of expresión-completa;  
type expresión-completa = array of (n+1) real.  
type mínimo-parcial = sequence of máximo-parcial;  
type máximo-parcial = sequence of expresión;  
type expresión = array of n real.  
type lista -de- expresiones sequence of expresión.
```

El programa principal es:

```
Let FORM-MIN-VIEJO be mínimo-global;  
Let n be integer;
```

```
GENERAR FORMULA DEL PRIMER NIVEL (FORM-MIN-VIEJO, n);  
AVANZAR UN NIVEL (FORM-MIN-VIEJO, n) repeatuntil (condición).
```

La condición de la cláusula repeatuntil es, por ejemplo, cantidad de niveles deseados, no superar límite de memoria prefijado, etc.

La subrutina: GENERAR FORMULA DEL PRIMER NIVEL, depende del problema que se trate, no habría inconveniente en comenzar con otra expresión que no fuese $G_1(x_1, \dots, x_{n+1})$ y de hecho podría ser útil en el caso de efectuar un par de ejecuciones consecutivas del programa; en tal caso, se puede utilizar como fórmula del "primer nivel" el producto final de la anterior ejecución.

A título de ejemplo de manipuleo de las estructuras, generamos $G_1(x_1, \dots, x_{n+1})$:

* GENERAR FORMULA DEL PRIMER NIVEL (FORM-MIN-VIEJO, n) *

```
Let FORM-MIN-VIEJO be mínimo-global;  
Let FORM-MAX-VIEJO be máximo-global;  
Let EXPRES 1, EXPRES 2 be expresión-completa.  
FORM-MIN-VIEJO :=  $\phi$  ;  
FORM-MAX-VIEJO :=  $\phi$  ;  
k := 2;
```



```
while (k ≤ n) do  
    EXPRES 1 (k) := EXPRES 2 (k) := 1;  
    k := k+1  
  
    od;  
  
EXPRES 1 (n+1) := EXPRES 2 (1) := 0;  
EXPRES 1 (1) := EXPRES 2 (n+1) := 1;  
ENGANCHAR (EXPRES 1, EXPRES 2) EN (FORM-MAX-VIEJO);  
ENGANCHAR (FORM-MAX-VIEJO) EN (FORM-MIN-VIEJO).
```

El papel de las subrutinas "ENGANCHAR" creemos innecesario explicarlo más, pues no es sino el que su nombre indica.

* AVANZAR UN NIVEL (FORM-MIN-VIEJO, n) *

```
Let val be real;  
  
Let FORM-MIN-VIEJO; FORM-MIN-NUEVO be mínimo-global;  
  
Let FORM-MIN-AUX be mínimo-parcial;  
  
GENERAR LOS MINUENDOS DE (FORM-MIN-AUX) APARTIR DE (FORM-MIN-VIEJO);  
  
Comment esto corresponde a la fórmula  $\tilde{g}_k(x_1, \dots, x_n)$ .  
  
GENERAR CORRIMIENTO DE (FORM-MIN-AUX) Y APLICAR MAX-MIN-MAX (FORM-MIN-NUEVO);  
  
IMPRIMIR (FORM-MIN-VIEJO); APLICAR PROGRAMACION LINEAL (FORM-MIN-NUEVO VAL);  
  
IMPRIMIR (val);  
  
FORM-MIN-VIEJO := FORM-MIN-NUEVO;  
comment VAL es el número  $\alpha_{k,n}$  correspondiente al k-ésimo nivel en curso
```

* GENERAR LOS MINUENDOS DE (FORM-MIN-AUX) APARTIR DE (FORM-MIN-VIEJO) *

```
Let FORM-MIN-VIEJO be mínimo-global;
Let FORM-MIN-AUX be mínimo-parcial;
Let FORM-MAX-VIEJO be máximo-global;
Let PROGHEUR be lista-de-expresiones;
Let FORM-MAX-AUX be máximo-parcial;
Let EXPRES be expresión-completa;
Let EXPRESCORRIDA be expresión;
FORM-MIN-AUX:=  $\phi$  ; FORM-MAX-VIEJO:= PRIMER ELEMENTO DE (FORM-MIN-VIEJO);
while FORM-MAX-VIEJO  $\neq$   $\phi$ 
do
  for I:= 1 step 1 until n
  do
    FORM-MAX-AUX:=  $\phi$  ; PROGHEUR:=  $\phi$  ;
    EXPRES:= PRIMER ELEMENTO DE (FORM-MAX-VIEJO);
    while EXPRES  $\neq$   $\phi$ 
    do
      if EXPRES (I) = EXPRES (I+1)
      then
        COPIAR (EXPRES) SOBRE (EXPRESCORRIDA) APARTIR (I+1);
        ENGANCHAR COPIA DE (EXPRESCORRIDA) EN (PROGHEUR)
      else
        ENGANCHAR COPIA DE (EXPRES) EN (FORM-MAX-VIEJO)
      od;
    PROGRAMA LINEAL (I) SOBRE (PROGHEUR) Y RESULTADO EN (FORM-MAX-AUX)
    SIMPLIFICACION DEL MAXIMO (FORM-MAX-AUX)
    ENGANCHAR COPIA (FORM-MAX-AUX) EN (FORM-MIN-AUX)
  od;
  FORM-MAX-VIEJO:= SIGUIENTE DE (FORM-MAX-VIEJO) EN (FORM-MIN-VIEJO)
od;
SIMPLIFICACION DEL MINIMO (FORM-MIN-AUX).
```

Las dos subrutinas de simplificación tienen como objeto eliminar redundancias de las formulas sobre las que se aplican. Este problema está discutido en el apéndice I. Para nuestra situación, en donde

$$G_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = \text{máx} \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=2}^{n+1} x_i \right), \text{ nos con-}$$

viene postergar la discusión de simplificaciones hasta estudiar más a fondo la estructura de las expresiones lineales que manipulamos.

* COPIAR (EXP 1) SOBRE (EXP 2) APARTIR (k) *

```
Let EXP 1 be expresión-completa;
Let k be integer;

comment k indica apartir de que posición hay que correr a izquierda
EXP 1, k ≥ 2.
EXP 2 puede ser completa o no.

for H:= 1 step 1 until k-2
do
  EXP 2 (H) := EXP 1 (H)
od
for H:= k-1 step 1 until n
do
  EXP 2 (H) := EXP 1 (H+1)
od.
```

* PROGRAMA LINEAL (I) SOBRE (PROGHEUR) Y RESULTADO EN (FORM-MAX-AUX) *

```
Let FORM-MAX-AUX be máximo-parcial;
Let LISTA-POS, LISTA-NEG, PROGHEUR be lista-de-expresiones-completas;
Let EXPRES, EXPRESPOS, EXPRESNEG be expresión-completa;
Let EXPRESAUX be expresión;
Let PENDIENTE be real;
Let K, I be integer;
EXPRES:= PRIMER ELEMENTO DE (PROGHEUR);
while EXPRES ≠ Δ
do
  PENDIENTE:= EXPRES (I) - EXPRES (I+1);
  K: I + 1;
  while K ≤ n + 1
  do
    EXPRES (K-1):= EXPRES (K);
    K:= K+1
  od;
  EXPRES (n+1):= VALOR OBSOLUTO (PENDIENTE);
  if PENDIENTE > 0
  then
    ENGANCHAR COPIA DE (EXPRES) EN (LISTA-POS);
    COPIA DE (EXPRES) EN (EXPRESAUX), (n);
    ENGANCHAR COPIA DE (EXPRESAUX) EN (FORM-MAX-AUX)
  fi
  EXPRES:= SIGUIENTE DE (EXPRES) EN (PROGHEUR)
```

```
od;  
comment   procedemos a calcular las ordenadas de las intersecciones de  
pares y rectas, clasificadas en las listas POS y NEG (ver lema 1, y teo  
rema en 2.2.5.1.).  
  
EXPRESPOS:= PRIMER ELEMENTO DE (LISTA-POS);  
while   EXPRESPOS ≠ Δ  
  
do  
    EXPRESNEG:= PRIMER ELEMENTO DE (LISTA-NEG);  
    while   EXPRESNEG ≠ Δ  
    do  
        for   K:= 1 step 1 until n  
        do  
            EXPRESAUX (K):= EXPRESPOS (n+1). (EXPRESNEG(K)-EXPRESPOS(k)) /  
                (EXPRESPOS(n+1) + EXPRESNEG (n+1))+ EXPRESPOS(K);  
        od;  
        ENGANCHAR COPIA DE (EXPRESAUX) EN (FORM-MAX-AUX);  
        EXPRESNEG:= SIGUIENTE DE (EXPRESNEG) EN (LISTA-NEG);  
    od;  
    EXPRESPOS:= SIGUIENTE DE (EXPRESPOS) EN (LISTA-POS)  
od.
```

La subrutina "COPIAR DE (E1) EN (E2), (J)" mueve los J primeros elementos de E1 en E2.

En este momento, atacamos la subrutina pendiente del bloque: "AVANZAR UN NIVEL":

* GENERAR CORRIMIENTO DE (FORM-MIN-AUX) Y APLICAR MAX-MIN-MAX(FORM-MIN-NUEVO)*

```
Let FORM-MIN-NUEVO be mínimo-global;  
Let FORM-MIN-AUX, FORM-MIN-AUX-CORRIDA be mínimo-parcial;  
FORM-MIN-AUX-CORRIDA:= FORM-MIN-AUX;
```

A: APLICAR DISTRIBUCION MAX-MIN-MAX DE (FORM-MIN-AUX) Y DE (FORM-MIN-AUX-CORRIDA) EN (FORM-MIN-NUEVO).

```
comment FORM-MIN-AUX-CORRIDA será interpretada como la fórmula  
 $h_k(x_2, \dots, x_{nH})$  (con k correspondiente) en el momento de ejecutar la  
subrutina A.
```

* APLICAR DISTRIBUCION MAX-MIN-MAX DE (FORM-MIN-AUX) Y DE (FORM-MIN-AUX-CORRIDA) EN (FORM-MIN-NUEVO) *

```
Let FORM-MIN-AUX, FORM-MIN-AUX-CORRIDA be mínimo-parcial;  
Let FORM-MIN-NUEVO be mínimo-global;  
Let FORM-MAX-AUX, FORM-MAX-AUX-CORRIDA be máxima-parcial;  
Let FORM-MAX-NUEVO be máximo-global;  
Let EXPRESAUX, EXPRESAUX-CORRIDA be expresión;  
Let EXPRESCOMPLETA be expresión-completa;  
  
FORM-MIN-NUEVO:=  $\phi$  ;  
FORM-MAX-AUX:= PRIMER ELEMENTO DE (FORM-MIN-AUX);  
while FORM-MAX-AUX  $\neq \Delta$   
  do  
    FORM-MAX-AUX-CORRIDA:= PRIMER ELEMENTO DE (FORM-MAX-AUX-CORRIDA);  
  while FORM-MAX-AUX-CORRIDA  $\neq \Delta$   
    do  
      FORM-MAX-NUEVO:=  $\phi$  ;  
      EXPRESAUX:= PRIMER ELEMENTO DE (FORM-MAX-AUX);  
      while EXPRESAUX  $\neq \Delta$   
        do
```

```
COPIA DE (EXPRESAUX) EN (EXPRESCOMPLETA), (n);
EXPRESCOMPLETA (n+1):= 0;
ENGANCHAR COPIA DE (EXPRESCOMPLETA) EN (FORM-MAX-NUEVO);
EXPRESAUX:= SIGUIENTE DE (EXPRESAUX) EN (FORM-MAX-AUX);

od;
EXPRESAUX-CORRIDA:= PRIMER ELEMENTO DE (FORM-MAX-AUX-CORRIDA);
while EXPRESAUX-CORRIDA ≠ Δ
do
  for I:= 1 step 1 until n
  do
    EXPRESCOMPLETA (I+1):= EXPRESAUX-CORRIDA (I)
  od;
  EXPRESCOMPLETA (1):= 0;
  ENGANCHAR COPIA DE (EXPRESCOMPLETA) EN (FORM-MAX-NUEVO);
  EXPRESAUX-CORRIDA:= SIGUIENTE DE (EXPRESAUX-CORRIDA) EN
    (FORM-MAX-AUX-CORRIDA);

od;
SIMPLIFICACION DEL MAXIMO (FORM-MAX-NUEVO);
ENGANCHAR (FORM-MAX-NUEVO) EN (FORM-MIN-NUEVO);
FORM-MAX-AUX-CORRIDA:= SIGUIENTE DE (FORM-MAX-AUX-CORRIDA)
  EN (FORM-MIN-AUX-CORRIDA);

od;
FORM-MAX-AUX:= SIGUIENTE DE (FORM-MAX-AUX) EN (FORM-MIN-AUX);

od;
SIMPLIFICACION DEL MINIMO (FORM-MIN-NUEVO).
```

La distribución max-min-max que se realiza corresponde al resultado probado en lema 2, 2.2.5.1. Es simple comprobar que el programa calcula las fórmulas $G_k(x_1, \dots, x_{n+1})$, para cualquier iniciación $G_1(x_1, \dots, x_{n+1})$ que sea un mínimo de máximos.

2.2.5.3. Caracterización de las expresiones lineales que genera el programa.

Limitaremos nuestra atención al caso $G_1(x_1, \dots, x_{n+1}) \equiv$

$$\text{máx} \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=2}^{n+1} x_i \right); \text{ en tal situación, el programa dado}$$

en 2.2.5.2. genera, para cualquier nivel k , expresiones lineales, que componen las fórmulas $G_k(x_1, \dots, x_{n+1})$, con 2 propiedades que son fundamentales para su implementación computacional. La prueba de ellas es el objeto del presente apartado.

La afirmación es: Supongamos que $E = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i$, es una expresión

que forma parte de algún máximo-global en la fórmula de mínimo final correspondiente a algún nivel, digamos, k ; entonces existen números naturales i_1, i_2, α , de forma tal que

$$a_i = \frac{1}{\alpha} \quad \text{si} \quad i_1 \leq i \leq i_2 \quad \text{y} \quad a_i = 0, \text{ en otro caso.}$$

Demostración

Procedemos inductivamente en k .

1. Si $k = 1$, la afirmación es trivial, pues las dos expresio-

nes: $\sum_{i=1}^n x_i$ y $\sum_{i=2}^{n+1} x_i$, tienen la propiedad exigida.

2. Supongamos válida la propiedad para $k \leq h$ y probémosla para $h+1$; por la forma en que se genera la fórmula final de cualquier nivel $I (I \geq 2)$, basta ver que se conserva la propiedad para las expresiones generadas por la subrutina:

* GENERAR LOS MINUENDOS DE (FORM-MIN-AUX) APARTIR DE (FORM-MIN-VIEJO) *

tomando como FORM-MIN-VIEJO, la fórmula del nivel k .

Dado un natural $j: 1 \leq j \leq N$, se tienen las siguientes situaciones:

a. Tomemos una expresión $E = \sum_{i=1}^{n+1} e_i \cdot x_i$ de un máximo de la fórmula G_h . Supongamos que $e_j = e_{j+1}$, se genera entonces la expresión:

$$E_1 = \sum_{i=1}^{j-1} e_i \cdot x_i + \sum_{i=j+1}^{n+1} e_i \cdot x_{i-1} .$$

Suponiendo que $e_i = \alpha^{-1}$ para $i_1 \leq i \leq i_2$, $e_i = 0$ en otro caso, tenemos, si $i_1 \leq j \leq i_2 - 1$:

$$E_1 = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i \quad \text{donde se verifica}$$

$$b_i = \frac{1}{\alpha}, \text{ si } i_1 \leq i \leq i_2 - 1; \quad b_i = 0 \text{ en otro caso.}$$

Observese que son similares los casos: $j < i_1$ y $i_2 < j$.

b. Tomemos un par de expresiones:

$$A = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i \quad \text{y} \quad B = \sum_{i=1}^{n+1} b_i x_i,$$

en un mismo máximo de G_h . Supongamos además:

$$a_j - a_{j+1} > 0 \quad \text{y} \quad b_j - b_{j+1} < 0.$$

Entonces se generan las siguientes expresiones:

$$b.1 \quad \bar{A} : \sum_{i=1}^{j-1} a_i x_i + \sum_{i=j+1}^{n+1} a_i x_{i-1}.$$

Teniendo presente que, existen números α y i_A :

$$a_i = \frac{1}{\alpha}, \text{ si } i_A < i < j; \quad a_i = 0 \text{ en otro caso, se tiene:}$$

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i, \text{ donde:}$$

$$\bar{a}_i = \frac{1}{\alpha}, \text{ si } i_A < i < j - 1; \quad \bar{a}_i = 0 \text{ en otro caso.}$$

$$b.2 \quad \bar{B} = \sum_{i=1}^j b_i x_i + \sum_{i=j+2}^{n+1} b_i x_i - 1.$$

Teniendo presente que existen i_B y β :

$$b_i = \frac{1}{\beta}, \text{ si } j+1 < i < i_B; \quad b_i = 0 \text{ en otro caso;}$$

se tiene:

$$\bar{B} = \sum_{i=1}^n \bar{b}_i x_i, \text{ donde:}$$

$$\bar{b}_i = \frac{1}{\beta}, \text{ si } j+1 < i < i_B - 1; \quad \bar{b}_i = 0 \text{ en otro caso.}$$

$$b.3 \quad AB = \sum_{i=1}^n c_i x_i, \quad \text{donde:}$$

$$c_i = a_i + (a_i - b_i) \cdot (a_j - a_{j+1}) \cdot d^{-1}, \quad 1 \leq i \leq j-1$$

$$c_i = a_{i+1} + (a_{i+1} - b_{i+1}) \cdot (a_j - a_{j+1}) \cdot d^{-1}, \quad j \leq i \leq n$$

$$y \quad d = b_j - b_{j+1} + a_{j+1} - a_j.$$

Teniendo presente los valores de a_i y b_i se tiene:

$$c_i = \frac{(\alpha \cdot \beta)^{-1}}{\alpha^{-1} + \beta^{-1}} \quad \text{si} \quad i_A \leq i \leq i_B - 1.$$

$$c_i = 0 \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq i_A - 1 \quad \text{ó} \quad i_B \leq i \leq n.$$

Pero $c_i = \frac{1}{\alpha + \beta}$, donde no es nulo.

Es fundamental observar que hemos encontrado como son los soportes de la familia de coeficientes de cada expresión generada, apar

tir de las expresiones que le dan origen; por otra parte la única operación algebraica que se necesita para el cálculo formal de las expresiones es la suma de números enteros

En resumen, digamos que cualquier expresión que se manipulea en el programa queda representada:

$$(\alpha, i_1, i_2)$$

donde $\alpha, i_1 \leq i_2$ son naturales y la expresión es

$\left(\sum_{i=i_1}^{i_2} x_i \right) \alpha^{-1}$. Las ventajas de esta representación son fáciles de imaginar.

2.2.5.4. Segunda versión del programa resolvente.

El objetivo de este párrafo es elaborar un programa derivado del dado en 2.2.5.3., ejecutable por computadora.

En 2.2.5.3. probamos que cualquier expresión que genera nuestro programa queda determinada por una terna: (α, i_1, i_2) , donde

$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n + 1 \quad \text{y}$$
$$i_1, i_2, \alpha \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto toda fórmula de máximo queda caracterizada o representada con una matriz triangular superior de coeficientes naturales; en efecto, si $E = \max_{i=1, \dots, r} (E_i(x_1, \dots, x_{n+1}))$ es tal fórmula, y $E_i(x_1, \dots, x_{n+1})$ queda representada por (a_i, i_1, i_2) , entonces definimos el coeficiente $M(i_1, i_2) = a_i$, de la matriz M . Existen 2 problemas para tal representación, que se resuelven fácilmente; primeramente, puede haber dos o más expresiones en E con el mismo par (i_1, i_2) ; esto se soluciona pensando en que si ambas expresiones figuran en un máximo, debe preservarse la mayor, y esto corresponde a la elección del mínimo coeficiente a_i entre ambas, pues tienen el mismo soporte. El segundo problema es que hay coeficientes en la matriz que quedan indefinidos; esto se soluciona forzando expresiones redundantes en E . Para hacer esto procedemos a representar la única expresión de máximo en $G_1(x_1, \dots, x_{n+1})$:

$$\text{máx} \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=2}^{n+1} x_i \right), \text{ como: (en la figura es } n=6)$$

M :

1	1	1	1	1	1	2
	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1
			1	1	1	1
				1	1	1
					1	1
						1

Obsérvese que solo $M(1,n) = M(2,n+1) = 1$, corresponden a las dos expresiones

$$\sum_{i=1}^n x_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=2}^{n+1} x_i .$$

Los otros coeficientes corresponden a las expresiones:

$$\sum_{i=i_1}^{i_2} x_i \quad \text{con} \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n,$$

$$\sum_{i=j_1}^{j_2} x_i \quad \text{con} \quad 2 \leq j_1 \leq j_2 \leq n+1 \quad \text{y}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} x_i .$$

Esta última se corresponde con $M(1,n+1) = 2$.

Es claro que todas expresiones forzadas son redundantes, es decir:

$$G_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = \max_{\substack{1 \leq i_2 \leq i_1 \leq n \\ 2 \leq j_1 \leq j_2 \leq n+1}} \left(\sum_{i=i_1}^{i_2} x_i, \sum_{i=j_1}^{j_2} x_i, \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right) .$$

Ahora vamos a interpretar las acciones principales del programa, en términos de la nueva representación para las fórmulas de máximo. Así, se resolverán las generaciones de redundancias para los máximos de las fórmulas G_k , con $k > 1$, y habremos conseguido la versión ejecutable que nos propusimos.

Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq k}$ matriz triangular superior de coeficientes naturales; decimos que A representa a:

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq k} \left[\frac{1}{a_{ij}} \sum_{h=i}^j x_h \right] = M_A .$$

Es fácil ver que el mismo máximo puede lograrse con otra matriz: $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq k}$ de coeficientes naturales:

1. $M_A = M_B$.
2. $b_{ij} \leq b_{ih}$ si $j < h$.
3. $b_{ij} \leq b_{hj}$ si $i > h$.
4. $b_{ij} \leq \min_{i \leq k \leq j-1} (b_{ik} + b_{k+j}) = P_B(i, j)$.

Un posible camino para ver que la representación es única, con las propiedades 2, 3. y 4. sería corolario del siguiente lema, útil para propósitos futuros.

Lema 1.

Sea A una matriz de coeficientes positivos, que satisfaga 2., 3. y 4. Entonces, el valor óptimo del problema:

$$\sum_{i=1}^{i_2} x_i \leq a_{i_1 i_2}, \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq k$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

$$\text{máx} \left(\sum_{i=1}^k x_i \right)$$

es a_{1k} y una solución óptima es:

$$(a_{1k} - a_{2k}, \dots, a_{k-1k} - a_{kk}, a_{kk}).$$

Dejamos la prueba al lector.

Vamos a definir algunas operaciones para matrices triangulares, que nos son necesarias:

Dada $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq k}$, definimos $O_r A$, si $1 \leq r \leq k-1$, a la matriz triangular superior de orden $k-1$, que se obtiene amputando la fila $r+1$ y la columna r de la matriz A .

Es fácil verificar que si A tiene las propiedades 2., 3. y 4., también las conserva $O_k A$.

Dadas $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq k}$ y $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq k}$, definimos la ma

triz triangular superior: $SH(A, B)$ como:

$$(i) \quad SH(A, B)_{ij} = a_{ij} \quad 1 \leq j \leq k$$

$$(ii) \quad SH(A, B)_{ik+1} = b_{ik} \quad 1 \leq i \leq k$$

$$(iii) \quad SH(A, B)_{ij} = \min(a_{ij}, b_{i-1, j-1}).$$

$$(iv) \quad SH(A, B)_{k+1, k+1} = P_{SH(A, B)}(k+1, k+1).$$

Como se observará, el orden de $SH(A, B)$ es uno más que el de A y B . Desafortunadamente la propiedad 4. no se con-

serva bajo la operación SH, en cambio se conservan 2. y 3.

Sea $(a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n+1}$ matriz de coeficientes naturales, con las

propiedades 2., 3. y 4. Denotemos $E_{ij}(x_1, \dots, x_{n+1})$

$$a: \frac{1}{a_{ij}} \sum_{k=i}^j x_k \quad \text{y} \quad M_A: \max_{1 \leq i \leq j \leq n+1} (E_{ij}(x_1, \dots, x_{n+1})) :$$

Teorema 1.

Si $1 \leq r \leq n$, la expresión:

$$\inf_{0 < y < x_r} \left\{ \max_{1 \leq i \leq j \leq n+1} E_{ij}(x_1, \dots, x_{r-1}, y, x_r - y, x_{r+1}, \dots, x_n) \right\} ,$$

es el máximo asociado a la matriz $O_r A$, o sea:

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq n} \left\{ (O_r A)_{i,j}^{-1} \sum_{k=i}^j x_k \right\} .$$

Demostración.

Según el resultado central de 2.2.5.3., se generan las siguientes expresiones:

con E_{ir} y L_{r+1j} se generan

$$(1) \frac{1}{a_{ir} + a_{r+1j}} \cdot \sum_{k=i}^{j-1} x_k, \quad 1 \leq i \leq r; \quad r+1 \leq j \leq n+1$$

con E_{ij} , se tiene (2) $\left(\sum_{k=i}^{j-1} x_k \right) \cdot \frac{1}{a_{ij}}, \quad 1 \leq i \leq r \leq j.$

Pero cada expresión (1) compite con alguna de (2), más precisamente, se enfrentan las expresiones:

$$\frac{1}{a_{ir} + a_{r+1j}} \sum_{k=i}^{j-1} x_k \quad \text{y} \quad \frac{1}{a_{ij}} \sum_{k=i}^{j-1} x_k, \quad 1 \leq i \leq r \leq j-1 \leq n.$$

Por lo tanto, teniendo presente que $a_{ij} \leq a_{ir} + a_{r+1j}$,

es claro que el coeficiente:

$$(O_r A)_{ij}, \quad 1 \leq i \leq r \leq j \leq n$$

caracteriza a la expresión de soporte (i, j) que figura en:

$$\inf_{0 < y < x_r} \{ \max_{i, j} (E_{ij}(x_1, \dots, y, x_r - y, \dots, x_n)) \}$$

En el caso $k+2 \leq i \leq n+1$, $i \leq j$, E_{ij} genera la expresión:

$$a_{ij}^{-1} \sum_{k=i-1}^{j-1} x_k, \quad \text{o sea} \quad \frac{1}{(O_r A)_{i,j}} \sum_{k=i}^j x_k, \quad \text{con } k+1 \leq i \leq j \leq n.$$

En el caso: $1 \leq i \leq j \leq r-2$, E_{ij} genera:

$$\frac{1}{a_{ij}} \sum_{k=i}^j x_k, \quad \text{o sea} \quad \frac{1}{(O_r A)_{ij}} \sum_{k=i}^j x_k.$$

Por último, existen 2 tipos de confrontaciones más, para las cuales se utilizan las propiedades 2. y 3. de A. Estas son:

$$\frac{1}{a_{1r}} \cdot \sum_{k=i}^{r-1} x_k \quad \text{contra} \quad \frac{1}{a_{1r-1}} \cdot \sum_{k=i}^{r-1} x_k \quad 1 \leq i \leq r-1.$$

y

$$\frac{1}{a_{r+1j}} \cdot \sum_{k=r+1}^{j-1} x_k \quad \text{contra} \quad \frac{1}{a_{r+2j}} \cdot \sum_{k=r+2}^{j-1} x_k \quad r+2 \leq j \leq n+1.$$

El gráfico 1. es ilustrativo de la situación.

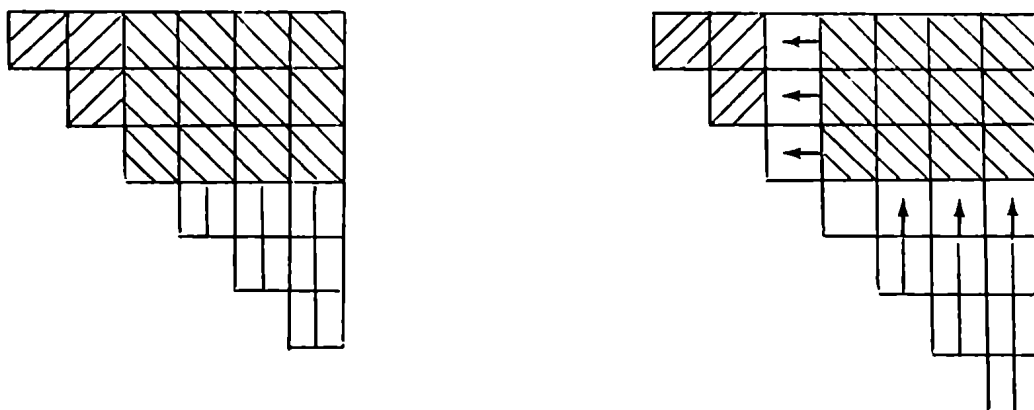


Gráfico 1

En todos los casos se ve que los coeficientes que caracterizan a las expresiones del máximo resultante son $(O_r A)_{i,j}$.

Teorema 2.

Sean $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ y $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ matrices de coeficientes naturales, y M_A y M_B sus máximos asociados:

$$M_A : \max_{1 \leq i \leq j \leq n} \{ E_{ij}(x_1, \dots, x_n) \}$$

$$M_B : \max_{1 \leq i \leq j \leq n} \{ F_{ij}(x_1, \dots, x_n) \}.$$

Entonces la fórmula: $\max_{1 \leq i \leq j \leq n} \{ E_{ij}(x_1, \dots, x_n); F_{ij}(x_2, \dots, x_{n+1}) \}$

queda representada por: $SH(A, B)$.

Demostración.

Si tomamos $E_{ij}(x_1, \dots, x_n)$, no hay competencia en el máximo con ninguna otra expresión. Lo mismo ocurre con $F_{in}(x_2, \dots, x_{n+1})$. En cuanto a un par de fórmulas:

$$E_{ij}(x_1, \dots, x_n) \text{ y } F_{ik}(x_2, \dots, x_{n+1}),$$

compiten sólo cuando: $i = l + 1$ y $j = k + 1$; en tal caso

el coeficiente que sirve es:

$$\min (a_{ij}, b_{i-1, j-1}), \text{ para } 2 \leq i \leq n, \quad 2 \leq j \leq n.$$

Observaciones.

1. Con los teoremas 1 y 2 se han reinterpretado las subrutinas dadas en 2.2.5.2. en términos de operaciones sobre matrices: O_r y SH.
2. Las fórmulas de mínimo (globales o no) son listas de matrices triangulares superiores.
3. Los máximos, comparados uno por uno, dan una regla muy simple de depuración de las fórmulas de mínimo, aunque no es una simplificación exhaustiva. El resultado puede verse demostrado en Apéndice I; el enunciado es:

Lema 2. Sean $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq k}$ y $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq k}$ con las propiedades 2., 3. y 4. Sean M_A y M_B los máximos asociados. Entonces se verifica:

$$\forall x_1, \dots, x_k \leq 0 : M_A(x_1, \dots, x_k) \leq M_B(x_1, \dots, x_k)$$

si y solo si

$$a_{ij} \geq b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq j \leq k.$$

Ahora estamos en condiciones de dar la versión ejecutable del programa 2.2.5.2. Esta consta de un programa FORTRAN, que consiste básicamente en:

Si \mathcal{J}_k es la lista de matrices del nivel k , se contruye la del nivel $k+1$, así:

$$a. \quad \forall A \in \mathcal{J}_k : \forall i \in \mathbb{I}_n : O_i A.$$

esto produce una lista P_k ; luego:

$$b. \quad \forall A, \forall B \in P_k : SH(A, B) \text{ normalizado};$$

esto significa producir la matriz C que tiene las propiedades 2., 3. y 4. y que verifica $M_C = M_{SH}$.

Esto anoja la lista Q_k ; luego:

c. Depurar Q_k con criterio del lema 2.

El lector puede ver en Apéndice II una copia del programa y dos ejecuciones, para los órdenes $n = 1$ y $n = 2$, cuya resolución hemos dado en 2.2.3. y 2.2.4. respectivamente, en Apéndice III.

Observaciones.

4. Teniendo presente que $\alpha_{k,n} = \max_j (\alpha_{k,n}^j)$ (ver nota 3, 2.2.5.1.), y que $\alpha_{k,n}^j = \Lambda_{1,n+1}^j$, donde A^j es la matriz que caracteriza al máximo j -ésimo de G_k (ver lema 1, presente apartado), el cálculo del valor del nivel: $\alpha_{k,n}$ no requiere esfuerzos adicionales. Es importante observar que esto se debe a cómo se define $SH(X,Y)$, y al hecho de que si se normaliza $SH(X,Y)$, la propiedad 4. de la nueva matriz Z , se convierte en la igualdad:

$$Z_{1,n+1} = P_Z(1,n+1), \text{ de donde:}$$

en virtud del lema 1, $\alpha_{k,n}^Z = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \right)$, con las restricciones:

$$(\forall i): x_i \geq 0 \quad \text{y} \quad M_z(x_1, \dots, x_{n+1}) \leq 1,$$

no es más que Z_{1n+1} .

2.2.6. Cota superior para las performances límites: $S_k^{(n)}$.

Dado un vector de \mathbb{R}^{n+1} , $T : (t_1, \dots, t_{n+1})$, denotamos con T^* a $(t_{n+1}, t_n, \dots, t_1)$; dada una matriz A , denotamos $F_i(A)$ y $C_j(A)$ a la i -ésima fila y j -ésima columna respectivamente. Tenemos el siguiente:

Lema 1.

Sea \mathcal{H} un conjunto de matrices triangulares superiores de orden $n+1$ con las propiedades de monotonía (ver 2.2.5.4.).

Sea T un vector de \mathbb{R}^{n+1} : (t_1, \dots, t_{n+1}) con la propiedad

$$(\forall i) : (t_i \leq t_{i+1}).$$

Supongamos que:

$$\forall A \in \mathcal{K} : F_1(A) \leq T \wedge C_{n+1}(A)^t \leq T^* .$$

Entonces se verifica:

$$\forall j, \forall k, \forall A \in \mathcal{K}, \forall B \in \mathcal{K} :$$

$$F_1(\text{SH}(O_j A, O_k B)) \leq Z$$

$$C_{n+1}(\text{SH}(O_j A, O_k B))^t \leq Z^*,$$

donde $Z = (t_2, \dots, t_{n+1}, \min_{0 < j < \left(\frac{n-1}{2}\right)} (t_{n+1-j} + t_{j+2}))$

Demostración.

Basta observar que, por las propiedades de monotonía de los miembros de \mathcal{K} y T , la "mejor" elección de índices correspondería a $k=n, j=1$; y tener presente la definición del elemento $(1, n+1)$ de la matriz $\text{SH}(X, Y)$.

Definimos la sucesión $(S_k^{(n)})_{k \geq 1}$ como:

$$S_k^{(n)} = 1, \quad 1 \leq k \leq n.$$

$$S_k^{(n)} = \min_{0 \leq j \leq \left(\frac{n-1}{2}\right)} (S_{k-n+j}^{(n)} + S_{k-j-1}^{(n)}), \quad k \geq n+1.$$

Entonces se verifica:

Teorema 1.

Dados $k, n \in \mathbb{N}_*$,

$$\alpha_{k,n} < S_{k+n}^{(n)}.$$

Demostración.

Sea \mathcal{K}^k : { A matriz triangular superior: M_A es máximo en la fórmula $G_k(x_1, \dots, x_{n+1})$ }. Vamos a suponer que los miembros de \mathcal{K}^k está normalizados (ver 2.2.5.4.). Si $k = 1$,

es una sola matriz: U ; si denotamos con T^k al vector de \mathbf{R}^{n+1}

$$(S_k^{(n)}, \dots, S_{k+n}^{(n)}),$$

es inmediato verificar $F_1(U) \leq T^1$ y $C_{n+1}(U)^t \leq T^{1*}$.

Ahora, utilizando el lema anterior, se prueba inductivamente en k :

$$\forall A \in \mathcal{H}^k : F(A) \leq T^k, \quad C_{n+1}(A)^t \leq T^{k*}.$$

En particular se tiene el enunciado, pues:

$$\alpha_{k,n} = \sup_{(a_{ij}) \in \mathcal{H}^k} \{a_{1n+1}\}.$$

Observaciones.

1. Es importante notar que la normalización de las matrices

representantes de la fórmula G_k es un procedimiento que no aumenta el valor de ningún coeficiente de las matrices en cuestión.

2. Veamos qué se tiene, si $n=1$ y $n=2$, en teorema 1.

$n=1$; la sucesión $(S_k^{(1)})_k$ no es otra que $(2^k)_k$.

$n=2$; $(S_k^{(2)})_k$ es la sucesión de Fobonacci definida en 1.2.2.

En este último caso se tiene la acotación anunciada en 1.2.2. como caso particular del teorema anterior.

3. La conjetura central de este trabajo es

$$\alpha_{k,n} = S_{k+n}^{(n)} \quad k, n \in \mathbb{N}_* .$$

Esta igualdad será probada para todos los órdenes n impares y para $n=4$, con cualquier nivel k .

2.2.7. Resolución completa para n impar.

Las metas de este párrafo son:

1. Calcular explícitamente $(S_k^{(n)})_{k \geq 1}$ y demostrar que $(\alpha_{k,n})_{k \geq 1}$ no es más que la sucesión $(S_{k+n}^{(n)})_{k \geq 1}$.
2. Dar conjuntos de posiciones $(x_1^k, \dots, x_{n+1}^k)$ óptimas que realicen el valor $\alpha_{k,n}$ para cada $k \geq 1$ o bien dar posiciones que lo aproximen tanto como se quiera, para $k \geq 1$.

Comenzamos por definir la sucesión $(R_k^{(n)})_{k \in \mathbf{N}}$,

$$R_r^{(n)} = 2^{\binom{r}{k}} \cdot \frac{k+j}{k}, \text{ donde:}$$

$$k = \frac{n+1}{2}, \text{ n natural impar y } j = r - \binom{r}{k} \cdot k$$

Lema 1

Si $r \geq 1$ se tiene:

$$(i) \quad R_{r \cdot k + i}^{(n)} = R_{(r-1)k}^{(n)} + R_{(r-1)k + 2i}^{(n)}$$

$$0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$$

$$(ii) \quad R_{(r+1)k-i}^{(n)} = R_{rk}^{(n)} + R_{rk-2i}^{(n)}$$

Demostración.

$$\text{Si } i \leq \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \rightarrow R_{(r-1)k+2i}^{(n)} = 2^{r-1} \cdot \frac{2i+k}{k}$$

Como $R_{(r-1)k}^{(n)} = 2^{r-1}$ resulta la igualdad (i).

Para probar (ii) basta con escribir

$$R_{(r+1)k-i}^{(n)} = R_{rk+(k-i)}^{(n)} \quad \text{y} \quad R_{rk-2i}^{(n)} = R_{(r-1)k+(k-2i)}^{(n)}$$

y tener presente $0 \leq k - i \leq k$ y $0 \leq k - 2i \leq k$.

Nótese que cualquier R_t , con $t \geq 0$ se puede escribir como

$R_{rk+i}^{(n)}$ o $R_{(r+1)k-2i}^{(n)}$, con $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$ y $r \geq 0$. En parti-

cular si $t \geq k$, R_t se escribe recursivamente como un tér-

mino, que es una potencia de 2, más otro, que dista del anterior en relación a lo que R_r dista de la potencia de 2 inmediata anterior a él. Esta propiedad de apariencia inocente, arroja el resultado:

Teorema 1.

Dado n natural impar, y $r \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$S_{r+n}^{(n)} \leq \left(R_r^{(n)} \right)^*$$

Demostración.

Procedemos inductivamente en r . Si $0 \leq r \leq 2.k$ con $k = \frac{n+2}{2}$ la desigualdad se obtiene por inspección:

Si $r=0$ es obvia. Si $1 \leq r \leq k-1$ se tiene:

$$\left(R_r^{(n)} \right)^* = \left(2^{\binom{r}{k}} \cdot \frac{k+j}{k} \right)^* = \left(\frac{k+j}{k} \right)^* \quad \text{y } 1 \leq j \leq k-1;$$

con lo cual $\left(R_r^{(n)} \right)^* = 2$ para $1 \leq r \leq k$. Por otra parte

$S_{r+n}^{(n)}$ coincide con los valores recién calculados. Ahora, si $k < r \leq 2k$, tenemos: $R^{(n)} = R_{r+i}^{(n)} = 2 \cdot \frac{i+k}{k}$ con $1 \leq i \leq k-1$, por lo cual $\left(R_r^{(n)} \right)^* \geq 3$ y $3 \geq S_{r+n}$ para $i \leq \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$.

En cambio si $i > \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$ se tiene $2 \cdot \frac{i+k}{k} > 3$ y por consiguiente $\left(R_r^{(n)} \right)^* \geq 4$, mientras que $S_{r+i+n} \leq 4$ con i en ese rango.

El paso inductivo requiere algo de sutileza en la operatoria. Sabemos que cualquier subíndice r se puede escribir como $k \cdot s + i$ o como $k(s+1) - i$, con $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$.

Denominamos $j_0(r)$ a $k(s-1)$ y $j_1(r)$ a $k(s-1) + 2i$ en el caso $r = k \cdot s + i$ y $j_0(r) = ks$, $j_1(r) = ks - 2i$ para $r = k(s+1) - i$. Con esta notación tenemos:

$$R_r^{(n)} = R_{j_0(r)}^{(n)} + R_{j_1(r)}^{(n)}, \quad \text{si } k \leq r.$$

Por definición: $S_{r+1+n}^{(n)} = \min_{j=0, \dots, k-1} (S_{r+n-j}^{(n)} + S_{r+j+1}^{(n)})$;

es fácil verificar que existe $j \in [0, k-1]$:

$$S_{r+n-j}^{(n)} + S_{r+j+1}^{(n)} = S_{j_0(r+1)}^{(n)} + S_{j_1(r+1)}^{(n)}, \text{ con lo cual}$$

por hipótesis inductiva:

$$S_{r+1+n}^{(n)} \leq \left(R_{j_0(r+1)}^{(n)} \right)^* + \left(R_{j_1(r+1)}^{(n)} \right)^* ; \text{ como } R_{j_0(r+1)}^{(n)} \text{ es}$$

entero, se tiene:

$$\left(R_{j_0(r+1)}^{(n)} \right)^* + \left(R_{j_1(r+1)}^{(n)} \right)^* = \left(R_{r+1}^{(n)} \right)^* .$$

Teorema 2.

Dados n natural impar, $r \in \mathbb{N}_*$, se tiene:

$$\left(R_r^{(n)} \right)^* \leq \alpha_{r,n} .$$

Demostración.

Vamos a dar una estrategia de particionado de $[0, 2^h]$ de profundidad $\frac{n+1}{2} \cdot h$ y orden n de decisión: E^h , que verifique:

$$\text{val}_{[0, 2^h]} (E^h) = 1 .$$

Damos los n puntos iniciales mediante los segmentos:

$$x_i = \frac{2^h}{n+1} , \quad i = 1, \dots, n+1 .$$

Ahora E^h procede ubicando los nuevos puntos en los puntos medios de los segmentos anteriores, de forma tal que para las primeras $\frac{n+1}{2}$ eliminaciones, su valor sea $\frac{2}{n+1}$; así, cualquier nodo de profundidad $\frac{n+1}{2}$ tiene como intervalo base uno

de longitud 2^{h-1} y con posición inicial:

$$x_i = \frac{2^{h-1}}{n+1}, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Estas observaciones permiten un armado inductivo, en h , de E^h .

De esta manera, hemos probado:

$$\alpha_{h \left(\frac{n+1}{2} \right), n} \geq \left[R_h^{(n)} \left(\frac{n+1}{2} \right) \right]^* \quad \text{si} \quad h \geq 1.$$

Para los índices que restan:

Escribamos $r = h \left(\frac{n+1}{2} \right) - i$ con $1 \leq i < \frac{n+1}{2}$; dada la estra-

tegia E^h , de haber sido construída como corresponde, se verifica luego de i eliminaciones, que cualquier nodo con esa profundidad tiene un intervalo base que mide:

$$2^h - i \cdot \frac{2^h}{n+1}.$$

Por lo tanto:

$$\alpha_{r,n} \geq \left(2^h - \frac{i}{n+1} \cdot 2^h \right)^*$$

puede lograr $2^h - i \cdot \frac{2^h}{n+1}$ y teniendo presente que el óp-

timo $\alpha_{r,n}$ es entero se debe lograr, al menos, $\left(2^h - \frac{i}{n+1} \cdot 2^h \right)^*$.

Por último es fácil ver que $\frac{n+1-i}{n+1} \cdot 2^h$ es $R_r^{(n)}$, si

$$r = h \left(\frac{n+1}{2} \right) - i, \quad 1 \leq i < \frac{n+1}{2}, \quad h \geq 1.$$

Corolario 1.

Dados n y r como siempre, tenemos:

$$\alpha_{r,n} = \left(R_r^{(n)} \right)^* = S_{r+n}^{(n)}$$

Corolario 2.

Con las notaciones del teorema 2,

$$S_r^{(n)} = S_{j_0(r)}^{(n)} + S_{j_1(r)}^{(n)}, \quad r \geq n + 1.$$

Por lo tanto hemos logrado la caracterización siguiente:

$$\alpha_{s,n} = \left(2^{\binom{s}{k}} \cdot \frac{s - \left(\frac{s}{k}\right) \cdot k + k}{k} \right)^*$$

donde $k = \frac{n+1}{2}$ y n natural impar.

Sim embargo, sólo para los s múltiplos de k hemos logrado estrategias y posiciones óptimas que realicen $\alpha_{s,n}$. Seguidamente dejamos los lineamientos a seguir para los restantes índices.

Dado $V = (v_1, \dots, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, definimos

$$C_i(V) = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^n,$$

para $1 \leq i \leq n+1$; dado $W = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$\oplus W = \min_{0 \leq j < \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (w_{n-j} + w_{j+1}) \quad \text{y por último, para } \ell$$

natural, el vector: $T = (t_n(\ell), \dots, t_0(\ell))$, donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_i(\ell) = k \cdot \ell - i, \quad 0 \leq i \leq k = \frac{n+1}{2} \\ t_{k+i}(\ell) = t_{k+i-1}(\ell) - (t_{2(i-1)}(\ell) - t_i(\ell)), \quad 1 \leq i \leq k-1. \end{array} \right.$$

Lema 2.

Dado $\ell \in \mathbb{N}_*$, se tiene:

$$1) \quad R_{t_0(\ell)}^{(n)} = \oplus (R_{t_n(\ell)}^{(n)}, \dots, R_{t_1(\ell)}^{(n)}), \quad \text{donde}$$

$$R_{t_{k+i}(\ell)} = \frac{i}{k} \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq k-1.$$

$$2) \quad \text{Denotando} \quad V_0(\ell) = (R_{t_n(\ell)}^{(n)}, \dots, R_{t_0(\ell)}^{(n)}).$$

Si $1 \leq i \leq k$:

$$R_{k, \ell+i}^{(n)} = \oplus C_i (V_{i-1}), \text{ donde } V_j \text{ denota el vec-}$$

tor: $(C_j (V_{j-1}), R_{k\ell+j})$, $1 \leq j \leq k$.

$$3) \quad V_k = (R_{t_n(\ell+1)}^{(n)}, \dots, R_{t_0(\ell+1)}^{(n)}).$$

Demostración.

Daremos un esbozo de la prueba. Primeramente

$$V_0(1) = \left(\frac{i}{k} \right)_{1 \leq i \leq n+1}, \text{ por lo cual 1) es trivial.}$$

$$\text{Suponiendo } (R_{t_n(\ell)}^{(n)}, \dots, R_{t_0(\ell)}^{(n)}) = \left(\frac{2^{-1}}{k} \cdot i \right)_{1 \leq i \leq n+1} \text{ y}$$

aceptando la parte 2) se ve muy fácilmente que las sucesivas operaciones:

$$C_i (V_{i-1}) \text{ y } (C_i (V_{i-1}), \oplus C_i (V_{i-1})) = V_i$$

conducen, luego de k repeticiones, al vector:

$$\left(\frac{2^\ell}{k} \cdot i \right)_{1 \leq i \leq n+1} .$$

Con respecto a 2), no es difícil ver que para cualquier vector $C_i(V_{i-1})$, existen un par de índices $m_1(i)$ y $m_2(i)$:

$$R_{m_1(i)}^{(n)} + R_{m_2(i)}^{(n)} = R_{j_0(k\ell+i)}^{(n)} + R_{j_1(k\ell+i)}^{(n)} \quad (\text{ver notación teorema 1}).$$

1). Por lo tanto ya se tiene:

$$\oplus C_i(V_{i-1}) \leq R_{k\ell+i}^{(n)}, \text{ cualquiera sea } \ell \geq 1.$$

Esta observación permite comprender mejor la situación que nos ocupa: desde el subíndice $\min(j_0(k+i), j_1(k+i))$ hasta $k+i$, el vector V_i está compuesto por elementos consecutivos de la sucesión $(R_s^{(n)})_{s \in \mathbf{N}_*}$; los restantes primeros índices toman valores no consecutivos, pero lo suficientemente buenos para conservar la propiedad de que cada término de la sucesión:

$R_s^{(n)}$, se puede escribir como mínimo de sumas de pares de términos:

$R_h^{(n)} + R_{h'}^{(n)}$, donde h y h' pueden no ser de la forma

$$s - n + j, \quad s - j - 1 \quad \text{para} \quad 0 \leq j \leq \frac{n-1}{2} .$$

Para completar la prueba de 2), sugerimos la siguiente técnica:

Tomar la matriz triangular superior: $M_0(\ell)$

$$\begin{array}{cccccccc}
 \frac{2^{\ell-1}}{k} & & \frac{2^{\ell-1}}{k} & \cdot & 2 & & 2^{\ell-1} & & 2^\ell \\
 & & & & & & & & \\
 & & \frac{2^{\ell-1}}{k} & & & & & & 2^{\ell-1} \\
 & & & & \frac{2^{\ell-1}}{k} & & & & \\
 & & & & & & & & \frac{2^{\ell-1}}{k} \cdot 2 \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \frac{2^{\ell-1}}{k}
 \end{array}$$

Observar que la primera fila es $V_0(\ell)$ y probar que:

2.1. $F_1(O_1(M_0(\ell))) = C_1(V_0(\ell))$

2.2. $\oplus C_1(V_0(\ell))$ no es más que el elemento $(1, n+1)$ de la matriz

$$SH(O_1(M_0(\ell)), O_n(M_0(\ell))) = M_1$$

2.3. La matriz M_1 no sólo es normalizada, sino que además verifica:

$$M_1(i,j) = P_{M_1}(i,j). \quad (\text{ver } 2.2.5.4)$$

2.4. La diagonal de M es el vector de soluciones construido en teorema 2 para el nivel $k.\ell + 1$, que realizan $R_{k.\ell+1}^{(n)}$

$$2.5. \quad \sum_{h=1}^{n+1} M_1(h,h) = R_{k.\ell+1}^{(n)} = \oplus C_1(V_0(\ell)).$$

Repitiendo el procedimiento con la matriz M_1 , formando:

$$M_2 = SH(O_2(M_1), O_{n-1}(M_1)) \quad \text{se verifican conclusiones}$$

similares; así se sigue k veces.

Teorema 3.

1. La matriz $\left(M_{\ell.k} \right)$ definida como:

$$\left[M_{\ell, k} \right] (i, j) = \left[M_0(\ell) (i, j) \right]^*$$

pertenece a la fórmula $G_{k, \ell}$, para $\ell \geq 1$.

2. Definiendo recurrentemente:

$$\left[M_{\ell, k+i} \right] = SH(O_i([M_{\ell, k+i-1}], O_{n+1-i}([M_{\ell, k+i-1}]))),$$

para $1 \leq i \leq k$, se verifica que dicha matriz es óptima para el nivel $k, \ell + i$.

Demostración.

Basta con tener presente que el lema 1 vale si sustituimos $R_s^{(n)}$ por $\left[R_s^{(n)} \right]^*$. Mirando la metodología con que fue probado

dicho lema, se ve rápidamente:

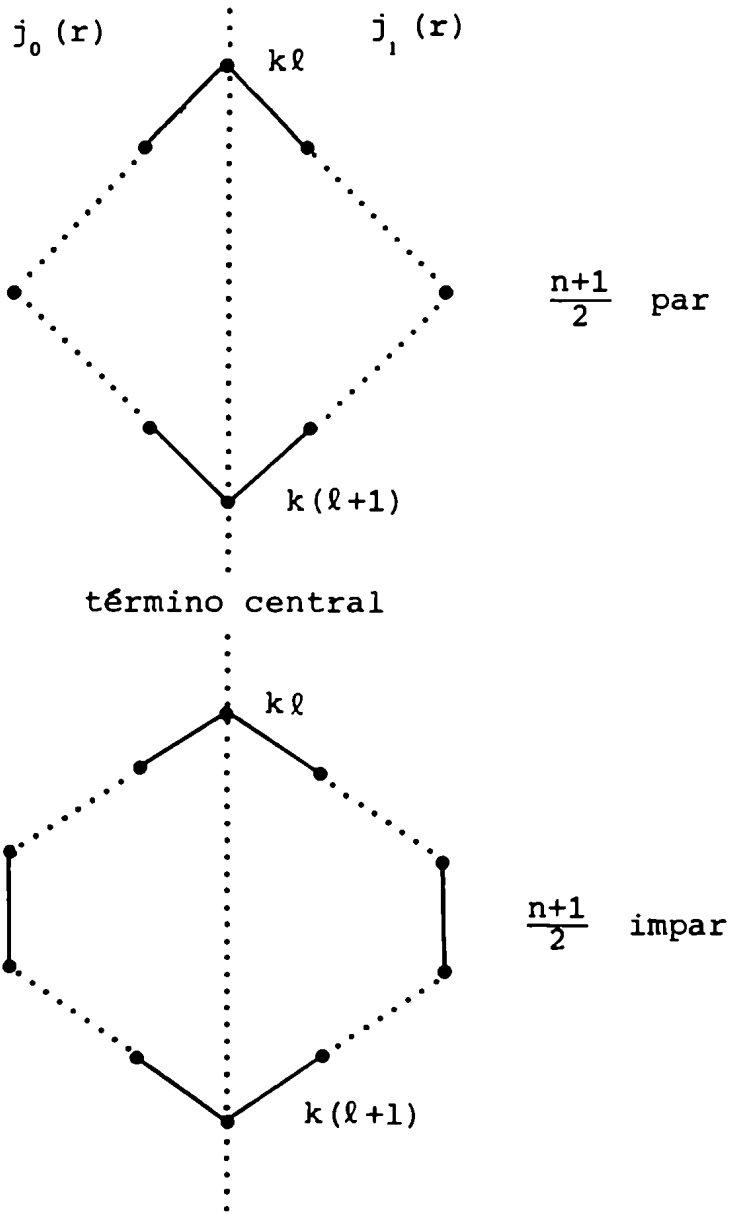
$$\left[M_{k, \ell+i} \right] (1, n+1) = \left[R_{k, \ell+i}^{(n)} \right]^* .$$

Como las matrices $\left(M_{k\ell+i} \right)$ son normalizadas por definición (es decir la operación SH no necesita posterior normalización) se tiene la optimalidad mencionada.

El lector encontrará en Apéndice III para el caso particular en que $n=3$ y $n=5$, como ayuda para seguir los razonamientos anteriores, la escritura de las matrices que anuncia el teorema.

Observaciones.

1. Es curiosa la posición de los índices $j_0(r)$ y $j_1(r)$ si se los grafica en términos de r , para un ciclo de $k+1$ índices (que comience en $r = k.\ell$) (Ver figura).
2. Es importante observar que aún queda pendiente estudiar el problema de si $\alpha_{k,n}$ es alcanzable o no. (se verá más adelante)
3. Desde un punto de vista práctico, las estrategias dadas en teorema 2 que realizan exactamente: $2^h \cdot \frac{j+k}{k}$ para $r = h.k+j$ son suficientes para la resolución de nuestros problemas, pues si bien no son las óptimas su performance tiene un defecto menor que 1, y su programación es practicamente trivial.



2.2.8. Resolución para $n = 4$.

De naturaleza muy diferente son los casos en que n es par; para la resolución de estos problemas estimamos conveniente desarrollar algunas herramientas adicionales.

Dado $k \in \mathbb{N}_*$, definimos Δ_k :

$$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1} : G_k(x_1, \dots, x_{n+1}) \leq 1\}.$$

Sabemos que Δ_k es una unión de polítopos en \mathbb{R}^{n+1} . El próximo lema permite obtener Δ_{k+1} a partir de Δ_k , si $k \geq 1$.

Lema 1.

Si $k \in \mathbb{N}_*$, son equivalentes

1. $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Delta_{k+1}$
2. $\exists i_1 \in \{1, \dots, n\}$, $\exists i_2 \in \{2, \dots, n+1\}$, $\exists y_1 \in [0, x_{i_1}]$,
 $\exists y_2 \in [0, x_{i_2}]$: $(x_1, \dots, x_{i_1-1}, y_1, x_{i_1} - y_1, \dots, x_n) \in \Delta_k$ y
 $(x_2, \dots, x_{i_2-1}, y_2, x_{i_2} - y_2, \dots, x_{n+1}) \in \Delta_k$.

Demostración.

Basta con tener presente la formación recurrente de $(G_k)_{k \geq 1}$.

Lema 2.

Si $n=4$, $k \geq 5$ vale:

$$S_k^{(4)} = S_{k-2}^{(4)} + S_{k-3}^{(4)} .$$

Demostración.

Los siete primeros términos de $(S_k^{(n)})_k$ son

1, 1, 1, 1, 2, 2, 3 ; de aquí que la propiedad del lema es evidente si $k = 5, 6, 7$.

Ahora se procede inductivamente en k , para $k \geq 7$.

Lamentablemente no existen propiedades similares para n par mayor que 4, sino asintóticamente; esto no sólo limita la elegancia de exposición de los resultados sino que obstruye la posibilidad de elaborar un razonamiento general para n par; por lo tanto demos ahora dar el

Teorema 1.

Si $n=4$, se verifica:

1. $\alpha_{k,4} = S_{k+4}^{(4)}$, si $k \geq 1$.

2. Para $k \geq 6$ son posiciones óptimas:

$$T_k : (S_{k-1}^{(4)}, S_{k-2}^{(4)}, S_{k-3}^{(4)}, S_{k-4}^{(4)}, S_k^{(4)}) \quad y$$

$$T_k^* : (S_k^{(4)}, S_{k-4}^{(4)}, S_{k-3}^{(4)}, S_{k-2}^{(4)}, S_{k-1}^{(4)}) .$$

Demostración.

El lector puede comprobar en Apéndice III el listado de las matrices que caracterizan las fórmulas G_k si $1 \leq k \leq 5$.

De ahí se concluye, en particular, dos cosas que nos interesan

1°) $\alpha_{k,4} = S_{k+4}^{(4)}$ si $1 \leq k \leq 5$

2°) $(1,1,1,1,1)$ es posición óptima para $k = 5$.

Ahora la parte 2 del teorema se obtiene por inducción:

Si $k = 6$, $T_k = T^* = (2, 1, 1, 1, 2)$. Pero T_6 es solución pues $(1, 1, 1, 1, 1) \in \Delta_5$ y vale el lema 1.

Es decir $G_6(2, 1, 1, 1, 2) \leq 1$. Además $\|T_6\|_1 = 7$, que corresponde a $S_{10}^{(4)}$.

Suponiendo que T_k, T_k^* estén en Δ_k , probaremos su homónimo para $k+1$;

Para T_{k+1} , si consideramos:

$$\left[S_k^{(4)}, S_{k-1}^{(4)}, S_{k-2}^{(4)}, S_{k-3}^{(4)} \right]$$

y subdividiendo $S_{k-1}^{(4)}$ en $S_{k-3}^{(4)} + S_{k-4}^{(4)}$ (lema 2) se logra el vector

$$H_k : \left[S_k^{(4)}, S_{k-4}^{(4)}, S_{k-3}^{(4)}, S_{k-2}^{(4)}, S_{k-3}^{(4)} \right] \text{ que es coordenada}$$

a coordenada menor o igual que T_k^* , que está en Δ_k por hipótesis,

esto alcanza para verificar $H_k \in \Delta_k$

(por el tipo de ecuaciones que definen a los polítopos de Δ_k).

Por otra parte, si consideramos:

$$\left(S_{k-1}^{(4)}, S_{k-2}^{(4)}, S_{k-3}^{(4)}, \varepsilon_{k+1}^{(4)} \right)$$

y subdividimos $S_{k+1}^{(4)}$ en $S_k^{(4)} + S_{k-4}^{(4)}$, tenemos:

$$\left(\varepsilon_{k-1}^{(4)}, S_{k-2}^{(4)}, S_{k-3}^{(4)}, S_{k-4}^{(4)}, S_k^{(4)} \right)$$

que no es sino T_k , que está en Δ_k .

En forma simétrica se prueba que $T_{k+1}^* \in \Delta_{k+1}$.

Ahora basta con verificar:

$$\|T_k\|_1 = S_{k+4}^{(4)} \quad \text{para completar 1, esto es inmediato}$$

teniendo presente lema 2.

Observación.

1. La demostración del teorema anterior ha permitido elaborar una estrategia por lo menos hasta la posición $(1,1,1,1,1)$; sin embargo es simple continuarla hasta vectores de norma 1 menores o iguales que 1, en presencia de las fórmulas G_k del apéndice III, $1 \leq k \leq 4$.
2. Queda pendiente la discusión sobre si los valores $\alpha_{k,4}$ son alcanzables o no. Es precisamente este punto al que se refiere el próximo apartado.

2.2.9. Cotas asintóticas realizables.

Vamos a atacar el problema que consiste en determinar la existencia de estrategias de particionado $E_n(k)$ del segmento $\left[0, S_{k+n}^{(n)}\right]$, de profundidad k y orden n de decisión, que verifiquen:

$$\text{val} \left(0, S_{k+n}^{(n)}\right) (E_n(k)) \leq 1.$$

Así, tendremos resuelto completamente el problema 2.1.a para n impar y $n=4$; por otra parte habremos mejorado la información sobre los casos pares.

Para tratar este problema necesitamos otra técnica que la usada hasta ahora, pues las funciones G_k , al ser calculadas recursivamente, pierden la información referente a si los mínimos que aparecen en su cómputo se logran superponiendo puntos, acción que no corresponde a la elaboración de una estrategia. En cambio nos serán útiles las regiones de factibilidad, que para cada nivel k definimos como:

$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_{>0}^{n+1} : \exists \text{ estrategia } E_n(k) \text{ de}$

$$\left(0, \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right) : \text{val}(E_n(k)) \leq 1 \} \text{ y denotamos } \Omega_k .$$

Dejamos a cargo del lector la prueba del

Lema 1.

a. Si $k \in \mathbb{N}_*$, son equivalentes

1. $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Omega_{k+1}$

2. $\exists i_1 \in \{1, \dots, n\} : \exists i_2 \in \{2, \dots, n+1\} : \exists y_1 \in (0, x_{i_1}) :$

$$: \exists y_2 \in (0, x_{i_2})$$

$$(x_1, \dots, x_{i_1-1}, y_1, x_{i_1}-y_1, \dots, x_n) \in \Omega_k \quad \text{y}$$

$$(x_2, \dots, x_{i_2-1}, y_2, x_{i_2}-y_2, \dots, x_{n+1}) \in \Omega_k .$$

b. La región Δ_k definida en 2.2.8. es la clausura topológica en \mathbb{R}^{n+1} de Ω_k , $k \geq 1$.

c. Si $k = 1$, Ω_1 , no es sino el polítopo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \\ \sum_{i=2}^{n+1} x_i \leq 1 \\ x_1, \dots, x_{n+1} > 0. \end{array} \right.$$

Es conveniente introducir las operaciones siguientes:

Si $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^n : \mathcal{K}_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

y

$$\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$(x, y) \rightarrow (x_1, \min(x_2, y_1), \dots, \min(x_n, y_{n-1}), y_n)$$

Probamos el

Lema 2

Dado $k \in \mathbb{N}_*$, si $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Omega_k$, $(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \Omega_k$

entonces, dados $i, j : 1 \leq i, j \leq n$ se cumple:

$$z = \phi(\mathcal{H}_i(x_1, \dots, x_{n+1}), \mathcal{H}_j(y_1, \dots, y_{n+1})) \in \Omega_{k+1}.$$

Demostración.

Vamos a utilizar la equivalencia del punto a. del lema 1.

En el caso $i = 1$ y $j = n$ se tiene una partición de z como:

$$(x_1, z_1 - x_1, z_2, \dots, z_n) \quad y$$

$$(z_2, \dots, z_n, y_n, z_{n+1} - y_n).$$

Tengamos presente que por la suposición : $z_1 - x_1 = x_2$

y $z_{n+1} - y_n = y_{n+1}$, por lo cual ambos vectores están

en Ω_k y se aplica lema 1.

Entonces, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $i > 1$; en tal caso el vector z tiene el aspecto siguiente:

$$(z_1, \dots, z_{i-1}, \min(y_{i-1}, x_i + x_{i+1}), z_{i+1}, \dots, z_{n+1}),$$

donde hemos supuesto, para simplificar, que $j > i - 1$.

Consideremos el vector:

$$(z_1, \dots, z_{i-1}, \min(x_i + x_{i+1}, y_{i-1}), z_{i+1}, \dots, z_n) \text{ y}$$

analicemos los siguientes casos:

$$(i) \quad x_i + x_{i+1} \leq y_{i-1}$$

Basta tomar el vector:

$(z_1, \dots, z_{i-1}, x_i, x_{i+1}, z_{i+1}, \dots, z_n)$, que está en Ω_k

(pues está mayorado por $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1})$).

$$(ii) \quad x_i < y_{i-1} < x_i + x_{i+1}$$

Se toma $(z_1, \dots, z_{i-1}, x_i, z_i - x_i, z_{i+1}, \dots, z_n) \in \Omega_k$.

$$(iii) \quad y_{i-1} \leq x_{i+1}$$

Se toma $(z_1, \dots, z_{i-1}, \varepsilon, z_i - \varepsilon, z_{i+1}, \dots, z_n)$, con

$$0 < \varepsilon < x_i, \quad 0 < \varepsilon < y_{i-1}.$$

$$(iv) \quad x_{i+1} \leq y_{i-1} \leq x_i.$$

Se toma $y: y_{i-1} - x_{i+1} < y < y_{i-1}$, y el vector:

$(z_1, \dots, z_{i-1}, y, y_{i-1} - y, z_{i+1}, \dots, z_n)$, que pertenece

a Ω_k .

En forma parecida se procede si se considera (z_2, \dots, z_{n+1}) , teniendo de esa forma la partición requerida por lema 1, para z .

Como consecuencia de lo visto en lemas 1 y 2 del presente apartado, se tiene que:

$$\Omega_{k+1} = \bigcup_{1 \leq i, j \leq n} \phi(\mathcal{H}_i(\Omega_k), \mathcal{H}_j(\Omega_k)).$$

Supongamos que Ω_k sea una unión de polítopos que tienen la propiedad siguiente:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Omega_k \wedge 0 < (y_1, \dots, y_{n+1}) \leq (x_1, \dots, x_{n+1})$$

entonces $(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \Omega_k$; es fácil comprobar que Ω_{k+1}

tiene la misma propiedad. Más específicamente, si

$$\Omega_k = \bigcup_r P_r^k, \text{ donde } P_r^k \text{ es polítopo, se tiene}$$

$$\Omega_{k+1} = \bigcup_{r, \bar{r}} \bigcup_{1 \leq i, j \leq n} \phi(\mathcal{H}_i(P_r^k), \mathcal{H}_j(P_{\bar{r}}^k)); \text{ además por la}$$

propiedad supuesta para los (P_r^k) , se deduce:

$$\phi(\mathcal{H}_i(P_r^k), \mathcal{H}_j(P_r^k)) = (\mathcal{H}_i(P_r^k) \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times \mathcal{H}_j(P_r^k)).$$

De la misma forma en que procedimos antes, cada polígono quedará representado por una matriz triangular superior de coeficientes naturales y con ciertas características adicionales. Veremos como se reinterpretan las operaciones \mathcal{H}_i y ϕ en términos de esta representación.

De hecho trabajaremos con matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq r}$, donde para cada par (i, j) existe un número asociado $c(i, j) \in \{0, 1\}$.

Llamamos polígono asociado a (A, c) al determinado por las inecuaciones en \mathbb{R}^r :

$$x_1, \dots, x_r > 0$$

$$\sum_{s=1}^j x_s \leq a_{ij} \quad \text{si } c(i, j) = 0.$$

$$\sum_{s=i}^j x_s < a_i \quad \text{si } c(i,j) = 1.$$

Como se advierte c es un indicador de cómo considerar la inecuación asociada a cada par de índices.

Es fácil deducir que la matriz A y el indicador c se pueden suponer con las siguientes propiedades, sin que cambie su polítopo asociado:

1. $a_{ik} \leq a_{ik+1} \quad (\forall i) (\forall k)$

2. $a_{ik} = a_{ik+1} \rightarrow c(i,k) = 1.$

3. $a_{ki} \leq a_{k-1i} \quad (\forall i) (\forall k).$

4. $a_{ki} = a_{k-1i} \rightarrow c(k,i) = 1.$

5. $a_{ij} \leq P_A(i,j)$

6. Si $c(i,j) = 1$, entonces:

$$c(i,k) = 1 \vee c(k+1,j) = 1 \rightarrow a_{ij} < a_{k+1j} + a_{ik}.$$

Vamos a denominar "normalizada" a una representación (A, c) que tenga las propiedades anteriores.

Teorema 1.

Sea P el polígono asociado a (A, c) y supongamos la representación normalizada. Entonces $(O_i(A), O_i(c))$ tiene a $\mathcal{K}_i(P)$ como polígono asociado.

Demostración.

Supongamos que $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n+1}$ y por lo tanto que la operación \mathcal{K}_i tiene parámetro $i : 1 \leq i \leq n$.

El hecho de que el polígono asociado a $(O_i(A), O_i(c))$ contenga a $\mathcal{K}_i(P)$ es trivial.

Ahora bien, dado $z = (z_1, \dots, z_n) \in P_i$, polígono determinado por $(O_i(A), O_i(c))$, encontraremos valores x_i y x_{i+1} :

$$x_i + x_{i+1} = z_i, (z_1, \dots, z_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, z_n) \in P$$

Definamos los números

$$\bar{x}_i = \min_{1 \leq k \leq i} \left(a_{ki} - \sum_{j=k}^{i-1} z_j \right) = a_{mi} - \sum_{j=m}^{i-1} z_j$$

$$\text{y } \bar{x}_{i+1} = \min_{i+1 \leq k \leq n+1} \left(a_{i+k} - \sum_{j=i+1}^{k-1} z_j \right) = a_{i+1\bar{m}} - \sum_{j=i+1}^{\bar{m}-1} z_j$$

Es inmediato, por las propiedades de A y c , verificar que

$$\bar{x}_i \text{ y } \bar{x}_{i+1} > 0.$$

Además, como $\sum_{j=m}^{\bar{m}-1} z_j \leq a_{m,\bar{m}} \leq a_{mi} + a_{i+1\bar{m}}$, se tiene

$$\bar{x}_i + \bar{x}_{i+1} \geq z_i \quad (*). \text{ Supongamos que } c(m,i) = 0 \text{ y}$$

$c(i+1,\bar{m}) = 0$, es posible ajustar la desigualdad (*) de manera

tal de encontrar x_i, x_{i+1} :

$$0 < x_i \leq \bar{x}_i, \quad 0 < x_{i+1} \leq \bar{x}_{i+1} \text{ y } z_i = x_i + x_{i+1}.$$

Supongamos, por el contrario, que $c(m, i) = 1$ ó $c(i+1, \bar{m}) = 1$; en caso de que:

$$\sum_{j=m}^{\bar{m}-1} z_j < a_{m, \bar{m}},$$

no hay nada que probar, pues:

$$z_i < \bar{x}_i + \bar{x}_{i+1}, \text{ y por ende hay una elección para } x_i,$$

$$x_{i+1} : z_i = x_i + x_{i+1} \text{ y } x_i < \bar{x}_i, x_{i+1} < \bar{x}_{i+1}.$$

Por último, si $\sum_{j=m}^{\bar{m}-1} z_j = a_{m, \bar{m}}$, entonces $c(m, \bar{m}) = 0$,

por lo cual $a_{m, \bar{m}} < a_{m, i} + a_{i+1, \bar{m}}$, de donde sale lo buscado.

Ahora nos queda por interpretar en términos de la representación (A, c) la operación ϕ sobre un par de polítopos P_1 y P_2 .

Teorema 2.

Sean P_1 y P_2 polítopos asociados a (A,c) y (B,d) respectivamente. Entonces $\phi(P_1, P_2)$ es el polítopo asociado a $(SH(A,B),e)$, donde e es tal que:

$$e(1,n+1) = 0, \quad e(1,j)=c(1,j) \quad 1 \leq j \leq n$$

$$e(j,n+1) = d(j-1,n) \quad 2 \leq j \leq n + 1$$

$$2 \leq i \leq j \leq n, \quad e(i,j) = 0 \quad \text{sii} \quad a_{ij} < b_{i-1, j-1} \quad \text{y} \quad c(i,j) = 0,$$

$$b_{i-1, j-1} < a_{ij} \quad \text{y} \quad d(i-1, j-1) = 0,$$

$$a_{ij} = b_{i-1, j-1} \quad \text{y} \quad c(i,j) = d(i-1, j-1) = 0.$$

Demostración

Es inmediata apartir del hecho ya observado:

$$\phi(P_1, P_2) = (P_1 \times R) \cap (R \times P_2).$$

Ahora estamos en condiciones de probar un resultado que mejora el caso n par (y resuelve, por lo tanto, el problema pendiente si $n = 4$).

Teorema 3.

Si n es par, entonces:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Omega_k \rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} x_i < S_{k+n}^{(n)} .$$

Demostración.

La idea es mostrar, como se hizo en 2.2.6 , que cualquier matriz en Ω_k tiene su primera fila y su última columna, mayorada por los vectores:

$$(1) \quad (S_k^{(n)}, \dots, S_{k+n-i}^{(n)}, \dots, S_{k+n}^{(n)}) \quad y$$

$$(2) \quad (S_{k+n}^{(n)}, \dots, S_{k+n-i}^{(n)}, \dots, S_k^{(n)})^t \quad \text{respectivamente.}$$

La novedad radica en el hecho siguiente: Si (A,c) es representación normalizada del polígono P en Ω_k y la primera fila y última columna de A coinciden con los vectores (1) y (2), entonces a lo sumo puede haber un $(1,i)$ de forma tal que:

$$1 \leq i \leq n : c(1, i) = 0 \wedge c(n+2-i, n+1) = 0.$$

Esto permite asegurar que ningún vector de Ω_k puede alcanzar el valor $S_{k+n}^{(n)}$, pues al ser n par, ningún par de índices: $k+n-j$ y $k+j$ que intervienen en la definición de $S_{k+n}^{(n)}$ pueden tener su valor c simultáneamente nulo, esto asegura $c(1, n+1) = 1$.

Por lo tanto, en el caso $n=4$, el valor $\alpha_{k,4}$ no es alcanzable para ningún k .

En el caso n impar se pueden hacer razonamientos similares. Por ejemplo si $n+1$ no es múltiplo de 4, se puede probar que cualquier matriz A que tenga su primera fila y su última columna igual a (1) y (2) respectivamente, y si (A, c) representa al polítopo \mathbb{P} en Ω_k , con k no múltiplo de $\frac{n+1}{2}$, verifica que existen a los sumo 2 índices: $i < j$, para los cuales:

$$j-i = \frac{n+1}{2}, \quad c(1,i) = c(1,j) = 0$$

$$c(n+2-i) = c(n+2-j) = 0.$$

Pero al ser $\frac{n+1}{2}$ impar, nunca esos términos aparecen sumados entre sí en la definición de $S_{k+n}^{(n)}$; de hecho está probado el:

Teorema 4.

Si n es impar y $n+1$ no es múltiplo de 4, se cumple:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Omega_k \rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} x_i < S_{k+n}^{(n)}, \text{ si suponemos que}$$

k no es múltiplo de $\frac{n+1}{2}$. En el caso $k = h \left(\frac{n+1}{2} \right)$, con

$h > 0$:

$$\mathbb{E}(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0) \in \Omega_{h \left(\frac{n+1}{2} \right)} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^0 = 2^h.$$

Es nuestra idea que en el caso general n impar debería ser posible mostrar que se verifica:

Si $k = h \left(\frac{n+1}{2} \right) + i : 0 \leq i < \frac{n+1}{2}$, $h \in \mathbb{N}_*$, entonces:

Son equivalentes:

(i) $\exists x_k \in \Omega_k : \|x_k\|_1 = S_{k+n}^{(n)}$

(ii) $n+1$ divide a $i \cdot 2^{h+1}$.

De hecho, la técnica del teorema 2, 2.2.7 muestra que (ii) \rightarrow (i); en particular, si $n+1$ es una potencia de 2, a partir de algún k todos los valores $S_{k+n}^{(n)}$ son realizables.

Los teoremas 1, 2 del presente apartado son una respuesta algorítmica al problema de la realización de cotas.

§ III. Búsqueda del cero de una ecuación que involucra a una función y sus derivadas.

3.1. Planteo de los problemas.

Sea $P_n \left(\frac{d}{dx} \right)$ el operador diferencial:

$$\sum_{i=0}^n c_i \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)}, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Consideremos el subconjunto de $D^n[0,1]$ definido como:

$$\{f : \exists \eta(f) \in (0,1) : P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(x) > 0 \text{ si } x > \eta(f) \text{ y} \\ P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(x) < 0 \text{ si } x < \eta(f)\}.$$

Denotamos $L(P_n)$ a ese subconjunto.

En este capítulo nos dedicamos a encontrar los números:

$$\inf_{A_m \in \mathcal{E}_m} \sup_{f \in L(P_n)} |d_{A_m}^1(f) - d_{A_m}^2(f)|, \text{ donde:}$$

A_m es algoritmo de búsqueda secuencial que hace m observa-

ciones sobre sus datos: $L(P_n)$ y $\eta(f)$ es el punto notable localizado en $[d_{A_m}^1(f), d_{A_m}^2(f)]$.

Vamos a circunscribirnos a los dos casos mencionados en 1.1.3., o sea:

- a. Sólo se admite la evaluación del dato y no de sus derivadas.
- b. Existe un tope: $1 \leq k \leq n$ de forma tal que no se evalúan derivadas de órdenes superiores a k y la evaluación de cualquier derivada de un dato en un punto exige la previa evaluación de todas las de orden inferior en ese mismo punto, incluyendo la de orden 0, o sea, el propio dato.

Existe un problema crucial en la resolución de los casos a. y b. propuestos, que consiste en averiguar si efectivamente se progresa en la localización de los puntos notables con las herramientas que se disponen; dicho de otra forma, si para valores de m razonables se tiene:

$$(*) \quad \inf_{A_m \in \mathcal{E}_m} \sup_{f \in L(P_n)} |d_{A_m}^1(f) - d_{A_m}^2(f)| < 1.$$

caso contrario, poco interesante es la cuestión. Efectivamente (*) es válido tanto en el caso a. como en el b.; a demostrar esta afirmación está dedicado el apartado próximo.

3.2. Posibilidad de resolución.

El objeto de este párrafo es probar que es posible mejorar la localización del punto notable $\eta(f)$, para cualquier dato $f \in L(P_n)$, con la herramienta: evaluación del dato f en un número finito de puntos de su dominio; más precisamente, con $n+1$ evaluaciones de f en $(0,1)$ es posible mejorar la localización de $\eta(f)$, para cualquier f en $L(P_n)$. Más en general, es factible la localización si se toman k puntos en $(0,1)$ y la siguiente información sobre el dato f :

$$\begin{array}{l} x_1, \quad f(x_1), \quad f^{(1)}(x_1), \quad \dots, \quad f^{(n_1)}(x_1); \quad n_1 \leq n \\ \vdots \\ x_k, \quad f(x_k), \quad f^{(1)}(x_k), \quad \dots, \quad f^{(n_k)}(x_k); \quad n_k \leq n \end{array}$$

y la condición:

$$\sum_{i=1}^k (n_i + 1) = n + 1.$$

Obsérvese que si $n_i = 0$, se exige evaluar f en $n+1$ puntos, que es la situación comentada en primer término.

3.2.1. Teoremas del valor medio para operadores del tipo:

$$\sum_{i=1}^n c_i(x) \cdot \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)}.$$

Es bien conocido el siguiente resultado, llamado teorema del valor medio del cálculo diferencial:

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua, y derivable en (a, b) entonces existe $\xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

La metodología seguida para su demostración se esquematiza en:

Lema 1. (Teorema de Rolle)

Sea $f : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua y derivable en (a,b) .

Si $f(a) = f(b) = 0$, entonces:

$$\exists \xi(a,b) : f'(\xi) = 0.$$

Lema 2.

Dados el par de puntos de $\mathbf{R}^2 : (a, f_a)$ y (b, f_b) , existe

$f : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$, tal que:

(i) $f'(x)$ es constante, $x \in (a,b)$.

(ii) $f(a) = f_a$ y $f(b) = f_b$.

Lema 3.

Dadas $f, g : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ continuas, y derivables en

(a,b) . Si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$ entonces

$$\exists \xi \in (a, b) \quad f'(\xi) = g'(\xi).$$

Este esquema, con toda la inocencia que encierran Lema 2 y 3, es el punto de partida para lograr resultados semejantes al teorema del valor medio, con operadores del tipo:

$$\sum_{i=0}^n r_i \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)}, \quad r_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua, que son}$$

más generales, por cierto que el operador: $\left(\frac{d}{dx} \right)$. Preciando más, digamos que el objetivo de este párrafo es dar una respuesta al siguiente problema:

Dado un operador diferencial $F_n \left(\frac{d}{dx} \right)$ del tipo:

$$\sum_{i=0}^n r_i(x) \cdot \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)}, \quad r_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas, y}$$

dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y con n derivadas en (a, b) ; si $x_1 < \dots < x_k$ son puntos de (a, b) :

¿ Es posible calcular, para algún $\xi \in (x_1, x_k)$, el valor

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (f) (\xi) = \sum_{i=0}^n r_i (\xi) \cdot \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)} (f) (\xi),$$

haciendo uso, en cuanto a f se refiere, solamente de los valores:

$$\begin{array}{cccc} f(x_1), & f(x_2), & \dots, & f(x_k) \\ f'(x_1), & f'(x_2), & \dots, & f'(x_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f^{(n_1)}(x_1), & f^{(n_2)}(x_2), & \dots, & f^{(n_k)}(x_k) \end{array}$$

con la condición $\sum_{i=1}^k (n_i + 1) = n + 1$?

La respuesta es, esencialmente, sí; profundizando un poco más, distinguimos dos casos:

1) r_i es una constante c_i , y el polinomio característico:

$$P_n(\rho) = \sum_{i=0}^n c_i \rho^i, \text{ tiene todas sus raíces reales.}$$

En esta situación la respuesta es afirmativa.

- 2) En caso de no satisfacerse 1), debemos asegurar que los puntos x_1 y x_k estén "suficientemente" próximos, (la proximidad sólo dependerá del operador P_n que se trate), para que la respuesta sea positiva.

3.2.1.1. En caso coeficientes constantes y polinomio característico con todas sus raíces reales.

Comenzamos el tratamiento del problema mencionado antes para el caso en que el operador es del tipo:

$$P_1 \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right) + c, \text{ con } c \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Lema 1.

Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, y derivable en (a, b) .

$\exists \xi \in (a, b) :$

$$P_1 \left(\frac{d}{dx} \right) (f) (\xi) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-ca} & f(a) \\ e^{-cb} & f(b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-ca} & 1 \\ e^{-cb} & 1 \end{vmatrix}}$$

Demostración.

Es inmediato, utilizando el bien conocido teorema del valor medio generalizado:

Si $h, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, y derivables en (a, b) , entonces, existe $\xi \in (a, b)$ que verifica:

$$[h(b) - h(a)] \cdot g'(\xi) = [g(b) - g(a)] \cdot h'(\xi).$$

Tomando $h(x) = c \cdot f(x) \cdot e^{cx}$ y $g(x) = e^{cx}$, se obtiene la tesis.

Como un corolario inmediato de lema 1 se tiene:

Lema 1.a.

Dada $f: [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ en las condiciones del lema 1,
si $f(a) = f(b) = 0$, entonces existe $\xi \in (a,b)$:

$$P_1 \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(\xi) = 0.$$

Nota 1.

El lector puede conseguir el resultado del lema 1 siguiendo los lineamientos del esquema señalado al comienzo de 3.2.1, lo que hubiera significado, por ejemplo, probar antes lema 1.a.

Ahora nos abocamos a la situación general.

Lema 2.

Dada $f: [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua, y n -veces derivable en (a,b) .

Sean $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ puntos en (a,b) , donde se cumple:

$$f^{(j)}(x_i) = 0, j = 0, \dots, n_i, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k n_i = n+1-k.$$

Supongamos dado el operador:

$$(*) \quad P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)} + c_1 \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} + \dots + c_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right) + c_n,$$

con la condición de que su polinomio característico:

$P_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n$, tenga todas sus raíces reales.

Entonces se verifica:

$$\exists \xi \in (a, b) : \quad P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(\xi) = 0.$$

Demostración.

Sabemos que todo operador del tipo (*), se puede factorizar como composición de operadores del tipo:

$$\frac{d}{dx} - \lambda, \quad \text{donde } \lambda \text{ es solución de } P_n(z) = 0.$$

$$\text{O sea: } P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1 \right) \circ \dots \circ \left(\frac{d}{dx} - \lambda_n \right), \quad \text{donde}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son las raíces de $P_n(z) = 0$.

Esta descomposición nos permite proceder inductivamente en n .

1. Si $n=1$, el resultado no es más que el lema 1.a, si $k=2$; si $k=1$, el resultado es tautológico.

2. $\exists \xi_1, \dots, \xi_{k-1} : x_i < \xi_1 < x_{i+1}$, de forma tal que:

$$\left(\frac{d}{dx} f - \lambda_n \cdot f \right) (\xi_1) = 0, \text{ por lema 1.a.}$$

Consideremos la función $g = \frac{d}{dx} f - \lambda_n \cdot f$ y el operador:

$$P_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1 \right) \left(\frac{d}{dx} - \lambda_{n-1} \right);$$

Sea $I = \{j : n_j \geq 1\}$, entonces g verifica:

$$g(\xi_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq k-1 \quad \text{y} \quad g^{(j)}(x_i) = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq j \leq n_i - 1,$$

y si $i \in I$.

Teniendo presente que $k-1 + \sum_{i \in I} n_i = n$ podemos usar la hipótesis inductiva, con P_{n-1} como operador y g como función, sobre los puntos $\{ \xi_i : 1 \leq i \leq k-1 \} \cup \{ x_i : i \in I \}$.

De aquí se obtiene lo buscado.

Nota 2.

La técnica de la prueba anterior no es posible extenderla al caso en que $P_n(z)$ tenga raíces no reales; la causa es que en el caso $n=1$, se tiene:

Si $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} : f(a) = f(b) = 0$, y dado $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$,

entonces $\frac{d}{dx} f + \lambda \cdot f \notin \mathbb{R}$, con lo cual es nunca nulo.

Por otra parte, el resultado para el caso de existencia de raíces no reales, es falso, como veremos más adelante.

Como se puede observar, el lema 2 del presente apartado es una generalización del lema 1 de 3.2.1. La generalización

correspondiente al lema 2 es un resultado folklórico para operadores diferenciales que no necesariamente deben ser lineales; sin embargo en el caso lineal se pueden obtener resultados que utilizan esencialmente el lema 2 del presente párrafo, técnica que difiere de la empleada para el caso general.

Lema 3.

$$\text{Sea } P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)} + c_1 \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} + \dots + c_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right) + c_n,$$

con la condición: $P_n(z)$ tiene todas sus raíces reales.

Dados $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, afirmamos que no existe solución de

$$(**) \quad P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (g) = 0,$$

más que la trivial, que verifique:

$$i < 1 < k : \quad g^{(j)}(x_i) = 0 \quad \text{con} \quad 0 \leq j \leq n_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k n_i = n-k.$$

Demostración.

Sabemos que una base de soluciones de (**) está dada por las funciones:

$$x^{m_i-1} \cdot e^{\lambda_i x}, \quad x^{m_i-2} \cdot e^{\lambda_i x}, \dots, x \cdot e^{\lambda_i x}, \quad e^{\lambda_i x}, \quad \text{para}$$

$1 \leq i \leq h$, m_i multiplicidad de λ_i como raíz de $P_n(z) = 0$,
y h cantidad de raíces distintas.

Luego, la solución general de (**), tiene la forma:

$$H(x) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=0}^{m_i-1} d_{ij} \cdot x^j e^{\lambda_i x}$$

Procedemos por inducción en el orden del operador: n .

Si $n = 1$, la conclusión es inmediata porque la solución general es:

$$k \cdot e^{-c x},$$

que es nula o nunca nula. Para $n > 1$, tomamos el operador de orden $n-1$:

$$P_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1 \right)^{m_1} \circ \dots \circ \left(\frac{d}{dx} - \lambda_h \right)^{m_h-1}.$$

Como $H(x)$ verifica : $H^{(j)}(x_i) = 0$, $1 \leq i \leq k$, $0 \leq j \leq n$, usamos el lema 2 para obtener:

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : P_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right) (H)(\xi) = 0; \text{ un rápido cálculo mues}$$

tra que:

$$P_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right) (H)(x) = d_{h, m_h-1} \cdot (m_h-1)! (\lambda_h - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_h - \lambda_{h-1})^{m_h-1} \cdot e^{\lambda_h x},$$

de donde : $d_{h, m_h-1} = 0$.

Ahora, $H(x)$ es solución de $P_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right) = 0$, y por la suposición

$H^{(j)}(x_1) = 0$, $0 \leq j \leq n_1$, se aplica hipótesis inductiva para concluir: $H = 0$.

Lema 4.

Dado $P_n \left(\frac{d}{dx} \right)$ como en el lema 3. Sea g_1, \dots, g_n una base de soluciones para $P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = 0$; resulta no nulo el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ g_1'(x_1) & g_2'(x_1) & \dots & g_n'(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_1^{(n_1)}(x_1) & g_2^{(n_1)}(x_1) & \dots & g_n^{(n_1)}(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_1(x_k) & g_2(x_k) & \dots & g_n(x_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_1^{(n_k)}(x_k) & g_2^{(n_k)}(x_k) & \dots & g_n^{(n_k)}(x_k) \end{vmatrix}$$

donde x_1, \dots, x_k son k puntos arbitrarios en \mathbb{R} y

$$\sum_{i=1}^k (n_i + 1) = n.$$

Demostración.

Suponer el determinante nulo equivale a afirmar:

$$\exists d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R} :$$

$$\sum_{i=1}^n d_i \cdot g_i^{(\ell)}(x_j) = 0, \quad 0 \leq \ell \leq n_j, \quad 1 \leq j \leq k, \quad \text{donde los } d_i$$

no son todos nulos.

Como $H(x) = \sum_{i=1}^n d_i \cdot g_i(x)$ es solución de la ecuación:

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = 0,$$

y además $H^{(\ell)}(x_j) = 0, \quad 0 \leq \ell \leq n_j, \quad 1 \leq j \leq k,$ sólo resta la posibilidad $H = 0$, de lo contrario contradiríamos el lema 3 del presente apartado. Como $(g_i)_i$ es base, se tienen $d_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$ contra lo supuesto.

Así, como lo anunciamos, tenemos el clásico resultado de interpolación:

Lema 6.

$$\text{Dado } P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)} + c_1 \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} + \dots + c_n ,$$

con $P_n(z)$ con todas sus raíces reales. Dados los $n+1$ puntos de \mathbb{R}^2 :

$$(x_i, f_i^j) : 0 \leq j \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \sum_{i=1}^k (n_i + 1) = n+1,$$

entonces, existen únicas constante: c y función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de forma tal que:

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (g) = c \quad \text{y} \quad g^{(\ell)}(x_i) = f_i^\ell, \quad 0 \leq \ell \leq n, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Demostración

La solución general de la ecuación:

$$\frac{d}{dx} \circ P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = 0,$$

es $H(x) = \sum_{i=1}^n d_i g_i(x) + d_{n+1} \cdot h(x)$, donde

g_1, \dots, g_n es base para el problema:

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = 0, \quad y$$

h es solución particular de $P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = 1$.

Ahora, gracias al lema 4, existen únicas constantes

c_1, \dots, c_{n+1} , que verifican:

$$H^{(\ell)}(x_i) = f_i^\ell, \quad 0 \leq \ell \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Como es claro: $P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (H) = d_{n+1}$, que resulta ser la cons
tante buscada.

Además, esta constante puede ser calculada como el cociente de determinantes:

$$\begin{vmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_n(x_1) & f_1^0 \\ g_1^{(n_1)}(x_1) & \dots & g_n^{(n_1)}(x_1) & f_1^{n_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_1(x_k) & \dots & g_n(x_k) & f_k^0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_1^{(n_k)}(x_k) & \dots & g_n^{(n_k)}(x_k) & f_k^{n_k} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_n(x_1) & h(x_1) \\ g_1^{(n_1)}(x_1) & \dots & g_n^{(n_1)}(x_1) & h^{(n_1)}(x_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_1(x_k) & \dots & g_n(x_k) & h(x_k) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_1^{(n_k)}(x_k) & \dots & g_n^{(n_k)}(x_k) & h^{(n_k)}(x_k) \end{vmatrix}$$

Con relación a la unicidad de g y c , se tiene:

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (g - g') = c - c', \text{ de hemos supuesto que}$$

g' y c' cumplen el enunciado. Como la función $g - g'$ cumple las condiciones del lema 2 del apartado en curso, se tiene:

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (g - g')(\xi) = 0.$$

Esto asegura que $c = c'$; ahora $P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (g - g') = 0$

con lo cual, en virtud del lema 3 del presente párrafo, se obtiene: $g = g'$.

Ahora, obtenemos el resultado que buscábamos:

Teorema 1.

Dado $P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)} + c_1 \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} + \dots + c_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right) + c_n,$

con $c_i \in \mathbb{R}$ y de polinomio característico de raíces reales.

Dados $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable n veces en (a, b) , y k puntos $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ en (a, b) , se tiene:

$\exists \xi \in (x_1, x_k) : P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (f) (\xi) = d$, donde d es una expresión que utiliza sólo, en cuanto a f se refiere, los valores:

$$f^{(j)}(x_i), \quad 0 \leq j \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

donde la familia $\{n_i\}_{i=1, \dots, k}$ verifica $\sum_{i=1}^k n_i = n+1-k$ y viene fijada de antemano.

Demostración.

Dados $n_i: i = 1, \dots, k$ como en la hipótesis, utilizamos lema 5 del presente párrafo , sobre los puntos:

$$(x_i, f^{(j)}(x_i)), \quad 0 \leq j \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Así, se tiene una función interpolante de esas condiciones: g , que verifica

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (g) = \text{cte.} = k,$$

donde k fue calculada utilizando solo $f^{(j)}(x_i)$ en lo que a f se refiere.

Ahora usaremos lema 2 del apartado en curso, obteniendo

$$\exists \xi \in (x_1, x_k) : P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (f-g)(\xi) = 0;$$

de aquí sale lo buscado.

3.2.1.2. El caso en que los coeficientes son funciones con-
tínuas.

Si intentásemos generalizar el teorema del valor medio para operadores dado en el apartado anterior, para el caso en que $P_n \left(\frac{d}{dx} \right)$ tiene la forma:

$$c_0 + c_1 \left(\frac{d}{dx} \right) + \dots + c_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} + \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)},$$

pero admitiendo raíces no reales para su polinomio característico, llegaríamos a una traba insalvable en la extensión del lema 2, 3.2.1.1.

Contraejemplo.

$$P_2 \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(2)} + 1; \quad f: [\delta, 4\pi + \delta] \rightarrow \mathbf{R} : f(x) = \cos x - 1.$$

Se cumple $f(0) = f(2\pi) = f(4\pi) = 0$, con lo cual la función dato se anula en 3 puntos de su dominio, sin embargo:

$$\forall \xi \in (-\delta, 4\pi + \delta) : \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^{(2)} f + f \right](\xi) \neq 0.$$

No obstante se pueden lograr generalizaciones, aún para operadores del tipo:

$$\sum_{i=0}^n r_i(x) \cdot \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)}, \text{ con } r_i : [a,b] \rightarrow \mathbf{R} \text{ continúa}$$

y $r_n(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$. A esto nos dedicamos en el presente apartado.

Lema 1. (factorización local).

Dadas $R_i : (a,b) \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, n$, continuas y dados el operador:

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)} + R_1(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} + \dots + R_n(x),$$

y un punto $x_0 \in (a,b)$, entonces existen funciones r_1, \dots, r_n

definidas en un entorno de x_0 , a valores reales, r_1 continua, r_2, \dots, r_n derivables, de forma tal que:

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} + r_1 \right) \circ \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} + r_2 \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-2)} + \dots + r_n \right).$$

La igualdad que deseamos obtener se puede describir formalmente:

$$\begin{aligned} P_n \left(\frac{d}{dx} \right) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)} + (r_1 + r_2) \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} + \dots \\ &+ (r_2' + r_1 r_1 + r_{1+1}) \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} + \dots \\ &+ (r_{n-1}' + r_1 r_{n-1} + r_n) \left(\frac{d}{dx} \right) + (r_n' + r_1 r_n). \quad (*) \end{aligned}$$

Para realizar la igualdad (*) es suficiente pedir:

$$r_1(x) + r_2(x) = R_1(x).$$

$$r_2^1(x) + r_1(x) \cdot r_2(x) + r_3(x) = R_2(x).$$

⋮

$$r_i^1(x) + r_1(x) \cdot r_i(x) + r_{i+1}(x) = R_i(x).$$

⋮

$$r_{n-1}^1(x) + r_1(x) \cdot r_{n-1}(x) + r_n(x) = R_{n-1}(x).$$

$$r_n^1(x) + r_1(x) \cdot r_n(x) = R_n(x).$$

Reemplazando $r_1 = R_1 - r_2$, resulta:

$$r_2^1(x) = -r_2(R_1 - r_2) - r_3 + R_2.$$

$$r_3^1(x) = -r_3(R_1 - r_2) - r_4 + R_3.$$

⋮

$$r_i^1(x) = -r_i(R_1 - r_2) - r_{i+1} + R_i. \quad (**)$$

⋮

$$r_n^1(x) = R_n - r_n(R_1 - r_2).$$

O sea, se tiene un sistema de $n-1$ ecuaciones diferenciales en $n-1$ incógnitas: r_2, \dots, r_n , del tipo:

$$r_i' = f_i(r_2, \dots, r_n, x), \quad i = 2, \dots, n, \text{ con } f \text{ continua}$$

conjuntamente en todas sus variables, en $\mathbf{R}^{n-1} \times (a, b)$.

Por lo tanto en virtud del teorema de existencia de soluciones para este tipo de sistemas, tenemos:

dados $s_2(x_0), \dots, s_n(x_0) \in \mathbf{R}$:

$\exists V(x_0)$ y $r_2, \dots, r_n : V(x_0) \rightarrow \mathbf{R}, V(x_0) \subset (a, b)$, abierto:

(i) $r_i(x_0) = s_i(x_0), \quad i = 2, \dots, n.$

(ii) se verifica el sistema (**), en $v(x_0)$.

Corolario 1. (Teorema de factorización local).

Dadao $P_n \left(\frac{d}{dx} \right)$ como antes; existen funciones

$s_1, \dots, s_n : W(x_0) \rightarrow \mathbf{R} : W(x_0)$ es abierto en (a,b)

s_i es $i-1$ veces diferenciable, que verifican:

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} + s_1 \right) \circ \dots \circ \left(\frac{d}{dx} + s_n \right).$$

Demostración.

Fijando $x_0 \in (a,b)$, aplicamos el lema 1 del apartado presente en forma reiterada obteniendo luego de $n-1$ repeticiones, un abierto $W(x_0)$ donde se verifica la descomposición.

Lema 2.

Dado $P_1 \left(\frac{d}{dx} \right) = \frac{d}{dx} + Q$, con $Q : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua, y

dada $f : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua, y derivable en (a,b) , entonces:

$\exists \xi \in (a,b) :$

$$P_1 \left(\frac{d}{dx} \right) (f) (\xi) = \frac{f(b) \cdot e^{\int_a^b Q dx} - f(a)}{\int_a^b e^{\int_a^t Q dx} dt}$$

Demostración.

Tomamos las funciones $h(x) = f(x) \cdot e^{\int_a^x Q dt}$ y $g(x) = \int_a^x e^{\int_a^t Q ds} dt$;

por el teorema del valor medio generalizado:

$$\exists \xi \in (a, b) = \frac{h(b) - h(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{h'(\xi)}{g'(\xi)} = d.$$

Pero $d = P_1 \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(\xi)$, mientras que

$$\frac{h(b) - h(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b) \cdot e^{\int_a^b Q dt} - f(a)}{\int_a^b e^{\int_a^t Q ds} dt}, \text{ teniéndose la igualdad}$$

buscada.

Lema 3.

Dado un operador de la forma:

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} + r_1 \right) \circ \left(\frac{d}{dx} + r_2 \right) \circ \dots \circ \left(\frac{d}{dx} + r_n \right), \text{ donde}$$

$r_i = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, r_i continua, r_i es $i-1$ veces derivable en (a, b) .

Dada $f = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, n -derivable en (a, b) , y dados

$a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b$, k puntos en (a, b) sobre los

cuales f verifica:

$$f^{(j)}(x_i) = 0, \quad 0 \leq j \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n+1-k,$$

entonces se cumple:

$$\exists \xi \in (x_1, x_k) : P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(\xi) = 0.$$

Demostración.

Inmediata usando lema 2 e inducción en el orden del operador.

Lema 4.

Dado $P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)} + Q_1 \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} + \dots + Q_n$, donde

$Q_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas para todo i .

Entonces existe una constante $\delta > 0$, que sólo depende de

$P_n \left(\frac{d}{dx} \right)$, de forma tal que cada vez que se tienen

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, n -derivable en (a, b) , con la propiedad $f^{(j)}(x_i) = 0$, $0 \leq j \leq n_i$, $1 \leq i \leq k$, $\sum_{i=1}^k n_i = n + 1 - k$,

con $a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b$ y $x_k - x_1 \leq \delta$, se puede afirmar:

$$\exists \xi \in (x_1, x_k) : P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(\xi) = 0.$$

Demostración.

Tomamos en primera instancia una extensión continua de Q_1, \dots, Q_n a un intervalo compacto $[a', b']$, de forma que $a' < a$ y $b' > b$. Llamamos $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n$ a dichas extensiones. Aplicamos el teorema de factorización local para el operador:

$$\tilde{P}_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)} + \tilde{Q}_1 \cdot \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} + \dots + \tilde{Q}_n ,$$

para cada $x_0 \in (a', b')$. Obtenemos así, para cada punto, funciones:

$r_i^{x_0} : V_{x_0}(\epsilon_{x_0}) \rightarrow \mathbf{R}$, que verifican:

$$\tilde{P}_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} + r_1^{x_0} \right) \dots \left(\frac{d}{dx} + r_n^{x_0} \right) , \text{ en } V_{x_0}(\epsilon_{x_0}) .$$

La familia de intervalos $\left\{ V_{x_0}(\epsilon_{x_0}) \right\}_{x_0 \in [a, b]}$ forma un cubrimiento

por abiertos, de $[a, b]$. Tomamos x_0^1, \dots, x_0^h de forma tal

que: $V_{x_0^1}(\epsilon_{x_0^1}), V_{x_0^2}(\epsilon_{x_0^2}), \dots, V_{x_0^h}(\epsilon_{x_0^h})$ es subcubrimiento fi-

nito. Ahora elegimos $\delta' : \inf_{i, j} | V_{x_0^i}(\epsilon_{x_0^i}) \cap V_{x_0^j}(\epsilon_{x_0^j}) |$.

Seleccionamos $\delta : 0 < \delta < \delta'$, ahora si $\{x_1, \dots, x_k\}$ están

en las condiciones de la hipótesis, es fácil verificar que existe

$i : 1 \leq i \leq h : \{x_1, \dots, x_k\} \subset V_{x_0^i}(\epsilon_{x_0^i})$. Como en

$(a,b) \cap V_{x_0^i}(\epsilon_{x_0^i})$ se tiene la descomposición

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} + r_1^{x_0^i} \right) \circ \dots \circ \left(\frac{d}{dx} + r_n^{x_0^i} \right) \quad (\text{pues en } (a,b),$$

$P_n \equiv \tilde{P}_n$), se puede aplicar el lema 3 del presente párrafo para obtener, sin más, el enunciado.

Observación.

La extensión de \tilde{Q}_i a \hat{Q}_i se toma para construir un radio de factorización uniforme del operador $P_n \left(\frac{d}{dx} \right)$ en (a,b) .

La situación en que $P_n \left(\frac{d}{dx} \right)$ tiene coeficientes constantes, y en particular si $P_n(\rho)$ tiene raíces no reales, queda contenido en el resultado anterior.

Tomando el caso particular:

$$P_2 \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(2)} + P \cdot \left(\frac{d}{dx} \right) + Q, \text{ donde } P \text{ y } Q \text{ son}$$

constantes, la mejor información que arroja el teorema de factorización local es un valor para δ , inferior a:

$$\pi / (Q - P^2/4)^{1/2},$$

por supuesto, positivo. Naturalmente hemos supuesto que $P^2 - 4Q < 0$, única situación atractiva.

Tenemos un resultado de interpolación semejante al dado en lema 5, 3.2.1.1., con restricciones en cuanto al alejamiento de los puntos que se interpolan. Este resultado, bien conocido, se obtiene como corolario del lema 4, del párrafo en curso; comenzamos con:

Lema 5.

Dado $P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)} + Q_1 \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} + \dots + Q_n$, con las Q_i

contínuas, definidas en $[a,b]$ y a valores reales.

Si $x_0 \in (a,b)$, existe un intervalo $V_\epsilon(x_0)$: si x_1, \dots, x_k son puntos de él, y g es solución de $P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = 0$, con las condiciones:

$$g^{(j)}(x_i) = 0, \quad 0 \leq j \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n-k,$$

entonces g es idénticamente nula.

Demostración.

Aplicamos el teorema de factorización local a $P_n \left(\frac{d}{dx} \right)$ para obtener:

$V_\varepsilon(x_0)$, intervalo centrado en x_0 , y

$r_i : V_\varepsilon(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$, $i-1$ veces diferenciable, $n \geq i \geq 1$:

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} + r_1 \right) \dots \left(\frac{d}{dx} + r_n \right), \quad \text{en } V_\varepsilon(x_0).$$

Tomamos una base de soluciones g_1, \dots, g_{n-1} para la ecuación homogénea:

$$P_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} + r_2 \right) \dots \left(\frac{d}{dx} + r_n \right) = 0.$$

Extendemos $\{g_1, \dots, g_{n-1}\}$ a una base de soluciones de

$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = 0 : \{g_1, \dots, g_{n-1}, g_n\}$. Se tiene, por tanto

$\left(\frac{d}{dx} + r_1 \right) \circ P_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right) (g_n) = 0$, con lo cual:

$$P_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right) (g_n) = K \cdot e^{-\int_{\xi}^x r_1(t) dt},$$

donde $\xi \in V_{\epsilon}(x_0)$ y K es cierta constante real no nula.

Ahora, la función g de la hipótesis, se escribe:

$$g = \sum_{i=1}^n c_i g_i, \quad c_i \text{ constante, } i = 1, \dots, n.$$

Como P_{n-1} tiene orden menor que n y g verifica:

$$g^{(j)}(x_i) = 0, \quad 0 \leq j \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n-k,$$

por el lema 4 del párrafo en curso, se tiene:

$$\exists \eta \in (x_1, x_k) : P_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right) (g)(\eta) = 0; \text{ esto asegura que}$$

$c_n = 0$. Como se puede comprobar, estamos en una situación

claramente inductiva, pues $g = \sum_{i=1}^{n-1} c_i g_i$ es solución de

$$P_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right) = 0 \text{ y verifica tener "nulidades": } g^{(j)}(x_i), \text{ que}$$

son n . (en particular tiene $n-1$). Restaría probar el caso

$n = 1$, pero es inmediato teniendo presente que la solución de

$$\frac{d}{dx} + Q_1 = 0 \text{ es para } c \text{ fijo en } (a,b):$$

$$d \cdot e^{-\int_c^x Q_1(t) dt}, \quad d \in \mathbf{R}.$$

Dejamos a cargo del lector la prueba del siguiente corolario:

Lema 6.

Dado $P_n \left(\frac{d}{dx} \right)$ en las condiciones del lema anterior; si

$x_0 \in (a, b)$, entonces existe $V_\varepsilon(x_0)$ entorno abierto de x_0 :

si x_1, \dots, x_k son puntos de $V_\varepsilon(x_0)$, es no nulo el determinante:

$$\begin{vmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1^{(n_1)}(x_1) & \dots & g_n^{(n_1)}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1(x_k) & \dots & g_n(x_k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1^{(n_k)}(x_k) & \dots & g_n^{(n_k)}(x_k) \end{vmatrix}, \text{ con } \sum_{i=1}^k n_i = n-k.$$

Ahora tenemos las herramientas para probar:

Lema 7.

Dado $P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)} + Q_1 \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} + \dots + Q_n$, donde

$Q_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas. Afirmamos que existe un número $\delta > 0$:

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b, \quad x_k - x_1 \leq \delta \text{ y}$$

$$f_1^j, \dots, f_k^j \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq j \leq n_i, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n+1-k, \text{ existen}$$

entonces c constante y $g : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$, únicas con las condiciones:

$$(i) \quad P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (g) = c \quad \text{en } (a,b)$$

$$(ii) \quad g^{(j)}(x_i) = f_i^j, \quad 0 \leq j \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Demostración.

1) Existencia:

$$\text{Sean } \tilde{P}_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)} + \tilde{Q}_1 \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} + \dots + \tilde{Q}_n \text{ y}$$

$$\left\{ V_{\epsilon_{x_0}^i}(x_0^i) \right\}_{i=1, \dots, h} \quad \text{el operador y el cubrimiento de } [a,b]$$

respectivamente, definidos en la prueba del lema 4 del apartado presente, y sea δ el número real allí seleccionado.

La solución general de

$$\tilde{P}_n \left(\frac{d}{dx} \right) = K \quad (K \text{ en } \mathbf{R}), \text{ es } g = \sum_{i=1}^n c_i g_i + K.f ,$$

donde f es solución particular de $\tilde{P}_n \left(\frac{d}{dx} \right) = 1$; por lo tanto dados x_1, \dots, x_k en las condiciones de la hipótesis, aseguramos la existencia de r :

$$\{ x_1, \dots, x_k \} \subseteq V_{\epsilon_{x_0}}^r(x_0^r), \text{ y será suficiente comprobar}$$

que no existen constantes no todas nulas c_1, \dots, c_n y K :

$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot g_i^{(\ell)}(x_j) + K.f^{(\ell)}(x_j) = 0, \quad 0 \leq \ell \leq n_j, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Supongamos lo contrario; en principio $K \neq 0$ de otra forma

$\sum_{i=1}^n c_i g_i$ tendría $n+1$ "nulidades" lo que asegura que $\sum_{i=1}^n c_i g_i = 0$, o sea $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ contra lo supuesto.

Por lo tanto las funciones:

$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^n c_i g_i$ y $-f$, verifican :

$$\exists \xi \in (x_1, x_k) : P_n \left(\frac{d}{dx} \right) \left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^n c_i g_i \right) (\xi) = -P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (f) (\xi).$$

Esto lleva a una contradicción.

2) Unicidad: queda a cargo del lector.

Teorema 1.

Dado $P_n \left(\frac{d}{dx} \right)$ como antes; existe $\delta > 0$:

si $f : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua, y n -derivable en (a,b) , y dados $x_1 < \dots < x_k$ en $(a,b) : x_k - x_1 \leq \delta$, entonces se cumple:

$$\exists \eta \in (x_1, x_k) : P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (f) (\eta) = K, \text{ donde } K \text{ es el}$$

cociente de determinantes:

$$\begin{vmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_n(x_1) & f(x_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_1^{(n)}(x_1) & \dots & g_n^{(n)}(x_1) & f^{(n)}(x_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_1(x_k) & \dots & g_n(x_k) & f(x_k) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_1^{(n)}(x_k) & \dots & g_n^{(n)}(x_k) & f^{(n)}(x_k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_n(x_1) & h(x_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_1^{(n)}(x_1) & \dots & g_n^{(n)}(x_1) & h^{(n)}(x_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_1(x_k) & \dots & g_n(x_k) & h(x_k) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_1^{(n)}(x_k) & \dots & g_n^{(n)}(x_k) & h^{(n)}(x_k) \end{vmatrix}$$

donde g_1, \dots, g_n es base de soluciones de $P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = 0$, y

h es solución particular de $P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = 1$.

Demostración.

Basta empalmar los lemas 4 y 7 del apartado en curso.

Con el teorema 1, 3.2.1.1. y el resultado anterior, que lo generaliza en el sentido ya comentado, hemos dado una respuesta completa a los interrogantes planteados al comienzo de 3.2.1.

Vamos a explicitar más el término "respuesta completa" que acabamos de citar. La no validez del resultado teorema 1, 2.3.1.2

para puntos no "próximos" lo muestra el mismo ejemplo que se citó en 3.2.1.2 :

Dada c constante real arbitraria, es siempre posible construir $g : [-\delta, 4\pi + \delta] \rightarrow \mathbf{R} :$

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^{(2)} (g) + g = c \quad \text{en } (-\delta, 4\pi + \delta), \text{ con la condición}$$

$$\text{adicional : } g(0) = g(2\pi) = g(4\pi) = 0.$$

Con esto se quiere significar que la terna $(0,0)$, $(2\pi,0)$ y $(4\pi,0)$ no permite opinar nada acerca del valor del operador en un punto intermedio entre 0 y 4π , pues dicho valor puede ser cualquiera!

Terminamos este párrafo mencionando una generalización, del teorema del valor medio generalizado, para valores operadores lineales:

$$\text{Dado } F_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)} + R_1(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} + \dots + R_n(x), \text{ don}$$

de $R_i : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ son contínuas, entonces existe $\delta > 0$

de forma tal que, si $a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b$ y $x_k - x_1 \leq \delta$

y $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y n -derivables en (a, b) ,

se cumple:

$\exists \xi \in (a, b)$:

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(\xi) \cdot \begin{vmatrix} g(x_1) & \dots & g^{(n_1)}(x_1) & \dots & g(x_k) & \dots & g^{(n_k)}(x_k) \\ h_1(x_1) & \dots & h_1^{(n_1)}(x_1) & \dots & h_1(x_k) & \dots & h_1^{(n_k)}(x_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_n(x_1) & \dots & h_n^{(n_1)}(x_1) & \dots & h_n(x_k) & \dots & h_n^{(n_k)}(x_k) \end{vmatrix} =$$

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (g)(\xi) \cdot \begin{vmatrix} f(x_1) & \dots & f^{(n_1)}(x_1) & \dots & f(x_k) & \dots & f^{(n_k)}(x_k) \\ h_1(x_1) & \dots & h_1^{(n_1)}(x_1) & \dots & h_1(x_k) & \dots & h_1^{(n_k)}(x_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_n(x_1) & \dots & h_n^{(n_1)}(x_1) & \dots & h_n(x_k) & \dots & h_n^{(n_k)}(x_k) \end{vmatrix}$$

donde $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^k n_i = n-k$ son arbitrarios y

$\{h_1, \dots, h_n\}$ es base de soluciones de $P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = 0$.

En el caso para el cual $R_i(x) = c_i$, $1 \leq i \leq n$, y el polinomio $P_n(\rho)$ tenga todas sus raíces reales, el δ asegurado antes es $+\infty$.

3.2.2. Teorema del valor medio para un par de operadores del

$$\begin{aligned} \text{tipo: } P_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)+} + \sum_{i=0}^{n-1} R_i(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)} \quad \underline{y} \\ P_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)-} + \sum_{i=0}^{n-1} R_i(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)} \end{aligned}$$

En el caso de tenerse una función $n-1$ veces derivable y con derivadas laterales n -ésimas, en (a,b) , no es posible asegurar la validez de los teoremas 1 de 3.2.1.1. y 3.2.1.2. ; sin embargo, si en lugar de considerar un operador

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} R_i(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)}, \text{ que puede no ser apli}$$

cable a una función como la supuesta, consideramos un par de operadores:

$$P_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)+} + \sum_{i=1}^{n-1} R_i(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)} \quad y$$

$$P_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)-} + \sum_{i=1}^{n-1} R_i(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)} ,$$

podemos lograr algún resultado que extiende a los vistos en 3.2.1, y que nos serán útiles para el futuro de este trabajo.

Lema 1.

Dada $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con derivadas laterales en todo punto de (a,b) . Supongamos que $f(a) = f(b) = 0$, afirmamos entonces que:

$\exists \xi \in (a,b) :$

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^+ (f)(\xi) \leq 0 \leq \left(\frac{d}{dx} \right)^- (f)(\xi)$$

o bien

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^- (f)(\xi) \leq 0 \leq \left(\frac{d}{dx} \right)^+ (f)(\xi) .$$

Demostración.

Siempre es posible hallar $\xi \in (a, b)$:

$$f(\xi) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{o bien,} \quad f(\xi) = \min_{x \in [a, b]} f(x).$$

Dicho punto satisface la tesis.

Corolario 1.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, con derivadas laterales en (a, b) , entonces:

$\exists \xi \in (a, b)$:

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^+ (f)(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \left(\frac{d}{dx} \right)^- (f)(\xi)$$

o bien

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^- (f)(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \left(\frac{d}{dx} \right)^+ (f)(\xi).$$

Demostración.

$$\text{Tomamos } h(x) = f(x) - \left\{ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (x-a) + f(a) \right\}, \quad x \in [a, b],$$

y aplicamos el lema 1.

Corolario 2.

Si f y $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ son continuas, g derivable en (a, b) ,
 f con derivadas laterales en (a, b) , entonces existe $\xi \in (a, b)$:

$$\begin{aligned} [g(b)-g(a)] \cdot \left(\frac{d}{dx} \right)^- (f)(\xi) &\geq [f(b)-f(a)] \left(\frac{d}{dx} \right) (g)(\xi) \geq \\ &\geq [g(b)-g(a)] \left(\frac{d}{dx} \right)^+ (f)(\xi) \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} [g(b)-g(a)] \left(\frac{d}{dx} \right)^+ (f)(\xi) &\geq [f(b)-f(a)] \left(\frac{d}{dx} \right) (g)(\xi) \geq \\ &\geq [g(b)-g(a)] \left(\frac{d}{dx} \right)^- (f)(\xi). \end{aligned}$$

Demostración.

Sea $F(x) = [g(b)-g(a)] (f(x)-f(a)) - (f(b)-f(a))[g(x)-g(b)]$;

se aplica corolario 1 obteniéndose lo buscado.

Lema 2.

Sea $f : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua, con derivadas laterales en (a,b) .

Dado el par de operadores:

$$P_1^+ \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^+ + Q$$

$$P_1^- \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^- + Q, \text{ donde } Q : [a,b] \rightarrow \mathbf{R} \text{ es contí-}$$

nua. Supongamos que $f(a) = f(b) = 0$; en estas condiciones, tenemos asegurado un $\xi \in (a,b)$:

$$P_1^+ \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(\xi) \leq 0 \leq P_1^- \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(\xi), \text{ o bien:}$$

$$P_1^- \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(\xi) \leq 0 \leq P_1^+ \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(\xi).$$

Demostración.

Utilizar corolario 2 anterior, para el par de funciones:

$$f(t) \cdot e^{\int_a^t Q(x) dx} \quad \text{y} \quad \int_a^t e^{\int_a^z Q(x) dx} dz.$$

Corolario 3.

Dados $P_1^+ \left(\frac{d}{dx} \right)$ y $P_1^- \left(\frac{d}{dx} \right)$ como antes; dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$

continua y con derivadas laterales en (a, b) ; entonces existe $\xi \in (a, b)$:

$$P_1^+ \left(\frac{d}{dx} \right) (f) (\xi) \geq \frac{f(b) \cdot e^{\int_a^b Q dx} - f(a)}{\int_a^b e^{\int_a^t Q(x) dx} dt} \geq P_1^- \left(\frac{d}{dx} \right) (f) (\xi),$$

o bien

$$P_1^- \left(\frac{d}{dx} \right) (f) (\xi) \geq \frac{f(b) \cdot e^{\int_a^b Q dx} - f(a)}{\int_a^b e^{\int_a^t Q(x) dx} dt} \geq P_1^+ \left(\frac{d}{dx} \right) (f) (\xi).$$

Ahora estamos en condiciones de probar la generalización del teorema 1, 3.2.1.1:

Teorema 1.

Dado un par de operadores del tipo:

$$P_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)+} + \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-i} \quad y$$

$$P_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)-} + \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-i} ; \text{ supongamos que el}$$

polinomio característico:

$$P_n(\rho) = \sum_{i=1}^n c_i \rho^{n-i} + \rho^n, \text{ tiene todas sus raíces rea}$$

les; demos $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua, $n-1$ veces derivable y con derivadas laterales n -ésimas:

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)+} (f) \text{ y } \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)-} (f), \text{ en } (a, b); \text{ demos } k \geq 2 \text{ puntos en}$$

$(a, b) : x_1 < x_2 < \dots < x_k$, donde f verifica:

$$f^{(j)}(x_i) = 0, \quad 0 \leq j \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq k \text{ y } \sum_{i=1}^k n_i = n+1-k.$$

En estas condiciones, existe un punto $\xi \in (a, b)$:

$$P_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(\xi) \geq 0 \geq P_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(\xi), \text{ o bien}$$

$$P_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(\xi) \geq 0 \geq P_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) (f)(\xi).$$

Demostración.

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces de $P_n(\rho)$. Se tienen las des
composiciones:

$$P_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^+ - \lambda_1 \right) \circ \left(\frac{d}{dx} - \lambda_2 \right) \circ \dots \circ \left(\frac{d}{dx} - \lambda_n \right) \quad y$$

$$P_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^- - \lambda_1 \right) \circ \left(\frac{d}{dx} - \lambda_2 \right) \circ \dots \circ \left(\frac{d}{dx} - \lambda_n \right)$$

En virtud de que $k \geq 2$, se tiene:

$\exists \eta_1 < \eta_2 :$

$$\left[\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2 \right) \circ \dots \circ \left(\frac{d}{dx} - \lambda_n \right) \right] (f)(\eta_i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Ahora se usa el lema 2 del apartado presente sobre la función:

$$\left[\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2 \right) \circ \dots \circ \left(\frac{d}{dx} - \lambda_n \right) \right] (f) \quad \text{y el par de operadores:}$$

$$P_1^+ \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^+ - \lambda_1 \quad \text{y} \quad P_1^- \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^- - \lambda_1 .$$

Demos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con $n-1$ derivadas en (a, b) y derivable lateralmente su $f^{(n-1)}$ en (a, b) .

Tomemos k puntos; $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ en (a, b) y calculamos según el lema 5, 3.2.1.1, la función interpolante g y la constante c :

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (g) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(r)} (g) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n-1)} (g) \cdot c_i = c \quad y$$

$$g^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad \text{para } 0 \leq j \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n+1-k$$

En virtud del teorema anterior tenemos probado:

Corolario 4.

Existe $\xi \in (x_1, x_k)$:

$$P_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) (f) (\xi) \geq c \geq P_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) (f) (\xi) , \quad \text{o bien}$$

$$P_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) (f) (\xi) \geq c \geq P_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) (f) (\xi) .$$

Creemos que es suficientemente claro que se pueden lograr resultados semejantes al Teorema 1 y Corolario 4 anteriores para un par de operadores:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{(n)+} + \sum_{i=1}^k R_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{(n-1)} \quad y$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{(n)-} + \sum_{i=1}^n R_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{(n-1)}, \quad R_i : [a,b] \rightarrow \mathbf{R} \text{ continuas.}$$

De hecho, estos resultados serán de carácter local y se obtienen, básicamente, usando el teorema de factorización local de 3.2.1.2 y el lema 2 del párrafo en curso..

3.2.3. Aplicaciones a los problemas propuestos.

Consideremos el subconjunto de $D^n[0,1]: L(P_n)$,
definido al comienzo de 3.1, donde P_n es el operador diferencial:
$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{(n)} + \sum_{i=1}^n R_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{(n-1)}, \quad R_i : [0,1] \rightarrow \mathbf{R} \text{ continua,}$$

 $1 \leq i \leq n.$

Hagamos $n+1$ observaciones sobre un dato $f \in L(P_n)$, repartidas en los puntos: $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, todos en $(0,1)$.

Supongamos que las observaciones satisfacen la restricción b. dada al inicio de 3.1, es decir, son del tipo:

$$\begin{array}{cccc} f(x_1), & f^{(1)}(x_1), & \dots, & f^{(n)}(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(x_k), & f^{(1)}(x_k), & \dots, & f^{(n)}(x_k) \end{array}$$

con $\sum_{i=1}^k n_i = n+1-k$. Llamemos d a la constante que ase-

gura el teorema 1, 3.2.1.1; entonces hemos probado, para

$R_1 = c_1$ y $P_n(\rho)$ de raíces reales:

Teorema 1.

Si d es positivo, entonces $n(f) \in [0, x_k]$.

Si d es negativo, $n(f) \in [x_1, 1]$; por último si d es nulo,

$n(f) \in [x_1, x_k]$.

En caso de que alguna función R_i no sea constante, o bien que $P_n(\rho)$ tenga raíces no reales, el teorema 1, de 3.2.1.2 nos permite asegurar que:

Teorema 2.

Si $x_k - x_1 \leq \delta$, entonces la relación entre el signo de la constante d y la posición de $r(f)$ es la misma que en teorema 1.

El teorema 1 nos permite asociar a cada estrategia de particionado de $[0,1]$ de orden $n+1$ de decisión, un algoritmo de búsqueda secuencial sobre $L(P_n)$, $P_n(\rho)$ de raíces reales. Supongamos que $E(n+1, m, \ell)$ denota tal estrategia y A_m el algoritmo asociado, entonces la relación entre performances es:

$$\sup_{f \in L(P_n)} |d_{A_m}^1(f) - d_{A_m}^2(f)| = \text{val}_{[0,1]}(E(n+1, m, \ell))$$

En lo anterior hemos supuesto que A_m está capacitado en evaluar hasta la derivada de orden $\ell - 1$ de sus datos. De esta manera, observamos que el caso de estrategias de particionado con peso unitario: $E_n(k)$ corresponde a la resolución del problema "localizar $\eta(f)$ " teniendo como único medio la evaluación de f .

De cualquier manera, los algoritmos obtenidos vía estrategias de particionado no agotan, de ningún modo, los algoritmos de búsqueda secuencial; esto ocurre pues, conceptualmente, las estrategias sintetizan la mejor forma de explotar una propiedad que localiza el punto notable, pero no se puede afirmar que no haya otras. Por lo tanto, lo único que se puede asegurar en principio es:

$$(*) \quad PL_{[0,1]}(n+1, m, \ell) \geq \inf_{A \in \mathcal{E}_m^{\ell-1}} \left\{ \sup_{f \in L(P_n)} |d_A^1(f) - d_A^2(f)| \right\},$$

donde $\mathcal{E}_m^{\ell-1}$ denota la familia de algoritmos de búsqueda secuencial sobre $L(P_n)$, con las consabidas restricciones.

Pasemos a detallar las aplicaciones de lo tratado en 3.2.2.

Sea H^n , el subconjunto de funciones de D^{n-1} en $[0,1]$ con las propiedades siguientes: $f \in H^n$ sii $f \in D^{n-1}$ y f tiene derivadas laterales n -ésimas en todo punto de $[0,1]$: $f^{(n)+}$ y $f^{(n)-}$, que son continuas a derecha e izquierda respectivamente y que son coincidentes excepto a lo sumo en un número finito de puntos.

Demos un par de operadores:

$$P_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)} + \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)+} \quad y$$

$$P_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)} + \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)-}$$

donde $P_n(\rho) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho^i + \rho^n$ tiene todas sus raíces rea-

les. Consideremos, por último, la familia $L(P_n^+, P_n^-)$ de funciones:

$$\left\{ f \in H^n : \exists \eta(f) : \begin{array}{l} P_n^+(f)(x) > 0, \quad P_n^-(f)(x) > 0 \quad \text{si } x > \eta(f) \\ P_n^+(f)(x) < 0, \quad P_n^-(f)(x) < 0 \quad \text{si } x < \eta(f) \end{array} \right\},$$

y la familia de algoritmos $\mathcal{C}_m^{\ell-1}$ de búsqueda secuencial que operan sobre $L(P_n^+, P_n^-)$, que hacen m observaciones, y que en el caso $\mathcal{C}_m^{\ell-1}$, en lugar de evaluar la derivada enésima de un dato requieren $\left(\frac{d}{dx}\right)^{(n)+}$ y $\left(\frac{d}{dx}\right)^{(n)-}$; ahora una inmediata aplicación del corolario 4, 3.2.2, nos muestra que, con la constante c allí definida, se tiene:

Teorema 2

Fijado $\ell \geq 1$, natural, y dada $f \in L(P_n^+, P_n^-)$, se cumple:

si $x_1 < \dots < x_k \in (0,1)$, evaluando:

$$f^{(j)}(x_i), \quad 0 \leq j \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad n_i \leq \ell - 1, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n+1-k$$

y determinando c , entonces:

$$c > 0 \rightarrow \eta(f) \in (0, x_k),$$

$$c < 0 \rightarrow \eta(f) \in (x_1, 1), \text{ y por último}$$

$$c = 0 \rightarrow \eta(f) \in (x_1, x_k).$$

Ahora, al igual que lo hecho antes, cada estrategia de particionado del tipo $(n+1, m, \ell)$ genera un algoritmo en $\tilde{\mathcal{E}}_m^{\ell-1}$, con una relación entre performances exactamente igual al caso anterior, es decir, si $E(n+1, m, \ell)$ denota una estrategia y \tilde{A}_m el algoritmo asociado por el teorema 2, se verifica:

$$\sup_{f \in L(P_n^+, P_n^-)} |d_{\tilde{A}_m}^1(f) - d_{\tilde{A}_m}^2(f)| = \text{val}_{[0,1]}(E(n+1, m, \ell)).$$

Observaciones

1. Igual que antes, se obtiene la desigualdad:

$$(**) \quad PL_{[0,1]}(n+1, m, \ell) \geq \inf_{A \in \mathcal{E}_m^{\sim \ell-1}} \left\{ \sup_{f \in L(P_n^+, P_n^-)} |d_A^1(f) - d_A^2(f)| \right\}.$$

2. De (*) y (**) se deduce que teniendo cotas inferiores para los respectivos términos derechos de las desigualdades, se tendrían acotaciones para $PL_{[0,1]}(n+1, m, \ell)$.

3. Resultan evidentes las relaciones:

$$L(P_n) = L(P_n^+, P_n^-) \cap D^n \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_m^{\sim \ell-1} \subseteq \mathcal{E}_m^{\ell-1}.$$

4. No es difícil verificar si $1 \leq \ell \leq n$ que $\mathcal{E}_m^{\ell-1} \subseteq \mathcal{E}_m^{\sim \ell-1}$.

Pese a que un algoritmo A en $\mathcal{E}_m^{\ell-1}$ está capacitado para trabajar (o sea evaluar) sobre la clase $L(P_n)$, (y producir un intervalo final $[d_A^1(f), d_A^2(f)]$, para cada dato $f \in L(P_n)$ que contiene a $\eta_{P_n}(f)$) es posible extender su aplicación para funciones datos de la clase $L(P_n^+, P_n^-)$. Esto es posible

en virtud del siguiente argumento:

Dada $f \in L(P_n^+, P_n^-)$, dados x_1, \dots, x_M puntos arbitrarios en $(0,1)$ y suponiendo evaluadas:

$$f_i^j = f^{(j)}(x_i), \quad 0 \leq j \leq n_i \leq k-1 \leq n-1, \quad 1 \leq i \leq M.$$

Entonces, existe $g \in L(P_n)$ con las propiedades:

$$(i) \quad g^{(j)}(x_i) = f_i^j, \quad 0 \leq j \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq M.$$

$$(ii) \quad \eta_{P_n}(g) = \eta_{P_n^+, P_n^-}(f).$$

Esta propiedad, simple de verificar, permite asegurar que A no puede "reconocer" a tal f como fuera de su dominio de aplicación; además (ii) asegura que si A localiza a $\eta_{P_n}(g)$ en $[d_A^1(g), d_A^2(g)]$, entonces localiza a $\eta_{P_n^+, P_n^-}(g)$ en ese mismo intervalo.

Es para la prueba de la propiedad anterior que se necesitan las

características de la clase H^n definida antes.

5. La ventaja de tener la igualdad, implícita en 4.,

$$\inf_{\Lambda \in \mathcal{G}_m^{\ell-1}} \left\{ \sup_{f \in L(P_n)} |d_{\Lambda}^1(f) - d_{\Lambda}^2(f)| \right\} = \inf_{\tilde{\Lambda} \in \tilde{\mathcal{G}}_m^{\ell-1}} \left\{ \sup_{f \in L(P_n^+, P_n^-)} |d_{\tilde{\Lambda}}^1(f) - d_{\tilde{\Lambda}}^2(f)| \right\}.$$

para $\ell \leq n$, es consecuencia de la técnica usada para lograr cotas inferiores para el término derecho de la igualdad anterior, esto será desarrollado en el párrafo próximo.

6. En el caso en que $P_n \left(\frac{d}{dx} \right)$ tenga coeficientes, funciones continuas, el resultado dado en teorema 1 de 3.2.1.2. permite hacer consideraciones parecidas a las hechas antes. La diferencia esencial está centrada en que de querer localizar un cambio de signo para $P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (f)$, los puntos seleccionados deben estar convenientemente próximos para refinar la localización; esta situación obligaría a conectar este problema con estrategias de particionado con restricción

en cuanto al alejamiento de los puntos que coloca. Por razones fáciles de imaginar no exploraremos más en esta dirección.

3.3. Teorema central de cotas inferiores para algoritmos que hacen m observaciones sobre los datos.

El resultado principal de este apartado lo sintetiza el siguiente:

Teorema 1

Dados m y ℓ naturales, $1 \leq \ell \leq n + 1$, se verifica con las notaciones anteriores:

$$\inf_{A \in \mathcal{G}_m^{\lambda^{\ell-1}}} \left\{ \sup_{f \in L(P_n^+, P_n^-)} |d_A^1(f) - d_A^2(f)| \right\} \geq \frac{1}{S_{n+1}^{(n+1)}},$$

donde $S_m^{(n+1)}$ es la sucesión definida por recurrencia $S_i^{(n+1)} = 1$, si $1 \leq i \leq n + 1$,

$$S_m^{(n+1)} = \min_{1 \leq j \leq n+1} \left(S_{m-j}^{(n+1)} + S_{m-(n+2-j)}^{(n+1)} \right), \text{ si } n+2 \leq m.$$

Demostración

Vamos a imponer una nueva restricción sobre los datos, por motivos técnicos. En lugar de $L(P_n^+, P_n^-)$ consideramos :

$$L_1(P_n^+, P_n^-) = L(P_n^+, P_n^-) \cap \{f \in H^n : |f^{(i)+}| \leq 1, |f^{(i)-}| \leq 1,$$

para $0 \leq i \leq n\}$ y probaremos el enunciado para esta subfamilia de datos.

Procedemos por inducción en m .

Sea $m : \exists A_m :$

$$\sup_{f \in L_1(P_n^+, P_n^-)} |d_{A_m}^1(f) - d_{A_m}^2(f)| < \frac{1}{S_{n+1}^{(n+1)}} \quad (\Delta).$$

En primer lugar, probaremos que se puede determinar otro algoritmo B_m , de tal forma que las primeras $\min(m, n+1)$ observaciones

no dependan del dato que se tenga en curso, y además seguirá valiendo:

$$\sup_{r \in L_1(p_n^+, p_n^-)} |d_{B_m}^1(f) - d_{B_m}^2(f)| < \frac{1}{S_{m+1}^{(n+1)}} .$$

La construcción de B_m es así:

Aplicamos A_m sobre el dato f y obtenemos el primer punto:

p_1 . Ahora $\tilde{x}_2 = \alpha_2(p_1, f(p_1), \dots, f^{(n_1)}(p_1))$; para independen

dizar esta elección usamos como dato:

$$[f - g_1] \cdot a_1, \text{ donde } P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (g_1) \equiv 0 \text{ y } g_1^{(i)}(p_1) = f^{(i)}(p_1)$$

para $0 \leq i \leq n_1$, y aplicamos $\alpha_2(x_1, 0, \dots, 0) = p_2$.

El valor a_1 , es un número real elegido convenientemente para que :

$$\forall x \in (0,1), \quad a_1 | f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x) | \leq 1, \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad y$$

$$\forall x \in (0,1), \quad a_1 | f^{(n\pm)}(x) - g^{(n)}(x) | \leq 1.$$

Para determinar el próximo punto, tomamos como dato a la función:

$$a_2 [(f-g_1) \cdot a_1 - g_2] \quad , \quad \text{donde} \quad \alpha_2: \quad P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (g_2) \equiv 0$$

$$g_2^{(i)}(p_1) = 0, \quad 0 \leq i \leq n_1 \quad y \quad g_2^{(i)}(p_2) = a_1 [f^{(i)}(p_2) - g_2^{(i)}(p_2)]$$

para $0 \leq i \leq n_2$. La constante real a_2 es tal que:

$$| a_2 [(f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x)) \cdot a_1 - g_2^{(i)}(x)] | \leq 1, \quad \text{en } (0,1)$$

si $0 \leq i \leq n - 1$ y

$$| a_2 [(f^{(n\pm)}(x) - g^{(n)}(x)) \cdot a_1 - g_2^{(n)}(x)] | \leq 1, \quad \text{en } (0,1).$$

De esta manera: $p_3 = \alpha_3(p_1, 0, \dots, 0, p_2, 0, \dots, 0)$ y al ser

$[f^{(i)}(p_1) - g_1^{(i)}(p_1)] \cdot a_1 - g_2^{(i)}(p_1) = 0, \quad 0 \leq i \leq n_1$, el dato es

consistente con la elección p_2 anterior.

Así seguimos hasta determinar el último punto

$$p_k = \alpha_k(p_1, 0, \dots, 0, p_2, 0, \dots, 0, p_{k-1}, 0, \dots, 0), \text{ con}$$

dato:

$$h = a_{k-1} \cdot [a_{k-2} [a_{k-3} [\dots a_2 [a_1 (f(x) - g_1(x)) - g_2(x)] \dots \\ \dots - g_{k-3}] - g_{k-2}] - g_{k-1}] \cdot$$

donde g_{k-1} verifica: $P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (g_{k-1}) \equiv 0$ y

$$g_{k-1}^{(j)}(p_1) = 0, \quad 0 \leq j \leq n_1, \quad 1 \leq i \leq k - 2.$$

$$g_{k-1}^{(j)}(p_{k-1}) = a_{k-2} [a_{k-3} [\dots a_2 [a_1 (f^{(j)}(p_{k-1}) - g_1^{(j)}(p_{k-1}))] \dots \\ \dots - g_{k-3}^{(j)}(p_{k-1})] - g_{k-2}^{(j)}(p_{k-1})] \text{ para } 0 \leq j \leq n_{k-1} \cdot$$

La constante a_{k-1} se elige como siempre.

Hay que observar que hemos supuesto, para abreviar, que se verifica:

$$\sum_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) = n,$$

en otro caso, el punto p_k no es independiente de la función da

to, pero al ser $\sum_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) \geq n+1$ habríamos determinado $k-1$

puntos con $n+1$ informaciones que se toman en ellos sin importar la función en curso.

El lector podrá comprobar que todo lo hecho vale para el caso en el cual $\min(n+1, m) = n+1$; basta interrumpir el proceso anterior en el último punto que elija A_m , teniéndose para esta situación:

$$\sum_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) = m ; \text{ otra observación a la construcción ante}$$

rior es que se ha supuesto $n_1 < n$, de lo contrario en p_1 , que

es independiente de los datos, ya que se tendrían las $n+1$ informaciones localizadas.

El algoritmo B_m se continúa entonces haciendo trabajar a A_m sobre el dato $h(x)$, y así para cualquier $f \in L_1(P_n^+, P_n^-)$. En rigor, sólo podemos asegurar que B_m hace a lo más m observaciones, pero esto no modifica en absoluto nuestros posteriores razonamientos. Por último, observando que:

$$P_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) (h) = k_0 \cdot P_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) (f) \quad y$$

$$P_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) = k_0 \cdot P_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) (f),$$

donde k_0 es constante, se tiene que:

$$\eta(f) = \eta(h) \in [d_{A_m}^1(h), d_{A_m}^2(h)] = [d_{B_m}^1(f), d_{B_m}^2(f)] .$$

De esto último se desprende que $B_m \in \mathcal{E}_m^{l-1}$ y

$$\sup_{f \in L_1(P_n^+, P_n^-)} |d_{B_m}^1(f) - d_{B_m}^2(f)| < \frac{1}{S_{m+1}^{(n+1)}} \quad (\Delta\Delta).$$

En el caso $0 \leq m \leq n$, el teorema de interpolación dado en 3.2.1.1, consecuencia del lema 4, permite llegar a un absurdo con $(\Delta\Delta)$.

Podemos suponer que $m \geq n+1$. En virtud de la definición de

$$S_{m+1}^{(n+1)}, \text{ existe un índice } i : 1 < i < \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil$$

$$S_{m+1}^{(n+1)} = S_{m-i+1}^{(n)} + S_{m-(n+2-i)+1}^{(n+1)}$$

Supongamos ordenados los k puntos iniciales que ubica

$B_n : p_h < p_{h+1}, h = 1, \dots, k-1$; sea ℓ_0 el mínimo de

$$\left\{ \ell : \sum_{j=1}^{\ell} n_j \geq i \right\}, \text{ se da, entonces, una de las siguientes}$$

alternativas:

$$\sum_{h=1}^{\ell_0} x_h \geq \frac{S_{m-(n+2-1)+1}^{(n+1)}}{S_{m+1}^{(n+1)}} \quad \delta \quad \sum_{h=\ell_0+1}^{k+1} x_h \geq \frac{S_{m-1+1}^{(n+1)}}{S_{n+1}^{(n+1)}} ,$$

con $x_h = p_h - p_{h-1}$, $1 < h \leq k$; $x_1 = p_1$, $x_{k+1} = 1 - p_k$.

Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que vale:

$$\theta = \sum_{h=1}^{\ell_0} x_h \geq \frac{S_{m-(n+2-i)+1}^{(n+1)}}{S_{m+1}^{(n+1)}} .$$

Vamos a construir, para todo $\varepsilon > 0$ convenientemente chico, un algoritmo $A_{m-(n+2-i)}^\varepsilon$, que hace no más de $m-(n+2-i)$ evaluaciones de datos y derivadas.

Además, $A_{m-(n+2-i)}^\varepsilon \in \mathcal{E}_{m-(n+2-i)}^{\varepsilon^{\ell-1}}$, y sus datos serán

$L_1(Q_n^+, Q_n^-)$, para un par de operadores:

$$Q_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) = a \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{\theta^i} \cdot \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)} + \frac{a}{\theta^n} \cdot \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)+} \quad y$$

$$Q_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) = a \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{\theta^i} \cdot \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)} + \frac{a}{\theta^n} \cdot \left(\frac{d}{dx} \right)^{(n)-}$$

Dada $f \in L_1(Q_n^+, Q_n^-)$, tomamos \tilde{f} , definida como:

$$\tilde{f}(x) = a \cdot f \left(\frac{x}{\theta} \right), \quad \text{si } 0 \leq x \leq \theta - \epsilon.$$

$$\tilde{f}(x) = a \cdot f \left(\frac{x}{\theta} \right) \cdot \alpha(x) + \gamma(x), \quad \text{si } \theta - \epsilon \leq x \leq \theta.$$

$$\tilde{f}(x) = \gamma(x), \quad \text{si } \theta \leq x \leq 1.$$

Los parámetros auxiliares son:

$$\gamma: [\theta - \epsilon, 1] \rightarrow \mathbf{R} : P_n \left(\frac{d}{dx} \right) (\gamma) = \frac{1}{2} \quad \text{en } [\theta - \epsilon, 1],$$

$$|\gamma^{(i)}(x)| < 1, \text{ si } x \in [\theta - \epsilon, 1] \text{ y } 0 \leq i \leq n,$$

$$\gamma^{(i)}(\theta - \epsilon) = 0, \quad 0 \leq i \leq n - 1.$$

$\alpha: [\theta - \epsilon, \theta] \rightarrow \mathbf{R}$, es C^n en su dominio y verifica:

$$\alpha(\theta - \epsilon) = 1, \quad \alpha^{(i)}(\theta - \epsilon) = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha^{(i)}(\theta) = 0, \quad 0 \leq i \leq n.$$

El número real a , está elegido para que:

$$(i) \quad a \cdot \left| P_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) \left(f \left(\frac{x}{\theta} \right) \cdot \alpha(x) \right) \right| < \frac{1}{2}$$

$$a \cdot \left| P_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) \left(f \left(\frac{x}{\theta} \right) \cdot \alpha(x) \right) \right| < \frac{1}{2}$$

$$(ii) \quad |f^{(i)}| < 1, \quad 0 \leq i \leq n - 1$$

$$|\tilde{f}^{(n)+}| \leq 1, |\tilde{f}^{(n)-}| \leq 1, \text{ en } [0,1].$$

Es fácil verificar que $\tilde{f} \in H^n$; por otra parte, si $0 \leq x \leq \theta - \varepsilon$:

$$P_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) (\tilde{f})(x) = Q_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) (f) \left(\frac{x}{\theta} \right) \quad y$$

$$P_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) (\tilde{f})(x) = Q_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) (f) \left(\frac{x}{\theta} \right)$$

Con lo cual, si $\eta_{Q_n}(f) \in \left(0, 1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)$ entonces $\eta_{P_n}(\tilde{f}) \in (0, \theta - \varepsilon)$;

de lo contrario, si $\eta_{Q_n}(f) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{\theta}$ entonces

$$Q_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) (f) \left(\frac{x}{\theta} \right) < 0 \quad y \quad Q_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) (f) \left(\frac{x}{\theta} \right) < 0 \quad \text{para}$$

$x \in (0, \theta - \varepsilon)$, con lo cual:

$$P_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) (\tilde{f}) < 0, \quad P_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) (\tilde{f}) < 0 \quad \text{si} \quad x \in (0, \theta - \epsilon)$$

y

$$P_n^+ \left(\frac{d}{dx} \right) (\tilde{f}) > 0, \quad P_n^- \left(\frac{d}{dx} \right) (\tilde{f}) > 0 \quad \text{si} \quad x \in (\theta - \epsilon, 1).$$

Entonces, $\eta_{P_n}(\tilde{f}) = \theta - \epsilon$.

En cualquier situación hemos verificado:

$$\tilde{f} \in L_1(P_n^+, P_n^-) \quad \text{y}$$

$$\left| \eta_{Q_n}(\tilde{f}) - \frac{\eta_{P_n}(\tilde{f})}{\theta} \right| < \frac{\epsilon}{\theta} \quad (\Delta\Delta\Delta)$$

Por lo cual, aplicando B_m sobre \tilde{f} , se hacen a lo más, $m - (n+2-i)$ observaciones sobre el feto f , y se verifica, en virtud de $(\Delta\Delta\Delta)$:

$$\left| d_{A_{m-(n+2-i)}}^1(f) - d_{A_{m-(n+2-i)}}^2(f) \right| < \frac{|d_{B_m}^1(\tilde{f}) - d_{B_m}^2(\tilde{f})|}{\theta} + \frac{2\epsilon}{\theta};$$

teniendo presente la suposición hecha sobre B_m , se logra:

$$\left| d_{A_m}^1 \epsilon (f) - d_{A_m}^2 \epsilon (f) \right| \leq \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{1}{S_{m+1}^{(n+1)}} - K \right) + \frac{2\epsilon}{\theta},$$

con $K > 0$ independiente de ϵ . Elijiendo $\epsilon > 0$ conveniente, se logra un algoritmo de performance menor que

$$\left(\theta \cdot S_{m+1}^{(n+1)} \right)^{-1}, \text{ como todavía:}$$

$$\frac{1}{\theta \cdot S_{m+1}^{(n+1)}} \leq \frac{1}{S_{m-(n+2-i)+1}^{(n+1)}},$$

se tiene una afirmación del tipo de (A) con $m-(n+2-i)$ observaciones.

Un razonamiento completamente similar permite tratar el caso:

$$\sum_{h=\ell_0+1}^{k+1} x_h \geq \frac{S_{m-i+1}^{(n+1)}}{S_{n+1}^{(n+1)}}.$$

Observaciones

1. Como $L_1(P_n^+, P_n^-) \subseteq L(P_n^+, P_n^-)$, hemos probado la desigualdad:
 $\forall m \geq 1, \quad \forall \ell : 1 \leq \ell \leq n + 1$

$$\inf_{A_m \in \mathcal{G}_m^{\ell-1}} \left\{ \sup_{f \in L(P_n^+, P_n^-)} |d_{A_m}^1(f) - d_{A_m}^2(f)| \right\} \geq \frac{1}{S_{n+1}^{(n+1)}} .$$

2. Teniendo presente la observación hecha en 5. de 3.2.3., hemos probado para $1 \leq \ell \leq n$:

$$\inf_{A_m \in \mathcal{G}_m^{\ell-1}} \left\{ \sup_{f \in L(P_n)} |d_{A_m}^1(f) - d_{A_m}^2(f)| \right\} \geq \frac{1}{S_{m+1}^{(n+1)}} .$$

3.3.1. Conclusiones sobre el problema 3.1.a.

Recordando que en el capítulo 2 nos dedicamos a calcular las performances límite para estrategias del tipo $(n, n+k-1, 1)$,

y teniendo presente que para los casos en que el orden de de
cisión sea impar, o en el caso de que su valor sea 2 o bien

4, hemos comprobado que $PL_n(k) = \frac{1}{S_{m+1}^{(n)}}$, con $m = n+k-1$,

resulta entonces que:

$$(*) \quad \inf_{A \in \mathcal{E}_m^0} \left\{ \sup_{f \in L(P_n)} |d_{A,m}^1(f) - d_{A,n}^2(f)| \right\} = \frac{1}{S_{m+1}^{(n+1)}} .$$

para los casos en que el orden del operador: n sea par o bien
en los casos $n=1$ y $n=3$.

Teniendo presente nuestra conjetura para las performances
límites en los casos restantes, sería razonable conjeturar, por
separado, la igualdad (*), aún para los casos en que el orden
del operador sea impar y mayor que 3.

3.3.2. Resolución de los problemas de particionado con pesos arbitrarios.

El resultado obtenido en 3.3. permite dar una acotación

para la performance límite de las estrategias de particionado de pesos no necesariamente unitarios. Si $1 \leq \ell \leq n + 1$, $m \in \mathbf{N}_*$, entonces:

$$PL_{[0,1]}(n, m, \ell) \geq \frac{1}{S_{m+1}^{(n)}} ; \text{ pero teniendo presente la desigualdad:}$$

$$PL_{[0,1]}(n, m, 1) \geq PL_{[0,1]}(n, m, \ell),$$

conjuntamente con el resultado obtenido para las performances límite en el caso n impar, o $n = 2$, y $n = 4$, se tiene:

$$PL_{[0,1]}(n, m, \ell) = \frac{1}{S_{m+1}^{(n)}} ; \text{ para dichos valores de } n.$$

El resultado no debe sorprender pues las estrategias con pesos, no son más que estrategias de particionado comunes en las que se admite "superposición" de puntos; por lo tanto no debe ser fi

ficultoso probar:

$$PL_{[p,1]}(n,m,\ell) = PL_{[0,1]}(n,m,1) \quad (**)$$

La diferencia entre las estrategias de particionado de pesos unitarios y las que no lo son radica en el hecho de que estas últimas logran realizar algunas performances que para las primeras no eran alcanzables sino como límite de estrategias. Por ejemplo, para el caso $\ell = n + 1$, todos los valores son realizables pues no está restringida la cantidad de puntos que pueden superponerse. De cualquier forma, nuestra conjetura aseguraría la igualdad (**), aunque sería interesante ensayar la técnica sugerida antes para su prueba.

§ IV. Conclusiones.

4.1. Enfoque geométrico de la resolución de los problemas de particionado. Posibles generalizaciones.

La resolución de los problemas de particionado de un segmento, con pesos unitarios, expuesta en el capítulo 2, puede esquematizarse así:

$T_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ es transformación lineal para $1 \leq i \leq n - 1$. Entonces dado un convexo Ω en \mathbb{R}^n , definimos Δ_k , con $k \geq 1$, recursivamente:

$$\Delta_1 = \Omega, \text{ definidos } \Delta_1, \dots, \Delta_k,$$

$$\Delta_{k+1} = \bigcup_{i,j} (T_i(\Delta_k) \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times T_j(\Delta_k)).$$

El problema consiste en determinar la sucesión

$$\gamma_k^n = \max_{x \in \Delta_k} \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right).$$

Para el caso de los problemas que hemos estudiado, Ω es un polígono y los Λ_k subsiguientes son uniones de polígonos; por otra parte T_i se define $T_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Sería interesante explorar más en el problema general comenzando, por ejemplo, con Ω como un polígono en el octante positivo (i.e. en $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$) y simétrico y con $(T_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ como señalamos en el capítulo 2.

En otro orden de cosas, sería interesante dar respuesta a los siguientes problemas:

1. Calcular una función $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}$, que realice lo siguiente:

dado $(x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$; el número

$\rho(x_1, \dots, x_n)$ tiene la propiedad de ser el primer índice natural k , para el cual:

$$(x_1, \dots, x_n) \in \Lambda_k .$$

2. Enfocar el problema de particionado desde el punto de vista de quien decide qué intervalo extremo descartar ante cada instancia en que ello ocurra. Se trataría así, de obtener estrategias para este "jugador", que realicen no menos de $\rho(x_1, \dots, x_n)$ "jugadas", para cualquier posición inicial (x_1, \dots, x_n) , con el objeto de arrivar a un segmento final de longitud no mayor que uno.

3. Dada una estrategia de particionado de pesos unitarios, consideremos en cada nodo terminal θ , su segmento base $(\xi_1^\theta, \xi_{n+1}^\theta)$; sean $\xi_2^\theta < \dots < \xi_n^\theta$, los puntos elegidos anteriormente que hayan quedado en $(\xi_1^\theta, \xi_{n+1}^\theta)$. Redefiniendo el valor de tal estrategia como:

$$(*) \quad \max_{\theta} \left\{ g \left(\xi_2^\theta - \xi_1^\theta, \xi_3^\theta - \xi_2^\theta, \dots, \xi_{n+1}^\theta - \xi_n^\theta \right) \right\},$$

donde g es una función convexa dada de antemano, se plantea el problema de hallar el mínimo k tal que exista una estrategia de profundidad k de valor no mayor que ϵ prefijado.

Es posible que la solución de este problema lleve, como antes, a consideraciones del tipo de las establecidas al comienzo del presente párrafo.

De todas maneras, sería interesante explorar algún método para calcular el óptimo del problema:

$$\max_{(x_1, \dots, x_n)} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right), \text{ sujeto a } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_k$$

donde \mathbb{R}_k es análogamente a lo hecho en este trabajo, la región de \mathbb{R}^n donde la fórmula de residuos límite del nivel k es no mayor que uno, teniendo presente el nuevo valor de las estrategias dada por la fórmula (*). Estas generalizaciones incluyen el problema de localización de puntos notables con algoritmos de evaluación paralela, tarea desarrollada en un trabajo próximo.

4.2. Conjeturas centrales en los problemas abiertos.

Dejamos enunciados en este párrafo las conjeturas que establecimos para los problemas pendientes:

I. Dados m y n naturales, n par, mayor que 4, entonces:

$$P.L._{[0,1]}(n, m, 1) = \left\{ S_{m+1}^{(n)} \right\}^{-1}, \text{ donde}$$

$$S_n^{(n)} = 1, \quad 1 \leq m \leq n$$

$$S_m^{(n)} = \min_{1 < j < \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \left(S_{m-j}^{(n)} + S_{m-(n+1-j)}^{(n)} \right), \quad m \geq n + 1.$$

Una conjetura más débil es, para $n+1$ par y mayor que 4:

$$\inf_{A \in \mathcal{E}_m^0} \left\{ \sup_{f \in L(P_n)} |d_A^1(f) - d_A^2(f)| \right\} = \frac{1}{S_{m+1}^{(n+1)}}$$

donde $P_n = \sum_{i=0}^n c_i \left(\frac{d}{dx} \right)^{(i)}$: $P_n(\rho)$ tiene todas sus raíces

reales, $L(P_n) = \left\{ f \in D_{[0,1]}^{(n)} : \exists n(f) : \right.$

$$P_n(f)(x) > 0, x > \eta(f) \quad \text{y} \quad P_n(f)(x) < 0 \quad \text{si} \quad x < \eta(f) \quad \text{y}$$

\mathcal{E}_m^0 la familia de algoritmos que hacen m evaluaciones de las funciones datos $\eta(f) \in (d_A^1(f), d_A^2(f))$ para toda $f \in L(P_n)$, donde $(d_A^1(f), d_A^2(f))$ es un intervalo producido para cada dato f , por cada algoritmo A en \mathcal{E}_m^0 .

APENDICE I: SIMPLIFICACION DE FORMULAS.

Supongamos dadas expresiones E_i de la forma:

$$E_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_i^j \cdot x_j, \quad i = 1, \dots, k + 1$$

con $\alpha_i^j \geq 0$.

Nuestro problema es determinar la validez de la afirmación:

$$E_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \leq \max_{1 \leq i \leq k} \{E_i(x_1, \dots, x_n)\} \quad (\forall x_1, \dots, x_n \geq 0),$$

mediante un procedimiento que permita reducir el problema al tratamiento de uno de programación lineal.

Una consecuencia directa es el siguiente:

Lema 1.

Dadas E_i , $i = 1, \dots, k + 1$ como antes, y denotando con A a la matriz (α_i^j) , $i = 1, \dots, k + 1$, $j = 1, \dots, n$, resultan equivalentes:

$$(i) \quad (\forall x_1, \dots, x_n \geq 0) \quad E_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \leq \max_{1 \leq i \leq k} \{E_i(x_1, \dots, x_n)\}$$

$$(ii) \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n : A \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \leq (1, \dots, 1)^T \right\}$$

está contenido en

$$\left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \alpha_{k+1}^i \leq 1 \right\}$$

Ahora, es fácil verificar que (ii) es equivalente a la siguiente afirmación:

(iii) La solución óptima: θ , del siguiente problema de P.L.:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \\ \theta: \text{máx} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \alpha_{k+1}^i \right) \end{array} \right.$$

verifica $\theta \leq 1$.

Utilizaremos esta equivalencia obtenida: (i) \leftrightarrow (iii) para el problema de simplificar fórmulas de máximos discretos. Dadas A y B matrices triangulares superiores de coeficientes positivos $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i < j}}$ y $(b_{ij})_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i < j}}$, B con las propiedades 2., 3. y 4 del párrafo 2.2.5.4., y denotando M_A y M_B a sus máximos asociados

$$M_A = \max_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ \left(\sum_{k=i}^j x_k \right) \frac{1}{a_{ij}} \right\} ,$$

$$M_B = \max_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ \left(\sum_{k=i}^j x_k \right) \frac{1}{b_{ij}} \right\} ; \text{ entonces se cumple:}$$

$M_A \leq M_B$ si y sólo si $\forall i, j : b_{ij} \leq a_{ij}$.

(+) Tomamos $1 \leq i_0 < j_0 \leq n$ fijos; por la suposición:

$$\frac{1}{a_{i_0 j_0}} \cdot \sum_{k=i_0}^{j_0} x_k \leq M_B(x) , \text{ y por lo tanto, en virtud de la}$$

equivalencia mencionada, llamando

$$K = \{x : M_B(x) \leq 1\}, \text{ se verifica:}$$

$$\theta = \max_{x \in K} \left\{ \frac{1}{a_{i_0 j_0}} \cdot \sum_{k=i_0}^{j_0} x_k \right\} \leq 1.$$

Pero por las propiedades de la matriz B :

$$\theta = \frac{b_{i_0 j_0}}{a_{i_0 j_0}} \quad (\text{ver lema 1, 2.2.5.4})$$

La otra implicación es inmediata.

Para cerrar este apéndice, digamos que dadas tres matrices A, B, C con las propiedades 2., 3. y 4. del párrafo 2.2.5.4, la simplificación de a pares puede no ser efectiva; es decir, no es difícil construir un ejemplo de tres matrices en tales condiciones y con las características:

$M_A \leq \min \{ M_B, M_C \}$ y A, B, C incomparables de

a pares. Puede ser fructífero desarrollar un algoritmo eficiente para simplificaciones de este tipo.

Apéndice II

```

INTEC 992 M20,000
CALL COMEN (M, N, L, 20000)
20000
20001
20002
20003
20004
20005
20006
20007
20008
20009
20010
20011
20012
20013
20014
20015
20016
20017
20018
20019
20020
20021
20022
20023
20024
20025
20026
20027
20028
20029
20030
20031
20032
20033
20034
20035
20036
20037
20038
20039
20040
20041
20042
20043
20044
20045
20046
20047
20048
20049
20050
20051
20052
20053
20054
20055
20056
20057
20058
20059
20060
20061
20062
20063
20064
20065
20066
20067
20068
20069
20070
20071
20072
20073
20074
20075
20076
20077
20078
20079
20080
20081
20082
20083
20084
20085
20086
20087
20088
20089
20090
20091
20092
20093
20094
20095
20096
20097
20098
20099
20100
20101
20102
20103
20104
20105
20106
20107
20108
20109
20110
20111
20112
20113
20114
20115
20116
20117
20118
20119
20120
20121
20122
20123
20124
20125
20126
20127
20128
20129
20130
20131
20132
20133
20134
20135
20136
20137
20138
20139
20140
20141
20142
20143
20144
20145
20146
20147
20148
20149
20150
20151
20152
20153
20154
20155
20156
20157
20158
20159
20160
20161
20162
20163
20164
20165
20166
20167
20168
20169
20170
20171
20172
20173
20174
20175
20176
20177
20178
20179
20180
20181
20182
20183
20184
20185
20186
20187
20188
20189
20190
20191
20192
20193
20194
20195
20196
20197
20198
20199
20200

```


Apéndice III

RESOLUCION PARA CREAR 2

CCN 1	APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	2
1000	2	
CCN 2	APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	4
1000	4	
CCN 3	APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	8
1000	8	
CCN 4	APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	16
1000	16	
CCN 5	APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	32
1000	32	
CCN 6	APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	64
1000	64	
CCN 7	APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	128
1000	128	
CCN 8	APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	256
1000	256	
CCN 9	APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	512
1000	512	
CCN 10	APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	1024
1000	1024	
CCN 11	APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	2048
1000	2048	
CCN 12	APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	4096
1000	4096	
CCN 13	APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	8192
1000	8192	

RESOLUCION PARA ORDEN 3

CCN 1 APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	2
1	1
2	1
CCN 2 APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	3
1	1
2	2
CCN 3 APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	5
1	3
2	2
CCN 4 APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	8
1	5
2	3
CCN 5 APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	13
1	8
2	5
CCN 6 APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	21
1	13
2	8
CCN 7 APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	34
1	21
2	13
CCN 8 APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	55
1	34
2	21
CCN 9 APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	89
1	55
2	34
CCN 10 APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	144
1	89
2	55
CCN 11 APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	233
1	144
2	89
CCN 12 APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	377
1	233
2	144
CCN 13 APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	617
1	377
2	233
CCN 14 APLICACIONES DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A	987
1	617
2	377

CONTINUACION
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000

DE LA ESTRATEGIA SE LLEGA A 21

Table with 100 columns and 100 rows of data, containing numbers and symbols.

CONTINUATION
 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7
 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9
 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10
 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11
 12 12 12 12 12 12 12 12 12 12
 13 13 13 13 13 13 13 13 13 13
 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14
 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15
 16 16 16 16 16 16 16 16 16 16
 17 17 17 17 17 17 17 17 17 17
 18 18 18 18 18 18 18 18 18 18
 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19
 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20

INFORME SOBRE EL TRABAJO DE TESIS DOCTORAL DEL LICENCIADO

Jorge Luciano Claudio Sanz :

"ESTRATEGIAS DE PARTICIONADO DE UN SEGMENTO Y SU APLICACION A LA LOCALIZACION DEL CERO DE UNA ECUACION QUE INVOLUCRA A UNA FUNCION Y SUS DERIVADAS".

Inicialmente se establece la conexión entre dos problemas bien conocidos:

- (1) Calcular el mínimo número de evaluaciones de los datos, necesarios para que un algoritmo localice la raíz: $g(f)$, con aproximación ξ , de toda función continua f , definida en (a,b) , con la propiedad $f(a).f(b) \leq 0$.
- (2) Igual que en (1), pero sustituyendo la clase de funciones por las funciones continuas unimodales en (a,b) , y tomando como $g(f)$ aquel punto que realiza el máximo de f .

La conexión realizada tiene dos direcciones:

- (a) Características comunes del planteo de (1) y (2).
 - (b) Características comunes en la resolución de ambos problemas. Tanto (a) como (b) llevan al planteo de problemas que no constan como tratados ni planteados precedentemente:
- (a') Dado el operador lineal diferencial:

$$P_n\left(-\frac{d}{dx}\right) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{(n)} + c_1(x)\left(-\frac{d}{dx}\right)^{(n-1)} + \dots + c_n(x),$$

donde $c_i(x): (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, es continua, y considerando la familia de funciones:

$$L(P_n) = \left\{ f \in C^n(a,b) : \text{existe } g(f) : \begin{array}{l} P_n\left(-\frac{d}{dx}\right)(f)(x) > 0, \text{ si } x > g(f) \\ P_n\left(-\frac{d}{dx}\right)(f)(x) < 0, \text{ si } x < g(f) \end{array} \right\},$$

y por último, denotando Q_M a la clase de algoritmos de búsqueda secuencial del punto notable $g(f)$, que hacen M evaluaciones sobre los datos: $L(P_n)$, y llamando $(d_A^1(f), d_A^2(f))$ al intervalo donde el algoritmo A localiza $g(f)$, se puede enunciar entonces un problema que generaliza directamente (1) y (2):

$$\text{Calcular } H_M^n = \inf_{A \in Q_M} \sup_{f \in L(P_n)} (d_A^2(f) - d_A^1(f))$$

para todo natural M .

Se ha probado en primera instancia que $h_M^n \geq \frac{1}{S_M^{(n+1)}}$, donde

$$S_M^{(k)} = \min_{1 \leq j \leq \frac{n+1}{2}} (S_{M-j}^{(k)} + S_{M-(k+1)+j}^{(k)}) .$$

$$S_M^{(k)} = 1, \text{ si } 0 \leq M \leq k-1 .$$

La posibilidad de progresar en la localización de $g(f)$, para f en $L(P_n)$, con la herramienta de evaluar f en los puntos de su dominio, ha llevado a la demostración de un resultado que generaliza el conocido teorema del valor medio del cálculo diferencial:

Dado $P_n(-\frac{d}{dx})$ operador diferencial como en (&1), entonces:

existe $w > 0$:

dados $a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b$: $x_k - x_1 \leq w$,

dados $f \in C^n$ y los valores:

$$f^{(j)}(x_i) , \quad 0 \leq j \leq n_i , \quad 1 \leq i \leq k ,$$

donde n_i son arbitrarios, con la única condición :

$$n_1 + \dots + n_k = n + 1 - k ,$$

resulta que existe un \bar{s} en (x_1, x_k) de forma tal que : (&2)

$$P_n(-\frac{d}{dx})(f)(\bar{s}) = E(x_1, \dots, x_k, f(x_1), \dots, f^{(n_1)}(x_1), \dots, x_k, f(x_k), \dots, f^{(n_k)}(x_k)) .$$

donde E es una expresión donde no interviene, en cuanto a f se refiere, más que los valores destacados.

En el caso en que c_i es constante y $P_n(r)$, el polinomio característico, tiene todas sus raíces reales, resulta ser $w = +\infty$.

(b') El punto (b) destacado anteriormente, lleva a la noción de estrategia de particionado de un segmento. Estas son, esencialmente, un juego de dos jugadores, de objetivos contrapuestos, que dependen de tres parámetros (n, m, l) . Su vinculación con el problema (a') es que cada estrategia de particionado genera un algoritmo de búsqueda secuencial, y que las estrategias óptimas generan los algoritmos que me jor explotan la propiedad que permite progresar la localización, dada en (&2).

Se ha desarrollado un programa de computadora que encuentra las estrategias óptimas, y se ha intentado caracterizar el valor de dichas estrategias : $\frac{1}{r_m(n)}$, en forma recursiva, lográndose el siguiente resultado:

Si n es impar, ó si n es 2 ó 4, se tiene:

$$r_m(n) = S_m(n) , \text{ para todo natural } m . \quad (\&3)$$

Queda planteada la conjetura de la igualdad (&3), para los casos restantes.

Teniendo presente que, por otra parte, se ha logrado probar:

$$H_m^n = \frac{1}{r_m(n+1)} , \text{ para todo } m \text{ natural,}$$

se concluye que, para los mencionados casos de valores de $n + 1$:

i) impar

ii) 2 ó bien 4 ,

vale la igualdad :

$$H_m^n = \frac{1}{S_m(n+1)} , \text{ para todo vaíor } m .$$

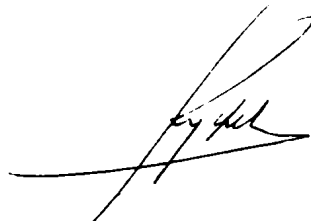
En el caso $n + 1 = 2$, $S_m^{(2)}$ es la célebre sucesión de Fibonacci, y el resultado para este caso, es la conocida resolución del problema (2).

La metodología utilizada para calcular las estrategias óptimas, sirve para :

1°) Dar algoritmos razonables que solucionen el problema de localización de $g(f)$ en la versión más general del problema planteada en este trabajo.

2°) Dar un valor que seapostulable como performance óptima de la familia de algoritmos que hacen M observaciones sobre sus datos, y que localizan el punto notable para todas las funciones de la clase $L(P_n)$.

Actualmente, esta metodología está dando notables frutos en la resolución del problema planteado en (a'), donde la herramienta es: algoritmos de búsqueda paralela.



Ing. Hugo Ryckeboer

BIBLIOGRAFIA

- (1) R. Bellman & S. Dreyfus, "La programmation dynamique et ses applications", Dunod, 1965.
- (2) R. Brent, "Algorithms for minimization without derivatives", Prentice Hall Englewood Cliffs, N. J. 1973.
- (3) O. Gross & S. Johnson, "Sequential minimax search for a zero of a convex function", Math. Tables & other aids to computation, vol 13, 1959, 44-51.
- (4) R. Karp & W. Miranker, "Parallel minimax search for a maximum", Journal of Combinatorial Theory, 4, 1968, 19-35.
- (5) J. Kiefer, "Optimal sequential search and approximation methods under minimum regularity assumptions", SIAM J. Appl. Math. 5, 1957, 105-136.
- (6) J. Kiefer, "Sequential minimax search for a maximum", Proc. Amer. Math. Soc., vol 4, 1953, 502-506.
- (7) C. Micchelli & W. Miranker, "High order search methods for finding roots", Journal of the A.C.M. , vol 22, N° 1, 1975, 51-60.
- (8) O. Mangasarian, "Techniques of optimization", Technical Report N° 124, Univ. of Wisconsin, Mayo 1971.
- (9) S. Winograd, "Some remarks on proof techniques in analytic complexity", Analytic Computational Complexity, Proc. Carnegie-Mellon Univ., Ac. Press, 1975, 5-20.