

## Tesis de Posgrado

# Ecuación de Klein Gordon y transformaciones de medida generalizada

Virasoro, Miguel Angel José

1966

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Virasoro, Miguel Angel José. (1966). Ecuación de Klein Gordon y transformaciones de medida generalizada. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1647\\_Virasoro.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1647_Virasoro.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Virasoro, Miguel Angel José. "Ecuación de Klein Gordon y transformaciones de medida generalizada". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1966. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1647\\_Virasoro.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1647_Virasoro.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

F

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física

ECUACION DE KLEIN GORDON Y TRANSFORMACIONES  
DE MEDIDA GENERALIZADA

Miguel Angel José Virasoro

Tesis presentada para optar  
al título de Doctor de la  
Universidad de Buenos Aires

Director: Carlos G. Bollini

-1966-

1647

Ej = 2

## O. INTRODUCCION

En este trabajo intentamos realizar la cuantificación de campos de manera tal que el tratamiento para partículas de cualquier espín y masa sea esencialmente unificado; los campos libres configuran realizaciones covariantes del grupo de Poincaré y satisfacen todos ellos la ecuación de Klein Gordon. Las componentes redundantes que necesariamente aparecen en todas las formulaciones manifiestamente covariantes son tratadas, también en forma unificada, mediante condiciones subsidiarias aplicadas al espacio de Hilbert y simetrías del tipo de la invariancia de medida usual.

Como es sabido la ecuación de Klein Gordon es aceptada como la ecuación de evolución de las partículas de espín 0. Eventualmente ha sido usada para campos de espín mayor (campo electromagnético y campo vectorial masivo en el tratamiento de Stueckelberg) pero en general para cada espín se han considerado ecuaciones de movimiento distintas. Ha habido intentos de hacer una formulación unificada como por ejemplo la de Foldy<sup>(1)</sup> que plantea la ecuación:

$$i \frac{\partial \Psi(\vec{p}, t)}{\partial t} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \Psi(\vec{p}, t)$$

para todo espín pero tienen en general el inconveniente de ser no manifiestamente covariantes e inadecuadas para construir a partir de ellas una teoría cuántica de campos (ver I.1). Nuestra formulación es covariante en todo momento y en ese sentido puede verse como una continuación del programa iniciado en los trabajos<sup>(2,3)</sup> en donde se propone por primera vez la ecuación de Klein Gordon como única ecuación de movimiento. También es antecedente el trabajo<sup>(4)</sup> donde se introduce la interacción en la matriz S y se formula qué condiciones debe cumplir ésta para tratar adecuadamente las componentes redundantes (principio de interacción mínima).

En esta tesis partimos, desde el principio, postulando un único tipo de lagrangiano para todos los campos. Analizamos qué realizaciones de las representaciones del grupo de Poincaré podemos usar para que el campo sea covariante y sólo satisfaga ecuación de Klein Gordon cuando libre ( secc. I.1 y I.2). Mostramos entonces que la métrica indefinida que aparece automáticamente impone la existencia de una simetría en la teoría. La comparación con el tratamiento de Gupta Bleuler del caso electromagnético nos permite considerar esa simetría como una invariancia de medida generalizada. Desarrollamos en detalle luego distintos ejemplos de teorías mostrando que la aplicación de la invariancia de medida generalizada sobre el término de interacción establece condiciones sobre ésta ( que implican las encontradas en<sup>(4)</sup>) y por consiguiente determina en gran medida su forma.

En la sección II consideramos un campo espinorial complejo interactuando con un campo vectorial real. La interacción queda totalmente determinada y equivalente a la electrodinámica mínima usual. En la sección III tratamos un campo vectorial real interactuando con una corriente externa. La invariancia de medida generalizada implica que la corriente debe conservarse, salvo que sólo asignemos sentido físico a la cuatridivergencia del campo ( en cuyo caso éste no describe partículas de espín 1). En la sección IV estudiamos la electrodinámica de mesones vectoriales y mostramos cómo el momento magnético queda totalmente determinado.

Por último estudiamos en la sección V la relación entre este programa y el intento de buscar teorías invariantes respecto a simetrías superiores como  $\bar{U}(4)$  que mezclan grados de libertad internos y espaciotemporales.

## I. CONSIDERACIONES GENERALES

### I.1 Ecuaciones de 2° orden, covariancia y representaciones del grupo de Poincaré

En esta sección estudiamos los estados de una partícula libre. Los campos son por lo tanto números c. La cuantificación la trataremos más adelante.

El principio de relatividad restringida exige<sup>(5)</sup> que la descripción de un estado de partícula libre sea traducible de un observador a otro ubicados en sistemas de coordenadas inerciales distintos. Además si un estado es dinámicamente posible en un sistema, la traducción de dicho estado lo debe ser en el otro.

Esto nos lleva inmediatamente al siguiente razonamiento. Sea  $|\psi\rangle$  el vector del espacio de Hilbert que representa un cierto estado en el sistema 0. Desde otro sistema 0' un observador describirá el mismo estado de manera distinta. Esta descripción será traducible en el sistema 0 y como es la traducción de un estado dinámicamente posible en 0' será dinámicamente posible en 0. Por consiguiente habrá un vector  $|\varphi\rangle$ , perteneciente al mismo espacio de Hilbert que  $|\psi\rangle$ , que represente dicha traducción. La correspondencia descrita entre  $|\psi\rangle$  y  $|\varphi\rangle$  define obviamente una transformación

$$|\varphi\rangle = U|\psi\rangle$$

que además es función de la relación entre 0 y 0' es decir de la transformación de Lorentz correspondiente. Es trivial demostrar que configura una representación del grupo de Lorentz<sup>(\*)</sup>.

---

(\*) El hecho de que un estado físico deba ser representado por un rayo del espacio de Hilbert y no un vector permite que dicha transformación U sea una representación del grupo a menos de un factor pero Wigner<sup>(6)</sup> demuestra que este caso más general se reduce al considerado.

o, si incluimos traslaciones, del grupo de Poincaré.

Por otro lado de la exigencia de que las probabilidades de transición sean independientes del sistema de referencia se deduce que esta representación debe ser unitaria<sup>(\*)</sup>.

Llegamos entonces a la conclusión de que los estados posibles de un sistema constituyen la base de una representación unitaria del grupo de Poincaré; por consiguiente el conocimiento de dichas representaciones es necesario para la determinación de la dinámica de una partícula libre. Pero además es suficiente, pues si conocemos el operador que representa la traslación en un cierto intervalo de tiempo podemos determinar la evolución del sistema en ese intervalo.

Como nuestra intención es modificar justamente las ecuaciones de movimiento de una partícula libre ( es decir la dinámica de ésta) de tal modo que sólo satisfaga la ecuación de Klein Gordon, es importante ver qué significa este programa en términos de teoría de representaciones del grupo de Poincaré.

Antes veamos una definición; si un sistema físico puede hallarse en dos estados distinguibles en forma relativísticamente invariante decimos que no es elemental. Al sistema en cada uno de los distintos estados lo consideramos sistemas elementales distintos. Entonces por definición los estados posibles de un sistema elemental forman una base irreducible del grupo de Poincaré.

Wigner<sup>(6)</sup> en su trabajo fundamental encontró todas las representaciones irreducibles unitarias del grupo de Poincaré y clasificó aquellas que tienen importancia física mediante dos invariantes  $[m, s]$ , para  $m > 0$ , que representan respec-

(\*) Igual que antes como sólo el módulo del elemento de matriz tiene sentido físico, se pueden considerar transformaciones antiunitarias. Sin embargo para el grupo de Lorentz ortócrono no es necesario<sup>(5)</sup>.

tivamente la masa de la partícula y el módulo del espín en el sistema en reposo y para  $m = 0$  mediante la helicidad  $\lambda$ . Una dada representación  $[m, s]$  puede por supuesto realizarse de infinitas maneras. Hay que especificar el espacio de Hilbert concreto y dar la expresión de las transformaciones.

Todas las realizaciones son isomorfas pero a pesar de eso difieren en propiedades importantes en cuanto se intenta construir a partir de ellas una teoría de campos. En particular hay tres aspectos que ~~a nosotros que a nosotros~~ nos interesan: a) Existencia de componentes redundantes de los vectores base, b) covariancia manifiesta de la representación y c) tipo de producto escalar invariante. Aclaremos estos aspectos.

En principio, en cualquier tipo de realización, la función de onda base va a estar caracterizada por una serie de índices que varían en un dominio finito y el impulso que toma valores continuos,

$$\Psi_{\nu, \nu_1 \dots \nu_n}(p)$$

si al hacer variar a los índices y el impulso dentro de sus respectivos dominios se genera un espacio de Hilbert mayor que el necesario para construir una base de una representación irreducible del grupo de Poincaré, entonces decimos que la función de onda tiene componentes redundantes. En estos casos se necesitan ecuaciones de movimiento especiales (distintas de las de Klein - Gordon) condiciones de vínculo o simetrías de medida para tratar dichas componentes.

En cuanto al punto b), en la literatura sobre el tema se llama realización covariante manifiesta a aquella en la cual las matrices que representan transformaciones del grupo de Lorentz homogéneo no dependen del impulso. Esta definición puede parecer arbitraria; en principio, en un sentido más amplio, covariancia manifiesta significa que la sola observación del n° de índices y el tipo de estos permite determinar cómo se transforma una función de onda. En esos casos podemos, por ejemplo, saber cuando una reacción es relativísticamente invariante con solo observar que de

ambos lados de la ecuación haya el mismo número y tipo de índices sin saturar, y además que estén igualadas las respectivas componentes. Si en cambio la matriz depende del impulso, para distintos valores de éste la función de onda se transformará de manera distinta y de allí que se la considere no covariante manifiesta. Sin embargo puede surgir una objeción a este criterio pues siendo la base de una representación del grupo de Poincaré necesariamente de dimensión infinita, es esencial considerar al impulso como un subíndice más de la función de onda y a las matrices de transformación como de infinitas filas y columnas, es decir la ley de transformación será del tipo:

$$\varphi_{\alpha p}^T = \sum \int d^4 p' D_{\alpha\alpha' p p'} U_{\alpha' p'}$$

De esta forma es obvio que cualquier realización sería covariante. Sin embargo la notación es particularmente incómoda pues no aprovecha que la matriz D conecta sólo 2 valores del impulso, tal como se puede ver poniendo D de la forma:

$$D_{\alpha\alpha' p p'}(\Lambda) = \delta(p' - \Lambda^{-1} p) Q_{\alpha\alpha'}(\Lambda, p)$$

donde  $\Lambda$  es la matriz de la transformación de Lorentz.

Además saturar índices en este tipo de "covariancia" implica integrar sobre el impulso y por consiguiente no permite, por ejemplo, obtener covariantemente un lagrangiano local. Otras dificultades surgen al hacer una transformada de Fourier en los campos pues ahora esta operación, que suma funciones de onda para distintos valores del impulso, es no covariante.

Todo esto permite afirmar que la posibilidad de construir una teoría de campos depende de que la realización sea covariante en el sentido más restringido<sup>(7)</sup>. Más aún en teorías de Matriz S también parece ser necesario<sup>(8)</sup> o por lo menos conveniente.



En cuanto al punto c) tipo de producto escalar invariante es evidente que por ser todas las representaciones consideradas unitarias existirá siempre un producto escalar definido positivo e invariante. Pero a veces, ese producto escalar es diagonal en los subíndices e independiente del impulso es decir se puede poner:

$$\sum_{v_j} \int \frac{d^3 p}{P_0} (\Psi_{v_1, v_2, \dots, v_n})^* \Psi_{v_1, v_2, \dots, v_n}$$

En ese caso decimos que la representación es manifiestamente unitaria. En otros casos existe un producto escalar de ese tipo pero no definido positivo, entonces decimos que es manifiestamente pseudounitario. Por último hay realizaciones en las cuales no hay productos diagonales invariantes.

Otro punto que nos interesa es que al realizar las representaciones para  $m = 0$  y  $m \neq 0$  no se introduzcan diferencias artificiales que oscurezcan las propiedades debidas específicamente a la anulación de la masa.

Pasamos ahora a revisar las realizaciones que se han propuesto.

I) Realizaciones que no incluyen componentes redundantes en la función de onda.

Por ejemplo las obtenidas por Wigner en su trabajo original<sup>(6)</sup>. La ley de transformación de la representación  $[m, s]$   $m > 0$  y  $s = 0, \frac{1}{2}, 1 \dots$  bajo una transformación inhomogénea de Lorentz  $x' = x + a$  es realizada de la forma:

$$\varphi_{\alpha}^{\tau}(p) = \exp(ip \cdot a) D_{\alpha\alpha'}^{(s)}(p, \Lambda) \varphi_{\alpha'}(\Lambda^{-1} p)$$

donde  $D_{\alpha\alpha'}^{(s)}(p, \Lambda)$  es una representación del llamado grupo pequeño (grupo de las rotaciones en el sistema en reposo). El producto escalar es diagonal en el spin e independiente del impulso.

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi_{\alpha}^*(p) \psi_{\alpha}(p) \frac{d^3 p}{P_0}$$

La matriz que representa una transformación del grupo homogéneo de Lorentz depende del impulso y por consiguiente estamos frente a una realización no covariante

manifiesta.

Hay una realización analizada por Shaw<sup>(9)</sup> que reúne las ventajas de ser covariante manifiesta y no tener componentes redundantes. En este caso la ley de transformación es:

$$\psi_{\alpha}^T(p) = \exp(ip \cdot a) Q_{\alpha\alpha'}(\Lambda) \psi_{\alpha'}(\Lambda^{-1}p) \quad (1)$$

Donde las matrices  $Q_{\alpha\alpha'}(\Lambda)$  constituyen una representación del grupo de Lorentz homogéneo. Dentro de la notación usual<sup>(9)</sup> de las representaciones de los grupos de Lorentz y Poincaré se puede simbolizar la expresión (1) diciendo que la realización es el producto directo de

$$[m, 0] \otimes \{s, 0\}$$

Esta realización tiene la desventaja de no ser manifiestamente unitaria ni pseudounitaria pero a pesar de eso puede usarse como base para una teoría de campos<sup>(7)</sup>; trata en forma totalmente distinta los casos  $m \neq 0$  y  $m = 0$  pues en este último aparece nuevamente componentes redundantes.

## II) Realizaciones que incluyen componentes redundantes

Hay distintas realizaciones de este tipo de las cuales las más importantes son las de Bargmann - Wigner<sup>(10)</sup> y Rarita - Schwinger<sup>(11)</sup>. Ambas son manifiestamente covariantes y en ellas las funciones de onda se transforman como espinores y tensores. Además de la covariancia manifiesta tienen la ventaja de usar el cálculo tenso-espinorial el cual disminuye el número de operadores invariantes, facilita la saturación de índices y la reducción de productos de representación.

Hay tres métodos distintos para tratar las componentes redundantes:

a) usar ecuaciones de movimiento distintas de la de Klein Gordon.

Por ejemplo en la teoría de spin  $\frac{1}{2}$  usual (Dirac) la ecuación de movimiento elimina las componentes redundantes. En general éste es el método de Bargmann - Wigner<sup>(10)</sup>.

b) establecer condiciones de vínculo que limitan el n° de grados de libertad del campo. Este método fue usado por Bollini<sup>(2,3)</sup> para tratar la realización de Rarita - Schwinger<sup>(\*)</sup>.

c) establecer simetrías del tipo de la invariancia de medida y condiciones de vínculo sobre los estados. Este método ha sido usado para partículas de masa nula<sup>(12)</sup>.

En nuestro trabajo vamos a intentar generalizarlo para partículas de masa distinta de cero. Nos vamos a guiar en todo momento por el tratamiento de Gupta - Bleuler<sup>(13)</sup> del campo electromagnético. En particular los campos serán cuantificados manteniendo sus componentes redundantes. Las condiciones de vínculo se aplicarán sobre los estados a la manera de:

$$\partial_\mu A^\mu(x) |\Omega\rangle = 0$$

En la próxima sección vamos a estudiar en detalle la realización del grupo de Poincaré propuesta y ver qué tipo de transformaciones de medida generalizada pueden ser útiles.

## I.2 Realización de Rarita Schwinger

Habíamos visto que para que la realización fuese covariante era necesario que la transformación fuera del tipo:

$$\Psi_\alpha^\top(p) = \exp(ip \cdot a) Q_{\alpha\alpha'}(\Lambda) \Psi_{\alpha'}(\Lambda^{-1}p)$$

---

(\*) En principio, por definición la diferencia entre condiciones de vínculo y ecuaciones de movimiento es que aquellas no pueden incluir derivadas temporales (no determinan la evolución temporal del sistema). Sin embargo esta definición no es aceptable relativísticamente. Por eso para nosotros ecuación de movimiento es la que se obtiene variando el lagrangiano y condición de vínculo la que se impone independientemente.

Recordando que en la notación de Wigner la representación  $[m, 0]$  es:

$$\Psi^T(p) = \exp(ip \cdot a) \Psi(\Lambda^{-1}p)$$

es obvio que el tipo de realización corresponde a utilizar como representación del grupo de Poincaré:

$$[m, 0] \otimes \{ \text{representación irreducible del grupo de Lorentz homogéneo} \}$$

Entonces debemos usar una realización de las representaciones irreducibles del grupo de Lorentz homogéneo finitas. Estas han sido estudiadas exhaustivamente<sup>(14)</sup> y se las ha clasificado mediante dos parámetros, autovalores de operadores de Cassimir del grupo, que pueden tomar valores enteros o semienteros positivos.

$$\{s, s'\} \quad \text{donde} \quad s, s' = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

Por ejemplo  $\{0, \frac{1}{2}\}$  es la representación generada por los espinores de 2 componentes de 1<sup>a</sup> especie;  $\{\frac{1}{2}, 0\}$  lo mismo pero con espinores de 2<sup>a</sup> especie;  $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$  la representación regular de los cuadvectores.

Todas estas representaciones son finitas y no unitarias pero irreducibles. En cambio cuando se las multiplica por la representación  $[m, 0]$  para construir a partir de ellas representaciones del grupo de Poincaré devienen por un lado reducibles<sup>(\*)</sup> y por otro unitarias (aunque no manifiestamente). Esto se relaciona algebraicamente con la aparición del impulso como cuadvector del espacio de  $\infty$  dimensiones. La reducción<sup>(4)</sup> se hace:

$$[m, 0] \otimes \{s, s'\} = \sum_{s''=|s-s'|}^{s+s'} \oplus [m, s'']$$

(\*) Salvo las representaciones  $[m, 0] \otimes \{s, 0\}$  ó  $[m, 0] \otimes \{0, s'\}$  que siguen siendo irreducibles. Son justamente las realizaciones estudiadas por Shaw<sup>(9)</sup>.

y la unitariedad se consigue construyendo operadores de la métrica invariantes definidos positivo

$$(\Psi, \varphi) = \sum_{\alpha\alpha'} \int \frac{d^3p}{p_0} \Psi_{\alpha}^* (p) U_{\alpha\alpha'} \varphi_{\alpha'} (p)$$

Bargmann - Wigner estudian las realizaciones que se obtienen por producto directo de espinores de 4 componentes. Es decir una representación del tipo:

$$\otimes \left[ \left\{ \frac{1}{2}, 0 \right\} \oplus \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\} \right]^n$$

reducidas mediante simetrización y anulación de trazas. Estas realizaciones son útiles cuando se discute simetrías del tipo  $\bar{U}(4)$  y las estudiaremos en la sección correspondiente. Ahora en cambio usaremos la de Rarita Schwinger que utiliza productos múltiples de la representación vectorial multiplicados una o ninguna vez por la representación espinorial, es decir del tipo:

$$\left[ \left\{ \frac{1}{2}, 0 \right\} \oplus \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\} \right] \otimes \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}^n \quad (1)$$

o

$$\otimes \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}^n$$

En ella los vectores base son de dos tipos según que los posibles espines de las partículas sean enteros o semienteros. En el 1er caso se usa un tensor simétrico y sin traza

$$\Psi_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} (p) \quad (2)$$

en el 2º un tensor-espinor con n índices tensoriales y 1 índice espinorial (que dejaremos implícito) simétrico en los índices tensoriales y que satisface

$$\gamma^{\nu_1} \Psi_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} (p) = 0 \quad (3)$$

Con estas condiciones los espacios de vectores son irreducibles respecto al grupo de Lorentz pero no lo son cuando se considera el grupo de Poincaré. Rarita - Schwinger agregan entonces condiciones en las cuales aparece explícitamente el impulso  $p_\mu$  y que reducen el espacio garantizando la unicidad del espín. Son estas condiciones las tratadas como ecuaciones de movimiento<sup>(15)</sup> o condiciones de vínculo<sup>(2,3)</sup> que permiten despejar las componentes independientes, no redundantes, del campo para sólo variar éstas en el lagrangiano. Nosotros en cambio pretendemos trabajar con el campo completo.

Para teorías en las que la paridad no se conserva podemos usar espinores de dos componentes en lugar de los de 4 componentes. En ese caso la ecuación correspondiente a (1) será:

$$\left\{0, \frac{1}{2}\right\} \otimes \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}^n \quad \delta \quad \left\{\frac{1}{2}, 0\right\} \otimes \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}^n \quad (1 \text{ bis})$$

y en vez de (3) aparece:

$$\sigma^{\nu_1} \psi_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} = 0 \quad (3 \text{ bis})$$

La reducibilidad del espacio completo ha sido especialmente estudiada por Shaw<sup>(9)</sup>. En el caso  $m \neq 0$  el espacio es separable es decir los subespacios invariantes son disjuntos y su suma genera el espacio total. Se pueden encontrar tensores invariantes convenientemente normalizados que actúan como operadores de proyección de cada subespacio<sup>(16)</sup>, llamémoslos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Supongamos que queremos describir un campo que pertenece al subespacio irreducible "i", entonces podemos usar indistintamente:

a) sólo condiciones de vínculo sobre los estados:  $(1 - P_i) \psi | \Omega \rangle = 0$

b) sólo invariancias de medida:

$$\psi = \psi^T \quad \text{si} \quad P_i \psi = P_i \psi^T$$

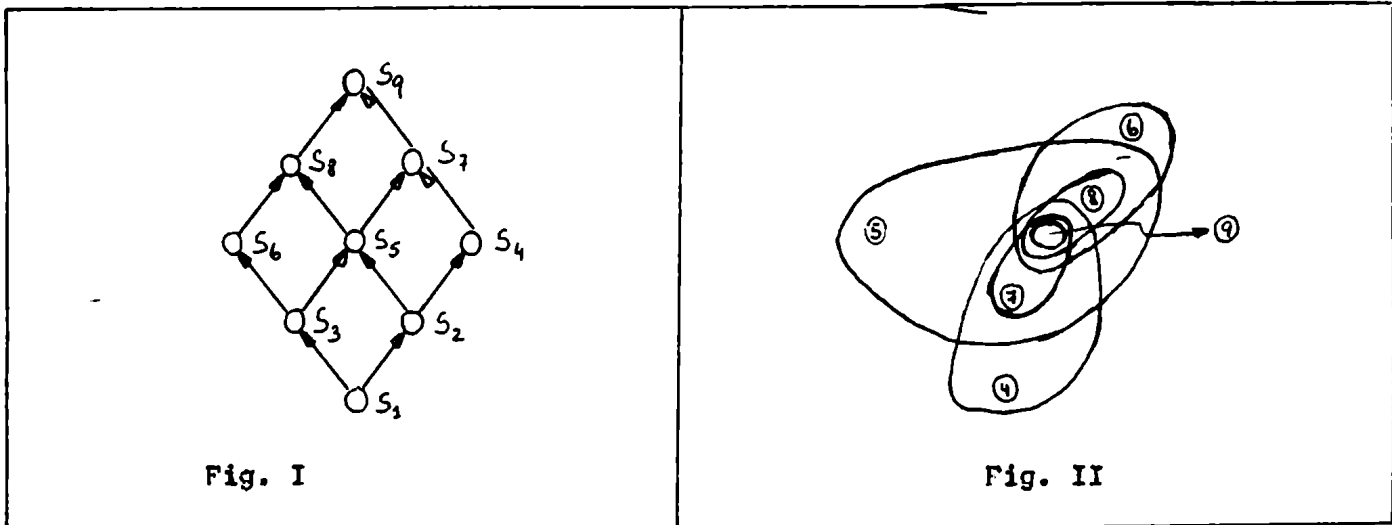
c) ambas cosas  $P_k \psi | \Omega \rangle = 0 \quad k \neq i; \quad k = 1, 2 \dots$

$$\psi = \psi^T \quad \text{si} \quad P_{k'} \psi = P_{k'} \psi^T \quad k' = i, \quad k' = 1, 2 \dots$$

En el caso  $m = 0$  los subespacios invariantes no son disjuntos sino que por el contrario se incluyen entre sí formando lo que matemáticamente se llama un reticulado. Un esquema indicativo del ejemplo de un tensor de campo 2 está mostrado en la figura I. En ese caso hay 9 subespacios invariantes independientes (en el sentido de que ninguno de ellos puede obtenerse como unión o intersección de los otros) representados por círculos; las flechas indican la relación de inclusión. Por ejemplo:  $S_9$  está incluido en  $S_1 \dots S_7$ ;  $S_1$  es el espacio total pues incluye todos los demás subespacios invariantes. Para cada uno de dichos subespacios hay un operador invariante  $O_i$  tal que

$$O_i \Psi = 0 \Rightarrow \Psi \in S_i$$

Además de estos 9 subespacios independientes hay que incluir como subespacios invariantes a las uniones e intersecciones de aquellos. Supongamos ahora que queremos describir un campo que pertenece al subespacio 5, entonces el esquema de subespacios invariantes será el indicado en la figura II.



En primer lugar el campo satisface  $O_5 \Psi |\Omega\rangle = 0$  pero todavía así el espacio es redundante. Distintas maneras de tratar tal redundancia convierte en significativas partes diferentes de  $S_5$ . Por ejemplo, si usamos únicamente condiciones

de vínculo sobre el espacio entonces sólo se puede describir el único subespacio invariante irreducible, a saber  $S_9$ , en efecto, cualquier otra condición de vínculo, por ejemplo:

$$c_7 \Psi |\Omega\rangle = 0$$

no define un subespacio invariante pues incluye:

$$S_7 \cap S_6 ; S_7 \cap S_8 ; S_9$$

Con invariancias de medida exclusivamente sólo podemos describir el espacio  $S_5$  restado el  $S_4$  y  $S_6$  de la siguiente manera:

$$\Psi \equiv \Psi^T \text{ donde } \Psi^T = \Psi + \phi + \phi' \text{ con } c_6 \phi = c_5 \phi = 0 \\ c_4 \phi' = c_5 \phi' = 0$$

Por último si queremos describir otro subespacio, por ejemplo:

$$S_8 = S_4 \cap S_5$$

debemos usar condiciones de vínculo

$$c_8 \Psi |\Omega\rangle = 0$$

e invariancias de medida:

$$\Psi \equiv \Psi^T \text{ donde } \Psi^T = \Psi + \phi \text{ con } c_4 \phi = c_8 \phi = 0$$

Sabemos del trabajo de Gupta-Bleuler<sup>(3)</sup> que las condiciones de vínculo y simetrías de medida son las que impiden, en la cuantificación del campo electromagnético, que la métrica indefinida produzca probabilidades mayores que uno o negativas.

Como las realizaciones a usar son manifiestamente pseudo unitarias, aparecerán naturalmente problemas derivados de la métrica indefinida semejantes a los



enfrentados por Gupta - Bleuler que nos servirán de base para discutir qué simetrías de medida y condiciones de vínculo deben imponerse.

Demostremos en la próxima sección que en una teoría de campos, interpretable en términos de partículas, el uso de la métrica indefinida implica la existencia de una simetría.

### I.3 Métrica indefinida

Para que los campos libres sólo satisfagan la ecuación de Klein - Gordon el lagrangiano debe ser<sup>(3)</sup>:

$$\mathcal{L} = -m^2 \bar{\Psi}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \Psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} + (\partial_\nu \bar{\Psi}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}) (\partial^\nu \Psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}) \quad (1)$$

donde  $\bar{\Psi} = \Psi^* \gamma^0$  o  $\Psi^*$  según que sea un tensor o un tensor-espinor.

Es obvio que dicho lagrangiano es pseudo-hermítico, es decir, hermítico en la métrica indefinida

$$(\Psi, \Phi) = \int \frac{d^3 p}{p_0} \bar{\Psi}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \Phi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$$

luego en general los observables que se deduzcan de él serán pseudohermíticos. Cuando en un espacio de Hilbert hay vectores de norma nula ortogonales a todos los demás (vectores nulos) se dice que la métrica es degenerada. En esos casos la teoría tiene automáticamente una invariancia de medida para dos vectores que difieren en uno nulo tienen los mismo valores de expectación para cualquier observable, en efecto:

Sea  $v$  un vector nulo, entonces:

$$(w, 0 u) = (0^* w, u) = (0^* w, u + v) = (w, 0 (u + v))$$

o sea:

$$u \equiv u + v \quad (*)$$

(\*) Este es el caso justamente del campo electromagnético<sup>(13)</sup>

Como estos vectores no modifican ningún valor de expectación obviamente no producen problemas en la interpretación probabilística. Podemos por consiguiente, para lo que sigue, suponer que el espacio carece de vectores nulos. En ese caso se demostrar que hay una base  $u_j$  en el espacio tal que

$$(u_i, u_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$$

donde  $\epsilon_i = \pm 1$  (17)

Supongamos ahora que existen dos observables  $O$  y  $O'$  que no conmutan. Para que los valores de expectación sean reales hay que calcularlos en una métrica en que  $O$  y  $O'$  sean autoadjuntos. Si lo son en alguna métrica definida positiva entonces, como además son pseudohermíticos, se deduce:

$$O^* = O^+ = O$$

donde  $O^*$  es el adjunto en la métrica definida y  $O^+$  el pseudoadjunto.

Pero notando  $(, )$  y  $\langle , \rangle$  la métrica indefinida y definida respectivamente obtenemos:

$$(u, A v) = (A^* u, v)$$

$$\langle u, A v \rangle = \langle A^+ u, v \rangle$$

Como  $\langle u, v \rangle$  es un producto bilineal puede ponerse <sup>de</sup> la forma  $(u, \eta v)$

$$\text{Entonces: } (u, \eta A v) = (A^+ u, \eta v)$$

$$\Rightarrow (A^* \eta^* u, v) = (\eta^* A^+ u, v)$$

$$\Rightarrow A^* \eta^* = \eta^* A^+$$

Si  $A^* = A^+ = A$  entonces:

$$[\eta^*, A] = 0 \Rightarrow [\eta, A] = 0$$

Es decir el operador de la métrica conmuta con todos los observables y por consiguiente habrá una supersimetría q.e.d.

Supongamos entonces que los valores de expectación los calculamos en la métrica indefinida.

Luego sea  $|\lambda_0\rangle$  un estado preparado tal que  $O$  esté bien definido y valga real. Medimos  $O'$  y su valor de expectación resulta:

$$\frac{\langle \lambda_0 | O' | \lambda_0 \rangle}{\langle \lambda_0 | \lambda_0 \rangle}$$

Para calcularlo desarrollamos  $|\lambda_0\rangle$  en suma de autoestados de  $O'$  y por simplicidad suponemos que sólo aparecen autoestados de  $O'$  :  $|\eta_0\rangle, |\mu_0\rangle$

$$|\lambda_0\rangle = \beta |\eta_0\rangle + \alpha |\mu_0\rangle$$

por consiguiente:

$$\frac{\langle \lambda_0 | O' | \lambda_0 \rangle}{\langle \lambda_0 | \lambda_0 \rangle} = \frac{\alpha^2 \mu_0 \langle \mu_0 | u_0 \rangle + \beta^2 \eta_0 \langle \eta_0 | \eta_0 \rangle}{\alpha^2 \langle u_0 | u_0 \rangle + \beta^2 \langle \eta_0 | \eta_0 \rangle}$$

La teoría de probabilidades identifica entonces:

$$\frac{\alpha^2 \langle \mu_0 | u_0 \rangle}{\alpha^2 \langle u_0 | u_0 \rangle + \beta^2 \langle \eta_0 | \eta_0 \rangle} \quad \text{probabilidad de medir } \mu_0$$

$$\frac{\beta^2 \langle \eta_0 | \eta_0 \rangle}{\alpha^2 \langle u_0 | u_0 \rangle + \beta^2 \langle \eta_0 | \eta_0 \rangle} \quad \text{probabilidad de medir } \eta_0$$

Inmediatamente se ve que si  $|\mu_0\rangle$  y  $|\eta_0\rangle$  tienen normas de distinto signo entonces aparecen probabilidades negativas y mayores que 1. A partir de este punto hay tres caminos, el primero cambiar la interpretación física de tal modo que las probabilidades vengan dadas por

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{y} \quad \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Pero esto es equivalente a calcular el valor de expectación mediante la

fórmula:

$$\frac{\langle \lambda_0 | O' | \lambda_0 \rangle}{\langle \lambda_0 | \eta | \lambda_0 \rangle}$$

es decir estamos nuevamente como en el caso anterior usando una métrica definida positiva y como ya hemos visto esto sólo se puede hacer si los observables conmutan con  $\eta$ .

Otro camino es exigir que los observables sean tales que al desarrollar un autoestado de  $O$  como superposición de autoestados de  $O'$ , no aparezcan mezclados autoestados de  $O'$  con norma de distinto signo. Considerando el operador  $\eta$  anteriormente definido, diagonal en la base de autoestados de  $O'$ ,  $+1$  cuando actúa sobre los autoestados de norma positiva,  $-1$  cuando actúa sobre los de norma negativa, quiere decir que los autoestados de  $O$  deben ser autoestados de  $\eta$ . Luego:

$$[\eta, O] = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Por último podemos plantear una condición subsidiaria sobre el espacio de Hilbert que elimine de éste los autoestados de  $O'$  con norma negativa, por ejemplo:

$$P|\Omega\rangle = 0$$

pero nuevamente en este caso los observables deben conmutar con dicho operador para garantizar que no conecta estados que cumplen la condición subsidiaria y estados que no la cumplen.

Recapitulando observamos que el poder hacer una interpretación probabilística exige una simetría en una teoría en la cual haya 2 o más observables autoadjuntos en una métrica indefinida que no conmutan.

Podríamos desarrollar una teoría de campos en la cual sólo la energía y el impulso total sean observables. En ese caso la métrica indefinida no obliga a restringir la teoría de tal modo que sea invariante respecto a algún  $\eta$ . Sin embargo una teoría de este tipo es particularmente vacua, no se pueden realizar a partir de ella predicciones experimentales del tipo: "preparado un sistema en un cierto estado  $|\Omega\rangle$ ; en qué estado se encuentra después de un cierto tiempo?". En particular interpretar una teoría cuántica de campos como teoría de partículas elementales exige al menos un

observable, el número de partículas, que no conmuta con el hamiltoniano<sup>(\*)</sup>.

Hemos demostrado entonces que si usamos un lagrangiano pseudohermítico (indispensable si los campos deben satisfacer sólo Klein - Gordon) la teoría debe tener una simetría.

En las próximas secciones desarrollaremos en detalle algunos ejemplos de teorías cuánticas de campos. Vamos a estudiar en ellas las restricciones que impone la existencia del operador de simetría  $\eta$ , pero además veremos que en general éste resulta ser uno de un grupo de operadores de simetría continuo, conexo con la unidad. A estas transformaciones llamaremos de medida generalizada.

---

(\*) La electrodinámica de Sudarshan et al<sup>(18)</sup> no es interpretable en términos de partículas; no usan operadores que no conmutan. Sudarshan propone concretamente diagonalizar el hamiltoniano total (incluida la interacción) y restringir el espacio de Hilbert al subespacio de los autoestados del Hamiltoniano con norma positiva.

II. CAMPOS EN INTERACCION - CAMPO  
ESPINORIAL COMPLEJO

Notación: Seguiremos en general la del libro de Schweber<sup>(14)</sup>. El producto escalar de 2 vectores  $a_\mu b^\mu = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$

Ecuación de Klein - Gordon  $(\square^2 + m^2) \Psi(x) = (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \Psi(x) = 0$

Ecuación de Dirac  $(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x) = 0$

Propagador de una partícula escalar  $\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

II.1 Obtención del tensor de la métrica

Consideremos en primer lugar el lagrangiano general (I.2 (1) )

$$\mathcal{L} = - ( m^2 \bar{\Psi} \Psi + \partial_\nu \bar{\Psi} \partial^\nu \Psi )$$

del cual se deducen las ecuaciones de movimiento y reglas de conmutación siguientes:

$$(\square^2 + m^2) \Psi(x) = 0 \qquad \{ \partial_0 \bar{\Psi}_\alpha, \Psi_\beta \} = i \delta_{\alpha\beta} \delta^3(x - x')$$

$$(\square^2 + m^2) \bar{\Psi}(x) = 0 \qquad \{ \bar{\Psi}_\alpha \partial_0, \Psi_\beta \} = -i \delta_{\alpha\beta} \delta^3(x - x')$$

que a su vez implican:

$$\{ \Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(x') \} = i \delta_{\alpha\beta} \Delta(x - x')$$

Desarrollando en serie de Fourier resulta:

$$\Psi_{\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_{k_0=\sqrt{k^2+m^2}} \frac{d^3k}{k_0} [a_{\alpha}(k) e^{-ik \cdot x} + b_{\alpha}(k) e^{ik \cdot x}]$$

$$\bar{\Psi}_{\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_{k_0=\sqrt{k^2+m^2}} \frac{d^3k}{k_0} [\bar{a}_{\alpha}(k) e^{ik \cdot x} + \bar{b}_{\alpha}(k) e^{-ik \cdot x}]$$

reemplazando en las reglas de conmutación se deduce que:

$$\{a_{\alpha}(k), \bar{a}_{\beta}(k')\} = k_0 \delta^3(k - k') \delta_{\alpha\beta}$$

$$\{b_{\alpha}(k), \bar{b}_{\beta}(k')\} = -k_0 \delta^3(k - k') \delta_{\alpha\beta}$$

o también

$$\{a_{\alpha}(k), a_{\beta}^*(k')\} = k_0 \delta^3(k - k') (\gamma^0)_{\alpha\beta}$$

$$\{b_{\alpha}(k), b_{\beta}^*(k')\} = -k_0 \delta^3(k - k') (\gamma^0)_{\alpha\beta}$$

Usando una representación en la cual  $\gamma^0$  es diagonal, por ejemplo:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es obvio que cuatro de los ocho anticonmutadores distintos de cero tienen signo anómalo, índice de que la métrica es indefinida. En efecto, para cada valor del subíndice  $\alpha$ ,  $a_{\alpha}$

ó  $a_{\alpha}^*$  son operadores de creación y lo mismo para  $b$ , llamando  $|0\rangle$  al estado de vacío:

si  $a_{\alpha}$  es operador de creación  $\|a_{\alpha}|0\rangle\| = \langle 0|a_{\alpha}^* a_{\alpha}|0\rangle = \delta^3(0) k_0 (\gamma^0)_{\alpha\alpha}$

si  $a_{\alpha}^*$  es operador de creación  $\|a_{\alpha}^*|0\rangle\| = \langle 0|a_{\alpha} a_{\alpha}^*|0\rangle = \delta^3(0) k_0 (\gamma^0)_{\alpha\alpha}$

luego la norma de dichos estados para  $\alpha = 3, 4$  es negativa independientemente de cual operador se elija como de creación. Es interesante comparar esta situación con la correspondiente en el caso de cuantificación del campo electromagnético. Allí un intercambio del papel de los operadores de creación y destrucción elimina la métrica indefinida del espacio de Hilbert, pero crea nuevas dificultades (signo de la energía del campo, no covariancia, etc.) y por eso se opta por mantener el papel que juega cada operador y resolver la métrica indefinida por otro camino. Aquí en cambio desde el principio se ve que dicho procedimiento no lleva a ninguna solución. Qué operadores elegir como de creación y destrucción dependerá de que la energía resulte definida positiva y corresponde en definitiva a elegir distintos pares de energía negativa. Por ello tomamos ahora como elemento de trabajo provisorio los operadores  $a_\alpha^*$  y  $b_\alpha$  como de creación. Toda la discusión que sigue podría hacerse también usando otro par.

Un estado genérico del espacio de Hilbert de una partícula va a ser superposición de estados del tipo:

$$|\Omega_1\rangle = \sum_{\alpha} \int \frac{d^3 k}{k_0} F_{\alpha}(k) a_{\alpha}^*(k) |0\rangle$$

$$|\Omega_2\rangle = \sum_{\alpha} \int \frac{d^3 k}{k_0} G_{\alpha}(k) b_{\alpha}(k) |0\rangle$$

donde  $F_{\alpha}(k)$  y  $G_{\alpha}(k)$  son las funciones de onda de una partícula y una antipartícula respectivamente y conforman bases independientes para representaciones del grupo de Lorentz que queremos identificar.

Suponemos que en una transformación  $x' = \Lambda x + a$  (donde  $\Lambda$  pertenece al grupo propio de Lorentz)  $\Psi$  y  $\bar{\Psi}$  se transforman como:

$$\Psi^T(x) = S(\Lambda) \Psi(\Lambda^{-1}(x - a))$$

$$\bar{\Psi}^T(x) = \bar{\Psi}(\Lambda^{-1}(x - a)) S^{-1}(\Lambda) \tag{1}$$



$S(\Lambda)$  es la usual representación espinorial del grupo de Lorentz<sup>(14)</sup> que satisface  $\gamma^0 S^+ \gamma^0 = S^{-1}$ .

Entonces

$$\begin{aligned} F_{\beta}^T(\mathbf{k}) &= S_{\beta'\beta}^* (\Lambda) F_{\beta'} (\Lambda^{-1} \mathbf{k}) e^{-i \Lambda^{-1} \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} \\ G_{\beta}^T(\mathbf{k}) &= S_{\beta'\beta} (\Lambda) G_{\beta'} (\Lambda^{-1} \mathbf{k}) e^{-i \Lambda^{-1} \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} \end{aligned} \quad (2)$$

Además de la métrica del espacio de Hilbert inducida por las reglas de conmutación se refleja en el subespacio de estados de una partícula en:

$$\begin{aligned} (F^{(1)}, F^{(2)}) &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{k_0} (F_{\beta}^{(1)}(\mathbf{k}))^* (\gamma_0)_{\beta\beta'} F_{\beta'}^{(2)}(\mathbf{k}) \\ (G^{(1)}, G^{(2)}) &= - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{k_0} (G_{\beta}^{(1)}(\mathbf{k}))^* (\gamma_0)_{\beta\beta'} G_{\beta'}^{(2)}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (3)$$

Con estos elementos queda explícita la realización particular de la representación espinorial del grupo de Lorentz usada. En (2) se puede ver que  $F^*$  y  $G$  se transforman mediante las matrices transpuestas de la representación usual. Además de (3) y (2) se puede deducir que la realización es manifiestamente covariante y pseudounitaria.

Buscamos ahora el producto escalar invariante y definido positivo no diagonal en el espín y dependiente del impulso. Es obvio que si llamamos  $\tilde{\delta}^r$  a la matriz transpuesta de  $\delta_{\mu}$  sólo hay un escalar  $\tilde{\delta}^{\mu} p_{\mu}$ . Por consiguiente la métrica más general será del tipo:

$$\begin{aligned} \langle F^{(1)}, F^{(2)} \rangle &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{k_0} \overline{F^{(2)}}^* \left[ a + b \frac{\tilde{\delta}^r}{m} \right] F^{(1)*} \\ \langle G^{(1)}, G^{(2)} \rangle &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{k_0} \overline{G^{(1)}} \left[ a' + b' \frac{\tilde{\delta}^r}{m} \right] G^{(2)} \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando la transformación de Lorentz tal que  $h p = \hat{p}$  donde  $\hat{p} = (0, 0, 0, m)$  entonces

$$S(h) p S^{-1}(h) = \hat{p} = m \gamma_0$$

por lo tanto

$$\tilde{S}^{-1}(h) \tilde{p} \tilde{S}(h) = \tilde{\hat{p}} = m \gamma_0$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \langle F^{(1)}, F^{(2)} \rangle &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{k_0} F^{(2)*} \tilde{S} \tilde{S}^{-1} \left[ a + \frac{b \tilde{p}}{m} \right] \tilde{S} \tilde{S}^{-1} F^{(1)*} \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{k_0} \left[ F^{(2)*} \tilde{S} \right]_{\alpha}^* \left[ a \gamma_0 + b \right]_{\alpha\beta} \left[ \tilde{S} F^{(1)} \right]_{\beta} \end{aligned}$$

y también:

$$\langle G^{(1)}, G^{(2)} \rangle = + \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{k_0} \left[ G^{(1)} \tilde{S} \right]_{\alpha}^* (a' \gamma_0 + b')_{\alpha\beta} \left[ \tilde{S} G^{(1)} \right]_{\beta}$$

Como

$$a \gamma_0 + b = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

para que las formas cuadráticas sean definidas <sup>deben</sup> ~~pueden~~ también ser: ~~cero~~ algunos de los ~~c~~

$$\begin{aligned} a + b = c_1 > 0 & \quad ; \quad a' + b' = c'_1 > 0 \\ a - b = -c_2 > 0 & \quad ; \quad a' - b' = -c'_2 > 0 \end{aligned}$$

si sólo exigimos que la métrica sea semidefinida puede también ser cero algunos de los  $c$ .

Usando los resultados del capítulo anterior vemos que para eliminar los problemas de la métrica indefinida la teoría tiene que ser invariante respecto a la transformación:

$$G(k) \rightarrow - [c_1 \tilde{P} + c_2 \tilde{Q}] G(k)$$

$$F^*(k) \rightarrow [c_1 \tilde{P} + c_2 \tilde{Q}] F^*(k)$$

donde

$$P = \frac{m + k}{2m} \quad \text{y} \quad Q = \frac{m - k}{2m}$$

Dicha transformación induce sobre  $a_\beta(k)$  y  $b_\beta(k')$

$$a_\beta^T(k) = [c_1 P + c_2 Q]_{\beta\beta'} a_{\beta'}(k)$$

$$b_\beta^T(k) = - [c_1 P + c_2 Q]_{\beta\beta'} b_{\beta'}(k)$$

Para que la estructura del espacio de Hilbert se mantenga debe existir un operador  $\eta$  unitario que genera la transformación y por consiguiente las reglas de conmutación deben ser invariantes<sup>(\*)</sup>.

$$\{a_\beta^{*T}(k), a_{\beta'}^T(k')\} = \{a_\beta^*(k), a_{\beta'}(k')\}$$

$$\{b_\beta^{*T}(k), b_{\beta'}^T(k')\} = \{b_\beta^*(k), b_{\beta'}(k')\}$$

---

(\*) Hay otras posibilidades señaladas en el capítulo anterior: condiciones de vínculo sobre el espacio de Hilbert u operadores de la métrica que proyectan sobre ~~la~~ parte del espacio. En el caso complejo estas posibilidades conducen a tipos de interacción artificiales. Una discusión más detallada haremos al tratar el campo vectorial.

Reemplazando obtenemos la siguiente condición para los  $c$  :

$$|c_1|^2 = |c_2|^2 = |c'_1|^2 = |c'_2|^2 = 1$$

Luego deben ser :

$$c_1 = -c_2 = c'_1 = -c'_2 = 1$$

Esta transformación sobre los estados de una partícula induce una transformación sobre el operador del campo.

$$\Psi \rightarrow \Psi^T = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{k_0} \left[ (P-Q) a(k) e^{-ik \cdot x} + (Q-P) b(k) e^{ik \cdot x} \right] = \frac{i\partial}{m} \Psi(x)$$

Hasta ahora hemos demostrado que si deseamos eliminar el efecto de la métrica indefinida mediante una invariancia de medida es condición necesaria que la teoría sea invariante ante la transformación

$$\Psi \rightarrow \Psi^T = \frac{i\partial}{m} \Psi$$

Pero en cambio no hemos visto que dicha invariancia sea condición suficiente para resolver la métrica indefinida, (en particular no discutimos estados con muchas partículas). Para ello encontremos en primer lugar el operador  $\eta$  que genera la transformación:

$$\eta^{-1} \Psi \eta = \Psi^T = \frac{i\partial}{m} \Psi$$

Definimos  $\Psi_1(x) = \frac{m+i\partial}{2m} \Psi(x)$  y  $\Psi_2(x) = \frac{m-i\partial}{2m} \Psi(x)$  ,

entonces es obvio que:

$$\Psi_1^T(x) = \Psi_1(x) \quad ; \quad \Psi_2^T(x) = -\Psi_2(x)$$

luego proponemos un  $\eta$  función exclusivamente de  $\Psi_2(x)$ . Como además

$$\left[ 2m \int d^3x \bar{\Psi}_2(x) \delta_0 \Psi_2(x), \Psi_2(x') \right] = \Psi_2(x')$$

llamando  $\mathcal{O} = 2m \int d^3x \bar{\Psi}_2(x) \gamma_0 \Psi_2(x)$  , se ve que:

$$e^{-i\lambda \mathcal{O}} \Psi_2(x) e^{i\lambda \mathcal{O}} = \Psi_2(x) - i\lambda [\mathcal{O}, \Psi_2] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \Psi_2]] \dots$$

$$= e^{-i\lambda \mathcal{O}} \Psi_2(x)$$

Por lo tanto poniendo  $\lambda = \pi$  obtenemos el operador buscado:

$$\eta = \exp \left[ i\pi 2m \int d^3x \bar{\Psi}_2(x) \gamma_0 \Psi_2(x) \right]$$

Estudiamos ahora la norma de los estados con varias partículas. Para ello desarrollamos en serie de Fourier separadamente  $\Psi_1(x)$  y  $\Psi_2(x)$  :

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{k_0} \left[ a_{(r)}^{(1)} \omega^{(r)} e^{-ik \cdot x} + b_{(r)}^{(1)} v^{(r)} e^{ik \cdot x} \right]$$

$$\Psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{k_0} \left[ a_{(r)}^{(2)} v^{(r)} e^{-ik \cdot x} + b_{(r)}^{(2)} \omega^{(r)} e^{ik \cdot x} \right]$$

donde  $(m - \kappa) v^{(r)} = 0$  ;  $(m + \kappa) \omega^{(r)} = 0$  ;  $\bar{v}^r v^s = \delta^{rs}$  ;  $\bar{\omega}^r \omega^s = \delta^{rs}$  y  $\bar{v}^r \omega^s = 0$

Las reglas de conmutación de los  $a_{(r)}$  se pueden deducir identificando

$$a_\alpha = a_{(r)}^{(1)} \omega_\alpha^{(r)} + a_{(r)}^{(2)} v_\alpha^{(r)} ; \bar{a}_\alpha = a_{(r)}^{(1)*} \bar{\omega}_\alpha^{(r)} + a_{(r)}^{(2)*} \bar{v}_\alpha^{(r)}$$

$$b_\alpha = b_{(r)}^{(1)} v_\alpha^{(r)} + b_{(r)}^{(2)} \omega_\alpha^{(r)} ; \bar{b}_\alpha = b_{(r)}^{(1)*} \bar{v}_\alpha^{(r)} + b_{(r)}^{(2)*} \bar{\omega}_\alpha^{(r)}$$

luego

$$\{a_\alpha \bar{a}_\beta\} = \{a_{(r)}^{(1)} a_{(s)}^{(1)*}\} \omega_\alpha^{(r)} \bar{\omega}_\beta^{(s)} + \{a_{(r)}^{(2)} a_{(s)}^{(2)*}\} v_\alpha^{(r)} \bar{v}_\beta^{(s)}$$

multiplicando de ambos lados por  $(\bar{\omega}_r)_\alpha$  y  $\omega_\beta^s$  resulta:

$$k_0 \delta^3(k-k') \bar{\omega}^{(r)} \omega^{(s)} = \{a_r^{(1)} a_s^{(1)*}\} (\bar{\omega}^{(r)} \omega^{(r)}) (\bar{\omega}^{(s)} \omega^{(s)})$$

$$\Rightarrow \{a_r^{(1)}, a_s^{(1)*}\} = k_0 \delta^3(k-k') \delta_{rs}$$

De la misma manera obtenemos:

$$\{ a_{(r)}^{(2)}, a_{(s)}^{(2)*} \} = -\delta^3(k-k') \delta_{rs}$$

$$\{ b_{(r)}^{(1)}, b_{(s)}^{(1)*} \} = \delta^3(k-k') \delta_{rs}$$

$$\{ b_{(r)}^{(2)}, b_{(s)}^{(2)*} \} = -\delta^3(k-k') \delta_{rs}$$

El espacio de Hilbert está generado por combinación lineal de estados del tipo:

$$\underbrace{a_s^* a_r^* \dots}_{n} \underbrace{b_s b_r \dots}_m |0\rangle$$

demuestran

Aplicaciones sucesivas de las reglas de conmutación que un vector base del

espacio de Hilbert tiene norma negativa o positiva pero no nula, y además es negativa cuando el n° de operadores  $a_s^{*(2)}$  y  $b_s^{(2)}$  es impar. Poniendo  $\eta$  de la forma:

$$\eta = \exp \left[ i\pi \int \frac{d^3k}{k_0} [ a_{(r)}^{(2)*} a_{(r)}^{(2)} - b_{(r)}^{(2)*} b_{(r)}^{(2)} ] \right]$$

como  $\int \frac{d^3k}{k_0} a_r^{(2)*} a_r^{(2)}$  es el operador n° de veces que están aplicados operadores del tipo  $a_r^{*(2)}$  sobre el vacío (y lo mismo para  $b_r^{(2)}$ ), entonces  $\eta$  vale 1 si dicho número es par y -1 si es impar por lo cual la métrica

$$\langle \Omega' | \eta | \Omega \rangle$$

resulta definida positiva Q.E.D.

Con esto hemos terminado las consideraciones derivadas del uso de la métrica indefinida; para la determinación de la invariancia que debe satisfacer la teoría.

En las próximas secciones construiremos la interacción invariante entre un campo vectorial real y el campo espinorial. El campo vectorial puede verse como el campo electromagnético, sin embargo no supondremos invariancia de medida de  $2^a$  especie ni anulación de la masa. Empezamos mostrando en la próxima sección que la invariancia respecto a  $\eta$  implica que la interacción sea mínima<sup>(4)</sup> cuando se la aplica a la matriz S.

## II.2 Relación con el principio de interacción mínima

Si una teoría es invariante respecto a una cierta transformación entonces la matriz S también lo es. Para un proceso en el que interviene una sola partícula entrante y una saliente de cada campo, el elemento de matriz S sea del tipo :

$$\bar{\Psi} M \psi$$

donde  $\Psi$  y  $\psi$  son los tensores de polarización y M es una matriz en el espacio de las  $\gamma$ .

La transformación  $\eta$  se refleja en una transformación de  $\Psi$  y  $\psi$  (ver II.1).

$$\psi^T = (P-Q)\psi \quad ; \quad \Psi^T = (P-Q)\Psi$$

donde

$$P = \frac{m+\not{x}}{2m} \quad Q = \frac{m-\not{x}}{2m}$$

Si la matriz S es invariante:

$$\bar{\Psi}^T M \psi^T = \bar{\Psi} M \psi$$

es decir :

$$\bar{\Psi} (\bar{P}-\bar{Q}) M (P-Q) \psi = \bar{\Psi} M \psi$$

como  $\Psi$  y  $\psi$  son tensores cualesquiera :

$$(\bar{P}-\bar{Q}) M (P-Q) = M$$

y como  $P+Q=1$ :

$$(\bar{P}-\bar{Q}) M (P-Q) = (\bar{P}+\bar{Q}) M (P+Q)$$

luego :

$$-\bar{P} M Q - \bar{Q} M P = P M Q + Q M P$$

$$\bar{P} M Q + \bar{Q} M P = 0$$

Multiplicando a la derecha por  $\bar{P}$  y recordando que  $\bar{P}P = \bar{P}$  y  $PQ = 0$ ; obtenemos:

$$\bar{Q}MP = \bar{P}MQ = 0$$

Este resultado es exactamente el que implica el principio de interacción mínima<sup>(4)</sup> para una sola partícula entrante y saliente.

Consideremos ahora el caso de 2 partículas entrantes y 2 salientes. Un razonamiento análogo al anterior nos lleva a que

$$\begin{aligned} \bar{P}\bar{P}MPQ &= \bar{P}\bar{P}MQP = \bar{P}\bar{Q}MPQP = \bar{Q}\bar{P}MPQP = 0 \\ \bar{Q}\bar{Q}MQP &= \bar{Q}\bar{Q}MPQ = \bar{Q}\bar{P}MQQ = \bar{P}\bar{Q}MQQ = 0 \end{aligned}$$

La 1a. línea es equivalente a lo exigido por el principio de interacción mínima, en cambio la 2a. es un requisito adicional. La invariancia respecto a la transformación  $\eta$  por lo tanto incluye (pero no es equivalente) al principio de interacción mínima en el sentido que si la matriz  $S$  es invariante entonces es mínima.

Pasar ahora de considerar la invariancia de la matriz  $S$  a la invariancia de la teoría puede parecer trivial. Sin embargo no es así pues al considerar la matriz  $S$  se transforman estados asintóticos que ocurren en  $t = \pm \infty$ , instantes en los que la constante de acoplamiento, por la hipótesis de anulación adiabática, se supone cero. Los estados se comportan como estados libres y en ese caso la forma de la transformación  $\eta$  es perfectamente conocida. En cambio para determinar si la teoría es invariante necesitamos conocer la forma de  $\eta$  en instantes en que la constante de acoplamiento no se anula, y esa forma depende de la interacción. Resolvemos esta cuestión en el apéndice A mediante el artificio de suponer que la constante de acoplamiento puede ser tratada como si fuera función del tiempo (es decir como un campo externo)<sup>\*</sup>, entonces conoceremos el campo transformado en función del campo sin trans-

(\*) Comparar con Bogoliubov<sup>(19)</sup> que utiliza el mismo artificio para formular el principio de causalidad.



formar en los intervalos de tiempo en que la constante de acoplamiento sea nula.

$$\psi^T = \frac{i\partial}{m} \psi \quad (\text{en los intervalos de tiempo en que } e = 0)$$

Y ahora suponiendo la invariancia respecto a dicha transformación (cuya expresión sólo conocemos en ciertos intervalos de tiempo) vamos a determinar totalmente la forma de la interacción y más aún encontrar la expresión de  $\eta$  en cualquier instante de tiempo. Todo esto lo haremos en el apéndice A, en cambio en la próxima sección mostraremos que la teoría así obtenida es efectivamente invariante.

### II.3 Demostración de la invariancia de la teoría

Obtenidas ya las formas del lagrangiano y de la transformación (A. (3) y (4)) es obvio que no podemos afirmar que la teoría hallada sea efectivamente invariante. Podría suceder, por ejemplo, que con las restricciones impuestas sobre el lagrangiano no existiera ninguna teoría invariante, y que hubiera que suponer términos de mayor grado en  $A_\mu$  o en  $\psi$  para encontrar alguna teoría consistente. Sin embargo vamos a demostrar que la teoría que se deduce de :

$$\mathcal{L} = -m^2 \bar{\psi} \psi + \psi (\vec{\partial} + ieA) (\vec{\partial} - ieA) \psi$$

mediante el método de cuantificación canónico no sólo es invariante respecto a  $\eta$  sino también respecto a un grupo continuo, conexo con la unidad, de transformaciones una de las cuales es  $\eta$  :

$$T: \quad \psi^T = \left[ e^{i\varepsilon} \frac{m - i(\vec{\partial} - ieA)}{2m} + e^{i\mu} \frac{m + i(\vec{\partial} - ieA)}{2m} \right] \psi$$

Como sigue siendo una transformación que mezcla  $\Psi$  y  $\partial_0\Psi$  hay que agregar:

$$\frac{\partial - ieA}{m} \Psi^T = \left[ e^{i\varepsilon} \frac{(\partial - ieA) + im}{2m} + e^{i\mu} \frac{(\partial - ieA) - im}{2m} \right] \Psi$$

Para lo que sigue conviene expresar T de otra manera. Llamando

$$P = \frac{m + i(\partial - ieA)}{2m} \quad Q = \frac{m - i(\partial - ieA)}{2m}$$

es obvio que P y Q cuando actúan sobre campos que satisfacen las ecuaciones de movimiento que se deducen del lagrangiano  $\mathcal{L}$  son operadores de proyección, es decir :

$$P P = P \quad ; \quad Q Q = Q \quad ; \quad P Q = 0$$

Entonces;

$$T: \quad \Psi^T = [e^{i\varepsilon} P + e^{i\mu} Q] \Psi = e^{i\frac{\varepsilon+\mu}{2}} \left[ \cos\left(\frac{\varepsilon-\mu}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\varepsilon-\mu}{2}\right) (P - Q) \right] \Psi$$

llamando  $\frac{\varepsilon+\mu}{2} = \lambda$  ;  $\frac{\varepsilon-\mu}{2} = \eta$  resulta:

$$\begin{aligned} \Psi^T &= e^{i\lambda} [\cos\eta - i \operatorname{sen}\eta (P - Q)] \Psi \\ &= e^{i\lambda} \left[ \cos\eta + \operatorname{sen}\eta \frac{(\partial - ieA)}{m} \right] \Psi \end{aligned}$$

Análogamente :

$$\frac{\partial - ieA}{m} \Psi^T = e^{i\lambda} \left[ \cos\eta \frac{\partial - ieA}{m} - \operatorname{sen}\eta \right] \Psi$$

La transformación resulta por consiguiente un producto de una transformación que depende sólo de un parámetro y la transformación de medida usual. Podemos suponer entonces que  $\lambda = 0$  y reducirnos a estudiar :

$$T' \left\{ \begin{aligned} \Psi^T &= \left[ \cos\eta + \operatorname{sen}\eta \frac{\partial - ieA}{m} \right] \Psi \\ \frac{\partial - ieA}{m} \Psi^T &= \left[ \cos\eta \frac{\partial - ieA}{m} - \operatorname{sen}\eta \right] \Psi \end{aligned} \right.$$

Llamaremos invariancia de medida generalizada (I.M.G.) a la transformación  $T'$  ( $\sigma$  T).....

El lagrangiano transformado, es decir aquel lagrangiano del cual se deducen las ecuaciones de movimiento y las reglas de conmutación correctas para los campos transformados, no se halla reemplazando simplemente  $\Psi$  y  $\partial_0\Psi$  en función de  $\Psi^T$  y  $\partial_0\Psi^T$ , justamente por que esta transformación no es una transformación de coordenadas. En cambio como la transformación no depende explícitamente del tiempo el hamiltoniano transformado sí se obtiene reemplazando  $\Psi$  y  $\dot{\Psi}$  en función de  $\Psi^T$  y  $\dot{\Psi}^T$  o más correctamente  $\Psi$  y un impulso conjugado  $\Pi$  en función de  $\Psi^T$  y  $\Pi^T$ , es decir:

$$\mathcal{H}^T(\Psi^T, \Pi^T) = \mathcal{H}(\Psi(\Psi^T, \Pi^T), \Pi(\Psi^T, \Pi^T))$$

Luego si la dependencia funcional de  $\mathcal{H}^T$  respecto de  $\Psi^T$  y  $\Pi^T$  es la misma que la de  $\mathcal{H}$  respecto a  $\Psi, \Pi$  entonces la teoría es invariante.

Otra posible manera de demostrar que la teoría es I.M.G. sería ver si las ecuaciones de movimiento y las reglas de conmutación para  $\Psi$  y  $\Psi^T$  son las mismas. De esta forma nos vemos obligados a cuantificar detalladamente la teoría.

Del lagrangiano obtenemos las ecuaciones para  $\Psi$  y  $\bar{\Psi}$  resulta:

$$\begin{cases} [(\not{\partial} - ieA)^2 + m^2] \Psi = 0 \\ \int \bar{\Psi} [(\not{\partial} + ieA)^2 + m^2] = 0 \end{cases}$$

Para obtener la ecuación para el campo electromagnético hay que sumarle :

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2$$

la ecuación para  $A_\mu$  resulta:

$$\square^2 A_\mu = ie \bar{\Psi} [(\not{\partial} + ieA) \gamma_\mu - \gamma_\mu (\not{\partial} - ieA)] \Psi$$

que las ecuaciones para el espinor son invariantes se demuestra como sigue:

$$[(\not{\partial} - ieA)^2 + m^2] \Psi = 0 \Rightarrow [e^{iE} P + e^{i\mu} Q] [(\not{\partial} - ieA)^2 + m^2] \Psi = 0$$

$$[(\not{\partial} - ieA)^2 + m^2] [e^{iE} P + e^{i\mu} Q] \Psi = 0$$

$$[(\not{\partial} - ieA)^2 + m^2] \Psi^T = 0$$

Además para la ecuación del campo electromagnético basta demostrar que:

$$j_{\mu}(\Psi, \bar{\Psi}) = j_{\mu}(\Psi(\Psi^{\tau}, \partial_0 \Psi^{\tau}), \bar{\Psi}(\bar{\Psi}^{\tau}, \partial_0 \bar{\Psi}^{\tau})) = j_{\mu}^{\star}(\Psi^{\tau}, \bar{\Psi}^{\tau})$$

En efecto :

$$\begin{aligned} (ie)^{-1} j_{\mu} &= \bar{\Psi} (\overleftrightarrow{\partial} + ieA) \delta_{\mu} \Psi - \bar{\Psi} \delta_{\mu} (\overleftrightarrow{\partial} - ieA) \Psi = \\ &= -\bar{\Psi}^{\tau} (\cos \eta + \text{sen} \eta \frac{\overleftrightarrow{\partial} + ieA}{m}) \delta_{\mu} m (\cos \eta \frac{\overleftrightarrow{\partial} - ieA}{m} - \text{sen} \eta) \Psi^{\tau} + \\ &\quad + \bar{\Psi}^{\tau} (\cos \eta \frac{\overleftrightarrow{\partial} + ieA}{m} - \text{sen} \eta) m \delta_{\mu} (\cos \eta + \text{sen} \eta \frac{\overleftrightarrow{\partial} - ieA}{m}) \Psi^{\tau} = \\ &= \bar{\Psi}^{\tau} (\overleftrightarrow{\partial} + ieA) \delta_{\mu} \Psi^{\tau} - \bar{\Psi}^{\tau} \delta_{\mu} (\overleftrightarrow{\partial} - ieA) \Psi^{\tau} \end{aligned}$$

Las reglas de conmutación las obtenemos aplicando el método canónico. Los impulsos conjugados son :

$$\pi_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_{\alpha}} = \bar{\Psi} (\overleftrightarrow{\partial} + ieA) \delta_{\alpha}^0 \quad ; \quad \bar{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\Psi}}} = \delta^0 (\overleftrightarrow{\partial} - ieA) \Psi$$

Para tiempos iguales :

$$\begin{aligned} \{\Psi_{\alpha}, \Psi_{\beta}\} &= \{\bar{\Psi}_{\alpha}, \bar{\Psi}_{\beta}\} = \{\bar{\Psi}_{\alpha}, \Psi_{\beta}\} = 0 \\ \{\pi_{\alpha}, \pi_{\beta}\} &= \{\bar{\pi}_{\alpha}, \bar{\pi}_{\beta}\} = \{\pi_{\alpha}, \bar{\pi}_{\beta}\} = 0 \\ \{\Psi_{\alpha}, A_{\mu}\} &= \{\Psi_{\alpha}, \partial_0 A_{\mu}\} = \{\bar{\Psi}_{\alpha}, A_{\mu}\} = \{\bar{\Psi}_{\alpha}, \partial_0 A_{\mu}\} = 0 \\ \{\pi_{\alpha}, A_{\mu}\} &= \{\pi_{\alpha}, \partial_0 A_{\mu}\} = \{\bar{\pi}_{\alpha}, A_{\mu}\} = \{\bar{\pi}_{\alpha}, \partial_0 A_{\mu}\} = 0 \\ \{\pi_{\alpha}, \Psi_{\beta}\} &= i \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned}$$

Hallando el complejo conjugado de la última ecuación resulta :

$$\{\pi_{\alpha}^{\star}, \Psi_{\beta}^{\star}\} = -i \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

como  $\bar{\pi} = \delta^0 \pi^{\star}$  y  $\bar{\Psi} = \Psi^{\star} \delta_0$

$$\begin{aligned} \{\bar{\pi}_{\alpha}, \bar{\Psi}_{\beta}\} &= \delta_{\alpha\varepsilon}^0 \delta_{\beta\eta}^0 \{\pi_{\varepsilon}^{\star}, \Psi_{\eta}^{\star}\} = -i \delta_{\alpha\varepsilon}^0 \delta_{\beta\eta}^0 \delta_{\varepsilon\eta} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\ \{\bar{\pi}_{\alpha}, \bar{\Psi}_{\beta}\} &= -i \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned}$$

La transformación expresada en función de  $\Psi$  y  $\Pi$  es

$$\Psi^T = \cos \eta \Psi + \operatorname{sen} \eta \frac{\gamma^0 \bar{\Pi}}{m} \quad \bar{\Psi}^T = \cos \eta \bar{\Psi} + \operatorname{sen} \eta \frac{\Pi \gamma^0}{m}$$

$$\bar{\Pi}^T = -\operatorname{sen} \eta \delta_{0m} \Psi + \cos \eta \bar{\Pi} \quad \Pi^T = \cos \eta \Pi - \operatorname{sen} \eta \bar{\Psi} \delta_{0m}$$

La invariancia de las reglas de conmutación se demuestra de la siguiente

forma :

$$\begin{aligned} \{ \Psi_\alpha^T \Psi_\beta^T \} &= \left\{ \cos \eta \Psi_\alpha + \operatorname{sen} \eta \frac{(\gamma^0 \bar{\Pi})_\alpha}{m}, \cos \eta \Psi_\beta + \operatorname{sen} \eta \frac{(\gamma^0 \bar{\Pi})_\beta}{m} \right\} = \\ &= \{ \Psi_\alpha \Psi_\beta \} \cos^2 \eta + \cos \eta \operatorname{sen} \eta \frac{(\gamma^0)_\beta \epsilon}{m} \{ \Psi_\alpha \bar{\Pi}_\epsilon \} + \end{aligned}$$

$$\cos \eta \operatorname{sen} \eta \frac{(\gamma^0)_\alpha \epsilon}{m} \{ \bar{\Pi}_\epsilon \Psi_\beta \} + \operatorname{sen}^2 \eta \frac{(\gamma^0)_\alpha \epsilon (\gamma^0)_\beta \eta}{m^2} \{ \bar{\Pi}_\epsilon \bar{\Pi}_\eta \} = 0$$

$$\begin{aligned} \{ \Psi_\alpha \bar{\Psi}_\beta^T \} &= \left\{ \cos \eta \Psi_\alpha + \operatorname{sen} \eta \frac{\delta_{\alpha\epsilon}^0 \bar{\Pi}_\epsilon}{m}, \operatorname{sen} \eta \frac{\Pi_\lambda \delta_{\lambda\beta}^0}{m} + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\Psi}_\beta \cos \eta \right\} = \end{aligned}$$

$$= \cos^2 \eta \{ \Psi_\alpha \bar{\Psi}_\beta \} + \frac{\operatorname{sen}^2 \eta}{m} \delta_{\lambda\beta}^0 \delta_{\alpha\epsilon}^0 \{ \bar{\Pi}_\epsilon \Pi_\lambda \} +$$

$$\operatorname{sen} \eta \cos \eta (\gamma^0)_\alpha \epsilon \{ \bar{\Pi}_\epsilon \bar{\Psi}_\beta \} + \frac{\cos \eta \operatorname{sen} \eta}{m} \{ \Psi_\alpha \Pi_\lambda \} \delta_{\lambda\beta}^0 =$$

$$= \frac{\cos \eta \operatorname{sen} \eta}{m} \left[ i \delta_{\alpha\lambda} \delta^3(x-x') \delta_{\lambda\beta}^0 - i \delta_{\epsilon\beta} \delta^3(x-x') \delta_{\alpha\epsilon}^0 \right] = 0$$

$$\{ \Pi_\alpha^T \Psi_\beta^T \} = \left\{ \cos \eta \Pi_\alpha - \operatorname{sen} \eta \bar{\Psi}_\epsilon \delta_{\epsilon\alpha}^0 m, \cos \eta \Psi_\beta + \operatorname{sen} \eta \frac{\delta_{\beta\lambda}^0 \bar{\Pi}_\lambda}{m} \right\} =$$

$$= \cos^2 \eta \{ \Pi_\alpha \Psi_\beta \} - \operatorname{sen}^2 \eta \{ \bar{\Psi}_\epsilon \bar{\Pi}_\lambda \} \delta_{\epsilon\alpha}^0 \delta_{\beta\lambda}^0 =$$

$$= \cos^2 \eta i \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') + \operatorname{sen}^2 \eta i \delta_{\epsilon\lambda} \delta_{\epsilon\alpha}^0 \delta_{\beta\lambda}^0 \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') =$$

$$= i \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

Los demás casos se demuestran en forma análoga.

El hamiltoniano puede hallarse por el método usual; sin considerar la parte correspondiente al campo electromagnético libre :

$$H = \int d^3x \left[ \pi \bar{\pi} + m^2 \bar{\psi} \psi + \bar{\pi} \delta_0 \delta_i \cdot \vec{\partial}^i \psi + \bar{\psi} \overleftarrow{\partial}^i \delta_i \delta_0 \bar{\pi} + \pi \delta_0 ieA \psi - \bar{\psi} ieA \delta_0 \bar{\pi} \right]$$

La transformación puede ponerse como una rotación en el espacio  $(\psi, \frac{\delta_0 \bar{\pi}}{m})$  :

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\delta_0 \bar{\pi}}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \eta & \text{sen} \eta \\ -\text{sen} \eta & \cos \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\delta_0 \bar{\pi}}{m} \end{pmatrix} ; \quad (\bar{\psi}^T, \frac{\pi \delta_0}{m}) = (\bar{\psi}, \frac{\pi \delta_0}{m}) \begin{pmatrix} \cos \eta & -\text{sen} \eta \\ \text{sen} \eta & \cos \eta \end{pmatrix}$$

A su vez el hamiltoniano puede ponerse :

$$H = \int d^3x \mathcal{H}$$

donde :

$$\mathcal{H} = m^2 (\bar{\psi}, \frac{\pi \delta_0}{m}) \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\delta_0 \bar{\pi}}{m} \end{pmatrix} + m (\bar{\psi}, \frac{\pi \delta_0}{m}) \begin{pmatrix} 0 & \delta_i (\frac{\overleftarrow{\partial}^i - \partial^i}{2}) - ieA \\ -\delta_i (\frac{\overleftarrow{\partial}^i - \partial^i}{2}) + ieA & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\delta_0 \bar{\pi}}{m} \end{pmatrix}$$

con lo cual la invariancia del hamiltoniano resulta obvia.

Con esto queda doblemente demostrado que la teoría es invariante respecto a la transformación de medida generalizada.

#### II.4 Obtención de la matriz S

El hamiltoniano de interacción se obtiene de la manera usual en los casos en que la interacción incluye derivadas temporales <sup>(20)</sup>

$$\mathcal{H}_{int} = m (\bar{\psi}_{int}, \frac{\pi_{int} \delta_0}{m}) \begin{pmatrix} 0 & -ieA_{int} \\ ieA_{int} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{int} \\ \frac{\delta_0 \bar{\pi}_{int}}{m} \end{pmatrix} =$$

$$\mathcal{H}_{int} = \Pi_{int} \delta_0 ieA_{int} \Psi_{int} - \bar{\Psi} ieA_{int} \delta_0 \Pi_{int}$$

Teniendo en cuenta que :

$$\bar{\Pi}_{int} = \delta_0 \overleftarrow{\partial} \Psi_{int}$$

$$\Pi_{int} = \bar{\Psi}_{int} \overrightarrow{\partial} \delta_0$$

Resulta que :

$$\mathcal{H} = \bar{\Psi}_{int} \overrightarrow{\partial} ieA_{int} \Psi_{int} - \bar{\Psi}_{int} ieA_{int} \overrightarrow{\partial} \Psi_{int}$$

Aplicando el teorema de Lee y Yang<sup>(21)</sup> resulta que la matriz S obtenible a partir de ese hamiltoniano se puede también hallar a partir de :

$$\mathcal{H}' = \bar{\Psi}' \overleftarrow{\partial} ieA \Psi' - \bar{\Psi}' ieA \overrightarrow{\partial} \Psi' - e^2 A^2 \bar{\Psi} \Psi$$

donde los propagadores son :

$$\overline{\Psi'(x) \bar{\Psi}'(x')} = \frac{1}{2} \Delta_F(x-x')$$

$$(\overleftarrow{\partial} \Psi'(x)) \bar{\Psi}'(x') = \frac{1}{2} \overleftarrow{\partial} \Delta_F(x-x')$$

Luego los vértices y propagadores son:

$$\not{p}' \gamma_\mu + \gamma_\mu \not{p} \qquad \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \qquad -2g_{\mu\nu}$$

Coincide totalmente con la matriz S obtenida en<sup>(4)</sup>. Es decir en este caso particular el principio de interacción mínima y la I.M.G. si bien no equivalentes, llevan al mismo resultado.

En las próximas secciones veremos que lo mismo sucede para la electrodinámica de mesones vectoriales cuando el campo electromagnético es externo. En

cambio no sucede lo mismo cuando el campo electromagnético incluye el campo propio del meson vectorial.

### II.5. Equivalencia con la teoría de Dirac

Hacemos una transformación :

$$\Psi_1 = \frac{m - i(\not{\partial} - ieA)}{2m} \Psi$$

$$\Psi_2 = \frac{m + i(\not{\partial} - ieA)}{2m} \Psi$$

como es canónica pues  $\Psi_1$  es función de  $\Psi$  y  $\partial_0 \Psi$  la expresamos en función de  $\Psi$  y  $\pi$

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \frac{\delta_0 \pi}{m} \end{pmatrix}$$

Invirtiendo la transformación y reemplazando en el hamiltoniano :

$$\mathcal{H} = 2m^2 (\bar{\Psi}_1 \bar{\Psi}_2) \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} + 2m (\bar{\Psi}_1 \bar{\Psi}_2) \begin{pmatrix} \gamma_i^{\leftarrow} \frac{\partial^i - \vec{\partial}^i}{2} - ieA & 0 \\ 0 & \gamma_i^{\leftarrow} \frac{\partial^i - \vec{\partial}^i}{2} - ieA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$$

Comparando con la teoría usual<sup>(14)</sup> vemos que podemos interpretar este resultado como implicando la existencia de 2 campos espinoriales independientes y de la misma carga interactuando con el campo electromagnético.

Con esto terminamos la discusión de este ejemplo. En la próxima sección estudiamos el campo vectorial real.



### III. CAMPO VECTORIAL REAL

#### III.1. Campos libres

Consideremos ahora el campo vectorial masivo real  $A_\mu(x)$ . El lagrangiano del campo libre se puede poner en la forma canónica indicada en I.3.

$$\mathcal{L} = \frac{m^2}{2} A_\nu A^\nu - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu$$

La cuantificación canónica usual nos lleva a las reglas de conmutación:

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = -i g_{\mu\nu} \Delta(x-x')$$

Haciendo el desarrollo en serie de Fourier aparecen los operadores de creación y destrucción de una partícula en estados de impulso definido :

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{k_0} [a_\mu(k) e^{-ik \cdot x} + a_\mu^\dagger(k) e^{ik \cdot x}]$$

$$\Rightarrow [a_\mu(k), a_\nu^\dagger(k')] = -g_{\mu\nu} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') k_0$$

Nos reducimos ahora al subespacio de estados de una partícula para identificar la representación usada :

$$|\text{estado de 1 partícula}\rangle = \int \phi^\mu(k) a_\mu^\dagger(k) |0\rangle \frac{d^3k}{k_0}$$

En una transformación de Poincaré  $x' = \Lambda x + a$  el campo  $A_\mu(x)$  se transforma :

$$A_\mu^\top(x) = \Lambda_\mu^\nu A_\nu(\Lambda^{-1}(x-a))$$

lo cual induce :

$$a_\mu^\top(k) = \Lambda_\mu^\nu a_\nu(\Lambda^{-1}k) e^{-ik \cdot a}$$

$$a_\mu^{\top\dagger}(k) = \Lambda_\mu^\nu a_\nu^\dagger(\Lambda^{-1}k) e^{ik \cdot a}$$

$$\phi^{\mu\top}(k) = \Lambda_\nu^\mu \phi^\nu(\Lambda k) e^{i\Lambda k \cdot a}$$

La métrica manifiesta del subespacio es :

$$\begin{aligned} (\Psi, \Phi) &= \int \frac{d^3k}{k_0} \frac{d^3k'}{k'_0} \langle 0 | a_\lambda(k) \Psi^{\lambda*}(k) \Phi^\mu(k') a_\mu^\dagger(k') | 0 \rangle = \\ &= - \int \frac{d^3k}{k_0} \Psi^{\lambda*}(k) \Phi_\lambda(k) \end{aligned}$$

Nuevamente como en el campo espinorial la realización es manifiestamente covariante y pseudounitaria. Busquemos ahora el tensor de la métrica definido positivo: por invariancia relativista será del tipo :

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int \frac{d^3k}{k_0} \Psi_\lambda^*(k) \left[ \alpha \frac{k^\lambda k^\mu}{m^2} + \beta g^{\lambda\mu} \right] \Phi_\mu(k)$$

Definimos una transformación de Lorentz  $h$  tal que :

$$k^\lambda = h^\lambda_\nu \hat{p}^\nu \quad \text{donde} \quad \hat{p} = (0, 0, 0, m)$$

entonces:

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int \frac{d^3k}{k_0} (\Psi_\lambda(k) h^\lambda_\nu)^* \left[ \alpha \frac{\hat{p}^\nu \hat{p}^\mu}{m^2} + \beta g^{\nu\mu} \right] (h^\eta_\mu \Phi_\eta)$$

La matriz de 4 x 4 dentro del corchete será :

$$\begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + \beta \end{bmatrix}$$

luego para que la métrica sea definida positiva debe ser :

$$\beta < 0 ; \quad \alpha + \beta > 0$$

Obtenemos por fin como operador de la métrica :

$$-\lambda_1 \frac{k^\eta k^\mu}{m^2} + \lambda_2 \left( g^{\eta\mu} - \frac{k^\eta k^\mu}{m^2} \right)$$

con ambos  $\lambda$  positivo o alguno nulo.

La transformación inducida sobre  $a_\mu^+(k)$  es :

$$[a_\mu^+(k)]^T = \left[ -\lambda_1 \frac{k_\mu k^\lambda}{m^2} + \lambda_2 \left( g_\mu^\lambda - \frac{k_\mu k^\lambda}{m^2} \right) \right] a_\lambda^+(k)$$

En el caso del campo espinorial restringimos todavía más la transformación exigiendo que las reglas de conmutación fueran invariantes. En ese caso por el teorema de unicidad de los operadores  $a_\mu^{(22)}$  la transformación es equivalente a un cambio de base unitario en el espacio de Hilbert y por consiguiente mantiene la estructura de éste. Hay entonces un operador  $\eta$  unitario tal que :

$$[a_\mu^+(k)]^T = \eta a_\mu^+(k) \eta^{-1} = \left[ g_\mu^\nu - 2 \frac{k_\mu k^\nu}{m^2} \right] a_\nu^+(k) \quad (1a)$$

$$[a_\mu(k)]^T = \eta a_\mu(k) \eta^{-1} = \left[ g_\mu^\nu - 2 \frac{k_\mu k^\nu}{m^2} \right] a_\nu(k) \quad (1b)$$

La simetría implica entonces la existencia de  $L_4^{un}$  observable que se conserva.

Para valores de  $\lambda$  cualesquiera no nulos se puede encontrar también un operador  $\eta$ , ahora no unitario tal que (1a) se satisfaga pero en cambio de (1b) aparece:

$$[a_\mu(k)]^T = (\eta^{-1})^+ a_\mu(k) \eta^+$$

Para encontrar el operador  $\eta$  empezamos definiendo :

$$a_\mu^{+(1)}(k) = \frac{k_\mu k^\lambda}{m^2} a_\lambda^+(k) \quad ; \quad a_\mu^{+(2)}(k) = \left( g_\mu^\lambda - \frac{k_\mu k^\lambda}{m^2} \right) a_\lambda^+(k)$$

entonces la transformación se expresa :

$$[a_\mu^{+(1)}(k)]^T = -\lambda_1 a_\mu^{+(1)}(k)$$

$$[a_\mu^{+(2)}(k)]^T = \lambda_2 a_\mu^{+(2)}(k)$$

Definiendo  $N_1 = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{k_0} a_\mu^{+(1)} a^{\mu(1)}$  se puede ver en forma similar al caso espinorial que:

$$e^{\alpha, N_1} a_\mu^{+(1)} e^{-\alpha, N_1} = e^{\alpha, N_1} a_\mu^{+(1)}$$

$$e^{\alpha, N_1} a_\mu^{+(2)} e^{-\alpha, N_1} = a_\mu^{+(2)}$$

haciendo lo mismo con  $N_2 = \int \frac{d^3 k}{k_0} a_{\lambda}^{+(2)} a_{\lambda}^{(2)}$ ;

$$\exp[\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2] a_{\mu}^{+(1)} \exp - [\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2] = e^{\alpha_1} a_{\mu}^{+(1)}$$

$$\exp[\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2] a_{\mu}^{+(2)} \exp - [\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2] = e^{\alpha_2} a_{\mu}^{+(2)}$$

luego eligiendo  $\alpha_1 = \log |\lambda_1| + i\pi$  y  $\alpha_2 = \log |\lambda_2|$  obtenemos el operador buscado.

El espacio de Hilbert puede ser generado por aplicación sobre el vacío de operadores del tipo  $a_{\lambda}^{+(1)}$  y  $a_{\lambda}^{+(2)}$ . Supongamos  $|\Omega\rangle$  un estado en el que hay  $n$  operadores del tipo (1) y  $m$  del tipo (2). La aplicación del operador resulta :

$$\exp[\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2] |\Omega\rangle = (-\lambda_1)^n \lambda_2^m |\Omega\rangle$$

A partir de esta fórmula es inmediato ver que la nueva métrica es definida positiva pues la norma de los estados base en la métrica indefinida es negativa sólo cuando el n° de operadores de creación del tipo (1) es impar pero en ese caso justamente la fórmula anterior muestra que la transformación cambia el signo del estado  $|\Omega\rangle$  y por consiguiente :

$$\langle \Omega | \eta | \Omega \rangle > 0$$

Vemos entonces que en cuanto a resolver los problemas derivados de la métrica el operador  $\eta$  no necesita ser unitario. La única justificación para restringirlo en el caso de campos complejos es que las teorías que se pueden construir exigiendo invariancia respecto a un  $\eta$  no unitario son muy artificiales. Esto lo discutiremos en detalle en la sección siguiente sobre campos vectoriales complejos.

El caso en que alguno de los  $\lambda$  sea nulo corresponde como se puede ver en el subespacio de estados de una partícula, a una proyección del espacio de Hilbert sobre una parte de él. En este caso por ser la transformación singular y no tener inversa no hay  $\eta$  tal que (1a) se satisfaga. Pero en cambio se puede obviamente considerar una

sucesión de  $\eta$  tal que en el límite  $\lambda_1 \rightarrow 0$  ó  $\lambda_2 \rightarrow 0$  generen la transformación singular.

En este caso la métrica es degenerada y como explicamos en la sección I los estados nulos (de norma nula y ortogonales a todos los demás) no influyen en los valores de expectación de ningún observable y por consiguiente aparece automáticamente una invariancia de medida más general. Consideremos para concretar  $\lambda_1 = 0$ , una teoría invariante respecto a :

$$a_{\mu}^{+\tau}(k) = \left[ g_{\mu}^{\nu} - \frac{k_{\mu} k^{\nu}}{m^2} \right] a_{\nu}^{+}(k) \quad (2a)$$

es automáticamente invariante respecto a una transformación más general :

$$\Phi_{\mu}^{\tau}(k) = \Phi_{\mu}(k) + k_{\mu} \Lambda(k) \quad (2b)$$

donde  $\Phi_{\mu}(k)$  es la función de onda de una partícula y  $\Lambda(k)$  es arbitraria. La semejanza entre este caso y el electromagnetismo es notable\*.

Al otro caso  $\lambda_2 = 0$

$$a_{\mu}^{+\tau}(k) = \frac{k_{\mu} k^{\lambda}}{m^2} a_{\lambda}^{+}(k) \quad (3a)$$

---

\* Parecen ser Ogeivetskui y Polubarinov<sup>(23)</sup> los primeros que notaron la posibilidad de encontrar una invariancia de medida para campos masivos del tipo (2b). Sin embargo no creemos correcta la conclusión que ellos obtienen de esa posibilidad: que la existencia de una invariancia de medida no tenga relación alguna con la anulación de la masa. En el caso de campos masivos la invariancia reemplaza la condición subsidiaria, en cambio para  $m = 0$  hay que plantear ambas cosas.

corresponde una invariancia del tipo :

$$\Phi_{\mu}^T(k) = \Phi_{\mu}(k) + \left( g_{\mu}^{\nu} - \frac{k_{\mu} k^{\nu}}{m^2} \right) \Lambda_{\nu}(k) \quad (3b)$$

Por último, como explicamos en la sección I, podemos usar condiciones de vínculo que eliminen del espacio de Hilbert los estados de norma negativa. De la estructura de éste se deduce que condiciones del tipo:

$$N_1 |\Omega\rangle = 0 \quad (4a)$$

o bien 
$$N_2 |\Omega\rangle = 0 \quad (5a)^{(*)}$$

son suficientes. Sin embargo vamos a usar condiciones más fuertes, pero lineales en los campos  $A_{\mu}(x)$  que impliquen (4a) o (5a).

$$(\partial^{\mu} A_{\mu})^{-} |\Omega\rangle = 0 \quad (4b)$$

$$\left[ \left( g_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial_{\mu} \partial^{\lambda}}{m^2} \right) A_{\lambda} \right]^{-} |\Omega\rangle = 0 \quad (5b)^{(*)}$$

---

(\*)

Tanto (5a) como (5b) eliminan en realidad los estados de norma positiva. Sin embargo esto no produce problemas pues basta con cambiar el signo del lagrangiano. Lo mismo sucede con (3a) : la métrica deviene semidefinida negativa, en efecto :

$$\langle \Psi, \varphi \rangle = - \int \frac{d^3 k}{k_0} \frac{(k_{\lambda} \Psi^{\lambda})^* k_{\mu} \varphi^{\mu}}{m^2}$$

Recapitulando hemos encontrado cinco maneras distintas de formular una teoría de mesones vectoriales reales : la 1a. (fórmulas 1a, 1b) exigir que la teoría sea invariante respecto a la transformación unitaria

$$A_{\mu}^{\tau}(x) = \left[ g_{\mu}^{\lambda} + 2 \frac{\partial_{\mu} \partial^{\lambda}}{m^2} \right] A_{\lambda}(x)$$

en este caso los cuantos del campo configuran dos sistemas elementales (ver I.2) pues el espacio de Hilbert de los estados de una partícula físicamente significativos es reducible.

La 2a. y 3a. manera de formular la teoría (ver fórmulas (2) y (3)) implica una invariancia de medida generalizada que proyecta el espacio de Hilbert. La discusión de la sección I.2, nos muestra que estamos usando la invariancia de medida para reducir el espacio, por consiguiente los cuantos forman un sistema elemental de partículas de espín 1 ó espín 0 según que la transformación sea (2) ó (3). Como el generador de la transformación es el límite de una función de  $N_1$  ó  $N_2$  entonces la teoría tiene que ser tal que se conserve el operador respectivo.

La 4a. y 5a. manera (ver form. (4) y (5)) se basa en el uso de condiciones subsidiarias que nuevamente reducen el espacio. Son equivalentes por consiguiente a la 3a. y 2a. manera respectivamente; sólo un sistema elemental de partículas es significativo.

### III.2. Introducción de la interacción

Obtenidas las expresiones de las posibles simetrías, o condiciones subsidiarias, que debe haber en la teoría para campos libres, se plantea ahora el problema de construir la interacción y encontrar la expresión de la simetría en presencia de ésta. El problema es complejo, tal como lo vimos para el campo espinorial, a menos que se estudie un caso particularmente simple. Vamos a tratar aquí la interacción

directa entre el campo vectorial y una corriente que no depende del campo  $A_\mu(x)$ . En este caso la expresión de las simetrías y condiciones subsidiarias no dependen de la interacción.

El lagrangiano es :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu - j_\mu A^\mu$$

la ecuación de movimiento resulta :

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) A_\nu(x) = j_\nu(x)$$

Tratando ordenadamente los 5 métodos distintos que habíamos hallado en la sección anterior vemos que implican los 3 primeros la invariancia de las ecuaciones de movimiento respecto a :

$$1^\circ) A_\mu^T(x) = A_\mu(x) + 2 \frac{\partial_\mu \partial^\nu}{m^2} A_\nu(x)$$

$$2^\circ) A_\mu^T(x) = A_\mu(x) + \frac{\partial_\mu \partial^\nu}{m^2} A_\nu(x)$$

$$3^\circ) A_\mu^T(x) = -\frac{\partial_\mu \partial^\nu}{m^2} A_\nu$$

que implican para la corriente :

$$1^\circ) \text{ y } 2^\circ) \quad \partial^\nu j_\nu(x) = 0$$

$$3^\circ) \quad j^\mu(x) = -\frac{\partial^\mu \partial_\lambda}{m^2} j^\lambda(x)$$

El 4° y 5° método requieren la conservación de las condiciones subsidiarias que implican respectivamente :

$$4^\circ) (\partial_\mu A^\mu)^- |\Omega\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0$$



$$5^{\circ}) \left[ (g^{\lambda\mu} + \frac{\partial^{\lambda}\partial^{\mu}}{m^2}) A_{\mu} \right]^{-1} |\Omega\rangle = 0 \Rightarrow j^{\lambda}(x) = -\frac{\partial^{\lambda}\partial^{\mu}}{m^2} j^{\mu}(x)$$

La posibilidad de separar la parte de frecuencia negativa en los operadores  $(\partial^{\lambda}A_{\mu})$  y  $(g^{\lambda\mu} + \frac{\partial^{\lambda}\partial^{\mu}}{m^2})A_{\mu}$  se debe a que las condiciones respectivas sobre las corrientes implican que satisfacen ecuaciones de Klein - Gordon sin fuente.

Comparando con la discusión del último párrafo de la sección anterior concluimos que si queremos que entre los cuantos haya partículas de espín 1 (1<sup>o</sup>) 2<sup>o</sup>) y 4<sup>o</sup>) es necesario y suficiente pedir que la corriente que interactúa con el campo vectorial se conserve (\*).

En cambio si queremos describir sólo cuantos de espín 0 la condición sobre la fuente de las partículas es que  $j_{\mu}(x) = \frac{-\partial_{\mu}\partial^{\lambda}j^{\lambda}}{m^2}$ . Hay una sola componente significativa de la corriente, la longitudinal, que es función de la cuatridivergencia  $\partial^{\lambda}j^{\lambda}$ . Por otra parte la condición hallada implica :

$$(\square^2 + m^2) \partial^{\mu}j_{\mu} = 0$$

Luego podemos verlo como un campo libre escalar. Llamando  $\Psi = \partial^{\mu}A_{\mu}$  y  $\phi = \partial^{\mu}j^{\mu}$  resulta:

$$\begin{cases} (\square^2 + m^2) \Psi = \phi \\ (\square^2 + m^2) \phi = 0 \end{cases}$$

(\*) Este resultado coincide nuevamente con el obtenido por Ogeievstku y Polubarinov<sup>(23)</sup>.

Vemos que hay una relación entre la existencia de mesones vectoriales y la conservación de la corriente, inversa a la hallada por Yang y Mills<sup>(25)</sup>. Estos últimos partiendo de cualquier simetría la generalizaban reemplazando los parámetros por funciones arbitrarias de x; de allí deducían la necesidad de la existencia de mesones vectoriales acoplados con las corrientes que se conservan. En cambio aquí la existencia de mesones vectoriales implica la simetría. Es interesante ver que desde el punto de vista del programa de cuantificar todos los campos usando sólo la ecuación de Klein - Gordon, la asignación de un momento magnético normal al electrón y la conservación de la corriente fuente de mesones vectoriales se deben al mismo principio.

Es decir una teoría de mesones escalares en interacción. Podemos eliminar la ecuación para  $\phi$  mediante un artificio en la condición subsidiaria. En ausencia de interacción la condición

$$(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)^- | \Omega \rangle = 0 \quad (6)$$

implica evidentemente la tratada :

$$\left[ \left( g^{\mu\lambda} - \frac{\partial^\mu \partial^\lambda}{m^2} \right) A_\lambda \right]^+ | \Omega \rangle = 0$$

pero esto no es cierto cuando hay interacción. Si consideramos la condición implicada por (6) sobre la corriente vemos que

$$j^\mu(x) = \partial^\mu \phi(x)$$

pero ahora el campo  $\phi$  no satisface necesariamente la ecuación de un campo libre.

Por último observamos que en todas las teorías tratadas se conserva  $N_1$  ó  $N_2$ . Esta propiedad implica cuando se la aplica a los elementos de la matriz S la minimalidad de estos en el sentido desarrollado en el trabajo<sup>(4)</sup>.

### III.3. Campo vectorial de masa nula. Electromagnetismo

Comencemos estudiando la estructura del espacio de vectores  $\Psi_\mu(p)$  (funciones de onda de una partícula). Las matrices que realizan la representación del grupo de Poincaré así como la métrica indefinida manifiesta es idéntica a la de los campos masivos. Pero en cambio, como explicamos en la sección I.2, el espacio reducible deja de ser separable. Los subespacios invariantes forman aquí una cadena:

$$\pi_0 \subset \pi_1 \subset \pi_2 \quad = \text{espacio total}$$

El subespacio  $\pi_0$  es aquel formado por los vectores longitudinales:

$$\pi_0 = \{ \Psi_\mu(p) ; \Psi_\mu(p) = p_\mu \phi(p) \}$$

la condición subsidiaria sería :

$$p_\mu \Psi_\nu - p_\nu \Psi_\mu = 0$$

El subespacio  $\mathcal{N}_1$  está formado por los vectores de cuatridivergencia nula :

$$\mathcal{N}_1 = \{ \Psi_\mu(p) ; p_\mu \Psi^\mu = 0 \}$$

Por último  $\mathcal{N}_2$  es como dijimos el espacio total.

Si deseamos dar significado físico a los vectores pertenecientes al subespacio  $\mathcal{N}_0$  entonces la condición subsidiaria será :

$$[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu]^- |\Omega\rangle = 0$$

como  $\mathcal{N}_0$  es irreducible no es necesario agregar simetrías de medida. La métrica definida positiva será :

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int \Psi^* \Phi \frac{d^3k}{k_0} \quad \text{donde} \quad \Psi_\lambda = k_\lambda \Psi ; \Phi_\lambda = k_\lambda \Phi$$

Si en cambio nos interesa  $\mathcal{N}_1$  (cuantos de espín 1) habrá que plantear una condición subsidiaria :

$$(\partial_\mu A^\mu)^- |\Omega\rangle = 0$$

y una simetría de medida, pues  $\mathcal{N}_1$  no es irreducible:

$$A_\mu^\top = A_\mu + p_\mu \Lambda$$

La métrica definida positiva es simplemente :

$$\int \Psi_\mu^* \Phi^\mu \frac{d^3k}{k_0}$$

Por último  $\mathcal{N}_2$  por supuesto no está restringido por ninguna condición subsidiaria pero en cambio incluye  $\mathcal{N}_1$  como subespacio invariante. Planteamos entonces una simetría de medida :

$$A_\mu^\top = A_\mu + B_\mu$$

donde  $B_\mu \in \mathcal{N}_1$  es decir satisface  $p^\mu B_\mu = 0$ . La métrica definida positiva resulta :

$$\int (p^\mu \Psi_\mu)^* (p^\lambda \Phi_\lambda) \frac{d^3k}{k_0}$$

Vamos a ver ahora como las 5 teorías descritas en la sección anterior, cuando se toma el límite  $m \rightarrow 0$ , reproducen los tres esquemas arriba indicados.

Empezando por los casos 4) y 5) caracterizados por las condiciones subsidiarias :

$$\begin{aligned} (\partial^\mu A_\mu)^- |\Omega\rangle &= 0 \\ \left[ \left( g^{\mu\lambda} + \frac{\partial^\mu \partial^\lambda}{m^2} \right) A_\lambda \right]^- |\Omega\rangle & \end{aligned}$$

vemos que ambas tienden a la misma condición, a pesar de que para  $m \neq 0$  describían cuantos de espín diferente. Coester demostró que la teoría obtenida por límite de (4) es equivalente a la teoría cuántica del campo electromagnético<sup>(24)</sup>. La invariancia de medida aparece automáticamente pues al restringir el espacio mediante la condición subsidiaria la métrica deviene degenerada. En efecto, volvamos a considerar el espacio de las funciones de onda  $\Psi_\mu(p)$  que cumplen la condición  $p_\mu \Psi^\mu = 0$ . La métrica es simplemente:

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int \frac{d^3k}{k_0} \Psi_\mu^* \Phi^\mu$$

evidentemente un vector  $\varphi^\mu = p^\mu \phi$  es un vector nulo pues

$$\langle \Psi, p^\mu \phi \rangle = \int \frac{d^3k}{k_0} (\Psi_\mu^* p^\mu) \phi = 0$$

Encontrado el límite del tensor de la métrica en 1) 2) y 3) cuando  $m \rightarrow 0$  vemos que nuevamente tiende a la misma teoría pero ahora los cuantos tienen espín 0. Corresponde a dar significado físico al espacio  $\pi_0/\pi_1$ . La métrica es :

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int (p_\mu \Psi^\mu)^* (p_\nu \Phi^\nu) \frac{d^3k}{k_0}$$

Por último si hacemos tender a la condición (6)  $m \rightarrow 0$  obtenemos la descripción del subespacio invariante  $\pi_0$ .

IV: ELECTRODINAMICA DE MESONES VECTORIALES

IV.1. Determinación de la transformación de medida generalizada

Vamos a considerar ahora un campo vectorial complejo cuyos cuantos tienen masa  $m$ . Empezamos como siempre considerando los campos libres para discutir la métrica del espacio de Hilbert y proponer que tipos de invariancia de medida o condición subsidiaria debe imponerse en la teoría.

Partimos del lagrangiano canónico :

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \varphi_\nu^* \partial^\mu \varphi^\nu + m^2 \varphi_\mu^* \varphi^\mu$$

Para encontrar el hamiltoniano y la expresión de la transformación en función de los impulsos canónicos va a ser más conveniente utilizar otro lagrangiano equivalente:

$$\mathcal{L}' = -(\partial_\mu \varphi_\nu^*)(\partial^\nu \varphi^\mu) - \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_\nu^* - \partial_\nu \varphi_\mu^*)(\partial^\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\mu) + m^2 \varphi_\mu^* \varphi^\mu$$

que difieren del anterior en :

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = \partial_\mu [\varphi_\nu^* \partial^\nu \varphi^\mu - \partial^\nu \varphi_\mu^* \varphi^\nu]$$

Definimos  $\pi_\mu$  como el impulso canónicamente conjugado a  $\varphi_\mu$  :

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \partial_0 \varphi_\mu} = -\partial_\nu \varphi_\nu^* g^{0\mu} - (\partial^0 \varphi_\mu^* - \partial^\mu \varphi_0^*)$$

$$\pi_\mu^* = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \partial_0 \varphi_\mu^*} = -\partial_\nu \varphi^\nu g^{0\mu} - (\partial^0 \varphi^\mu - \partial^\mu \varphi^0)$$

Las ecuaciones de movimiento serán :

$$\begin{cases} (\square^2 + m^2) \varphi_\mu = 0 \\ (\square^2 + m^2) \varphi_\mu^* = 0 \end{cases}$$

Las reglas de conmutación implican :

$$[\varphi_\mu^*(x), \varphi_\nu(x')] = -i g_{\mu\nu} \Delta(x-x')$$

Hacemos el desarrollo Fourier habitual y obtenemos :

$$\varphi_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{k_0} [a_\mu(k) e^{-ik \cdot x} + b_\mu^*(k) e^{ik \cdot x}]$$

$$\varphi_\mu^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{k_0} [a_\mu^*(k) e^{ik \cdot x} + b_\mu(k) e^{-ik \cdot x}]$$

Las reglas de conmutación para  $\varphi_\mu$  y  $\varphi_\mu^*$  implican :

$$[a_\mu^*(k), a_\nu(k')] = -k_0 \delta^3(k-k') g_{\mu\nu}$$

$$[b_\mu^*(k), b_\nu(k')] = -k_0 \delta^3(k-k') g_{\mu\nu}$$

El signo del conmutador para  $a_0$  y  $b_0$  es contrario al usual. Por consiguiente  $a_0^* |vacío\rangle$  y  $b_0^* |vacío\rangle$  van a tener norma negativa. Consideramos ahora el subespacio de Hilbert de una partícula; ante todo la existencia de partículas y antipartículas permite distinguir dos subespacios invariantes. Como ambos subespacios son isomorfos en cuanto a métrica se refiere y además cada uno es isomorfo al estudiarlo cuando tratamos el campo vectorial real podemos aprovechar la sección anterior para hallar los posibles tensores de la métrica definida positiva. Sean  $|\Omega\rangle$  y  $|\Omega'\rangle$  estados de los subespacios considerados :

$$|\Omega\rangle = \int \frac{d^3k}{k_0} \phi^\mu(k) a_\mu^*(k) |0\rangle$$

$$|\Omega'\rangle = \int \frac{d^3k}{k_0} \psi^\mu(k) b_\mu^*(k) |0\rangle$$

Como vimos en la sección anterior la métrica invariante relativista más general definida positiva (o semidefinida) es:

$$\langle \Phi', \Phi \rangle = \int \frac{d^3k}{k_0} \phi_\mu'^* \left[ -\lambda_1 \frac{k^\mu k^\lambda}{m^2} + \lambda_2 \left( g^{\mu\lambda} - \frac{k^\mu k^\lambda}{m^2} \right) \right] \phi_\lambda$$

$$\langle \Psi', \Psi \rangle = \int \frac{d^3k}{k_0} \Psi'^* \left[ -\xi_1 \frac{k^\mu k^\lambda}{m^2} + \xi_2 \left( g^{\mu\lambda} - \frac{k^\mu k^\lambda}{m^2} \right) \right] \Psi_\lambda$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \xi_1, \xi_2 \geq 0$ . La transformación implicada es :

$$\begin{aligned} [\varphi_\mu^+(x)]^T &= \left[ \lambda_1 \frac{\partial_\mu \partial^\lambda}{m^2} + \lambda_2 \left( g_\mu^\lambda + \frac{\partial_\mu \partial^\lambda}{m^2} \right) \right] \varphi_\lambda^+(x) \\ [\varphi_\mu^{*-}(x)]^T &= \left[ \xi_1 \frac{\partial_\mu \partial^\lambda}{m^2} + \xi_2 \left( g_\mu^\lambda + \frac{\partial_\mu \partial^\lambda}{m^2} \right) \right] \varphi_\lambda^{*-}(x) \end{aligned} \quad (1)$$

El operador que genera esta transformación es :

$$\eta = \exp \left[ (\log \lambda_1 + i\pi) N_1^{(+)} + \log \lambda_2 N_2^{(+)} + (\log \xi_1 + i\pi) N_1^{(-)} + \log \xi_2 N_2^{(-)} \right]$$

donde los operadores  $N_1$  y  $N_2$  son los correspondientes para partículas (+) y antipartículas (-) de los definidos en la sección 3.

(1)  
Conjugando las ecuaciones se obtiene :

$$\begin{aligned} [\varphi_\mu^{*-}(x)]^T &= \left[ \lambda_1 \frac{\partial_\mu \partial^\lambda}{m^2} + \lambda_2 \left( g_\mu^\lambda + \frac{\partial_\mu \partial^\lambda}{m^2} \right) \right] \varphi_\lambda^{*-}(x) \\ [\varphi_\mu^-(x)]^T &= \left[ \xi_1 \frac{\partial_\mu \partial^\lambda}{m^2} + \xi_2 \left( g_\mu^\lambda + \frac{\partial_\mu \partial^\lambda}{m^2} \right) \right] \varphi_\lambda^-(x) \end{aligned} \quad (2)$$

El operador que genera esta transformación es  $[\eta^*]^{-1}$ .

Las condiciones subsidiarias que se pueden usar en vez de las transformaciones de medida son :

$$\begin{aligned} (\partial_\lambda \varphi^\lambda)^- | \Omega \rangle &= (\partial_\lambda \varphi^{\lambda*})^- | \Omega \rangle = 0 \\ \oint \left[ \left( g_\mu^\lambda + \frac{\partial_\mu \partial^\lambda}{m^2} \right) \varphi_\lambda \right]^+ | -\Omega \rangle &= \left[ \left( g_\mu^\lambda + \frac{\partial_\mu \partial^\lambda}{m^2} \right) \varphi_\lambda^* \right]^+ | -\Omega \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Las 5 distintas maneras de restringir la teoría planteadas en el caso de un campo vectorial real aparecen nuevamente aquí. Sin embargo, como ya dijimos en secciones anteriores, introducir la interacción en muchos de los casos considerados lleva a

teorías muy artificiales. La razón se puede remontar al hecho de que en esos casos hay condiciones subsidiarias o transformaciones de medida que distinguen las partes de frecuencia positiva y negativa de algún campo y como se sabe, esto en general no es posible a menos que el campo sea libre. Por eso vamos a considerar  $\lambda_1 = \xi_1$  y  $\lambda_2 = \xi_2$  de tal modo que la transformación sea del tipo :

$$\begin{aligned} \varphi_\mu^\top(x) &= \left[ \lambda_1 \frac{\partial_\mu \partial^\lambda}{m^2} + \lambda_2 \left( g_\mu^\lambda + \frac{\partial_\mu \partial^\lambda}{m^2} \right) \right] \varphi_\lambda(x) \\ \varphi_\mu^{*\top}(x) &= \left[ \lambda_1 \frac{\partial_\mu \partial^\lambda}{m^2} + \lambda_2 \left( g_\mu^\lambda + \frac{\partial_\mu \partial^\lambda}{m^2} \right) \right] \varphi_\lambda^*(x) \end{aligned} \quad (4)$$

El operador que debe conmutar por ejemplo con la matriz S es el que genera la transformación sobre los operadores de creación pues el espacio de Hilbert es una combinación lineal arbitraria de estados del tipo :

$$\underbrace{a^* \dots}_n \underbrace{b^* \dots}_m | \text{vacío} \rangle$$

y por consiguiente si se hace una transformación sobre los  $a^*$  y  $b^*$

$$a^{*\top} = \eta a^* \eta^{-1} \quad ; \quad b^{*\top} = \eta b^* \eta^{-1}$$

entonces  $|\Omega\rangle^\top = \eta |\Omega\rangle$

Los operadores  $N_1$  y  $N_2$  que aparecen en  $\eta$  tienen autovalores enteros positivos. La función  $\exp(\alpha x)$  donde  $\alpha$  es un parámetro y  $x$  una variable que sólo toma valores enteros positivos, es unívoca si la parte real de  $\alpha$  es distinta de cero. En ese caso la función tiene obviamente inversa y por consiguiente si:

$$\left[ \exp \alpha N_1, S \right] = 0$$

como el operador  $\exp \alpha N_1$  puede considerarse una función  $\exp \alpha x$  en la base en que  $N_1$  es diagonal, se deduce que :

$$\text{Re } \alpha \neq 0 \Rightarrow \left[ N_1, S \right] = 0$$

Luego si  $\lambda_1$  ( $\sigma \lambda_2$ ) son distintos de 1 se conserva  $N_1$  ( $\sigma N_2$ ). Pero pedir que el operador  $n^\circ$  de partículas se conserve es equivalente a exigir que no interactúen electromagnéticamente pues cualquier tipo de interacción razonable produce creación y destrucción de partículas. Suponemos entonces  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . En ese caso :



$$\eta = \exp [i \pi (N_1^+ + N_1^-)]$$

pero como  $\exp (i \pi n^\circ \text{ entero}) = \exp (-i \pi n^\circ \text{ entero})$  resulta :

$$\eta = \exp [i \pi (N_1^+ - N_1^-)]$$

Notar que para esta elección de las  $\lambda$  el  $\eta$  resulta unitario y por lo tanto deja invariantes las reglas de conmutación. La estructura del espacio de Hilbert se mantiene y por consiguiente los estados de una partícula físicamente significativos forman una base reducible. Hay dos sistemas elementales de cuantos del campo con espines 1 y 0. El operador  $N_1^{(+)} - N_1^{(-)}$  es evidentemente igual al operador carga de las partículas escalares. Por consiguiente la invariancia respecto a  $\eta$  se puede interpretar como conservación de la carga. Esto nos da una idea intuitiva del significado de la transformación hallada y de la invariancia respecto a dicha transformación. En concreto implica que no puede haber transferencia de carga de las partículas escalares a las vectoriales. La diferencia con las transformaciones de medida aplicadas a campos reales es evidente: por un lado, como no implica necesariamente la conservación del n° de partículas, permite una flexibilidad mucho mayor para encontrar interacciones invariantes pero por otro lado sólo puede aplicarse a campos complejos.

Todavía nos falta discutir la posibilidad de plantear condiciones subsidiarias (form. (2) ). Para no distinguir la parte de creación y destrucción de los operadores las reemplazamos por :

$$\partial^\mu \varphi_\mu(x) | -2 \rangle = \partial^\mu \varphi_\mu^*(x) | -2 \rangle = 0$$

o bien

$$(g^{\mu\nu} + \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2}) \varphi_\nu | -2 \rangle = (g^{\mu\nu} + \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2}) \varphi_\nu^* | -2 \rangle = 0 \quad (2b)$$

pero como:

$$[\partial^\mu \varphi_\mu^*(x), \partial^\nu \varphi_\nu(x')] = i m^2 \Delta(x - x')$$

$$\left[ \left( g^{\mu\nu} + \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2} \right) \psi_\nu^*(x) , \left( g^{\lambda\eta} + \frac{\partial^\lambda \partial^\eta}{m^2} \right) \psi_\eta(x') \right] = -i \left( g^{\mu\lambda} + \frac{\partial^\mu \partial^\lambda}{m^2} \right) \Delta(x-x')$$

no se pueden encontrar autoestados simultáneos de dichos operadores con autovalor 0. Luego no hay estados que cumplan la condición subsidiaria.

#### IV.2. Introducción de la interacción

Nuevamente nos enfrentamos con el problema de determinar la forma de la interacción tal que sea invariante respecto a una transformación cuya expresión sólo conocemos en ausencia de interacción. En este caso vamos a intentar resolverlo mediante un método que nos permita inferir la posible forma de la interacción y de la transformación para confirmar a posteriori la invariancia.

Para ello usamos el hecho bien conocido que el espacio de aplicación de la matriz S es el conjunto de estados asintóticos que satisfacen las ecuaciones de los campos libres. Hemos mostrado, al tratar el campo espinorial, la equivalencia entre la minimalidad y la invariancia de medida generalizada (ver II.2) aplicados a los elementos de matriz S entre estados de un mesón vectorial. En el trabajo<sup>(4)</sup> se construyen los primeros términos del desarrollo perturbativo que satisfacen minimalidad. Aquí aprovecharemos esos resultados para construir posibles lagrangianos invariantes. Para un mesón vectorial interactuando con un campo electromagnético externo podremos demostrar que el lagrangiano así construido es efectivamente invariable en cualquier orden de la constante de acoplamiento. En cambio en caso de interacción con el campo electromagnético propio del mesón vectorial argumentos neurísticos hacen suponer que la teoría hallada es invariante sólo hasta orden  $e^2$ .

Los pasos a seguir serían entonces : a) construir los primeros términos del desarrollo perturbativo de la matriz S; b) encontrar el lagrangiano del cual se deduce dicha matriz S, c) verificar que la teoría hallada es invariante en cualquier orden

de la constante de acoplamiento; d) en caso contrario calcular los términos que siguen en el desarrollo perturbativo de la matriz S y determinar los vértices a agregar; e) se repite b) y c) con la nueva matriz. Por último determinaremos el grupo de transformaciones continuo conexas con la unidad respecto al cual la teoría es invariante.

Veremos ahora en detalle el caso de un mesón vectorial interactuando con un campo electromagnético externo de radiación. En la próxima sección trataremos el campo electromagnético con fuente y por fin en la última sección la interacción con el campo electromagnético propio del mesón vectorial.

Recordamos primero que consideraciones de invariancia relativista y principio de superposición permiten expresar el elemento de matriz S entre estados de una partícula en la forma :

$$\langle \Omega' | S | \Omega \rangle = \phi_{fin}^{\alpha\alpha}(p') M_{\alpha\beta} \phi_{inic}^{\beta}(p)$$

donde  $\phi_{fin}$  y  $\phi_{inic}$  son las funciones de onda para las partículas saliente y entrante respectivamente. Como la transformación  $\eta$  puede ponerse :

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha}^T(p) &= \left( g_{\alpha}^{\beta} - 2 \frac{p_{\alpha} p^{\beta}}{m^2} \right) \phi_{\beta}(p) \\ &= (P_{\alpha\beta} - Q_{\alpha\beta}) \phi^{\beta}(p) \end{aligned}$$

donde :  $P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{p_{\alpha} p_{\beta}}{m^2}$

$$Q_{\alpha\beta} = + \frac{p_{\alpha} p_{\beta}}{m^2}$$

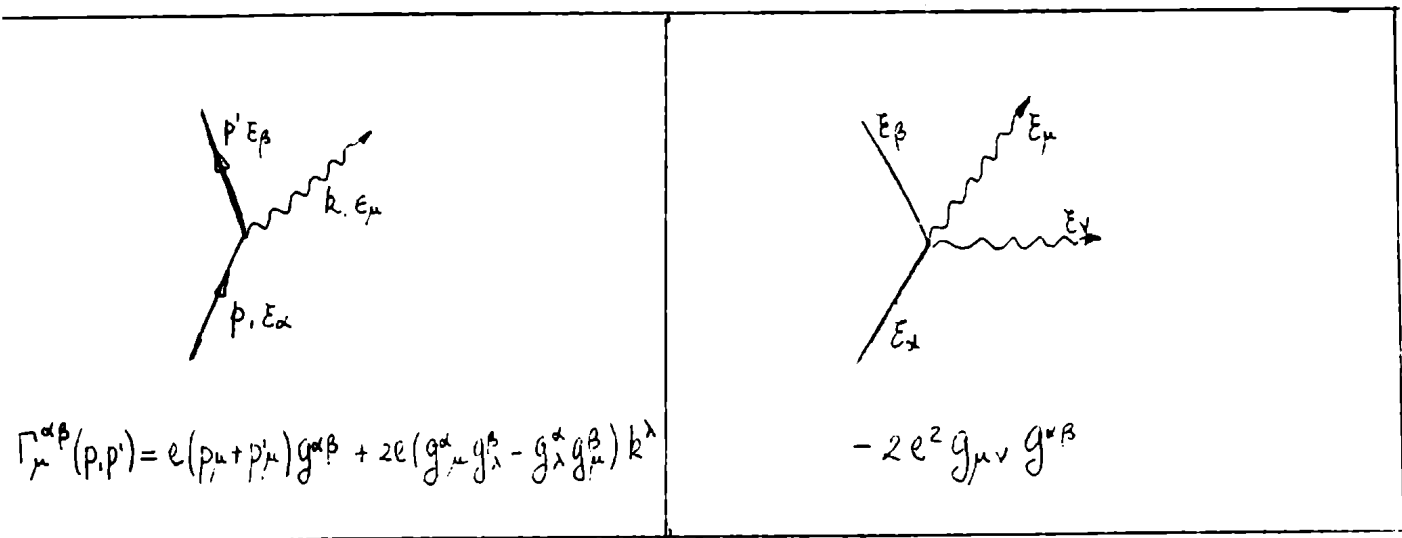
son operadores de proyección. Es evidente que la misma demostración hecha en la sección II.2. puede trasladarse aquí y asegura que :

$$M_{\alpha\gamma} Q_{\gamma\beta} = Q_{\alpha\gamma} M_{\gamma\beta} \quad (1)$$

que es la condición de minimalidad. En <sup>(4)</sup> se determinan los vértices a partir de los cuales se puede construir un  $M_{\alpha\beta}$  que satisface (1) en 1° y 2° orden de la constante de aco-

amiento. Aparecen dos vértices cuya estructura puede verse en la fig. III.

En el trabajo citado se encuentra también un vértice entre 4 mesones vectoriales que interviene en el elemento de matriz de la dispersión de Møller. Aquí no nos interesa pues como sólo consideramos interacción con un campo electromagnético externo hay dispersión de Møller. Es interesante notar que a pesar de la simplicidad del momento ciertas propiedades electromagnéticas de los mesones vectoriales como el momento magnético y el cuadripolar quedan totalmente determinados.



En los diagramas están indicados los nombres de los impulsos y vectores de polarización de mesones y fotones.

Fig. III

Para construir el lagrangiano del cual se deduce dicha matriz S basta con proponer el más general compatible con las condiciones usuales: covariancia, localidad, variancia de medida usual, etc.; luego deducir la matriz S a partir de él e identificar terminos con la hallada. El resultado es que el lagrangiano queda totalmente determinado vale :

$$\mathcal{L} = m^2 \varphi_{\mu}^* \varphi^{\mu} - \frac{1}{2} [(\partial_{\mu} + ieA_{\mu})\varphi_{\nu}^* - (\partial_{\nu} + ieA_{\nu})\varphi_{\mu}^*] [(\partial^{\mu} - ieA^{\mu})\varphi^{\nu} - (\partial^{\nu} - ieA^{\nu})\varphi^{\mu}] -$$

$$- (\partial^{\mu} + ieA^{\mu})\varphi_{\mu}^* (\partial^{\nu} - ieA^{\nu})\varphi_{\nu} - ie(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu})\varphi^{\mu*}\varphi^{\nu} \quad (2)$$

Las ecuaciones de movimiento son :

$$\begin{aligned} (\partial_\lambda + ieA_\lambda)(\partial^\lambda + ieA^\lambda) \varphi_\mu^* + m^2 \varphi_\mu^* - 2ie F_{\mu\lambda} \varphi^{\lambda*} &= 0 \\ (\partial_\lambda - ieA_\lambda)(\partial^\lambda - ieA^\lambda) \varphi_\mu + m^2 \varphi_\mu + 2ie F_{\mu\lambda} \varphi^\lambda &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

llamando  $D_\lambda = \partial_\lambda - ieA_\lambda$  ;  $D_\lambda^* = \partial_\lambda + ieA_\lambda$  ;  $F_{\mu\lambda} = \partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu$ , aplicamos  $D_\lambda$  a la 1.ª ecuación y teniendo en cuenta que:

$$D_\lambda D_\mu = D_\mu D_\lambda - ie F_{\lambda\mu}$$

resulta:

$$D^\mu D_\lambda D_\mu \varphi^\lambda - ie F_{\lambda\mu} D^\mu \varphi^\lambda + m^2 D_\lambda \varphi^\lambda + 2ie (D_\lambda \varphi_\mu) F^{\mu\lambda} + 2ie \varphi_\mu \partial_\lambda F^{\mu\lambda} = 0$$

pero como el campo electromagnético satisface  $\partial_\lambda F^{\mu\lambda} = 0$ , obtenemos :

$$D_\mu D^\mu D_\lambda \varphi^\lambda - D^\mu (ie F_{\lambda\mu} \varphi^\lambda) - ie F_{\lambda\mu} D^\lambda \varphi^\mu + m^2 D_\lambda \varphi^\lambda = 0$$

$$\Rightarrow (D_\mu D^\mu + m^2) D_\lambda \varphi^\lambda = 0$$

Aplicando nuevamente  $D_\nu$  a dicha ecuación resulta después de pasos similares

los ya hechos que :

$$(D_\mu D^\mu + m^2) D_\nu D_\lambda \varphi^\lambda + 2ie F_{\nu\eta} D^\eta D_\lambda \varphi^\lambda = 0$$

por consiguiente llamando :

$$\varphi^{\lambda T} = \left( g^\lambda{}_\nu + \frac{2D^\lambda D_\nu}{m^2} \right) \varphi^\nu \quad (4)$$

vemos que las ecuaciones de movimiento son invariantes cuando se transforma  $\varphi$  en  $\varphi^T$ . Como además en el límite  $e \rightarrow 0$  la transformación coincide con  $\eta$  podemos identificar (4) con la expresión de la transformación en presencia de interacción y concluir que (2) es el lagrangiano de la teoría invariante.

A pesar del método usado para obtener el lagrangiano hacemos notar que la conclusión a la que hemos llegado vale en cualquier orden de  $e$  y no depende para nada

del desarrollo perturbativo.

Sin embargo hace falta un paso más para demostrar que la teoría es invariante. Igual que en el caso espinorial, la transformación (4) como mezcla los campos y sus derivadas temporales constituye una transformación canónica. Hay que demostrar entonces que las reglas de conmutación o el hamiltoniano es invariante. Esto lo haremos en el apéndice (C). También veremos allí que el grupo continuo conexo con la unidad que deja invariante la teoría es :

$$\eta = \exp(i\epsilon Q_1)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro real (\*).

En el capítulo anterior vimos que resolver el problema de la métrica indefinida con una transformación del tipo (4) tiene la particularidad de asignar realidad física a todo el espacio de Hilbert y por lo tanto estamos haciendo una teoría unificada de partículas de distinto spin. Es interesante para compararla con otras teorías encontrar las ecuaciones que satisfacen cada una de las partículas de distinto spin. Para ello basta proyectar :

$$\psi_{\mu}^{(\text{spin } 1)} = \left( \gamma_{\mu}^{\lambda} + \frac{D_{\mu} D^{\lambda}}{m^2} \right) \psi_{\lambda}$$

$$\psi^{(\text{spin } 0)} = D_{\eta} \psi^{\eta}$$

---

(\*) Siempre que en alguna transformación aparece un parámetro como  $\epsilon$  se reproduce el planteo de Yang y Mills<sup>(25)</sup>. La localidad presupondría que se puede hacer dicha transformación tomando distintos  $\epsilon$  en distintos puntos del espacio, es decir, eligiendo una función  $\epsilon(x)$  como parámetro. Esa exigencia implica entonces la existencia de un campo vectorial de masa nula interactuando con el campo en cuestión y tal que en una transformación de ese tipo se transforme a su vez. En nuestro caso si tratamos de aplicar el método de Yang Mills llegamos a que hay 2 campos vectoriales distintos interactuando cada uno con las cargas  $Q_1$  y  $Q_2$ . Nuestro objetivo es en cambio que el mismo campo vectorial (el campo electromagnético) interactúe con ambas cargas.

Entonces (3) implica :

$$D_\mu (D^\mu \varphi_\nu^{(1)} - D_\nu \varphi^{\mu(1)}) + m^2 \varphi_\nu^{(1)} - ie F_\nu{}^\mu \varphi_\mu^{(1)} = 0$$

$$(D_\mu D^\mu + m^2) \varphi^0 = 0$$

La 1a. ecuación coincide con la propuesta por Lee y Yang, pero para momento magnético 2.

La 2a. ecuación es la usual para mesones escalares cargados.

### IV.3. Campo electromagnético con fuente

Consideramos ahora el caso en que el campo electromagnético si bien es externo ( es decir no es producido por el mesón vectorial) tiene una fuente que podemos simbolizar por una corriente  $j_\mu(x)$  tal que :

$$\partial^\mu F_{\mu\lambda} = j_\lambda$$

Deberíamos repetir el proceso anterior para encontrar la nueva teoría invariante. Vamos a bosquejar aquí las diferencias esenciales y dar el resultado final: ante todo en la matriz S los términos proporcionales a :

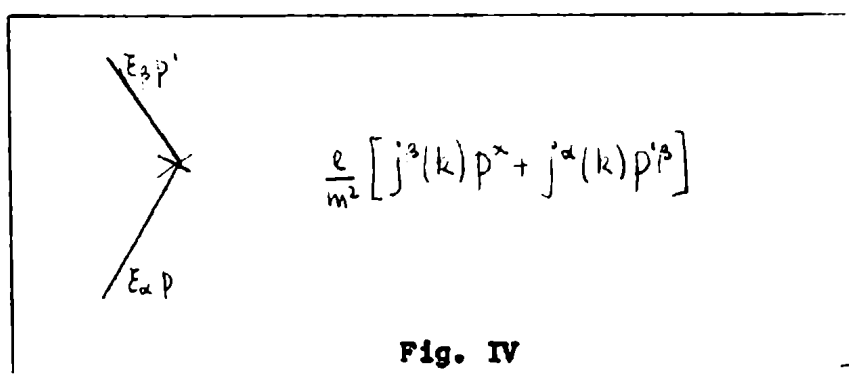
$$(g^\mu{}_\nu k^2 - k^\mu k_\nu) e^\nu$$

no son cero sino iguales a  $j^\mu(k)$ . Eso obliga a agregar un vértice de interacción directa mesón vectorial - corriente externa (Fig. IV).

Luego obtenemos el nuevo lagrangiano tal que implique la matriz S considerada:

$$\mathcal{L} = m^2 \varphi_\mu^* \varphi^\mu - \frac{1}{2} (D_\mu \varphi_\nu^* - D_\nu \varphi_\mu^*) (D^\mu \varphi^\nu - D^\nu \varphi^\mu) -$$

$$- (D_\mu + \frac{ie j_\mu}{m^2}) \varphi^{\mu*} (D_\nu - \frac{ie j_\nu}{m^2}) \varphi^\nu - ie F_{\mu\nu} \varphi^{\mu*} \varphi^\nu$$



La ecuación de movimiento es :

$$(D_\mu D^\mu + m^2) \varphi_\nu + 2ie \varphi^\lambda F_{\lambda\nu} - D_\nu \left( \frac{ie j_\mu \varphi^\mu}{m^2} \right) - ie j_\nu \left( D_\mu - \frac{ie j_\mu}{m^2} \right) \varphi^\mu = 0$$

y es invariante respecto a la transformación:

$$\varphi_{\mu}^T = \left[ g_{\mu\nu} + \frac{2D_{\mu}}{m^2} (D_{\nu} - \frac{ie j_{\nu}}{m^2}) \right] \varphi^{\nu}$$

En cuanto a la separación de los campos de espín 1 y 0, debemos hacerlo usando los siguientes operadores :

$$\varphi_{\mu}^{(\text{espín } 1)} = \left[ g_{\mu\nu} + \frac{2D_{\mu}}{m^2} (D_{\nu} - \frac{ie j_{\nu}}{m^2}) \right] \varphi^{\nu}$$

$$\varphi^{(\text{espín } 0)} = (D^{\lambda} - \frac{ie j^{\lambda}}{m^2}) \varphi_{\lambda}$$

y las ecuaciones de movimiento serán :

$$D_{\mu} (D^{\mu} \varphi_{\lambda}^{(1)} - D_{\lambda} \varphi^{\mu(1)}) + m^2 \varphi_{\lambda}^{(1)} - ie F_{\lambda\mu} \varphi^{\mu(1)} = 0$$

$$(D_{\mu} D^{\mu} + m^2) \varphi^{(0)} - \frac{ie j_{\nu}}{m^2} D^{\nu} \varphi^{(0)} = 0$$

La ecuación para las partículas de espín 1 es la misma que habíamos obtenido antes. El vértice corriente campo sólo aparece en la evolución de los mesones escalares. Un mesón escalar (descrito por la cuatridivergencia de un mesón vectorial) tiene una interacción con el campo electromagnético más rica que la predicha por el principio de interacción mínima de Gell-Mann.

#### IV.4. Interacción con el campo propio

Consideramos ahora a los mesones vectoriales como posible fuente de campo electromagnético. Hay que considerar nuevos procesos físicos; por ejemplo la dispersión de Møller. Este es un proceso con dos partículas entrantes y dos salientes respecto al cual, como se recordará (ver II.2.) el principio de interacción mínima y la invariancia respecto a  $\eta$  implican distintas condiciones; dejando implícitos los índices vectoriales:

$$Q P M P P = P Q M P P = P D M Q P = P P M P Q \quad (1)$$

$$P Q M Q Q = Q P M Q Q = Q Q M P Q = Q Q M Q P \quad (2)$$



Minimalidad sólo requiere (1). En el trabajo<sup>(4)</sup> se demuestra que es necesario agregar un vértice de 4 mesones para que el elemento de matriz S que describe la dispersión de Møller satisfaga (1) (ver Fig. Va).

Si además queremos que sea invariante debe cumplir (2). En ese caso (ver ppendice D) hay que agregar el vértice indicado en la Fig. Vb.

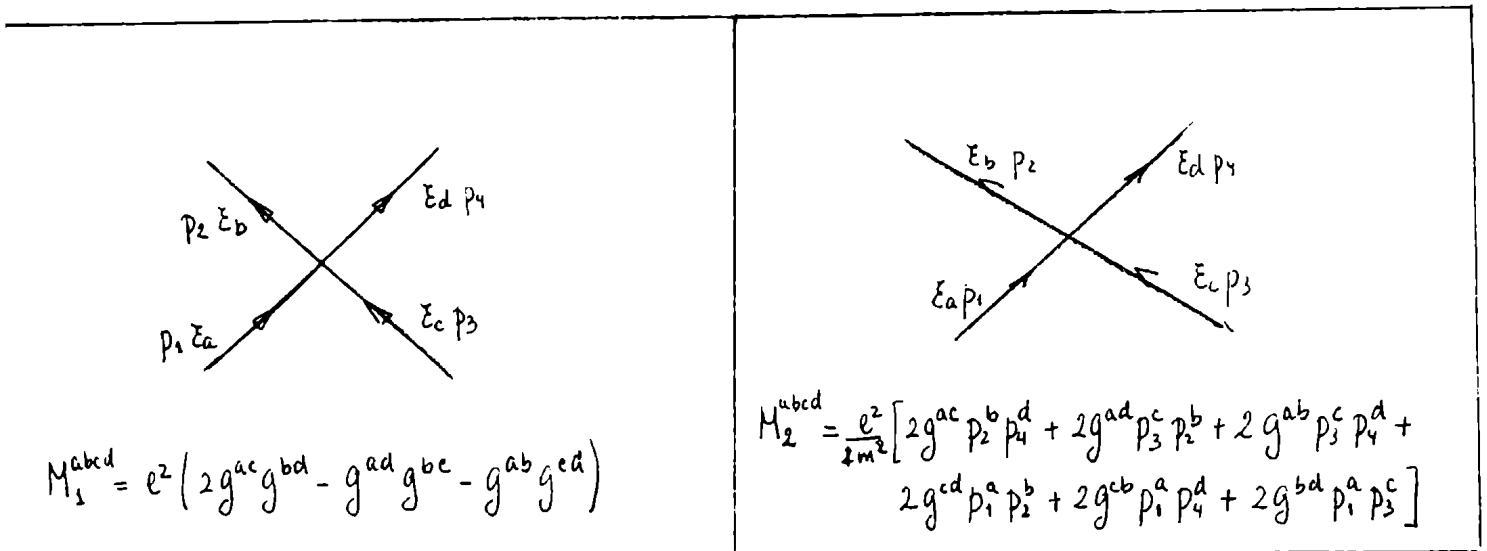


Fig. V (a)

Fig. V (b)

Para obtener estos vértices debemos agregar al lagrangiano los términos :

$$\delta \mathcal{L}_{(1)} = \frac{e^2}{2} [\varphi_\mu^* \varphi^\mu \varphi_\nu \varphi^\nu - \varphi_\mu^* \varphi^\mu \varphi_\nu^* \varphi^\nu]$$

$$\delta \mathcal{L}_{(2)} = \frac{-e^2}{2m^2} [\varphi_\mu \varphi^\mu \partial_\lambda \varphi^{\lambda*} \partial_\nu \varphi^{\nu*} + \varphi_\mu^* \varphi^{\mu*} \partial_\lambda \varphi^\lambda \partial_\nu \varphi^\nu - 2\varphi_\mu^* \varphi^\mu \partial_\lambda \varphi^{\lambda*} \partial_\nu \varphi^\nu]$$

Sin embargo aquí la sola observación de la teoría obtenida permite inferir que sólo es correcta hasta orden  $e^2$  pues  $\delta \mathcal{L}_2$  no es invariante respecto a la transformación de medida usual. Sólo se han impuesto condiciones sobre el campo vectorial, es necesario también agregar condiciones sobre el campo electromagnético lo cual implica nuevos términos en  $\mathcal{L}$  que a su vez con toda probabilidad implican un proceso iterativo que puede llevar a una serie en  $e$ .

## V. COVARINCIA Y SIMETRÍAS SUPERIORES INTERNAS

### 1.1. El grupo $\bar{U}(4)$

Es bien conocida la situación paradójica que se enfrentó al intentar generalizar el grupo  $SU(3)$  como simetría aproximada de las interacciones fuertes. Por un lado la simetría  $SU(6)$  obtuvo comprobaciones experimentales notables pero por otro dificultades conceptuales surgían cuando se la intentaba formular covariantemente, es decir, sumergir  $SU(6)$  en un grupo que contuviera al de Poincaré como subgrupo. Esto llevó en los últimos tiempos a abandonar la idea de que dichos grupos superiores fueran simetrías aproximadas de las interacciones fuertes. El descubrimiento de que varios de los resultados correctos de  $SU(6)$  no eran consecuencia de la cuasiconmutación de los generadores con el hamiltoniano<sup>(27,28)</sup> llevó al desarrollo de lo que se llama el "Algebra de corrientes".

Sin embargo la idea de construir modelos en los cuales esos grupos fueran efectivamente simetrías aproximadas no fue abandonada<sup>(29)</sup>. En todos esos intentos el lagrangiano libre rompe la simetría que sólo se impone en el término de interacción. Vamos a mostrar en esta sección que el formalismo desarrollado en esta tesis permite construir ecuaciones de movimiento y un lagrangiano libre que es invariante de tal manera que la ruptura de la simetría queda circunscripta a la interacción. Esto permite un nuevo enfoque que vamos a aclarar en relación con los intentos citados.

Argumentos de teoría de grupos han demostrado<sup>(27)</sup> que si se pretende preservar características esenciales del mundo real como, por ejemplo, el n° de dimensiones espacio - temporales, conservación de probabilidad, invariancia de la masa de una partícula, entonces hay prácticamente una única manera de generar un grupo que contenga  $SU(6)$  y Poincaré: hacer el producto semidirecto de un grupo isomorfo al de Poincaré que actúa sólo sobre las coordenadas espacio temporales ( o sobre las coordenadas impulso energía) con un grupo que sólo actúa sobre las coordenadas internas (estamos incluyendo el espín ordinario y en general las coordenadas descriptas por los subíndices discretos de las fun-

ciones de onda como grados de libertad internos) y que contiene al grupo homogéneo de Lorentz y a SU(6).

Es decir en cualquier representación irreducible de dicho grupo una transformación se puede poner como producto de 2 transformaciones:

$$G = G_X (\chi, t) \times G_I (s, F) \quad (1)$$

$G_X$  es una representación del grupo de Poincaré pero sólo actúa sobre las coordenadas espacio temporales. En cambio  $G_I$  actúa sólo sobre las coordenadas internas. Es evidente la similitud de este caso con lo visto en la sección I.1. sobre posibles realizaciones covariantes de las representaciones del grupo de Poincaré. Recordamos que una transformación del grupo debía ser expresable en la forma :

$$[m, 0] \otimes \{s, s'\} \quad (2)$$

donde como  $[m, 0]$  es la representación del grupo de Poincaré para espín 0 no actúa sobre los subíndices de espín. En cambio  $\{s, s'\}$  es una representación del grupo de Lorentz en términos de matrices definidas sobre el espacio interno e independiente de las coordenadas impulso energía.

Por supuesto la riqueza de la expresión (1) respecto a (2) radica en que las posibles matrices  $G_I(s, F)$  forman un grupo mayor que contiene a Lorentz pero que también puede incluir como subgrupo  $SU_3$  ó  $SU_6$ . En particular la representación fundamental de  $G_I$  puede tener como base un espacio de más de 2 dimensiones que es la base de la representación fundamental del grupo de Lorentz (4 dimensiones en caso de incluir la inversión espacial) y corresponder por lo tanto a varios campos fundamentales distintos. En el lenguaje usual diríamos que la teoría requiere la existencia de varios quarks distintos. En este caso las transformaciones del subgrupo de Lorentz de  $G_I$  son matrices diagonales en bloques del tipo :

$$\begin{pmatrix} D_{s_1 s'_1}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & D_{s_2 s'_2}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & D_{s_n s'_n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_{S_1 S'_1}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_{S_2 S'_2}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{D}_{S_n S'_n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Pero aun sin aumentar las dimensiones de la representación fundamental, el grupo  $G_I$  puede ser más rico, por ejemplo, incluir todas las matrices 4 x 4 pseudo-unitarias, es decir que dejan invariante :

$$\Psi^* \gamma_0 \Psi$$

Ejemplos de ambas clases de grupos  $G_I$  han sido estudiados. La primera clase implica simetrías del tipo de espin isotópico o espin  $F_1$ , en cambio la segunda sólo es una expresión covariante del criterio de independencia de espin ordinario. Los ejemplos tratados extensamente son :

a)  $SL(6)$  estudiado por Rühl<sup>(29)</sup>; grupo de las matrices complejas 6 x 6 no singulares. En este caso el grupo no contiene el operador de inversión espacial y por consiguiente los quarks de esta teoría no son autoestados de la paridad. El grupo de Lorentz está representado por bloques diagonales de 2 x 2 complejos y el espinor fundamental tiene 6 dimensiones (hay 3 quarks).

b)  $\bar{U}(12)$  y  $\bar{U}(4)$  estudiados por Salam Delbourgo y Strathdee<sup>(30)</sup>. El segundo  $\bar{U}(4)$  es del segundo tipo explicados más arriba, no contiene la simetría  $SU(3)$  pero es interesante porque no sólo tiene comprobaciones experimentales propias (como por ejemplo la igualdad de los factores de forma eléctrico y magnético de los nucleones) sino sobre todo porque las dificultades conceptuales se presentan ya al tratar ese grupo como simetría aproximada.

Vamos a mostrar aquí que si se intenta construir una teoría invariante respecto al grupo  $\bar{U}(4)$  y se lo hace sistemáticamente se es llevado a formular una teoría idéntica a la que hemos desarrollado en esta tesis con la diferencia, no esencial, que en vez de usar las realizaciones de Rarita - Schwinger deben usarse las de Bargmann Wigner.

Recordamos entonces las características del grupo  $\bar{U}$  (4). Este es el grupo de matrices 4 x 4

$$\Psi_i^\dagger = u_{ij} \Psi_j \quad i, j = 1.2.3.4. \quad (3)$$

Tales que sean pseudounitarias

$$(u^\dagger)_{ik} (\gamma_0)_{kl} (u)_{lm} = (\gamma_0)_{im}$$

y unimodulares

$$\det u = 1$$

La teoría de este tipo de grupos es muy similar a la de los unitarios como SU(3). Una representación infinitesimal puede expresarse :

$$1 + \alpha \gamma_5 + \beta^\mu \gamma_\mu + \epsilon^\mu \gamma_\mu \gamma_5 + \xi^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \quad (4)$$

ya que las 16 matrices de Dirac forman una base en el espacio de matrices 4 x 4.

Una representación y además la fundamental, de este grupo es justamente la de los objetos que se transforman de acuerdo a (3). Otra representación fundamental es obviamente la compleja conjugada:

$$\Psi_i^* = u_{ij}^* \Psi_j^* \quad (3 \text{ bis})$$

Los objetos que se transforman de acuerdo a (3) diremos que pertenecen a (1,0), en cambio la representación expresada por (3 bis) la llamaremos (0,1) y notaremos a los vectores base con un superíndice :

$$\Psi^i \text{ se transforma como } (\Psi_i)^*$$

Como para los grupos unitarios podemos obtener todas las representaciones finitas del grupo como productos sucesivos de las representaciones fundamentales definiendo tensores del tipo

$$\Psi_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_n}$$

que se transforma obviamente :

$$(\Psi^T)_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_n} = u_{i_1 i_1}^* u_{i_2 i_2}^* \dots u_{i_n i_n}^* \Psi_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_n} u_{j_1 j_1} \dots u_{j_n j_n}$$

Si el tensor es simetrizado en los índices superiores así como en los inferiores y además es de traza nula configura una representación irreducible que llamaremos  $(m,n)$  donde  $m$  es el número de subíndices y  $n$  el de superíndices.

Las dimensiones de las primeras representaciones son :

$$(1, 0) \rightarrow 4 \quad ; \quad (0, 1) \rightarrow 4 \quad ; \quad (1, 1) \rightarrow 15 \quad ; \quad (0, 2) \rightarrow 10$$

Esta manera de obtener las representaciones del grupo  $\bar{U}(4)$  muestra en seguida la semejanza con la construcción de las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré de Bargmann Wigner. Como se recordará estos parten también del espinor de 4 componentes como ente fundamental y mediante productos tensoriales sucesivos construyen representaciones superiores. La diferencia radica no en el espacio base sino en las transformaciones que se aplican sobre los espinores pues ahora son un conjunto restringido de (4) que se obtiene poniendo  $\alpha = \beta^k = \varepsilon_\mu = 0$  . Esos tensores simetrizados y de traza nula son reducibles respecto al grupo de Lorentz. Bargmann - Wigner plantean entonces ecuaciones de Dirac para cada subíndice o superíndice separadamente

$$\left[ i \not{\partial}_{i_1 i_1} - m \right] \Psi_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m} = 0 \tag{5}$$

$$\Psi_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_m} \left[ i \not{\partial}_{j_1 j_1} - m \right] = 0$$

y de esta manera las representaciones son automáticamente reducidas respecto al grupo de Poincaré<sup>(\*)</sup>.

Pero justamente como las ecuaciones de Dirac (5) reducen las representaciones (irreducibles) de  $\bar{U}(4)$  es evidente que no son invariantes respecto a  $\bar{U}(4)$ . Salam Delbourgo Stratdhee asumen la siguiente filosofía: mantienen las ecuaciones de Dirac como las ecuaciones básicas para la evolución de los campos libres, las representaciones del grupo  $\bar{U}(4)$  contienen estados físicamente significativos y estados que no lo son según que satisfagan o no las ecuaciones de Dirac.

De esta manera el tratamiento de  $\bar{U}(4)$  difiere notablemente de los de otros grupos de simetría pues en general se exigía que se llenaran las representaciones con estados físicos reales y ello llevaba a la predicción de partículas<sup>(\*\*)</sup>.

---

(\*)

Es interesante relacionar con las realizaciones de Rarita Schwinger que son reducibles primero respecto al grupo de Lorentz homogéneo y luego respecto al grupo de Poincaré. Ambas realizaciones son por supuesto equivalentes pero sólo cuando ya están reducidas. Nosotros elegimos trabajar con las realizaciones de Rarita Schwinger porque son más simples (por ejemplo el campo vectorial en Bargmann - Wigner tiene 12 componentes redundantes) sin embargo ninguna de las conclusiones a las que hemos llegado depende de esa elección.

(\*\*)

El álgebra de corrientes desarrollado en forma consistente esta idea de que hay grupos como el  $\bar{U}(4)$  que tienen algo que ver con el mundo real pero tal que las partículas no llenan representaciones irreducibles.

Es, por otra parte, claro porqué Salam Delbourgo y Stratdhee son llevados a esa conclusión: si conservan el espacio total están trabajando con representaciones del grupo de Lorentz covariantes y pseudounitarias manifiestas. El producto escalar es indefinido a menos que se restrinja el espacio con ecuaciones del tipo (5). En efecto en el mismo trabajo citado se demuestra cómo la condición de trabajar con estados de norma positiva lleva naturalmente a restringir las representaciones de  $\bar{U}$  (4).

Sin embargo nosotros hemos mostrado que esa es sólo una manera de tratar la métrica indefinida y en particular, hay otra forma que permite asignar realidad física a todo el espacio de Hilbert.

Si partimos de suponer  $\bar{U}$  (4) entonces el lagrangiano libre tendrá la forma (comparar secc. 1.3.)

$$\mathcal{L} = m^2 \bar{\Psi} \Psi - \bar{\Psi} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}^\mu \Psi$$

donde  $\bar{\Psi} \Psi$  se interpreta como:

$$(\Psi_{i_1 i_2 \dots i_m}^{j_1 j_2 \dots j_n})^* (\gamma_0)_{i_1 i_1} \dots (\gamma_0)_{i_m i_m} (\gamma_0)_{j_1 j_1} \dots (\gamma_0)_{j_n j_n} \Psi_{i_1 i_2 \dots i_m}^{j_1 j_2 \dots j_n}$$

Las ecuaciones de movimiento serán las de Klein - Gordon :

$$(\square^2 + m^2) \Psi(x) = 0$$

$$(\square^2 + m^2) \bar{\Psi}(x) = 0$$

Ahora deberíamos encontrar la función de onda de una partícula, estudiar sus reglas de transformación bajo una operación del grupo de Lorentz y buscar el tensor de la métrica. El procedimiento ha sido ya muchas veces repetido así que sólo damos el resultado, el tensor de la métrica es:

$$\frac{1}{m^{n+m}} (\bar{\Psi})_{i_1 i_1} (\bar{\Psi})_{i_2 i_2} \dots (\bar{\Psi})_{i_m i_m} (\bar{\Psi})_{j_1 j_1} \dots (\bar{\Psi})_{j_n j_n} \quad (6)$$



En el método de Salam Delbourgo Stratdhee las ecuaciones que satisfacen los campos libres rompen la simetría. Aquí parecería que hemos logrado una ecuación de movimiento simétrica a costa de introducir un tensor de la métrica no invariante. Sin embargo esto si bien es cierto superficialmente, oculta que ahora las partículas llenan efectivamente representaciones irreducibles de  $\bar{U}(4)$  y más aún que los observables conmutan con el operador (6) (son invariantes de medida generalizada) y por consiguiente si se prepara un estado tal que algún observable  $\mathcal{O}$  esté bien definido y valga  $\lambda_{\mathcal{O}}$  y calculamos el valor medio de cualquier otro observable  $\mathcal{O}'$  (ver I.3.), la fórmula :

$$\frac{\langle \lambda_{\mathcal{O}} | \mathcal{O}' \eta | \lambda_{\mathcal{O}} \rangle}{\langle \lambda_{\mathcal{O}} | \eta | \lambda_{\mathcal{O}} \rangle}$$

puede ser reemplazada por :

$$\frac{\langle \lambda_{\mathcal{O}} | \mathcal{O}' | \lambda_{\mathcal{O}} \rangle}{\langle \lambda_{\mathcal{O}} | \lambda_{\mathcal{O}} \rangle}$$

en la cual no aparece explícitamente el operador  $\eta$ .

Pero por supuesto podemos resolver 2 problemas pero no 3. Ahora la matriz  $S$  debe conmutar con los generadores de  $\bar{U}(4)$  y además con el operador (6). Como este último no conmuta con los generadores de  $\bar{U}(4)$  al completar por continuas conmutaciones se genera un algebra de dimensión  $\infty$  y por consiguiente es difícil encontrar una matriz  $S$  que efectivamente sea invariante. Sin embargo aún cuando nos viéramos obligados a romper la simetría por no poder encontrar una interacción invariante  $\bar{U}(4)$  la situación sería distinta pues no sería el lagrangiano libre el que rompe la simetría. En el límite de acoplamiento pequeño la teoría sería invariante contrariamente a lo que sucede en la formulación actual en que se supone que la teoría es simétrica en el límite de acoplamiento  $\infty$ .

## VI. CONCLUSION

Recapitulamos ahora el desarrollo de esta tesis. Hemos partido en la sección I de un estudio de la relación existente entre ecuaciones de evolución y representaciones del grupo de Poincaré para así aclarar el sentido de nuestro programa ( usar sólo ecuaciones de Klein Gordon) desde un punto de vista más general. Llegamos de esta manera a que los campos deben configurar representaciones no necesariamente irreducibles, manifiestamente covariantes y pseudounitarias del grupo de Poincaré. Esta pseudounitariedad provoca la aparición de métrica indefinida en el espacio de Hilbert. Demostramos entonces que para que la interpretación probabilística sea posible es necesario que un cierto operador conmute con el hamiltoniano. La comparación con el campo electromagnético nos lleva a considerar ese operador como una transformación de medida generalizada. Hemos encontrado entonces un primer resultado: que la invariancia de medida, que según muchos autores estaría relacionada con la anulación de la masa, aparece porque se usa una ecuación de Klein Gordon y por consiguiente hay componentes redundantes en la función de onda. Por esa razón nosotros podemos definir una invariancia de medida para campos de cualquier espín y masa.

Luego consideramos algunos ejemplos para verificar si se pueden construir teorías que cumplen con los requisitos de este programa. Hemos seguido en todos los ejemplos el mismo esquema : a partir del estudio del subespacio de Hilbert de estados de una partícula analizamos la realización de la representación del grupo de Poincaré usada y buscamos el tensor de la métrica respecto del cual aquella es unitaria. Identificamos luego el operador que, ya como condición subsidiaria, ya como simetría, debe conmutar con el hamiltoniano. Luego mediante un razonamiento recursivo o iterativo obtenemos simultáneamente la interacción que satisface dicha conmutación y la expresión del operador en presencia de interacción.

Por último demostramos que los términos de interacción incluidos implican

teorías equivalentes a las usuales pero con la diferencia importante que partículas de distinto espín aparecen unificadamente descritas por un mismo campo. En la sección V señalamos la semejanza entre esta situación y la que aparece al plantear simetrías superiores del tipo  $SU(6\mathbb{Q})$  o  $\bar{U}(4)$ . Demostramos que si se intenta construir sistemáticamente una teoría invariante respecto a  $\bar{U}(4)$  se debe usar la ecuación de Klein Gordon y por consiguiente reproducir nuestro programa con solo algunas modificaciones no esenciales.

Como primer ejemplo consideramos un campo espinorial complejo interactuando con un campo vectorial real. Luego de obtener la expresión del operador de simetría en ausencia de interacción usamos el artificio de suponer la constante de acoplamiento como un campo extremo dependiente del tiempo e intentamos encontrar la teoría invariante respecto a una transformación cuya expresión sólo conocemos en ciertos intervalos de tiempo. Así llegamos a la determinación del lagrangiano invariante y de la expresión del operador en presencia de interacción. La teoría queda unívocamente determinada y equivalente a la electrodinámica mínima usual (sin embargo no necesariamente debemos identificar el campo vectorial con el campo electromagnético, en particular no se supuso que fuera de masa nula). El momento magnético normal del espinor aparece automáticamente determinado a pesar de trabajar con una ecuación de 2° orden.

En el 2° ejemplo consideramos un campo vectorial real masivo interactuando con una corriente externa. En este caso el campo describe simultáneamente partículas de espín 1 y 0. Mostramos que hay distintas maneras de formular esta teoría de manera tal que sólo las partículas de espín 1, sólo las de espín 0, ó ambas tengan sentido físico. En el primer caso la teoría es invariante respecto a la transformación de la función de onda :

$$\Psi_{\mu}^T(k) = \Psi_{\mu}(k) + k_{\mu} \Lambda$$

y la corriente externa debe conservarse. La semejanza con el caso del campo electromagnético es notable, sin embargo aquí el campo es masivo. En el tercer caso ambos tipos de partículas tienen sentido físico pero sólo las de espín 1 interactúan con la corriente externa que nuevamente se conserva. Por último, el 2° caso es equivalente a la teoría de dos campos escalares en interacción.

El formalismo usual trata de manera esencialmente distinta los campos de masa nula. Debido a eso si hacemos tender  $m \rightarrow 0$ , por ejemplo en el formalismo de Proca para mesones vectoriales, encontramos que el límite es singular. Esta situación poco satisfactoria oscurece las propiedades específicamente relacionadas con la anulación de la masa. En cambio, dentro de nuestro formalismo, y debido justamente a tratar en forma esencialmente unificada a todos los campos, el límite es perfectamente factible tal como lo mostramos en la sección III.3.

Como último ejemplo consideramos la interacción de un campo vectorial masivo complejo con un campo vectorial real que nuevamente puede ser, aunque no necesita ser, identificado con el campo electromagnético. La teoría pudo ser construida totalmente para el caso en que el campo era externo mientras que cuando éste incluía el campo propio de los mesones vectoriales encontramos un método iterativo para construir el lagrangiano invariante. La teoría determinada para campo externo resulta equivalente a la obtenida por Lee con su criterio de minimalidad pero además con un dado momento magnético y cuadripolar.

En conclusión los ejemplos tratados permiten afirmar que el programa intentado a partir de la ecuación de Klein Gordon para campos libres puede ser llevado a cabo sin enfrentar incompatibilidades con los principios de la mecánica cuántica (interpretación probabilística). No todo tipo de interacción puede ser introducido en esta clase de teorías pero en general las restricciones impuestas son compatibles con los datos experimentales que hay al respecto. Además, en todos los ejemplos considerados las restricciones incluyen las predichas por otros principios unificando en forma insospechada resultados del principio de interacción mínima de Gell-Mann, el método de Yang - Mills e inclusive (si bien no lo hemos desarrollado en detalle aquí, ver<sup>(4)</sup>) la interacción pseudoescalar entre piones y fermiones.

## Agradecimientos

Deseo expresar mi profundo reconocimiento a todos mis profesores y en general a las autoridades de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales que de una manera u otra han sido responsables del estimulante clima de trabajo, discusión y estudio, que me permitió realizar gran parte de esta tesis.

Además agradezco especialmente al Dr. Bollini quien dirigió este trabajo, sugirió el tema y prestó colaboración en todas las ocasiones en que fue requerido. También al Dr. Mignaco con quien mantuve interesantes discusiones.

Por último quiero señalar que la redacción final fue realizada mientras me desempeñaba como miembro del equipo de investigadores de la Fundación Bariloche.

Bibliografia

- (1) Foldy. Phys. Rev. vol. 102, pag. 568 (1956)
- (2) Bollini, C. G. Nuovo Cimento vol. XI, pag. 342 (1958); vol. XIII, pag. 46 (1959)
- (3) Bollini, C. G. Nuovo Cimento vol. XIV, pag. 560 (1959)
- (4) Bollini, C. G. Nuovo Cimento vol. 29, pag. 371 (1963)
- (5) Wigner, E. Nuovo Cimento vol. 3, pag. 517 (1956)
- (6) Wigner, E. Annals of Math. vol. 40, N° 1 (1939)
- (7) Weinberg, S. Phys. Rev. vol. 133, pag. B1318 (1963)
- (8) Barut, A. O., Muzinich, I.U., Williams, D.N. Phys. Rev. vol 130, pag. 442 (1963)
- (9) Shaw, R. Nuovo Cimento vol. 33, pag. 1074 (1964); vol% 37, pag. 1086 (1965)
- (10) Bargmann Wigner, Proc. of the Nat. Acad. of Sci. USA, vol. 34, pag. 211 (1948)
- (11) Rarita Schwinger, Phys. Rev. vol. 60, pag. 61 (1941)
- (12) Umezawa "Quantum Field Theory" North Holland Pub. Co. (1956)
- (13) Gupta, S. N. Proc. Phys. Soc. (London) vol. A63, pag. 681 (1950)
- (14) Schweber, S. S. "An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory", Row, Petersen and C. (New York) (1961)
- (15) Fierz, M. and Pauli, W. Proc. Roy. Soc. vol. A 173, pag. 211 (1939)
- (16) Behrends, R. E. and Fronsdal, C. Phys. Rev. 106, pag. 345 (1957)
- (17) Pandit, L. K. Nuovo Cimento Suppl. vol. XI, pag. 157 (1969)
- (18) Arons, M.E., Han M. Y. and Sudarshan, E. C. G. Phys. Rev. vol. 137, pag. 1085 (1965)
- (19) Bogoliubov, N. N., Shirkov, D. V., "Introduction to the Theory of Quantized Fields" Interscience Publishers, Ltd. New York (1959)
- (20) Matthews, P. T. Phys. Rev. vol. 76, pag. 684 L (1949)
- (21) Lee, T. D. and Yang, C. N. Phys. Rev. vol. 128, pag. 885 (1962)
- (22) Jordan Pand, Wigner, E. Z. Physik vol. 47, pag. 631 (1928)
- (23) Ogeievetskii, V. I. and Polubarinov, J. V. Nuovo Cimento vol. XXIII, pag. 173 (1962)
- (24) Coester, F. Phys. Rev. vol 83, pag. 798 (1951)

- (25) Yang, C. N., Mills, R. L. Phys. Rev. vol. 96, pag. 191 (1954)
- (26) Gell-Mann, M. Nuovo Cimento Suppl. vol. 4, pag. 848 (1956)
- (27) Dashen, R., Gell-Mann, M. Phys. Letters vol.17, pag. 142 (1965)
- (28) Lee, B. Phys. Rev. Letters, vol. 14, pag. 676 (1965)
- (29) Rühl, W. CERN preprint TH - 618 (1965)
- (30) Delbourgo, R., Salam A., Strathdee, J. Trieste Preprint (1965)
- (31) Budini P. and Fronsdal, C. Phys. Rev. Letters vol. 14, pag. 968 (1965)

Apéndice A

Supongamos el lagrangiano más general que sea invariante relativista, bilineal en el campo espinorial, lineal o cuadrático en el campo vectorial, lineal en las derivadas de éste. Suponemos además que se puede expresar como una suma de un lagrangiano libre de cuya variación se deduzcan las ecuaciones de Klein Gordon y un lagrangiano de interacción :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \\ \mathcal{L}_{\text{libre}} &= -m^2 \bar{\Psi} \Psi + \bar{\Psi} \not{\partial} \not{\partial} \Psi \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= \alpha_1 \bar{\Psi} \not{A} \Psi + \alpha_2 \bar{\Psi} A^2 \Psi + \beta \bar{\Psi} \sigma_{\mu\nu} \Psi F^{\mu\nu} + \\ &+ \bar{\Psi} \partial_\mu \left[ \alpha_3 \not{\delta}^\mu \not{A} + \alpha_5 \not{\delta}^\mu A^2 + \alpha_7 A^\mu + \alpha_9 \not{A} A^\mu \right] \Psi + \\ &+ \bar{\Psi} \left[ \alpha_4 \not{A} \not{\delta}^\mu + \alpha_6 A^2 \not{\delta}^\mu + \alpha_8 A^\mu + \alpha_{10} \not{A} A^\mu \right] \partial_\mu \Psi \end{aligned}$$

llamamos :

$$\begin{aligned} I^\mu &= \alpha_3 \not{\delta}^\mu \not{A} + \alpha_5 \not{\delta}^\mu A^2 + \alpha_7 A^\mu + \alpha_9 \not{A} A^\mu \\ P^\mu &= \alpha_4 \not{A} \not{\delta}^\mu + \alpha_6 A^2 \not{\delta}^\mu + \alpha_8 A^\mu + \alpha_{10} \not{A} A^\mu \\ \mathcal{O} &= \alpha_1 \not{A} + \alpha_2 A^2 + \beta \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

La ecuación de movimiento es :

$$(\partial^2 + m^2) \Psi = -\partial_\mu (I^\mu \Psi) + P^\mu \partial_\mu \Psi + \mathcal{O} \Psi$$

Si llamamos  $\Psi^\Gamma$  al transformado de  $\Psi$  sabemos que :

$$\Psi^\Gamma = \frac{i\partial}{m} \Psi \quad (\text{en intervalos de tiempo en que } e = 0)$$

Si la teoría es invariante entonces :

$$(\partial^2 + m^2) \Psi^\Gamma = -\partial_\mu (I^\mu \Psi^\Gamma) + P^\mu \partial_\mu \Psi^\Gamma + \mathcal{O} \Psi^\Gamma$$



Luego si llamamos  $\phi = \psi - i\psi^\top$  la ecuación que satisface es :

$$(\partial^2 + m^2) \phi = -\partial_\mu (I^\mu \phi) + P_\mu \partial^\mu \phi + V \phi \quad (1)$$

Además en un intervalo de tiempo en que la constante de acoplamiento se anule  $\phi$  cumple:

$$(m + i\cancel{\partial}) \phi = 0$$

Llamando  $\varphi = (m + i\cancel{\partial}) \phi$ , la ecuación (1) puede ponerse :

$$(m - i\cancel{\partial}) \varphi = -\partial_\mu (I^\mu \phi) + P_\mu \partial^\mu \phi + V \phi \quad (2)$$

Supongamos que la carga eléctrica se anule en un pequeño intervalo desde el instante  $t_0$  hasta  $t_0 + \delta t$ . Entonces:

$$e(t_0+) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} e(t_0 + \delta t) = 0$$

y lo mismo para :

$$\dot{e}(t_0+) = \ddot{e}(t_0+) = \dots = e^{(n)}(t_0+) = 0$$

Por hipótesis debe  $\varphi$  anularse en dicho intervalo, lo cual implica :

$$\varphi(t_0+) = 0$$

Es obvio que  $\varphi(t_0+)$  debe depender del valor de  $e$  o/y de sus derivadas en el instante  $t_0+$ . Además puede ser también función del valor de  $e$  en los instantes anteriores a  $t_0$ . Es decir :

$$\begin{aligned} \varphi(t_0+) &= F(e(t)_{t \leq t_0^-}; e(t_0+), \dot{e}(t_0+) \dots e^{(n)}(t_0+) \dots; t_0) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} F(e(t)_{t \leq t_0 - \delta}; e(t_0 + \delta), \dot{e}(t_0 + \delta) \dots e^{(n)}(t_0 + \delta) \dots; t_0) \end{aligned}$$

Derivando ambos lados de la ecuación respecto a  $t_0$  resulta :

$$\dot{\varphi}(t_0+) = \left. \frac{\partial F}{\partial e} \right|_{t_0+} \dot{e}(t_0+) + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{e}} \right|_{t_0+} \ddot{e} + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial t_0} \right|_{t_0+}$$

donde el último término se obtiene derivando F respecto de  $t_0$  suponiendo  $(e(t), \dot{e}(t) \dots)$  constantes en el intervalo  $t_0, t_0 + \delta t$ .

De (2) se obtiene  $\partial_0 \psi$

$$\dot{\psi} = -i\gamma_0 (m + i\gamma_k \partial_k) \psi - i\gamma_0 \partial_\mu (I^\mu \phi) + i\gamma_0 P^\mu \partial_\mu \phi + i\gamma_0 \mathcal{O} \phi$$

Identificando términos :

$$\frac{\partial F}{\partial e} = -i\gamma_0 \left( \frac{\partial I^0}{\partial e} \right) \phi$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{e}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{e}} = \dots = \frac{\partial F}{\partial e^{(n)}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -i\gamma_0 (m + i\gamma_k \partial_k) \psi - i\gamma_0 I^\mu \partial_\mu \phi + i\gamma_0 P^\mu \partial_\mu \phi + i\gamma_0 \mathcal{O} \phi - i\gamma_0 (\partial_k I^k) \phi$$

De la 1a. y 2a. línea de ecuaciones resulta :

$$F = -i\gamma_0 \int \left( \frac{\partial I^0}{\partial e} \right) \phi d(e(t_0+)) + C(e(t)_{t \leq t_0-}, t_0)$$

$$F = -i\gamma_0 I^0 \phi + C(e(t)_{t \leq t_0-}, t_0)$$

Como F debe anularse si  $e(t_0+)$  se anula independientemente del valor de  $e(t)_{t \leq t_0-}$  entonces:

$$C(e(t)_{t \leq t_0-}, t_0) = 0 \Rightarrow \psi = F = -i\gamma_0 I^0 \phi$$

Derivando ahora F respecto de  $t$  (considerando  $e(t_0)$  constante en el intervalo  $t_0, t_0 + \delta$ ) resulta :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -i\gamma_0 I^0 \partial_0 \phi$$

Igualando :

$$-i\gamma_0 I^0 \partial_0 \phi = -i\gamma_0 (m + i\gamma_k \partial_k) \psi - i\gamma_0 I^0 \partial_0 \phi - i\gamma_0 \partial_k (I^k \phi) + i\gamma_0 P^\mu \partial_\mu \phi + i\gamma_0 \mathcal{O} \phi$$

simplificando y reemplazando  $\psi = (m + i\cancel{\partial}) \phi$  :

$$-i\gamma_0 \partial_k [\gamma_k \gamma_0 I^0 - I_k] \phi + i\gamma_0 [\gamma_0 I^0 \gamma^\mu + P^\mu] \partial_\mu \phi + i\gamma_0 [\gamma_0 I^0 \gamma_0 I^0 + \mathcal{O}] \phi = 0$$

Los 3 términos sumados deben ser cero pues si no implicaría una relación del tipo:

$$G(\partial_k \phi, \partial_0 \phi, \phi) = 0$$

es decir  $\phi$  satisfaría una ecuación de 1er. grado.

Luego:

$$\gamma_k \gamma_0 I^0 = I_k$$

$$\gamma_0 I^0 \gamma^\mu = -P^\mu$$

$$\gamma_0 I^0 \gamma_0 I^0 = 0$$

De la 1a. ecuación se deduce que  $\alpha_7 = \alpha_9 = 0$ , de la 2a. sale que  $\alpha_8 = \alpha_{10} = 0$ ,  $\alpha_3 = -\alpha_4$  y  $\alpha_5 = -\alpha_6$ . Por último de la 3a. se deduce que  $\alpha_1 = \alpha_5 = 0$  y  $\alpha_2 = -\alpha_3^2$ . Luego el lagrangiano se reduce a :

$$\mathcal{L} = -m^2 \bar{\Psi} \Psi + \bar{\Psi} (\not{\partial} - \alpha_3 \not{A}) (\not{\partial} + \alpha_3 \not{A}) \Psi$$

De la hermeticidad del lagrangiano resulta que  $\alpha_3$  es puramente imaginario, luego ponemos  $\alpha_3 = -ie$  con lo cual el lagrangiano toma la forma conocida :

$$\mathcal{L} = -m^2 \bar{\Psi} \Psi + \bar{\Psi} (\not{\partial} + ie \not{A}) (\not{\partial} - ie \not{A}) \Psi \quad (3)$$

Para determinar  $\Psi^\Gamma$  en función de  $\Psi$  en todo instante de tiempo consideramos :

$$\varphi = -i \gamma_0 I^0 \phi = -e \not{A} \phi$$

Es decir, en todo instante de tiempo se cumple que :

$$[m + i(\not{\partial} + ie \not{A})] \phi = 0$$

Por definición  $\phi = \Psi - \Psi^\Gamma$  pero también hubieramos podido definir  $\phi' = \Psi + \Psi^\Gamma$  para el cual se hubiera podido demostrar en forma totalmente análoga a lo hecho hasta ahora que :

$$[m - i(\not{\partial} - ie \not{A})] \phi' = 0$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene :

$$m (\phi - \phi') + i (\not{\partial} - ieA) (\phi + \phi') = 0$$

$$-2m \psi^\tau + 2i (\not{\partial} - ieA) \psi = 0$$

$$\psi^\tau = \frac{i (\not{\partial} - ieA)}{m} \psi \quad (4)$$

Sin embargo con esto no podemos considerar conocida la transformación. En efecto,  $\eta$  no es una transformación de coordenadas, es decir una transformación en el espacio de las  $\psi$ , pues  $\psi^\tau$  es una combinación de  $\psi$  y su derivada temporal. Más correctamente debemos considerarla una transformación canónica en el espacio de  $\psi$  y  $\partial_0 \psi$ . Por ello para conocerla totalmente necesitamos determinar no sólo  $\psi^\tau$  sino también  $\partial_0 \psi^\tau$  como función de  $\psi$  y  $\partial_0 \psi$ . Sumando las ecuaciones :

$$[m + i (\not{\partial} - ieA)] \phi = 0$$

$$[m - i (\not{\partial} - ieA)] \phi' = 0$$

resulta :

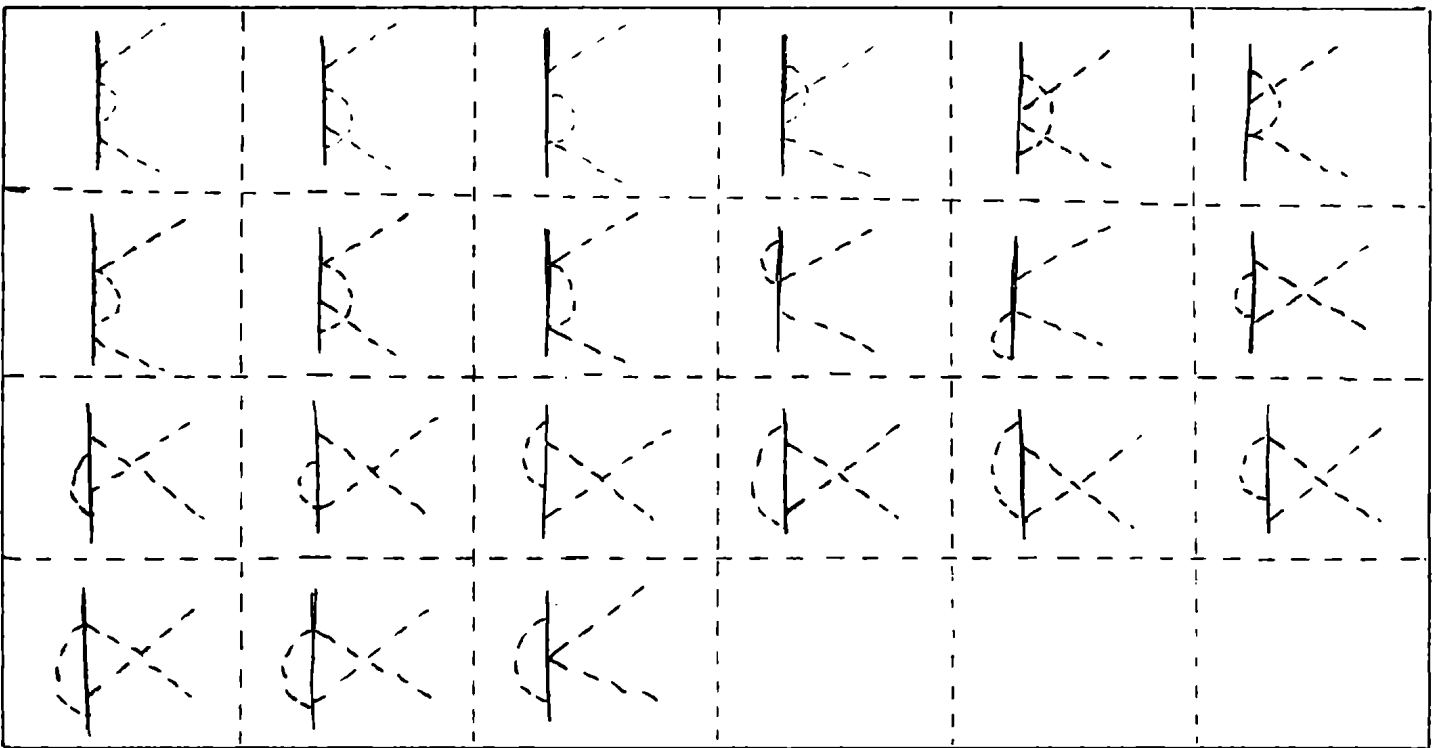
$$m (\phi + \phi') + i (\not{\partial} - ieA) (\phi - \phi') = 0$$

$$\psi = \frac{i (\not{\partial} - ieA)}{m} \psi^\tau \quad (4 \text{ bis})$$

Apéndice B

Como método alternativo para estudiar la invariancia de una teoría respecto a  $\eta$  vamos a mostrar aquí como se puede demostrar que el elemento de matriz del efecto Compton es invariante en 4o. orden de  $e$  cuando se eligen las constantes de renormalización en forma conveniente.

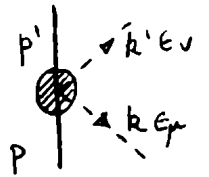
Llamamos  $p$  al impulso del fermión incidente,  $p'$  al del fermión final,  $k$  el del fotón inicial y  $k'$  el del final. Entonces los diagramas a calcular son :



Los 3 diagramas :



serán simbolizados por

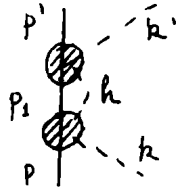


$$= \Pi_{\mu\nu}(p, p', k, k')$$

En todas las fórmulas que siguen omitimos por comodidad de notación poner el signo de integral y el propagador del fotón. Para demostrar que es invariante basta con ver que :

$$\not{p}' M - M \not{p} = 0 \quad (1)$$

Calculemos entonces en primer lugar esa expresión para los diagramas :



Ante todo  $\Pi_{\mu\nu}$  puede ponerse:

$$2m \left\{ \frac{m - i\not{p}'}{2m} \left[ i\gamma_\nu \frac{m - i(\not{p} - \not{k})}{(p-k)^2 + m^2} i\gamma_\mu \right] \frac{m - i\not{p}}{2m} + \frac{m + i\not{p}'}{2m} \left[ i\gamma_\nu \frac{m + i(\not{p} - \not{k})}{(p-k)^2 + m^2} i\gamma_\mu \right] \frac{m + i\not{p}}{2m} + \text{perm } k \rightarrow k' \right\}$$

Luego el diagrama considerado será igual a :

$$\begin{aligned} & (m - i\not{p}') \mathcal{H}_{\nu\lambda} \left[ -\frac{(p-k-h)^2 + m^2}{4m^2} + \frac{m - i\not{p}_1}{2m} \right] \mathcal{H}_{\lambda\mu} \left( \frac{m - i\not{p}}{2m} \right) \\ & (m - i\not{p}') \mathcal{H}_{\nu\lambda} \left[ \frac{(p-k-h)^2 + m^2}{4m^2} \right] \mathcal{H}_{\lambda\mu}^* (m + i\not{p}) \\ & (m + i\not{p}') \mathcal{H}_{\nu\lambda}^* \left[ -\frac{(p-k-h)^2 + m^2}{4m^2} + \frac{m + i\not{p}_1}{2m} \right] \mathcal{H}_{\lambda\mu}^* (m + i\not{p}) \\ & (m + i\not{p}') \mathcal{H}_{\nu\lambda}^* \left[ \frac{(p-k-h)^2 + m^2}{4m^2} \right] \mathcal{H}_{\lambda\mu} (m - i\not{p}) \end{aligned}$$

donde :

$$\mathcal{N}_{\nu\lambda} = i\gamma_\nu \frac{m - i(\not{p}' + \not{k}')}{(p' + k')^2 + m^2} i\gamma_\lambda + i\gamma_\lambda \frac{m - i(\not{p}' - \not{k})}{(p' - k)^2 + m^2} i\gamma_\nu$$

$$\mathcal{N}_{\nu\lambda}^* = i\gamma_\nu \frac{m + i(\not{p}' + \not{k}')}{(p' + k')^2 + m^2} i\gamma_\lambda + i\gamma_\lambda \frac{m + i(\not{p}' - \not{k})}{(p' - k)^2 + m^2} i\gamma_\nu$$

$$\mathcal{N}_{\lambda\mu} = i\gamma_\lambda \frac{m - i(\not{p} - \not{k})}{(p - k)^2 + m^2} i\gamma_\mu + i\gamma_\mu \frac{m - i(\not{p} - \not{k})}{(p - k)^2 + m^2} i\gamma_\lambda$$

$$\mathcal{N}_{\lambda\mu}^* = i\gamma_\lambda \frac{m + i(\not{p} - \not{k})}{(p - k)^2 + m^2} i\gamma_\mu + i\gamma_\mu \frac{m + i(\not{p} - \not{k})}{(p - k)^2 + m^2} i\gamma_\lambda$$

Evidentemente los términos incluidos en el 1er. y 3er. renglones son automáticamente invariantes y por consiguiente no contribuyen en (1). Luego llamando  $\Sigma_{\mu\nu}^i$  a la suma de los 3 diagramas:

$$\not{p}' \Sigma_{\mu\nu} - \Sigma_{\mu\nu} \not{p} = \not{p}' A_{\mu\nu} - A_{\mu\nu} \not{p} \text{ donde.}$$

$$A_{\mu\nu} = \left[ \frac{\not{p}' \gamma_\nu + \gamma_\nu (\not{p}' + \not{k}')}{(p - k)^2 + m^2} \gamma_\lambda + \frac{\not{p}' \gamma_\lambda + \gamma_\lambda (\not{p}' - \not{k})}{(p' - k)^2 + m^2} \gamma_\nu \right] \times$$

$$\times \left[ \gamma^\lambda \frac{\not{p} - \not{k}}{(p - k)^2 + m^2} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{\not{p} - \not{k}}{(p - k)^2 + m^2} \gamma^\lambda + \gamma_\mu \frac{\not{p} - \not{k}}{(p - k)^2 + m^2} \gamma_\lambda + \gamma_\lambda \frac{\not{p} - \not{k}}{(p - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \right]$$

Ahora sumamos los diagramas :



Considerando que todavía nos falta agregar los términos que se obtienen reemplazando  $k \rightarrow k'$  y el diagrama :



es inmediato ver que :

$$\not{p}' M_{\mu\nu} - M_{\mu\nu} \not{p} = \not{p}' B_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} \not{p}$$

donde

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} = & \frac{\not{p}' \delta'_\nu + \delta'_\nu (\not{p}' + k')}{(p-k)^2 + m^2} \delta'_\lambda \delta'^\lambda \frac{(\not{p} - k) \delta'_\mu + \delta'_\mu \not{p}}{(p-k)^2 + m^2} - \\ & - \frac{\not{p}' \delta'_\lambda + \delta'_\lambda (\not{p}' - k)}{(p-h)^2 + m^2} \delta'_\mu \delta'^\mu \frac{(\not{p} - k) \delta'_\nu + \delta'_\nu \not{p}}{(p-k)^2 + m^2} \\ & - \frac{\not{p}' \delta'_\nu + \delta'_\nu (\not{p}' + k')}{(p-k)^2 + m^2} \delta'_\mu \delta'^\mu \frac{(\not{p} - k) \delta'_\lambda + \delta'_\lambda \not{p}}{(p-h)^2 + m^2} \end{aligned}$$

Calculamos ahora las integrales :

$$I = \int \frac{\not{p}' \delta'_\lambda + \delta'_\lambda (\not{p}' - k)}{[(p-h)^2 + m^2] h^2} d^4 h \quad ; \quad II = \int \frac{(\not{p} - k) \delta'_\lambda + \delta'_\lambda \not{p}}{(p-h)^2 + m^2} d^4 h$$

Aplicamos el método de regularización analítica en lugar de  $h^2$  ponemos  $h^{2\lambda}$  y continuamos analíticamente en  $\lambda$ . Las integrales son inmediatas y se obtiene :

$$I = i\pi^2 \left\{ \left[ \frac{1}{\lambda-1} - \log m^2 \right] \left[ \not{p}' \delta'_\lambda + \frac{\delta'_\lambda \not{p}'}{2} \right] + \frac{5}{4} \delta'_\lambda \not{p}' + \not{p}' \delta'_\lambda \right\}$$

$$II = i\pi^2 \left\{ \left[ \frac{1}{\lambda-1} - \log m^2 \right] \left[ \not{p} \delta'_\lambda + \frac{\delta'_\lambda \not{p}}{2} \right] + \frac{5}{4} \delta'_\lambda \not{p} + \not{p} \delta'_\lambda \right\}$$

Reemplazando  $\frac{1}{\lambda-1}$  por una constante arbitraria y calculando  $I \delta'_\lambda$  y  $\delta'_\lambda II$  obtenemos :

$$A \not{p}' = I \delta'_\lambda + \delta'_\lambda II = A \not{p}$$

Además  $\int \frac{d^4 h}{h^2} = 0$  si se calcula por este método

por lo tanto:

$$\not{p}' M_{\mu\nu} - M_{\mu\nu} \not{p} = \not{p}' C_{\mu\nu} - C_{\mu\nu} \not{p}$$



$$C_{\mu\nu} = \frac{A \delta^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}}{(P-k)^2 + m^2}$$

Entonces si elegimos  $A = 0$  el elemento de matriz del efecto Compton es mínimo. Es interesante notar que la invariancia implica entonces un cierto valor para las constantes de renormalización en forma similar a lo que sucede con la invariancia de medida usual.

Apéndice C

Vamos a demostrar aquí que la teoría que se deduce del lagrangiano

$$\mathcal{L} = -m^2 \varphi_\mu^* \varphi^\mu + D_\mu^* \varphi_\nu^* D^\nu \varphi^\mu - D_\mu^* \varphi_\nu^* D^\mu \varphi^\nu - D_\mu^* \varphi^{\mu*} D_\nu \varphi^\nu - ic F_{\mu\nu} \varphi^{\mu*} \varphi^\nu \quad (1)$$

mediante los métodos de cuantificación canónica es invariante de medéda generalizada. Para ello obtendremos primero los impulsos canónicos y la expresión de la transformación  $\eta$  en función de coordenadas e impulsos. Luego calculamos el hamiltoniano y demostramos que es invariante :

a) los impulsos conjugados son :

$$\begin{cases} \pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\mu} = -D^{0*} \varphi^{\mu*} + D^{\mu*} \varphi^{0*} - D_\mu^* \varphi^{\mu*} g^{0\mu} \\ \pi^{\mu*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\mu^*} = -D^0 \varphi^\mu + D^\mu \varphi^0 - D_\mu \varphi^\mu g^{0\mu} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_0} = +D_\mu^* \varphi^{\mu*} \\ \pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} = -D_0^* \varphi^{i*} + D^{i*} \varphi^{0*} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \partial^0 \varphi^{0*} &= -\pi^0 + ie A^0 \varphi_0^* + (\partial^k + ie A^k) \varphi_k^* \\ \partial^0 \varphi^{i*} &= -\pi^i - ie A^0 \varphi^{i*} + (\partial^k + ie A^k) \varphi_k^{*0} \\ \partial^0 \varphi^0 &= -\pi^{0*} - ie A^0 \varphi_0 + (\partial^k - ie A^k) \varphi_k \\ \partial^0 \varphi^i &= -\pi^{i*} + ie A^0 \varphi^i + (\partial^k - ie A^k) \varphi_k^0 \end{aligned}$$

b) la expresión de la transformación :

$$\begin{cases} \varphi_\mu^T = \varphi_\mu - \frac{2 D_\mu D^\nu}{m^2} \varphi_\nu \\ \varphi_0^T = \varphi_0 - \frac{2 D_0 D^0}{m^2} \varphi_0 - \frac{2 D_0 D^i}{m^2} \varphi_i \\ \varphi_i^T = \varphi_i - \frac{2 D_i D^0}{m^2} \varphi_0 - \frac{2 D_i D^k}{m^2} \varphi_k \end{cases} \quad (2)$$

como  $(D_\mu D^\mu - m^2) \varphi^0 = -2ie \varphi_\mu F^{\mu 0}$

$$(D_0 D^0) \varphi^0 = -D_i D^i \varphi^0 + m^2 \varphi^0 - 2ie \varphi_\mu F^{\mu 0}$$

también :  $D^0 D_i \varphi^i = D_i D^0 \varphi^i + ie \varphi_j F^{j0}$

luego :

$$\begin{cases} \varphi_0^T = -\varphi_0 + \frac{2D_i \pi^{i*}}{m^2} + \frac{2ie}{m^2} \varphi^\mu F_{\mu 0} \\ \varphi_i^T = \varphi_i + \frac{2D_i \pi^{0*}}{m^2} \\ \pi^{0T} = D_\mu^* \varphi^{\mu T} \\ \pi_i^T = -D^{0*} \varphi^{i* T} + D^{i*} \varphi^{0* T} \end{cases} \quad (3)$$

reemplazando  $\varphi^{\mu T}$ :

$$\pi^{0T} = -\pi^0$$

(3 bis)

$$\pi_i^T = \pi_i + \frac{2ie F^{0i} \pi^0}{m^2}$$

d) cálculo del hamiltoniano :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^\mu \partial_0 \varphi_\mu + \pi^{\mu*} \partial_0 \varphi_\mu^* - \mathcal{L} = \\ &= \pi^0 \partial_0 \varphi_0 + \pi^{0*} \partial_0 \varphi_0^* + \pi^i \partial_0 \varphi_i + \pi^{i*} \partial_0 \varphi_i^* + D_\mu^* \varphi_\nu^* D^\nu \varphi^\mu - \\ &\quad - D_\mu^* \varphi_\nu^* D^\mu \varphi^\nu - D_\mu^* \varphi^{\mu*} D_\nu \varphi^\nu - ie F_{\mu\nu} \varphi^{\mu*} \varphi^\nu + m^2 \varphi_\mu^* \varphi^\mu = \\ &= \pi^\mu \partial_0 \varphi_\mu + \pi^{\mu*} \partial_0 \varphi_\mu^* + ie A_0 [\pi^\mu \varphi_\mu - \pi^{\mu*} \varphi_\mu^*] + m^2 \varphi_\mu^* \varphi^\mu + \\ &\quad \pi^0 \pi^{0*} - \pi^i \pi^{i*} + \frac{G_{ij} G^{ij}}{2} + ie F_{\mu\nu} \varphi^{\mu*} \varphi^\nu \end{aligned}$$

donde  $G_{ij} = D_i \varphi_j - D_j \varphi_i$

pero

$$\pi^\mu D_0 \varphi_\mu = \pi^0 (D_i \varphi_i - \pi^{0*}) + \pi^i (\pi_i^* + D_i \varphi_0)$$

luego

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\pi^0 \pi^{0*} + \pi^i \pi^{i*} + \pi^0 D_i \varphi_i + \pi^{0*} D_i^* \varphi_i^* + \\ &\quad + \pi^{i*} D_i^* \varphi^0 + m^2 \varphi_\mu^* \varphi^\mu + \frac{G_{ij} G^{ij}}{2} + ie F_{\mu\nu} \varphi^{\mu*} \varphi^\nu \\ &\quad + ie A_0 (\pi^\mu \varphi_\mu - \pi^{\mu*} \varphi_\mu^*) \end{aligned} \quad (4)$$

e) demostración de la invariancia de  $\mathcal{L}$ . Consideramos cada término por separado.

$$G_{ij}^T = G_{ij} + 2ie \frac{F_{ij} \Pi^{0*}}{m^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} G_{ij}^{*T} G^{ijT} &= \frac{1}{2} \left( G_{ij}^* - \frac{2ie}{m^2} F_{ij} \Pi^0 \right) \left( G^{ij} + \frac{2ie}{m^2} F^{ij} \Pi^{0*} \right) = \\ &= \frac{1}{2} G_{ij}^* G^{ij} - \frac{2ie}{m^2} F_{ij} G^{ij} \Pi^0 + \frac{ie}{m^2} G_{ij}^* F^{ij} \Pi^{0*} - \frac{2e^2}{m^2} F_{ij} F^{ij} \Pi^0 \Pi^{0*} \end{aligned}$$

$$\Pi^{\mu T} \Pi_{\mu}^{*T} = \Pi^{\mu} \Pi_{\mu}^* + \frac{2ie}{m^2} \Pi^{0*} F^{0i} \Pi^i - \frac{2ie}{m^2} \Pi^0 F^{0i} \Pi^{i*} + \frac{4e^2}{m^4} (F^{0i})^2 \Pi^0 \Pi^{0*}$$

$$\Pi^{0T} D_i \varphi_i^T = -\Pi^0 D_i \varphi_i + 2\Pi^0 \frac{D_i D_i}{m^2} \Pi^{0*}$$

$$\begin{aligned} \Pi^{iT} D_i \varphi_0^T &= -\Pi^i D_i \varphi_0 - 2\Pi^i \frac{D_i D_j}{m^2} \Pi^{j*} + \frac{2ie}{m^2} F^{0i} \Pi^0 D_i \varphi_0 + \\ &+ \frac{4ie}{m^4} F^{0i} \Pi^0 D_i D_j \Pi^{j*} - \frac{4e^2}{m^4} D_i (\varphi_{\mu} F^{\mu 0}) F^{0i} \Pi^0 - \frac{2ie}{m^2} \Pi^i D_i (F^{\mu 0} \varphi_{\mu}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m^2 \varphi_{\mu}^{*T} \varphi^{\mu T} &= m^2 \varphi_{\mu}^* \varphi^{\mu} + m^2 \left[ \varphi_0^* \frac{2 D_i \Pi^i}{m^2} + \varphi_0 \frac{2 D_i^* \Pi^i}{m^2} - \right. \\ &- \frac{2 D_i \Pi^0}{m^2} \varphi_i^* - \frac{2 D_i^* \Pi^0}{m^2} \varphi_i \left. \right] + m^2 \left[ -\frac{4e^2}{m^4} (F^{\mu 0})^2 \varphi_{\mu} \varphi^{\mu} \right. \\ &+ \frac{2ie}{m^2} \varphi_{\mu} \varphi_0^* F^{\mu 0} - \frac{2ie}{m^2} \varphi_{\mu}^* \varphi_0 F^{\mu 0} + \frac{4 D_i \Pi^i}{m^2} ie \varphi_{\mu}^* F^{\mu 0} \\ &\left. - \frac{4ie}{m^4} D_i^* \Pi^i \varphi_{\mu} F^{\mu 0} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ie F_{\mu\nu} \varphi^{\mu T} \varphi^{\nu T} &= ie F_{ij} \varphi_i^* \varphi_j - \frac{ie}{m^2} F_{ij} 2 D^{*i} \Pi^0 \varphi_j - \frac{ie}{m^2} F_{ij} \varphi_i^* 2 D^j \Pi^{0*} \\ &- ie F_{0i} \varphi_0^* \varphi_i + ie F_{0i} \varphi_0^* \frac{2 D_i \Pi^0}{m^2} - \\ &- \frac{ie^2}{m^4} F_{0i} D_j^* \Pi^j D_i \Pi^{0*} + \frac{2ie}{m^2} F_{0i} D_j \Pi^j \varphi_i - \\ &- \frac{2e^2}{m^2} \varphi_{\mu}^* F^{\mu 0} \varphi_i F_{0i} + \frac{4e^2}{m^4} \varphi_{\mu}^* F^{\mu 0} F_{0i} D_i \Pi^{0*} \left. \right] + h.c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ie A_0 (\Pi^{\mu} \varphi_{\mu}) &= -\frac{2ie}{m^2} A_0 \partial_i (\Pi^i \Pi^{0*}) + \frac{2ie}{m^2} A_0 \partial_i (\Pi^{i*} \Pi^0) + \\ &+ \frac{4e^2}{m^4} A_0 \partial_i (\Pi^0 \Pi^{0*} F^{0i}) + ie A_0 (\Pi^{\mu} \varphi_{\mu}) \end{aligned}$$

luego reemplazando en (4)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^T(\Psi^T(\Psi, \pi), \pi^T(\Psi, \pi)) &= \pi_\mu^* \pi^\mu + \frac{1}{2} G_{ij} G^{ij*} + \pi^0 D_i \varphi^i + ie A_0 \pi^\mu \varphi_\mu \\ &\quad + \pi^i D_i \varphi_0 + \pi^{0*} D_i^* \varphi^{i*} + \pi^{i*} D_i^* \varphi_0^* - ie A_0 \pi^\mu \varphi_\mu^* + \\ &\quad + ie F_{ij} \varphi^{i*} \varphi^j + \frac{2ie}{m^2} \left[ D^{*i} \varphi^{*j} F^{ij} \pi^{0*} - D^i \varphi^j F^{ij} \pi^0 \right. \\ &\quad \left. - \varphi^j F^{ij} D^{*i} \pi^0 + \varphi^{j*} F^{ij} D^i \pi^{0*} \right] + \frac{2ie}{m^4} \left[ \right. \\ &\quad \left. - \frac{4e^2}{m^4} F_{ij} D^{*i} \pi^0 D^j \pi^{0*} - ie F_{ij} F^{ij} \pi^0 \pi^{0*} \right] + \frac{2ie}{m^2} \cdot \left[ \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[ A_0 \partial_i (\pi^{i*} \pi^0 - \pi^i \pi^{0*}) \right] + \frac{4e^2}{m^4} A_0 \partial_i (\pi^0 \pi^{0*} F^{0i}) \right] \end{aligned}$$

Pero recordando que  $\mathcal{H}(\Psi, \pi)$  es igual a :

$$\mathcal{H}(\Psi, \pi) = \mathcal{H}^T(\Psi^T(\Psi, \pi), \pi^T(\Psi, \pi)) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

donde F es la función generatriz, vemos que nos conviene suponer  $\partial_0 A_\mu = 0$  pues en ese caso F no depende explícitamente de t y podemos encontrar el hamiltoniano transformado. Entonces:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{H} &= \left[ -\frac{2ie}{m^2} \pi^{*0} \pi^i + \frac{2ie}{m^2} \pi^0 \pi^{i*} + \frac{4e^2}{m^4} \pi^0 \pi^{0*} F^{0i} \right] \partial^0 A_i + \\ &\quad + \left[ \frac{2ie}{m^2} \varphi^i \pi^0 - \frac{2ie}{m^2} \varphi^{i*} \pi^{0*} + \frac{\pi^{0*} \partial^i \pi^0}{m^2} + \frac{\pi^0 \partial^i \pi^{0*}}{m^2} \right] \partial^0 F^{0i} = \\ &= 0 \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Apéndice D

Sea  $M$  el elemento de matriz correspondiente al scattering de Møller incluyendo sólo el vértice doble de la figura va

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } p_2 \epsilon_b \text{ and } p_1 \epsilon_a \text{ meet at a vertex, connected by a dashed line } k \text{ to a vertex where } p_4 \epsilon_d \text{ and } p_3 \epsilon_c \text{ meet.} \\ \text{Diagram 2: } p_4 \epsilon_d \text{ and } p_1 \epsilon_a \text{ meet at a vertex, connected by a dashed line } k \text{ to a vertex where } p_2 \epsilon_b \text{ and } p_3 \epsilon_c \text{ meet.} \\ \text{Diagram 3: } p_2 \epsilon_b \text{ and } p_1 \epsilon_a \text{ meet at a vertex, connected by a dashed line } k \text{ to a vertex where } p_4 \epsilon_d \text{ and } p_3 \epsilon_c \text{ meet, with } p_2 \text{ and } p_4 \text{ crossing.} \end{array} \end{array}$$

Si al vértice elemental :

$$\begin{array}{c} p' \epsilon_\beta \\ p \epsilon_\alpha \end{array} \dots \epsilon_\mu = (p'_\mu + p_\mu) g^{\alpha\beta} + 2g^\alpha_\mu (p'^\beta - p^\beta) - 2g^\beta_\mu (p'^\alpha - p^\alpha)$$

lo llamamos  $\Gamma_\mu^{\beta\alpha}(p', p)$  entonces :

$$M = \Gamma_\mu^{ba}(p_2, p_1) \Gamma_\nu^{dc}(p_4, p_3) \frac{g^{\mu\nu}}{k^2} + \Gamma_\mu^{da}(p_4, p_1) \Gamma_\nu^{bc}(p_2, p_3) \frac{g^{\mu\nu}}{k^2} + 2(g^{ac}g^{bd} - g^{ad}g^{bc} - g^{ab}g^{cd})$$

Queremos demostrar que :  $p_1 p_2^{(b)} M p_3^c p_4^d \neq 0$  y que para anularlo

hay que agregar el vértice vb. Como :

$$p_1 \Gamma_\mu^{ba}(p_2, p_1) p_{2b} = g^a_\mu (p_2 - p_1)^2 p_1$$

$$p_1 \Gamma_\mu^{da}(p_4, p_1) p_{4d} = g^a_\mu (p_4 - p_1)^2 p_1$$

luego:

$$p_1 p_2^b M p_3^c p_4^d = p_1 [p_4^d \Gamma_a^{dc} p_3^c + p_2^b \Gamma_a^{bc} p_3^c] + p_1 p_2^b p_3^c p_4^d [2g^{ac}g^{bd} - g^{ab}g^{cd} - g^{ad}g^{bc}]$$

pero:

$$p'^\beta \Gamma_\mu^{\beta\alpha}(p', p) p_\alpha = (2p^2 - p \cdot p') (p_\mu + p'_\mu)$$

por consiguiente:

$$\begin{aligned}
 P_1 P_2^2 M P_3^2 P_4^2 &= P_1 \left[ (P_a^{(4)} + P_a^{(3)})(-2m^2 - p^{(4)} p^{(3)}) + (P_a^{(3)} + P_a^{(2)})(-2m^2 - p^{(2)} p^{(3)}) + \right. \\
 &\quad \left. + 2P_a^{(3)} p^{(4)} p^{(2)} - P_a^{(4)} p^{(3)} p^{(2)} - P_a^{(2)} p^{(3)} p^{(4)} \right] = \\
 &= P_1 \left[ P_a^{(4)}(-4m^2 - 2P_a^{(3)} p^{(4)} - 2m^2 - 2P_a^{(2)} p^{(3)} + 2P_a^{(4)} p^{(2)}) \right. \\
 &\quad \left. + P_a^{(2)}(-4m^2 - 2P_a^{(2)} p^{(3)} - 2m^2 - 2P_a^{(3)} p^{(4)} + 2P_a^{(2)} p^{(4)}) \right] \\
 &= P_1 \left[ (P_a^{(4)} + P_a^{(2)}) \cdot (-6m^2 - 2P_a^{(3)} p^{(4)} - 2P_a^{(2)} p^{(3)} \right. \\
 &\quad \left. + 2P_a^{(2)} p^{(4)}) \right]
 \end{aligned}$$

pero  $-P_2 \cdot P_4 + P_2 \cdot P_3 + P_4 \cdot P_3 = -2m^2$

y por lo tanto  $P_1 P_2^{(2)} M P_3^{(3)} P_4^{(4)} = -P_1 (P_a^{(4)} + P_a^{(2)}) 4m^2 \neq 0$

Poniéndolo en forma más simétrica :

$$= -2m^2 P_1 (P_a^3 + P_a^4 + P_a^2)$$

Como:

$$P_1 P_2^{(2)} P_3^{(3)} P_4^{(4)} \left[ \frac{-2}{m^2} (g_{ac} P_a^4 P_b^2 + g_{ad} P_c^{(3)} P_b^{(4)} + g_{ab} P_a^4 P_c^3) \right] = -2m^2 P_1 (P_a^3 + P_a^4 + P_a^2)$$

Luego hay que sumar :

$$\frac{2}{m^2} (g_{ac} P_a^4 P_b^{(2)} + g_{ad} P_c^{(3)} P_b^{(2)} + g_{ab} P_a^{(4)} P_c^{(3)})$$

a M para que sea invariante. Simetrizando se obtiene el vértice vb.

I N D I C E

0	Introducción	
I	Consideraciones generales	
I.1	Ecuaciones de 2° orden, covariancia y representaciones del grupo de Poincaré	1
I.2	Realización de Rarita - Schwinger	7
I.3	Métrica indefinida	13
II	Campos en interacción, campo espinorial complejo	
II.1	Obtención del tensor de la métrica	18
II.2	Relación con el principio de interacción mínima	27
II.3	Demostración de la invariancia	29
II.4	Obtención de la matriz S	34
II.5	Equivalencia con la teoría de Dirac	36
III	Campo vectorial real	
III.1	Campos libres	37
III.2	Introducción de la interacción	43
III.3	Campo vectorial de masa nula	46
IV	Electrodinámica de mesones vectoriales	
IV.1	Determinación de la transformación de medida generalizada	49
IV.2	Introducción de la interacción	54
IV.3	Campo electromagnético con fuente	59
IV.4	Interacción con el campo propio	60
V	Covariancia y simetrías superiores internas	
V.1	El grupo $\bar{U}(4)$	62



<b>VI Conclusión</b>	<b>70</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>73</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>74</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>76</b>
<b>Apéndice B</b>	<b>81</b>
<b>Apéndice C</b>	<b>86</b>
<b>Apéndice D</b>	<b>90</b>