

Tesis de Posgrado

Densidad de geodésicas y de horoesferas en variedades riemannianas

Keilhauer, Guillermo R.

1980

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Keilhauer, Guillermo R.. (1980). Densidad de geodésicas y de horoesferas en variedades riemannianas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1641_Keilhauer.pdf

Cita tipo Chicago:

Keilhauer, Guillermo R.. "Densidad de geodésicas y de horoesferas en variedades riemannianas". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1980. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1641_Keilhauer.pdf

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DENSIDAD DE GEODESICAS Y DE HOROESFERAS
EN VARIETADES RIEMANNIANAS

Trabajo presentado por:
Guillermo G.R. KEILHAUER, para optar al
título de Doctor en Ciencias Matemáticas

Director de tesis: Dr. Luis Antonio Santaló

- - 1 9 8 0 -

1641
Ej=2

Mr. Padraic

Lord

INDICE

INTRODUCCION	Pág.
I. Medida de geodésicas	
1.1. El espacio de órbitas	1
1.2. La variedad de geodésicas orientadas y no orientadas	9
1.3. La forma diferencial geodésica	20
1.4. Densidad de geodésicas orientadas y no orientadas	32
1.5. Medida de geodésicas e invariancia por isometrías	40
1.6. El conjunto de geodésicas orientadas en variedades de Riemann completas, conexas, simplemente conexas y sin puntos focales	45
II. Horoesferas	
2.1. Horoesferas en variedades de Riemann completas, conexas, simplemente conexas y sin puntos focales	74
2.2. La función de Busemann en espacios hiperbólicos	90
2.3. Densidad de horoesferas en espacios hiperbólicos	97
III. Conjuntos convexos	
3.1. Conjuntos convexos en superficies de Hadamard	102
3.2. Una desigualdad relativa al área y al perímetro de conjuntos convexos en superficies de Hadamard	107

Apéndice

A.1.	Operadores sobre el conjunto de formas diferenciales y formas invariantes	115
A.2.	La conexión de Levi-Civita y la aplicación de conexión	118
A.3.	Derivación covariante a lo largo de aplicaciones	120
A.4.	El Spray geodésico y el flujo geodésico	120
A.5.	Métrica de Sasaki y el elemento de volumen de TM y T_1M	122
	Bibliografía	124

INTRODUCCION

En 1936, Blaschke y Haimovici introdujeron el concepto de medir geodésicas (ver Santaló [15]), definiendo localmente una 2-forma diferencial que denotaremos con ω_F y mostrando que ella satisface ciertas propiedades de invariancia; dando lugar a partir de entonces, a numerosos trabajos en Geometría Integral (ver Santaló [19]). El objeto del capítulo I es mostrar, que exigiendo ciertas condiciones al flujo geodésico de una variedad de Riemann M completa, puede introducirse de manera natural una estructura diferenciable en el conjunto de geodésicas orientadas \vec{G} y no orientadas G y además, un elemento de volumen sobre el primero y otro en valor absoluto sobre el segundo (deducido del anterior), que inducen medidas invariantes por el grupo de isometrías de M que actúa sobre \vec{G} y G . La vinculación entre la forma ω_F y los elementos de volumen que se construyen intrínsecamente, surge de acuerdo a nuestro enfoque; al querer computar la expresión local de dichos volúmenes vía sistemas de coordenadas inducidas por familias de curvas geodésicas. A tal efecto, mostramos que ω_F satisface una invariancia adicional a las consideradas clásicamente, que es la de ser invariante por velocidades. Dicha invariancia permite expresar localmente los elementos de volumen en términos de ω_F , al considerar familias de curvas geodésicas no necesariamente parametrizadas por su longitud de arco. Dado que el Spray geodésico restringido al fibrado unitario tangente T_1M define una foliación sobre dicho fibrado, en la sección 1.1 y hasta el corolario 1.5 inclusive, se describe la estructura diferenciable del espacio de órbitas supuesto que la foliación es regular; en cuyo caso decimos que el flujo geodésico ϕ restringido a T_1M es regular. Denominando a ϕ Hausdorff si el espacio de

órbitas lo es, la sección se concluye mostrando en éste caso, la existencia de ciertas cartas de T_1M que denominamos cartas regulares separadas y que servirán en la sección 1.2, para definir cartas en el conjunto de geodésicas no orientadas.

En la sección 1.2 se construyen los conjuntos \vec{G} y G de tal modo, que una geodésica represente la imagen descrita por una curva geodésica globalmente definida y no constante. Como \vec{G} se identifica por construcción al espacio de órbitas, si ϕ es regular, se copia la estructura diferenciable de este último en \vec{G} . Suponiendo además que ϕ sea Hausdorff, se introduce (lema 2.3 y teorema 2.4) una estructura diferenciable en G , de modo que la proyección natural de \vec{G} a G resulte un difeomorfismo local. Se da también una condición suficiente para que una familia de curvas geodésicas induzca un sistema de coordenadas en \vec{G} o G (proposición 2.2 y 2.5). La proposición 2.6 muestra que si una familia de curvas geodésicas induce un sistema de coordenadas en G , también lo induce en \vec{G} .

La sección 1.3 es independiente de las anteriores y está destinada a vincular la forma ω_F con la 2-forma simpléctica ω definida sobre el fibrado tangente TM . Los resultados hasta el lema 3.5 inclusive son conocidos y muestran, como la métrica define un sistema Hamiltoniano sobre TM , cuyo campo vectorial Hamiltoniano es el Spray geodésico. Definiendo ω_F intrínsecamente (expresión (14)), se muestra que es invariante por el flujo geodésico (lema 3.6) y por velocidades (proposición 3.8). El lema 3.6 puede ser considerado como una nueva demostración de la clásica invariancia II que satisface ω_F . La sección se concluye, describiendo el elemento de volumen de TM y la densidad cinemática en términos de ω , con el objeto de probar un resultado (lema 3.10) no sé si conocido, que se aplicará en la sección 1.4 (teorema 4.3) y en la sección 1.6 (teorema 6.8).

Utilizando las propiedades de ω respecto al Spray geodésico, en la sección 1.4 se introduce suponiendo que ϕ sea regular, una 2-forma sobre el espacio de órbitas (proposición 4.1), que representada sobre \vec{G} la denotamos con $d\vec{G}$ y denominamos, la densidad de geodésicas orientadas. Multiplicando exteriormente dicha densidad $n-1$ veces por sí misma, donde n es la dimensión de M , se prueba que la $2n-2$ forma $d\vec{G}^{n-1}$ no se anula en ningún punto (teorema 4.3); con lo cual se asegura que dicha forma es efectivamente un elemento de volumen para \vec{G} . Utilizando el hecho que si ϕ es Hausdorff, la proyección de \vec{G} a G es un difeomorfismo local, se define sobre G una 2-forma en valor absoluto $|dG|$ (teorema 4.5), que denominamos la densidad de geodésicas no orientadas. La proposición 4.2 y el corolario 4.6, muestran como calcular las densidades definidas, utilizando ω_p vía familias de curvas geodésicas.

En la sección 1.5, se introduce de manera usual una integral positiva sobre \vec{G} y G , utilizando los elementos de volumen obtenidos en la sección anterior y se muestra, que son invariantes por el grupo de isometrías de M que actúa sobre ambos conjuntos (proposición 5.3 y teorema 5.4).

En la sección 1.6, mostramos que si M es además de completa, simplemente conexa y sin puntos focales, entonces el flujo geodésico es regular y Hausdorff y considerando sobre \vec{G} la estructura diferenciable introducida en la sección 1.2, \vec{G} resulta difeomorfo al fibrado tangente a una esfera (teorema 6.8). Se obtiene además, la expresión global de $d\vec{G}^{n-1}$ en términos de los campos de Jacobi (corolario 6.9). Los resultados como así también las expresiones que se deducen y numeramos hasta la proposición 6.4 (exclusive) son conocidos. Los resultados a partir de dicha proposición no sé si son conocidos y se aplican en la demostración del teorema 6.8 y el corolario que le sigue.

En el capítulo II, se estudian las horoesferas de una variedad Riemanniana M con las condiciones de la sección 1.6, bajo dos puntos de vista. La primera considerandolas como hipersuperficies de clase C^2 y la segunda, interpretandolas como elementos de un conjunto, en el cual se trata de ver si es posible introducir una estructura diferenciable y un elemento de volumen que sea invariante por el grupo de isometrías de M ; como situación análoga al caso geodésicas.

De acuerdo al primer punto de vista, en la sección 2.1 se estiman las curvaturas seccionales de la horoesferas (curvatura geodésica si son horociclos) respecto a las de M (teorema 1.7). Si H es una horoesfera, como $R \times H$ se identifica homeomórficamente a M por una congruencia normal de la hipersuperficie H , y dicha aplicación es de clase C^1 (ver teorema Pág. 64 de [4]), mostramos que $R \times H$ es C^1 -difeomorfo a M (proposición 1.2), computando su función inversa. Como un hecho curioso que marca un contraste entre el comportamiento de los hiperplanos de un espacio euclídeo con las horoesferas de un espacio hiperbólico de curvatura seccional constante negativa, en la sección 2.2 mostramos, que si M tiene curvatura seccional constante negativa y es de dimensión (≥ 3), la intersección no vacía de una horoesfera con un hiperplano (subvariedad geodésica) es una horoesfera de dicho hiperplano, si y sólo si las normales a la horoesfera dada, son tangentes al hiperplano (teorema 2.1).

Respecto al segundo punto de vista, en la sección 2.1 construimos el conjunto de las horoesferas y mostramos como puede parametrizarse dicho conjunto, eligiendo un punto de la variedad (proposición 1.8). En la misma sección se ilustra, como dichas parametrizaciones inducen sobre el conjunto de las horoesferas, una estructura diferenciable y un elemento de volumen invariante en valor absoluto por el grupo de isometrías de M , cuando M es el

espacio euclídeano (ejemplo 1) y M es el espacio hiperbólico de curvatura constante negativa (ejemplo 2). Se concluye la sección, mostrando (ejemplo 3) que los ejemplos anteriores no son generalizables si la curvatura es variable, por cuanto la estructura diferenciable obtenida sobre el conjunto de horoesferas al parametrizarlo respecto a un punto, puede depender de la elección del mismo. La sección 2.3 está destinada a demostrar el (ejemplo 2), con lo cual se generaliza a cualquier dimensión, la expresión de la densidad de horoesferas obtenido por Santaló en [16] y [17].

En [18], Santaló y Yañez estudian el límite de cocientes $\frac{F}{L}$, donde L denota el perímetro y F el área de convexos que se expanden al infinito en el plano hiperbólico; con el objeto de obtener valores medios para regiones formadas por la intersección de rectas dadas al azar con los convexos dados. Debido al uso de dichos cocientes, en el capítulo III aplicamos los teoremas conocidos de comparación de campos de Jacobi (proposición 1.4 y 1.5) de la sección 2.1, para obtener cotas del valor $\frac{F}{L}$ en superficies de Hadamard (teorema 2.1) de la sección 3.2. Dado que las cotas se obtienen eligiendo un punto de la superficie, la proposición 2.2 de la misma sección, muestra que si se considera una familia de convexos que se expande al infinito, en el límite dichas cotas no dependen del punto elegido. Se concluye la sección, mostrando un resultado probado en [18], en el cual la desigualdad isoperimétrica de las superficies de curvatura constante, es sustituido por las desigualdades obtenidas. La introducción de la sección 3.1 tiene por finalidad, describir las propiedades conocidas de los conjuntos convexos en superficies de Hadamard, a efecto de utilizarlos en la sección 3.2.

El Apéndice ha sido redactado, a fin de tener a mano las definiciones y resultados conocidos que se aplican a lo largo de éste trabajo.

Para finalizar, deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Luis Antonio Santaló por haber dirigido el presente trabajo y por todo lo que aprendí junto a él. También mi agradecimiento a los integrantes del departamento de Matemática por el apoyo recibido, en especial, al Dr. Angel Rafael Larotonda por las útiles charlas mantenidas y a la Sra. María Angélica Tancredi por colaborar en la impresión del mismo.

Buenos Aires, Agosto de 1980.

1. MEDIDA DE GEODESICAS

En todo el capítulo (ver apéndice), M denotará una variedad de Riemann conexa y completa de dimensión $n \geq 2$.

1.1. El espacio de órbitas

Sea $\phi: T_1 M \times \mathbb{R} \rightarrow T_1 M$ el flujo geodésico y $S: T_1 M \rightarrow TT_1 M$ el Spray geodésico, restringidos al fibrado unitario tangente $T_1 M$ de M (ver apéndice).

Definiendo en $T_1 M$ la relación de equivalencia, $v \sim w$ si y sólo si existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $v = \phi(w, t)$, denotemos con $T_1 M/S$ al espacio cociente y con $\Pi_S: T_1 M \rightarrow T_1 M/S$ la proyección al cociente. El conjunto $\Pi_S^{-1}(v) = \phi(\{v\} \times \mathbb{R})$ se denomina la órbita de v y $T_1 M/S$ el conjunto de órbitas de $T_1 M$.

Dado que el conjunto de órbitas de $T_1 M$ está íntimamente ligado con el conjunto de geodésicas orientadas y no orientadas (ver sección 1.2), estudiaremos en ésta sección el espacio foliado $T_1 M/S$ con el objeto de introducir luego, una estructura diferenciable en dichos conjuntos.

Siguiendo el lenguaje de Palais ver (14), una carta (U, φ) de $T_1 M$ se dirá una carta cúbica centrada en $v \in T_1 M$, si $\varphi(U) = A \times I$ donde A es un cubo abierto de \mathbb{R}^{2n-2} centrado en algún punto $a \in \mathbb{R}^{2n-2}$ e I es un intervalo abierto y simétrico centrado en el origen de \mathbb{R} , con $\varphi(v) = (a, 0)$

Diremos que (U, φ) es una carta cúbica y chata de $T_1 M$ centrada en v , si además se verifica que $\varphi^{-1}(x, t) = \phi(\varphi^{-1}(x, 0), t)$ para todo $(x, t) \in A \times I$.

Dado que $S(v) \neq 0$ para todo $v \in T_1 M$, la existencia de cartas cúbicas y chatas centradas en cualquier punto de $T_1 M$ está asegurado.

Definición

Sea (U, φ) una carta cúbica y chata centrada en v con $\varphi(U) = A \times I$ y $\sum_x^\varphi = \varphi^{-1}(\{x\} \times I)$.

Diremos que (U, φ) es una carta regular si para todo $u \in T_1 M$ la órbita de u interseca a U en a lo sumo un \sum_x^φ .

En dicho caso, si $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{2n-2}, \varphi_{2n-1})$ se tiene claramente que la aplicación $\tilde{\varphi}: \Pi_S(U) \rightarrow A$ definida por $\tilde{\varphi}(\Pi_S(u)) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_{2n-2}(u))$ para $u \in U$, está bien definida y es una biyección.

El flujo geodésico ϕ se dirá regular si todo $v \in T_1 M$ admite una carta regular centrada en v .

De la definición resulta, que los dominios de las cartas regulares de $T_1 M$ centradas en v , constituyen una base de entornos de v .

La siguiente proposición será de utilidad, para caracterizar familias de curvas geodésicas que induzcan sistemas de coordenadas en el conjunto de geodésicas orientadas y no orientadas.

Proposición 1.1.

Sea ϕ regular y (U, φ) una carta cúbica y chata centrada en v ; existe entonces un abierto $V \subset U$ entorno de v tal que (V, φ) es una carta regular.

Demostración

Por ser ϕ regular existe una carta regular (W, ψ) centrada en v ; achicando U si fuera necesario podemos suponer que $U \subset W$ y sea $\varphi(U) = A \times I$ con $\varphi(v) = (a, 0)$.

Dado que la aplicación $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(U)$ es de la forma $\psi \circ \varphi^{-1}(x, t) = (h_1(x, t), \dots, h_{2n-2}(x, t), h_{2n-1}(x, t))$ se tiene por ser (W, ψ) regular y $\varphi^{-1}(x, t) = \phi(\varphi^{-1}(x, 0), t)$, que $h_i(x, t) = h_i(x, 0)$ para $i = 1, \dots, 2n-2$ y $(x, t) \in A \times I$.

Siendo $\psi \circ \varphi^{-1}$ un difeomorfismo, la aplicación $h: A \rightarrow \mathbb{R}^{2n-2}$ definida por $h(x) = (h_1(x,0), \dots, h_{2n-2}(x,0))$ tiene jacobiano no nulo en $x = a$; luego por el teorema de la función inversa existe un abierto $B \subset A$ entorno de a y un abierto $C \subset \mathbb{R}^{2n-2}$ entorno de $h(a)$ tal que $h: B \rightarrow C$ es un difeomorfismo.

Llamando $V = \varphi^{-1}(B \times I)$ se tiene que (V, φ) es regular por ser $\sum_x C \sum_{h(x)} \psi$ para todo $x \in B$ y $h: B \rightarrow C$ inyectiva. #

El siguiente teorema, es un caso particular de un resultado que afirma que todo espacio foliado obtenido de una foliación regular, admite de manera natural una estructura de variedad diferenciable; ver Palais (14). Dado que nuestra foliación es muy especial, daremos una demostración del mismo.

Teorema 1.2.

Sea ϕ regular y $(U, \varphi), (V, \psi)$ dos cartas regulares tales que la intersección $H = \Pi_S(U) \cap \Pi_S(V)$ es no vacía; entonces $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1}: \tilde{\psi}(H) \rightarrow \tilde{\varphi}(H)$ es un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^{2n-2} .

El teorema es consecuencia de los siguientes lemas.

Lema 1.3.

Con las notaciones del teorema los conjuntos $\tilde{\psi}(H)$ y $\tilde{\varphi}(H)$ son abiertos en \mathbb{R}^{2n-2} .

Demostración

Sea $\psi(V) = A \times I$ y $F: A \times \mathbb{R} \rightarrow T_1M$ la función diferenciable definida por $F(x, t) = \phi(\psi^{-1}(x, 0), t)$.

Si $x_0 \in \tilde{\psi}(H)$ existe algún $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $F(x_0, t_0) \in U$; luego por la continuidad de F existe un abierto $B \subset A$ entorno de x_0 tal que $F(B \times \{t_0\}) \subset U$.

Por definición de $\tilde{\psi}(H)$ resulta $B \subset \tilde{\psi}(H)$, lo cual prueba que $\tilde{\psi}(H)$ es abierto en \mathbb{R}^{2n-2} y del mismo modo resulta que $\tilde{\varphi}(H)$ lo es. #

Lema 1.4.

Si ϕ es regular, para $v \in T_1M$ y $L = \Pi_S(v)$ sean (U_i, φ_i) con $i = 1, \dots, k$ ($k \geq 2$) una familia de cartas regulares de T_1M , tales que $L \cap U_i \cap U_{i+1}$ es no vacío si $i = 1, \dots, k-1$.

Sea $H_{ij} = \Pi_S(U_i) \cap \Pi_S(U_j)$, $A_{ij} = \tilde{\varphi}_i(H_{ij})$ y $f_{ij} = \tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1} : A_{ij} \rightarrow A_{ji}$. Si $\tilde{\varphi}_1(L) = x_0$, existe entonces un abierto $A \subset A_{1k}$ entorno de x_0 , tal que $f_{1k} : A \rightarrow f_{1k}(A)$ es un difeomorfismo entre abiertos.

Demostración

Hacemos inducción en k .

Para $k = 2$, sea $\varphi_1(U_1) = B \times I$ y $w \in L \cap U_1 \cap U_2$; luego por ser (U_1, φ_1) regular y $\tilde{\varphi}_1(L) = x_0$, existe un único $t_0 \in I$ tal que $w = \varphi_1^{-1}(x_0, t_0)$.

Como $\varphi_1^{-1}(x_0, t_0) \in U_2$ existe un abierto $A \subset B$ entorno de x_0 y un intervalo $I_0 \subset I$ entorno de t_0 tal que $\varphi_1^{-1}(A \times I_0) \subset U_2$; luego por definición de A_{12} resulta $A \subset A_{12}$.

Por otro lado, para $(x, t) \in A \times I_0$ es

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x, t) = (h_1(x, t), \dots, h_{2n-2}(x, t), h_{2n-1}(x, t))$$

y dado que las cartas son regulares, resulta $h_i(x, t) = h_i(x, t_0)$

para $i = 1, \dots, 2n-2$. Por definición de f_{12} se tiene que $f_{12}(x) =$

$$= (h_1(x, t_0), \dots, h_{2n-2}(x, t_0));$$
 luego

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x, t) = (f_{12}(x), h_{2n-1}(x, t)).$$

La igualdad anterior muestra por ser $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ un difeomorfismo, que f_{12} tiene jacobiano no nulo en cada punto $x \in A$; siendo $f_{12} : A \rightarrow f_{12}(A)$ una biyección resulta entonces un difeomorfismo entre abiertos.

Supongamos ahora, que el lema sea cierto para k cartas regulares y consideremos $k+1$ cartas regulares.

Por lo anterior, el lema es cierto aplicado a las cartas

(U_k, φ_k) y (U_{k+1}, φ_{k+1}) ; luego si $\tilde{\varphi}_k(L) = z_0$, existe un abierto

$A_0 \subset A_{k, k+1}$ entorno de z_0 , tal que $f_{k, k+1} : A_0 \rightarrow f_{k, k+1}(A_0)$ es

difeomorfismo. Por hipótesis inductiva, si $\tilde{\varphi}_1(L) = x_0$ existe un abierto $B_0 \subset A_{1k}$ entorno de x_0 tal que $f_{1k}: B_0 \rightarrow f_{1k}(B_0)$ es un difeomorfismo.

Siendo $f_{1k}(x_0) = \tilde{\varphi}_k \circ \tilde{\varphi}_1^{-1}(x_0) = \tilde{\varphi}_k(L) = z_0$, sea $B = f_{1k}(B_0) \cap A_0$ y $A = f_{1k}^{-1}(B)$; luego A y B son abiertos entornos de x_0 y z_0 respectivamente con $A \subset A_{1k+1}$.

La composición de las funciones $A \xrightarrow{f_{1k}} B \xrightarrow{f_{kk+1}} f_{kk+1}(B)$ es entonces un difeomorfismo y dado que en A se tiene

$$f_{kk+1} \circ f_{1k} = \tilde{\varphi}_{k+1} \circ \tilde{\varphi}_k^{-1} \circ \tilde{\varphi}_k \circ \tilde{\varphi}_1^{-1} = \tilde{\varphi}_{k+1} \circ \tilde{\varphi}_1^{-1} = f_{1k+1}$$

el lema es cierto para $k+1$ cartas regulares.

Demostración del teorema

Sea $x_0 \in \mathcal{V}(H)$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow T_1M$ la curva $g(t) = \phi(\psi^{-1}(x_0, 0), t)$.

Como $x_0 \in \mathcal{V}(H)$ existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(t_0) \in U$; sea I el segmento cerrado que une 0 con t_0 , luego por ser ϕ regular

para cada $t \in I$ existe una carta regular (V_t, ψ_t) centrada en $g(t)$. Por compacidad, existe una subfamilia finita (V_i, ψ_i)

con $i = 1, \dots, \ell$ que cubre $g(I)$; reordenando los índices si fuera necesario para que las intersecciones $V \cap V_1, U \cap V_\ell$

y $V_i \cap V_{i+1}$ si $i = 1, \dots, \ell$ y $\ell \geq 2$ no sean vacías, sea $U_1 = V,$

$$\varphi_1 = \psi, U_{i+1} = V_i, \varphi_{i+1} = \psi_i \text{ si } i = 1, \dots, \ell \text{ y } U_{\ell+2} = U,$$

$$\varphi_{\ell+2} = \varphi.$$

Luego el teorema es consecuencia del lema anterior aplicado

a la familia de cartas regulares (U_i, φ_i) con $i = 1, \dots, \ell+2$

$$\text{y } L = \psi^{-1}(x_0). \#$$

Nota

Siguiendo el razonamiento de los lemas anteriores, puede probarse que para todo $x_0 \in \mathcal{V}(H)$ existe un abierto $A \subset \mathcal{V}(H)$ entorno de x_0 y una función diferenciable $b: A \rightarrow \mathbb{R}$ no necesariamente única, tal que

$$\phi(\psi^{-1}(x,0),t) = (\varphi^{-1}(\tilde{\varphi} \circ \psi^{-1}(x),0),t+b(x))$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in A$.

En virtud del teorema, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.5.

Si ϕ es regular, el espacio de órbitas T_1M/S admite una estructura de variedad diferenciable de clase C^∞ y dimensión $2n-2$, generado por el atlas formado por todas las cartas $(\Pi_S(U),\tilde{\varphi})$ inducidas por cartas regulares (U,φ) de T_1M . Considerando en T_1M/S la topología inducida por la estructura diferenciable, la proyección $\Pi_S:T_1M \rightarrow T_1M/S$ es continua, abierta y diferenciable.

Demostración

Como para todo $v \in T_1M$ los dominios de las cartas regulares (U,φ) de T_1M y centradas en v , constituyen una base de entornos de v y los conjuntos $\Pi_S(U)$ son abiertos en T_1M/S , resulta Π_S abierta.

Del mismo modo, Π_S es continua pues para todo $L \in T_1M/S$ con $L = \Pi_S(v)$, la familia de abiertos $\Pi_S(U)$ donde U es el dominio de una carta regular (U,φ) centrada en v , constituye una base de entornos de L .

La diferenciabilidad de Π_S surge de notar, que si (U,φ) es una carta regular con $\varphi(U) = A \times I$, entonces la aplicación $\tilde{\varphi}:\Pi_S(U) \rightarrow A$ satisface $\tilde{\varphi} \circ \Pi_S(\varphi^{-1}(x,t)) = x$ para todo $(x,t) \in A \times I$.

Del corolario resulta por ser Π_S continua y abierta, que la topología cociente y la topología inducida por la estructura diferenciable en T_1M/S coinciden; en consecuencia por ser Π_S abierta, la condición necesaria y suficiente para que T_1M/S sea Hausdorff es que el gráfico de la relación sea cerrada.

Siendo el gráfico de la relación el conjunto $G_\phi = \{(v,\phi(v,t)) : v \in T_1M \text{ y } t \in \mathbb{R}\}$, diremos que ϕ es Hausdorff si G_ϕ es cerrado en $T_1M \times T_1M$.

Una condición obviamente suficiente para ello, es que M sea compacto.

El siguiente teorema nos asegurará luego, la existencia de familias de curvas geodésicas que induzcan simultáneamente sistemas de coordenadas en el conjunto de geodésicas orientadas y no orientadas.

Sea $\sigma: T_1 M \rightarrow T_1 M$ la homotecia $\sigma(v) = -v$ y para una carta cúbica y chata (U, φ) centrada en v con $\varphi(U) = A \times I$, sea $\varphi_\sigma^{-1}(x, t) = -\varphi^{-1}(x, -t)$

Claramente $\varphi_\sigma^{-1}: A \times I \rightarrow \sigma(U)$ es un difeomorfismo y dado que para todo $(u, t) \in T_1 M \times \mathbb{R}$ se verifica $\phi(-u, t) = -\phi(u, -t)$, se tiene por ser $\varphi^{-1}(x, t) = \phi(\varphi^{-1}(x, 0), t)$ que $\varphi_\sigma^{-1}(x, t) = \phi(\varphi_\sigma^{-1}(x, 0), t)$. Luego $(\sigma(U), \varphi_\sigma)$ es una carta cúbica y chata centrada en $-v$.

Teorema 1.6.

Sea ϕ regular; luego

- a) Si (U, φ) es una carta regular centrada en v , entonces $(\sigma(U), \varphi_\sigma)$ es una carta regular centrada en $-v$.

Si ϕ es además Hausdorff, entonces

- b) Para todo $v \in T_1 M$ y toda carta cúbica y chata (U, φ) centrada en v , existe un abierto $V \subset U$ entorno de v tal que (V, φ) es regular y $\Pi_S(\sigma(V)) \cap \Pi_S(V)$ es vacío.

Demostración de a)

Supongamos que $\varphi(U) = A \times I$ y sea $u \in T_1 M$ tal que su órbita $\Pi_S(u)$ interseca a \sum_x^φ y a \sum_y^σ con $x, y \in A$; luego $\varphi_\sigma^{-1}(x, 0) \in \Pi_S(u)$ y $\varphi_\sigma^{-1}(y, 0) \in \Pi_S(u)$.

Dado que $\varphi_\sigma^{-1}(x, 0) = -\varphi^{-1}(x, 0)$ y $\varphi_\sigma^{-1}(y, 0) = -\varphi^{-1}(y, 0)$ se tiene que $\varphi^{-1}(x, 0) \in \Pi_S(-u)$ y $\varphi^{-1}(y, 0) \in \Pi_S(-u)$; luego $\Pi_S(-u)$ interseca a \sum_x^φ y a \sum_y^σ . Como (U, φ) es regular resulta $x = y$; lo cual implica que $(\sigma(U), \varphi_\sigma)$ también lo es. #

Demostración de b)

Sea $\tilde{\sigma}: T_1M/S \rightarrow T_1M/S$ la aplicación definida por $\tilde{\sigma}(\Pi_S(u)) = \Pi_S(-u)$; como $\tilde{\sigma}$ coincide con su inversa y $\tilde{\sigma} \circ \Pi_S = \Pi_S \circ \sigma$ con Π_S y σ continuas resulta $\tilde{\sigma}$ un homeomorfismo. Dado que para $v \in T_1M$ las órbitas $\Pi_S(v)$ y $\Pi_S(-v)$ son distintas y T_1M/S es Hausdorff pues por hipótesis ϕ es Hausdorff, existen abiertos disjuntos H_1 y H_2 entornos de $\Pi_S(v)$ y $\Pi_S(-v)$ respectivamente. Sea H el entorno abierto de $\Pi_S(v)$ definido por $H = H_1 \cap \tilde{\sigma}(H_2)$; luego $\Pi_S^{-1}(H)$ es abierto en T_1M y entorno de v . Por la proposición 1.1, existe un abierto $V \subset U$ entorno de v tal que (V, φ) es regular; tomando $V \subset \Pi_S^{-1}(H)$ resulta entonces que la intersección de $\Pi_S(\sigma(V))$ con $\Pi_S(V)$ es vacía. #

Definición

Llamaremos carta regular separada a toda carta regular (U, φ) de T_1M , con la propiedad que $\Pi_S(\sigma(U)) \cap \Pi_S(U)$ es vacío.

Corolario 1.7.

Sea ϕ regular y Hausdorff; entonces para todo abierto H de T_1M/S y todo punto $\Pi_S(v) \in H$, existe una carta regular separada (U, φ) centrada en v , tal que $\Pi_S(v) \in \Pi_S(U) \subset H$.

Demostración

Es consecuencia del hecho, que la familia de conjuntos abiertos $\Pi_S(U)$ de T_1M/S donde U es el dominio de una carta regular de T_1M , constituye una base de la topología de T_1M/S y de la parte b) del teorema anterior. #

Para finalizar, quisiera formular dos interrogantes que aún no he logrado responder

I_1 . ¿Existirá alguna condición necesaria y suficiente sobre la diferencial del flujo geodésico ϕ para que sea regular, agregando alguna condición topológica a M si fuera necesario?

I_2 . ¿La condición de que el flujo geodésico sea regular implica que sea Hausdorff?

1.2. La variedad de geodésicas orientadas y no orientadas

Sea $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva geodésica (ver apéndice) y $\dot{c}(t) = c_* \left(\frac{d}{dt} \right) \Big|_t$ el vector tangente a c en el instante t .

Con \mathcal{G} denotemos al conjunto de todas las curvas geodésicas no constantes de M ; es decir,

$$\mathcal{G} = \{c: \mathbb{R} \rightarrow M: c \text{ es geodésica y } \dot{c}(0) \neq 0\}$$

Definiendo en \mathcal{G} la relación de equivalencia, $c \sim g$ si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ tales que $c(t) = g(a.t+b)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, denotemos con $G = \mathcal{G}/\sim$ al espacio cociente y con $\Pi_G: \mathcal{G} \rightarrow G$ la proyección al cociente.

Llamaremos a G el conjunto de geodésicas de M . Si en la relación de equivalencia reemplazamos la condición $a \neq 0$ por $a > 0$, el espacio cociente $\vec{G} = \mathcal{G}/\sim$ lo denominaremos el conjunto de geodésicas orientadas de M y denotaremos con $\Pi_{\vec{G}}: \mathcal{G} \rightarrow \vec{G}$ la proyección al cociente. Los conjuntos \vec{G} y G están vinculados a través de la aplicación suryectiva $P: \vec{G} \rightarrow G$ definida por $P(\Pi_{\vec{G}}(c)) = \Pi_G(c)$. Por otro lado (ver apéndice), si $\phi: TM \times \mathbb{R} \rightarrow TM$ es el flujo geodésico definido en el fibrado tangente a M y $\Pi: TM \rightarrow M$ es la proyección, la curva geodésica $c_v: \mathbb{R} \rightarrow M$ con $v \in TM$ que satisface $c_v(0) = \Pi(v)$ y $\dot{c}_v(0) = v$, está dado por $c_v(t) = \Pi \circ \phi(v, t)$ y $\dot{c}_v(t) = \phi(v, t)$.

En consecuencia, si $g \in \Pi_{\vec{G}}(c)$ entonces $\Pi_S \left(\frac{\dot{c}(0)}{|\dot{c}(0)|} \right) = \Pi_S \left(\frac{\dot{g}(0)}{|\dot{g}(0)|} \right)$ donde $|\cdot|$ denota la norma inducida por la métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de M .

En efecto, si $g \in \Pi_{\vec{G}}(c)$ existen $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que $c(t) = g(a.t+b)$; luego $\dot{c}(0) = a.\dot{g}(b)$.

Como las geodésicas tienen velocidad constante, si denotamos con $\alpha = |\dot{c}(0)|$ y con $\beta = |\dot{g}(0)|$ la igualdad anterior implica que $\alpha = a.\beta$.

Sea $u = \dot{c}(0) \cdot \alpha^{-1}$ y $v = \dot{g}(0) \cdot \beta^{-1}$; luego $g(t) = c_v(\beta \cdot t)$ y por lo tanto $c(t) = c_v(\beta \cdot (\alpha \cdot t + b)) = c_v(\alpha \cdot t + \beta \cdot b)$.

Derivando la última igualdad respecto a "t" obtenemos, $\dot{c}(0) = \alpha \cdot \dot{c}_v(\beta \cdot b)$ o equivalentemente $u = \phi(v, \beta \cdot b)$, lo cual implica que $\Pi_S(u) = \Pi_S(v)$.

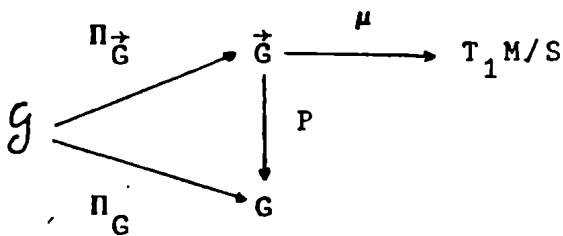
En virtud de lo demostrado, se tiene una aplicación

$\mu: \vec{G} \rightarrow T_1M/S$ definido por

$$(1) \quad \mu(\Pi_{\vec{G}}(c)) = \Pi_S\left(\frac{\dot{c}(0)}{|\dot{c}(0)|}\right) \quad \text{para todo } c \in \mathcal{G}$$

que es claramente una biyección.

El siguiente diagrama, vincula los conjuntos y las aplicaciones que hasta aquí hemos definido, con el espacio de órbitas de T_1M



En la presente sección, introduciremos una estructura diferenciable en \vec{G} y en G de modo que la proyección $P: \vec{G} \rightarrow G$ resulte diferenciable y un difeomorfismo local, suponiendo que el flujo geodésico ϕ restringido a T_1M es regular y Hausdorff.

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$) un abierto y $f: A \times \mathbb{R} \rightarrow M$ una aplicación diferenciable. Diremos que f es una familia de curvas geodésicas dependiente de "m" parámetros, si para cada $x \in A$ la aplicación $f(x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow M$ definida por $f(x, \cdot)(t) = f(x, t)$ es una curva geodésica no constante es decir, $f(x, \cdot) \in \mathcal{G}$.

Denotaremos con $\dot{f}: A \times R \rightarrow TM$ a la aplicación definida por $\dot{f}(x,t) = f_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) / (x,t)$; luego $\dot{f}(x,t)$ es el vector tangente a la curva geodésica $f(x, \cdot)$ en el instante "t".

En términos del flujo geodésico $\phi: TM \times R \rightarrow TM$, se tiene entonces que $f(x,t) = \Pi_0 \phi(\dot{f}(x,0), t)$ y $\dot{f}(x,t) = \phi(\dot{f}(x,0), t)$ para todo $t \in R$.

Diremos que f es normal si para cada $x \in A$ la curva geodésica $f(x, \cdot)$ está parametrizada por su longitud de arco; es decir, $|\dot{f}(x,0)| = 1$.

Si (U, φ) es una carta cúbica y chata de T_1M con $\varphi(U) = A \times I$ (ver sección 1.1), sea $f: A \times R \rightarrow M$ la aplicación diferenciable definida por $f(x,t) = \Pi_0 \phi(\varphi^{-1}(x,0), t)$; luego f es una familia normal de curvas geodésicas dependiente de $2n-2$ parámetros que satisface $\dot{f}(x,t) = \varphi^{-1}(x,t)$ para $(x,t) \in A \times I$.

Diremos en éste caso, que f es la familia normal de curvas geodésicas inducida por la carta cúbica y chata (U, φ) de T_1M . Hacemos notar, que siendo $\varphi^{-1}: A \times I \rightarrow U$ un difeomorfismo la diferencial de la aplicación $\dot{f}: A \times R \rightarrow T_1M$ tiene rango máximo en cada punto $(x,0)$.

Dada una familia $f: A \times R \rightarrow M$ de curvas geodésicas dependiente de "n" parámetros, ésta induce aplicaciones $\vec{G}f: A \rightarrow \vec{G}$ y $Gf: A \rightarrow G$ definidas por

$$(2) \quad \vec{G}f(x) = \Pi_{\vec{G}}(\dot{f}(x, \cdot)) \quad \text{y} \quad Gf(x) = \Pi_G(\dot{f}(x, \cdot))$$

Veremos luego, para $m = 2n-2$, una condición suficiente que debe satisfacer f para que las aplicaciones definidas en (2) definan sistemas de coordenadas en \vec{G} y en G .

Supongamos que el flujo geodésico $\phi: T_1M \times R \rightarrow T_1M$ restringido al fibrado tangente unitario sea regular (ver sección 1.1); luego por el corolario 1.5 el espacio de órbitas T_1M/S de T_1M es una variedad diferenciable de dimensión $2.n-2$ y $\Pi_S: T_1M \rightarrow T_1M/S$ es diferenciable.

Siendo la aplicación $\mu: \vec{G} \rightarrow T_1M/S$ definida según (1) una biyección, consideramos en \vec{G} la única estructura diferenciable que hace a μ un difeomorfismo.

Dado que la familia de pares $(\Pi_S(U), \tilde{\varphi})$ inducidas por cartas regulares (U, φ) de T_1M constituye el atlas natural de T_1M/S , la familia de pares $(\mu^{-1}(\Pi_S(U)), \tilde{\varphi} \circ \mu)$ constituye el atlas natural de \vec{G} .

Denominaremos a la estructura diferenciable sobre \vec{G} copiada de T_1M/S "vía μ ", la estructura diferenciable natural de \vec{G} . El siguiente lema describe el atlas natural de \vec{G} via familia de curvas geodésicas dependiente de $2n-2$ parámetros.

Lema 2.1.

Sea ϕ regular y (U, φ) una carta regular de T_1M con $\varphi(U) = A \times I$. Si $f: A \times R \rightarrow M$ es la familia normal de curvas geodésicas inducida por (U, φ) , entonces $\vec{G}f: A \rightarrow \vec{G}$ es inyectiva y $(\vec{G}f(A), \vec{G}f^{-1}) = (\mu^{-1}(\Pi_S(U)), \tilde{\varphi} \circ \mu)$.

Demostración

Siendo $f(x, t) = \Pi \circ \phi(\varphi^{-1}(x, 0), t)$, resulta $\dot{f}(x, 0) = \varphi^{-1}(x, 0)$.

Por otro lado,

$$\mu \circ \vec{G}f(x) = \mu \circ \Pi_{\vec{G}}(f(x, \cdot)) = \Pi_S(\dot{f}(x, 0)) = \Pi_S(\varphi^{-1}(x, 0)) = \tilde{\varphi}^{-1}(x)$$

luego $\mu \circ \vec{G}f = \tilde{\varphi}^{-1}$ lo cual implica que $\vec{G}f: A \rightarrow G$ es inyectiva con $\vec{G}f^{-1} = \tilde{\varphi} \circ \mu$ y $\vec{G}f(A) = \mu^{-1}(\Pi_S(U))$. #

Definición

Sea ϕ regular y consideremos sobre \vec{G} la estructura diferenciable natural. Diremos que una familia $g: A \times R \rightarrow M$ de curvas geodésicas dependiente de $2n-2$ parámetros induce un sistema de coordenadas en \vec{G} , si $\vec{G}g: A \rightarrow \vec{G}g(A)$ es un difeomorfismo entre abiertos; en otras palabras, el par $(\vec{G}g(A), \vec{G}g^{-1})$ es una carta admisible para \vec{G} .

Si $a(x) = |\dot{g}(x,0)|^{-1}$ y $f(x,t) = g(x,a(x).t)$ entonces f es una familia normal de curvas geodésicas dependiente de $2n-2$ parámetros; diremos que f es la normalizada de g .

La siguiente proposición, proporciona una condición suficiente para que una familia de curvas geodésicas induzca un sistema de coordenadas en \vec{G} .

Proposición 2.2.

Sea ϕ regular y $g:A \times R \rightarrow M$ una familia de curvas geodésicas dependiente de $2n-2$ parámetros, tal que su normalizada f satisface:

- a) $\vec{G}f:A \rightarrow \vec{G}$ es inyectiva
- b) La diferencial de $\dot{f}:A \times R \rightarrow T_1M$ tiene rango máximo en cada punto $(x,0)$ con $x \in A$.

Entonces g induce un sistema de coordenadas en \vec{G} .

Demostración

Sea $x_0 \in A$; luego por b) existe en virtud del teorema de la función inversa, un $\epsilon > 0$ y un cubo abierto $B \subset A$ centrado en x_0 , tal que si $I = (-\epsilon, \epsilon)$ es $\dot{f}:B \times I \rightarrow \dot{f}(B \times I)$ un difeomorfismo entre abiertos.

Como $\dot{f}(x,t) = \phi(\dot{f}(x,0),t)$ se tiene llamando $U = \dot{f}(B \times I)$ y $\varphi^{-1}(x,t) = \dot{f}(x,t)$ para $(x,t) \in B \times I$, que (U, φ) es una carta cúbica y chata de T_1M centrada en $\dot{f}(x_0,0)$. Por la proposición 1.1, podemos suponer achicando B y ϵ si fuera necesario, que (U, φ) es regular. Siendo $f:B \times R \rightarrow M$ una familia normal de curvas geodésicas inducida por la carta regular (U, φ) , resulta del lema anterior que $\vec{G}f:B \rightarrow \vec{G}f(B)$ es un difeomorfismo entre abiertos. Dado que x_0 era arbitrario se tiene por a) que $\vec{G}f:A \rightarrow \vec{G}f(A)$ es un difeomorfismo entre abiertos, lo cual completa la demostración notando que $\vec{G}g = \vec{G}f$. #

Con el objeto de introducir una única estructura diferenciable en G de modo que la proyección $P: \vec{G} \rightarrow G$ resulte un difeomorfismo local, vamos a suponer que ϕ es regular y Hausdorff. Recordemos ver (Teorema 1.6) que si (U, φ) es una carta regular de $T_1 M$ y $\sigma: T_1 M \rightarrow T_1 M$ la homotecia $\sigma(v) = -v$, el par $(\sigma(U), \varphi_\sigma)$ donde $\varphi_\sigma^{-1}(x, t) = \phi(-\varphi^{-1}(x, 0), t)$ es una carta regular y de hecho separada si (U, φ) lo es.

Lema 2.3.

Sea ϕ regular y Hausdorff y (U, φ) una carta regular separada con $\varphi(U) = A \times I$. Si $f, f_\sigma: A \times R \rightarrow M$ denotan las familias normales de curvas geodésicas inducidas por (U, φ) y $(\sigma(U), \varphi_\sigma)$ respectivamente, se tiene:

- i) $Gf: A \rightarrow G$ es inyectiva y $P/\vec{Gf}(A): \vec{Gf}(A) \rightarrow Gf(A)$ es una biyección
- ii) $P^{-1}(Gf(A)) = \vec{Gf}(A) \cup \vec{Gf}_\sigma(A)$ (unión disjunta).

Demostración de i)

Sea $Gf(x) = Gf(y)$, entonces para todo $t \in R$ se verifica $f(x, t) = f(y, a.t+b)$ para $|a| = 1$ y algún $b \in R$. Si $a = -1$, resulta $\dot{f}(x, 0) = -\dot{f}(y, b)$ o equivalentemente $\varphi^{-1}(x, 0) = -\phi(\varphi^{-1}(y, 0), b) = \phi(-\varphi^{-1}(y, 0), -b)$.

Llamando $u = \varphi^{-1}(x, 0) \in U$ y $w = \varphi^{-1}(y, 0) \in U$, la igualdad anterior muestra que $\Pi_S(u) \in \Pi_S(U) \cap \Pi_S(\sigma(U))$, lo cual es una contradicción por ser dicha intersección vacía.

Siendo $a = 1$, resulta entonces $\vec{Gf}(x) = \vec{Gf}(y)$; luego por el lema 2.1 es $x = y$.

Dado que $P \circ \vec{Gf} = Gf$ y Gf es inyectiva, la aplicación $P/\vec{Gf}(A): \vec{Gf}(A) \rightarrow Gf(A)$ es claramente una biyección. #

Demostración de ii)

Como $f_\sigma(x, t) = \Pi \circ \phi(\varphi_\sigma^{-1}(x, 0), t)$ y $\varphi_\sigma^{-1}(x, 0) = -\varphi^{-1}(x, 0)$, entonces

$f_{\sigma}(x,t) = f(x,-t)$; luego $Gf_{\sigma} = Gf$

Por i) resulta, $P(\vec{G}f(A)) = Gf(A) = Gf_{\sigma}(A) = P(\vec{G}f_{\sigma}(A))$; luego $\vec{G}f(A) \cup \vec{G}f_{\sigma}(A) \subset P^{-1}(Gf(A))$

Si $\Pi_{\vec{G}}(c) \in P^{-1}(Gf(A))$ entonces $\Pi_{\vec{G}}(c) \in Gf(A)$; luego existe un $x \in A$ tal que $\Pi_{\vec{G}}(c) = Gf(x)$ o equivalentemente existe un $a \neq 0$ y un $b \in \mathbb{R}$, tal que $c(t) = f(x, a.t+b)$ para todo $t \in \mathbb{P}$. Si $a > 0$, es $\Pi_{\vec{G}}(c) = \Pi_{\vec{G}}(f(x, \cdot)) = \vec{G}f(x)$; luego $\Pi_{\vec{G}}(c) \in \vec{G}f(A)$. Si $a < 0$, es $\Pi_{\vec{G}}(c) = \Pi_{\vec{G}}(f_{\sigma}(x, \cdot)) = \vec{G}f_{\sigma}(x)$ luego $\Pi_{\vec{G}}(c) \in \vec{G}f_{\sigma}(A)$.

Por otro lado, como (U, φ) es separada se tiene que la intersección de $\Pi_{\vec{G}}(U)$ con $\Pi_{\vec{G}}(\sigma(U))$ es vacía y puesto que por el lema 2.1 es $\vec{G}f(A) = \mu^{-1}(\Pi_{\vec{G}}(U))$ y $\vec{G}f_{\sigma}(A) = \mu^{-1}(\Pi_{\vec{G}}(\sigma(U)))$, resulta que la intersección de $\vec{G}f(A)$ con $\vec{G}f_{\sigma}(A)$ es vacía. #

En virtud de la parte i) del lema anterior, diremos que el par $(Gf(A), Gf^{-1})$ es una carta para el conjunto G inducida por la carta regular separada (U, φ) de T_1M .

Sea \mathcal{O} la familia de todas las cartas de G inducidas por cartas regulares separadas de T_1M ; luego por el corolario 1.7 la familia constituida por los dominios de dichas cartas cubren a G .

Teorema 2.4.

Sea ϕ regular y Hausdorff; luego la familia \mathcal{O} es un atlas diferenciable de dimensión $2n-2$ sobre G .

Considerando en G la estructura diferenciable generado por dicho atlas, G resulta Hausdorff y $P: \vec{G} \rightarrow G$ un difeomorfismo local.

Demostración

Sean (U, φ) y (V, ψ) dos cartas regulares separadas de T_1M con $\varphi(U) = A \times I$ y $\psi(V) = B \times J$ y supongamos que los dominios de las cartas $(Gf(A), Gf^{-1})$ y $(Gg(B), Gg^{-1})$ inducidas por (U, φ) y (V, ψ) respectivamente, tengan intersección no vacía.

Denotando con $\Sigma = Gf(A) \cap Gg(B)$ debemos probar que la biyección $(Gg)^{-1} \circ Gg: (Gf)^{-1}(\Sigma) \rightarrow (Gg)^{-1}(\Sigma)$ es un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^{2n-2} .

A tal efecto, sean $(\vec{G}f_\sigma(A), \vec{G}f_\sigma^{-1})$ y $(\vec{G}g_\sigma(B), \vec{G}g_\sigma^{-1})$ las cartas de \vec{G} inducidas por las cartas regulares separadas $(\sigma(U), \varphi_\sigma)$ y $(\sigma(V), \psi_\sigma)$. Sea $\Sigma_1 = \vec{G}f(A) \cap \vec{G}g(B)$, $\Sigma_2 = \vec{G}f(A) \cap \vec{G}g_\sigma(B)$, $\Delta_1 = \Sigma_1$ y $\Delta_2 = \vec{G}g(P) \cap \vec{G}f_\sigma(A)$.

En virtud del lema 2.1, los conjuntos Σ_1 , Σ_2 y Δ_2 son abiertos en \vec{G} y los conjuntos $(\vec{G}f)^{-1}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ y $(\vec{G}g)^{-1}(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ son abiertos en A y en B respectivamente.

Una simple verificación, muestra que

$$(Gf)^{-1}(\Sigma) = (\vec{G}f)^{-1}(\Sigma_1) \cup (\vec{G}f)^{-1}(\Sigma_2)$$

$$(Gg)^{-1}(\Sigma) = (\vec{G}g)^{-1}(\Delta_1) \cup (\vec{G}g)^{-1}(\Delta_2)$$

luego los conjuntos $(Gf)^{-1}(\Sigma)$ y $(Gg)^{-1}(\Sigma)$ son abiertos.

Por el lema 2.3 parte ii), las uniones son disjuntas y dado que la restricción de $(Gg)^{-1} \circ Gf$ a $(\vec{G}f)^{-1}(\Sigma_1)$ coincide con $(\vec{G}g)^{-1} \circ (\vec{G}f)$ y la restricción de $(Gg)^{-1} \circ Gf$ a $(\vec{G}f)^{-1}(\Sigma_2)$ coincide con $(\vec{G}g)^{-1} \circ \vec{G}f$ resulta $(Gg)^{-1} \circ Gf$ un difeomorfismo; luego \mathcal{O} es un atlas diferenciable de dimensión $2n-2$ sobre G.

Considerando en G la topología inducida por la estructura diferenciable generada por el atlas \mathcal{O} , la familia de los dominios de las cartas de \mathcal{O} constituyen en virtud del corolario 1.7 una base para dicha topología; luego por la parte ii) del lema 2.3 es P continua. Por la parte i) del mismo, $P/\vec{G}f(A): \vec{G}f(A) \rightarrow Gf(A)$ es un difeomorfismo; luego P es un difeomorfismo local.

Para ver que G es Hausdorff, sean $\Pi_G(c_1) \neq \Pi_G(c_2)$ en G y denotemos con $v_i = \dot{c}_i(0) \cdot |\dot{c}_i(0)|^{-1}$ para $i = 1, 2$; luego $\Pi_S(v_1) \neq \Pi_S(v_2)$ y $\Pi_S(-v_1) \neq \Pi_S(v_2)$.

Como T_1M/S es Hausdorff existen abiertos H_1 , H_2 y H_3 disjuntos entre sí y entornos de $\Pi_S(v_1)$, $\Pi_S(v_2)$ y $\Pi_S(-v_1)$ respectivamente. Por el corolario 1.7, existen cartas regulares separadas (U, φ) y (V, ψ) centradas en v_1 y en v_2 tales que $\Pi_S(v_1) \in \Pi_S(U) \subset H_1$ y $\Pi_S(v_2) \in \Pi_S(V) \subset H_2$; achicando U si fuera necesario podemos suponer que $\Pi_S(-v_1) \in \Pi_S(\sigma(U)) \subset H_3$.

Sea $\varphi(U) = A \times I$, $\psi(V) = B \times J$ y $(Gf(A), Gf^{-1})$, $(Gg(B), Gg^{-1})$ las cartas de G inducidas por (U, φ) y (V, ψ) respectivamente; luego $\Pi_G(c_1) \in Gf(A) \subset P(\mu^{-1}(H_1))$ y $\Pi_G(c_2) \in Gg(B) \subset P(\mu^{-1}(H_2))$. Resta verificar que la intersección de $Gf(A)$ con $Gg(B)$ es vacía. Supongamos que no y sea $\Pi_G(c) \in Gf(A) \cap Gg(B)$; luego existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $\Pi_G(c) = Gf(x) = Gg(y)$.

La igualdad implica entonces, que existe un $b \in R$ tal que $f(x, t) = g(y, a.t+b)$ con $|a| = 1$.

Si $a = 1$, entonces $\dot{f}(x, 0) = \dot{g}(y, b) = \phi(\dot{g}(y, 0), b)$ o equivalentemente $\varphi^{-1}(x, 0) = \phi(\psi^{-1}(y, 0), b)$ es decir, $\Pi_S(\varphi^{-1}(x, 0)) = \Pi_S(\psi^{-1}(y, 0))$.

Como $\varphi^{-1}(x, 0) \in U$ y $\psi^{-1}(y, 0) \in V$ entonces $\Pi_S(U) \cap \Pi_S(V)$ es no vacío, lo cual es absurdo pues $\Pi_S(U) \subset H_1$ y $\Pi_S(V) \subset H_2$.

Si $a = -1$, es $-\dot{f}(x, 0) = \dot{g}(y, b)$ o equivalentemente

$-\varphi^{-1}(x, 0) = \phi(\psi^{-1}(y, 0), b)$ es decir, $\Pi_S(-\varphi^{-1}(x, 0)) = \Pi_S(\psi^{-1}(y, 0))$.

Como $-\varphi^{-1}(x, 0) \in \sigma(U)$ entonces $\Pi_S(\sigma(U)) \cap \Pi_S(V)$ es no vacío, lo cual es absurdo pues $\Pi_S(\sigma(U)) \subset H_3$; luego $Gf(A)$ y $Gg(B)$ son disjuntos. #

Llamaremos al atlas \mathcal{O} el atlas natural de G y la estructura diferenciable generada por dicho atlas, la estructura diferenciable natural de G .

Definición

Sea ϕ regular y Hausdorff y consideremos sobre G la estructura diferenciable natural.

Diremos que una familia $g: A \times R \rightarrow M$ de curvas geodésicas dependiente de $2n-2$ parámetros induce un sistema de coordenadas en G , si $Gg: A \rightarrow Gg(A)$ es un difeomorfismo entre abiertos es decir, el par $(Gg(A), Gg^{-1})$ es una carta admisible para G .

La siguiente proposición, proporciona una condición suficiente para que una familia de curvas geodésicas induzca un sistema de coordenadas en G .

Proposición 2.5.

Sea ϕ regular y Hausdorff y $g:A \times \mathbb{R} \rightarrow M$ una familia de curvas geodésicas dependiente de $2n-2$ parámetros, tal que su normalizada f satisface

- a) $Gf:A \rightarrow G$ es inyectiva
- b) La diferencial de $\dot{f}:A \times \mathbb{R} \rightarrow T_1M$ tiene rango máximo en cada punto $(x,0)$ con $x \in A$.

Entonces g induce un sistema de coordenadas en G .

Demostración

Como en la proposición 2.2, dado $x_0 \in A$ sea $\epsilon > 0$ y $B \subset A$ un cubo abierto centrado en x_0 , tal que si $I = (-\epsilon, \epsilon)$ entonces $\dot{f}:B \times I \rightarrow \dot{f}(B \times I)$ es un difeomorfismo entre abiertos.

Sea $U = \dot{f}(B \times I)$ y $\varphi^{-1}(x,t) = \dot{f}(x,t)$ para $(x,t) \in B \times I$; luego (U, φ) es una carta cúbica y chata centrada en $\dot{f}(x_0, 0)$. Por el teorema 1.6 parte b), podemos suponer achicando U si fuera necesario, que (U, φ) es una carta regular separada.

Dado que $f:B \times \mathbb{R} \rightarrow M$ es la familia normal de curvas geodésicas inducida por (U, φ) , se tiene en virtud del teorema anterior que $Gf:B \rightarrow Gf(B)$ es un difeomorfismo entre abiertos pues $(Gf(B), Gf^{-1}) \in \mathcal{O}$.

Puesto que $x_0 \in A$ es arbitrario, resulta por a) que $Gf:A \rightarrow Gf(A)$ es un difeomorfismo entre abiertos; lo cual completa la demostración notando que $Gg = Gf$. #

Proposición 2.6.

Sea ϕ regular y Hausdorff y $f:A \times \mathbb{R} \rightarrow M$ una familia de curvas geodésicas dependiente de $2n-2$ parámetros que induce un sistema de coordenadas en G .

Entonces f induce un sistema de coordenadas en \vec{G} .

Demostración

Debemos probar que $\vec{G}f:A \rightarrow \vec{G}f(A)$ es un difeomorfismo entre abiertos y para ello es suficiente suponer que f es normal.

Si $\vec{G}f(x) = \vec{G}f(y)$ entonces $P_0\vec{G}f(x) = P_0\vec{G}f(y)$, luego $Gf(x) = Gf(y)$ y dado que $Gf:A \rightarrow Gf(A)$ es en particular inyectiva entonces $x = y$; en consecuencia $\vec{G}f:A \rightarrow \vec{G}f(A)$ es una biyección.

Es suficiente mostrar ahora, que para todo $x_0 \in A$ existe un abierto D entorno de x_0 y contenido en A , tal que $\vec{G}f:D \rightarrow \vec{G}f(D)$ es un difeomorfismo entre abiertos.

Sea $x_0 \in A$ y $v = \dot{f}(x_0, 0) \in T_1M$; siendo $Gf(A) \subset G$ un abierto, existe una carta regular separada (U, φ) de T_1M centrada en v , tal que si $\varphi(U) = B \times I$ y $(Gg(B), Gg^{-1})$ es la carta de G inducida por (U, φ) , entonces $Gf(x_0) \in Gg(B) \subset Gf(A)$.

Sea $\varphi(v) = (y_0, 0)$; luego por ser $g(y, t) = \Pi_0\phi(\varphi^{-1}(y, 0), t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, resulta $g(y_0, t) = \Pi_0\phi(v, t) = f(x_0, t)$ y por lo tanto $\vec{G}g(y_0) = \vec{G}f(x_0)$.

Por hipótesis, $Gf:A \rightarrow Gf(A)$ es un difeomorfismo entre abiertos; llamando $C = (Gf)^{-1}(Gg(B))$ y $h = (Gg)^{-1} \circ Gf$ se tiene que $h:C \rightarrow B$ es un difeomorfismo con $Gf(x) = Gg(h(x))$ para todo $x \in C$ y $h(x_0) = y_0$.

La igualdad $Gf(x) = Gg(h(x))$ expresa que $f(x, t) = g(h(x), a(x).t + b(x))$ para algún $b(x) \in \mathbb{R}$ y $|a(x)| = 1$; siendo $f(x_0, t) = g(y_0, t)$ debe ser $a(x_0) = 1$.

Si existe un entorno abierto D de x_0 y contenido en C , tal que $a(x) = 1$ para $x \in D$, resulta $f(x, t) = g(h(x), t + b(x))$ o equivalentemente $\vec{G}f(x) = \vec{G}g(h(x))$.

Siendo $\vec{G}g:B \rightarrow \vec{G}g(B)$ un difeomorfismo entre abiertos en virtud del lema 2.1, se tiene que $\vec{G}f:D \rightarrow \vec{G}f(D)$ también lo es.

Supongamos que no exista ningún entorno D de x_0 con dicha propiedad; luego existe una sucesión $x_n \in C$ que converge a x_0 tal que

si $y_n = h(x_n)$ y $b_n = b(x_n)$ entonces $f(x_n, t) = g(y_n, -t + b_n)$;
 luego $\dot{f}(x_n, 0) = -\dot{g}(y_n, b_n)$.

Llamando $v_n = \dot{f}(x_n, 0)$, $w_n = \dot{g}(y_n, b_n)$ y $u_n = \dot{g}(y_n, 0)$ resulta
 por ser $\Pi_S(w_n) = \Pi_S(u_n)$ y $\Pi_S(v_n) = \Pi_S(-w_n)$, que $\Pi_S(v_n) = \Pi_S(-u_n)$
 para todo $n \in N$.

Como u_n converge a $v = \dot{g}(y_0, 0)$ y v_n converge a v , obtenemos por
 la continuidad de Π_S que $\Pi_S(v_n)$ converge a $\Pi_S(v)$ y que $\Pi_S(-u_n)$
 converge a $\Pi_S(-v)$.

De la igualdad $\Pi_S(v_n) = \Pi_S(-u_n)$ resulta $\Pi_S(v) = \Pi_S(-v)$, lo que
 es absurdo. #

1.3. La forma diferencial geodésica

En la presente sección, probaremos ciertas propiedades que satisfacen la 2-forma simpléctica sobre TM , usando el hecho que en TM está definido de manera natural un sistema Hamiltoniano cuyo campo vectorial Hamiltoniano es el Spray geodésico. Dicha forma restringida a T_1M se aplicará en la siguiente sección, para definir de manera intrínseca la densidad de geodésicas orientadas y no orientadas. Introduciremos también una 2-forma sobre el fibrado tangente (excluida su sección nula), que coincide con la anterior sobre T_1M y que servirá para calcular en la práctica dichas densidades al considerar familias de curvas geodésicas que inducen sistemas de coordenadas en \vec{G} o en G .

En lo que sigue, si N es una variedad diferenciable, los conjuntos $\Omega^r(N)$, $\mathcal{K}(N)$ y $\mathcal{F}(N)$ denotarán respectivamente el conjunto de r -formas, campos de vectores y funciones diferenciables a valores reales definidas sobre N . La definición de diferenciación exterior de r -formas, producto exterior, derivada de Lie y contracción puede verse en el apéndice.

Definición

Sea N una variedad diferenciable de dimensión $2n$ y $\omega \in \Omega^2(N)$.

El par (N, ω) se denomina una variedad simpléctica, si ω es

cerrada ($d\omega = 0$) y es no degenerada es decir, para todo $p \in N$ la aplicación bilineal $\omega_p : N_p \times N_p \rightarrow \mathbb{R}$ ($N_p =$ espacio tangente a N en p) definido por $\omega_p(u, v) = \omega(X, Y)|_p$ donde $X, Y \in \mathcal{H}(N)$ satisfacen $X(p) = u$ e $Y(p) = v$ es no degenerada.

Un lema de Darboux (ver Pág. 95 de (1)), asegura la existencia de un atlas simpléctico en la variedad simpléctica (N, ω) ; es decir, si (U, φ) es una carta de dicho atlas con $\varphi = (y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^{2n})$, entonces $\omega = \sum_{i=1}^n dy^i \wedge dy^{n+i}$ en U .

Nota

En lo sucesivo, para evitar el símbolo de sumación, convendremos que si en una expresión aparecen dos índices iguales se trata de una suma respecto a dichos índices; por ejemplo, la expresión anterior se escribirá $\omega = dy^i \wedge dy^{n+i}$.

Proposición 3.1.

El fibrado cotangente ${}^*\Pi : T^*M \rightarrow M$ de M , admite una estructura de variedad simpléctica, para el cual el atlas trivializador de T^*M es un atlas simpléctico.

Demostración

Sea $\rho : \mathcal{H}(T^*M) \rightarrow (T^*M)$ la 1-forma definida por

$$(1) \quad \rho(X)(\alpha) = \alpha(({}^*\Pi)_*(X(\alpha)))$$

donde $X \in \mathcal{H}(T^*M)$, $\alpha \in T^*M$ y $({}^*\Pi)_* : (T^*M)_\alpha \rightarrow M$; $({}^*\Pi)_*$ denota la diferencial de la proyección ${}^*\Pi$ en α . Definiendo la 2-forma $\gamma \in \Omega^2(T^*M)$ por

$$(2) \quad \gamma = -d\rho$$

resulta γ cerrada pues $d\gamma = 0$.

Sea (U, φ) una carta de M con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ y $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ para $i = 1, \dots, n$; denotando con $(T^*U, T^*\varphi)$ la carta trivializadora de T^*M , se tiene $T^*U = ({}^*\Pi)^{-1}(U)$ y $T^*\varphi = (y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^{2n})$ donde

$$(3) \quad y^i(\alpha) = x^i({}^*\Pi(\alpha)) \text{ e } y^{n+i}(\alpha) = \alpha(X_i({}^*\Pi(\alpha)))$$

para todo $\alpha \in T^*U$ e $i = 1, \dots, n$.

En virtud de las expresiones (1), (2) y (3) se obtiene

$$(4) \quad \rho = y^{n+1} \cdot dy^i \quad y \quad \gamma = dy^i \wedge dy^{n+1} \text{ en } T^*U$$

La expresión local de γ , muestra que es no degenerada y que el atlas trivializador es un atlas simpléctico. #

Definición

Sea (N, ω) una variedad simpléctica y $H \in \mathcal{F}(N)$; entonces la terna (N, ω, H) se denomina un sistema Hamiltoniano y H la función Hamiltoniana (ver Pág. 109 de (1)).

Siendo ω no degenerada, ésta induce un difeomorfismo $\omega_*: T_N \rightarrow T^*N$ que preserva y es lineal en cada fibra, definido por $\omega_*(v)(u) = \omega(v, u)$ para todo $v, u \in TN$ con $\Pi(v) = \Pi(u)$, donde $\Pi: TN \rightarrow N$ denota la proyección.

En consecuencia, como $dH \in \Omega^1(N)$, existe un único campo de vectores $Z_H \in \mathcal{K}(N)$ tal que

$$(5) \quad \omega(Z_H, X) = dH(X) = X(H) \text{ para todo } X \in \mathcal{K}(N)$$

El campo de vectores Z_H recibe el nombre de campo vectorial Hamiltoniano asociado al sistema.

Para obtener el valor del campo Z_H , se procede localmente tomando cartas simplécticas. Sea (U, φ) una carta simpléctica con $\varphi = (y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^{2n})$; luego $\omega = dy^i \wedge dy^{n+i}$.

Por otro lado, si $Z_H = \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \eta^i \frac{\partial}{\partial y^{n+i}}$ en U , donde $\xi^i, \eta^i \in \mathcal{F}(U)$; aplicando (5) a los campos $\frac{\partial}{\partial y^l} \in \mathcal{K}(U)$ para $l = 1, \dots, 2n$ resulta

$$(6) \quad \xi^i = \frac{\partial H}{\partial y^{n+i}} \quad y \quad \eta^i = - \frac{\partial H}{\partial y^i} \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

Proposición 3.2.

Sea (N, ω, H) un sistema Hamiltoniano y Z_H el campo vectorial Hamiltoniano asociado al sistema; entonces (ver apéndice) ω es invariante respecto a Z_H .

Demostración

Sea $L_{Z_H} : \Omega^2(N) \rightarrow \Omega^2(N)$ la derivada de Lie respecto a Z_H y C_{Z_H} el operador de contracción respecto a Z_H .

Como para todo $\theta \in \Omega^2(N)$ es $L_{Z_H} \theta = dC_{Z_H} \theta + C_{Z_H} d\theta$ (ver apéndice), se obtiene en particular por ser $d\omega = 0$ y $C_{Z_H} \omega = dH$ que $L_{Z_H} \omega = 0$.#

La métrica \langle , \rangle de M , induce un difeomorfismo $g: TM \rightarrow T^*M$ definido por $g(v)(u) = \langle v, u \rangle$ para $v, u \in TM$ con $\Pi(v) = \Pi(u)$; luego por la proposición 3.1, el par $(TM, g^*(\gamma))$ es una variedad simpléctica, donde γ es la 2-forma definida por la igualdad (2).

Denotando de aquí en más, con $\omega = g^*(\gamma)$, denominaremos a ω la 2-forma simpléctica sobre TM .

Sea $E: TM \rightarrow R$ la función (energía) definida por $E(v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle$ para $v \in TM$; se tiene entonces:

Proposición 3.3.

Sea ω la 2-forma simpléctica sobre TM ; entonces el campo vectorial Hamiltoniano Z_E asociado al sistema (TM, ω, E) es el Spray geodésico S es decir, $Z_E = S$.

Demostración

Sea $H: T^*M \rightarrow R$ la función definida por $H(\alpha) = \frac{1}{2} \langle \alpha, \alpha \rangle^*$, donde \langle , \rangle^* denota la métrica dual de \langle , \rangle ; luego el sistema Hamiltoniano (T^*M, γ, H) se transforma vía g en el sistema Hamiltoniano $(TM, \omega, H \circ g)$. Siendo $H \circ g = E$, se tiene que Z_H se transforma (vía g) en el campo vectorial Hamiltoniano Z_E es decir, $g^* Z_H = Z_E$ y puesto que para todo $v \in TM$ es $(g^* Z_H)(v) = (g_*)^{-1}(Z_H(g(v)))$, es suficiente verificar que $g_*(S(v)) = Z_H(g(v))$.

Para mostrar la última igualdad, procedemos localmente.

Sea (U, φ) una carta de M con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$; denotando con $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{K}(U)$, $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle \in \mathcal{F}(U)$ para $i, j = 1, \dots, n$ y designando con (g^{ij}) la matriz inversa de (g_{ij}) , se tiene si $T^* \varphi = (y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^{2n})$, que la expresión local de H es

$$(7) \quad H = \frac{1}{2} y^{n+i} \cdot y^{n+j} \cdot g^{ij} \circ^* \Pi \quad \text{en } T^*U$$

Si $Z_H = \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \eta^i \frac{\partial}{\partial y^{n+i}}$, en virtud de las igualdades (6) resulta

$$(8) \quad \xi^i = y^{n+k} \cdot g^{ik} \circ^* \Pi \quad \text{y} \quad \eta^i = -\frac{1}{2} y^{n+k} \cdot y^{n+l} \cdot \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i} \circ^* \Pi$$

Por otro lado, siendo $(T^*U, T^*\varphi)$ una carta simpléctica de (T^*M, γ) , entonces $(TU, (T^*\varphi)_\circ g)$ lo es de (TM, ω) , donde las funciones coordenadas de $(T^*\varphi)_\circ g$ satisfacen

$$(9) \quad y^i \circ g = \bar{x}^i, \quad y^{n+i} \circ g = \bar{x}^{n+j} \circ g_{ij} \circ \Pi$$

$$\text{si } T\varphi = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n, \bar{x}^{n+1}, \dots, \bar{x}^{2n})$$

De las igualdades (8), (9) y usando el hecho que los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k están dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

y que la expresión del Spray geodésico S en TU (ver apéndice) es

$$(10) \quad S = \bar{x}^{n+k} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} + (-\bar{x}^{n+i} \cdot \bar{x}^{n+j} \cdot \Gamma_{ij}^k \circ \Pi) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{n+k}}$$

se obtiene la igualdad deseada en TU. #

Si $\phi: TM \times \mathbb{R} \rightarrow TM$ es el flujo geodésico, sea $\phi_t: TM \rightarrow TM$ el difeomorfismo definido por $\phi_t(v) = \phi(v, t)$; obtenemos entonces el siguiente corolario.

Corolario 3.4.

La 2-forma simpléctica ω es invariante por el flujo geodésico ϕ ; es decir, $\phi_t^*(\omega) = \omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración

Como ϕ es el grupo uniparamétrico de difeomorfismos inducido por S, por la proposición 3 del apéndice resulta equivalente demostrar que $L_S \omega = 0$; pero dicha igualdad es consecuencia inmediata de las proposiciones 3.2 y 3.3. #

En particular $\omega^k = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ (producto exterior k-veces) es ϕ_t -invariante.

Si $(TU, (T^*\psi) \circ g)$ es la carta simpléctica de TM considerada en la proposición 3.3, sea $(T^*\psi) \circ g = (q^1, \dots, q^n, q^{n+1}, \dots, q^{2n})$ y $\theta = g^*(\rho)$ donde ρ es la 1-forma sobre T^*M definida por (1).

Debido a (4) se obtiene,

$$(11) \quad \theta = q^{n+i} \cdot dq^i \quad \text{y} \quad \omega = dq^i \wedge dq^{n+i} \quad \text{en TU}$$

y por (9) es

$$(12) \quad q^i = \bar{x}^i \quad \text{y} \quad q^{n+i} = \bar{x}^{n+j} \cdot g_{ij} \circ \Pi \quad \text{en TU}$$

Lema 3.5.

Con las notaciones introducidas se verifica, $\theta(S) = 2.E$ y

$$L_S \theta = dE.$$

Demostración

A efecto de probar las igualdades, procedemos localmente considerando una carta simpléctica $(TU, T^*\psi) \circ g$ de TM.

Sea $v \in TU$; luego por (11) se tiene que

$$\theta(S)(v) = (q^{n+i} \cdot dq^i)(S)(v) = q^{n+i}(v) \cdot dq^i(S)(v)$$

Siendo $q^i = \bar{x}^i$, por (10) resulta $dq^i(S)(v) = \bar{x}^{n+i}(v)$; luego por

(12) se satisface

$$\theta(S)(v) = q^{n+i}(v) \cdot \bar{x}^{n+i}(v) = \bar{x}^{n+j}(v) \cdot \bar{x}^{n+i}(v) \cdot g_{ij} \circ \Pi(v) = 2.E(v).$$

Por otra parte, si C_S es el operador de contracción respecto a S, se tiene debido a la proposición 3.3, que $C_S \omega = dE$.

Dado que $C_S \theta = \theta(S) = 2.E$, resulta por ser $L_S \theta = dC_S \theta + C_S d\theta$ y $\omega = -d\theta$, que $L_S \theta = dC_S \theta - C_S \omega = d(2.E) - dE = dE$. #

Sea $O(M)$ el conjunto de los vectores nulos de TM y $\widetilde{TM} = TM - O(M)$; luego \widetilde{TM} es una subvariedad abierta de TM.

Si $i: \widetilde{TM} \rightarrow TM$ denota la inclusión, denotemos con $\tilde{\theta} = i^*(\theta)$,

$$\tilde{\omega} = i^*(\omega), \quad \tilde{S} = S \circ i \quad \text{y} \quad \tilde{E} = E \circ i.$$

Como las geodésicas tienen velocidad constante, resulta que para todo $v \in \widetilde{TM}$ es $\phi_t(v) \in \widetilde{TM}$; luego el flujo geodésico restringido a \widetilde{TM} genera a S y $(\widetilde{TM}, \widetilde{\omega}, \widetilde{E})$ resulta un sistema Hamiltoniano cuyo campo vectorial Hamiltoniano es \widetilde{S} .

Es claro además, que el corolario 3.4 y el lema 3.5 siguen siendo válidos para ésta situación.

En lo que sigue, supondremos todos los objetos definidos sobre \widetilde{TM} y abusaremos de la notación, denotando nuevamente con $S = \widetilde{S}$, $E = \widetilde{E}$, $\theta = \widetilde{\theta}$ y $\omega = \widetilde{\omega}$.

Sea $F: TM \rightarrow R$ la función definida por $F(v) = (2.E(v))^{1/2} = |v|$; luego F es diferenciable en \widetilde{TM} . Para una carta (U, φ) de M con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ sea $(TU, T\varphi)$ la carta trivializadora de TM con $T\varphi = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n, \bar{x}^{n+1}, \dots, \bar{x}^{2n})$; luego si $X_i = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$ y $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ se tiene que $F = (\bar{x}^{n+1} \cdot \bar{x}^{n+2} \cdot \dots \cdot \bar{x}^{2n} \cdot g_{ij})^{1/2}$ en TU .

Si $\widetilde{TU} = TU \cap \widetilde{TM}$, definimos n -funciones $p^i: \widetilde{TU} \rightarrow R$ por $p^i = \frac{\partial F \circ (T\varphi)^{-1}}{\partial \bar{x}^{n+1}}$; luego por (12) resulta $p^i = \frac{1}{F} \cdot q^{n+1}$

Sea ω_F la 2-forma sobre \widetilde{TU} definida por

$$(13) \quad \omega_F = dq^i \wedge dp^i = d\bar{x}^i \wedge dp^i$$

luego por ser $dp^i = d(\frac{1}{F} \cdot q^{n+1}) = -\frac{1}{F^2} \cdot q^{n+1} \cdot dF + \frac{1}{F} dq^{n+1}$, resulta en virtud de (11) que

$$(14) \quad \omega_F = -\frac{1}{F^2} \cdot \theta \wedge dF + \frac{1}{F} \cdot \omega$$

La igualdad (14) muestra que ω_F está globalmente definida es decir, $\omega_F \in \Omega^2(\widetilde{TM})$.

Lema 3.6.

La forma ω_F es invariante por el flujo geodésico es decir, $\phi_t^*(\omega_F) = \omega_F$ para todo $t \in R$ o equivalentemente $L_S \omega_F = 0$.

Demostración

Como las geodésicas tienen velocidad constante, resulta

$F \circ \phi_t(v) = F(v)$ para todo $t \in R$, $v \in \widetilde{TM}$; en consecuencia se tiene $L_S F = L_S(\frac{1}{F}) = L_S(-\frac{1}{F^2}) = 0$ y $L_S dF = 0$.

Por otro lado, L_S es una derivación y conmuta con la diferenciación exterior; luego

$$L_S \omega_F = L_S \left(-\frac{1}{F^2} \theta \wedge dF + \frac{1}{F} \cdot \omega \right) = -\frac{1}{F^2} L_S \theta \wedge dF + \frac{1}{F} L_S \omega$$

Por el corolario 3.4 es $L_S \omega = 0$ y por el lema 3.5 es $L_S \theta = dE$; luego $L_S \omega_F = -\frac{1}{F^2} dE \wedge dF$. Siendo $F = (2 \cdot E)^{1/2}$, resulta $dF = \frac{1}{F} \cdot dE$ y por lo tanto $L_S \omega_F = 0$. #

Sea $A \subset \mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$) un abierto, $f: A \times \mathbb{R} \rightarrow M$ una familia de curvas geodésicas dependiente de "m" parámetros y consideremos (ver sección 1.2) la función inducida $\dot{f}: A \times \mathbb{R} \rightarrow TM$ definida por $\dot{f}(x, t) = f_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) / (x, t)$. Denotando con $\dot{f}_t(x) = \dot{f}(x, t)$, obtenemos aplicaciones diferenciables $\dot{f}_t: A \rightarrow \widetilde{TM}$ por ser $f(x, \cdot) \in \mathcal{G}$ (ver sección 1.2); luego $(\dot{f}_t)^*(\omega_F)$ es una 2-forma definida sobre A para cada $t \in \mathbb{R}$.

Corolario 3.7.

Sea $f: A \times \mathbb{R} \rightarrow M$ una familia de curvas geodésicas dependiente de "m" parámetros; entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ se verifica $(\dot{f}_t)^*(\omega_F) = (\dot{f}_0)^*(\omega_F)$.

En particular, si f es normal resulta $(\dot{f}_t)^*(\omega_F) = (\dot{f}_0)^*(\omega)$.

Demostración

Como $f(x, t) = \Pi \circ \phi(\dot{f}(x, 0), t)$ entonces $\dot{f}_t = \phi_t \circ \dot{f}_0$; luego debido al lema anterior se tiene

$$(\dot{f}_t)^*(\omega_F) = (\dot{f}_0)^* \circ (\phi_t)^*(\omega_F) = (\dot{f}_0)^*(\omega_F)$$

La segunda afirmación es consecuencia inmediata de la expresión (14) de ω_F . #

Observación

Clásicamente ver Santaló (15) y (19), la medida de geodésicas se define mediante la 2-forma ω_F expresada en la forma (13), probando que es invariante por cambios de coordenadas en la variedad

M y que es invariante respecto al parámetro "t". La expresión (14) y el corolario anterior implican las dos invariancias que allí se demuestran.

Hacemos notar que debido al corolario 3.4, la 2-forma simpléctica ω restringida a \widetilde{TM} satisface ambas invariancias.

La siguiente proposición que será de utilidad en la siguiente sección, proporciona una información adicional sobre ω_F , que la distingue de ω y que aparentemente no ha sido notada.

Proposición 3.8. (Invariancia por velocidades)

Sea $f:A \times R \rightarrow M$ una familia de curvas geodésicas dependiente de "m" parámetros y $a:A \rightarrow R$ una función diferenciable que satisfaga $a(x) > 0$ o bien $a(x) < 0$ para todo $x \in A$.

Si $g:A \times R \rightarrow M$ es la familia de curvas geodésicas definida por $g(x,t) = f(x,a(x).t)$, entonces $(\dot{g}_0)^*(\omega_F) = \pm(\dot{f}_0)^*(\omega_F)$ donde el signo corresponde al caso de que $a > 0$ o $a < 0$.

Demostración

Por construcción de g es $\dot{g}(x,0) = a(x).\dot{f}(x,0)$; luego si denotamos con $X = \dot{f}_0$ y con $Y = \dot{g}_0$ resulta

$$(15) \quad Y = a.X \quad \text{y} \quad F \circ Y = |a|.F \circ X \quad \text{en } A.$$

Por otro lado, por (14) obtenemos

$$(16) \quad Y^*(\omega_F) = -\frac{1}{F^2 \circ Y} \cdot Y^*(\theta) \wedge d(F \circ Y) + \frac{1}{F \circ Y} \cdot Y^*(\omega)$$

Dado que en coordenadas locales ver(11) es $\theta = q^{n+i}.dq^i$, entonces $Y^*(\theta) = q^{n+i} \circ Y . d(q^i \circ Y)$ y siendo $\bar{x}^{n+j} \circ Y = a.\bar{x}^{n+j} \circ X$, $\bar{x}^i \circ Y = \bar{x}^i \circ X$, $\Pi \circ Y = \Pi \circ X$, de (12) y (15) resulta

$$(17) \quad Y^*(\theta) = a.X^*(\theta)$$

Teniendo en cuenta que $\omega = -d\theta$, por reemplazo de (15) y (17) en (16) se tiene

$$(18) \quad Y^*(\omega_F) = -\frac{1}{a^2.F \circ X} . (a.X^*(\theta)) \wedge d(|a|.F \circ X) - \frac{1}{a.F \circ X} . d(a.X^*(\theta))$$

Siendo $d(|a| \cdot F \circ X) = F \circ X \cdot d|a| + |a| \cdot d(F \circ X)$ y
 $d(a \cdot X^*(\theta)) = d.a \wedge X^*(\theta) + a \cdot d(X^*(\theta)) = d.a \wedge X^*(\theta) - a \cdot X^*(\omega)$
 se obtiene $Y^*(\omega_F) = \pm X^*(\omega_F)$, por reemplazo de las dos últimas
 igualdades en (18). #

Debido al corolario 3.7 y la proposición anterior, llamaremos
 a la 2-forma ω_F la forma diferencial geodésica de M.

De la expresión (17), resulta que la proposición 3.8 no es vá
lida en general para la 2-forma simpléctica ω restringida a
 \widetilde{TM} ; sin embargo se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.9.

Sea $f: A \times R \rightarrow M$ una familia normal de curvas geodésicas dependien
 te de "m" parámetros y sea $g: A \times R \rightarrow M$ la familia normal de curvas
 geodésicas definida por $g(x, t) = f(x, -t)$; entonces $(\dot{g}_0)^*(\omega) =$
 $= -(\dot{f}_0)^*(\omega)$.

Demostración

Siendo f y g normales se tiene por (14) que $(\dot{f}_0)^*(\omega_F) = (\dot{f}_0)^*(\omega)$
 y $(\dot{g}_0)^*(\omega_F) = (\dot{g}_0)^*(\omega)$; luego la igualdad deseada es consecuen
 cia de la proposición anterior tomando $a = -1$. #

Considerando TM como una variedad de Riemann con la métrica de
 Sasaki definida en el apéndice, sea dV_{TM} el elemento de volumen
 de TM correspondiente a la orientación inducida por las cartas
 trivializadoras; luego la expresión local de dicho volumen (ver
 apéndice) respecto a una carta trivializadora $(TU, T\varphi)$ con

$$T\varphi = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n, \bar{x}^{n+1}, \dots, \bar{x}^{2n}) \text{ es,}$$

$$dV_{TM} = \det \|g_{ij}\| \cdot d\bar{x}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n \wedge d\bar{x}^{n+1} \wedge \dots \wedge d\bar{x}^{2n}$$

en TU . Siendo por (11); $\omega = dq^i \wedge dq^{n+i}$ en TU , entonces

$$\omega^n = n! dq^1 \wedge dq^{n+1} \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dq^{2n} = n! (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$$

$$\wedge dq^{n+1} \wedge \dots \wedge dq^{2n} \text{ donde } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \text{parte entera de } \frac{n}{2}.$$

Por (12) es $q^i = \bar{x}^i$ y $q^{n+i} = \bar{x}^{n+j} \cdot g_{ij} \circ \Pi$; luego

$$dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dq^{n+1} \wedge \dots \wedge dq^{2n} = \det \|g_{ij} \circ \Pi\| d\bar{x}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n \wedge d\bar{x}^{n+1} \wedge \dots \wedge d\bar{x}^{2n}$$

y en consecuencia se tiene,

$$(19) \quad dV_{TM} = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n!} \cdot \omega^n$$

Sea $N: TM \rightarrow TTM$ el campo de vectores cuya restricción a T_1M , define el campo normal exterior a T_1M ; luego la representación local de N (ver apéndice) respecto a la carta $(TU, T\varphi)$ es

$$N = \bar{x}^{n+j} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{n+j}} \text{ en } TU.$$

Si orientamos T_1M de modo que para $v \in T_1M$ y toda base orientada $b_1, \dots, b_{2n-1} \in (T_1M)_v \subset (TM)_v$, resulte $N(v), b_1, \dots, b_{2n-1}$ una base orientada de $(TM)_v$, el elemento de volumen dV_{T_1M} de T_1M determinada por dicha orientación y la métrica de Sasaki restringida a T_1M , será la restricción a T_1M de la "densidad cinemática" $dK = C_N(dV_{TM})$; cuya expresión local puede verse en el apéndice y donde C_N denota el operador de contracción respecto a N .

Para expresar dK en términos de la 2-forma simpléctica, por ser $C_N(\omega^n) = n \cdot \omega^{n-1} \wedge C_N(\omega)$; procedemos a evaluar $C_N(\omega)$ utilizando cartas trivializadoras.

Sea $X \in \mathcal{K}(TU)$; luego $C_N(\omega)(X) = \omega(N, X) = dq^i \wedge dq^{n+i}(N, X)$ y por lo tanto $C_N(\omega)(X) = dq^i(N) \cdot dq^{n+i}(X) - dq^i(X) \cdot dq^{n+i}(N)$.

Como $dq^{n+i}(N) = N(q^{n+i})$, se tiene

$$N(q^{n+i}) = \bar{x}^{n+j} \cdot \frac{\partial q^{n+i}}{\partial \bar{x}^{n+j}} = \bar{x}^{n+j} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{n+j}} (\bar{x}^{n+k} \cdot g_{ik} \circ \Pi) = \bar{x}^{n+j} \cdot g_{ij} \circ \Pi = q^{n+i}$$

y dado que $dq^i(N) = d\bar{x}^i \left(\bar{x}^{n+j} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{n+j}} \right) = 0$, resulta por (11) que

$C_N(\omega)(X) = -\theta(X)$. Por (19) obtenemos entonces

$$(20) \quad dK = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}}{(n-1)!} \cdot \omega^{n-1} \wedge \theta$$

Es de hacer notar, que debido a la proposición 3.3, para $X \in \mathcal{K}(TM)$ se verifica $\omega(S, X) = X(E)$; luego si consideramos ω y S restringidos a T_1M se tiene,

$$(21) \quad \omega(S, X) = 0 \text{ para } X \in \mathcal{K}(T_1 M)$$

por ser $E(v) = \frac{1}{2}$ si $v \in T_1 M$.

Lema 3.10.

Sea $f: A \times R \rightarrow M$ una familia normal de curvas geodésicas dependiente de $2n-2$ parámetros y $\dot{f}: A \times R \rightarrow T_1 M$ la aplicación $\dot{f}(x, t) = f_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \Big|_{(x, t)}$.

Si $(\dot{f}_0)^* (\omega^{n-1}) = \theta_f \cdot dx$, donde $\theta_f: A \rightarrow R$ es una función diferenciable y $dx = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{2n-2}$, entonces $(\dot{f})^* (dV_{T_1 M}) = k_n \cdot \theta_f \cdot dx \wedge dt$,

$$\text{donde } k_n = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}}{(n-1)!}$$

Demostración

Por (20) es suficiente mostrar que

$$(\dot{f})^* (\omega^{n-1} \wedge \theta) = \theta_f \cdot dx \wedge dt$$

Para $i = 1, \dots, 2n-2$, sea $(\dot{f})_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = A_i$ y $(\dot{f})_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = A_{2n-1}$; siendo $\dot{f}(x, t) = \phi(\dot{f}(x, 0), t)$ y $t \rightarrow \phi(\dot{f}(x, 0), t)$ la curva integral del Spray geodésico S que pasa por $\dot{f}(x, 0)$, se tiene que

$$A_{2n-1}(x, t) = S(\dot{f}(x, t)).$$

Denotando con $\bar{\theta}_f(x, t) = (\dot{f})^* (\omega^{n-1} \wedge \theta) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{2n-2}}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \Big|_{(x, t)}$ y para $m \in N$, con S_m al conjunto de permutaciones del intervalo natural $[1, \dots, m]$; resulta entonces

$$\bar{\theta}_f(x, t) = \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{\sigma \in S_{2n-1}} (-1)^\sigma \cdot \omega^{n-1}(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(2n-2)}) \cdot \theta(A_{\sigma(2n-1)}) \Big|_{\dot{f}(x, t)}$$

Si $\sigma(2n-1) \neq 2n-1$, debe ser $\sigma(i) = 2n-1$ para algún $i = 1, \dots, 2n-2$; luego por (21) es $\omega^{n-1}(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(2n-2)}) = 0$.

Debido al lema 3.5, si $\sigma(2n-1) = 2n-1$, se tiene que $\theta(A_{2n-1}) = 1$; luego

$$\bar{\theta}_f(x, t) = \frac{1}{(2n-2)!} \sum_{\sigma \in S_{2n-2}} (-1)^\sigma \cdot \omega^{n-1}(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(2n-2)}) \Big|_{\dot{f}(x, t)}$$

o equivalentemente

$$\bar{\theta}_f(x, t) = \omega^{n-1}(A_1, \dots, A_{2n-2}) \Big|_{\dot{f}(x, t)}$$

Siendo $(\dot{f}_t)_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_x = A_i(x,t)$ para $i = 1, \dots, 2n-2$, tenemos que

$$\omega^{n-1}(A_1, \dots, A_{2n-2}) \Big|_{\dot{f}(x,t)} = (\dot{f}_t)^*(\omega^{n-1}) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{2n-2}} \right) \Big|_x$$

Por otro lado, siendo $\dot{f}_t = \phi_t \circ \dot{f}_0$ y ω invariante por el flujo geodésico, se tiene que $(\dot{f}_t)^*(\omega^{n-1}) = (\dot{f}_0)^*(\omega^{n-1})$; luego

$$\bar{\theta}_f(x,t) = (\dot{f}_0)^*(\omega^{n-1}) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{2n-2}} \right) \Big|_x = \theta_f(x), \text{ lo cual prueba}$$

el lema. $\#$

Observación

De la expresión (20), resulta que dV_{TM} es invariante por el flujo geodésico; luego como $dK = C_N dV_{TM}$ y L_S conmuta con el operador de contracción, se tiene que $L_S dK = 0$; en consecuencia el elemento de volumen dV_{T_1M} es invariante por el flujo geodésico restringido a T_1M .

1.4. Densidad de geodésicas orientadas y no orientadas

Suponiendo que el flujo geodésico ϕ restringido a T_1M es regular (ver sección 1.1), sea (U, φ) una carta regular de T_1M con $\varphi(U) = A \times I$.

Si $(\Pi_S(U), \tilde{\varphi})$ es la carta inducida en T_1M/S , la expresión local de la proyección $\Pi_S: T_1M \rightarrow T_1M/S$ en dichas cartas está dado por

$$(1) \quad \tilde{\varphi} \circ \Pi_S \circ \varphi^{-1}(x,t) = x \quad \text{para} \quad (x,t) \in A \times I$$

Siendo $\varphi^{-1}(x,t) = \phi(\varphi^{-1}(x,0), t)$ y $t \rightarrow \phi(\varphi^{-1}(x,0), t)$ la curva integral del Spray geodésico $S: T_1M \rightarrow TT_1M$ que pasa por $\varphi^{-1}(x,0)$, resulta de (1), que el núcleo de la diferencial de Π_S en cada $v \in T_1M$ está generado por $S(v)$.

Obtenemos en consecuencia el siguiente resultado.

Proposición 4.1.

Sea ϕ regular y $\omega \in \Omega^2(T_1M)$ la 2-forma simpléctica restringida a T_1M ; existe entonces una única 2-forma $\omega_S \in \Omega^2(T_1M/S)$ tal que $(\Pi_S)^*(\omega_S) = \omega$.

Demostración

Para $\tilde{X}_i \in \mathcal{K}(T_1M/S)$ con $i = 1, 2$ y $L = \Pi_S(v)$, sea $b_i \in (\Pi_S)_*^{-1}(\tilde{X}_i(L))$ y $X_i \in \mathcal{K}(T_1M)$ tales que $X_i(v) = b_i$. Si $\omega_S(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)/L = \omega(X_1, X_2)/v$, el valor $\omega_S(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)/L$ es independiente del vector v elegido en la órbita L , por ser ω invariante por el flujo geodésico y además independiente de los vectores b_i debido a (21) de la sección anterior y de estar el núcleo de la diferencial de Π_S en v , generado por $S(v)$.

Si para $i = 1, \dots, 2n-2$, denotamos con $\tilde{A}_i = (\tilde{\varphi}^{-1})_* (\frac{\partial}{\partial x_i})$ y con $A_i = (\varphi^{-1})_* (\frac{\partial}{\partial x_i})$, se tiene por la definición de ω_S y por (1), que $\omega_S(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j)/\tilde{\varphi}^{-1}(x) = \omega(A_i, A_j)/\varphi^{-1}(x, 0)$; luego $\omega_S \in \Omega^2(T_1M/S)$ y satisface $(\Pi_S)^*(\omega_S) = \omega$, por construcción.

La unicidad es inmediata, pues si existe $\omega'_S \in \Omega^2(T_1M/S)$ tal que $(\Pi_S)^*(\omega'_S) = \omega$, por (1) deberá verificar que

$$\omega'_S(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j)/\tilde{\varphi}^{-1}(x) = \omega(A_i, A_j)/\varphi^{-1}(x, 0); \text{ luego } \omega'_S = \omega_S. \#$$

Si ϕ es regular y consideramos en el conjunto de geodésicas orientadas \vec{G} la estructura diferenciable que hace a

$\mu: \vec{G} \rightarrow T_1M/S$ un difeomorfismo (ver sección 1.2), obtenemos

en virtud de la proposición anterior una única 2-forma

$$d\vec{G} \in \Omega^2(\vec{G}) \text{ que satisface } d\vec{G} = \mu^*(\omega_S).$$

Llamaremos a $d\vec{G}$ la densidad de geodésicas orientadas de M .

Para $k = 1, \dots, n-1$ donde n es la dimensión de M , sea $d\vec{G}^k = d\vec{G} \wedge \dots \wedge d\vec{G}$, (producto exterior k -veces); luego $d\vec{G}^k = \mu^*(\omega_S^k)$.

Proposición 4.2.

Sea ϕ regular y \vec{G} con la estructura diferenciable natural. Si $f: A \times R \rightarrow M$ es una familia de curvas geodésicas dependiente de $m = 2.k$ parámetros con $k = 1, \dots, n-1$, tal que la aplicación inducida (ver sección 1.2) $\vec{G}f: A \rightarrow \vec{G}$ es diferenciable, entonces $(\vec{G}f)^*(d\vec{G}) = (\dot{f}_0)^*(\omega_F)$.

En particular, $(\vec{G}f)^*(d\vec{G}^k) = (\dot{f}_0)^*(\omega_F^k)$

Demostración

Sea $g:A \times R \rightarrow M$ la normalizada de f es decir, $g(x,t) = f(x, a(x).t)$ donde $a(x) = |\dot{f}(x,0)|^{-1}$.

Por la proposición 3.8, es $(\dot{f}_0)^*(\omega_F) = (\dot{g}_0)^*(\omega_F)$ y dado que g es normal resulta $(\dot{f}_0)^*(\omega_F) = (\dot{g}_0)^*(\omega)$.

Como $\vec{G}f = \vec{G}g$ se tiene,

$$(\vec{G}f)^*(d\vec{G}) = (\vec{G}g)^*(d\vec{G}) = (\vec{G}g)^*(\mu^*(\omega_S)) = (\mu \circ \vec{G}g)^*(\omega_S)$$

Siendo $\mu \circ \vec{G}g(x) = \Pi_S(\dot{g}(x,0)) = \Pi_S \circ \dot{g}_0(x)$ entonces

$$(\vec{G}f)^*(d\vec{G}) = (\Pi_S \circ \dot{g}_0)^*(\omega_S) = (\dot{g}_0)^*(\Pi_S^*(\omega_S)) = (\dot{g}_0)^*(\omega)$$

y en consecuencia $(\vec{G}f)^*(d\vec{G}) = (\dot{f}_0)^*(\omega_F)$. #

Teorema 4.3.

Sea ϕ regular, entonces $d\vec{G}^{n-1}$ no se anula en ningún punto; en particular \vec{G} es orientable.

Demostración

Sea (U, φ) una carta regular de T_1M con $\varphi(U) = A \times I$ y $f:A \times R \rightarrow M$ la familia normal de curvas geodésicas inducido por φ es decir, $f(x,t) = \Pi \circ \phi(\varphi^{-1}(x,0), t)$; luego por el lema 2.1 es $(\vec{G}f(A), \vec{G}f^{-1})$ una carta de \vec{G} .

Como por la proposición anterior es

$$(\vec{G}f)^*(d\vec{G}^{n-1}) = (\dot{f}_0)^*(\omega_F^{n-1}) = (\dot{f}_0)^*(\omega^{n-1})$$

pues f es normal, siendo $(\dot{f}_0)^*(\omega^{n-1}) = \theta_f \cdot dx$, debemos mostrar que $\theta_f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$.

Dado que por (20) de la sección anterior, la $(2n-1)$ -forma $\omega^{n-1} \wedge \theta$ restringida a T_1M difiere de dV_{T_1M} en una constante no nula y (U, φ) es una carta de T_1M , se tiene que

$$(\varphi^{-1})^*(\omega^{n-1} \wedge \theta)|_{(x,t)} = g(x,t) \cdot dx \wedge dt, \text{ con } (x,t) \neq 0 \text{ para todo}$$

$(x,t) \in A \times I$.

Por otro lado, por ser $\varphi^{-1}(x,t) = \phi(\varphi^{-1}(x,0),t)$, se tiene que $\dot{f}(x,t) = \varphi^{-1}(x,t)$ si $t \in I$; luego $(\dot{f})^*(\omega^{n-1} \wedge \theta)|_{(x,0)} = g(x,0)dx \wedge dt$ y dado que por el lema 3.10 es $g(x,0) = \theta_f(x)$, resulta $\theta_f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. #

Lema 4.4.

Sea ϕ regular y $\sigma: T_1M \rightarrow T_1M$ la homotecia $\sigma(v) = -v$; si $\tilde{\sigma}: \vec{G} \rightarrow \vec{G}$ es la aplicación definida por $\tilde{\sigma}(\Pi_{\vec{G}}(c)) = \Pi_{\vec{G}}(\bar{c})$ donde $\bar{c}(t) = c(-t)$, entonces $\tilde{\sigma}$ es un difeomorfismo y $(\tilde{\sigma})^*(d\vec{G}) = -d\vec{G}$.

Demostración

Sea $\Pi_{\vec{G}}(c) \in \vec{G}$ y $v = \dot{c}(0) \cdot |\dot{c}(0)|^{-1}$. Si (U,φ) es una carta regular de T_1M centrada en v con $\varphi(U) = A \times I$, por el teorema 1.6 parte a), el par $(\sigma(U),\varphi_\sigma)$ es una carta regular centrada en $-v$ con $\varphi_\sigma(\sigma(U)) = A \times I$.

Sean $f, f_\sigma: A \times R \rightarrow M$ las familias normales de curvas geodésicas inducidas por (U,φ) y $(\sigma(U),\varphi_\sigma)$ respectivamente; luego por el lema 2.1 las aplicaciones $\vec{G}f: A \rightarrow \vec{G}f(A)$ y $\vec{G}f_\sigma: A \rightarrow \vec{G}f_\sigma(A)$ son difeomorfismos.

Siendo $f_\sigma(x,t) = f(x,-t)$ entonces $\tilde{\sigma} \circ \vec{G}f(x) = \vec{G}f_\sigma(x)$; luego $\tilde{\sigma}(\vec{G}f(A)) = \vec{G}f_\sigma(A)$ y $(\vec{G}f_\sigma)^{-1} \circ \tilde{\sigma} \circ \vec{G}f(x) = x$ para todo $x \in A$. Esto prueba que $\tilde{\sigma}$ es continua y diferenciable y dado que $\tilde{\sigma}^{-1} = \tilde{\sigma}$ resulta entonces un difeomorfismo.

Por otro lado, de la identidad $\tilde{\sigma} \circ \vec{G}f = \vec{G}f_\sigma$ se tiene que

$$(\vec{G}f)^*((\tilde{\sigma})^*(d\vec{G})) = (\vec{G}f_\sigma)^*(d\vec{G}).$$

Si $g = f_\sigma$, por la proposición anterior resulta $(\vec{G}f_\sigma)^*(d\vec{G}) = (\dot{g}_0)^*(\omega_F)$ y como $f(x,t) = g(x,-t)$ entonces $(\dot{f}_0)^*(\omega_F) = -(\dot{g}_0)^*(\omega_F)$ en virtud de la proposición 3.8.

Luego $(\vec{G}f)^*((\tilde{\sigma})^*(d\vec{G})) = -(\dot{f}_0)^*(\omega_F) = -(\vec{G}f)^*(d\vec{G})$ es decir, $(\tilde{\sigma})^*(d\vec{G}) = -d\vec{G}$. #

Observación

Si $P: \vec{G} \rightarrow G$ es la proyección, entonces $P \circ \tilde{\sigma} = P$ y $\tilde{\sigma}$ no tiene puntos fijos. En efecto, la igualdad es consecuencia inmediata de la definición de P y de $\tilde{\sigma}$; para mostrar la segunda afirmación, sea $\dot{c} \in \mathcal{G}$ tal que $\Pi_{\vec{G}}(c) = \tilde{\sigma}(\Pi_{\vec{G}}(c))$.

La igualdad implica que existen $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ que satisfacen $c(t) = c(-a.t+b)$ para todo $t \in \mathbb{R}$; luego $\dot{c}(0) = -a.\dot{c}(b)$.

Siendo $|\dot{c}(0)| = |\dot{c}(b)|$ con $\dot{c}(0) \neq 0$, se tiene que $a = 1$ y por lo tanto $\dot{c}(t) = -\dot{c}(-t+b)$; tomando $t = b/2$ resulta $\dot{c}(b/2) = 0$ lo que es absurdo.

Teorema 4.5.

Sea ϕ regular y Hausdorff y \vec{G}, G con sus respectivas estructuras diferenciables.

Si Δ y Δ' son abiertos en \vec{G} y Σ, Σ' son abiertos en G con $\Sigma \cap \Sigma'$ no vacío, tales que las aplicaciones $P/\Delta: \Delta \rightarrow \Sigma$ y $P/\Delta': \Delta' \rightarrow \Sigma'$ son difeomorfismos, sean dG_{Σ} y $dG_{\Sigma'}$ las únicas 2-formas definidas sobre Σ y Σ' que satisfacen $(P/\Delta)^*(dG_{\Sigma}) = d\vec{G}$ y $(P/\Delta')^*(dG_{\Sigma'}) = d\vec{G}$. Entonces $|dG_{\Sigma}| = |dG_{\Sigma'}|$ en $\Sigma \cap \Sigma'$.

Demostración

En primer lugar, si consideramos el difeomorfismo $\tilde{\sigma}: \vec{G} \rightarrow \vec{G}$ se tiene que $\Delta \cap \tilde{\sigma}(\Delta)$ y $\Delta' \cap \tilde{\sigma}(\Delta')$ son vacíos.

En efecto, supongamos que existe algún $c \in \mathcal{G}$ tal que $\Pi_{\vec{G}}(c) \in \Delta \cap \tilde{\sigma}(\Delta)$; entonces $\Pi_{\vec{G}}(c) = \tilde{\sigma}(\Pi_{\vec{G}}(g))$ con $\Pi_{\vec{G}}(g) \in \Delta$ y en consecuencia,

$$P(\Pi_{\vec{G}}(c)) = P(\tilde{\sigma}(\Pi_{\vec{G}}(g))) = P(\Pi_{\vec{G}}(g))$$

Siendo $P/\Delta: \Delta \rightarrow \Sigma$ en particular inyectiva, resulta $\Pi_{\vec{G}}(c) = \Pi_{\vec{G}}(g)$; luego $\Pi_{\vec{G}}(c) = \tilde{\sigma}(\Pi_{\vec{G}}(c))$ lo que es absurdo pues $\tilde{\sigma}$ no tiene puntos fijos.

Sea $\Delta_1 = \Delta \cap \Delta'$ y $\Delta_2 = \Delta \cap \tilde{\sigma}(\Delta')$; luego Δ_1 y Δ_2 son abiertos en Δ y disjuntos entre sí. Si $\Sigma_i = P(\Delta_i)$ para $i = 1, 2$, se tiene entonces

$$(2) \quad \Sigma \cap \Sigma' = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \quad (\text{unión disjunta})$$

$$(3) \quad dG_\Sigma = dG_{\Sigma'}, \text{ en } \Sigma_1 \text{ y } dG_\Sigma = -dG_{\Sigma'}, \text{ en } \Sigma_2$$

A efecto de probar (2), como $P \circ \tilde{\sigma} = P$, $P(\Delta) = \Sigma$ y $P(\Delta') = \Sigma'$ se verifica claramente $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subset \Sigma \cap \Sigma'$; reciprocamente sea $\Pi_G(c) \in \Sigma \cap \Sigma'$, luego $\Pi_G(c) = P(\Pi_G^+(c_1)) = P(\Pi_G^+(c_2))$ con $\Pi_G^+(c_1) \in \Delta$ y $\Pi_G^+(c_2) \in \Delta'$. Como $\Pi_G(c_1) = \Pi_G(c_2)$ existe un $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que $c_1(t) = c_2(a.t+b)$ para todo $t \in \mathbb{R}$; luego si $a > 0$ se tiene que $\Pi_G^+(c_1) = \Pi_G^+(c_2)$ y por lo tanto $\Pi_G(c) \in \Sigma_1$. Si $a < 0$, entonces $\Pi_G^+(c_1) = \sigma(\Pi_G^+(c_2))$ y en consecuencia $\Pi_G(c) \in \Sigma_2$.

Supongamos que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ es no vacío y sea $\Pi_G(c) \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$; luego $\Pi_G(c) = P(\Pi_G^+(c_1)) = P(\Pi_G^+(c_2))$ con $\Pi_G^+(c_1) \in \Delta_1$ y $\Pi_G^+(c_2) \in \Delta_2$. Siendo $\Pi_G(c_1) = \Pi_G(c_2)$ existe entonces un $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que $c_1(t) = c_2(a.t+b)$ para todo $t \in \mathbb{R}$; si $a > 0$ entonces $\Pi_G^+(c_1) = \Pi_G^+(c_2)$, luego $\Delta' \cap \tilde{\sigma}(\Delta')$ es no vacío lo que es absurdo. Si $a < 0$, entonces $\Pi_G^+(c_1) = \tilde{\sigma}(\Pi_G^+(c_2))$; luego $\Delta \cap \tilde{\sigma}(\Delta)$ es no vacío lo cual es absurdo y en consecuencia $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ es vacío lo cual prueba (2).

Sea Σ_1 no vacío; como el difeomorfismo $P/\Delta_1 : \Delta_1 \rightarrow \Sigma_1$ es la restricción de los difeomorfismos $P/\Delta : \Delta \rightarrow \Sigma$ y $P/\Delta' : \Delta' \rightarrow \Sigma'$ a $\Delta \cap \Delta'$, entonces $(P/\Delta_1)^*(dG_{\Sigma/\Sigma_1}) = (P/\Delta_1)^*(dG_{\Sigma'/\Sigma_1}) = d\vec{G}$ y por lo tanto $dG_\Sigma = dG_{\Sigma'}$, en Σ_1 .

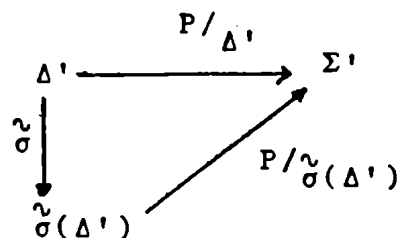
Sea Σ_2 no vacío y consideremos el difeomorfismo $P/\Delta_2 : \Delta_2 \rightarrow \Sigma_2$ que es la restricción del difeomorfismo $P/\Delta : \Delta \rightarrow \Sigma$.

Por un lado es $(P/\Delta_2)^*(dG_{\Sigma/\Sigma_2}) = d\vec{G}$; luego si probamos que $(P/\Delta_2)^*(dG_{\Sigma'/\Sigma_2}) = -d\vec{G}$, resultará $dG_\Sigma = -dG_{\Sigma'}$, en Σ_2 .

En efecto, siendo $P/\tilde{\sigma}(\Delta') \circ \tilde{\sigma} = P/\Delta'$ (ver diagrama), entonces $P/\tilde{\sigma}(\Delta')$ es un difeomorfismo.

Como $\tilde{\sigma}^{-1} = \tilde{\sigma}$, resulta

$P/\tilde{\sigma}(\Delta') = P/\Delta' \circ \tilde{\sigma}$ y en consecuencia,



$$(P/\tilde{\sigma}(\Delta'))^*(dG_{\Sigma'}) = (\tilde{\sigma})^*((P/\Delta')^*(dG_{\Sigma'})) = (\tilde{\sigma})^*(d\vec{G}) = -d\vec{G}$$

Siendo $P/\Delta_2 : \Delta_2 \rightarrow \Sigma_2$ la restricción de $P/\tilde{\sigma}(\Delta')$ a Δ_2 , se tiene por la igualdad anterior, que $(P/\Delta_2)^*(dG_{\Sigma'}|_{\Sigma_2}) = -d\vec{G}$.

Las igualdades de (2) y de (3), expresan que las formas dG_{Σ} y $dG_{\Sigma'}$ coinciden en valor absoluto es decir, $|dG_{\Sigma}| = |dG_{\Sigma'}|$ en $\Sigma \cap \Sigma'$. #

Debido al teorema anterior y al teorema 2.4, queda definido sobre G una 2-forma en valor absoluto que denotamos con $|dG|$, que en cada abierto $\Sigma \subset G$ que se aplica difeomorficamente a un abierto $\Delta \subset \vec{G}$ "vía P ", tiene por valor $|dG| = |dG_{\Sigma}|$; siendo dG_{Σ} la única 2-forma definida sobre Σ que satisface $(P/\Delta)^*(dG_{\Sigma}) = d\vec{G}$.

Llamamos a $|dG|$ la densidad de geodésicas no orientadas de M . Para $k = 1, \dots, n-1$, denotaremos con $|dG^k|$ a la 2.k-forma en valor absoluto definido por

$$(4) \quad |dG^k| = |dG_{\Sigma}^k| \text{ en } \Sigma$$

donde $dG_{\Sigma}^k = dG_{\Sigma} \wedge \dots \wedge dG_{\Sigma}$ (producto exterior k-veces).

Observación

Si $n \geq 3$ y es impar, las igualdades de (3) implican que $dG_{\Sigma}^{n-1} = dG_{\Sigma'}^{n-1}$ en $\Sigma \cap \Sigma'$; luego si denotamos a dicho valor común con dG^{n-1} , se tiene definido una $(2n-2)$ -forma sobre G y es la única que satisface $P^*(dG^{n-1}) = d\vec{G}^{n-1}$ por ser P un difeomorfismo local; luego por el teorema 4.3, dG^{n-1} no se anula en ningún punto y G resulta orientable.

Sea $A \subset \mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$) un abierto y $\psi: A \rightarrow G$ una función diferenciable. Para $x \in A$, sea Σ un entorno abierto de $\psi(x)$ y Δ un abierto en \vec{G} tal que $P/\Delta: \Delta \rightarrow \Sigma$ es un difeomorfismo.

Si dG_Σ es la única 2-forma sobre Σ que satisface $(P/\Delta)^*(dG_\Sigma) = d\vec{G}$, por el teorema anterior queda definida sobre A una 2-forma en valor absoluto que denotamos con $\psi^*(|dG|)$ y cuyo valor sobre el abierto $\psi^{-1}(\Sigma)$ es $\psi^*(|dG|) = |\psi^*(dG_\Sigma)|$. Si $m = 2.k$ con $k = 1, \dots, n-1$, se obtiene una 2.k-forma en valor absoluto sobre A que denotamos con $\psi^*(|dG^k|)$, que tiene por valor $|\psi^*(dG_\Sigma^k)|$ sobre $\psi^{-1}(\Sigma)$.

Corolario 4.6.

Sea ϕ regular y Hausdorff y $f: A \times \mathbb{R} \rightarrow M$ una familia de curvas geodésicas dependiente de $m = 2.k$ parámetros con $k = 1, \dots, n-1$. Si la aplicación inducida $Gf: A \rightarrow G$ es diferenciable, entonces $(Gf)^*(|dG|) = |(\dot{f}_0)^*(\omega_F)|$ y $(Gf)^*(|dG^k|) = |(\dot{f}_0)^*(\omega_F^k)|$.

Demostración

Utilizando cartas de G inducidas por cartas regulares separadas de T_1M , un razonamiento análogo al hecho en la proposición 2.6, muestra que $\vec{G}f: A \rightarrow \vec{G}$ es diferenciable en cada $x \in A$, por serlo Gf . Para $x \in A$, sea Σ un entorno abierto de $Gf(x)$ y Δ un abierto en \vec{G} tal que $P/\Delta: \Delta \rightarrow \Sigma$ es un difeomorfismo. Si dG_Σ es la 2-forma que satisface $(P/\Delta)^*(dG_\Sigma) = d\vec{G}$, aplicando la proposición 4.2 resulta,

$$(Gf)^*(dG_\Sigma) = (\vec{G}f)^*(P^*(dG_\Sigma)) = (\vec{G}f)^*(d\vec{G}) = (\dot{f}_0)^*(\omega_F)$$

en $(Gf)^{-1}(\Sigma)$.

Esto prueba, que $(Gf)^*(|dG|)$ coincide con $|(\dot{f}_0)^*(\omega_F)|$ en $(Gf)^{-1}(\Sigma)$ y dado que el punto $x \in A$ era arbitrario, entonces $(Gf)^*(|dG|) = |(\dot{f}_0)^*(\omega_F)|$ en A . Por la misma razón, se obtiene la otra igualdad. #

1.5. Medida de geodésicas e invariación por isometrías

Suponiendo que el flujo geodésico $\phi: T_1 M \times \mathbb{R} \rightarrow T_1 M$ es regular y Hausdorff, consideramos las respectivas estructuras diferenciales sobre \vec{G} y G .

Lema 5.1.

Las variedades diferenciables \vec{G} y G son para-compactas.

Demostración

Siendo \vec{G} y G variedades diferenciables y por lo tanto localmente compactas, es suficiente mostrar que cada una de ellas es Hausdorff y poseen una base numerable.

Por ser ϕ Hausdorff (ver sección 1.1), entonces $T_1 M/S$ es Hausdorff; luego \vec{G} lo es por ser difeomorfo a $T_1 M/S$ y también G en virtud del teorema 2.4.

Por otro lado, como M posee una base numerable, entonces $T_1 M$ también; luego por ser la proyección $\Pi_S: T_1 M \rightarrow T_1 M/S$ 'abierta' (corolario 1.5), $T_1 M/S$ posee una base numerable.

Siendo \vec{G} difeomorfo a $T_1 M/S$ y $P: \vec{G} \rightarrow G$ un difeomorfismo local, se tiene entonces que \vec{G} y G poseen una base numerable. #

Sea $R_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ y $\bar{R}_+ = R_+ \cup \{+\infty\}$.

Diremos que una función $\psi: \vec{G} \rightarrow \bar{R}_+$ (respect. $\psi: G \rightarrow \bar{R}_+$) es medible Lebesgue, si para toda familia $f: A \times \mathbb{R} \rightarrow M$ de curvas geodésicas dependiente de $2n-2$ parámetros que induce un sistema de coordenadas en \vec{G} (respect. en G), la función $\psi \circ \vec{G}f: A \rightarrow \bar{R}_+$ (respect. $\psi \circ Gf: A \rightarrow \bar{R}_+$) es medible Lebesgue.

Como la proyección $P: \vec{G} \rightarrow G$ es un difeomorfismo local, si $\psi: G \rightarrow \bar{R}_+$ es medible Lebesgue, entonces $\psi \circ P: \vec{G} \rightarrow \bar{R}_+$ también.

Utilizando la $(2n-2)$ -forma $d\vec{G}^{n-1}$ y la $(2n-2)$ -forma en valor absoluto $|dG^{n-1}|$, podemos definir debido al lema anterior, integrales positivas \vec{I} e I sobre \vec{G} y G respectivamente de manera usual. Para una teoría general al respecto ver por ejemplo (12).

Sea $\psi: \vec{G} \rightarrow \bar{R}_+$ una función medible Lebesgue, con soporte contenido en el dominio de una carta $(\vec{G}f(A), \vec{G}f^{-1})$ de \vec{G} inducida por una familia $f: A \times R \rightarrow M$ de curvas geodésicas dependiente de $2n-2$ parámetros. Por la proposición 4.2, la representación local de $d\vec{G}^{n-1}$ sobre el abierto A es $(\dot{f}_0)^*(\omega_F^{n-1})$ y siendo $(\dot{f}_0)^*(\omega_F^{n-1}) = \theta_f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{2n-2}$, donde θ_f es una función diferenciable definida en A , definimos

$$(1) \quad \vec{I}(\psi) = \int_{\vec{G}} \psi \cdot |d\vec{G}^{n-1}| = \int_A \psi \circ \vec{G}f(x) \cdot |\theta_f(x)| dx$$

donde la última integral se entiende en el sentido de Lebesgue. Como la familia constituida por los dominios de las cartas $(\vec{G}f(A), \vec{G}f^{-1})$, inducidas por familias de curvas geodésicas dependiente de $2n-2$ parámetros, cubren a \vec{G} ; para definir $\vec{I}(\psi)$ cuando el soporte de ψ no necesariamente está contenido en el dominio de una carta del tipo anterior, procedemos a considerar una partición de la unidad subordinada a dicha familia y aplicar la definición local (1).

Dado que por el corolario 4.6, la representación local de $|dG^{n-1}|$ respecto a una carta $(Gf(A), Gf^{-1})$ de G inducida por una familia $f: A \times R \rightarrow M$ de curvas geodésicas dependiente de $2n-2$ parámetros es $|(\dot{f}_0)^*(\omega_F^{n-1})|$, la definición de $I(\psi)$ para $\psi: G \rightarrow \bar{R}_+$ medible Lebesgue es análoga considerando cartas $(Gf(A), Gf^{-1})$ de G .

Por el lema 2.3 y la proposición 2.6, resulta inmediatamente que si $\psi: G \rightarrow \bar{R}_+$ es medible Lebesgue, entonces

$$(2) \quad \vec{I}(\psi \circ P) = 2 \cdot I(\psi)$$

Como es usual, un subconjunto $\vec{X} \subset \vec{G}$ (respect. $X \subset G$) se dice medible, si su función característica $1_{\vec{X}}: \vec{G} \rightarrow \bar{R}_+$ (respect. $1_X: G \rightarrow \bar{R}_+$) es medible y definimos la medida de \vec{X} (respect. la medida de X) por

$$(3) \quad \text{med}(\vec{X}) = \int_{\vec{G}} 1_{\vec{X}} \cdot |d\vec{G}^{n-1}|, \quad \text{med}(X) = \int_G 1_X \cdot |dG^{n-1}|$$

Finalizamos la presente sección, mostrando que las integrales \int e I son invariantes por el grupo de isometrías de M .

A tal efecto, sea $h:M \rightarrow M$ una isometría es decir, h es un difeomorfismo y para toda $p \in M$ y $v, w \in M_p$ se verifica, $\langle v, w \rangle = \langle h_*(v), h_*(w) \rangle$ donde $h_*:TM \rightarrow TM$ denota la diferencial de h . De la definición resulta, que la función inversa h^{-1} también es una isometría y si $c_v:R \rightarrow M$ es la única curva geodésica que satisface $c_v(0) = p$ y $\dot{c}_v(0) = v$, entonces $h \circ c_v:R \rightarrow M$ es la única curva geodésica que satisface $h \circ c_v(0) = h(p)$ y $\widehat{h \circ c_v}(0) = h_*(v)$ luego para todo $t \in R$ se cumple $h \circ c_v(t) = c_{h_*(v)}(t)$. La igualdad anterior implica que $\widehat{h \circ c_v}(t) = \dot{c}_{h_*(v)}(t)$ o equivalentemente $h_*(\dot{c}_v(t)) = \dot{c}_{h_*(v)}(t)$ y notando que para una curva geodésica c se verifica $\dot{c}(t) = \phi(\dot{c}(0), t)$ donde ϕ es el flujo geodésico definido sobre TM , se tiene entonces

$$(4) \quad h_* \circ \phi(v, t) = \phi(h_*(v), t)$$

para todo $(v, t) \in TM \times R$.

Sean $\vec{h}:\vec{G} \rightarrow \vec{G}$ y $\tilde{h}:G \rightarrow G$ las aplicaciones definidas por

$$(5) \quad h(\Pi_{\vec{G}}(c)) = \Pi_{\vec{G}}(h \circ c) \quad \text{y} \quad \tilde{h}(\Pi_G(c)) = \Pi_G(h \circ c)$$

luego las aplicaciones están relacionadas por

$$(6) \quad P \circ \vec{h} = \tilde{h} \circ P$$

Lema 5.2.

Sea ϕ regular y Hausdorff; entonces para toda isometría h de M las aplicaciones \vec{h} y \tilde{h} son difeomorfismos.

Demostración

Debido a (6) y de ser P un difeomorfismo local, es suficiente mostrar que \vec{h} es un difeomorfismo y dado que $(\vec{h})^{-1} = \vec{h}^{-1}$ y h^{-1} es una isometría, bastará verificar que \vec{h} es diferenciable. Considerando el difeomorfismo $\mu:\vec{G} \rightarrow T_1M/S$, se tiene el siguiente

diagrama donde $\alpha = \mu \circ \vec{h} \circ \mu^{-1}$.

A efecto de evaluar α ,

sea $v \in T_1 M$ y $c_v: \mathbb{R} \rightarrow M$

la geodésica que satisface

$c_v(0) = \Pi(v)$ y $\dot{c}_v(0) = v$,

donde $\Pi: T_1 M \rightarrow M$ denota la proyección; luego $\dot{h} \circ c_v(0) = h_{**}(v) \in T_1 M$.

Siendo $\mu^{-1}(\Pi_S(v)) = \Pi_G(c_v)$ y $\vec{h} \circ \mu^{-1}(\Pi_S(v)) = \Pi_G(\dot{h} \circ c_v)$, se tiene entonces que $\alpha(\Pi_S(v)) = \mu(\Pi_G(\dot{h} \circ c_v))$; luego

$$(7) \quad \alpha \circ \Pi_S(v) = \Pi_S(h_{**}(v))$$

La igualdad muestra que α es continua y por lo tanto también lo es \vec{h} .

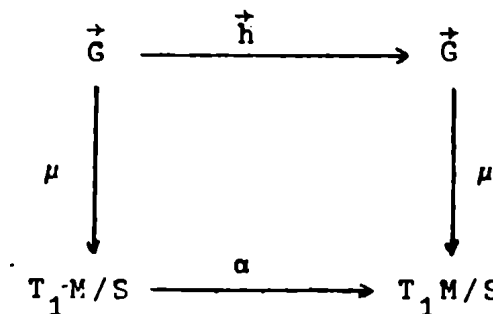
Para ver que α es diferenciable, lo cual implicará que \vec{h} lo es, sea $v \in T_1 M$ y (U, φ) una carta regular de $T_1 M$ centrada en v , con $\varphi(U) = A \times I$ (ver sección 1.1).

Siendo $h_{**}: T_1 M \rightarrow T_1 M$ un difeomorfismo, si denotamos con $V = h_{**}(U)$ y con $\psi = \varphi \circ h_{**}^{-1}$, resulta (V, ψ) una carta admisible de $T_1 M$ y en particular cúbica por ser $\psi(V) = A \times I$.

Como para $(x, t) \in A \times I$ es $\varphi^{-1}(x, t) = \phi(\varphi^{-1}(x, 0), t)$ por (4) se tiene entonces que $h_{**} \circ \varphi^{-1}(x, t) = \phi(h_{**} \circ \varphi^{-1}(x, 0), t)$ o equivalentemente $\psi^{-1}(x, t) = \phi(\psi^{-1}(x, 0), t)$; luego (V, ψ) es una carta cúbica y chata centrada en $h_{**}(v)$. Probaremos ahora que la carta (V, ψ)

es regular. En efecto, si $u \in T_1 M$ y la órbita $\Pi_S(u)$ interseca a Σ_x^ψ y a Σ_y^ψ con $x, y \in A$ (ver sección 1.1), debemos mostrar que $x = y$. Si $\Pi_S(u) \in \Sigma_x^\psi \cap \Sigma_y^\psi$, existen a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $u = \phi(\psi^{-1}(x, 0), a) = \phi(\psi^{-1}(y, 0), b)$; aplicando (4) para h_{**}^{-1} , resulta $h_{**}^{-1}(u) = \phi(\varphi^{-1}(x, 0), a) = \phi(\varphi^{-1}(y, 0), b)$; luego $\Pi_S(h_{**}^{-1}(u)) \in \Sigma_x^\varphi \cap \Sigma_y^\varphi$ y siendo (U, φ) regular debe ser $x = y$.

Si consideramos las cartas $(\Pi_S(U), \tilde{\varphi})$ y $(\Pi_S(V), \tilde{\psi})$ de $T_1 M/S$, se tiene por (7) y por ser $\tilde{\varphi}(\Pi_S(\varphi^{-1}(x, 0))) = x$ y $\tilde{\psi}(\Pi_S(\psi^{-1}(x, 0))) = x$ para todo $x \in A$, que $\tilde{\psi} \circ \alpha \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x) = x$; luego α es diferenciable. #



Nota

Como el conjunto G no se considera en la siguiente proposición, la condición de que ϕ sea Hausdorff no es necesaria.

Proposición 5.3.

Sea ϕ regular y h una isometría de M ; entonces $(\vec{h})^*(d\vec{G}) = d\vec{G}$.

Demostración

Si $h_*:TM \rightarrow TM$ es el difeomorfismo inducido por h y $\omega \in \Omega^2(TM)$ la 2-forma simpléctica, de las igualdades (11) y (12) de la sección 1.3 y del hecho que h es una isometría, se deduce inmediatamente que $(h_*)^*(\omega) = \omega$.

En consecuencia, si consideramos las restricciones $h_*:T_1M \rightarrow T_1M$ y $\omega \in \Omega^2(T_1M)$ resulta

$$(8) \quad (h_*)^*(\omega) = \omega$$

Como la expresión (7) se obtuvo sin suponer que ϕ fuera Hausdorff, dicha identidad es válida bajo nuestra hipótesis.

Siendo $\alpha \circ \Pi_S = \Pi_S \circ h_*$, entonces $\Pi_S^* \circ \alpha^* = (h_*)^* \circ \Pi_S^*$ y dado que $\Pi_S^*(\omega_S) = \omega$, se tiene por (8) que $\Pi_S^* \circ \alpha^*(\omega_S) = \omega$.

Por la proposición 4.1, ω_S es la única 2-forma sobre T_1M/S que satisface $\Pi_S^*(\omega_S) = \omega$; luego debe ser $\alpha^*(\omega_S) = \omega_S$.

La identidad $\alpha = \mu \circ \vec{h} \circ \mu^{-1}$ implica que $\alpha \circ \mu = \mu \circ \vec{h}$; luego $\mu^* \circ \alpha^*(\omega_S) = (\vec{h})^* \circ \mu^*(\omega_S)$ o equivalentemente $\mu^*(\omega_S) = (\vec{h})^* \circ \mu^*(\omega_S)$.

Siendo $\mu^*(\omega_S) = d\vec{G}$, se tiene que $(\vec{h})^*(d\vec{G}) = d\vec{G}$. #

El siguiente teorema muestra que las integrales positivas \vec{I} e I son invariantes por el grupo de isometrías de M .

Teorema 5.4.

Sea ϕ regular y Hausdorff; entonces para toda isometría h de M y toda función medible Lebesgue $\psi: \vec{G} \rightarrow \bar{R}_+$ (respect. $\psi: G \rightarrow \bar{R}_+$) se

verifica $\int(\psi \circ \tilde{h}) = \int(\psi)$ (respect. $I(\psi \circ \tilde{h}) = I(\psi)$).

Demostración

Debido a la proposición anterior y del cambio de variables en una integral, el teorema es cierto para la integral \int . Sea $\psi:G \rightarrow \bar{R}_+$ medible Lebesgue y h una isometría de M ; como $\tilde{h}:G \rightarrow G$ es un difeomorfismo y $P:\vec{G} \rightarrow G$ un difeomorfismo local, entonces $\psi \circ P:\vec{G} \rightarrow \bar{R}_+$ y $\psi \circ \tilde{h} \circ P:\vec{G} \rightarrow \bar{R}_+$ son medibles Lebesgue.

Por (6) es $\tilde{h} \circ P = P \circ \vec{h}$; luego $\int(\psi \circ \tilde{h} \circ P) = \int(\psi \circ P \circ \vec{h})$.

Siendo \int invariante por isometrías, se tiene que $\int(\psi \circ P \circ \vec{h}) = \int(\psi \circ P)$ y por lo tanto $\int(\psi \circ \tilde{h} \circ P) = \int(\psi \circ P)$.

De (2) y la última igualdad resulta $I(\psi \circ \tilde{h}) = I(\psi)$. #

Corolario 5.5.

Sea ϕ regular y Hausdorff; entonces la medida de un conjunto medible de geodésicas orientadas (respect. no orientadas) es invariante por el grupo de isometrías de M .

Demostración

Es consecuencia de (3) y del teorema anterior. #

1.6. El conjunto de geodésicas orientadas en variedades de Riemann completas, conexas, simplemente conexas v sin puntos focales

En la presente sección, supondremos que la variedad de Riemann M que es conexa y completa de dimensión $n \geq 2$, es además simplemente conexa.

Siendo el flujo geodésico $\phi:TM \times R \rightarrow TM$ y la proyección $\Pi:TM \rightarrow M$ diferenciables, la aplicación $\exp:TM \rightarrow M$ definida por $\exp(v) = \Pi \circ \phi(v,1)$ es diferenciable y por las propiedades de ϕ (ver apéndice), se verifica $\exp(t.v) = \Pi \circ \phi(v,t)$; luego si para $v \in TM$ denotamos con $c_v:R \rightarrow M$ a la única curva geodésica que satisface $c_v(0) = \Pi(v)$ y $\dot{c}_v(0) = v$, entonces $c_v(t) = \exp(t.v)$.

La función \exp se denomina la función exponencial de la conexión de Levi-Civita y para $p \in M$, la restricción de \exp a M_p que denotamos con \exp_p , se denomina la función exponencial en p .

Sea $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva geodésica; una variación de c sobre curvas geodésicas se define como una aplicación diferenciable

$f: (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R} \rightarrow M$ ($\epsilon > 0$) que verifica, $f(0, t) = c(t)$ y $t \rightarrow f(s, t)$ es una curva geodésica para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$.

El campo de vectores definido por $Y(t) = f_{*} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) /_{(0, t)} \in M_{c(t)}$, se llama una variación infinitesimal de c sobre curvas geodésicas y usando el hecho que la conexión de Levi-Civita es libre de torsión y las propiedades de la derivación covariante a lo largo de aplicaciones (ver apéndice), se obtiene que Y satisface la ecuación diferencial lineal de segundo orden (J)

$$(J) \quad Y''(t) + R(Y(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = 0$$

donde el acento (') denota derivación covariante de Y respecto a \dot{c} y R al tensor de curvatura.

Los campos de vectores Y que satisfacen (J) reciben el nombre de campos de Jacobi a lo largo de c .

Considerando una base paralela a lo largo de c que contenga a \dot{c} (si c no es constante), del teorema de existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial lineal de segundo orden resulta, que dados $u, w \in M_{c(t_0)}$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, existe un único campo de Jacobi Y a lo largo de c que satisface $Y(t_0) = u$ e $Y'(t_0) = w$; luego el conjunto de campos de Jacobi a lo largo de una curva geodésica constituye un espacio vectorial real de dimensión $2.n$.

Recíprocamente, si Y es un campo de Jacobi a lo largo de c , entonces Y es una variación infinitesimal de c sobre curvas geodésicas. En efecto, sea K la aplicación de conexión (ver apéndice); luego por ser la aplicación $\Pi_* \times K: (TM)_v \rightarrow M_{\Pi(v)} \times M_{\Pi(v)}$ un isomorfismo para todo $v \in TM$, si $\dot{c}(0) = v$, $Y(0) = u$ e $Y'(0) = w$, existe

un único $b \in (TM)_v$ tal que $\Pi_* \circ K(b) = (u, w)$.

Definiendo la variación $f(s, t) = \Pi \circ \phi(Z(s), t)$, donde $Z: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM$ es una curva diferenciable que satisface $Z(0) = v$ y $\dot{Z}(0) = b$, resulta $Y_t(t) = f_* (\frac{\partial}{\partial s}) / (0, t) = (\Pi \circ \phi_t)_*(b)$ un campo de Jacobi a lo largo de c . Siendo $Y_t(0) = \Pi_*(b) = u$ e $Y'_t(t) = K(\phi_t)_*(b)$, entonces $Y'_b(0) = w$; luego por unicidad debe ser $Y_t = Y$.

De las propiedades de simetría del tensor de curvatura de Riemann-Christoffel que se define como la aplicación $(X, Y, Z, W) \rightarrow \langle X, R(Z, W)Y \rangle$ para X, Y, Z, W campos de vectores sobre M y de la ecuación de Jacobi (J), se obtiene para una curva geodésica c y campos de Jacobi X e Y a lo largo de c , la siguiente propiedad conocida como la identidad de Lagrange (I.L) (ver Pág. 127 de (6))

$$(I.L) \quad \langle X, Y' \rangle - \langle X', Y \rangle = \text{constante a lo largo de } c$$

Interpretando para $p \in M$, al espacio tangente M_p como una variedad diferenciable; si $v \in M_p$, sea $J_v: M_p \rightarrow (M_p)_v$ el isomorfismo canónico "identificación afín", definido por $J_v(w) = \dot{\alpha}(0)$, donde $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow M_p$ es la curva $\alpha(t) = v + t.w$. M_p es entonces una variedad de Riemann con la métrica $\langle \langle , \rangle \rangle$ definido por $\langle \langle a, b \rangle \rangle_v = \langle J_v^{-1}(a), J_v^{-1}(b) \rangle$ si $a, b \in (M_p)_v$.

Sea f la variación de c_v definido por $f(s, t) = \exp_p(t.(v+s.w))$ e $Y_w(t) = f_* (\frac{\partial}{\partial s}) / (0, t)$; luego Y_w está dado por

$$(1) \quad Y_w(t) = (\exp_p)_* (t.J_{t.v}(w))$$

y es el único a lo largo de c_v que satisface $Y_w(0) = 0$ e $Y'_w(0) = w$. La segunda condición es consecuencia de considerar $Z(t) = (\exp_p)_* (J_{t.v}(w))$; luego $Y_w(t) = t.Z(t)$ e $Y'_w(t) = Z(t) + t.Z'(t)$. Tomando $t = 0$, resulta $Y'_w(0) = Z(0) = w$ pues $(\exp_p)_* : (M_p)_0 \rightarrow M_p$ coincide con J_0^{-1} .

Siendo en particular \dot{c}_v un campo de Jacobi a lo largo de c_v , de (I.L) se obtiene si w es ortogonal a v ($w \perp v$),

$$(2) \quad \langle Y_w(t), \dot{c}_v(t) \rangle = 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

0 abreviadamente $Y_w \perp \dot{c}_v$.

Dada una curva geodésica $c_v: \mathbb{R} \rightarrow M$ con $v \neq 0$ y $\Pi(v) = p$, decimos que el punto $c_v(t_0)$ con $t_0 \neq 0$ es conjugado a p a lo largo de c_v , si existe un campo de Jacobi no nulo Y a lo largo de c_v que satisface $Y(0) = 0$ e $Y(t_0) = 0$. Por lo anterior, si $Y'(0) = w$, resulta $Y = Y_w$ con $w \neq 0$ pues Y es no nulo; luego por (1) el vector $J_{t_0, v}(w) \in (M_p)$ pertenece al núcleo de la diferencial de \exp_p en $t_0 \cdot v$ y en consecuencia, el punto $t_0 \cdot v$ es un punto crítico de \exp_p .

Definición

M se dice sin puntos conjugados, si para toda curva geodésica c_v con $v \neq 0$, ningún punto $c_v(t)$ con $t \neq 0$ es conjugado a $c_v(0)$. *
Notando que $c_{-v}(t) = c_v(-t)$ y que si Y es un campo de Jacobi a lo largo de c_v , el campo $Z(t) = Y(-t)$ lo es a lo largo de c_{-v} , de la definición resulta inmediatamente, que M no tiene puntos conjugados si y sólo si para toda curva geodésica normal c_v "es decir, $|v| = 1$ " y todo campo de Jacobi no nulo Y a lo largo de c_v con $Y(0) = 0$, se satisface

$$(3) \quad \langle Y(t), Y(t) \rangle = |Y(t)|^2 > 0 \text{ si } t > 0$$

Si M no tiene puntos conjugados, de (1) y (3) se obtiene que $(\exp_p)_* : (M_p)_v \rightarrow M_{\exp_p(v)}$ es un isomorfismo para todo $v \in M_p$; siendo M simplemente conexo, por el lema de la Pág 201 de (6) resulta $\exp_p : M_p \rightarrow M$ un difeomorfismo cualquiera sea $p \in M$.

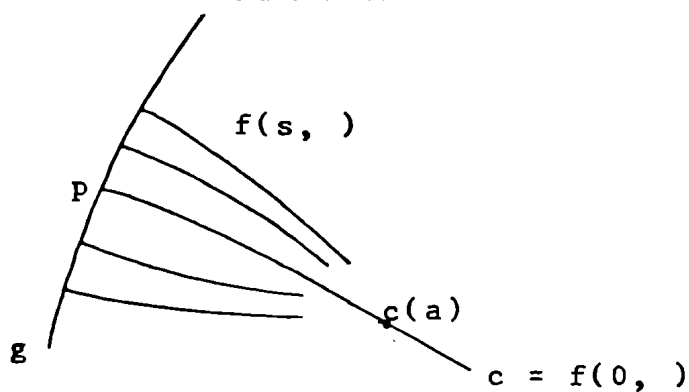
Si $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ denota la distancia inducida por la métrica, se tiene entonces que $d(p, q) = |\exp_p^{-1}(q)|$ para todo $p, q \in M$; luego las funciones $q \rightarrow d_p(q) = d(p, q)$ y $q \rightarrow d^2(p, q)$ son diferenciables en $M - \{p\}$ y M respectivamente. Además, las curvas geodésicas son minimales es decir, para todo $v \in TM$ y $t, t' \in \mathbb{R}$ se verifica $d(c_v(t), c_v(t')) = |\dot{v}| \cdot |t - t'|$

Por otro lado, para una función diferencialbe $f:M \rightarrow R$ el gradiente de f "grad f " se define como el único campo de vectores que satisface $\langle \text{grad } f|_q, v \rangle = v(f)$ si $q \in M$ y $v \in M_q$; luego si $d(p,q) = s > 0$ y $v = s^{-1} \cdot \exp_p^{-1}(q)$ se tiene que $\text{grad } d|_q = \dot{c}_v(s)$

Definición

Sean $g, c:R \rightarrow M$ dos curvas geodésicas tales que $p = c(0) = g(t_0)$ para algún $t_0 \in R$ y c perpendicular a g en p ; es decir, $\dot{c}(0) \perp \dot{g}(t_0)$, $|\dot{c}(0)| = 1$. Un punto $c(a)$ con $a > 0$, se dice un punto focal de g a lo largo de c , si existe un campo de Jacobi no nulo Y a lo largo de c con $Y(a) = 0$, obtenida de una variación $f:(-\epsilon, \epsilon) \times R \rightarrow M$ de c que satisface, $f(s,0) \in g$ y las curvas geodésicas $t \rightarrow f(s,t)$ son normales y perpendiculares a g en $f(s,0)$ (ver figura).

Por definición de Y , resulta inmediatamente que $Y(0) = \dot{g}(t_0)$ deben ser linealmente dependientes y además $Y(0) \perp Y'(0)$ e $Y \perp \dot{c}$



En particular, si g es constante el concepto de punto focal se reduce al de punto conjugado.

Definición

M se dice sin puntos focales, si para toda curva geodésica g y toda curva geodésica normal c que parte de g y es perpendicular a la misma en el punto de partida, no existe ningún punto focal de g a lo largo de c . #

La condición de que M no posea puntos focales es equivalente (ver Proposición 4 de (13)), a que para toda curva geodésica normal $c:R \rightarrow M$ y todo campo de Jacobi no nulo Y a lo largo de c con $Y(0) = 0$, se cumpla

(4) $\langle Y'(t), Y(t) \rangle > 0$ si $t > 0$

Luego, si M no tiene puntos focales, entonces tampoco tiene puntos conjugados.

Sea $\sigma \subset M_p$ el plano generado por los vectores ortonormales v, w de M_p ; entonces la curvatura seccional K_σ de M en p en la dirección σ se define por $K_\sigma = \langle v, R(v, w)w \rangle$. Se comprueba fácilmente que el valor K no depende de la base ortonormal de σ elegida. Clásicamente, M se dice una variedad de Hadamard, si satisface las condiciones citadas al principio de la sección y además todas las curvaturas seccionales son no positivas.

Dado que la condición de poseer todas las curvaturas seccionales no positivas (ver Proposición 4 de (13)) es equivalente a que se verifique $\frac{d^2}{dt^2} \langle Y, Y \rangle / t \geq 0$, para $t \in \mathbb{R}$ y todo campo de Jacobi Y a lo largo de cualquier curva geodésica, resulta en particular que toda variedad de Hadamard es una variedad sin puntos focales.

Definición

Si $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, diremos que f es convexa (resp. estrictamente convexa), si para toda curva geodésica normal $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ se verifica, $(f \circ c)''(t) \geq 0$ (resp. $(f \circ c)''(t) > 0$) para todo $t \in \mathbb{R}$.

Lema 6.1.

Si M no tiene puntos focales, entonces para todo $p \in M$, la función $q \rightarrow d^2(p, q)$ es estrictamente convexa.

Demostración

ver Lema 1 de (3). #

La siguiente proposición, proporciona una "muy útil" interpretación de las variedades sin puntos focales y es consecuencia del lema anterior.

Proposición 6.2.

Sea H una variedad de Riemann completa y simplemente conexa de dimensión $n \geq 2$ y sin puntos conjugados. Entonces H no posee puntos focales si y sólo si para toda curva geodésica (no constante) $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ y todo punto $p \notin c$, existe una única (salvo reparametrización) curva geodésica que contiene al punto p e interseca a c perpendicularmente.

Demostración

ver Proposición 2 de (3). #

Para $p \in M$ y $v \in M_p$ con $|v| = 1$, sea v^\perp el subespacio de M_p ortogonal a v . Si $w \in v^\perp$ el campo de Jacobi Y_w a lo largo de c_v definido por (1) satisface $Y_w \perp \dot{c}_v$ e $Y'_w \perp \dot{c}_v$; luego si para $t \in \mathbb{R}$, denotamos con $P_{t,v}: M_p \rightarrow M_{c_v(t)}$ al isomorfismo obtenido trasladando los vectores de M_p paralelamente a lo largo de c_v hasta $c_v(t)$, entonces

$$P_{t,v}^{-1}(Y_w(t)) \in v^\perp \quad \text{y} \quad P_{t,v}^{-1}(Y'_w(t)) \in v^\perp.$$

De la expresión (1) resulta inmediatamente, que si definimos

$$(5) \quad D_{v,t}: v^\perp \rightarrow v^\perp \quad \text{por} \quad D_{v,t}(w) = P_{t,v}^{-1}(Y_w(t))$$

$$(6) \quad D'_{v,t}: v^\perp \rightarrow v^\perp \quad \text{por} \quad D'_{v,t}(w) = P_{t,v}^{-1}(Y'_w(t))$$

entonces $D_{v,t}$ y $D'_{v,t}$ son endomorfismos para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposición 6.3.

Si M no tiene puntos focales, entonces $\det D_{v,s} > 0$ si $s > 0$.

Demostración

Restringiendo el producto escalar de M_p a v^\perp , sea $D_{v,t}^*$ la adjunta de $D_{v,t}$ es decir, $\langle D_{v,t}^*(u), w \rangle = \langle u, D_{v,t}(w) \rangle$ para $u, w \in v^\perp$; luego el endomorfismo $D_{v,t}^* \circ D'_{v,t}$ es simétrico. En efecto, para $u, w \in v^\perp$ resulta por (I.L),

$$\langle Y'_u(t), Y_w(t) \rangle = \langle Y_u(t), Y'_w(t) \rangle \quad \text{pues} \quad Y_u(0) = Y_w(0) = 0;$$

luego por ser $P_{t,v}$ una traslación paralela, se tiene por (5) y (6), $\langle D'_{v,t}(u), D_{v,t}(w) \rangle = \langle D_{v,t}(u), D'_{v,t}(w) \rangle$ o equivalentemente $\langle D_{v,t}^* \circ D'_{v,t}(u), w \rangle = \langle u, D_{v,t}^* \circ D'_{v,t}(w) \rangle$; es decir, $D_{v,t}^* \circ D'_{v,t}$ es simétrico. Por otro lado, siendo $\langle D_{v,t}^* \circ D'_{v,t}(u), u \rangle = \langle D'_{v,t}(u), D_{v,t}(u) \rangle = \langle Y'_u(t), Y_u(t) \rangle$ por (4) se obtiene $\langle D_{v,s}^* \circ D'_{v,s}(u), u \rangle > 0$ si $s = t > 0$ y $u \neq 0$; luego $D_{v,s}^* \circ D'_{v,s}$ es definida positiva para todo $s > 0$.

En consecuencia, $\det D_{v,s} \cdot \det D'_{v,s} = \det(D_{v,s}^* \circ D'_{v,s}) > 0$ y dado que $\det D'_{v,0} = 1$ por ser $D'_{v,0}$ la identidad, por continuidad resulta $\det D_{v,s} > 0$ si $s > 0$. #

Para $p \in M$, sea $S_p = \{ v \in M_p : |v| = 1 \}$ la $(n-1)$ -esfera unitaria con la métrica de Riemann inducida por $(M_p, \langle \langle, \rangle \rangle)$.

Se tiene entonces sobre TS_p (fibrado tangente a S_p) y sobre T_1S_p (fibrado unitario tangente), los correspondientes elementos de volumen (ver apéndice) inducidos por la métrica de Sasaki definida en TS_p ; que denotaremos respectivamente con dTS_p y dT_1S_p .

Siendo el isomorfismo canónico $J_v : M_p \rightarrow (M_p)_v$ una isometría para todo $v \in M_p$, identificaremos por simplicidad a TS_p y T_1S_p con

$$TS_p = \{ (v, w) \in S_p \times M_p : \langle v, w \rangle = 0 \}$$

$$T_1S_p = \{ (v, w) \in S_p \times S_p : \langle v, w \rangle = 0 \}$$

Para un abierto $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$, denotaremos con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ a los puntos de A , con $D_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i}$ las derivadas parciales y con $d\alpha = d\alpha_1 \wedge \dots \wedge d\alpha_{n-1}$.

Si $\psi : A \rightarrow \psi(A) \subset S_p$ es un difeomorfismo que induce un sistema de coordenadas ortogonal en S_p , sea $b_i(\alpha) = \psi_* (D_i) / \alpha \in$

$(S_p)_{\psi(\alpha)} \subset (M_p)_{\psi(\alpha)}$ y $v_i(\alpha) = J_{\psi(\alpha)}^{-1}(b_i(\alpha))$; luego $v_i(\alpha) \perp v_j(\alpha)$ si $i \neq j$.

Denotando con $\rho_i(\alpha) = |v_i(\alpha)|$ y con $e_i(\alpha) = \rho_i^{-1}(\alpha) \cdot v_i(\alpha)$ para $i = 1, \dots, n-1$, resulta entonces $\psi(\alpha), e_1(\alpha), \dots, e_{n-1}(\alpha)$ una base ortonormal de M_p .

Sea $T\psi: A \times R^{n-1} \rightarrow TS_p$ la aplicación definida por

$$(7) \quad T\psi(\alpha, y) = (\psi(\alpha), \sum_{i=1}^{n-1} y_i \cdot v_i(\alpha))$$

si $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$; luego $T\psi$ define una carta trivializadora en TS_p y en consecuencia, si denotamos con $dy = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-1}$, la representación de dTS_p sobre $A \times R^{n-1}$ está dado por

$$(8) \quad (T\psi)^*(dTS_p) = \rho_1^2 \dots \rho_{n-1}^2 d\alpha \wedge dy$$

Por otro lado si $n \geq 3$, la correspondiente densidad cinemática de TS_p que denotaremos con dK y cuya restricción a T_1S_p es el elemento de volumen dT_1S_p , queda expresado sobre $A \times R^{n-1}$ en la forma

$$(9) \quad (T\psi)^*(dK) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n+i} \cdot y_i \cdot \rho_1^2 \dots \rho_{n-1}^2 \cdot d\alpha \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \dots \wedge dy_{n-1}$$

Si $n \geq 3$, sea $B \subset R^{n-2}$ un abierto y $\gamma: B \rightarrow \gamma(B) \subset S^{n-2} \subset R^{n-1}$ con $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$ un difeomorfismo que induce un sistema de coordenadas ortogonal en la $(n-2)$ -esfera unitaria, tal que para $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-2}) \in B$, resulte $\gamma(\beta), \gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial \beta_1} \right) \Big|_{\beta}, \dots, \gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial \beta_{n-2}} \right) \Big|_{\beta}$ una base orientada como la base canónica de R^{n-1} .

Definiendo $\phi: A \times B \rightarrow T_1S_p$ por

$$(10) \quad \phi(\alpha, \beta) = (\psi(\alpha), \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i(\beta) \cdot e_i(\alpha))$$

resulta inmediatamente, que ϕ induce un sistema de coordenadas en T_1S_p y la representación de dT_1S_p sobre $A \times B$ está dado en virtud de (9) por

$$(11) \quad \phi^*(dT_1S_p) = (-1)^{n-1} \cdot \rho_1 \dots \rho_{n-1} \cdot \delta_1 \dots \delta_{n-2} \cdot d\alpha \wedge d\beta$$

donde $\delta_i(\beta) = \left| \gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial \beta_i} \right) \right|_{\beta}$ para $i = 1, \dots, n-2$ y $d\beta = d\beta_1 \wedge \dots \wedge d\beta_{n-2}$

Supongamos que M no posea puntos conjugados; luego por ser $\exp_p : M_p \rightarrow M$ un difeomorfismo, la aplicación $\varphi_p : S_p \times (0, +\infty) \rightarrow M - \{p\}$ definida según

$$(12) \quad \varphi_p(v, t) = \exp_p(t.v)$$

es un difeomorfismo, denominada la "parametrización polar de M respecto al punto p ".

Para $(\alpha, t) \in A \times \mathbb{R}$, sea $\varphi(\alpha, t) = \exp_p(t.\psi(\alpha))$; luego

$$\varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \right) \Big|_{(\alpha, t)} = (\exp_p)_* (t.J_{t.\psi(\alpha)}(v_i(\alpha))) \quad y$$

$$\varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \Big|_{(\alpha, t)} = \dot{c}_{\psi(\alpha)}(t)$$

Denotando con $Y_i(\alpha, t) = Y_{e_i(\alpha)}(t)$ al campo de Jacobi a lo largo de $c_\alpha = c_{\psi(\alpha)}$ definido según (1), se tiene para $i = 1, \dots, n-1$,

$$(13) \quad \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \right) \Big|_{(\alpha, t)} = \rho_i(\alpha).Y_i(\alpha, t)$$

Como para $s > 0$ es $\varphi(\alpha, s) = \varphi_p(\psi(\alpha), s)$, entonces

$\varphi : A \times (0, +\infty) \rightarrow \varphi(A \times (0, +\infty)) = U \subset M - \{p\}$ es un difeomorfismo; luego si consideramos la carta (U, φ^{-1}) con $\varphi^{-1} = (x^1, \dots, x^n)$ y denotamos con $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ para $i = 1, \dots, n$, por (13) resulta

$$(14) \quad X_i \circ \varphi(\alpha, s) = \rho_i(\alpha).Y_i(\alpha, s) \quad y \quad X_n \circ \varphi(\alpha, s) = \dot{c}_\alpha(s)$$

si $i = 1, \dots, n-1$.

Sea $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ para $i, j = 1, \dots, n$; entonces por (14) y (2) se verifica además,

$$(15) \quad g_{in} \circ \varphi(\alpha, s) = 0 \quad y \quad g_{nn} \circ \varphi(\alpha, s) = 1$$

si $i = 1, \dots, n-1$.

Dado que $e_1(\alpha), \dots, e_{n-1}(\alpha)$ constituye una base ortonormal de $\psi(\alpha)^\perp$, si $E_1(\alpha, \cdot), \dots, E_{n-1}(\alpha, \cdot)$ denotan los únicos campos paralelos a lo largo de c_α que satisfacen $E_i(\alpha, 0) = e_i(\alpha)$, entonces para $t \in \mathbb{R}$ es

$$(16) \quad E_i(\alpha, t) = P_{t.\psi(\alpha)}(e_i(\alpha))$$

y $E_1(\alpha, t), \dots, E_{n-1}(\alpha, t), \dot{c}_\alpha(t)$ es una base ortonormal de $M_{c_\alpha}(t)$. Por construcción de los campos de Jacobi Y_i , los vectores $Y_1(\alpha, t), \dots, Y_{n-1}(\alpha, t)$ son linealmente independientes para $t > 0$, pues M no tiene puntos conjugados y además son ortogonales a $\dot{c}_\alpha(t)$ para $t \in \mathbb{R}$; luego

$$(17) \quad Y_i(\alpha, t) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}(\alpha, t) \cdot E_j(\alpha, t)$$

con $a_{ij}(\alpha, 0) = 0$ y $\det \|a_{ij}(\alpha, s)\| \neq 0$ si $s > 0$.

Por definición del endomorfismo $D_{\alpha, t} = D_{\psi(\alpha), t} : \psi(\alpha)^\perp \rightarrow \psi(\alpha)^\perp$, la matriz de $D_{\alpha, t}$ respecto a la base ortonormal $e_1(\alpha), \dots, e_{n-1}(\alpha)$ es $\|a_{ij}(\alpha, t)\|$; en consecuencia se obtiene

$$(18) \quad \det D_{\alpha, t} = \det \|a_{ij}(\alpha, t)\|$$

y por lo tanto $\det D_{\alpha, s} \neq 0$ si $s > 0$.

De las igualdades (14), (15), (17) y (18) se deduce inmediatamente, que

$$\sqrt{\det \|g_{ij} \circ \varphi(\alpha, s)\|} = \rho_1(\alpha) \dots \rho_{n-1}(\alpha) \cdot |\det D_{\alpha, s}|$$

Luego, si orientamos M y S_p de modo que φ_p preserve orientaciones y denotamos con dV_M y dS_p a los respectivos elementos de volumen, se tiene

$$(19) \quad (\varphi_p)^\#(dV_M) \Big|_{(v, s)} = |\det D_{v, s}| \cdot dS_p \wedge ds \Big|_{(v, s)}$$

En lo que sigue, si M no tiene puntos conjugados y $n \geq 2$, para $v \in S_p$ y $e \perp v$ con $|e| = 1$ y $s > 0$, denotaremos con $Y(v, e, s,)$ al único campo de Jacobi a lo largo de c_v que satisface

$$(20) \quad Y(v, e, s, 0) = 0 \quad \text{e} \quad Y(v, e, s, s) = P_{S, v}(e)$$

y con $Y'(v, e, s, t) \in M_{c_v}(t)$ al vector obtenido derivando covariantemente $Y(v, e, s,)$ respecto a \dot{c}_v en "t".

Proposición 6.4.

Sea M sin puntos conjugados de dimensión $n \geq 3$ y ω la 2-forma simpléctica.

Si $p \in M$, sea $P: T_1 S_p \times (0, +\infty) \rightarrow T_1 M \subset TM$ la aplicación diferenciable definida por $P(v, e, s) = P_{s, v}(e)$.

Si $P^*(\omega^{n-1}) = \theta_{p, 0} dT_1 S_p \wedge ds$, entonces

$$(21) \quad \theta_{p, 0}(v, e, s) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + n} (n-1)! \langle Y'(v, e, s, s), Y(v, e, s, s) \rangle \cdot \det D_{v, s}$$

Demostración

Sea (U, φ^{-1}) la carta de M definida anteriormente y $(TU, T\varphi^{-1})$ la carta trivializadora de TM con $T\varphi^{-1} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n, \bar{x}^{n+1}, \dots, \bar{x}^{2 \cdot n})$; luego por la sección 1.3 es $\omega = dq^i \wedge dq^{n+i}$ (i sumada de 1 a n), con $q^i = \bar{x}^i$ y $q^{n+i} = \bar{x}^{n+j} \cdot g_{ij} \circ \Pi$ (j sumada de 1 a n). Si $g(\alpha, \beta, s) = P(\phi(\alpha, \beta), s) \in M_{\varphi(\alpha, s)}$, entonces $g^*(\omega^{n-1}) = \theta \cdot \phi^*(dT_1 S_p) \wedge ds$, donde $\theta(\alpha, \beta, s) = \theta_{p, 0}(\phi(\alpha, \beta), s)$. Dado que $P_{s, v}(e) \perp \dot{c}_v(s)$ pues $e \perp v$, se tiene que $g(\alpha, \beta, s) \perp \dot{c}_\alpha(s)$; luego como para $i = 1, \dots, n$, es $q^{n+i} \circ g(\alpha, \beta, s) = \langle X_i \circ \varphi(\alpha, s), g(\alpha, \beta, s) \rangle$; por (14) resulta $q^{2 \cdot n} \circ g = 0$. Por otro lado, siendo

$$\omega^{n-1} = c_n \cdot \int_{i=1}^n dq^1 \wedge \dots \wedge dq^i \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dq^{n+1} \wedge \dots \wedge dq^{n+i} \wedge \dots \wedge dq^{2n}$$

[$\frac{n-1}{2}$]

donde $c_n = (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \cdot (n-1)!$, entonces

$$g^*(\omega^{n-1}) = c_n \cdot d(q^1 \circ g) \wedge \dots \wedge d(q^{n-1} \circ g) \wedge d(q^{n+1} \circ g) \wedge \dots \wedge d(q^{2n-1} \circ g)$$

Notando que si $i = 1, \dots, n-1$, es $q^i \circ g = \bar{x}^i \circ g = x^i \circ \varphi = \alpha^i$ se tiene,

$$g^*(\omega^{n-1}) = c_n \cdot d\alpha_1 \wedge \dots \wedge d\alpha_{n-1} \wedge d(q^{n+1} \circ g) \wedge \dots \wedge d(q^{2n-1} \circ g)$$

Si $f_i(\alpha, \beta, s) = \langle Y_i(\alpha, s), g(\alpha, \beta, s) \rangle$, por (14) resulta $q^{n+i} \circ g = \rho_i \cdot f_i$ para cada $i = 1, \dots, n-1$; luego como ρ_i depende solamente de las variables $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ obtenemos,

$$g^*(\omega^{n-1}) = c_n \cdot \rho_1 \dots \rho_{n-1} \cdot d\alpha_1 \wedge \dots \wedge d\alpha_{n-1} \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_{n-1}$$

Puesto que la $(n-1)$ -forma $df_1 \wedge \dots \wedge df_{n-1}$ está multiplicada exteriormente por $d\alpha = d\alpha_1 \wedge \dots \wedge d\alpha_{n-1}$, para calcular $d\alpha \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_{n-1}$ es suficiente considerar α fijo y diferenciar respecto a $\beta_1, \dots, \beta_{n-2}$ y a "s".

Nota

En lo que sigue de la demostración, salvo mención expresa, convendremos que si en una expresión aparecen dos índices iguales, se trata de una suma respecto a dicho índice de 1 a n-1.

Por (10) y (16) se verifica, $g(\alpha, \beta, s) = \gamma_i(\beta) \cdot E_i(\alpha, s)$; luego por (17) resulta $f_i(\alpha, \beta, s) = \gamma_j(\beta) \cdot a_{ij}(\alpha, s)$.

Para $\alpha \in A$ (fijo), sea $F_i(\beta, s) = f_i(\alpha, \beta, s)$; denotando con \dot{a}_{ij} a la derivada parcial de a_{ij} respecto a "s", definiremos las funciones $F_{ik}(\alpha, \beta, s) = \frac{\partial \gamma_j}{\partial \beta_k} \Big|_{\beta} \cdot a_{ij}(\alpha, s)$ si $k = 1, \dots, n-2$ y $F_{in-1}(\alpha, \beta, s) = \gamma_j(\beta) \cdot \dot{a}_{ij}(\alpha, s)$; luego

$$dF_i = \sum_{k=1}^{n-2} F_{ik} \cdot d\beta_k + F_{in-1} ds$$

Si $\|F_{ij}\|$ representa a la matriz funcional cuadrada de orden n-1 se tiene entonces,

$$(22) \quad g^*(\omega^{n-1}) = c_n \cdot \det \|F_{ij}\| \cdot \rho_1 \dots \rho_{n-1} \cdot d\alpha \wedge d\beta \wedge ds$$

Como para $s > 0$ la matriz $\|a_{ij}(\alpha, s)\|$ es inversible, sea $\|h_{ij}(\alpha, s)\|$ la matriz inversa; luego si $\|h_{ij}\| = \|b_{ij}\| \cdot \|F_{ij}\|$, entonces $h_{ik} = \frac{\partial \gamma_j}{\partial \beta_k}$ y $h_{in-1} = b_{ij} \cdot \dot{a}_{ij} \cdot \gamma_j$ para $i = 1, \dots, n-1$ y $k = 1, \dots, n-2$.

Sea $h_k = (h_{1k}, \dots, h_{n-1k})$ y $h = (h_{1n-1}, \dots, h_{n-1 n-1})$ si $k = 1, \dots, n-2$; luego $h_k = \gamma_j \left(\frac{\partial}{\partial \beta_k} \right)$.

Dado que la base ortogonal $\gamma(\beta), h_1(\beta), \dots, h_{n-2}(\beta)$ está orientada como la base canónica de R^{n-1} y $\delta_i(\beta) = |h_i(\beta)|$, entonces para todo $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in R^{n-1}$ se satisface

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \cdot \langle (x, \gamma) \rangle = \det \begin{vmatrix} x \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{n-2} \end{vmatrix}$$

donde $\langle (,) \rangle$ denota el producto escalar de R^{n-1} .

Siendo $\det \|h_{ij}\| = (-1)^{n-2} \cdot \det \begin{pmatrix} h \\ h_{11} \\ \vdots \\ h_{n-2} \end{pmatrix}$, resulta

$\det \|F_{ij}\| = (-1)^n \cdot \delta_1 \dots \delta_{n-2} \cdot \langle (h, \gamma) \rangle \cdot \det \|a_{ij}\|$ y en virtud de (11) y (22) obtenemos,

$$g^*(\omega^{n-1}) = -c_n \cdot \langle (h, \gamma) \rangle \cdot \det \|a_{ij}\| \cdot \phi^*(dT_1 S_p) \wedge ds$$

Como por (18) es $\det D_{\alpha, s} = \det \|a_{ij}(\alpha, s)\|$ y $-c_n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + n} \cdot (n-1)!$;

resta verificar si $X(\alpha, \beta, s, t) = Y(\phi(\alpha, \beta), s, t)$ que $\langle (h(\alpha, \beta, s), \gamma(\beta)) \rangle = \langle X'(\alpha, \beta, s, s), X(\alpha, \beta, s, s) \rangle$ o equivalentemente

$$(23) \quad \langle X'(\alpha, \beta, s, s), X(\alpha, \beta, s, s) \rangle = b_{i\ell}(\alpha, s) \cdot \dot{a}_{\ell j}(\alpha, s) \cdot \gamma_j(\beta) \cdot \gamma_i(\beta)$$

En efecto, siendo $X(\alpha, \beta, s, 0) = 0$ y $X(\alpha, \beta, s, s) = g(\alpha, \beta, s) \perp \dot{c}_\alpha(s)$, entonces $X(\alpha, \beta, s, t) \perp \dot{c}_\alpha(t)$ y $X'(\alpha, \beta, s, t) \perp \dot{c}_\alpha(t)$; luego si $X'(\alpha, \beta, s, 0) = u_i(\alpha, \beta, s) \cdot e_i(\alpha)$, se tiene que

$$X(\alpha, \beta, s, t) = u_i(\alpha, \beta, s) \cdot Y_i(\alpha, t) \text{ y } X'(\alpha, \beta, s, t) = u_i(\alpha, \beta, s) \cdot Y_i'(\alpha, t).$$

Como $Y_i(\alpha, t) = a_{ij}(\alpha, t) E_j(\alpha, t)$ e $Y_i'(\alpha, t) = \dot{a}_{ij}(\alpha, t) \cdot E_j(\alpha, t)$, para $t = s$ resulta,

$$(24) \quad X'(\alpha, \beta, s, s) = u_i(\alpha, \beta, s) \cdot \dot{a}_{ij}(\alpha, s) \cdot E_j(\alpha, s)$$

Por otro lado, $g(\alpha, \beta, s) = X(\alpha, \beta, s, s) = u_i(\alpha, \beta, s) \cdot a_{ij}(\alpha, s) \cdot E_j(\alpha, s)$; luego por ser $g(\alpha, \beta, s) = \gamma_j(\beta) \cdot E_j(\alpha, s)$ se cumple,

$$(25) \quad u_i(\alpha, \beta, s) = \gamma_j(\beta) \cdot b_{ji}(\alpha, s)$$

De (24) y (25) se obtiene inmediatamente (23), lo que completa la demostración. #

Lema 6.5.

En las condiciones de la proposición anterior, para todo

$(v, e) \in T_1 S_p$ se verifica

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s^{2-n} \cdot \langle Y'(v, e, s, s), Y(v, e, s, s) \rangle \cdot \det D_{v, s} = 1$$

Demostración

Denotando con $Y(s,t) = Y(v,e,s,t)$ y con $e_{n-1} = e$ para (v,e) fijo, sea $e_1, \dots, e_{n-2} \in S_p$ tales que e_1, \dots, e_{n-1} constituyen una base ortonormal de v^\perp y E_1, \dots, E_{n-1} los únicos campos paralelos a lo largo de c_v que satisfacen $E_i(0) = e_i$; luego $E_{n-1}(s) = P(v,e,s)$.

Si Y_1, \dots, Y_{n-1} denotan los únicos campos de Jacobi a lo largo de c_v que verifican $Y_i(0) = 0$ e $Y_i'(0) = e_i$, entonces por (2) es $Y_i \perp \dot{c}_v$ y en consecuencia,

$$Y_i(t) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}(t) \cdot E_j(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Siendo $\|a_{ij}(s)\|$ la matriz del endomorfismo $D_{v,s}$ respecto a la base ortonormal e_1, \dots, e_{n-1} de v^\perp , resulta

$$\det D_{v,s} = \det \|a_{ij}(s)\| \text{ con } a_{ij}(s) = \langle Y_i(s), E_j(s) \rangle.$$

Como $Y(s,0) = 0$ e $Y(s,s) = E_{n-1}(s)$, entonces $Y'(s,t) \perp \dot{c}_v(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $s > 0$; luego $Y'(s,s) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot E_i(s)$ con

$$a_{n-1} = \langle Y'(s,s), Y(s,s) \rangle. \text{ Para } i = 1, \dots, n-1, \text{ sea } b_{ij}(s) = a_{ij}(s)$$

si $j = 1, \dots, n-2$ y $b_{i \ n-1}(s) = \langle Y_i(s), Y'(s,s) \rangle$; luego por la linealidad del determinante respecto a la $(n-1)$ -ésima columna se tiene que

$$\det \|b_{ij}(s)\| = a_{n-1} \cdot \det \|a_{ij}(s)\| \text{ o equivalentemente}$$

$$(26) \quad \det \|b_{ij}(s)\| = \langle Y'(s,s), Y(s,s) \rangle \cdot \det D_{v,s}$$

Por (I.L) la función $t \rightarrow \langle Y_i'(t), Y(s,t) \rangle - \langle Y_i(t), Y'(s,t) \rangle$ es constante a lo largo de c_v ; luego por ser $Y_i(0) = Y(s,0) = 0$ e $Y(s,s) = E_{n-1}(s)$ se satisface

$$(27) \quad b_{i \ n-1}(s) = \langle Y_i'(s), E_{n-1}(s) \rangle$$

Por otro lado, denotando con $X_i(t) = (\exp_p)_* (J_{t,v}(e_i))$, por (1) resulta,

$$(28) \quad Y_i(t) = t \cdot X_i(t)$$

Para $i = 1, \dots, n-1$, sea $h_{ij}(t) = \langle X_i(t), E_j(t) \rangle$ si $j = 1, \dots, n-2$ y $h_{i \ n-1}(t) = \langle Y_i'(t), E_{n-1}(t) \rangle$; luego por (27) y (28) se obtiene,

$\det \|b_{ij}(s)\| = s^{n-2} \cdot \det \|h_{ij}(s)\|$ y en virtud de (26),

$\det \|h_{ij}(s)\| = s^{2-n} \langle Y'(s,s), Y(s,s) \rangle \cdot \det D_{v,s}$

El lema es consecuencia de la igualdad anterior y del hecho

que $\|h_{ij}(0)\|$ es la matriz identidad por ser $X_i(0) = e_i$,

$Y'_i(0) = e_i$ y $E_i(0) = e_i$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. #

Nota

El valor $\langle Y'(v,e,s,s), Y(v,e,s,s) \rangle$ puede interpretarse del siguiente modo:

Para $r > 0$, sea $S_p(r) = \{q \in M : d(p,q) = r\}$ la esfera geodésica con centro en p y radio r , y $N(q) = \text{grad } d_p/q$ para todo $q \in S_p(r)$; luego $|N(q)| = 1$ y $N(q)$ es ortogonal al espacio tangente $(S_p(r))_q \subset M_q$. Si para $w \in (S_p(r))_q$, $\nabla_w N$ denota la derivada covariante de N a lo largo de la inclusión $i: S_p(r) \rightarrow M$ en " w " es decir, $\nabla_w N = K(N_{\#}(w))$ donde K es la aplicación de conexión (ver apéndice), sea Y el campo de Jacobi a lo largo de c_v con $v \in S_p$ y $c_v(r) = q$, que satisface $Y(0) = 0$ e $Y(r) = w$. Un breve cálculo (ver también Pág. 163 de (6)), muestra que $\nabla_w N = Y'(r)$.

En particular, como para todo $(v,e) \in T_1 S_p$ es $P_{r,v}(e) \in (S_p(r))_q$ con $q = c_v(r)$, si ℓ_N denota la segunda forma fundamental de $S_p(r)$ respecto a N (ver definición en el siguiente capítulo) resulta, $\ell_N(P_{r,v}(e), P_{r,v}(e)) = \langle Y'(v,e,r,r), Y(v,e,r,r) \rangle$.

Lema 6.6.

Sea $n \geq 3$ y $h: T_1 S_p \times (0, +\infty) \rightarrow TS_p$ la aplicación diferenciable definida por $h(v,w,s) = (w, s.v)$; luego $h^*(dTS_p) = (-1)^n \cdot s^{n-2} \cdot dT_1 S_p \wedge ds$.

Demostración

Sea $h_1: T_1 S_p \times (0, +\infty) \rightarrow TS_p$ y $h_2: T_1 S_p \times (0, +\infty) \rightarrow T_1 S_p \times (0, +\infty)$ las aplicaciones definidas por $h_1(w,v,s) = (w, s.v)$ y $h_2(v,w,s) = (w,v,s)$; luego $h = h_1 \circ h_2$.

Usando las expresiones locales de dTS_p y dT_1S_p dadas según (8) y (11) y teniendo en cuenta que para $\beta \in B$, la base ortogonal $\gamma(\beta), \gamma_*\left(\frac{\partial}{\partial \beta_1}\right)\Big|_{\beta}, \dots, \gamma_*\left(\frac{\partial}{\partial \beta_{n-2}}\right)\Big|_{\beta}$ está orientada como la base canónica de \mathbb{R}^{n-1} , se obtiene inmediatamente que $h_1^*(dTS_p) = -s^{n-2} \cdot dT_1S_p \wedge ds$; luego

$$h^*(dTS_p) = -s^{n-2} \cdot h_2^*(dT_1S_p \wedge ds)$$

Si $f: T_1S_p \rightarrow T_1S_p$ es la aplicación definida por $f(v,w) = (w,v)$, por la expresión anterior se verifica $h^*(dTS_p) = -s^{n-2} \cdot f^*(dT_1S_p) \wedge ds$; luego es suficiente mostrar que $f^*(dT_1S_p) = (-1)^{n-1} \cdot dT_1S_p$.

A tal efecto, consideremos en $M_p^2 = M_p \times M_p$ el producto escalar $\langle \langle , \rangle \rangle$ definido por $\langle \langle (x,y), (x',y') \rangle \rangle = \langle x,x' \rangle + \langle y,y' \rangle$; luego si e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de M_p , los vectores $E_i = (e_i, 0), E_{n+i} = (0, e_i)$ constituyen una base ortonormal de M_p^2 . Como T_1S_p es el subconjunto de M_p^2 definido por las condiciones $(v,w) \in T_1S_p$ si y sólo si $|v| = |w| = 1$ y $\langle v,w \rangle = 0$, entonces T_1S_p es una subvariedad de codimensión 3 de M_p^2 .

Por simplicidad, si (x^1, \dots, x^n) son las coordenadas de un punto de M_p respecto a la base e_1, \dots, e_n ; si $v \in M_p$, identificamos a $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_v$ con e_i y si $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n, \bar{x}^{n+1}, \dots, \bar{x}^{2n})$ son las coordenadas de un punto de M_p^2 respecto a la base $E_1, \dots, E_n, E_{n+1}, \dots, E_{2n}$, identificamos a $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\Big|_{(v,w)}$ con E_i si $(v,w) \in M_p^2$.

Interpretando para $(v,w) \in T_1S_p$ a $(T_1S_p)_{(v,w)}$ como subespacio de M_p^2 , resulta que $u = (x,y) \in (T_1S_p)_{(v,w)}$ si y sólo si $\langle x,v \rangle = \langle y,w \rangle = 0$ y $\langle x,w \rangle + \langle y,v \rangle = 0$.

En consecuencia, si definimos los campos de vectores N_1, N_2, N_3 sobre M_p^2 por $N_1(x,y) = (x,0), N_2(x,y) = (0,y)$ y $N_3(x,y) = \frac{1}{2} \cdot (y,x)$; se tiene que para $(v,w) \in T_1S_p$, los vectores $N_1(v,w), N_2(v,w)$ y $N_3(v,w)$ forman una base ortonormal del subespacio ortogonal $(T_1S_p)_{(v,w)}^\perp$.

Orientando M_p^2 vía la base E_1, \dots, E_{2n} y orientando $T_1 S_p$ de modo que u_1, \dots, u_{2n-3} resulte una base orientada positivamente en $(T_1 S_p)_{(v,w)}$ si $N_1(v,w), N_2(v,w), N_3(v,w), u_1, \dots, u_{2n-3}$ lo está en M_p^2 , sea dV_1 el elemento de volumen de $T_1 S_p$ inducido por la métrica de M_p^2 y la orientación fijada; luego si

$$(v,w) = \sum_{i=1}^n v_i \cdot E_i + \sum_{i=1}^n w_i \cdot E_{n+i} \quad \text{y} \quad u_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot E_i + \sum_{i=1}^n b_{ji} \cdot E_{n+i}$$

para $j = 1, \dots, 2n-3$, se tiene que

$$(29) \quad dV_1|_{(v,w)}(u_1, \dots, u_{2n-3}) = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} v_1 \dots v_n & : & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & : & w_1 \dots w_n \\ w_1 \dots w_n & : & v_1 \dots v_n \\ \dots & : & \dots \\ (a_{ji}) & : & (b_{ji}) \end{vmatrix}$$

Siendo $f^*(dV_1)|_{(v,w)}(u_1, \dots, u_{2n-3}) = dV_1|_{(w,v)}(f_*(u_1), \dots, f_*(u_{2n-3}))$ y $f_*(u_j) = \sum_{i=1}^n b_{ji} \cdot E_i + \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot E_{n+i}$, por (29) resulta

$$(30) \quad f^*(dV_1) = (-1)^{n-1} \cdot dV_1$$

Por otro lado, las $(2n-3)$ -formas dV_1 y $dT_1 S_p$ están relacionadas por $dV_1 = g \cdot dT_1 S_p$, donde $g: T_1 S_p \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable que satisface $g(v,w) \neq 0$ para todo $(v,w) \in T_1 S_p$ pues $dV_1|_{(v,w)} \neq 0$ y $dT_1 S_p|_{(v,w)} \neq 0$; luego si mostramos que g es constante, por (30) se tendrá que $f^*(dT_1 S_p) = (-1)^{n-1} \cdot dT_1 S_p$.

Para $t \in \mathbb{R}$, sea $F_t: M_p^2 \rightarrow M_p^2$ el isomorfismo definido por $F_t(x,y) = (x \cdot \cos t + y \cdot \sin t, -x \cdot \sin t + y \cdot \cos t)$; luego como F_t preserva la métrica de M_p^2 y $F_0 = \text{id}_{M_p^2}$, se tiene restringiendo F_t a $T_1 S_p$, que $F_t^*(dV_1) = dV_1$.

Como la aplicación $F: T_1 S_p \times \mathbb{R} \rightarrow T_1 S_p$ definida por $F((v,w), t) = F_t(v,w)$ es el flujo geodésico de la $(n-1)$ -esfera S_p , por la observación al final de la sección 1.3 aplicada a S_p , se tiene que $F_t^*(dT_1 S_p) = dT_1 S_p$; luego g debe ser una constante. #

Proposición 6.7.

Sea M sin puntos conjugados de dimensión $n \geq 2$ y ω la 2-forma simpléctica.

Si $p \in M$, sea $\tau: TS_p \rightarrow T_1M \subset TM$ la aplicación diferenciable definida por $\tau(e,w) = P_w(e)$, donde $P_w: M_p \rightarrow M_{c_w(1)}$ es el isomorfismo obtenido, trasladando los vectores de M_p paralelamente a lo largo de la curva geodésica c_w hasta $c_w(1)$.

Si $\tau^*(\omega^{n-1}) = \theta_p \cdot dTS_p$, entonces

$$(31) \quad \theta_p(e,w) = (n-1)! \cdot (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad \text{si } w = 0$$

$$(32) \quad \theta_p(e,w) = (n-1)! \cdot (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot s^{2-n} \cdot \langle Y'(v,e,s,s), Y(v,e,s,s) \rangle \cdot \det D_{v,s}$$

si $w \neq 0$ con $s = |w|$ y $v = s^{-1} \cdot w$

Demostración

Supongamos $n \geq 3$ y sea h la aplicación del lema anterior. Siendo $\tau \circ h = P$, donde P es la función definida en la proposición 6.4, resulta

$$h^* \circ \tau^*(\omega^{n-1}) = P^*(\omega^{n-1}) = \theta_{p,0} dT_1S_p \wedge ds$$

Aplicando el lema anterior obtenemos,

$$h^* \circ \tau^*(\omega^{n-1}) = h^*(\theta_p dTS_p) = (-1)^n \cdot s^{n-2} \cdot \theta_p \circ h \cdot dT_1S_p \wedge ds$$

y por lo tanto,

$$(33) \quad \theta_p(e,s \cdot v) = \theta_p \circ h(v,e,s) = (-1)^n \cdot s^{2-n} \cdot \theta_{p,0}(v,e,s)$$

para $(v,e,s) \in T_1S_p \times (0, +\infty)$.

La expresión (32) es consecuencia inmediata de (33) y (21).

Teniendo en cuenta que θ_p es continua por ser τ diferenciable, tomando en (33) límite para $s \rightarrow 0^+$, obtenemos (31) en virtud del lema 6.5.

Sea $n = 2$ y denotemos con K a la curvatura de Gauss de M y con $a: S_p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a la única solución de la ecuación de Jacobi

$$(34) \quad \ddot{a}(v,t) + K(c_v(t)).a(v,t) = 0 \quad \text{con} \quad a(v,0) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{a}(v,0) = 1$$

donde \dot{a} denota la derivada parcial de a respecto de t .

Sea $e \perp v$ y $E(v, \cdot)$ el único campo paralelo a lo largo de c_v que satisface $E(v,0) = e$; luego si $Y(v,t) = a(v,t).E(v,t)$, entonces $Y(v, \cdot)$ es el único campo de Jacobi a lo largo de c_v que satisface $Y(v,0) = 0$ e $Y'(v,0) = e$.

Por definición de $D_{v,s}$ resulta $\det D_{v,s} = a(v,s)$, por ser $a(v,s)$ la matriz de $D_{v,s}$ respecto a la base " e " de v^1 y $a(v,s) \neq 0$ si $s > 0$ pues M no tiene puntos conjugados. Como $Y(v,e,s,0) = 0$ e $Y(v,e,s,s) = E(v,s)$, entonces $Y(v,e,s,t) \perp \dot{c}_v(t)$ e $Y'(v,e,s,t) \perp \dot{c}_v(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$; luego $Y(v,e,s,t) = b(v,s).Y(v,t) = b(v,s).a(v,t).E(v,t)$ con $b(v,s).a(v,s) = 1$. Siendo $Y'(v,e,s,t) = b(v,s).\dot{a}(v,t).E(v,t)$, resulta $\dot{a}(v,s) = \langle Y'(v,e,s,s), Y(v,e,s,s) \rangle . \det D_{v,s}$

Concluimos la proposición, mostrando la igualdad

$$(35) \quad \theta_p(e,s.v) = -\dot{a}(v,s)$$

para $e, v \in S_p$ con $e \perp v$ y $s > 0$; lo que implicará (32) y también (31), tomando límite para $s \rightarrow 0^+$, en virtud de (34) y de la continuidad de θ_p .

A tal efecto, sea e_1, e_2 una base ortonormal de M_p y $\psi(0, 2.\pi) \rightarrow S_p$ definido por $\psi(\alpha) = \cos \alpha . e_1 + \sin \alpha . e_2$; luego si $e(\alpha) = \psi(\alpha)$ y $v(\alpha) = -\sin \alpha . e_1 + \cos \alpha . e_2$, entonces $T\psi(\alpha, t) = (e(\alpha), t.v(\alpha))$ y por (8) resulta $(T\psi)^*(dTS_p) = d\alpha \wedge dt$.

En particular, si consideramos la aplicación $f:(0, 2.\pi) \times (0, +\infty) \rightarrow TS_p$ definida por $f(\alpha, s) = T\psi(\alpha, s)$ se tiene que $f^*(dTS_p) = d\alpha \wedge ds$.

Sea $E(\alpha, s) = \tau \circ f(\alpha, s) = P_{s, v(\alpha)}(e(\alpha))$; luego si $Y(\alpha, \cdot)$ es el único campo de Jacobi a lo largo de $c_{v(\alpha)}$ que satisface $Y(\alpha, 0) = 0$ e $Y'(\alpha, 0) = e(\alpha)$; por definición de la función $a:S_p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene, $Y(\alpha, s) = a(v(\alpha), s).E(\alpha, s)$.

Definiendo $\varphi:(0,2\pi) \times (0,+\infty) \rightarrow M$ por $\varphi(\alpha,s) = \exp_p(s.v(\alpha))$, φ es un difeomorfismo con su imagen; luego si denotamos con $U = \varphi((0,2\pi) \times (0,+\infty))$ y con $\varphi^{-1} = (x^1, x^2)$, para la carta (U, φ^{-1}) se satisface $E(\alpha,s) \in M_{\varphi(\alpha,s)}$. Si $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, se tiene además, $X_1 \circ \varphi(\alpha,s) = -Y(\alpha,s)$ y $X_2 \circ \varphi(\alpha,s) = \dot{c}_{v(\alpha)}(s)$.
 Sea $(TU, T\varphi^{-1})$ la carta trivializadora de TM con $T\varphi^{-1} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4)$; entonces $\omega = dq^1 \wedge dq^3 + dq^2 \wedge dq^4$ con $q^i = \bar{x}^i$ si $i = 1, 2$ y $q^{2+i} = \bar{x}^3 \cdot g_{i1} \circ \Pi + \bar{x}^4 \cdot g_{i2} \circ \Pi$.
 Siendo $q^1 \circ E = \bar{x}^1 \circ \varphi = \alpha$, $q^3 \circ E = \langle X_1 \circ \varphi, E \rangle = -\langle Y, E \rangle$ y $q^4 \circ E = \langle X_2 \circ \varphi, E \rangle = 0$ por ser $E(\alpha,s) \perp \dot{c}_{v(\alpha)}(s)$, resulta $E^*(\omega) = d\alpha \wedge d(-\langle Y, E \rangle) = -d\alpha \wedge \frac{d}{ds} \langle Y, E \rangle ds$; luego $\theta_p \circ f(\alpha,s) = -\frac{d}{ds} \langle Y, E \rangle \Big|_{(\alpha,s)} = -\dot{a}(v(\alpha),s)$ o equivalentemente $\theta_p(e(\alpha), s.v(\alpha)) = -\dot{a}(v(\alpha),s)$, lo que prueba (35). #

Estamos ahora en condiciones, de enunciar y probar el resultado central de la presente sección.

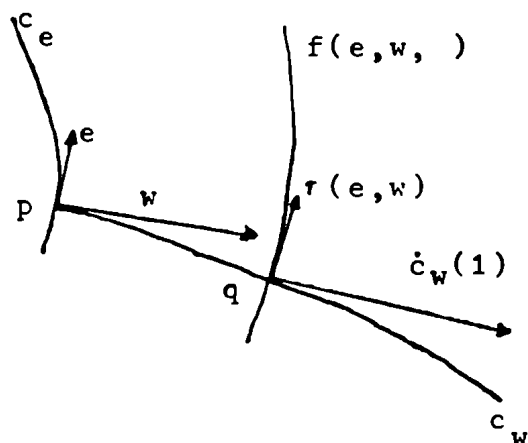
Teorema 6.8

Sea M sin puntos focales de dimensión $n \geq 2$; entonces el flujo geodésico ϕ restringido a T_1M es regular y Hausdorff. Considerando en el conjunto de geodésicas orientadas \vec{G} la estructura diferenciable natural, \vec{G} resulta difeomorfo a TS_p cualquiera sea $p \in M$.

Demostración

Sea $f: TS_p \times R \rightarrow M$ la familia normal de curvas geodésicas dependiente de $2n-2$ parámetros, definida por $f(e,w,t) = \Pi \circ \phi(\tau(e,w),t)$, donde τ es la aplicación de la proposición anterior. Denotando con $\dot{f}(e,w,t) = f_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \Big|_{(e,w,t)}$ y con $\dot{f}_t(e,w) = \dot{f}(e,w,t)$, resulta $\dot{f}(e,w,t) = \phi(\tau(e,w),t)$ y $\dot{f}_t(e,w) = \phi_t(\tau(e,w))$ para todo $t \in R$.

Por construcción de f (ver figura), la curva geodésica $f(e,w, t)$ parte de $f(e,w,0) = \exp_p(w) = q$ en la dirección $\dot{f}(e,w,0) = \tau(e,w)$ y en particular si $w = 0$, es $f(e,0,t) = c_e(t) = \exp_p(t.e)$.



Siendo e y w y $\tau(e,w)$ el vector de $S_p \subset T_p M$ obtenido, trasladando e paralelamente a lo largo de la curva geodésica $c_w(t) = \exp_p(t.w)$ hasta $t = 1$, entonces $\tau(e,w) \perp \dot{c}_w(1)$

Sea J el jacobiano de $\dot{f}: TS_p \times \mathbb{R} \rightarrow T_1 M$ respecto de los elementos de volumen $dTS_p \wedge dt$ y $dV_{T_1 M}$; es decir, $(\dot{f})^*(dV_{T_1 M}) = J \cdot dTS_p \wedge dt$

Siendo $\dot{f}_0 = \tau$ y $\tau^*(\omega^{n-1}) = \theta_p \cdot dTS_p$, por el lema 3.10 resulta

$$J = k_n \cdot \theta_p \text{ con } k_n = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}}{(n-1)!}; \text{ luego por (31) y (32) obtenemos,}$$

$$J(e,w,t) = -1 \text{ si } w = 0$$

$$J(e,w,t) = -s^{2-n} \cdot \langle Y'(v,e,s,s), Y(v,e,s,s) \rangle \cdot \det D_{v,s}$$

si $w \neq 0$, con $s = |w|$ y $v = s^{-1} \cdot w$

Como M no tiene puntos focales y $t \rightarrow Y(v,e,s,t)$ es un campo de Jacobi a lo largo de c_v que satisface $Y(v,e,s,0) = 0$ y además no nulo por ser $Y(v,e,s,s) = P_{s,v}(e)$, entonces por (4) es $\langle Y'(v,e,s,s), Y(v,e,s,s) \rangle > 0$.

Por otro lado, por la proposición 6.3 es $\det D_{v,s} > 0$; luego $J(e,w,t) < 0$ para todo $(e,w,t) \in TS_p \times \mathbb{R}$.

En consecuencia, si probamos que las aplicaciones $\dot{f}: TS_p \times \mathbb{R} \rightarrow T_1 M$ y $\vec{G}f: TS_p \rightarrow \vec{G}$ definida por $\vec{G}f(e,w) = \Pi_{\vec{G}}(\dot{f}(e,w, t))$ son biyecciones, resultará ϕ regular y Hausdorff y \vec{G} difeomorfo a TS_p .

En efecto, si $\dot{f}: TS_p \times \mathbb{R} \rightarrow T_1 M$ es una biyección, por lo anterior es un difeomorfismo; luego si $v \in T_1 M$ y $\dot{f}(e_0, w_0, t_0) = v$, sea

$g:A \rightarrow g(A) \subset TS_p$ un difeomorfismo, donde A es un cubo abierto centrado en un punto $a \in \mathbb{R}^{2n-2}$ con $g(a) = (e_0, w_0)$.

Definiendo $\varphi^{-1}(x,t) = \dot{f}(g(x), t+t_0)$ para $(x,t) \in A \times \mathbb{R}$, resulta $\varphi^{-1}(x,t) = \phi(\varphi^{-1}(x,0), t)$ y en consecuencia, si $U = \varphi^{-1}(A \times \mathbb{R})$, entonces (U, φ) es una carta cúbica y chata de T_1M centrada en v (ver sección 1.1) y además es regular por ser \dot{f} una biyección; luego ϕ es regular.

Si $\vec{G}f: TS_p \rightarrow \vec{G}$ es una biyección y consideramos en \vec{G} la estructura diferenciable natural (ver sección 1.2); como la diferencial de \dot{f} tiene en particular rango máximo en cada punto $(e, w, 0)$, entonces por la proposición 2.2, resulta $\vec{G}f$ un difeomorfismo. Para ver que ϕ es Hausdorff, es suficiente mostrar que T_1M/S es Hausdorff (ver comentario después del corolario 1.5); pero esto es consecuencia del hecho que T_1M/S es difeomorfo a \vec{G} por tener \vec{G} la estructura diferenciable natural y de ser \vec{G} difeomorfo a TS_p via $\vec{G}f$.

Finalizamos la demostración del teorema, probando que ambas aplicaciones son biyectivas.

De hecho, la inyectividad de \dot{f} implica la de $\vec{G}f$ y la suryectividad de $\vec{G}f$ implica la de \dot{f} .

En efecto, supuesto que \dot{f} es inyectiva, sea $\vec{G}f(e, w) = \vec{G}f(e', w')$; luego por ser f normal existe un $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(e, w, t) = f(e', w', t+b)$ para todo $t \in \mathbb{R}$; en consecuencia, $\dot{f}(e, w, 0) = \dot{f}(e', w', b)$ y por la inyectividad de \dot{f} resulta $e = e'$, $w = w'$ y $b = 0$.

Supuesto que $\vec{G}f$ es suryectiva, sea $v \in T_1M$ y consideremos la geodésica orientada $g = \Pi_{\vec{G}}(c_v) \in \vec{G}$. Por la suryectividad de $\vec{G}f$, existe un $(e, w) \in TS_p$ tal que $\vec{G}f(e, w) = g$; siendo $f(e, w,)$ y c_v normales existe entonces un $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(e, w, t) = c_v(t+b)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y por lo tanto, $\dot{f}(e, w, -b) = \dot{c}_v(0) = v$, es decir, \dot{f} es suryectiva.

Para ver la suryectividad de \vec{f} , sea $g = \Pi_{\vec{G}}(c_v)$ con $|v| = 1$.

Si $p \in c_v$, entonces $p = c_v(b)$ para algún $b \in \mathbb{R}$ y tomando $e = \dot{c}_v(b) \in S_p$, resulta $c_e(t) = c_v(t+b)$ para todo $t \in \mathbb{R}$; luego $\vec{G}f(e,w) = g$ con $w = 0$.

Si $p \notin c_v$, por la proposición 6.2, existe una única curva geodésica (salvo reparametrización) que parte de p e interseca a c_v perpendicularmente; denotando con $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ a la única parametrizada que satisface $c(0) = p$, $c(1) = q \in c_v$ y $\dot{c}(1) \perp \dot{c}_v(b)$ si $q = c_v(b)$, sea $w = \dot{c}(0) = \exp_p^{-1}(q)$ y $e = P_w^{-1}(\dot{c}_v(b))$. Por construcción, se verifica que $e \perp w$ y $f(e,w,t) = c_v(t+b)$; luego $\vec{G}f(e,w) = g$ y $\vec{G}f$ resulta suryectiva.

Para ver finalmente la inyectividad de \dot{f} , mostraremos primeramente que la distancia entre el punto p y la curva geodésica $t \rightarrow f(e,w,t)$ se realiza exactamente entre p y $f(e,w,0)$; es decir,

$$(36) \quad |w| = d(p, f(e,w,0)) < d(p, f(e,w,t)) \text{ si } |t| > 0$$

Denotando con $F(e,w,t) = d(p, f(e,w,t)) = |\exp_p^{-1}(f(e,w,t))|$, si $w = 0$, resulta $F(e,w,0) = |\exp_p^{-1}(f(e,0,t))| = |t|$; luego

(36) se verifica en éste caso.

Suponiendo $w \neq 0$, sea $q = \exp_p(w)$, $s = |w|$ y $v = s^{-1} \cdot w$; luego $\dot{c}_w(1) = s \cdot \dot{c}_v(s)$. Como $\exp_q: M_q \rightarrow M$ es un difeomorfismo con $p = \exp_q(-s \cdot \dot{c}_v(s))$ y los vectores $\dot{c}_v(s)$, $\tau(e,w)$ son linealmente independientes, la curva $f(e,w)$ no contiene al punto p .

En consecuencia, si consideramos la función $x \rightarrow d_p(x) = d(p,x)$ para $x \in M - \{p\}$, el vector $\text{grad } d_p \big|_{f(e,w,t)}$ está definido para todo $t \in \mathbb{R}$; verificándose en particular, $\text{grad } d_p \big|_q = \dot{c}_v(s)$

Debido al lema 6.1, la función $t \rightarrow F^2(e,w,t)$ es estrictamente convexa; luego es suficiente mostrar que $\frac{d}{dt} F(e,w, \cdot) \big|_{t=0} = 0$

Siendo $\frac{d}{dt} F(e,w, \cdot) \big|_{t=0} = (d_p \circ f(e,w, \cdot))_* \left(\frac{d}{dt} \right) \big|_{t=0} = (d_p)_* (\tau(e,w))$

y $(d_p)_*(\tau(e,w)) = \langle \text{grad } d_p |_{f(e,w,0)}, \tau(e,w) \rangle = \langle \dot{c}_v(s), \tau(e,w) \rangle$
 pues $q = f(e,w,0)$, entonces $\frac{d}{dt} F(e,w,) |_{t=0} = 0$, por ser
 $\dot{c}_v(s) \perp \tau(e,w)$.

Sea ahora $\dot{f}(e,w,t_0) = \dot{f}(e',w',t'_0)$; luego $\tau(e,w) =$
 $= \dot{f}(e',w',t'_0 - t_0)$.

Llamando $b = t'_0 - t_0$ se tiene entonces que $f(e,w,t) =$
 $= f(e',w',t+b)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Siendo $f(e,w,-b) = f(e',w',0)$ y $f(e',w',t) = f(e,w,t-b)$, por
 (36) aplicado a $f(e',w',)$ obtenemos,

$$d(p, f(e,w,-b)) < d(p, f(e',w',t)) = d(p, f(e,w,t-b)) \text{ si } |t| > 0$$

Si suponemos $b \neq 0$, entonces $|b| > 0$ y de la desigualdad resulta,
 $d(p, f(e,w,-b)) < d(p, f(e,w,0))$ lo que contradice (36) aplicado
 a $f(e,w,)$; luego $t'_0 = t_0$

Siendo ahora $f(e,w,t) = f(e',w',t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces
 $\dot{f}(e,w,0) = \dot{f}(e',w',0)$ y $f(e,w,0) = f(e',w',0)$; es decir,
 $\tau(e,w) = \tau(e',w')$ y $\exp_p(w) = \exp_p(w')$.

Como en particular \exp_p es una biyección, resulta $w = w'$ y dado
 que $\tau(e,w) = P_w(e) = P_w(e') = \tau(e',w)$ con $P_w: M_p \rightarrow M_{\exp_p(w)}$
 isomorfismo, es $e = e'$ y en consecuencia \dot{f} es inyectiva. #

Dado que todas las geodésicas orientadas de M se parametrizan
 de manera biyectiva con el conjunto de parámetros de f , diremos
 que f es la parametrización global de \vec{G} respecto al punto p de M .

Si $n \geq 3$, sea $g: T_1 S_p \times (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow M$ la familia normal de curvas
 geodésicas dependiente de $2n-2$ parámetros, definida por
 $g(v,e,s,t) = \Pi_0 \phi(P(v,e,s), t)$, donde $P(v,e,s) = P_{s,v}(e)$.

Si h es la aplicación del lema 6.6, por definición de f y g re-
 sulta, $g(v,e,s,t) = f(h(v,e,s), t) = f(e, s.v, t)$; luego $\vec{G}g = (\vec{G}f) \circ h$
 y por (36) la distancia de p a la curva $t \rightarrow g(v,e,s,t)$ es exacta-
 mente s .

Siendo $\vec{G}f$ y h diferenciables, también lo es $\vec{G}f: T_1 S_p \times (0, +\infty) \rightarrow \vec{G}$; y puesto que h aplica $T_1 S_p \times (0, +\infty)$ difeomorficamente en el conjunto de vectores $(v, w) \in TS_p$ con $w \neq 0$ y $\vec{G}f$ es un difeomorfismo, entonces $\vec{G}g$ aplica $T_1 S_p \times (0, +\infty)$ difeomorficamente en el conjunto de geodésicas orientadas que no contienen al punto p . En consecuencia, diremos que g es la parametrización polar de \vec{G} respecto al punto p .

Denotando con $d\vec{G}_p^{n-1} = (\vec{G}f)^*(d\vec{G}^{n-1})$ y con $d\vec{G}_{p,0}^{n-1} = (\vec{G}g)^*(d\vec{G}^{n-1})$ obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.9.

Sea M sin puntos focales de dimensión $n \geq 2$ y $p \in M$. Entonces $d\vec{G}_p^{n-1} = \theta_p \cdot dTS_p$, donde θ_p es la función definida en la proposición 6.7 y si $n \geq 3$ es $d\vec{G}_{p,0}^{n-1} = \theta_{p,0} \cdot dT_1 S_p \wedge ds$, donde $\theta_{p,0}$ es la función definida en la proposición 6.4.

Demostración

En virtud de la proposición 4.2 se satisface, $d\vec{G}_p^{n-1} = (\dot{f}_0)^*(\omega_F^{n-1})$, con $(\dot{f}_0)^*(\omega_F^{n-1}) = (\dot{f}_0)^*(\omega^{n-1})$ por ser f normal.

Siendo $\dot{f}_0 = \tau$, de la proposición 6.7 se obtiene, $d\vec{G}_p^{n-1} = \theta_p \cdot dTS_p$. Como $\vec{G}g = (\vec{G}f) \circ h$, por el lema 6.6 resulta,

$$d\vec{G}_{p,0}^{n-1} = h^*(d\vec{G}_p^{n-1}) = h^*(\theta_p \cdot dTS_p) = (-1)^n \cdot s^{n-2} \cdot \theta_p \circ h \cdot dT_1 S_p \wedge ds$$

y dado que por (33) es $\theta_{p,0}(v, e, s) = (-1)^n \cdot s^{n-2} \cdot \theta_p \circ h(v, e, s)$, obtenemos $d\vec{G}_{p,0}^{n-1} = \theta_{p,0} \cdot dT_1 S_p \wedge ds$. #

El teorema 6.8 implica trivialmente el siguiente:

Corolario 6.10.

Si para $p \in M$, $f_p: TS_p \rightarrow \vec{G}$ denota la parametrización global de \vec{G} respecto a p , entonces las funciones de transición $f_q^{-1} \circ f_p: TS_p \rightarrow TS_q$ son difeomorfismos y $(f_p^{-1})^*(d\vec{G}_p^{n-1}) = (f_q^{-1})^*(d\vec{G}_q^{n-1}) = d\vec{G}^{n-1}$. #

Como consecuencia de los corolarios, si \vec{I} es la integral positiva definida en la sección 1.5, para toda función medible $\psi: \vec{G} \rightarrow \bar{R}_+$ se cumple,

$$(37) \quad \vec{I}(\psi) = \int_{TS_p} \psi \circ \vec{G}f_p \cdot |\theta_p| dTS_p$$

Como el conjunto de geodésicas orientadas que contienen a "p" tiene medida nula, pues se identifica vía $\vec{G}f_p$ con el conjunto de pares $(e,w) \in TS_p$ con $w = 0$; si g_p es la parametrización polar de \vec{G} respecto a p, resulta

$$(38) \quad \vec{I}(\psi) = \int_{T_1 S_p \times (0, +\infty)} \psi \circ \vec{G}g_p \cdot |\theta_{p,0}| dT_1 S_p \wedge ds$$

Finalizamos la sección, computando θ_p y $\theta_{p,0}$ cuando M es el espacio euclídeano o el hiperbólico.

Es bien conocido, ver por ejemplo Pág. 94 de (6), que si M tiene curvatura constante K y R es el tensor de curvatura, entonces

$$(39) \quad R(X,Y)Z = K.(\langle Y,Z \rangle .X - \langle X,Z \rangle .Y)$$

para todo triplete de campos de vectores X,Y,Z sobre M.

Sea $p \in M$, $v \in S_p$ y e_1, \dots, e_{n-1} una base ortonormal de v^\perp y denotemos con E_i a los únicos campos paralelos a lo largo de c_v que satisfacen $E_i(0) = e_i$ y con Y_i a los únicos campos de Jacobi a lo largo de c_v que verifican $Y_i(0) = 0$ e $Y_i'(0) = e_i$; luego por ser $Y_i \perp \dot{c}_v$ se tiene que $Y_i(t) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}(t).E_j(t)$ si $i = 1, \dots, n-1$ y $\det D_{v,s} = \det \|a_{ij}(s)\|$

De la ecuación de Jacobi (J) y de (39) resulta inmediatamente, que $a_{ij} \equiv 0$ si $i \neq j$ y a_{ii} satisface la ecuación diferencial

$$\ddot{a}_{ii}(t) + K.a_{ii}(t) = 0 \quad \text{con} \quad a_{ii}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{a}_{ii}(0) = 1$$

Sea $K = -r^2$ con $r \geq 0$; entonces $a_{ii}(t) = t$ si $r = 0$ y $a_{ii}(t) = r^{-1} \cdot \text{Sh}(r.t)$ si $r > 0$; luego $\det D_{v,s} = s^{n-1}$ si $r = 0$ y $\det D_{v,s} = (r^{-1} \cdot \text{Sh}(r.s))^{n-1}$ si $r > 0$.

Para $e \in S_p$ con $e \perp v$ y $s > 0$, sea $Y(t) = Y(v, e, s, t)$ el único campo de Jacobi a lo largo de c_v que verifica $Y(0) = 0$ e $Y(s) = P_{s,v}(e)$. Como $Y \perp \dot{c}_v$, de la ecuación de Jacobi y de (39) resulta $Y(t) = a(t) \cdot P_{t,v}(e)$, donde $\ddot{a}(t) + K \cdot a(t) = 0$, con $a(0) = 0$ y $a(s) = 1$.

En consecuencia, si $r = 0$ es $Y(t) = s^{-1} \cdot t \cdot P_{t,v}(e)$ y si $r > 0$ es $Y(t) = \text{Sh}^{-1}(r \cdot s) \cdot \text{Sh}(r \cdot t) \cdot P_{t,v}(e)$.

Dado que según sea el caso, resulta $Y'(t) = s^{-1} \cdot P_{t,v}(e)$ e $Y'(t) = r \cdot \text{Sh}^{-1}(r \cdot s) \cdot \text{Ch}(r \cdot t) \cdot P_{t,v}(e)$, de (31), (32) y (33) obtenemos las siguientes expresiones, donde $c_n = (n-1)!(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Caso euclídeano ($K = 0$)

$$\theta_p(e, w) = c_n$$

Si $n \geq 3$,

$$\theta_{p,0}(v, e, s) = (-1)^n \cdot c_n \cdot s^{n-2}$$

Caso hiperbólico ($K = -r^2$, $r > 0$)

$$\theta_p(e, w) = c_n \quad \text{si } w = 0$$

$$\theta_p(e, w) = c_n \cdot \text{Ch}(r \cdot s) \cdot ((r \cdot s)^{-1} \cdot \text{Sh}(r \cdot s))^{n-2} \quad \text{si } w \neq 0 \quad \text{con } s = |w|$$

Si $n \geq 3$,

$$\theta_{p,0}(v, e, s) = (-1)^n \cdot c_n \cdot r^{2-n} \cdot \text{Ch}(r \cdot s) \cdot \text{Sh}^{n-2}(r \cdot s)$$

Como una aplicación trivial para $n \geq 3$, sea $a > 0$ y \vec{X}_a el conjunto de geodésicas orientadas cuyas distancias al punto p es menor o igual que "a"; luego si en (38) consideramos ψ igual a la función característica de \vec{X}_a , en el caso hiperbólico se tiene,

$$\text{med}(\vec{X}_a) = (n-1)! \cdot r^{2-n} \cdot \int_{T_1 S_p \times (0, a)} \text{Ch}(r \cdot s) \cdot \text{Sh}^{n-2}(r \cdot s) \cdot dT_1 S_p \wedge ds$$

y aplicando Fubini,

$$\text{med}(\vec{X}_a) = (n-1)! \cdot r^{2-n} \cdot \text{vol}(T_1 S_p) \cdot \int_0^a \text{Ch}(r \cdot s) \cdot \text{Sh}^{n-2}(r \cdot s) ds$$

Siendo $\int_{\partial T} \langle \nu, \text{grad} \phi \rangle dS = \int_T \Delta \phi \, dx$

geométrico. $(n-1)$ -esfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ resulta

$$\text{med}(X_{n-2}) = \int_{S^{n-1}} \langle \nu, \text{grad} \phi \rangle \, dS = \text{vol}(T) \Delta \phi$$

2. HOROESFERAS

En el presenta capítulo, las curvas geodésicas se denominarán abreviadamente geodésicas.

2.1. Horoesferas en variedades de Riemann completas, simplemente conexas y sin puntos focales

En esta sección, M denotará una variedad de Riemann conexa, completa, simplemente conexa y sin puntos focales de dimensión $n \geq 2$.

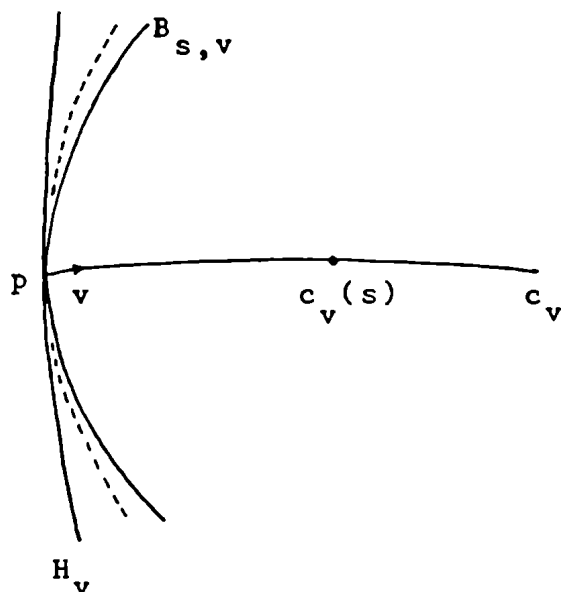
Para $p \in M$ y $v \in S_p$, sea $c_v(t) = \exp_p(t.v)$ y $B_{s,v}$ la bola cerrada con centro en $c_v(s)$ y radio $s > 0$; es decir,

$B_{s,v} = \{q \in M : d(q, c_v(s)) \leq s\}$, donde d denota como es usual a la distancia inducida por la métrica \langle, \rangle de M .

El conjunto $B_v = \bigcup_{s>0} B_{s,v}$ se denomina el horodisco determinado por v y su borde

$H_v = \partial B_v$ la horoesfera determinada por v (ver figura 1);

luego si M es el espacio euclídeo, las horoesferas son los hiperplanos afines.



(Figura 1)

Cuando $n = 2$, las horoesferas se denominan horociclos.

Para $s > 0$, sea $d_{s,v}(q) = d(q, c_v(s))$; luego $d_{s,v}$ es diferenciable en todo punto de M excepto en $c_v(s)$ y por la desigualdad triangular, para cada punto q se tiene que la función $s \rightarrow s - d_{s,v}(q)$ es creciente y acotada en valor absoluto por $d(p, q)$. En consecuencia,

$$(1) \quad b_v(q) = \lim_{s \rightarrow +\infty} (s - d_{s,v}(q))$$

existe para todo $q \in M$. La función $b_v: M \rightarrow R$ se denomina la función de Busemann determinada por v ; y por construcción se satisface, $H_v = b_v^{-1}(0)$ y $B_v = b_v^{-1}([0, +\infty))$

Por ser c_v globalmente minimal con $|v| = 1$, de (1) resulta

$$(2) \quad b_v(c_v(t)) = t$$

para todo $t \in R$. Por otro lado, si $v(t) = \dot{c}_v(t)$, como

$c_v(t)(s) = c_v(t+s)$, de (1) se obtiene

$$(3) \quad b_v(t) = b_v - t$$

para todo $t \in R$; luego $H_{v(t)} = b_{v(t)}^{-1}(0) = b_v^{-1}(t)$.

En la práctica, el cálculo de $b_v(q)$ según (1) puede ser complicado; pero notando que por la desigualdad triangular se

verifica $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{d(q, c_v(s))}{s} = 1$, se obtiene

$$(4) \quad b_v(q) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{s^2 - d^2(q, c_v(s))}{2 \cdot s} \right)$$

Por el teorema 7 de (4), se verifica $d(H_v(t), H_v(t')) = |t - t'|$

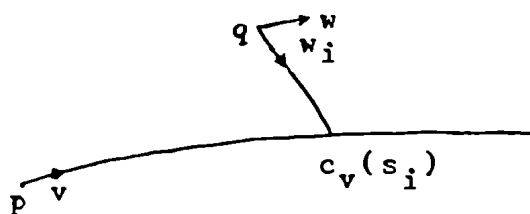
para $t, t' \in R$; y como por (2) es b_v suryectiva, resulta

$$(5) \quad M = \bigcup_{t \in R} H_v(t) \text{ (unión disjunta)}$$

Las horoesferas $H_v(t)$ se dicen paralelas a H_v .

Recordamos (ver sección 1.6), que si $p \neq q$ con $d(p, q) = r$ y $c: [0, r] \rightarrow M$ es el segmento geodésico que satisface $c(0) = p$ y $c(r) = q$, entonces $\dot{c}(r) = \text{grad } d_p|_q$; luego para q (arbitrario) y $s > 0$ con $c_v(s) \neq q$, el vector $w_s = -\text{grad } d_{s,v}|_q \in S_q$, es el vector inicial tangente al segmento geodésico "parametrizado por longitud de arco" que une q con $c_v(s)$.

Un vector $w \in S_q$ se dice asintótico a v ; si existe una sucesión $s_i \rightarrow +\infty$, tal que $w_i = w_{s_i} \rightarrow w$ en S_q (ver figura 2).



(Figura 2)

Proposición 1.1.

Para todo $p \in M$ y $v \in S_p$ se verifica:

- i) b_v es de clase C^2
- ii) b_v es cóncava; es decir, $-b_v$ es convexa (ver definición en la sección 1.6).
- iii) Para todo $q \in M$, $\text{grad } b_v|_q = -\lim_{s \rightarrow +\infty} \text{grad } d_{s,v}|_q$ (convergencia en S_q).
- iv) Para $q \in M$ y $w \in S_q$, w es asintótico a v , si y sólo si $b_w - b_v$ es constante sobre M .

Demostración

En todos los casos la referencia es (5).

Hago notar que las condiciones que satisface M , implican a las que allí se mencionan.

Para i) y ii) ver teorema 2, para iii) ver proposición 1 y para iv) ver proposición 3. #

Luego, las horoesferas son hipersuperficies de clase C^2 de M , con campo normal (unitario) $q \rightarrow \text{grad } b_v|_q$ ($q \in H_v$) de clase C^1 . Dado que para todo $t \in R$ y $s > 0$ con $s > t$ se verifica $\dot{c}_v(t) = -\text{grad } d_{s,v}|_{c_v(t)}$; por iii) resulta,

$$(6) \quad \text{grad } b_v|_{c_v(t)} = \dot{c}_v(t)$$

para todo $t \in R$.

Definición

Un subconjunto $A \subset M$ se dice convexo, si para todo par de puntos $p, q \in A$, el único segmento geodésico $c: [0,1] \rightarrow M$ que satisface $c(0) = p$ y $c(1) = q$, está contenido en A .

La curva c está definida por $c(t) = \exp_p(t.w)$, si $w = \exp_p^{-1}(q)$.

De la definición resulta, si $f: M \rightarrow R$ es convexa, los subconjuntos $f^{-1}((-\infty, a])$ son convexos para todo $a \in R$.

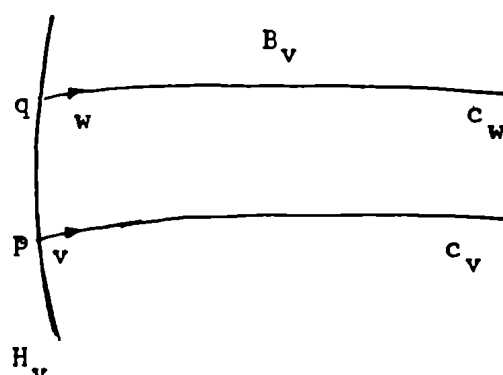
Luego, por ii) de la proposición anterior, los horodiscos B_v son convexos y por la igualdad

(6) y iv), el campo normal (unitario) $q \rightarrow \text{grad } b_v|_q$ ($q \in H_v$)

apunta hacia B_v ; es decir,

si $w = \text{grad } b_v|_q$ entonces $c_w(t) \in B_v$ para todo $t \geq 0$

(ver figura 3).



(Figura 3)

Si $\phi: TM \times R \rightarrow TM$ es el flujo geodésico y $\Pi: TM \rightarrow M$ la proyección, sea $f: H_v \times R \rightarrow M$ la aplicación definida por

$$(7) \quad f(q, t) = \Pi \circ \phi(N(q), t)$$

donde $N(x) = \text{grad } b_v|_x$, para $x \in M$.

Reemplazando la condición "sin puntos focales" por una condición más débil es sabido, (ver teorema Pág. 64 de [4]); que f es un homeomorfismo y f es de clase C^1 .

En virtud de las condiciones impuestas a M y la proposición anterior se obtiene:

Proposición 1.2.

Para todo $v \in T_1 M$, la aplicación f definida según (7), es un difeomorfismo de clase C^1 .

Demostración

Como Π y ϕ son diferenciables y $b_v \in C^2$, entonces $f \in C^1$; luego es suficiente computar la función inversa y notar que también es de clase C^1 . A tal efecto, sea $x = f(q, s)$ y $c(t) = f(q, t)$ para $t \in R$. Denotando con $w = N(q)$, por iv) de la proposición anterior es $b_w = b_v$, pues $q \in H_v$.

Como por (2) es $b_w(c(t)) = t$, entonces $b_w(x) = s$ y por lo tanto, $s = b_w(x)$. Por otro lado, de (6) es $\dot{c}(t) = \text{grad } b_w|_{c(t)}$; luego $\dot{c}(s) = \text{grad } b_w|_x = \text{grad } b_v|_x = N(x)$.

Siendo $g(t) = c(t+s)$, la única geodésica que satisface $g(0) = x$ y $\dot{g}(0) = N(x)$, entonces $g(t) = \Pi \circ \phi(N(x), t)$.

Como $g(-s) = c(0) = q$, resulta $q = \Pi \circ \phi(N(x), -s)$ o equivalentemente, $q = \Pi \circ \phi(N(x), -b_v(x))$.

La aplicación $x \rightarrow (\Pi \circ \phi(N(x), -b_v(x)), b_v(x))$ es la inversa de f y es claramente de clase C^1 . #

En los últimos años se estudia con interés, las propiedades análogas que satisfacen las horoesferas de variedades de Hadamard, respecto a las horoesferas del espacio de curvatura constante negativa (ver por ejemplo (9)) y también su geometría, interpretándolas como hipersuperficies de clase C^2 (ver por ejemplo (8)). Siguiendo el último enfoque, nos preguntamos si es posible comparar las curvaturas seccionales de las horoesferas con las de la variedad, y cómo quedan acotadas, en el caso de que lo estén las de la variedad. Las respuestas están resumidas en el teorema 1.7; y a efecto de poder dar una demostración del mismo, comenzaremos por describir el material necesario.

Para $p, q \in M$ con $d(p, q) = r > 0$, sea $v = -\text{grad } d_q|_p \in S_p$ y c_w con $w \in S_q$ la única geodésica que cumple $c_w(r) = p$; luego $\dot{c}_w(r) = -v$. Por lo visto en la nota después del lema 6.5 del capítulo anterior, si $u \perp v$, se verifica $\nabla_u \text{grad } d_q = Z'(r)$; donde Z es el único campo de Jacobi a lo largo de c_w que satisface $Z(0) = 0$ y $Z(r) = u$. Equivalentemente se tiene,

$\nabla_u \text{grad } d_q = -Y'(0)$; donde Y es el único campo de Jacobi a lo largo de c_v que satisface $Y(0) = u$ e $Y(r) = 0$; en consecuencia, $Y \perp \dot{c}_v$ e $Y' \perp \dot{c}_v$.

En particular, si $p \in M$, $v \in S_p$ son fijos y $q = c_v(s)$ con $s > 0$, resulta

$$(8) \quad Y'_{s,v,u}(0) = -\nabla_u \text{grad } d_{s,v}$$

donde $Y_{s,v,u}$ denota al único campo de Jacobi a lo largo de c_v que verifica $Y_{s,v,u}(0) = u$ e $Y_{s,v,u}(s) = 0$, para todo $u \perp v$. Para $s > 0$, sea $D'_{s,v}: v^\perp \rightarrow v^\perp$ el endomorfismo definido por

$$(9) \quad D'_{s,v}(u) = Y'_{s,v,u}(0)$$

luego, por la identidad de Lagrange (ver sección 1.6), se obtiene inmediatamente que $D'_{s,v}$ es simétrico; es decir,

$$\langle D'_{s,v}(u), w \rangle = \langle u, D'_{s,v}(w) \rangle \quad \text{para todo } u, w \in v^\perp.$$

Por otro lado, para $u \in v^\perp$ con $u \neq 0$, sea $Y(t) = Y_{s,v,u}(s-t)$; luego $Y(0) = 0$ e $Y(s) = u$. Siendo $\langle D'_{s,v}(u), u \rangle = -\langle Y'(s), Y(s) \rangle$ y M sin puntos focales, por (4) de la sección 1.6 resulta,

$$\langle D'_{s,v}(u), u \rangle < 0; \text{ es decir, } D'_{s,v} \text{ es definido negativo.}$$

Es bien conocido, (ver Eberlein (2) o Green (7)), que los endomorfismos $D'_{s,v}$ convergen para $s \rightarrow +\infty$, a un endomorfismo $D'_v: v^\perp \rightarrow v^\perp$; que por lo anterior resulta simétrico y semi-definido negativo.

Los campos de Jacobi Y a lo largo de c_v , que satisfacen las condiciones iniciales $Y(0) = u \perp v$ e $Y'(0) = D'_v(u)$, se denominan en la literatura estables.

Los endomorfismos D'_v ($v \in T_1M$), están relacionados con las funciones de Busemann (ver Proposición 2 y Teorema 1 de (5)), del siguiente modo: sea $N = \text{grad } b_v$ y $q \in M$; luego si $u \in N(q)^\perp$ se cumple

$$(10) \quad \nabla_u N = D'_{N(q)}(u)$$

Hago notar nuevamente, que las condiciones que satisface M , implican a las que se mencionan en la citada referencia.

Dado que $w = N(q)$ es asintótico a v , entonces $\text{grad } b_w = \text{grad } b_v$; luego (10) es equivalente a

$$(11) \quad \nabla_u \text{grad } b_w = -\lim_{s \rightarrow +\infty} \nabla_u \text{grad } d_{s,w}$$

Recordamos, que si φ es un endomorfismo de un espacio euclideo V , la norma de φ se define por $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(x)| : |x| = 1\}$. El siguiente hecho, será de utilidad.

Lema 1.3.

Si para todo plano tangencial σ a M , la curvatura seccional k verifica $K_\sigma \geq -k^2$ ($k > 0$), entonces la norma del endomorfismo D'_v satisface $\|D'_v\| \leq k$, para todo $v \in T_1M$.

El lema es consecuencia inmediata, del siguiente resultado debido a Eberlein.

Proposición 1.4.

Si las curvaturas seccionales de M satisfacen la acotación $K_\sigma \geq -k^2$ para algún $k > 0$, sea Y un campo de Jacobi a lo largo de una geodésica c con $|\dot{c}| = 1$, que verifica $Y(0) = 0$ e $Y \perp \dot{c}$; entonces $|Y'(t)| \leq k \cdot \text{Coth}(k \cdot t) \cdot |Y(t)|$ para todo $t > 0$.

Demostración

ver Proposición 2.7 de (2). #

Demostración del lema 1.3.

Para $u \in v^1$ y $s > 0$, sea $Y(t) = Y_{s,v,u}(s-t)$; luego $Y(0) = 0$ e $Y(s) = u$. Por la identidad de Lagrange resulta $Y \perp \dot{c}$, donde $c(t) = c_v(s-t)$ con $|\dot{c}| = 1$, pues $v \in T_1M$.

Por la proposición anterior, se satisface $|Y'(s)| \leq k \cdot \text{Coth}(k \cdot s) \cdot |Y(s)|$ o equivalentemente, $|Y'_{s,v,u}(0)| \leq k \cdot \text{Coth}(k \cdot s) \cdot |u|$.

Por definición de $D'_{s,v}$ obtenemos en consecuencia, $\|D'_{s,v}\| \leq k \cdot (\text{Coth}(k \cdot s))$; y tomando límite para $s \rightarrow +\infty$, resulta $\|D'_v\| \leq k$. #

Proposición 1.5.

Si $n = 2$, sea K la curvatura de Gauss de M y supongamos que $K \leq -r^2$ para alguna constante $r > 0$.

Si $c:R \rightarrow M$ es una geodésica con $|\dot{c}| = 1$ e Y un campo de Jacobi a lo largo de c , con $Y(0) = 0$ e $Y \perp \dot{c}$, entonces

$$(12) \quad r \cdot \text{Coth}(r \cdot t) \cdot |Y(t)| \leq |Y'(t)|$$

para todo $t > 0$.

Demostración

Necesitaremos primeramente el siguiente:

Lema 1.6.

Sea $s > 0$, $K_i:R \rightarrow R$ ($i = 1,2$) funciones diferenciables que verifican $K_1(t) < K_2(t) < 0$ para $t \geq s$ y $x_i:[s,+\infty) \rightarrow R$, una solución de la ecuación de Ricatti (R)

$$(R) \quad \dot{x}_i + x_i^2 + K_i = 0$$

con $x_i(t) > 0$ para $t > s$. Si $x_2(s) < x_1(s)$, entonces $x_2(t) < x_1(t)$ para todo $t \geq s$.

Demostración

Hacemos notar, que soluciones x_i existen, pues si $a_i:R \rightarrow R$ es la solución de la ecuación de Jacobi (J).

(J) $\ddot{a}_i + K_i \cdot a_i = 0$ con $a_i(0) = 0$ y $\dot{a}_i(0) = 1$
 entonces $a_i(t) > 0$ y $\dot{a}_i(t) > 0$ para todo $t > 0$, pues $K_i < 0$;
 luego las funciones $x_i(t) = \dot{a}_i(t) \cdot a_i^{-1}(t)$ definidas para $t > 0$,
 satisfacen (R). Sea ahora, $x = x_1 - x_2$; entonces por (R) se cumple
 $\dot{x} + x(x_1 + x_2) = K_2 - K_1 > 0$. Como $x(s) > 0$ y x es continua, si
 $\ell = \sup\{\epsilon > 0 : x(t) > 0 \text{ si } t \in [s, s+\epsilon)\}$ y $\ell = +\infty$, nada hay que
 probar. Supongamos que $\ell < +\infty$ y sea $\bar{s} = s+\ell$; luego $x(\bar{s}) = 0$
 y $x(t) > 0$ para $t \in [s, \bar{s})$. Siendo $\dot{x}(\bar{s}) = K_2(\bar{s}) - K_1(\bar{s}) > 0$, en-
 tonces x es estrictamente creciente en un intervalo de \bar{s} ; pero
 esto implica que $x(t) < x(\bar{s}) = 0$ para $t < \bar{s}$ y próximo a \bar{s} , lo
 cual es absurdo y por lo tanto $\ell = +\infty$. #

Demostración de la proposición 1.5.

Siguiendo la idea de la demostración de la proposición 1.4, su pongamos primeramente que $K < -r^2$.

Sea $e \perp \dot{c}(0)$ con $|e| = 1$ y E el único campo paralelo a lo largo de c que satisface $E(0) = e$. Si X es el único campo de Jacobi a lo largo de c que verifica $X(0) = 0$ y $X'(0) = e$, entonces $X(t) = a(t).E(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde a es la única solución de la ecuación $\ddot{a}(t) + K(c(t)).a(t) = 0$, con $a(0) = 0$ y $\dot{a}(0) = 1$. Supongamos $Y'(0) = \lambda \neq 0$, pues si $\lambda = 0$, entonces $Y \equiv 0$ y la desigualdad (12) se cumple.

Dado que $Y \perp \dot{c}$, resulta $Y(t) = \lambda.a(t).E(t)$; luego por ser $a(t) > 0$ y $\dot{a}(t) > 0$ para $t > 0$, pues $K \circ c < 0$, la desigualdad (12) se transforma en

$$(13) \quad r.\text{Coth}(r.t) \leq \dot{a}(t).a^{-1}(t)$$

para $t > 0$. A efecto de probar (13), sea $u(t) = r.\text{Coth}(r.t)$ y $v(t) = \dot{a}(t).a^{-1}(t)$ si $t > 0$; en consecuencia, $\dot{u} + u^2 - r^2 = 0$ y $\dot{v} + v^2 + K \circ c = 0$ en $(0, +\infty)$

Para cada número natural n , sea $t_n = n^{-1}$; luego como el $\lim_{t \rightarrow 0} v(t) = +\infty$, existe un $s_n > 0$ con $s_n < t_n$, tal que $u(t_n) < v(s_n)$.

Si $\epsilon_n = t_n - s_n$, ϵ_n converge a cero y $u(t_n) < v(t_n - \epsilon_n)$.

Sea $v_n(t) = v(t - \epsilon_n)$ y $K_n(t) = K(c(t - \epsilon_n))$ para $t \geq t_n$; luego $\dot{v}_n + v_n^2 + K_n = 0$ en $[t_n, +\infty)$ y $K_n < -r^2$.

Como $u(t_n) < v_n(t_n)$, por el lema anterior resulta $u(t) < v_n(t)$ para todo $t \geq t_n$; es decir, $u(t) < v(t - \epsilon_n)$ para todo n y $t \geq t_n$. Sea ahora $t > 0$ (fijo); eligiendo m de modo que $t_n < t$ si $n \geq m$, por lo anterior se cumple $u(t) < v(t - \epsilon_n)$ y tomando límite para $n \rightarrow +\infty$, obtenemos $u(t) \leq v(t)$.

Esto prueba la desigualdad (12) en el caso $K < -r^2$, que claramente se conserva, sustituyendo ($<$) por (\leq) pues $r > 0$. #

Definición

Si $n \geq 3$, sea $H \subset M$ una hipersuperficie de clase al menos C^2 , con campo normal (unitario) $N: H \rightarrow T_1M$ de clase C^1 . Si $X, Y: H \rightarrow TH$ son campos de vectores de clase C^1 sobre H , el segundo tensor fundamental S_N y la segunda forma fundamental ℓ_N de H respecto a N , se definen por $S_N(X) = \nabla_X N$ y $\ell_N(X, Y) = \langle S_N(X), Y \rangle$; donde $\nabla_{X(q)} N = \nabla_X N|_q = K(N_{**}(X(q)))$ para $q \in H$; siendo K la aplicación de conexión de ∇ (ver apéndice) y ∇ la conexión de Levi-Civita.

Por ser N unitario, S_N induce para cada $q \in H$, un endomorfismo $S_{N(q)}: H_q \rightarrow H_q$ definido por $S_{N(q)}(u) = \nabla_u N$ y denotando con $\ell_{N(q)}: H_q \times H_q \rightarrow R$ a la forma bilineal $\ell_{N(q)}(u, w) = \langle S_{N(q)}(u), w \rangle$, $\ell_{N(q)}$ resulta simétrico (ver Pág. 104 de (6)).

Sea $\sigma \subset H_q \subset M_q$ el plano generado por los vectores ortonormales $u, w \in H_q$; luego si \bar{K}_σ y K_σ son las curvaturas seccionales de H y M respectivamente, resulta (ver Pág. 105 de (6)),

$$(14) \quad \bar{K}_\sigma = K_\sigma + \Delta_\sigma \quad (\text{ecuación de Gauss})$$

donde $\Delta_\sigma = \ell_N(u, u) \cdot \ell_N(w, w) - \ell_N^2(u, w)$.

Teorema 1.7.

Sea $v \in T_1M$ y $H = H_v$ la horoesfera determinada por v , con la métrica inducida por M . Si $n \geq 3$, sea \bar{K}_σ la curvatura seccional de H respecto al plano tangencial σ a H y K_σ la curvatura seccional de M . Si $n = 2$, sea \aleph la curvatura geodésica (en valor absoluto) del horociclo H y K la curvatura de Gauss de M ; luego

- i) $K_\sigma \leq \bar{K}_\sigma$ para todo plano tangencial σ a H
- ii) Si para alguna constante $k > 0$ y todo plano tangencial σ a M se satisface $K_\sigma \geq -k^2$, entonces $0 \leq \bar{K}_\sigma - K_\sigma \leq k^2$
- iii) Si $-k^2 \leq K \leq -r^2$ ($r > 0$), entonces $r \leq \aleph \leq k$

Demostración

Para i): Sea $N = \text{grad } b_v$ y $\bar{N}: H \rightarrow T_1 M$ la restricción de N a H ; entonces para $q \in H$ se cumple $\bar{N}(q)^\perp = H_q$; y por definición de $S_{\bar{N}}$ y por (10) se obtiene, $S_{\bar{N}(q)} = D'_{\bar{N}(q)}$.

Sea ahora $q \in H$ (fijo) y $\sigma \subset H_q$ el plano generado por los vectores ortonormales u, w ; luego por ser $S_{\bar{N}(q)}$ semi-definido negativo "pues $D'_{\bar{N}(q)}$ lo es", el valor Δ_σ correspondiente a la normal \bar{N} satisface $\Delta_\sigma \geq 0$; y por (14) resulta $\bar{K}_\sigma \geq K_\sigma$.

Para ii): Por la parte i), es $0 \leq \bar{K}_\sigma - K_\sigma = \Delta_\sigma \leq \mathfrak{L}_{\bar{N}}(u, u) \cdot \mathfrak{L}_{\bar{N}}(w, w)$; luego por definición de $\mathfrak{L}_{\bar{N}}$ y de ser $|u| = |w| = 1$, resulta $0 \leq \bar{K}_\sigma - K_\sigma \leq \|S_{\bar{N}(q)}\|^2 = \|D'_{\bar{N}(q)}\|^2$

La desigualdad de ii), es ahora consecuencia del lema 1.3.

Para iii): Sea $q \in H$ y $c: I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ una curva de clase C^2 , parametrizada por su longitud de arco, que satisface $c(0) = q$ y $b_v \circ c = 0$ en I ; la curva c existe por ser $\text{grad } b_v|_q \neq 0$.

Denotando con $\bar{N}(t) = N(c(t))$, los vectores $\dot{c}(t)$ y $\bar{N}(t)$ constituyen una base ortonormal de $M_{c(t)}$. Sea $D = \frac{d}{dt}$; luego por ser $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 1$, resulta $D(\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle) = 2 \cdot \langle \nabla_D \dot{c}, \dot{c} \rangle = 0$ y en consecuencia, $\nabla_D \dot{c} = h \cdot \bar{N}$ con $h(t) = \langle \nabla_D \dot{c}, \bar{N} \rangle|_t$.

Dado que c parametriza un segmento del horociclo H , por definición de curvatura geodésica (en valor absoluto) se verifica $\mathfrak{K}(q) = |h(0)|$; luego lo que sigue es estimar el valor $h(0)$.

Como $\langle \dot{c}, \bar{N} \rangle = 0$, entonces $\langle \nabla_D \dot{c}, \bar{N} \rangle + \langle \dot{c}, \nabla_D \bar{N} \rangle = 0$; y por lo tanto, $h(0) = -\langle \dot{c}(0), \nabla_D \bar{N}|_0 \rangle$. Equivalentemente se tiene por ser $\nabla_D \bar{N}|_0 = \nabla_{\dot{c}(0)} N$, que $h(0) = -\langle \dot{c}(0), \nabla_{\dot{c}(0)} N \rangle$.

Si $u = \dot{c}(0)$ y $w = N(q)$, entonces w es asintótico a v y en consecuencia, $\text{grad } b_w = \text{grad } b_v = N$; luego por (8) y (11) obtenemos,

$$(15) \quad h(0) = -\lim_{s \rightarrow +\infty} \langle u, Y'_{s, w, u}(0) \rangle$$

Sea E el único campo paralelo a lo largo de c_w con $E(0) = u$; luego por ser $Y_{s,w,u} \perp \dot{c}_w$, se tiene que $Y_{s,w,u}(t) = b_s(t).E(t)$, donde b_s es la única función que satisface

$$b_s''(t) + K(c_w(t)).b_s(t) = 0 \quad \text{con} \quad b_s(0) = 1 \quad \text{y} \quad b_s(s) = 0$$

Por otro lado, si para cada $s > 0$, denotamos con c_s a la geodésica $c_s(t) = c_w(s-t)$, sea a_s la única función que verifica $a_s''(t) + K(c_s(t)).a_s(t) = 0$, con $a_s(0) = 0$ y $\dot{a}_s(0) = 1$; luego $a_s(t) > 0$ y $\dot{a}_s(t) > 0$ para $t > 0$.

Si $d_s(t) = b_s(s-t)$, entonces d_s satisface la ecuación diferencial anterior con $d_s(0) = 0$ y $d_s(s) = 1$; luego por unicidad de las soluciones, debe ser $d_s(t) = a_s^{-1}(s).a_s(t)$.

En consecuencia, $\langle u, Y'_{s,w,u}(0) \rangle = \dot{b}_s(0) = -a_s^{-1}(s).\dot{a}_s(s) < 0$; y en virtud de (15) y de ser $K(q) = |h(0)|$, se cumple

$$(16) \quad K(q) = \lim_{s \rightarrow +\infty} a_s^{-1}(s).\dot{a}_s(s)$$

Si para cada $s > 0$, elegimos un vector $u_s \perp \dot{c}_s(0)$ con $|u_s| = 1$, sea E_s el único campo paralelo a lo largo de c_s con $E_s(0) = u_s$; luego el campo Y_s definido por $Y_s(t) = a_s(t).E_s(t)$, es un campo de Jacobi a lo largo de c_s que satisface $Y_s(0) = 0$ e $Y_s \perp \dot{c}_s$. Por construcción se verifica, $a_s^{-1}(s).\dot{a}_s(s) = |Y_s(s)|^{-1} . |Y'_s(s)|$; luego por las proposiciones 1.4 y 1.5, obtenemos

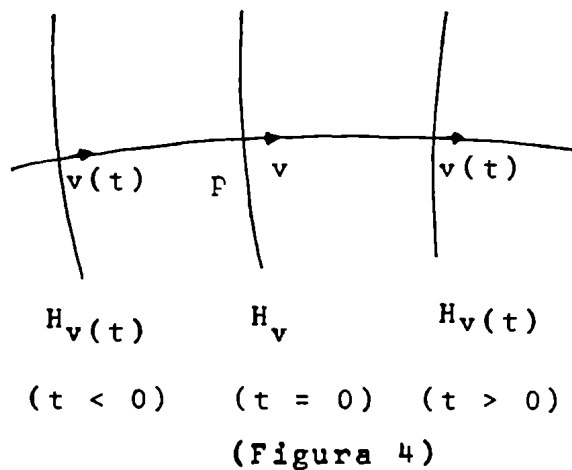
$$(17) \quad r.\text{Coth}(r.s) \leq a_s^{-1}(s).\dot{a}_s(s) \leq k.\text{Coth}(k.s)$$

De (16) y (17) resulta $r \leq K(q) \leq k$; lo que prueba iii) por ser q arbitrario. #

De manera análoga a lo hecho en la sección 1.6, al parametrizar todas las geodésicas orientadas, podemos parametrizar todas las horoesferas de M . Dado que en general es $H_v \neq H_{-v}$, es conveniente interpretar a H_v como una hipersuperficie orientada de M . Identificando H_v con el conjunto de sus normales que apuntan

hacia su horodisco B_v , una horoesfera se identifica entonces a un punto de $\mathcal{N}(M) = T_1M/\sim$, donde " \sim " denota la relación de equivalencia definida en T_1M , por $v \sim w$ si y sólo si $b_v = b_w$. Llamaremos a $\mathcal{N}(M)$ el conjunto de horoesferas de M y la clase de equivalencia de un vector $v \in T_1M$, lo denotaremos con $[v]$. En el caso euclideo, $\mathcal{N}(M)$ es el conjunto de hiperplanos afines orientados.

Para $p \in M$ y $v \in S_p$, sea $v(t) = \dot{c}_v(t)$ con $t \in \mathbb{R}$ y definamos $\varphi_p: \mathbb{R} \times S_p \rightarrow \mathcal{N}(M)$ por $\varphi_p(t, v) = [v(t)]$; luego $\varphi_p(t, v)$ representa a la horoesfera $H_{v(t)}$ (ver figura 4).



Proposición 1.8.

Con las notaciones introducidas se verifica,

- i) $\varphi_p: \mathbb{R} \times S_p \rightarrow \mathcal{N}(M)$ es una biyección, con inversa $\varphi_p^{-1}([w]) = (-b_w(p), \text{grad } b_w|_p)$
- ii) Si $q \in M$, la función de transición $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p: \mathbb{R} \times S_p \rightarrow \mathbb{R} \times S_q$, está dado por $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p(t, v) = (t - b_v(q), \text{grad } b_v|_q)$

Demostración

Para i): Si $\varphi_p(t, v) = \varphi_p(s, w)$, entonces $b_v(t) = b_w(s)$ o equivalentemente por (3) es $b_v - t = b_w - s$; y dado que $b_w(p) = b_v(p) = 0$, resulta $t = s$. Siendo $b_v = b_w$, entonces por (6) se satisface $v = \text{grad } b_v|_p = \text{grad } b_w|_p = w$; luego φ_p es inyectiva.

Sea ahora $[w] \in \mathcal{N}(M)$ y pongamos $t = -b_w(p)$ y $v = \text{grad } b_w|_p$; luego por iv) de la proposición 1.1, es $b_v - b_w$ constante con $b_v(p) = 0$; en consecuencia $b_v - b_w = t$.

Siendo $b_v(t) = b_v - t = (t + b_w) - t = b_w$, resulta $v(t) \sim w$ y por

lo tanto φ_p es suryectiva con inversa $\varphi_p^{-1}([w]) =$

$$= (-b_w(p), \text{grad } b_w \Big|_p).$$

Para ii): Sea $w = v(t)$; luego $\varphi_p(t, v) = [w]$ y

$$\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p(t, v) = (-b_w(q), \text{grad } b_w \Big|_p).$$

Como $b_w = b_v(t) = b_v - t$, entonces $-b_w(q) = t - b_v(q)$ y

$$\text{grad } b_w \Big|_q = \text{grad } b_v \Big|_q. \quad \#$$

Nota

Si para todo $p, q \in M$ es $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ de clase C^k con $k = 1, 2, \dots, +\infty$, por la proposición anterior existe una única estructura diferenciable de clase C^k sobre $N(M)$, que lo hace C^k -difeomorfo a $R \times S_p$ (vía φ_p) cualquiera sea $p \in M$. En éste caso, llamaremos a dicha estructura, la estructura diferenciable natural de clase C^k sobre $N(M)$.

Ejemplo 1

Si $M = R^n$ y \langle , \rangle denota el producto escalar usual, sea

$$(R^n)_x = x + R^n \text{ y } S_x = \{y \in R^n : |y-x| = 1\} \text{ para todo } x \in R^n.$$

Luego, si calculamos $b_v(q)$ ($v \in S_p$) según (4), se deduce inmediatamente.

$$(18) \quad b_v(q) = \langle q-p, v-p \rangle \text{ y } \text{grad } b_v \Big|_q = v-p+q$$

En consecuencia, obtenemos el hecho conocido que el conjunto de hiperplanos afines orientados de R^n , admite una estructura diferenciable natural de clase C^∞ . Utilizando las funciones de transición, obtenemos además la conocida densidad para hiperplanos afines orientados; cuya expresión adoptando como modelo de $N(R^n)$ a $R \times S^{n-1}$ ($S^{n-1} = S_0$), es la n -forma $dt \wedge dS^{n-1}$; donde dS^{n-1} denota al elemento de volumen de S^{n-1} respecto a una orientación fijada e inducida por \langle , \rangle .

En efecto, si para $p \in R^n$ definimos $i_p: S^{n-1} \rightarrow S_p$ por $i_p(u) = u+p$, sea dS_p el único elemento de volumen que satisface $i_p^*(dS_p) = dS^{n-1}$; luego por ii) de la proposición anterior y de (18) se obtiene,

$$(19) \quad (\varphi_p^{-1})^*(dt \wedge dS_p) = (\varphi_q^{-1})^*(dt \wedge dS_q)$$

Denotando al valor común de (19) con dK , la igualdad anterior muestra, que la expresión de la n -forma dK sobre cualquier modelo $R \times S_p$ es independiente de p y en particular, $\varphi_0^*(dK) = dt \wedge dS^{n-1}$.

Una simple verificación análoga al caso hiperbólico (ver sección 2.3), muestra que dK es la única n -forma (salvo factor constante) invariante en valor absoluto por el grupo de isometrías de R^n que actúa sobre $K(R^n)$.

Ejemplo 2

(Se demuestra en la sección 2.3).

Si M es el espacio hiperbólico de curvatura seccional constante $K = -r^2$ ($r > 0$), entonces $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ es de clase C^∞ para todo $p, q \in M$.

Sea $\omega_p = e^{r \cdot (n-1) \cdot t} dt \wedge dS_p$; luego

$$(20) \quad (\varphi_p^{-1})^*(\omega_p) = (\varphi_q^{-1})^*(\omega_q)$$

Denotando al valor común de (20) con dK , entonces dK es la única n -forma (salvo factor constante) invariante en valor absoluto por el grupo de isometrías de M que actúa sobre $K(M)$. Como puede observarse haciendo $r = 0$, el caso hiperbólico generaliza el caso euclídeo.

Cabe entonces preguntarse, si en las variedades de Riemann que estamos considerando con curvatura seccional no necesariamente constante, la situación del ejemplo 2 y de hecho la del ejemplo 1, es generalizable en el siguiente sentido (comparar con el caso geodésicas orientadas, corolario 6.10):

- a) $N(M)$ admite una estructura diferenciable natural de clase C^1
 b) Existe una n -forma sobre $N(M)$ invariante en valor absoluto por el grupo de isometrías de M que actúa sobre $N(M)$.

Lamentablemente esto no sucede en general; ni siquiera en el caso de que M sea una variedad de Hadamard (ver definición en la sección 1.6).

El siguiente ejemplo muestra una variedad de Hadamard, donde la condición a) no se verifica.

Ejemplo 3

Sea $M = R^3$ y denotemos con (x_1, x_2, x_3) las coordenadas de los puntos de R^3 , respecto a la base canónica.

Si $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, definimos la métrica \langle , \rangle por: $\langle X_3, X_3 \rangle = e^{2 \cdot x_2}$,
 $\langle X_1, X_1 \rangle = \langle X_2, X_2 \rangle = 1$ y $\langle X_i, X_j \rangle = 0$ si $i \neq j$

Sea $p = (x_1, x_2, x_3)$ y $v = \sum_{i=1}^3 v_i \cdot X_i(p)$, con $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \cdot e^{2 \cdot x_2} = 1$;
 es decir, $v \in S_p$.

Si $r = \sqrt{1 - v_1^2}$; para $r \neq 0$, definimos $g(v, t) = \text{Ch}(r \cdot t) + r^{-1} \cdot v_2 \cdot \text{Sh}(r \cdot t)$; luego $e^{-r \cdot |t|} \leq g(v, t) \leq e^{r \cdot |t|}$ para todo $t \in R$, pues $|v_2| \leq r$.

Sea $c_v: R \rightarrow M$ la geodésica que satisface $c_v(0) = p$ y $\dot{c}_v(0) = v$, con $c_v(t) = (x_1(v, t), x_2(v, t), x_3(v, t))$.

Si $|v_1| = 1$, se tiene $x_1(v, t) = x_1 + t \cdot v_1$, $x_2(v, t) = x_2$ y $x_3(v, t) = x_3$.

Si $|v_1| < 1$, resulta $x_1(v, t) = x_1 + t \cdot v_1$, $x_2(v, t) = x_2 + \ln g(v, t)$ y $x_3(v, t) = x_3 + r^{-1} \cdot v_3 \cdot \text{Sh}(r \cdot t) \cdot g^{-1}(v, t)$.

Por otro lado, sean $X, Y \in S_p$ con $\langle X, Y \rangle = 0$; si $X = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot X_i(p)$ e $Y = \sum_{i=1}^3 b_i \cdot X_i(p)$, entonces la curvatura seccional K_σ donde σ es el plano de M_p generado por X e Y , está dado por

$$(21) \quad K_\sigma = -e^{2 \cdot x_2} \cdot (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)^2 \leq 0$$

En consecuencia, M es una variedad de Hadamard.

Usando el hecho que por ser M simplemente conexo y sin puntos conjugados, se satisface $d(p,q) = |\exp_p^{-1}(q)|$; si $q = (y_1, y_2, y_3)$ se obtiene

$$(22) \quad d(p,q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + f^2(p,q)}$$

donde $f(p,q) = \text{Arg Ch}(\frac{1}{2} \cdot (y_3 - x_3)^2 \cdot e^{y_2 + x_2} + \text{Ch}(y_2 - x_2))$.

Sea $h_v(q) = \frac{1}{2} \cdot r^{-1} \cdot (r + v_2) \cdot (1 + e^{2 \cdot y_2} \cdot (y_3 - x_3 - (r + v_2)^{-1} \cdot v_3)^2)$ si $v_3 \neq 0$ o $v_3 = 0$ con $v_2 > 0$; luego calculando $b_v(q)$ según (4) se obtiene, $b_v(q) = v_1 \cdot (y_1 - x_1) + v_2 \cdot (y_2 - x_2)$ si $v_3 = 0$ y $v_2 \leq 0$; y $b_v(q) = v_1 \cdot (y_1 - x_1) + r \cdot (y_2 - x_2) - r \cdot \ln h_v(q)$ en los demás casos. Tomando $p = (0, 0, 0)$ y $q = (0, 0, 1)$, para $v \in S_p$ con $v_3 = 0$ se tiene, $b_v(q) = 0$ si $v_2 \leq 0$ y $b_v(q) = -v_2 \cdot \ln 2$ si $v_2 > 0$. Luego, la aplicación $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ no es diferenciable, pues la función $v \rightarrow b_v(q)$ con $v \in S_p$ no lo es en $v = X_1(p)$.

2.2. La función de Busemann en espacios hiperbólicos

Por definición, un espacio hiperbólico es una variedad de Hadamard con curvatura seccional constante negativa. Es bien conocido, que todos aquellos espacios que tienen la misma curvatura, son isométricos entre sí. El siguiente modelo de espacio hiperbólico con curvatura seccional constante $K = -r^2$ ($r > 0$), puede encontrarse en el Vol. I de (11), Pág 204; ver también Vol. II de (11), Pág. 268.

Para $n \geq 2$ y $r > 0$, denotemos con $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ los puntos de R^{n+1} y sea $F: R^{n+1} \times R^{n+1} \rightarrow R$ la forma bilineal simétrica no degenerada definida por

$$(1) \quad F(x,y) = -r^{-2} \cdot x_0 \cdot y_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

Si $H = \{x \in R^{n+1} : x_0 \geq 1 \text{ y } F(x,x) = -r^2\}$, entonces H es una subvariedad de R^{n+1} de dimensión n y difeomorfa a R^n vía la aplicación $\varphi: R^n \rightarrow H$, definida por

$$(2) \quad \varphi(u) = (\sqrt{1 + \|u\|^2}, r^{-1} \cdot u)$$

donde $\| \cdot \|$, denota la norma usual de \mathbb{R}^n . Por simplicidad, si $x \in H$, identificamos al espacio tangente a H en x , con

$$(3) \quad H_x = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : F(x,v) = 0\}$$

La restricción de la forma F a H_x es definida positiva; luego si $\langle v,w \rangle_x = F(v,w)$ para $v,w \in H_x$, entonces \langle , \rangle es una métrica de Riemann. H con dicha métrica, es un espacio hiperbólico de curvatura seccional constante $K = -r^2$.

Representando con $S_x \subset H_x$ a la esfera unitaria respecto a \langle , \rangle_x , si e_0, e_1, \dots, e_n es la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} , resulta $e_i \in S_0 = S_{e_0}$ para $i = 1, \dots, n$ y e_1, \dots, e_n una base ortonormal de $H_0 = H_{e_0}$.

Sea $GL(n+1, \mathbb{R})$ el grupo lineal general de orden $n+1$ e I_{n+1} la identidad de $GL(n+1, \mathbb{R})$; luego si $Q = \begin{pmatrix} -r^{-2} & 0 \\ 0^t & I_n \end{pmatrix}$, donde

$0 \in \mathbb{R}^n$ y 0^t es la traspuesta de 0 , entonces $F(x,y) = x \cdot Q \cdot y^t$. Si $O(r,n) = \{A \in GL(n+1, \mathbb{R}) : A \cdot Q \cdot A^t = Q\}$, el automorfismo de \mathbb{R}^{n+1} definido por $x \rightarrow x \cdot A$ con $A \in O(r,n)$ deja invariante a F ;

es decir, $F(x \cdot A, y \cdot A) = F(x,y)$. Por definición de $O(r,n)$, se obtiene inmediatamente que $A \in O(r,n)$ si y sólo si

$$(4) \quad a^2 - r^2 \cdot y \cdot y^t = 1, \quad a \cdot z - r^2 \cdot y \cdot U^t = 0, \quad U \cdot U^t - r^{-2} \cdot z^t \cdot z = I_n$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & y \\ z^t & U \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $y, z \in \mathbb{R}^n$.

Es bien conocido, que si $G = \{A \in O(r,n) : a \geq 1 \text{ y } \det A = 1\}$, entonces G es la componente conexa de $O(r,n)$ que contiene a I_{n+1} ; y dado que $x \cdot A \in H$ si $x \in H$ y $A \in G$, el grupo G actúa sobre H como un grupo de isometrías de H .

Sea $SO(n) = \{B \in GL(n, \mathbb{R}) : B \cdot B^t = I_n, \text{ y } \det B = 1\}$; luego por

$$(4) \text{ el grupo } G_0 = \{A \in GL(n+1, \mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0^t & B \end{pmatrix} \text{ con } B \in SO(n)\},$$

está contenido en G . Para $t \in \mathbb{R}$, sea $A(t)$ definido por

$$(5) \quad A(t) = \begin{pmatrix} \text{Ch}(r.t) & r^{-1}.\text{Sh}(r.t) & 0 & \dots & 0 \\ r.\text{Sh}(r.t) & \text{Ch}(r.t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & & & I_{n-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

luego por (4), $A(t) \in G$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Utilizando la carta (H, φ^{-1}) , un breve cálculo muestra, que la curva $c_0(t) = e_0.A(t) = e_0.\text{Ch}(r.t) + e_1.r^{-1}.\text{Sh}(r.t)$ es una geodésica de H ; que por construcción satisface $c_0(0) = e_0$ y $\dot{c}_0(0) = e_1$.

A efecto de obtener la expresión de la función exponencial $\exp_0 = \exp_{e_0}$, sea $v \in S_0$ y $A \in G_0$ tal que $e_1.A = v$; luego la curva $c_v(t) = c_0(t).A$ es una geodésica que verifica $c_v(0) = e_0$, $\dot{c}_v(0) = v$ y en consecuencia para todo $t \in \mathbb{R}$ y $v \in S_0$ resulta,

$$(6) \quad \exp_0(t.v) = e_0.\text{Ch}(r.t) + v.r^{-1}.\text{Sh}(r.t)$$

Como $\exp_0: H_0 \rightarrow H$ es una biyección y $\exp_0(t.v) = e_0.A(t).A$ con $A \in G_0$, entonces G actúa transitivamente sobre H .

Fijado un punto $p \in H$ y considerando isometrías $x \rightarrow x.A$ con $e_0.A = p$ y $A \in G$, de (6) se obtiene,

$$(7) \quad \exp_p(t.v) = p.\text{Ch}(r.t) + v.r^{-1}.\text{Sh}(r.t)$$

para todo $v \in S_p$. Si d denota a la función distancia inducida

por la métrica $(,)$, sea $q \in H$, $d(p, q) = t > 0$ y

$w = t^{-1}.\exp_p^{-1}(q) \in S_p$; luego $c_w(t) = \exp_p(t.w) = q$. Como por

(2) es $F(p, w) = 0$ y además es $F(p, p) = -r^{-2}$, de (7) se obtiene,

$$(8) \quad F(p, q) = -r^{-2}.\text{Ch}(r.t)$$

En consecuencia, $-r^2 F(p, q) > 1$ si $p \neq q$ y por (8) resulta,

$$(9) \quad d(p, q) = r^{-1}.\text{Arg Ch}(-r^2.F(p, q))$$

para $p, q \in H$.

Sea ahora $q \in H$, $t > 0$ y $w \in S_p$ como antes; luego si $v \in S_p$ es arbitrario, $-r^2 \cdot F(p+r^{-1} \cdot v, q) = -r^2 \cdot F(p+r^{-1} \cdot v, c_w(t)) =$
 $= Ch(r \cdot t) - F(v, w) \cdot Sh(r \cdot t)$.

Siendo $F(v, w) = \langle v, w \rangle$ y $v, w \in S_p$, entonces $|F(v, w)| \leq 1$ y por lo tanto,

$$(10) \quad e^{-r \cdot t} \leq -r^2 \cdot F(p+r^{-1} \cdot v, q) \leq e^{r \cdot t}$$

con $t = d(p, q)$; en particular, si $p = q$, vale la igualdad.

Nota:

En lo que sigue, utilizaremos la notación $\text{Exp}(y) = e^y$ ($y \in \mathbb{R}$)

Para $v \in S_p$, sea b_v la función de Busemann determinada por v ;

luego $b_v(q) = \lim_{s \rightarrow +\infty} (s - d(q, c_v(s)))$ o equivalentemente,

$$\text{Exp}(-r \cdot b_v(q)) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \text{Exp}(r \cdot d(q, c_v(s)) - r \cdot s)$$

Si $f_s(q) = -r^2 \cdot \text{Exp}(-r \cdot s) \cdot F(c_v(s), q)$, entonces por (9) resulta

$$\text{Exp}(-r \cdot b_v(q)) = \lim_{s \rightarrow +\infty} (f_s(q) + \sqrt{f_s^2(q) - \text{Exp}(-2 \cdot r \cdot s)}).$$

Aplicando (7) se obtiene,

$$f_s(q) = -r^2 \cdot \text{Exp}(-r \cdot s) \cdot (F(p, q) \cdot Ch(r \cdot s) + r^{-1} \cdot F(v, q) \cdot Sh(r \cdot s));$$

luego $\lim_{s \rightarrow +\infty} f_s(q) = -\frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot F(p+r^{-1} \cdot v, q)$. Dado que por (10) es

$\lim_{s \rightarrow +\infty} f_s(q) > 0$, entonces

$$(11) \quad \text{Exp}(-r \cdot b_v(q)) = -r^2 \cdot F(p+r^{-1} \cdot v, q)$$

o equivalentemente

$$(12) \quad b_v(q) = r^{-1} \cdot \ln(-r^{-2} \cdot F^{-1}(p+r^{-1} \cdot v, q))$$

Para calcular $\text{grad } b_v|_q$, sea $w \in H_q$ y $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow H$ una curva diferenciable que satisface $c(0) = q$ y $\dot{c}(0) = w$; luego

$$\langle \text{grad } b_v|_q, w \rangle = (b_v)_*(w) = \frac{d}{dt} (b_v \circ c)|_0$$

Calculando la derivada de la función $t \rightarrow b_v \circ c(t)$ en $t = 0$, de

(11) se obtiene,

$$(13) \quad \langle \text{grad } b_v|_q, w \rangle = r \cdot \text{Exp}(r \cdot b_v(q)) \cdot F(p+r^{-1} \cdot v, w)$$

Por otro lado, sea $X(q) = \text{Exp}(r.b_v(q)).(p+r^{-1}.v)-q$; luego de (11) se deduce inmediatamente, que $F(X(q),q) = 0$; luego $X(q) \in H_q$.

La igualdad (13) implica que $\langle \text{grad } b_v|_q, w \rangle = \langle r.X(q), w \rangle$ para todo $w \in H_q$ y puesto que \langle , \rangle es no degenerada, debe ser $\text{grad } b_v|_q = r.X(q)$; es decir,

$$(14) \quad \text{grad } b_v|_q = r.(\text{Exp}(r.b_v(q)).(p+r^{-1}.v)-q)$$

Si M es otro modelo de espacio hiperbólico con curvatura seccional constante $K = -r^2$, sea $f:M \rightarrow H$ una isometría y d' la función distancia de M . Para $v \in M_p$ con $|v| = 1$, denotemos con b'_v a la función de Busemann determinada por v ; luego por ser $d'(p,q) = d(f(p),f(q))$ para todo $p,q \in M$, se obtiene

$$(15) \quad b'_v(q) = b_u(f(q))$$

$$(16) \quad \text{grad } b'_v|_q = (f^{-1})_* (\text{grad } b_u|_{f(q)})$$

donde $u = f_*(v)$.

Supongamos $n \geq 3$ y para $p \in H$ y $v \in S_p$, sea $v^\perp \subset H_p$ el subespacio ortogonal a v y $\Sigma_{p,v}$ la hipersuperficie de H definida por $\Sigma_{p,v} = \exp_p(v^\perp)$; luego las hipersuperficies $\Sigma_{p,v}$ son espacios hiperbólicos de curvatura seccional constante $K = -r^2$, y se obtienen de $\Sigma = \Sigma_{e_0, e_1}$ a través de isometrías de H .

En efecto, sea $A \in G$ tal que $e_0.A = p$; luego por ser $w = v.A^{-1} \in S_0$, existe un $D \in G_0$ con $e_1.D = w$; una simple verificación muestra que la isometría $g:H \rightarrow H$ definida por $g(x) = x.D.A$, satisface $g(\Sigma) = \Sigma_{p,v}$. Por otro lado, el espacio tangente a Σ en e_0 coincide con $e_1^\perp \subset H_0$ y como las curvas $t \rightarrow e_0.Ch(r.t) + v.r^{-1}.Sh(r.t)$ con $v \in e_1^\perp$ y $|v| = 1$ son geodésicas de Σ , entonces Σ es completo y además conexo y simplemente conexo por ser difeomorfo a R^{n-1} . Como los puntos $x \in \Sigma$ satisfacen $x_1 = 0$ si $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$,

entonces $F(e_1, x) = 0$ y por lo tanto, $e_1 \in H_x$. Además, la misma ecuación implica que $\langle e_1, v \rangle = F(e_1, v) = 0$ si $v \in \Sigma_x$; en consecuencia, $e_1 \in \Sigma_x^\perp \subset H_x$. Definiendo $N(x) = e_1$ para $x \in \Sigma$, N es un campo (constante) y normal a Σ con $|N(x)| = 1$; luego la segunda forma fundamental ℓ_N de Σ respecto a N es nulo. Como $\ell_N \equiv 0$, las geodésicas de Σ son geodésicas de H y en virtud de (14) de la sección anterior, Σ tiene curvatura constante $K = -r^2$. Si M es un espacio hiperbólico de dimensión $n \geq 3$ y curvatura seccional constante $K = -r^2$, llamaremos hiperplano a toda hiper superficie $T \subset M$ de la forma $T = \exp_p(v^1)$ con $v \in M_p$ y $|v| = 1$. Por ser M isométrico a H , los hiperplanos de M se transforman isométricamente en hiperplanos de H luego, son espacios hiperbólicos de curvatura seccional constante $K = -r^2$.

Cabe entonces preguntarse, si la intersección de una horoesfera de M con un hiperplano T , es una horoesfera de T , si dicha intersección es no vacía. El siguiente resultado muestra, que para que ello ocurra, el campo normal a la horoesfera a lo largo de T debe ser tangente a T .

Teorema 2.1.

Sea M un espacio hiperbólico de dimensión $n \geq 3$, con curvatura seccional constante $K = -r^2$ y $T \subset M$ un hiperplano. Si $p \in T$, sea $v \in M_p$ con $|v| = 1$ y b_v la función de Busemann determinada por v ; denotando con $L = b_v^{-1}(0)$ se tiene:

$L' = L \cap T$ es una horoesfera de T si y sólo si $v \in T_p$.

Demostración

Primera reducción: Como M es isométrico a H y los hiperplanos de M se transforman isométricamente en hiperplanos de H y además las horoesferas de M se transforman en virtud de (15) en horoesferas de H , es suficiente considerar el caso $M = H$.

Segunda reducci3n: Como los hiperplanos de H se transforman v3a isometr3as de H en el hiperplano Σ , es suficiente considerar el caso $T = \Sigma$.

Supongamos $v \in \Sigma_p$ y denotemos con $a_v: \Sigma \rightarrow R$ a la funci3n de Busemann correspondiente a Σ . Si d' denota la funci3n distancia en Σ , resulta $d'(x,y) = d(x,y)$ para todo $x,y \in \Sigma$; luego por definici3n de a_v y b_v se deduce inmediatamente, que $a_v = b_v|_{\Sigma}$. Siendo $a_v^{-1}(0) = b_v^{-1}(0) \cap \Sigma = L'$, entonces L' es una horoesfera de T .

Rec3procamente, si L' es una horoesfera de Σ , la misma est3 determinada por una funci3n de Busemann $a_w: \Sigma \rightarrow R$, con $w \in \Sigma_p$ y $|w| = 1$; es decir, $L' = a_w^{-1}(0)$.

Como $w \in \Sigma_p$, por lo anterior es $a_w = b_w|_{\Sigma}$ y en consecuencia, $b_w^{-1}(0) \cap \Sigma = a_w^{-1}(0) \cap \Sigma$. Debido a (12) y la igualdad anterior, $x \in L'$ si y s3lo si $F(p+r^{-1} \cdot w, x) = F(p+r^{-1} \cdot v, x) = -r^{-2}$ y $x \in \Sigma$; luego para todo $x \in L'$ se verifica,

$$(17) \quad F(v-w, x) = 0$$

Por ser $L' = a_w^{-1}(0)$, es $w \perp L'_p$ en Σ_p ; luego si $x \rightarrow N(x) = e_1$ es el campo normal a Σ , resulta $H_p = L'_p \oplus (w) \oplus (N(p))$, donde la descomposici3n es ortogonal y (u) denota al subespacio generado por $u \in H_p$. Como $v \perp L'_p$ y $L'_p \subset L_p$, entonces $v = a \cdot w + b \cdot N(p)$ con $a^2 + b^2 = 1$; siendo $F(N(p), x) = F(e_1, x) = 0$ si $x \in L'$, por (17) obtenemos

$$(18) \quad (a-1) \cdot F(w, x) = 0$$

para todo $x \in L'$. Si $a = 1$, es $v = w$ y el teorema queda probado. Concluimos la demostraci3n, mostrando que la condici3n $a \neq 1$, conduce a un absurdo. Suponiendo $a \neq 1$, de (18) resulta $w \in H_x$ y adem3s $w \perp L'_x$. Como $w \in \Sigma_p$, entonces $w = (w_0, w_1, \dots, w_n)$ con $w_1 = 0$; luego $\langle N(x), w \rangle = F(e_1, w) = 0$ y por consiguiente $w \in \Sigma_x$. En consecuencia, $\Sigma_x = L'_x \oplus (w)$ si $x \in L'$.

Por otro lado, debido a (14), para $x \in L'$ se cumple $\text{grad } b_w|_x = w+r.(p-x)$. Siendo $F(e_1,p) = F(e_1,x) = 0$ pues $p,x \in \Sigma$, entonces $\langle \text{grad } b_w|_x, N(x) \rangle = F(w+r(p-x), e_1) = 0$; luego $\text{grad } b_w|_x \in \Sigma_x$. Como además es $\text{grad } b_w|_x \perp L'_x$ por ser lo a L_x , se obtiene que $\Sigma_x = L'_x \oplus (\text{grad } b_w|_x)$ si $x \in L'$. Dado que las dos descomposiciones de Σ_x son ortogonales, debe ser $w = h(x).\text{grad } b_w|_x$ con $h(x) = \langle w, \text{grad } b_w|_x \rangle$. Siendo $|w| = |\text{grad } b_w|_x| = 1$ y $h(p) = 1$, por la continuidad de la función $x \rightarrow h(x)$ ($x \in L'$), resulta $h \equiv 1$ y por lo tanto, $w = w+r(p-x)$. En consecuencia, por ser $r > 0$, L' se reduce al punto p , lo cual es absurdo. #

2.3. Densidad de horoesferas en espacios hiperbólicos

En la presente sección, M denotará un espacio hiperbólico de dimensión $n \geq 2$ y curvatura seccional constante $K = -r^2$. Por (12), (14), (15) y (16) de la sección anterior, las funciones de transición $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ de la proposición 1.8 son de clase C^∞ para todo $p, q \in M$; luego el conjunto de horoesferas $\mathcal{N}(M)$ admite una estructura diferenciable natural de clase C^∞ . Para $v \in S_p$, identificaremos por simplicidad al espacio tangente $(S_p)_v$ con el subespacio de M_p ortogonal a v . Fijada una orientación en M , orientamos S_p de modo que una base ordenada w_1, \dots, w_{n-1} de $(S_p)_v$ resulte orientada positivamente, si v, w_1, \dots, w_{n-1} lo es de M_p . Denotando con dS_p al elemento de volumen de S_p correspondiente a dicha orientación e inducida por el producto escalar de M_p , se tiene:

Proposición 3.1.

Para $p, q \in M$, sea $J_{q,p}$ el jacobiano de la función de transición $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p : R \times S_p \rightarrow R \times S_q$; es decir,
 $(\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p)^*(dt \wedge dS_p) = J_{q,p} dt \wedge dS_p$

Entonces para todo $(t, v) \in R \times S_p$ se verifica,

$$J_{q,p} (t, v) = \text{Exp}(r.(n-1).b_v(q)).$$

Antes de pasar a la demostración de la proposición, daremos algunas consecuencias triviales de la misma. Sea ω_p la n -forma sobre $R \times S_p$, definida por $\omega_p = \text{Exp}(r.(n-1).t) dt \wedge dS_p$; luego por ser $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p (t, v) = (t - b_v(q), \text{grad } b_v|_q)$, la proposición es equivalente a la siguiente:

Proposición 3.2.

Para $p \in M$, sea $dN_p = (\varphi_p^{-1})^* (\omega_p)$; entonces $dN_p = dN_q$ cualquiera sea $q \in M$. #

Denotaremos en éste caso, con dN a cualquiera de dichas n -formas definidas sobre $N(M)$.

Orientando R^n de manera usual, orientemos a H vía el difeomorfismo φ definido según (2) de la sección anterior, y denotemos con dV al elemento de volumen de H , correspondiente a la orientación fijada.

Si $f: M \rightarrow H$ es una isometría, sea $\tilde{f}: N(M) \rightarrow N(H)$ definida por $\tilde{f}([v]) = [f_*(v)]$; la aplicación está bien definida debido a (15) de la sección anterior y es además una biyección.

Para $p \in M$ y $p' = f(p)$, se obtiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 N(M) & \xrightarrow{\tilde{f}} & N(H) \\
 \varphi_p \uparrow & & \uparrow \varphi_{p'} \\
 R \times S_p & \xrightarrow{\tilde{f}_{p',p}} & R \times S_{p'} \\
 (t, v) & \longrightarrow & (t, f_*(v))
 \end{array}
 \quad \text{con } \tilde{f}_{p',p} = \varphi_{p'}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi_p$$

Siendo $\tilde{f}_{p',p}$ de clase C^∞ , \tilde{f} también lo es; y puesto que $f^{-1}: H \rightarrow M$ es una isometría, \tilde{f} resulta un difeomorfismo.

Como $(\tilde{f}_{p',p})^*(dt \wedge dS_{p'}) = \epsilon \cdot dt \wedge dS_p$, donde $\epsilon = \pm 1$, de acuerdo a que f preserve o no las orientaciones fijadas, entonces $(\tilde{f}_{p',p})^*(\omega_{p'}) = \epsilon \cdot \omega_p$. Por la igualdad anterior y el diagrama, obtenemos

$$(1) \quad (\tilde{f})^*(dN_{p'}) = \epsilon \cdot dN_p \quad \text{si } p' = f(p).$$

Supongamos que la proposición 3.2 o equivalentemente la (3.1) sea válida para H .

Por (1) se deduce inmediatamente, que la proposición 3.2 es válida para M y por lo tanto la (3.1) también. Además, si en el diagrama reemplazamos H por M y f es una isometría de M , entonces $(\tilde{f})^*(dN_q) = \epsilon \cdot dN_p$ si $q = f(p)$.

Siendo $dN = dN_p = dN_q$, resulta $(\tilde{f})^*(dN) = \epsilon \cdot dN$.

La última igualdad se expresa diciendo, que la n -forma dN es invariante (en valor absoluto) por el grupo de isometrías de M .

Dado que toda horoesfera de M se transforma en otra vía isometrías, dN es la única (salvo factor constante) n -forma sobre $N(M)$ invariante (en valor absoluto) por el grupo de isometrías de M .

La n -forma dN se denomina la densidad de horoesferas de M y debido a la proposición 3.2, la expresión de dN sobre cualquier modelo $R \times S_p$ de $N(M)$, está dado por $\text{Exp}(r \cdot (r-1) \cdot t) dt \wedge dS_p$. El significado del número $t \in R$ es claro en virtud de la definición de φ_p (ver figura 4 de la sección 2.1). En todos los casos, $|t|$ es la distancia de la horoesfera $H_{v(t)}$ a p ($v \in S_p$). Si $t \leq 0$, p se encuentra en el horodisco $B_{v(t)}$ y por lo tanto en la región convexa determinada por $H_{v(t)}$; si $t > 0$, p se encuentra en la región cóncava determinada por $H_{v(t)}$.

En consecuencia, la densidad de horoesferas coincide con la obtenida por Santaló en (16) y (17) para $n = 2, 3$ y $r = 1$.

Si $\psi: \mathcal{K}(M) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_{>0} \cup \{+\infty\}$ es una función \mathcal{N} -medible; es decir, $\psi \circ \varphi_p: \mathbb{R} \times S_p \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ es medible Lebesgue, la integral positiva I definida por

$$I(\psi) = \int_{\mathcal{K}(M)} \psi \cdot d\mathcal{K} = \int_{\mathbb{R} \times S_p} \psi \circ \varphi_p \cdot \text{Exp}(r \cdot (n-1) \cdot t) dt \wedge dS_p$$

es independiente del punto p elegido e invariante por el grupo de isometrías de M que actúa sobre $\mathcal{K}(M)$.

Demostración de la proposición 3.1.

Por lo visto anteriormente, es suficiente considerar $M = H$.

Sean $p, q \in H$ dos puntos fijos y $h: S_p \rightarrow S_q$ la aplicación $h(v) = \text{grad } b_v|_q$; luego $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p(t, v) = (t - b_v(q), h(v))$. Como la primera componente de $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ depende linealmente de t y las $n-1$ restantes solamente de v , resulta $(\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p)^*(dt \wedge dS_q) = dt \wedge h^*(dS_q)$; y por lo tanto,

$$(2) \quad h^*(dS_q) = f_{q,p} dS_p$$

con $J_{q,p}(t, v) = f_{q,p}(v)$ para todo $(t, v) \in \mathbb{R} \times S_p$.

Sea $w \in (S_p)_v$ y $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_p$ una curva diferenciable que satisface $c(0) = v$ y $\dot{c}(0) = w$. Considerando las expresiones (11) y (14) de la sección anterior, para $\text{grad } b_{c(t)}|_q$ y $b_{c(t)}(q)$ con $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ se obtiene,

$$(3) \quad h_{\#}(w) = \text{Exp}(r \cdot b_v(q)) \cdot (w + F(w, q) \cdot (r \cdot h(v) + r^2 \cdot q))$$

pues $h_{\#}(w) = \frac{d}{dt} (h \circ c)|_{t=0}$

Usando el hecho que por ser $w \in (S_p)_v$ se verifica $F(w, p) = F(w, v) = 0$, por la igualdad anterior (3) y $w_1, w_2 \in (S_p)_v$ resulta,

$$(4) \quad F(h_{\#}(w_1), h_{\#}(w_2)) = \text{Exp}(2 \cdot r \cdot b_v(q)) \cdot F(w_1, w_2)$$

La igualdad muestra, que si $w_1 \perp w_2$ entonces $h_{\#}(w_1) \perp h_{\#}(w_2)$ y además, $|h_{\#}(w)| = \text{Exp}(r \cdot b_v(q)) \cdot |w|$ para todo $w \in (S_p)_v$.

Sea w_1, \dots, w_{n-1} una base ortonormal de $(S_p)_v$ orientada positivamente; luego por (2) se tiene $J_{q,p}(t,v) = f_{q,p}(v) = h^*(dS_q)|_v(w_1, \dots, w_{n-1})$ o equivalentemente si $v_i = \text{Exp}(-r \cdot b_v(q)) \cdot h_*(w_i)$,

$$(5) \quad J_{q,p}(t,v) = \text{Exp}(r \cdot (n-1) \cdot b_v(q)) \cdot dS_q|_{h(v)}(v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Para $p, v, w_1, \dots, w_{n-1}$ fijos, denotemos con

$F(q) = dS_q|_{h(v)}(v_1, \dots, v_{n-1})$; luego por ser v_1, \dots, v_{n-1} una base ortonormal de $(S_q)_{h(v)}$ se verifica $F(q) = \pm 1$. Por otro lado, los vectores $h(v) = \text{grad } b_v|_q, v_1, \dots, v_{n-1}$ dependen continuamente de q y dado que $F(q) = dV|_q(h(v), v_1, \dots, v_{n-1})$, resulta F continua. Como $\text{grad } b_v|_p = v$ y $b_v(p) = 0$, se tiene $F(p) = 1$; luego $F \equiv 1$ y la proposición queda demostrada. #

3. CONJUNTOS CONVEXOS

Como en el capítulo anterior, las curvas geodésicas se denominarán abreviadamente geodésicas.

3.1. Conjuntos convexos en superficies de Hadamard

Por definición, una superficie de Hadamard es una variedad de Hadamard M de dimensión $n = 2$, (ver definición en la sección 1.6).

Sea d la distancia inducida por la métrica de M ; luego por el lema 6.1 de la sección 1.6, para todo $p \in M$, la función $q \rightarrow d^2(p, q)$ es estrictamente convexa. En consecuencia, los círculos abiertos o cerrados con centro en p y radio $s > 0$, que están definidos por $B(p, s) = d_p^{-1}([0, s))$ y $\bar{B}(p, s) = d_p^{-1}([0, s])$ son convexos. La restricción de una geodésica $c_v: \mathbb{R} \rightarrow M$ con $v \in S_p$ al intervalo $[0, +\infty)$, se denominará un rayo y se denotará con $r_v = c_v [0, +\infty)$. La restricción de c_v a un intervalo $[0, s]$ se llamará un segmento y se denotará con $\bar{pq} = c_v [0, s]$ si $q = c_v(s)$.

Lema 1.1.

Sea D un convexo (no vacío), abierto y acotado en M ; entonces todo rayo que parte de un punto de D , interseca al borde ∂D una sola vez.

Demostración

Sea $p \in D$ y $v \in S_p$; luego el rayo r_v interseca a ∂D en algún punto q , por ser D acotado. Supongamos que r_v contenga otro punto $\bar{q} \neq q$ perteneciente al borde y sin pérdida de generalidad, sea $r = d(p, \bar{q}) < d(p, q) = s$.

Tomando $\epsilon < s - r$, el círculo $B = B(q, \epsilon)$ no contiene a \bar{q} y contiene (pues $q \in \partial D$) una sucesión infinita (q_n) de puntos de D que convergen a q . Por otro lado, puesto que si dos geodésicas

tienen dos puntos distintos en común, una se reparametriza en la otra, la geodésica c_v divide a M en dos convexos abiertos y disjuntos que denotaremos con M^+ y M^- . Luego la sucesión (q_n) debe estar contenida en $M^+ \cap D$ o en $M^- \cap D$; pues en caso contrario (ver figura 1), tomando

dos puntos de la sucesión,

sean $q_1 \in M^+$ y $q_2 \in M^-$ se

tendría $\overline{q_1 q_2} \subset D \cap B$ y

$\overline{q_1 q_2} \cap r_v \neq \emptyset$.

Sea z el punto de intersección

del segmento $\overline{q_1 q_2}$ con r_v ; luego

por la convexidad de D se tiene $\overline{pz} \subset D$ y como $\bar{q} \in \overline{pz}$ es $\bar{q} \in D$, lo

que es absurdo por ser D abierto. Supongamos entonces que

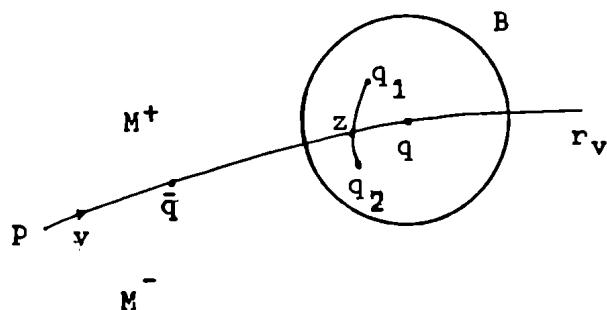
$(q_n) \subset B \cap M^-$ y sea $x \in D$ un punto próximo a p en M^+ , la elección de x es posible debido a que D es abierto. Sea $c = \overline{xq}$ y

$c_n = \overline{xq_n}$ y denotemos con x_n al punto de intersección de c_n con

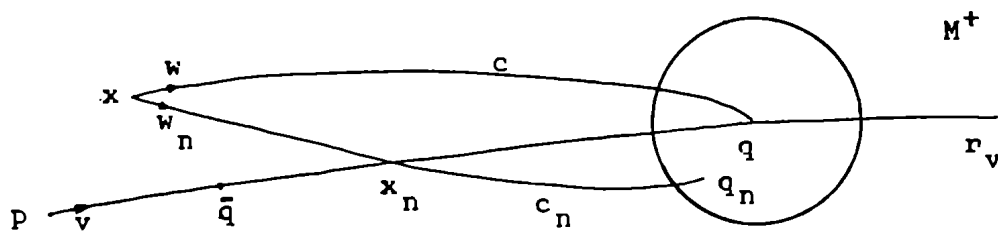
c_v . Si verificamos que para algún $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

la intersección de c_n con c_v se realiza en un punto situado en

r_v y posterior a \bar{q} (ver figura 2), tendremos una contradicción.



(Figura 1)



(Figura 2)

Para ello será suficiente mostrar, que existe una subsucesión

de los x_n que converge a q . A tal efecto, sea $\ell = d(x, q)$,

$\ell_n = d(x, q_n)$, $t_n = d(x, x_n)$, $s_n = d(x_n, q_n)$, $w = \ell^{-1} \cdot \exp_x^{-1}(q)$

y $w_n = \ell_n^{-1} \cdot \exp_x^{-1}(q_n)$.

Los vectores w y $w_n \in S_x$ son por construcción, los vectores

tangentes a los segmentos c y c_n respectivamente (en x) y dado que q_n converge a q y \exp_x^{-1} es continua, w_n converge a w en S_x . Siendo c_n minimal es $\ell_n = t_n + s_n > t_n$; luego la sucesión x_n está acotada pues ℓ_n converge a ℓ . Tomando una subsucesión de los x_n si fuera necesario, supongamos que x_n converge a un punto " y " que necesariamente pertenece a c_v . Si mostramos que $y \in c_w$, entonces debe ser $y = q$, pues las geodésicas c_w y c_v no pueden intersecarse en más de un punto ya que $x \notin c_v$. Como $t_n \rightarrow t_0 = d(x, y)$, entonces $t_n \cdot w_n \rightarrow t_0 \cdot w$ en M_x ; luego $\exp_x(t_n \cdot w_n) \rightarrow \exp_x(t_0 \cdot w)$ en M . Siendo $x_n = \exp_x(t_n \cdot w_n)$ resulta $y = \exp_x(t_0 \cdot w) \in c_w$. #

Corolario 1.2.

Sea D como en el lema; entonces $\bar{D} = D \cup \partial D$ es convexo.

Demostración

Es inmediato por ser $\exp_p : M_p \rightarrow M$ un homeomorfismo cualquiera sea $p \in M$.

Corolario 1.3.

Sea D como en el lema; entonces ∂D es homeomorfo a la circunferencia.

Demostración

Para $p \in D$ y $v \in S_p$, sea $t_v = \inf\{t > 0 : r_v(t) \notin D\}$; luego $r_v(t_v) \in \partial D$ y $r_v([0, t_v)) \subset D$. Si $f : S_p \rightarrow \partial D$ se define por $f(v) = \exp_p(t_v \cdot v) = r_v(t_v)$, por la suryectividad de \exp_p y el lema anterior resulta f suryectiva y además inyectiva por serlo \exp_p .

Sea $q \in \partial D$ y $v \in S_p$ el único que satisface $f(v) = q$; luego $t_v = |\exp_p^{-1}(q)| = d(p, q)$. En consecuencia, si consideramos la aplicación diferenciable $g : M - \{p\} \rightarrow S_p$ definida por

$$(1) \quad g(x) = \frac{1}{d(p, x)} \cdot \exp_p^{-1}(x)$$

entonces $f^{-1} = g|_{\partial D}$ y por lo tanto f^{-1} es continua. Siendo ∂D y S_p compactos, f es un homeomorfismo. #

Si f es de clase C^1 , entonces f es automáticamente un difeomorfismo de clase C^1 , pues f^{-1} es la restricción de una función diferenciable.

Definición

Sea D un convexo (no vacío) abierto y acotado en M .

Diremos que el ∂D es de clase C^1 , si es la imagen de una curva $c:[a,b] \rightarrow M$ cerrada y simple de clase C^1 , con $\dot{c}(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$.

Proposición 1.4.

Sea D como en la definición anterior con ∂D de clase C^1 ; entonces para todo $p \in D$, el homeomorfismo $f:S_p \rightarrow \partial D$ es de clase C^1 .

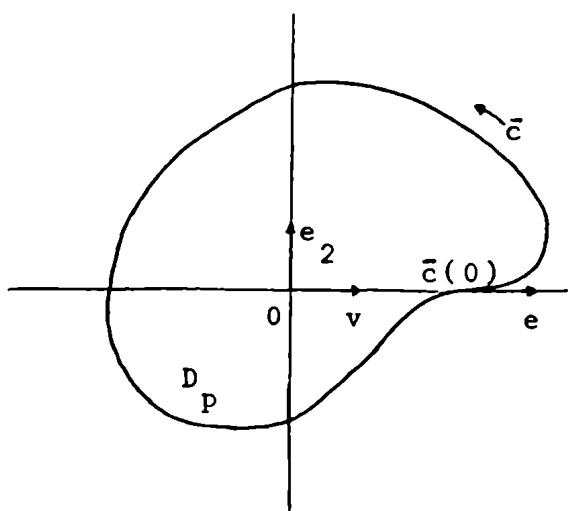
Demostración

Por la definición anterior, la curva c que describe al borde, puede considerarse parametrizada por su longitud de arco con dominio $[0,L]$, siendo L la longitud del borde. Para $p \in D$ fijo y $s \in [0,L]$, sea $\bar{c}(s) = \exp_p^{-1}(c(s))$ y $a(s) = d(p,c(s)) = |\bar{c}(s)|$; luego la función $a:[0,L] \rightarrow R^+$ es de clase C^1 y la curva $\bar{c}:[0,L] \rightarrow M_p$ cerrada y simple de clase C^1 , por serlo c .

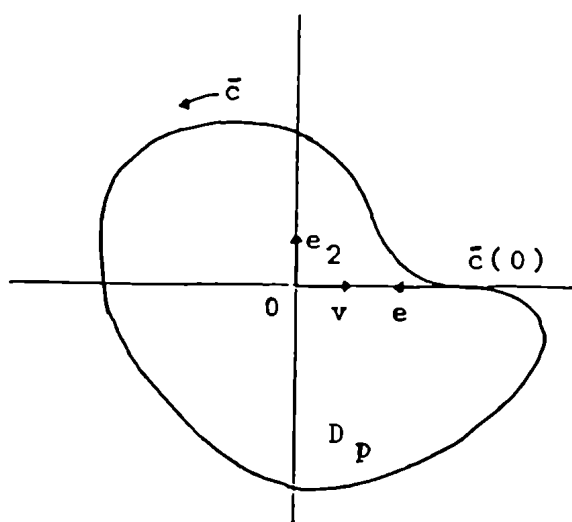
Por otro lado, el conjunto abierto y acotado $D_p = \exp_p^{-1}(D)$ de M_p , contiene en su interior al origen de M_p (pues $0 = \exp_p^{-1}(p)$) y su borde está descrito por \bar{c} . Como los rayos que parten de p , se levantan a M_p (vía \exp_p^{-1}) en semirectas que parten del origen, se tiene en virtud del lema anterior, que toda semirecta que parte del origen interseca a \bar{c} una sola vez. En consecuencia, si $e_1 = a^{-1}(0) \cdot \bar{c}(0)$, e_2 es un vector unitario y ortogonal a e_1 y orientamos M_p vía la base ortonormal e_1, e_2 , \bar{c} se expresa

en la forma $\bar{c}(s) = a(s) \cdot (\cos \theta(s)e_1 + \sin \theta(s)e_2)$ con $\theta: [0, L] \rightarrow [0, 2\pi]$ biyectiva de clase C^1 y $\theta(0) = 0, \theta(L) = 2\pi$. Poniendo $\alpha = \theta(s)$, $b(\alpha) = a(\theta^{-1}(\alpha))$ y $g(\alpha) = c(\theta^{-1}(\alpha))$, resulta $g(\alpha) = \exp_p(b(\alpha) \cdot (\cos \alpha \cdot e_1 + \sin \alpha \cdot e_2))$ y notando que $g(\alpha) = f(v)$ si $v = \cos \alpha \cdot e_1 + \sin \alpha \cdot e_2$, la proposición quedará probada, si verificamos que θ^{-1} es de clase C^1 o equivalentemente $\dot{\theta}(s) \neq 0$ para todo $s \in [0, L]$.

Supongamos que $\dot{\theta}(s) = 0$ para algún $s \in [0, L]$; luego reparametrizando c con un traslación si fuera necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}(L) = 0$. Si $J_{\bar{c}(s)}: M_p \rightarrow (M_p)_{\bar{c}(s)}$ es el isomorfismo canónico, por ser $c(s) = \exp_p(\bar{c}(s))$, resulta $\dot{c}(s) = (\exp_p)_* (J_{\bar{c}(s)}(\dot{\bar{c}}(s)))$. Sea $\ell = a(0)$, $\dot{\ell} = \dot{a}(0)$ y $v = e_1$; luego $\bar{c}(0) = \ell \cdot v$, $\dot{\bar{c}}(0) = \dot{\ell} \cdot v$ y por lo anterior, $\dot{c}(0) = \dot{\ell} \cdot r_v(\ell)$. La igualdad muestra, que la intersección del rayo r_v con el borde en $q = c(0)$ no es transversal y dado que r_v y c están parametrizados por su longitud de arco, debe ser $\dot{\ell} = \pm 1$. Como las semirectas que parten del origen intersecan a \bar{c} una sola vez y $\dot{\bar{c}}(0) = \pm v$, el único caso posible es que el punto $\bar{c}(0)$ actúe como un punto de inflexión de \bar{c} ; (ver figura 3 y 4), donde $e = \dot{\bar{c}}(0)$.



(Figura 3, caso $\dot{\ell} = 1$)



(Figura 4, caso $\dot{\ell} = -1$)

Supongamos el caso $\dot{\ell} = 1$, ya que el otro es completamente análogo y denotemos (x,y) al punto $(x,y) = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$.

Sea $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{c}$ y $\bar{q} = \exp_p((\bar{x}, \bar{y}))$; luego por la inyectividad de \exp_p , $\bar{q} \notin c_v$, Denotando con $h: [0,r] \rightarrow M$ al único segmento geodésico que satisface $h(0) = q = c(0)$ y $h(r) = \bar{q}$, donde $r = d(q, \bar{q})$; la curva $\bar{h}(t) = \exp_p^{-1}(h(t)) = (x(t), y(t))$ verifica, $\bar{h}(0) = \bar{c}(0) = \ell \cdot v$ y $\bar{h}(r) = (\bar{x}, \bar{y})$. Por el corolario 1.2, se tiene que $h([0,r]) \subset \bar{D}$ y en consecuencia, el vector inicial tangente $\dot{\bar{h}}(0) = (\dot{x}(0), \dot{y}(0))$ no puede apuntar hacia el semi-espacio $y < 0$, pues $\bar{h}([0,r]) \subset D_p \cup \bar{c}$; luego $\dot{y}(0) \geq 0$. Por elección de (\bar{x}, \bar{y}) , si $\dot{y}(0) > 0$, la curva \bar{h} debe intersectar a la recta $t \rightarrow t \cdot v$ en otro punto distinto de $\ell \cdot v$ (pues \bar{h} es inyectiva) y por lo tanto, el segmento h y la geodésica c_v tienen dos puntos distintos en común; esto es absurdo pues $\bar{q} \notin c_v$.

Si $\dot{y}(0) = 0$, resulta $\dot{\bar{h}}(0) = \dot{x}(0) \cdot v$ y por ser $h(t) = \exp_p(\bar{h}(t))$, obtenemos $\dot{h}(0) = (\exp_p)_* (J_{\bar{h}(0)}(\dot{\bar{h}}(0))) = \dot{x}(0) \cdot c_v(\ell)$. La igualdad muestra, que el segmento h y la geodésica c_v se intersectan tangencialmente en $c_v(\ell) = q$; entonces $\overline{q\bar{q}}$ está contenido en c_v y llegamos al mismo absurdo. Luego, debe ser $\dot{\theta}(s) \neq 0$ para todo $s \in [0,L]$ y f resulta de clase C^1 . #

Los resultados de ésta sección (excepto la proposición), han sido probados con las correspondientes modificaciones, en superficies completas donde puede haber más de un segmento minimal que una a dos puntos (ver, Karcher (10)).

3.2. Una desigualdad relativa al área y al perímetro de conjuntos convexos en superficies de Hadamard.

Sea M una superficie de Hadamard y D un convexo (no vacío) y acotado de M , con borde ∂D de clase C^1 . Fijada una orientación en ∂D , para $p \in D$ (fijo) y $q \in \partial D$, sea $\gamma(q)$ el ángulo que forma la tangente (orientada) al borde en q , con el rayo que parte de p e

interseca a ∂D en q . Por lo visto en la proposición 1.4, los rayos que parten de p , intersecan a ∂D transversalmente; luego $\gamma(q) \in (0, \pi)$. El valor medio del seno de dicho ángulo se define por

$$(1) \quad H(p) = \frac{1}{L} \int_{\partial D} \text{sen } \gamma \cdot d\sigma$$

donde L es la longitud del borde y $d\sigma$ representa el elemento de arco del borde orientado; claramente $H(p)$ no depende de la orientación elegida. Denotaremos con F al área de D y con $d^+(p)$ y $d^-(p)$ a la distancia máxima y mínima de p al borde.

Teorema 2.1.

Con las notaciones introducidas, si la curvatura de Gauss K de M satisface la acotación $-k^2 \leq K \leq -r^2$, para constantes $0 < r \leq k$, se cumple:

i) $2 \cdot \pi \cdot r^{-1} \cdot L^{-1} \cdot \text{Sh}(r \cdot d^-) \leq H \leq 2 \cdot \pi \cdot k^{-1} \cdot L^{-1} \cdot \text{Sh}(k \cdot d^+)$

ii) Sea para $x > 0$ e $y > 0$, $T(x, y) = \text{Coth}x - \text{Sh}^{-1}y$; entonces

$$r \cdot k^{-2} \cdot H \cdot T(r \cdot d^+, r \cdot d^-) \leq \frac{F}{L} \leq k \cdot r^{-2} \cdot H \cdot T(k \cdot d^-, k \cdot d^+)$$

donde $H = H(p)$, $d^+ = d^+(p)$ y $d^- = d^-(p)$

iii) Si $r = k$, las desigualdades de ii) se transforman en igualdades si y sólo si D es un círculo y p es su centro.

Demostración

Fijada una base ortonormal e_1, e_2 de M_p , denotemos con $e(\alpha) = \cos \alpha \cdot e_1 + \text{sen } \alpha \cdot e_2$, $\dot{e}(\alpha) = -\text{sen } \alpha \cdot e_1 + \cos \alpha \cdot e_2$ y consideremos la aplicación $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ definida por $\varphi(t, \alpha) = \exp_p(t \cdot e(\alpha))$. Sea $X(t, \alpha) = \varphi_*(D_1) \Big|_{(t, \alpha)}$, $Y(t, \alpha) = \varphi_*(D_2) \Big|_{(t, \alpha)}$ y $t \rightarrow E(t, \alpha)$ el único campo paralelo a lo largo de $t \rightarrow \varphi(t, \alpha)$ con $E(0, \alpha) = \dot{e}(\alpha)$. Como $t \rightarrow Y(t, \alpha)$ es un campo de Jacobi a lo largo de $t \rightarrow \varphi(t, \alpha)$ que verifica $Y(0, \alpha) = 0$ e $Y'(0, \alpha) = \dot{e}(\alpha)$; entonces $Y(t, \alpha) = a(t, \alpha) \cdot E(t, \alpha)$, donde a satisface la ecuación,

$$(2) \quad \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \Big|_{(t, \alpha)} + K \circ \varphi(t, \alpha) \cdot a(t, \alpha) = 0$$

con $a(0, \alpha) = 0$ y $\left. \frac{\partial a}{\partial t} \right|_{(0, \alpha)} = 1$

Por ser $-k^2 \leq K\varphi(t, \alpha) \leq -r^2$, el teorema de comparación de Sturm proporciona la acotación

$$(3) \quad r^{-1} \cdot \text{Sh}(r \cdot t) \leq a(t, \alpha) \leq k^{-1} \cdot \text{Sh}(k \cdot t) \text{ si } t \geq 0$$

Por otro lado, las proposiciones 1.4 y 1.5 de la sección 2.1 aplicadas al campo de Jacobi $Y(\cdot, \alpha)$, implican

$$(4) \quad r \cdot \text{Coth}(r \cdot t) \leq a^{-1}(t, \alpha) \cdot \left. \frac{\partial a}{\partial t} \right|_{(t, \alpha)} \leq k \cdot \text{Coth}(k \cdot t) \text{ si } t > 0$$

Si $\ell(\alpha)$ es la distancia de p al punto de intersección del rayo $t \rightarrow \varphi(t, \alpha) (t \geq 0)$ con el borde, por definición de d^+ y d^- se tiene además,

$$(5) \quad d^- \leq \ell(\alpha) \leq d^+$$

El borde queda descripto por la curva $c: [0, 2\pi] \rightarrow M$ definida por $c(\alpha) = \varphi(\ell(\alpha), \alpha)$; luego por la proposición 1.4 de la sección anterior, c es de clase C^1 "pues $c(\alpha) = f(e(\alpha))$ ".

Orientando ∂D vía c , para $q = c(\alpha)$, el ángulo $\gamma(q)$ está dado por $\gamma(q) = \angle(X(\ell(\alpha), \alpha), \dot{c}(\alpha))$; pues $X(\ell(\alpha), \alpha)$ es el vector tangente al rayo $t \rightarrow \varphi(t, \alpha) (t \geq 0)$ en $t = \ell(\alpha)$.

Siendo $\dot{c}(\alpha) = \dot{\ell}(\alpha) \cdot X(\ell(\alpha), \alpha) + Y(\ell(\alpha), \alpha)$, con $|X(\ell(\alpha), \alpha)| = 1$, $\langle X, Y \rangle |_{(\ell(\alpha), \alpha)} = 0$ y $|Y(\ell(\alpha), \alpha)| = a(\ell(\alpha), \alpha)$, resulta $\text{sen } \gamma(q) = a(\ell(\alpha), \alpha) \cdot |\dot{c}(\alpha)|^{-1}$. Como $d\sigma = |\dot{c}(\alpha)| \cdot d\alpha$, por (1) obtenemos

$$(6) \quad H = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} a(\ell(\alpha), \alpha) d\alpha.$$

donde

$$(7) \quad L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{\ell}^2(\alpha) + a^2(\ell(\alpha), \alpha)} d\alpha$$

Como para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, la función $t \rightarrow a(t, \alpha) (t \geq 0)$ es creciente "pues $K < 0$ ", las desigualdades de i), resultan trivialmente de (3), (5) y (6).

A efecto de probar las desigualdades de ii), sea ω el elemento de área de M que satisface $\omega|_p(e_1, e_2) = 1$ y $I = \int_D K \cdot \omega$.

Siendo $F = \int_D \omega$ y $-k^2 \leq K \leq -r^2$, entonces

$$(8) \quad -k^2 \cdot F \leq I \leq -r^2 \cdot F$$

Por otro lado, la función φ restringida a $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ define un sistema de coordenadas (polares) en M y $\varphi^*(\omega)|_{(t, \alpha)} =$

$$= a(t, \alpha) dt \wedge d\alpha; \text{ luego } I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\ell(\alpha)} K \circ \varphi(t, \alpha) \cdot a(t, \alpha) dt \right) d\alpha.$$

Por (2) es $I = - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\ell(\alpha)} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \Big|_{(t, \alpha)} dt \right) d\alpha$; e integrando respecto

a "t" y teniendo en cuenta que $\frac{\partial a}{\partial t} \Big|_{(0, \alpha)} = 1$, obtenemos

$$(9) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial a}{\partial t} \Big|_{(\ell(\alpha), \alpha)} d\alpha = 2\pi - I$$

Haciendo notar que $a(\ell(\alpha), \alpha) > 0$ "pues $\ell(\alpha) > 0$ ", la igualdad

anterior es equivalente a $2\pi - I = \int_0^{2\pi} b(\alpha) \cdot a(\ell(\alpha), \alpha) d\alpha$, si

$$b(\alpha) = a^{-1}(\ell(\alpha), \alpha) \cdot \frac{\partial a}{\partial t} \Big|_{(\ell(\alpha), \alpha)}$$

Por el teorema del valor medio, $2\pi - I = b(\bar{\alpha}) \cdot \int_0^{2\pi} a(\ell(\alpha), \alpha) d\alpha$, para algún $\bar{\alpha} \in [0, 2\pi]$; luego por (6) resulta,

$$(10) \quad 2\pi - I = b(\bar{\alpha}) \cdot L \cdot H$$

Debido a (5), es $\text{Coth}(r \cdot d^+) \leq \text{Coth}(r \cdot \ell(\bar{\alpha}))$ y también,

$\text{Coth}(k \cdot \ell(\bar{\alpha})) \leq \text{Coth}(k \cdot d^-)$; con lo cual obtenemos aplicando (3),

$$(11) \quad r \cdot \text{Coth}(r \cdot d^+) \leq b(\bar{\alpha}) \leq k \cdot \text{Coth}(k \cdot d^-)$$

Por ser $H > 0$, la desigualdad anterior es equivalente por (10)

a

$$(12) \quad r \cdot L \cdot H \cdot \text{Coth}(r \cdot d^+) \leq 2\pi - I \leq k \cdot L \cdot H \cdot \text{Coth}(k \cdot d^-)$$

y por (8) se satisface además,

$$(13) \quad 2\pi + r^2.F \leq 2\pi - I \leq 2\pi + k^2.F$$

Por combinación de las dos últimas desigualdades se cumple,

$$(14) \quad r.k^{-2}.H.Coth(r.d^+) - 2\pi.k^{-2}.L^{-1} \leq \frac{F}{L} \leq \\ \leq k.r^{-2}.H.Coth(k.d^-) - 2\pi.r^{-2}.L^{-1}$$

y dado que por las desigualdades de i), es

$$2\pi.L^{-1}.k^{-2} \leq r.k^{-2}.H.Sh^{-1}(r.d^-) \text{ y } 2\pi.L^{-1}.r^{-2} \geq k.r^{-2}.H.Sh^{-1}(k.d^+),$$

por (14) obtenemos las desigualdades de ii).

Supongamos ahora que $r = k$; es decir, M es el plano hiperbólico de curvatura constante $K = -r^2$. Si D es un círculo y p es el centro, la cota inferior y superior de $\frac{F}{L}$ claramente coinciden. Recíprocamente, supongamos que ambas cotas coincidan; luego

$$Coth(r.d^+) - Sh^{-1}(r.d^-) = Coth(r.d^-) - Sh^{-1}(r.d^+).$$

Si para $x > 0$, definimos $f(x) = (1 + Chx).Sh^{-1}x$, la igualdad anterior dice que $f(r.d^+) = f(r.d^-)$. Siendo $f'(x) = -(1 + Chx).Sh^{-2}x$, f es inyectiva en $(0, +\infty)$; luego $d^+ = d^-$ y D resulta un círculo de radio $d^+ = d^-$ con centro en p . #

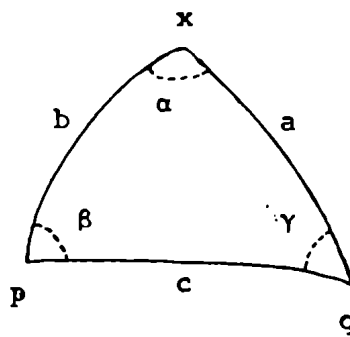
La siguiente propiedad de las superficies de Hadamard, se necesitará en lo que sigue. Sean p, q, x tres puntos de M , que determinan un triángulo geodésico (ver

figura 1), con $d(p, q) = c$, $d(p, x) = b$, $d(q, x) = a$; si $\alpha = \angle_x(p, q)$ es el ángulo interior al triángulo determinado por los segmentos

\overline{xp} y \overline{xq} , entonces

$$(15) \quad c^2 \geq a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \alpha$$

Si β y γ son los restantes ángulos internos, se cumple $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$.



(Figura 1)

Como consecuencia inmediata de (15), si p, q son dos puntos fijos de M y (x_n) con $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de puntos que verifica

$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(p, x_n) = +\infty$, entonces los ángulos $\alpha_n = \angle_{x_n}(p, q)$ convergen a cero.

Definición

Diremos que una sucesión de convexos acotados (D_n) en M se expande al infinito, si se satisface

- i) Existe un $p \in M$ y $n(p) \in \mathbb{N}$, tal que $p \in D_n$ para todo $n \geq n(p)$
- ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(p, \partial D_n) = +\infty$

De la definición resulta, que si (D_n) es una sucesión que se expande al infinito, entonces todo punto $q \in M$ satisface i) y ii).

Para una sucesión (a_n) de números reales positivos, denotamos con $\underline{\lim} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf a_n$ y con $\overline{\lim} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup a_n$.

Proposición 2.2.

Sea (D_n) una sucesión de convexos (no vacíos) abiertos y acotados en M , que se expande al infinito; con ∂D_n de clase C^1 . Para $p, q \in M$, sea $m = \max\{n(p), n(q)\}$, de modo que p y $q \in D_n$ para todo $n \geq m$. Si $H_n(p)$ y $H_n(q)$ son los respectivos promedios definidos según (1) para D_n , entonces $\underline{\lim} H_n(p) = \underline{\lim} H_n(q)$ y $\overline{\lim} H_n(p) = \overline{\lim} H_n(q)$.

Demostración

De hecho, ambos límites están comprendidos en el intervalo $[0, 1]$, pues $H_n(p)$ y $H_n(q) \in (0, 1]$. Para $n \geq m$, pongamos por simplicidad $D_n = D$, $H_n(p) = H(p)$ y $H_n(q) = H(q)$.

Sea $e_1 \in S_p$ el vector inicial tangente al segmento \overline{pq} y $e_2 \in S_p$ un vector ortogonal a e_1 . Denotando con $\bar{e}_2 \in S_q$ al obtenido trasladando e_2 paralelamente a lo largo de \overline{pq} y con $\bar{e}_1 \in S_q$ al vector tangente al segmento \overline{pq} en q , el borde ∂D se parametriza por las curvas $c(\alpha) = \exp_p(\ell(\alpha) \cdot (\cos \alpha \cdot e_1 + \sin \alpha \cdot e_2))$ y

$$\bar{c}(\alpha) = \exp_q(\bar{\ell}(\alpha) \cdot (\cos \alpha \cdot \bar{e}_1 + \sin \alpha \cdot \bar{e}_2)).$$

Para $x \in \partial D$, sea $\gamma(x)$ (respect. $\bar{\gamma}(x)$) el ángulo que forma la tangente al borde orientado, con el rayo geodésico que parte de p (respect. de q) e interseca al borde en x (ver figura 2).

Sea $\epsilon = \bar{\gamma} - \gamma$; luego ϵ es

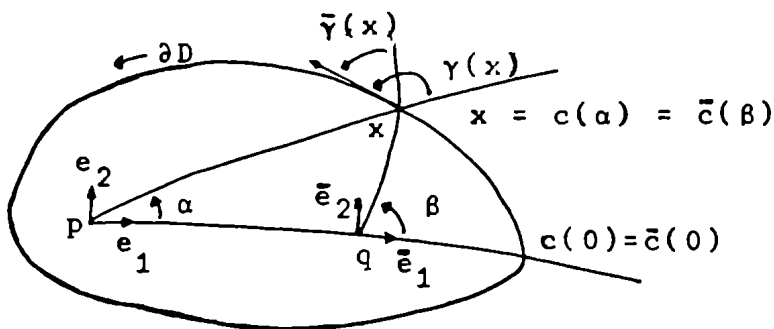
continua por serlo γ y

$\bar{\gamma}$ y $|\epsilon(x)| < \pi$ pues

$\gamma(x), \bar{\gamma}(x) \in (0, \pi)$.

Si $\alpha(x) = |\epsilon(x)|$, entonces

$\alpha(x) = \alpha_x(p, q)$.



(Figura 2)

Denotando con $I_D = \frac{1}{L} \int_{\partial D} \cos \gamma \cdot \sin \epsilon \cdot d\sigma$, por ser $\bar{\gamma} = \gamma + \epsilon$, se obtiene

$$H(q) = \frac{1}{L} \int_{\partial D} \sin \bar{\gamma} \, d\sigma = \frac{1}{L} \int_{\partial D} \sin \gamma \cdot \cos \epsilon \cdot d\sigma + I_D$$

Por ser $\sin \gamma > 0$ y ϵ continua, la primera integral es en virtud del teorema del valor medio y la definición de $H(p)$ igual a

$$\cos \epsilon(x) \cdot \frac{1}{L} \int_{\partial D} \sin \gamma \, d\sigma = \cos \epsilon(x) \cdot H(p) = \cos \alpha(x) \cdot H(p)$$

para algún $x \in \partial D$; luego

$$(16) \quad H(q) = \cos \alpha(x) \cdot H(p) + I_D$$

$$\text{con } |I_D| \leq \max_{x \in \partial D} |\sin \epsilon(x)| = |\sin \epsilon(y)| = |\sin \alpha(y)|$$

para algún $y \in \partial D$.

En términos de la sucesión, por (16) y la acotación hecha se

obtiene $H_n(q) = \cos \alpha_n \cdot H_n(p) + I_{D_n}$, con $|I_{D_n}| \leq |\sin \beta_n|$;

donde $\alpha_n = \alpha_{x_n}(p, q)$ y $\beta_n = \alpha_{y_n}(p, q)$ para algún $x_n, y_n \in \partial D_n$.

La proposición resulta de notar, que $\alpha_n \rightarrow 0$ y $\beta_n \rightarrow 0$, pues

$d(p, \partial D_n) \rightarrow +\infty$. #

De acuerdo a lo anterior, cada sucesión de convexos satisfaciendo las condiciones de la proposición, determina dos números $H^-, H^+ \in [0,1]$, definidos por $H^- = \underline{\lim} H_n(p)$ y $H^+ = \overline{\lim} H_n(p)$, cualquiera sea $p \in M$.

Por las desigualdades ii) del teorema 2.1, se obtiene trivialmente el siguiente:

Corolario 2.3.

Sea (D_n) una sucesión de convexos como en la proposición anterior y supongamos que $-k^2 \leq K \leq -r^2$ para constantes $0 < r \leq k$. Si F_n y L_n denota el área y el perímetro de D_n , entonces

- i) $r.k^{-2}.H^- \leq \underline{\lim} \frac{F_n}{L_n} \leq k.r^{-2}.H^-$
- ii) $r.k^{-2}.H^+ \leq \overline{\lim} \frac{F_n}{L_n} \leq k.r^{-2}.H^+$

En particular, si $r = k$, resulta $\underline{\lim} \frac{F_n}{L_n} = r^{-1}.H^-$ y $\overline{\lim} \frac{F_n}{L_n} = r^{-1}.H^+$. #

Corolario 2.4.

Sea $K = -r^2$ ($r > 0$) y (D_n) una sucesión de convexos como en la proposición anterior, con ∂D_n de clase C^2 . Si la curvatura geodésica (en valor absoluto) κ_n de ∂D_n satisface la acotación $\kappa_n \geq r$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\underline{\lim} \frac{F_n}{L_n} = \overline{\lim} \frac{F_n}{L_n} = r^{-1}$.

Demostración

Aplicando el teorema de Gauss-Bonnet para cada D_n se obtiene, $2\pi + r^2.F_n \geq L_n.r$; luego $\overline{\lim} \frac{F_n}{L_n} \geq r^{-1}$ y $\underline{\lim} \frac{F_n}{L_n} \geq r^{-1}$. Por el corolario anterior resulta, $H^+.r^{-1} \geq r^{-1}$ y $H^-.r^{-1} \geq r^{-1}$ y por lo tanto $H^+ = H^- = 1$, pues $H^+, H^- \in [0,1]$. #

Para finalizar quisiera mencionar, que el resultado anterior fué probado en (Santaló, (18)), aplicando Gauss-Bonnet y la desigualdad isoperimétrica. En el mismo se conjetura que el corolario 2.4 sigue siendo válido sin suponer $\kappa_n \geq r$; de acuerdo al corolario 2.3, la conjetura es equivalente a que $H^+ = H^- = 1$.

APENDICE

Las variedades diferenciables se suponen de dimensión finita y clase C^∞ . con base numerable y Hausdorff. La diferenciabilidad de las aplicaciones (salvo mención explícita) se entiende C^∞ .

A.1. Operadores sobre el conjunto de formas diferenciales y formas invariantes

Si M es una variedad diferenciable, los conjuntos $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{K}(M)$ y $\Omega^k(M)$ ($k \geq 1$), denotarán respectivamente a los conjuntos de: funciones diferenciables sobre M a valores reales, campos de vectores diferenciables sobre M y k -formas sobre M .

Si $\alpha \in \Omega^k(M)$ y $\beta \in \Omega^s(M)$ el producto exterior $\alpha \wedge \beta$ se define como la $(k+s)$ -forma,

$$\alpha \wedge \beta(X_1, \dots, X_{k+s}) = \frac{1}{k!s!} \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \cdot \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \cdot \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+s)})$$

donde la suma se toma sobre el conjunto de todas las permutaciones σ de $[1, \dots, k+s]$ y $X_1, \dots, X_{k+s} \in \mathcal{K}(M)$; luego $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot s} \beta \wedge \alpha$

Poniendo $\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$, la diferenciación exterior d , se define como la aplicación $d: \Omega^s(M) \rightarrow \Omega^{s+1}(M)$ ($s \geq 0$) por:

$df(X) = Xf$, si $f \in \Omega^0(M)$ y $X \in \mathcal{K}(M)$. Si $s > 1$ y ω es una $(s-1)$ -forma, $d\omega(X_1, \dots, X_s) = \sum_{i=1}^s (-1)^{1+i} X_i \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_s) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_s)$ donde \hat{X} indica que el campo X debe ser omitido y $[,]$ es el corchete de Lie. El operador d satisface las siguientes propiedades:

$d \circ d = 0$ y $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$, si $\alpha \in \Omega^k(M)$

Si $X \in \mathcal{K}(M)$, el operador de contracción respecto a X , se define como la aplicación $C_X: \Omega^s(M) \rightarrow \Omega^{s-1}(M)$ ($s > 0$) por

$C_X \omega(X_1, \dots, X_{s-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{s-1})$; para $f \in \mathcal{F}(M)$ se define

también $C_X f = 0$. El operador C_X verifica la siguiente propiedad respecto a \wedge : $C_X(\alpha \wedge \beta) = (C_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge C_X \beta$, si $\alpha \in \Omega^k(M)$. Si $X \in \mathcal{K}(M)$, la derivada de Lie respecto a X y aplicado a formas, se define como el operador $L_X: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ ($k \geq 1$) por

$$(L_X \omega)(X_1, \dots, X_k) = L_X(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, L_X X_i, \dots, X_k)$$

donde $L_X f = Xf$ si $f \in \mathcal{F}(M)$ y $L_X Y = [X, Y]$ si $Y \in \mathcal{K}(M)$.

La derivada de Lie satisface las siguientes propiedades:

- a) $L_X(\alpha \wedge \beta) = (L_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_X \beta$
- b) $L_X \alpha = C_X d\alpha + dC_X \alpha$.

Definición

Una aplicación diferenciable $\phi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ se denomina un grupo uniparamétrico de difeomorfismos sobre M , si la función $\phi_t: M \rightarrow M$ definida por $\phi_t(p) = \phi(p, t)$ verifica,

- 1) $\phi_0 =$ identidad de M
- 2) $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$

Es claro que ϕ_t resulta un difeomorfismo para todo $t \in \mathbb{R}$ y además, define un único $X \in \mathcal{K}(M)$, para el cual las curvas $t \rightarrow \phi(p, t)$ son curvas integrales de X ; es decir, $X(\phi(p, t)) = \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \Big|_{(p, t)}$. En éste caso, se dice que X está generado por ϕ y es completo.

Definición

Sea $a > 0$, $U \subset M$ un abierto y $\phi: U \times (-a, a) \rightarrow M$ una aplicación diferenciable. El triplete (U, a, ϕ) se dice un grupo (local) uniparamétrico de difeomorfismos, si satisface,

- 1) $\phi_t: U \rightarrow \phi_t(U)$ ($p \rightarrow \phi(p, t)$) es un difeomorfismo
- 2) $\phi_0 =$ identidad de U
- 3) Si $t, s, t+s \in (-a, a)$ y si $p, \phi_t(p)$ pertenecen a U , entonces $\phi_{t+s}(p) = \phi_s(\phi_t(p))$.

Proposición 1.

Si $X \in \mathcal{K}(M)$, entonces para todo $p \in M$, existe un grupo (local) uniparamétrico de difeomorfismos (U, a, ϕ) , tal que $p \in U$ y las curvas $t \rightarrow \phi(q, t)$ ($q \in U$), son curvas integrales de X .

Demostración

ver Pág. 40 de (1). #

Para $X \in \mathcal{K}(M)$, sea $\mathcal{D} \subset M \times \mathbb{R}$ el conjunto de los puntos (p, t) , tales que existe una curva integral $c: (-a, a) \rightarrow M$ de X con $c(0) = p$ y $t \in (-a, a)$.

Proposición 2.

Sea $X \in \mathcal{K}(M)$; entonces $M \times \{0\} \subset \mathcal{D}$, \mathcal{D} es abierto en $M \times \mathbb{R}$ y existe una única aplicación diferenciable $\phi: \mathcal{D} \rightarrow M$, tal que para todo $p \in M$, la curva $t \rightarrow \phi(p, t)$ es la curva integral de X que satisface $\phi(p, 0) = p$.

Demostración

ver Pág. 41 de (1). #

La aplicación ϕ se denomina el flujo de X ; luego si $\mathcal{D} = M \times \mathbb{R}$, X es completo y ϕ un grupo uniparamétrico de difeomorfismos.

Definición

Si $X \in \mathcal{K}(M)$ y $\omega \in \Omega^k(M)$, la k -forma ω se dice invariante respecto a X , si $L_X \omega = 0$.

Proposición 3.

Sea $X \in \mathcal{K}(M)$ y $\omega \in \Omega^k(M)$; entonces ω es invariante respecto a X , si y sólo si ω es constante a lo largo de las curvas integrales de X ; es decir, $\phi_t^*(\omega) = \omega$, donde ϕ es el flujo de X .

Demostración

ver Pág. 103 de (1). #

A.2. La conexión de Levi-Civita y la aplicación de conexión

Sea M una variedad diferenciable y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un tensor del tipo $(2,0)$ sobre M ; es decir, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ es $\mathcal{F}(M)$ -bilineal. El par $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se denomina una variedad de Riemann, si $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$ y además $\langle X, X \rangle|_p > 0$, para todo $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ y todo $p \in M$ con $X(p) \neq 0$.

En éste caso (ver Pág 82 de (6)), existe un único operador

$$\nabla : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \rightarrow \mathcal{H}(M) \quad "(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y"$$

que satisface,

$$c_1) \nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$c_2) \nabla_X(g \cdot Y) = X(g) \cdot Y + g \cdot \nabla_X Y$$

$$c_3) \nabla_{X+Z} Y = \nabla_X Y + \nabla_Z Y$$

$$c_4) \nabla_{g \cdot X} Y = g \cdot \nabla_X Y$$

$$c_5) X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

$$c_6) \nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$$

Para todo $X, Y, Z \in \mathcal{H}(M)$ y $g \in \mathcal{F}(M)$.

El operador ∇ se denomina la conexión de Levi-Civita de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y el valor $\nabla_{X(p)} Y = \nabla_X Y|_p$, la derivada covariante de Y respecto a $X(p)$.

Las propiedades $c_1)$ hasta $c_4)$, dicen que ∇ es una conexión; la propiedad $c_5)$ dice que ∇ es Riemanniana y la $c_6)$, que es libre de torsión. El tensor de curvatura R de ∇ se define por

$$c_7) R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

Supuesto que $\dim M = n$, sea (U, φ) una carta de M con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$

y denotemos con $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{H}(U)$.

Utilizando la convención " $a_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$ ", si $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, la expresión local de ∇ está dado por $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}^k \cdot X_k$, donde

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \cdot g^{kr} \cdot \left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r} \right) \text{ y } \|g^{ij}\| = \|g_{ij}\|^{-1}.$$

Sea $\Pi: TM \rightarrow M$ el fibrado tangente a M y M_p ($p \in M$), el espacio tangente a M en p . Para $u \in TU = \Pi^{-1}(U)$ con $\Pi(u) = p$, sea $v \in M_p$ e $Y \in \mathcal{K}(U)$, tales que $Y(p) = v$; luego $Y_*(v) \in (TM)_u$ y además, el conjunto de vectores de la forma $Y_*(v)$ contiene una base de $(TM)_u$. Para $b \in (TM)_u$, sea $K_u(b) = \nabla_v Y$, si $b = Y_*(v)$; luego extendiendo por linealidad sobre una base de la forma $Y_*(v)$, se obtiene una aplicación $K_u: (TM)_u \rightarrow M_p$ que está bien definida pues no depende de la base "del tipo $Y_*(v)$ " elegida.

Si $K: TTM \rightarrow TM$ se define por $K(b) = K_u(b)$ si $b \in (TM)_u$, K es diferenciable y se denomina la aplicación de conexión de ∇ .

Si $(TU, T\varphi)$ es la carta trivializadora de TM y

$$T\varphi = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n, \bar{x}^{n+1}, \dots, \bar{x}^{2 \cdot n}), \text{ sea } \bar{X}_i = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}, \bar{X}_{n+i} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{n+i}};$$

luego si $B \in \mathcal{K}(TU)$ con $B = b^i \cdot \bar{X}_i + b^{n+i} \cdot \bar{X}_{n+i}$ resulta,

$$(1) \quad K \circ B = (b^{n+k} + b^i \cdot \bar{x}^{n+j} \cdot \Gamma_{ij}^k \circ \Pi) \cdot X_k \circ \Pi$$

lo que muestra en particular, que K es diferenciable.

Para cada $u \in TM$, los conjuntos $\mathcal{H}_u = K_u^{-1}(0)$ y $\mathcal{V}_u = \Pi_u^{-1}(0)$, se denominan respectivamente el subespacio horizontal y vertical de $(TM)_u$. Si para $u \in TU$ definimos,

$$(2) \quad H_i(u) = \bar{X}_i(u) - \bar{x}^{n+j}(u) \cdot \Gamma_{ij}^k \circ \Pi(u) \cdot \bar{X}_{n+k}(u)$$

$$(3) \quad V_i(u) = \bar{X}_{n+i}(u)$$

entonces $V_1(u), \dots, V_n(u)$ es una base de \mathcal{V}_u y por (1) es

$H_1(u), \dots, H_n(u)$ una base de \mathcal{H}_u ; luego $(TM)_u = \mathcal{H}_u \oplus \mathcal{V}_u$.

Si \mathcal{H} (respect. \mathcal{V}) es la unión de todos los subespacios horizontales (respect. verticales), entonces $TTM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$; los fibrados \mathcal{H} y \mathcal{V} se denominan respectivamente, fibrado horizontal y vertical.

Haciendo notar que se cumple,

$$(4) \quad \Pi_*(H_i(u)) = X_i \circ \Pi(u), \quad K(V_i(u)) = X_i \circ \Pi(u)$$

resulta inmediatamente, que $\Pi_* \times K: TTM \rightarrow TM \times TM$ definida por

$$(5) \quad \Pi_* \times K(b) = (\Pi_*(b), K(b))$$

es un difeomorfismo, que induce un isomorfismo $(TM)_u \rightarrow T_{\Pi(u)}M \times T_{\Pi(u)}M$ para todo $u \in TM$. Por construcción y (4), $\Pi_* \times K$ aplica \mathcal{H} en el primer factor y a ∇ en el segundo.

A.3. Derivación covariante a lo largo de aplicaciones

Sea (M, \langle, \rangle) como antes, N una variedad diferenciable y $f: N \rightarrow M$ una aplicación diferenciable. La aplicación de conexión K permite definir una extensión ∇ como sigue:

Si $\mathcal{H}_f(N)$ denota al conjunto de campos diferenciables a lo largo de f ; es decir, $Y \in \mathcal{H}_f(N)$ si $Y: N \rightarrow TM$ es diferenciable y $\Pi \circ Y = f$, se define $\nabla: \mathcal{H}(N) \times \mathcal{H}_f(N) \rightarrow \mathcal{H}_f(N)$ " $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ "

por:

$$(1) \quad \nabla_X Y = K(Y_*(X))$$

Las propiedades $c_1)$ hasta $c_4)$ de A.2, son válidas para la extensión ∇ (ver Pág. 47 de (6)); considerando en la primera variable campos de $\mathcal{H}(N)$, en la segunda de $\mathcal{H}_f(N)$ y $g \in \mathcal{F}(N)$.

Se tiene además, los correspondientes análogos a $c_5)$, $c_6)$ y $c_7)$. Si $X \in \mathcal{H}(N)$ e $Y, Z \in \mathcal{H}_f(N)$ se verifica:

$$c_8) \quad X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

Si $X, Y \in \mathcal{H}(N)$ y $Z \in \mathcal{H}_f(N)$,

$$c_9) \quad \nabla_X f_* Y = \nabla_Y f_* X + f_*([X, Y])$$

$$c_{10}) \quad R(f_*(X), f_*(Y))Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

A.4. El Spray geodésico y el flujo geodésico

Sea (M, \langle, \rangle) como antes y para $a \in \mathbb{R}$, denotemos con $h_a: TM \rightarrow TM$ la homotecia $h_a(v) = a \cdot v$

Definición

Un campo de vectores $S \in \mathcal{K}(TM)$ se denomina un Spray para M , si para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$s_1) \Pi_* \circ S = \text{identidad de } TM$$

$$s_2) S \circ h_a = a \cdot (h_a)_* \circ S$$

Teorema

Existe un único Spray para M que satisface $K \circ S = 0$; es decir, $S(u) \in \mathcal{K}_u$ para todo $u \in TM$.

Demostración

ver Pág. 64 de (6). #

El Spray S está definido por $S(u) = (\Pi_* \times K)^{-1}(u, 0_{\Pi(u)})$, para todo $u \in TM$ y se denomina el Spray geodésico de ∇ .

Aplicando (2), (3), (4) y (5) de A.2, se obtiene la expresión local de S sobre TU

$$(1) \quad S = \bar{x}^{n+k} \cdot \bar{X}_k - \bar{x}^{n+i} \cdot \bar{x}^{n+j} \cdot \Gamma_{ij}^k \circ \Pi \cdot \bar{X}_{n+k}$$

El flujo ϕ de S , se denomina el flujo geodésico; la variedad de Riemann M se dice completa, si S es completo o equivalentemente el dominio de definición de ϕ es $TM \times \mathbb{R}$.

Supongamos que M sea completo y denotemos con $\phi_v: \mathbb{R} \rightarrow TM$ ($v \in TM$) a la curva $\phi_v(t) = \phi(v, t)$; luego por las propiedades $s_1)$ y $s_2)$ de Spray, se satisface (ver Pág. 60 de (6))

$$(2) \quad \phi_{s \cdot v}(t) = s \cdot \phi_v(s \cdot t)$$

$$(3) \quad (\Pi \circ \phi_v)_* (D) \Big|_t = \phi_v(t)$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}$; donde $D = \frac{d}{dt} \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, denota al campo de vectores sobre \mathbb{R} , inducido por la carta identidad.

Definición

Una curva $c: I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ se dice una geodésica, si $\nabla_D \dot{c} \Big|_t = 0_{c(t)}$ para todo $t \in I$.

Nota

En el capítulo correspondiente a medida de geodésicas, las curvas que satisfacen la definición anterior, se llamarán curvas geodésicas.

Por definición de derivación covariante a lo largo de aplicaciones y de S , c es una geodésica si y sólo si $c(t) = \Pi \circ \phi_v(t)$ con $v = \dot{c}(0)$, (ver Pág. 66 de (6)); en consecuencia, las geodésicas están definidas en todo \mathbb{R} por ser M completo.

Como $\dot{c}(t) = c_{*}(D)\big|_t$, por la propiedad c_g) aplicado a $f = c$, se obtiene que $t \rightarrow \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle$ es constante.

Si $T_1M = \{v \in TM : |v| = 1\}$ "fibrado unitario tangente", por lo anterior resulta, $\phi_v(t) \in T_1M$ si $|v| = 1$; luego $\phi: T_1M \times \mathbb{R} \rightarrow T_1M$ es un grupo uniparamétrico sobre T_1M y $S(v) \in (T_1M)_v \subset (TM)_v$ para todo $v \in T_1M$.

A.5. Métrica de Sasaki y el elemento de volumen de TM y T_1M

Sea (M, \langle, \rangle) como antes; definiendo para $X, Y \in \mathcal{K}(TM)$,

$$(1) \quad g(X, Y) = \langle \Pi_* X, \Pi_* Y \rangle + \langle KX, KY \rangle$$

entonces (TM, g) es una variedad de Riemann. La métrica g se denomina la métrica de Sasaki sobre TM (ver Pág. 73 de (6)). Considerando los campos $H_i, V_i \in \mathcal{K}(TU)$ definidos en A.2, resulta inmediatamente que para todo $u \in TM$, los subespacios \mathcal{K}_u y \mathcal{V}_u son ortogonales respecto a g . Orientando TM a través de las cartas trivializadoras, denotemos con dV_{TM} al elemento de volumen de TM correspondiente a dicha orientación e inducida por la métrica g . Utilizando las notaciones de A.2, de (2), (3) y (4) del mismo, se obtiene que la expresión de dV_{TM} respecto a una carta trivializadora $(TU, T\varphi)$ está dado por

$$(2) \quad dV_{TM} = \det \|g_{ij} \circ \Pi\| \cdot d\bar{x}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n \wedge d\bar{x}^{n+1} \wedge \dots \wedge d\bar{x}^{2n}$$

Sea $N:TM \rightarrow TTM$ el campo de vectores definido por $N(u) = (\Pi_* \times K)^{-1}(0_{\Pi(u)}, u)$; luego por definición de g se cumple, $g(N, N)|_u = \langle KN, KN \rangle|_{\Pi(u)} = |u|^2$; y por lo tanto $|N(u)| = 1$, para todo $u \in T_1M$.

Por otro lado, si $u \in T_1M$ y $b \in (T_1M)_u$, sea $c:(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T_1M$ una curva diferenciable que satisface $c(0) = u$ y $\dot{c}(0) = b$; luego por ser $\nabla_D c|_0 = K(b)$, de c_8) se obtiene,

$$\langle u, K(b) \rangle = \langle c(0), \nabla_D c|_0 \rangle = \frac{1}{2} D(c, c) = 0$$

Dado que $g(N(u), b) = \langle u, K(b) \rangle$, entonces $N(u) \perp (T_1M)_u$ cualquiera sea $u \in T_1M$. La restricción de N a T_1M , define un campo (unitario) y normal a T_1M , que denominamos la normal exterior a la misma. Debido a (4) de A.2, la representación de N respecto a una carta trivializadora $(TU, T\varphi)$ de TM es

$$(3) \quad N = \bar{x}^{n+1} \bar{X}_{n+1}$$

La $(2n-1)$ -forma sobre TM definida por $dK = C_N(dV_{TM})$, se denomina la densidad cinemática sobre TM y su expresión sobre TU está dado en virtud de (2) y (3) y la definición de C_N por

$$(4) \quad dK = \det \|g_{ij} \circ \Pi\| \cdot d\bar{x}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n \wedge$$

$$\wedge \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{n+k+1} \cdot \bar{x}^{n+k} \cdot d\bar{x}^{n+1} \wedge \dots \wedge d\bar{x}^{n+k} \wedge \dots \wedge d\bar{x}^{2n} \right)$$

Orientando T_1M de modo que $b_1, \dots, b_{2n-1} \in (T_1M)_u$ sea una base orientada positivamente, si $N(u), b_1, \dots, b_{2n-1}$ lo es de $(TM)_u$, la restricción de dK a T_1M que denotamos con dV_{T_1M} , es el elemento de volumen de T_1M , correspondiente a la métrica inducida por g y la orientación fijada.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ABRAHAM,R.: Foundations of Mechanics. Benjamin 1967.
- [2] EBERLEIN,P.: When is a Geodesic Flow Anosov? I - J. Diff. Geom. 8 (1973), 437-463.
- [3] EBERLEIN,P.: When is a Geodesic Flow Anosov? II - J. Diff. Geom. 8 (1973), 565-577.
- [4] ESCHENBURG,J.H.: Stabilitätsverhalten des Geodätischen Flusses Riemannsches Mannigfaltigkeiten. Thesis. Bonn 1975. Bonner Math. Schriften 87 (1976).
- [5] ESCHENBURG,J.H.: Horospheres and the Stable Part of the Geodesic Flow. Math. Z. 153, (1977), 237-251.
- [6] GROMOLL,D.; KLINGENBERG,W.; MEYER,W.: Riemannsche Geometrie im Großen - Springer Lecture Notes in Mathematics 55, 1968.
- [7] GREEN,L.W.: A Theorem of E. Hopf. Michigan Math. J.5 (1958), 31-34.
- [8] HEINTZE,E.; IM HOF,H.C.: On the Geometry of Horospheres J.Diff. Geom. 12 (1977), 481-491.
- [9] IM HOF,H.C.: The Family of Horospheres Through two Points. Math. Ann. 240 (1979), 1-11.
- [10] KARCHER,H.: Schnittort una Konvexe Mengen in Vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 177, (1968), 105-121.
- [11] KOBAYASCHI,S.; NOMIZU,K.: Foundations of Differential Geometry Interscience Publ., New York. Vol. I, (1963); Vol. II, (1969).
- [12] NACHBIN,L.: The Haar Integral. Van Nostrand, Princeton, N.J. (1965).
- [13] O'SULLIVAN,J.J.: Manifolds without Conjugate Points. Math. Ann. 210, (1974), 195-311.
- [14] PALAIS,R.S.: A Global Formulation of the Lie Theory of Transformation Groups. Memoirs of the American Mathematical Society. 22 (1957).

- [15] SANTALO, L.A.: Introduction to Integral Geometry. Paris. Hermann (1953).
- [16] SANTALO, L.A.: Horocycles and convex Sets in Hyperbolic Plane. Archiv. Der Math. 28, (1967), 83-89.
- [17] SANTALO, L.A.: Horospheres and Convex Bodies in Hyperbolic Space. Proc. Amer. Math. Society, 19, (1968), 390-395.
- [18] SANTALO, L.A.; YAÑEZ, L.: Averages for Polygons formed by Random Lines in Euclidean and Hyperbolic Planes. Journal of Applied Probability, 9, (1972), 140-157.
- [19] SANTALO, L.A.: Integral Geometry and Geometric Probability Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, Reading, (1976).

LA Santalo

LA Santalo