# Geometría integral en espacios de Hermite

Birman, Graciela Silvia

1980

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

# GEOMETRIA INTEGRAL EN ESPACIOS DE HERMITE

GRACIELA S. BIRMAN

Trabajo de tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Director de tesis :DR. LUIS A. SANTALO

1 [illegible]

## INDICE

# INTRODUCCION

En su memoria "Unitäre Integralgeometrie", H. Rohde, [5] expone el estudio de la densidad y medida total de elementos en el plano proyectivo complejo , $P_2(C)$, con la llamada métrica hermitiana elíptica; es decir, punto y recta , así como el de cadenas normales uni- y bidimensionales . Se encuentra tambien la densidad de pares de estos elementos, densidad cinemática, y algunas desigualdades integrales provenientes de considerar distintos invariantes que representen longitud ó área.

El trabajo que vamos a considerar ahora, tuvo como idea inicial la generalización del trabajo de Rohde a $P_3(C)$ .

Con tal motivo comenzamos definiendo la geometría que será considerada en $P_3(C)$ , ( cap. I, §1), los elementos que hallamos en él, como subespacios lineales y en general variedades paramétricas de las que las cadenas normales son caso particular. Tambien se explicita el elemento de volumen ( longitud de arco, área ó volumen según corresponda ) de estas variedades y su medida ( longitud , área , ó volumen ) calculadas a partir de la expresión diferencial de la métrica del espacio ( § 6).

Mostramos tambien en este capítulo que desde otro punto de vista (no el que nos ocupa ), $P_3(C)$ puede ser considerado un espacio de Riemann.

Encontramos las posibles intersecciones entre subespacios lineales y cadenas , cuyo resumen se halla en pag. 8.

El capítulo II contiene la particularización de resul tados conocidos (Santaló, [7]) sobre densidad y medida total de subespacios lineales.

En lo que se refiere a cadenas normales, en $P_3(C)$ las hay de dimensión 1,2,3. Se encuentran menciones de ellas en Cartan, [2] , y claramentes definidas , así como su densidad en Blaschke, [1] , y se encuentran explicitadas en cap. II, § 4 .

Con motivo de conocer sus medidas totales surgió la necesidad de conocer , previamente, la densidad y medida total de elementos del espacio contenidos en otros elementos, por ejemplo :puntos en 1-cadena, cadenas tridimensionales que pasan por una cadena unidimensional fija, etc.

Estas situaciones no habian sido estudiadas en ninguna dimensión , por lo que se detallan las posibles en el capítulo III. Hallamos 2 casos en $P_1(C)$, 12 casos en $P_2(C)$ y 19 casos en $P_3(C)$; las densidades y medidas totales co rrespondientes se hallan resumidas en las pag.36, pag. 45 y pag. 57, respectivamente; y en el parágrafo 8, las fór mulas integrales que permiten obtener estos valores.

Ahora , con estos datos podemos conocer la medida total de cadenas tridimensionales, las de mayor dimensión en este espacio, y generalizar el resultado a $P_n(C)$, es decir obtenemos la medida total de cadena normal n-dimensional en $P_n(C)$, pag. 55.

No es éste el único resultado generalizado a $P_n(C)$;

con objeto de conocer algo más sobre cadenas normales , obtenemos el número de parámetros del cual dependen y también su densidad,(teor.2, pag.27). Otras propiedades son las contenidas en teor. 1 y teor, 4; en el teor.3 hallamos una descripción de la intersección de n-cadenas bajo ciertas condiciones que completan la información de intersecciones en $P_3(C)$,(pag.8).

En la pag. 41 , se demuestra que la densidad de un punto en una 2-cadena es igual el elemento de área de la esfera $S_2$ ; en la pag. 50 lo análogo en $P_3(C)$ y con toda generalidad en § 10, cap. III vemos que en $P_n(C)$, la densidad de un punto en una n-cadena coincide con el elemento de volumen de la esfera $S_n$ .

La densidad de pares de subespacios lineales se encuentra en el § 1 del cap. IV, y se obtienen usando propiedades métricas y/o principio de dualidad. Estos resultados muestran analogía con los de O.Varga, [9] para el espacio real $R^3$ con métrica euclideana.

Con la densidad de pares de cadenas y pares de subespacios lineales y cadenas normales completamos la información sobre densidades en $P_3(C)$.

En el capítulo V, explicitamos las fórmulas integrales notables para los subespacios $L_1$ (recta ) y $L_2$ (plano) y reproducimos , en forma detallada y adaptada a $P_3(C)$ la demostración de Griffiths, [4] .

Finalmente , enunciamos las fórmulas integrales en las que intervienen cadenas normales y variedades paramétricas , según las intersecciones de pag. 8 .

Naturalmente , nada de lo referido hubiera sido posible sin las pacientes enseñanzas y correcciones del Dr. Luis A. Santaló .

Permítaseme, por lo tanto, expresarle aquí mi mayor gratitud y el reconocimiento de la gran deuda que tengo para con él .

GRACIELA S. BIRMAN

Buenos Aires, marzo 1980.

# CAPITULO I

## GEOMETRIA HERMITIANA ELIPTICA

### 1.DEFINICIONES

Consideremos $P_3(C)$ el espacio proyectivo complejo de dimensión 3, y en él ,coordenadas homogéneas.

El grupo unitario U es el grupo de las transformaciones lineales

$$(1.1) \qquad x'_j = \sum_{k=0}^{3} \xi_{jk} x_k \qquad j:0,1,2,3$$

que deja invariante la forma de Hermite

$$(1.2) \qquad (x,\bar{x}) = \sum_{j=0}^{3} x_j \cdot \bar{x}_j$$

En consecuencia los coeficientes $\xi_{ik}$ satisfacen la relación

$$(1.3) \qquad (\xi_k, \bar{\xi}_l) = \sum_{i=0}^{3} \xi_{ik} \bar{\xi}_{il} = \delta_{kl}$$

$\delta_{kl} = 0$ si $k \neq l$, $\qquad \delta_{kl} = 1$ si $k = l$

DEFINICION 1.1 Se llama <u>geometría hermitiana elíptica</u> a la definida por el grupo U en $P_3(C)$.

La matriz $A = (\xi_{jk}) \in C^{4x4}$ y satisface

$$(1.4) \qquad A.\bar{A}^t = I \quad , \quad A^{-1} = \bar{A}^t \quad , \quad \bar{A}^t .A = I$$

donde I es la matriz unitaria de orden 4.

En $P_3(C)$, x y $\lambda x$ con $\lambda \neq 0$ determinan el mismo punto entonces x y $e^{i\alpha}x$ tambien definen el mismo punto, por lo tanto, A y $e^{i\alpha}A$ definenla misma transformación

$$(1.5) \qquad x' = A.x$$

Por lo tanto , A puede ser normalizado de manera que

$$(1.6) \qquad \det A = 1$$

y tambien podemos elegir $\lambda$ de modo que se cumpla siempre

(1.7) $$(x,\bar{x}) = \sum_{j=0}^{3} x_j . \bar{x}_j = 1$$

Como en (Rohde, [ 5]), la distancia d entre dos puntos x, y, se define por $\cos\frac{d}{2} = |(x,\bar{y})|$ suponiendo $(x,\bar{x}) = (y,\bar{y}) = 1$ . Esta suposición sobre las coordenadas de los puntos la haremos siempre en todo lo que sigue .

Dos puntos tales que $d=\pi$ se llaman ortogonales entre sí. Todos los puntos ortogonales a un punto fijo x ,forman un plano E, llamado <u>plano polar de x</u>, y se llama <u>polo de E</u> al punto x.

Elegiremos 4 vértices $x^0, x^1, x^2, x^3$ de un tetraedro autoconjugado con respecto a la cuádrica fundamental $(x,\bar{x}) = 0$ es decir, $(x^j, \bar{x}^k) = \delta_{jk}$

Este tetraedro autoconjugado puede ser considerado como la referencia móvil para el grupo unitario U de acuerdo con la teoría de Cartan (Repere mobile).

El elemento de arco se toma de la forma

$$ds^2 = 4\left\{(dx,d\bar{x}) - (dx,\bar{x})(d\bar{x},x)\right\}$$

2.SUBVARIEDADES

La totalidad de puntos de $P_3(C)$ depende de 6 parámetros reales , consecuentemente, tenemos por considerar variedades dependientes de 1,2,3,4,5 parámetros , a saber:

a) SUBESPACIOS LINEALES

Puntos: Los puntos de $P_3(C)$ dependen de 6 parámetros reales. Esto se ve inmediatamente en coordenadas no-homo géneas pues cada punto tiene tres coordenadas complejas; en coordenadas homogéneas cada punto tiene 4 coordenadas $x_0, x_1, x_2, x_3$ pero existe la relación $(x,\bar{x}) = 1$ y además queda arbitrario el valor $\alpha$ de $e^{i\alpha}$. Utilizaremos la no tación $L_0$ para referirnos a ellos( Santaló, §6 ) ó P.

Rectas: Dos puntos distintos del espacio determinan una recta. Es decir, si $P(x_0,x_1,x_2,x_3)$ y $Q(y_0,y_1,y_2,y_3)$ son puntos distintos, las coordenadas $z_\lambda$ de un punto de la recta determinada por P y Q pueden ser expresadas por

$$\rho z_\lambda = x_\lambda + t y_\lambda \qquad \lambda : 0,1,2,3$$

t parámetro variable, $\rho$ coeficiente de homogeneidad.

Podemos , sin pérdida de generalidad, tomar P y Q ortogonales entre sí. Tomando ahora la recta $G_1$ polar de la a anterior y dos puntos ortogonales en $G_1$ , tenemos la recta inicial expresada en términos de un tetraedro autopolar de referencia . Veremos en § 4 que una recta y un plano se cortan siempre. Estamos en el espacio $P_3(C)$ en que no hay paralelas. A partir de esto , paraver que las rectas dependen de 8 parámetros se puede observar que una recta está determinada por los dos puntos en que corta a dos planos fijos. Cada punto de un plano son 4 parámetros;luego son 8 parámetros.

En lo que sigue las rectas se notarán $L_1$ ó G.

Planos: Por dualidad , los planos dependen de seis parámetros. En términos del tetraedro fundamental de referencia queda determinado por una ecuación de la forma:

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \quad \text{con } a_j \in C$$

Se notarán $L_2$ ó E.

b) CADENAS NORMALES

Respecto del tetraedro autopolar dé referencia y según la notación de Blaschke , [1], llamaremos $C_r$ , r-cadena normal ó cadena normal r-dimensional r:1,2,3, al conjunto de puntos que satisfacen

$$(*) \qquad x = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j x^j \qquad \text{con } \sum_{j=0}^{r} \lambda_j^2 = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_j \in R$$

Tenemos así 1-, 2-, 3-cadenas que dependen respectivamente de 10, 11 y 9 parámetros reales.La justificación de ésta afirmación se halla en el teorema 2 del capítulo II.

c) Además , fijando el sistema de referencia hay:

1) Hilos:Una variedad dependiente de un sólo parámetro real es llamada un hilo. Es usualmente representado por las ecuaciones ( Coolidge, [3])

$$x'_k = x'_k\,(u) \qquad , u = \bar{u} \qquad , k: 1,2,3$$

donde $x'_k$ representa las coordenadas no-homogéneas del punto x, es decir , $x_k = \dfrac{x_j}{x_0}$ , $j=k$

Las 1-cadenas $C_1$ son caso particular de loshilos.

2) Variedades dependientes de 2 parámetros reales .

a) Podemos comenzar por las curvas analíticas representadas por $x'_k = x'_k\,(u+iv)$ con $u,v \in R$ que satisfacen

$$\frac{\partial\,(x'_k, x'_l)}{\partial\,(u,v)} = 0 \qquad \text{con } k \neq l \ , \quad k,l : 1,2,3$$

Sabemoss (Coolidge, [3] ,pag.205):

"La condición necesaria y suficiente para que una variedad 2-paramétrica sea una curva analítica es que sus proyecciones sobre dos planos no paralelos sean curvas analíticas".

b) Más generalmente ,tenemos las variedades 2-paramétricas dadas por

$$x'_k = x'_k(u,v) \qquad k:1,2,3$$

Como caso particular de estas variedades se tienen las cadenas normales bidimensionales, dadas por (*) en la página 4 para $r=2$.

3)Variedades dependientes de 3 parámetros.

Con toda generalidad son de la forma

$$x'_k = x'_k\ (u,v,w) \qquad u,v,w \in R\ ;\ k:1,2,3$$

De [3] sabemos que una variedad triparamétrica está contenida en una superficie si y sólo si $\frac{\partial(x'_1,x'_2,x'_3)}{\partial\ (u,v,w)}=0$

Como caso particular , con la notación usada en (*), pag. 4, se obtienen las cadenas normales tridimensionales cuando $u=\lambda_0$ , $v=\lambda_1$ ,$w=\lambda_2$

4)Variedades dependientes de 4 parámetros .

a) Con toda generalidad están dadas por ecuaciones de la forma

$$x_k = x_k\ (u_1,u_2,u_3,u_4) \qquad \text{con } u_j \in R;\ k,j:1,2,3,4$$

y $x_k$ coordenadas homogéneas de un punto x.

b)De entre éstas serán superficies analíticas las de ecuación :

$x_k = x_k\ (u_1 + iu_2, u_3 + iu_4)$ con $k: 1,2,3,4$, $u_j \in R$

5) Por último , Variedades dependientes de 5 parámetros, dadas por las ecuaciones

$$x_k = x_k\ (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \qquad , u_j \in R\ ;\ k: 1,2,3,4$$

Se halla en [3] pag. 211 y ss. condiciones para que estas variedades estén contenidas en una superficie analítica.

4.INTERSECCIONES EN $P_3(C)$.

Recordemos que si A y B son subespacios lineales de un espacio X ,

$$\dim_R (A \cap B) = \dim_R A + \dim_R B - \dim_R X$$

En base a esto y a los datos que sobre variedades y subvariedades recopilamos en el parágrafo anterior se tiene que la intersección entre subespacios lineales y cadenas en $P_3(C)$ satisface:

a) $L_1 \cap L_2 = L_0$

b) $L_2 \cap L_2^* = L_1$

c) $L_2 \cap C_2 = 2$ puntos

Veamos esto último:

$$\dim_R ( L_2 \cap C_2) = \dim_R L_2 + \dim_R C_2 - \dim_R P_3(C) = 4 + 2 - 6 = 0 =$$
$$= \dim_R L_0$$

Queremos ahora, saber cuantos puntos hay en esta intersección.

Sea $L_2 = \sum_{j=0}^{3} \mu_j x^j$ / $a\mu_0 + b\mu_1 + c\mu_2 + d\mu_3 = 0$ con $a, b, c, d, \mu_j \in C$ ; $j: 0,1,2,3$

Podemos escribir

Sea $C_2 = \sum_{J=0}^{2} \lambda_J x^J \;/\; \sum_{J=0}^{2} \lambda_J^2 = 1 \qquad \lambda_J \in R$

Hallar la intersección equivale a resolver

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1 \\ a(\lambda_0 x_0^0 + \lambda_1 x_0^1 + \lambda_2 x_0^2) + b(\lambda_0 x_1^0 + \lambda_1 x_1^1 + \lambda_2 x_1^2) + c(\lambda_0 x_2^0 + \lambda_1 x_2^1 + \\ \qquad \lambda_2 x_2^2 + d(\lambda_0 x_3^0 + \lambda_1 x_3^1 + \lambda_2 x_3^2) = 0 \end{cases}$$

o sea,

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1 \\ A\lambda_0 + B\lambda_1 + C\lambda_2 = 0 \\ A^*\lambda_0 + B^*\lambda_1 + C^*\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Luego tenemos dos planos en $R^3$ entonces queda una recta que corta a la esfera en dos puntos .

d) $L_2 \cap C_3 = C_1$

$\dim_R L_2 \cap C_3 = \dim_R L_2 + \dim_R C_3 - 6 = 4 + 3 - 6 = 1 = \dim_R$ Hilo

Nuevamente la ecuación del plano respecto del tetraedro de vértices $x^0, x^1, x^2, x^3$ es como en la pag. anterior caso c)

$C_3 \quad \sum_{J=0}^{3} \lambda_J x^J \;/\; \sum_{J=0}^{3} \lambda_J^2 = 1 \qquad \lambda_J \in R$

El sistema a resolver, con la notación (*) es

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \\ A\lambda_0 + B\lambda_1 + C\lambda_2 + D\lambda_3 = 0 \\ A^*\lambda_0 + B^*\lambda_1 + C^*\lambda_2 + D^*\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Las dos últimas ecuaciones dan la ecuación de un plano por el origen en $R^4$ ; su intersección con la hiperesfera es una curva cerrada.

Como los $\lambda_i$ son reales, queda $\quad L_2 \cap C_3 = C_1$

e) $C_3 \cap C_3^* =$ punto/s

$\dim_R(C_3 \cap C_3^*) = 3+3-6=0$

En el capítulo III, teorema 3 se da más información sobre esta intersección .

f) Refernte a la intersección de subespacios lineales con variedades dependientes de más de tres parámetros hallamos que es posible para :

$L_2 \cap V_4 =$ puntos

$L_1 \cap V_5 =$ puntos

$L_2 \cap V_5 = V_1$

Resumiendo ,

5. TABLA DE INTERSECCIONES EN $P_3(C)$.

| | $L_0$ | $L_1$ | $L_2$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_0$ | – | – | – | – | – | – |
| $L_1$ | – | – | $L_0$ | – | – | – |
| $L_2$ | – | $L_0$ | $L_1$ | – | $2L_0$ | $C_1$ |
| $C_1$ | – | – | – | – | – | – |
| $C_2$ | – | – | $2L_0$ | – | – | – |
| $C_3$ | – | – | $C_1$ | – | – | $L_0$ |

## 6. MEDIDAS EN SUBESPACIOS

Ya sabemos(pag.2) que si d es la distancia entre dos puntos $x, y$ se define

$$\cos\frac{d}{2} = |(x,\bar{y})| \quad \text{siendo } (x,\bar{x}) = (y,\bar{y}) = 1$$

Si $y = x + dx$ se tiene

$$(1) \qquad \cos\frac{ds}{2} = 1 - \frac{ds^2}{2.4} + \dots$$

$$(x + dx, \bar{x} + d\bar{x}) = (x,\bar{x}) + (dx,\bar{x}) + (x,d\bar{x}) + (dx,d\bar{x}) = 1$$

de donde

$$(2) \qquad (x,d\bar{x}) + (\bar{x},dx) + (dx,d\bar{x}) = 0$$

Así ,

$$|(x,\bar{x}+d\bar{x})| = \left\{(x,\bar{x}+d\bar{x})(\bar{x},x+dx)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left\{1 + \left\{(x,d\bar{x}) + (\bar{x},dx) + (x,d\bar{x})(\bar{x},dx)\right\}\right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\left\{(x,d\bar{x}) + (\bar{x},dx) + (x,d\bar{x})(\bar{x},dx)\right\} - \dots$$

Entonces, de $\cos\frac{ds}{2} = |(x,\bar{x}+d\bar{x})|$ queda

$$\frac{ds^2}{2.4} = -\frac{1}{2}\left\{(x,d\bar{x}) + (\bar{x},dx) + (x,d\bar{x})(\bar{x},dx)\right\}$$

$$ds^2 = -4\left\{(x,d\bar{x}) + (\bar{x},dx) + (x,d\bar{x})(\bar{x},dx)\right\} \quad \text{y por (2)}$$

$$(3) \qquad ds^2 = 4\left\{(dx,d\bar{x}) - (x,d\bar{x})(\bar{x},dx)\right\}$$

Siendo $ds^2$ real, pues es igual a su conjugado, para cualquier variedad en $P_3(C)$

$$x'_i = x'_i(u_1,u_2,\dots,u_r) \qquad r \leq 5,\ u_i \in R$$

calculando $dx'_i$ y sustituyendo en (3) tendremos una métrica de Riemann

$$(4) \qquad ds^2 = g_{ij}\cdot du_i du_j \qquad i,j:1,2,\dots,r \leq 5$$

o sea , una variedad de Riemann de dimensión r. Estamos suponiendo suma sobre los índices repetidos.

Para dicha variedad se puede calcular el elemento de volumen r- dimensional

(5) $$dV_r = \sqrt{|g_{ij}|}\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_r$$

las barras indican el determinante de la matriz $(g_{ij})$

Para las curvas analíticas $(r=2)$, además del elemento de área (5) se tiene,

$$\Omega^1 = dx_0 \wedge d\bar{x}_0 + dx_1 \wedge d\bar{x}_1 + \ldots + dx_3 \wedge d\bar{x}_3$$

y para superficies analíticas $(r=4)$, además del volumen (5) se tiene .

$$\Omega^2 = dx_0 \wedge d\bar{x}_0 \wedge dx_1 \wedge d\bar{x}_1 + dx_0 \wedge d\bar{x}_0 \wedge dx_2 \wedge d\bar{x}_2 + dx_0 \wedge d\bar{x}_0 \wedge dx_3 \wedge d\bar{x}_3 +$$
$$+ dx_1 \wedge d\bar{x}_1 \wedge dx_2 \wedge d\bar{x}_2 + dx_1 \wedge d\bar{x}_1 \wedge dx_3 \wedge d\bar{x}_3 + dx_2 \wedge d\bar{x}_2 \wedge dx_3 \wedge d\bar{x}_3$$

Vamos a ver esto con más detalle.

a) Consideremos las variedades dependientes de un parámetro real , que hemos llamado hilos, es decir,

$$x_i = x_i(t), \quad \bar{x}_i = \bar{x}_i(t), \quad t = \bar{t}\ , \quad i: 0, \ldots, 3$$

tenemos

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}\, dt \quad , \quad d\bar{x}_i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial t}\, dt$$

reemplazando en (4) se obtendrá el diferencial de arco correspondiente a un hilo.

En particular , para 1-cadenas será:

$$x_0 = x_0(t) = t \quad , \quad x_1 = x_1(t) = \sqrt{1-t^2} \quad , \quad x_2 = x_3 = 0$$

$$dx_0 = dt \quad , \quad dx_1 = \frac{-2t\, dt}{2\sqrt{1-t^2}}$$

Así,

$$ds^2 = 4\left\{(dx,d\bar{x}) - (x,d\bar{x})(\bar{x},dx)\right\}$$

$$= 4\left\{dx_0\wedge d\bar{x}_0 + dx_1\wedge d\bar{x}_1 + dx_2\wedge d\bar{x}_2 + dx_3\wedge d\bar{x}_3\right\}$$

$$= 4\left\{dt^2 + \frac{t^2}{1-t^2}dt^2 + t\,dt - t\,dt\right\}$$

$$= 4.\ \frac{1}{1-t^2}\ dt^2$$

$ds = \dfrac{2}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$ y la medida (longitud) de cada 1-cadena es

$$\int ds = 2\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \text{ arc sen } t\Big|_{-1}^{1} = 2\pi$$

b) En variedades dependientes de 2 parámetros reales es decir,

$$x_j = x_j(u,v) \quad , u = \bar{u} \ , v = \bar{v} \quad , j:0,..,3$$

cabe la posibllidad de que pueda escribirse

$x_j = x_j(u,v) = x_j(u+iv)$ , serán las curvas analíticas y es sabido, [6], que admiten el elemento de área

$$\Omega^1 = dx_0\wedge dx_0 + dx_1\wedge dx_1 + dx_2\wedge dx_2 + dx_3\wedge dx_3$$

Para curvas en general , dadas por

$$x_j = x_j(u,v) \quad \text{con } j:0,1,2,3 \ , \quad u,v,\in R$$

$$dx_j = \frac{\partial x_j}{\partial u}\,du + \frac{\partial x_j}{\partial v}\,dv$$

$$d\bar{x}_j = \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial u}\,du + \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial v}dv$$

$$dx_j\wedge d\bar{x}_j = \left(\frac{\partial x_j}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial u} - \frac{\partial x_j}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial v}\right) dv\wedge du$$

$$x_i x_j d\bar{x}_i dx_j = x_i \bar{x}_j \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v} - \frac{\partial x_j}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial v}\right) du \wedge dv$$

con $i,j:0,1,2,3$, reemplazando en (4) se obtiene su correspondiente $ds^2$ en términos de las coordenadas reales u,v.

En particular, para 2-cadenas queda

$$x_0 = x_0(u,v) = u \quad , \quad x_1 = x_1(u,v) = v \quad , \quad x_2 = x_2(u,v) = \sqrt{1-u^2-v^2}$$

$$x_3 = 0 \quad ; \quad dx_0 = du \quad , \quad dx_1 = dv \quad , \quad dx_2 = -\frac{(u.du+v.dv)}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

Ahora,

$$ds^2 = 4\left\{(dx,d\bar{x}) - (x,d\bar{x})(\bar{x},dx)\right\}$$

$$(dx,d\bar{x}) = dx_0 \wedge d\bar{x}_0 + dx_1 \wedge d\bar{x}_1 + dx_2 \wedge d\bar{x}_2 =$$

$$= du^2 + dv^2 + \left(\frac{u.du+v.dv}{1-u^2-v^2}\right)^2$$

$$(x,d\bar{x})(\bar{x},dx) = u.du + vdv - (udu+vdv) = 0$$

Luego,

$$ds^2 = 4\left(du^2 + dv^2 + \frac{(udu+vdv)^2}{1-u^2-v^2}\right) =$$

$$= 4\left\{\frac{(1-v^2)du^2 + (1-u^2)dv^2 + 2uvdu\wedge dv}{1-u^2-v^2}\right\}$$

o sea,

$$g_{11} = \frac{4(1-v^2)}{1-u^2-v^2} \qquad 2g_{12} = \frac{8uv}{1-u^2-v^2} \qquad g_{22} = \frac{4(1-u^2)}{1-u^2-v^2}$$

$$d\text{ Area} = \sqrt{|g_{ij}|}\, du\wedge dv = \frac{\sqrt{16(1-u^2)(1-v^2)-16u^2 v^2}}{1-u^2-v^2}\, du\wedge dv =$$

$$= \frac{4\sqrt{1-u^2-v^2}}{1-u^2-v^2}\, du\wedge dv = \frac{4\, du\wedge dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

Integrando,la medida (área) de cada dos cadena es

$$\int dA = \int_{u^2+v^2\leq 1} 4\frac{du\,dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = \text{ área de la esfera , es decir,}$$

área de 2-cadena = área esfera = $4\pi$

c)En variedades dependientes de tres parámetros reales es decir,

$$x_j = x_j(u_1,u_2,u_3) \qquad j:0,1,2,3$$

y en general,en variedades dependientes de un número impar de parámetros reales no cabe la posibilidad de que sean analíticos. Tendremos

$$dx_j = \frac{\partial x_j}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial x_j}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial x_j}{\partial u_3}du_3 .$$

$$d\bar{x}_j = \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial u_3}du_3$$

que habrá que reemplazar en (4).

Considerando el caso particular de que fuera una 3-cadena queda

$$x_0 = x_0\ (u_1,u_2,u_3) = u_1 \qquad , \ x_1 = x_1(u_1,u_2,u_3) = u_2$$

$$x_2 = x_2(u_1,u_2,u_3) = u_3 \qquad , \ x_3 = x_3(u_1,u_2,u_3) = \sqrt{1-u_1^2-u_2^2-u_3^2}$$

$$dx_0 = du_1 \quad ,dx_1 = du_2 \quad , \ dx_2 = du_3 \ , \ dx_3 = \frac{-(u_1du_1 + u_2du_2 + u_3du_3)}{\sqrt{1-u_1^2\ -u_2^2\ -u_3^2}}$$

Tenemos

$ds^2 = 4(dx,d\bar{x})$ pues $(x,d\bar{x}) - (\bar{x},dx) = 0$ para r-cadenas, por lo tanto, ds es el elemento de arco de la esfera $S^r$ y por consiguiente ,el área ó volumen es el mismo.

d) En las variedades dependientes de 4 parámetros , es decir,

$$x_j = x_j(u_1,u_2,u_3,u_4) \qquad j: 0,1,2,3$$

$$dx_j = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} du_i$$

Al igual que en los casos anteriores sólo resta reemplazar en (4) .

Si se trata de una superficie analítica, es decir,

$x_j = x_j(u_1 + iu_2, u_3 + iu_4)$ es conocido (Santaló, [6])

que se puede tomar como elemento de superficie (ó volumen)

$$dV_4 = \Omega^2 = dx_0\wedge d\bar{x}_0\wedge dx_1\wedge d\bar{x}_1 + dx_0\wedge d\bar{x}_0\wedge dx_2\wedge d\bar{x}_2 +$$

$$+ dx_0\wedge d\bar{x}_0\wedge dx_3\wedge d\bar{x}_3 + dx_1\wedge d\bar{x}_1\wedge dx_2\wedge d\bar{x}_2 +$$

$$+ dx_1\wedge d\bar{x}_1\wedge dx_3\wedge d\bar{x}_3 + dx_2\wedge d\bar{x}_2\wedge dx_3\wedge d\bar{x}_3$$

e) Las variedades dependientes de 5 parámetros no pueden ser analíticas y su ds se obtiene en forma análoga al caso c) .

CAPITULO II

# DENSIDAD Y MEDIDA EN GEOMETRIA DE HERMITE

## 1.DEFINICIONES

En el capítulo anterior, pag.1, se ha definido el grupo hermitiane elíptico , que llamamos $H(n+1)$, y geometría hermitiana elíptica. Ahora deseamos dar una densidad invariante con respecto al grupo hermitiano elíptico, para subespacios lineales y cadenas normales.

Salvo un factor constante, esta densidad es la única invariante. En todo lo que sigue las densidades serán consideradas positivas y reales, es decir, excluyendo el factor complejo $i$ , en caso que apareciera.

Sea $L_r^o$ un r-plano fijo en $P_n(C)$ y sea $h_r$ el subgrupo de $H(n+1)$ que deja invariante a $L_r^o$ . La densidad para r-planos es el elemento de volumen invariante del espacio homogéneo $H(n+1)/h_r$ . Esta densidad invariante existe pues $h_r$ es subgrupo cerrado del grupo compacto $H(n+1)$, (Santaló,[7] ).

Para hallarlas veámos previamente

## 2. LAS FORMAS DE MAURER-CARTAN DE $U(n+1)$ Y DE $H(n+1)$

Supongamos que $P_n(C)$ está referido a un sistema de coordenadas homogéneas definidos por los puntos $x^o, x^1, \ldots, x^n$ que son los vértices de un simple autopolar, o sea, cumplen las condiciones

$$(x^i, \bar{x}^j) = \delta_{ij} \tag{2.1}$$

El método de la "referencia móvil"(repère mobile, moving frames) consiste en definir las formas diferenciales $w_{ij}$ por las ecuaciones

(2.2) $$dx^i = \sum_{j=0}^{n} w_{ij} x^j \qquad i:0,1,..,n$$

de donde teniendo en cuenta (2.1)

(2.3) $$w_{ij} = (dx^i, \bar{x}^j)$$

De (2.1) se deduce

$$(dx^i, \bar{x}^j) + (x^i, d\bar{x}^j) = 0$$ , de donde

(2.4) $$w_{ij} = \bar{w}_{ji} = 0$$

La medida cinemática de $U(n+1)$ es la integral del producto de todas las formas $w_{ij}$ , $\bar{w}_{ij}$ independientes o sea,

(2.5) $$dU(n+1) = \bigwedge w_{jk} \wedge \bar{w}_{jk} \wedge w_{hh} \qquad \text{con } j<k,\ 0\leq j,k,h\leq n$$

Para $H(n+1)$ hay que quitar una $w_{ii}$, ver [7], llamando $w^{ii}$ al producto exterior donde la $w_{ii}$ ha sido omitida, (2.5) puede escribirse de la forma

$$dH(n+1) = w^{oo} + \dots + w^{nn}$$

3.DENSIDAD Y MEDIDA DE SUBESPACIOS LINEALES

Sea el subespacio lineal $L_r^o$ definido por los puntos $x^o,..,x^r$ , a partir de las ecuaciones (2.2) se tiene que

$$w_{jk} = 0 \quad \text{para} \quad 0\leq k\leq r \ , \ r+1\leq j\leq n$$

como son formas complejas tambien $\bar{w}_{jk} = 0$ y por lo tante sabemos de [7], cap.10 , que la densidad para r-planos invariante por $H(n+1)$ es

(2.6) $dL_r = \bigwedge (w_{JK} \wedge \bar{w}_{JK}) \qquad 0 \leq k \leq r, \; r+1 \leq j \leq n$

Vamos a especificar para $P_3(C)$ los casos de puntos, rectas $L_1$, y planos $L_2$.

Densidad para puntos

Tomemos el punto P coincidente con el vértice $x^o$, si este punto se supone fijo, por tratarse de coordenadas homogéneas debe ser en (2.2)

$$dx^o = w_{oo} x^o \qquad \text{y por lo tanto } w_{o1} = w_{o2} = w_{o3} = 0$$

La densidad para puntos según lo anterior será:

$$dL_o = w_{o1} \wedge w_{o2} \wedge w_{o3} \wedge \bar{w}_{o1} \wedge \bar{w}_{o2} \wedge \bar{w}_{o3}$$

Siempre vamos a tomar las densidades como positivas de manera que no va a importar el orden de las pfaffianas en los productos exteriores que expresan las densidades.

Densidad para rectas

Para rectas, tomando la recta que pasa por los vértices $x^o, x^1$, siguiendo el método general (Santaló, [7]) tenemos que $L_1$ estará fija si (2.2) se reduce a

$$dx^o = w_{oo} x^o + w_{o1} x^1$$
$$dx^1 = w_{1o} x^o + w_{11} x^1$$

Es decir, que $w_{o2} = w_{o3} = w_{12} = w_{13} = 0$ y tambien sus conjugadas. Nuevamente,

$$dL_1 = w_{o2} \wedge w_{o3} \wedge w_{12} \wedge w_{13} \wedge \bar{w}_{o2} \wedge \bar{w}_{o3} \wedge \bar{w}_{12} \wedge \bar{w}_{13}$$

Densidadde planos

Para planos consideremos el subespacio determinado por $x^o, x^1, x^2$. Quedará fijo si $dx^o, dx^1, dx^2$ varían en el mismo plano, es decir, en (2.2) queda

$$\begin{cases} dx^0 = w_{00}x^0 + w_{01}x^1 + w_{02}x^2 \\ dx^1 = w_{10}x^0 + w_{11}x^1 + w_{12}x^2 \\ dx^2 = w_{20}x^0 + w_{21}x^1 + w_{22}x^2 \end{cases}$$

por lo que debe ser $w_{03} = w_{13} = w_{23} = 0$ , y tambien sus conjugadas.

Luego, salvo factor constante,

$$dL_2 = w_{03} \wedge w_{13} \wedge w_{23} \wedge \bar{w}_{03} \wedge \bar{w}_{13} \wedge \bar{w}_{23}$$

La forma difernclal $dL_r$ es de grado $2(r+1)(n-r)$ , como era de esperar ya que el espacio lineal $L_r$ en $P_n(C)$ depende de $2(r+1)(n-r)$ parámetros reales.

Al integrar la densidad de un subespacio lineal sobre todo el espacio obtenemos la medida total de dichos subespacios en el espacio hermitiano que estamos considerando.

Es sabido, [6],(6.4) ,

$$\text{med. total } L_r = \int_{\text{total}} dL_r = \frac{(2\pi i)^{(n-r)(r+1)} \quad 1!2!\,..\,r!}{n!\,(n-1)!\,..(n-r)!}$$

En $P_3(C)$ tenemos los siguientes cases particulares

$$\text{med. total } L_0 = \int_{\text{total}} dL_0 = \frac{|(2\pi i)^3|}{3!} = \frac{4\pi^3}{3}$$

$$\text{med. total } L_1 = \int_{\text{total}} dL_1 = \frac{|(2\pi i)^4|}{3!\;2!} = \frac{4\pi^4}{3}$$

$$\text{med. total } L_2 = \int_{\text{total}} dL_2 = \frac{|(2\pi i)^3 2!|}{3!\;2!} = \frac{4\pi^3}{3}$$

4 DENSIDAD Y MEDIDA DE CADENAS NORMALES

Además de los subespacios lineales, hemos visto en el cap. I que tambien tenemos las llamadas cadenas normales.

Hemos definido(cap.I,pag.4),una cadena normal n-dimensional, en $P_n(C)$, como el conjunto de puntos que puede ser expresado paramétricamente por

$$z = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x^j \quad , \sum_{j=0}^{n} \lambda_j^2 = 1 \qquad \lambda_j \in R$$

Con objeto de hallar su densidad recordemos que

$$(2.7) \qquad w_{rs} = (dx^r, \bar{x}^s) = \alpha_{rs} + i\beta_{rs} \qquad \text{con } \alpha_{rs} + \alpha_{sr} = 0 \text{ y } \beta_{rs} = \beta_{sr}$$

Tenemos entonces, usando (2.2)

$$dz = \sum_{h,j=0}^{n} \lambda_j dx^j = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \sum_{h=0}^{n} \omega_{jh} x^h \qquad \text{es decir,}$$

$$dz = \sum_{j,h=0}^{n} \lambda_j \alpha_{jh} x^h + \sum_{h,j=0}^{n} \lambda_j \beta_{jh} i x^h$$

Observemos que los vértices $(x^o, x^1, .., x^n)$ e $(ix^o, .., ix^n)$ no corresponden al mismo tetraedro,luego para que $C_n$ quede fija vemos que $dz$ debe ser combinación lineal con coeficientes reales de $x^o, x^1, .., x^n$, es decir, $dz \in C_n$ si

$\beta_{hj} = 0$ . Vamos a considerar los casos particulares de $P_1(C)$ , $P_2(C)$ y $P_3(C)$ .

a) <u>Cadena unidimensional en $P_1(C)$</u>

Para hallar la densidad y medida total de las 1-cadenas en este espacio se trata de hallar las transformaciones (1.5)

$$z' = Az \qquad \text{con } \bar{A}^t . A = I$$

Para interpretar A, sean $x=(x_0,x_1)$ ,$y=(y_0,y_1)$ los puntos imagen de (1,0) y (0,1) respectivamente.

Será

$$\begin{pmatrix} z_0' \\ z_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \text{o sea} \quad A=\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix}$$

La condición $\bar{A}^t . A = I$ se cumple por ser

$$(x,\bar{x}) = 1 \quad , (y,\bar{y}) = 1 \quad , \quad (x,\bar{y}) = 0$$

Veamos la condición (1.6), det $A = 1$

Sea , en general, $x=(\rho_0 e^{i\theta_0},\rho_1 e^{i\theta_1})$, $y=(r_0 e^{i\varphi_0},r_1 e^{i\varphi_1})$

$(x,\bar{x})=1$ entonces $\rho_0^2+\rho_1^2=1$

$(y,\bar{y})=1$ entonces $r_0^2+r_1^2=1$

$(x,\bar{y})=0$ entonces $\rho_0 r_0 e^{i(\theta_0-\varphi_0)}+\rho_1 r_1 e^{i(\theta_1-\varphi_1)}=0$

de donde

$$\theta_0-\varphi_0=\theta_1-\varphi_1 , \qquad \rho_0 r_0+\rho_1 r_1=0$$

La condición (1.6)

$$\begin{vmatrix} \rho_0 e^{i\theta_0} & \rho_1 e^{i\theta_1} \\ r_0 e^{i\varphi_0} & r_1 e^{i\varphi_1} \end{vmatrix} = \rho_0 r_1 e^{i(\theta_0+\varphi_1)} - r_0 \rho_1 e^{i(\theta_1+\varphi_0)} = 1$$

o sea

Quedan así

$$x=(\rho_0 e^{i\theta_0} , \rho_1 e^{i\theta_1}) , \qquad y=(r_0 e^{i\varphi_0},r_1 e^{i\varphi_1}) \quad \text{con}$$

$$\rho_0^2+\rho_1^2=1 \quad , \quad r_0^2+r_1^2=1 \quad , \quad \rho_0 r_0+\rho_1 r_1=0 \quad , \quad \rho_0 r_1-\rho_1 r_0=1$$

Las dos últimas condiciones dan

$$r_1=\rho_0 \qquad , \quad r_0=-\rho_1$$

quedando

$$x = (\rho_0 e^{i\theta_0}, \rho_1 e^{i\theta_1}) \quad , \; y = (-\rho_1 e^{-i\theta_1}, \rho_0 e^{-i\theta_0})$$

con $\quad \rho_0^2 + \rho_1^2 = 1.$

Vemos que cada 1-cadena depende de $\rho_0, \rho_1, \theta_0, \theta_1$ con la única condición $\rho_0^2 + \rho_1^2 = 1$ . Como las $C_1$ dependen de 2 parámetros falta imponer una condición a los $\theta_i$.

Pongamos $\theta_0 = 0$ y $\theta_1 = \theta$ , queda

(2.8) $$x = (\rho_0, \rho_1 e^{i\theta}) \quad , \; y = (-\rho_1 e^{-i\theta}, \rho_0) \quad \text{con } \rho_0 + \rho_1 = 1$$

Ahora,según lo anterior( cap.II, § 4) y el método general

$$\beta_{01} = \beta_{00} = 0 \qquad y \qquad dC_1 = \beta_{01} \wedge \beta_{00}$$

De (2.7) y (2.8)

$$dx = (d\rho_0, e^{i\theta} d\rho_1 + i\rho_1 e^{i\theta} d\theta)$$

$$dy = (i\rho_1 e^{-i\theta} d\theta - e^{-i\theta} d\rho_1, d\rho_0)$$

(1) $w_{00} = (dx, \bar{x}) = \rho_0 d\rho_0 + \rho_1 d\rho_1 + i\rho_1^2 d\theta = i\rho_1^2 d\theta$

(2) $w_{11} = (\rho_1 d\rho_1 + \rho_0 d\rho_0 + i\rho_1^2 d\theta = -i\rho_1^2 d\theta$

$w_{01} = (dx, \bar{y}) = -\rho_1 e^{i\theta} d\rho_0 + \rho_0 e^{i\theta} d\rho_1 + i\rho_0 \rho_1 e^{i\theta} d\theta$

$$\beta_{01} = -\rho_1 \operatorname{sen}\theta \, d\rho_0 + \rho_1 \operatorname{sen}\theta \, d\rho_1 + \rho_0 \rho_1 \cos\theta \, d\theta$$

Reemplazando queda

$dC_1 = -\rho_1^3 \operatorname{sen}\theta d\theta \wedge d\rho_0 - \rho_0^2 \rho_1 \operatorname{sen}\theta d\theta \wedge d\rho_0$ o sea,

(2.9) $$dC_1 = -\rho_1 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \wedge d\rho_0$$

y su medida total será según cap.II, § 1

$$\int dC_1 = \int |\rho_1 \operatorname{sen}\theta| \, d\theta \wedge d\rho_0 = \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}\theta| d\theta \int_{-1}^{1} \sqrt{1-\rho_0^2} \, d\rho_0$$

$$= 4.2 \int_0^1 \sqrt{1-\rho_0^2}\, d\rho_0 = 4.2\frac{\pi}{4} = 2\pi$$

Es evidente que sumando (1) y (2) se tiene $\beta_\infty + \beta_i = 0$
Pero veámos otra demostración siguiendo la indicación dada en [7] .

Hemos obtenido que la matriz A es

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad x = (x_0, x_1) \ , \ y = (y_0, y_1)$$

Sabemos que $(x,\bar{x}) = (y,\bar{y}) = 1$ , $(x,\bar{y}) = 0$ y $\det A = 1$

Diferenciando esta última igualdad

$$d(\det A) = 0 \qquad \text{o sea ,}$$

$$d(x_0y_1 - y_0x_1) = 0$$

$$dx_0y_1 + x_0dy_1 - dy_0x_1 - y_0dx_1 = 0$$

Tambien

$$d(\det A).\det \bar{A}^t = 0 \qquad \text{reemplazando}$$

$$0 = dx_0\bar{x}_0y_1\bar{y}_1 + x_0dy_1\bar{x}_0\bar{y}_1 - dy_0x_1\bar{x}_0\bar{y}_1 - y_0dx_1\bar{x}_0\bar{y}_1 -$$

$$- dx_0y_1\bar{y}_0\bar{x}_1 - x_0dy_1\bar{y}_0\bar{x}_1 + dy_0x_1\bar{y}_0\bar{x}_1 + y_0\bar{y}_0dx_1\bar{x}_1 =$$

$$= dx_0\bar{x}_0 - dx_0\bar{x}_0y_0\bar{y}_0 + dy_1\bar{y}_1 - dy_1\bar{y}_1x_1\bar{x}_1 -$$

$$- dy_0\bar{y}_1x_0\bar{x}_1 + dx_1\bar{y}_1\bar{x}_1y_1 - dx_0y_0\bar{y}_0\bar{x}_1 - x_0dy_1\bar{y}_0\bar{x}_1 +$$

$$+ dy_0\bar{y}_0 - dy_0\bar{y}_0x_0\bar{x}_0 + dx_1\bar{x}_1 - dx_1\bar{x}_1y_1\bar{y}_1 =$$

$$= dx_0\bar{x}_0 + dx_1\bar{x}_1 + dy_0\bar{y}_0 + dy_1\bar{y}_1 - dx_0\bar{x}_0y_0\bar{y}_0 + dx_0\bar{x}_0\bar{y}_0y_0 -$$

$$- dy_1\bar{y}_1x_1\bar{x}_1 + dy_1\bar{x}_1x_1\bar{y}_1 - dy_0\bar{y}_0x_0\bar{x}_0 + dy_0\bar{y}_0x_0\bar{x}_0$$

b) Cadenas bidimensionales en $P_2(C)$

La densidad de 2-cadenas en $P_2(C)$ será notada $dC_2$ ó $dC_2^2$ en caso de posible donfusión , donde el superín dice indica la dimensión del espacio en que se considera.

Con esto según lo anterior,

$$dC_2 = \beta_{01}\wedge\beta_{02}\wedge\beta_{00}\wedge\beta_{12}\wedge\beta_{11} = \beta^{00}+\beta^{11}+\beta^{22}$$ ya que

$\beta_{00}+\beta_{11}+\beta_{22}=0$ ,veámoslo

En $P_2(C)$ tenemos $x^0, x^1, x^2$ ortogonales entre sí y sin pérdida de generalidad podemos suponer que salvo un factor unitario , verifica

$x^2 = [\bar{x}^0, \bar{x}^1]$ donde el corchete indica , como en Rohde, [5] , producto vectorial.

Ahora,

$$(1) \quad \beta_{00}+\beta_{11}+\beta_{22} = (dx^0,\bar{x}^0)+(dx^1,\bar{x}^1)+(dx^2,\bar{x}^2)$$

$$dx^2 = [d\bar{x}^0,\bar{x}^1]+[\bar{x}^0, d\bar{x}^1]$$

$$(dx^2,\bar{x}^2) = ([x^0, x^1], [d\bar{x}^0,\bar{x}^1]+[\bar{x}^0, d\bar{x}^1]) =$$

$$= ([x^0,x^1], [d\bar{x}^0,\bar{x}^1]) + ([x^0,x^1],[\bar{x}^0, d\bar{x}^1])$$

Aplicando la identidad de Lagrange a cada sumando queda

$$(\bar{x}^2,dx^2) = (x^0,d\bar{x}^0)(x^1,\bar{x}^1) - (x^1, d\bar{x}^0)(x^0,\bar{x}^1)+$$

$$+(x^0,\bar{x}^0)(x^1,d\bar{x}^1)-(x^1,\bar{x}^0)(x^0,d\bar{x}^1) =$$

$$=(x^0,d\bar{x}^0)+(x^1,d\bar{x}^1) = -\left\{(dx^0,\bar{x}^0)+(dx^1,\bar{x}^1)\right\}$$

Reemplazando en el segundo miembro de (1) resulta

$$\beta_{00}+\beta_{11}+\beta_{22} = 0$$

yla medida total de 2-cadenas sabemos de [5] que

$$\int_{total} dC_2 = \frac{2\pi^3}{3}$$

c)Cadenas normales en $P_3(C)$ .

Veámos que ocurre con 1- y 2-cadenas en $P_3(C)$.

Para 1-cadenas ; si $z \in C_1$ , siendo $C_1$ que pasa por $x^o$, $x^1$ se tiene

$$z = \lambda_o x^o + \lambda_1 x^1 \quad \text{con} \sum_{J=0}^{1} \lambda_J^2 = 1 \text{ y } \lambda_J \in R$$

Ahora, $dz = \sum_{J=0}^{1} \lambda_J \, dx^J \in C_1$ si, por lo anterior,

$\beta_{01} = \beta_{00} = 0$ y además dz no es combinación lineal no nula de $x^2$,$x^3$ o sea , debemos pedir tambien que

$w_{o2} = w_{o3} = w_{12} = w_{13} = 0$ . Con esto

$$dC_1 = \beta_{01} \wedge \beta_{00} \wedge w_{o2} \wedge w_{o3} \wedge w_{12} \wedge w_{13} \wedge \bar{w}_{o2} \wedge \bar{w}_{o3} \wedge \bar{w}_{12} \wedge \bar{w}_{13}$$

Por lo visto en las pag. 17 y 21 de este capítulo podemos escribir

$$dC_1 = dC_1^3 = dC_1^1 \wedge dL_1^3$$

indicando el superíndice la dimensión del espacio en que tomamos la densidad.

Y su medida total se obtiene al integrar sobre todo el es pacio, luego por lo anterior , y por pag. 18 y22

$$\int_{total} dC_1^3 = \int_{tot.} dC_1^1 \cdot \int_{tot.} dL_1^3 = 2\pi \frac{4\pi^4}{3} = \frac{8\pi^5}{3}$$

Para 2-cadenas , si $z \in C_2$, siendo $C_2$ determinada por $x^o$, $x^1$, $x^2$ será

$dz = \sum_{J=0}^{2} \lambda_J dx^J \in C_2$ si $\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_{12} = \beta_{00} = \beta_{11} = 0$

y además $w_{03} = w_{13} = w_{23} = 0$ ysus conjugados ; queda por pag. 18 y 23 , que

$$dC_2 = dC_2^2 \wedge dL_2^3 = dC_2^3$$

, donde los superíndices son usados de igual modo que en 1-cadenas.

Al integrar sobre todo el espacio , de pag.18 y 24 queda

$$\int_{total} dC_2 = \int_{tot.} dC_2^3 = \int_{tot.} dC^2{}_2 \cdot \int_{total} dL_2^3 =$$

$$= \frac{2\pi^3}{3} \cdot \frac{4\pi^3}{3} = \frac{8\pi^6}{9}$$

Por último tenemos las 3-cadenas.

Según lo ya visto, sabemos que

$$dC_3 = \beta_{01} \wedge \beta_{02} \wedge \beta_{03} \wedge \beta_{12} \wedge \beta_{13} \wedge \beta_{23} \wedge \beta_{00} \wedge \beta_{11} \wedge \beta_{22}$$

que tambien podemos escribir

$dC_3 = \beta^{00} + \beta^{11} + \beta^{22} + \beta^{33}$ ya que $\beta_{00} + \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33} = 0$

la demostración es análoga a la hecha en $P_1(C)$ , es decir , diferenciar el determinante de la matriz y luego reemplazar convenientemente a partir de la ortogonalidad y unitariedad de los puntos $x^0, x^1, x^2, x^3$ .

Respecto de la medida total de 3-cadenas veremos en el § 8 del cap. III que

$$\text{med. total } C_3 = \frac{2\pi^5}{9}$$

Resumiendo,

## 5. TABLA DE DENSIDAD Y MEDIDA TOTAL DE ELEMENTOS EN $P_3(C)$

Cada $L_i$ se refiere al determinado por los puntos $x^0$, $x^1,\ldots,x^i$, en $P_3(C)$

| | DENSIDAD | MED. TOT. |
|---|---|---|
| $L_0$ | $w_{01}\wedge w_{02}\wedge w_{03}\wedge \bar{w}_{01}\wedge \bar{w}_{02}\wedge \bar{w}_{03}$ | $\frac{4\pi^3}{3}$ |
| $L_1$ | $w_{02}\wedge w_{03}\wedge w_{12}\wedge w_{13}\wedge \bar{w}_{02}\wedge \bar{w}_{03}\wedge \bar{w}_{12}\wedge \bar{w}_{13}$ | $\frac{4\pi^4}{3}$ |
| $L_2$ | $w_{03}\wedge w_{13}\wedge w_{23}\wedge \bar{w}_{03}\wedge \bar{w}_{13}\wedge \bar{w}_{23}$ | $\frac{4\pi^3}{3}$ |
| $C_1$ | $\beta_{01}\wedge\beta_{00}\wedge w_{02}\wedge w_{03}\wedge w_{12}\wedge w_{13}\wedge \bar{w}_{02}\wedge \bar{w}_{03}\wedge \bar{w}_{12}\wedge \bar{w}_{13}$ | $\frac{8\pi^5}{3}$ |
| $C_2$ | $\beta_{01}\beta_{02}\beta_{12}\beta_{00} w_{03}\wedge w_{13}\wedge w_{23}\wedge \bar{w}_{03}\wedge \bar{w}_{13}\wedge \bar{w}_{23}\wedge\beta_{11}$ | $\frac{8\pi^6}{9}$ |
| $C_3$ | $\beta_{01}\beta_{02}\beta_{03}\beta_{12}\beta_{13}\beta_{23}\beta_{00}\beta_{11}\beta_{22}$ | $\frac{2\pi^5}{9}$ |

## 6. DENSIDAD CINEMATICA

Es sabido que la densidad cinemática del grupo $U(n+1)$ es el producto de todas las 1-formas independientes $w_{jk}$, $\bar{w}_{jk}$, salvo un factor constante. Es decir, recordando que

$$w_{00}+w_{11}+w_{22}+w_{33}=0 \qquad \text{se tiene que}$$

$$dU = w_{01}\wedge w_{02}\wedge w_{03}\wedge w_{12}\wedge w_{13}\wedge w_{23}\wedge \bar{w}_{01}\wedge \bar{w}_{02}\wedge \bar{w}_{03}\wedge \bar{w}_{12}\wedge \wedge \bar{w}_{13}\wedge \bar{w}_{23}\wedge w_{11}\wedge w_{22}\wedge w_{33}$$

## 7. ALGUNOS RESULTADOS EN $P_n(C)$

TEOREMA 1

Dada en $P_n(C)$ , una j-cadena $(j<n)$ y un punto $x^{J+1}$ ortogonal al $L_j$ que la contiene , queda determinada una $j+1$-cadena que contiene a la j-cadena y al punto .

DEMOSTRACION

Sea $z \in C_J$ y $\mu_0, \mu_1 \in R \;/\; \mu_0^2+\mu_1^2 = 1$

$$\mu_0 z + \mu_1 x^{J+1} = \mu_0(\lambda_0 x^0 + \dots + \lambda_J x^J) + \mu_1 x^{J+1} =$$

$$= \mu_0 \lambda_0 x^0 + \dots + \mu_0 \lambda_J x^J + \mu_1 x^{J+1}$$

pero $(\mu_0\lambda_0)^2 + \dots + (\mu_0\lambda_J)^2 + \mu_1^2 = \mu_0^2(\lambda_0^2 + \dots + \lambda_J^2) + \mu_1^2 = 1$

Luego $z\mu_0 + \mu_1 x^{J+1}$ determinan una $C_{j+1}$

Lema 1 .

En $P_n(C)$ , un punto x ortogonal a $L_j$ $(j<n)$ depende de $2n-2(j+1)$ parámetros.

Este resultado se justifica directamente por dualidad, y como consecuencia tenemos

Lema 2.

En $P_n(C)$ , un punto ortogonal a una j-cadena depende de $2n-2(j+1)-j$ parámetros, ( $j \leq n-2$) .

TEOREMA 2.

Toda j-cadena en $P_n(C)$ depende de $N(j,n)$ parámetros reales , donde

$$N(j,n) = \frac{4n(j+1) - j(3j+1)}{2}$$

DEMOSTRACION

Haciendo inducción en $j$, vemos que

si $j = 1$, una 1-cadena en $P_n(C)$ es

$$\lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 \quad \text{con} \quad \lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 1 , \qquad \lambda_0, \lambda_1 \in R$$

Por Lema 1 $x^0$ depende de 2n parámetros ; $x^1$ depende de 2n-2 parámetros por pertenecer al hiperplano polar de $x^0$. luego $2n + 2n-2 = 4n-2$ .

Por otro lado

$$N(1,n) = \frac{4n.2-(3+1)}{2} = \frac{8n-4}{2} = 4n-2$$

Supongamos que una j-cadena depende de $N(j,n)$ parámetros y consideremos una $(j+1)$-cadena ; por Teorema 1 y Lema 2 se puede considerar generada por una j-cadena, por lo tanto el número de parámetros de los cuales dependerá será

$$N(j,n) + 2n-2(j+1)-j = \frac{4n(j+1)-j(3j+1)}{2} + 2n-3j-2 =$$

$$= \frac{4n(j+1)-3j^2-j+4n-6j-4}{2} = \frac{4n(j+2)-(j+1)(3j+4)}{2} = N(j+1,n)$$

que es lo afirmado.

Otra demostración del Teorema 2.

Como una $C_j$ queda determinada dando el $L_j$ que la contiene y luego $C_j$ en él , el número de parámetros de que depende será la suma de

a) Número de parámetros de que depende $L_j \subset P_n(C)$ .Si bien conocido para el caso real $P_n(R)$ , es $(n-j)(j+1)$. En el caso complejo será $2(n-j)(j+1)$

b) Fijado $L_j$ , para fijar la j-cadena $C_j$ hay que dar el $(n+1)$-edro $x^0, x^1, \ldots, x^n$ ortonormal, para lo cual hace falta

$j(j+2)$ parámetros (dimensión del grupo $H(n+1)$, [7] pag. 339); pero luego $x^o$ puede variar dentro de la $C_j$ (dimensión $j$ ), $x^1$ dentro de la $C_{j-1}$(omitiendo $x^o$ ),.. o sea hay que restar

$$j+j-1+\dots+1 = \frac{j(j+1)}{2}$$

En total

$$N(j,n)+2(n-j)(j+1)+j(j+2)-\frac{j\,(j+1)}{2}$$

DEFINICION 2.1 : Llamaremos grado de la densidad de j-cadenas en $P_n(C)$ a $N(j,n)$ .

Explicitando algunos casos particulares:

En $P_2(C)$ , coincide con lo expuesto en [5] ,

grado de densidad de $C_1 = N(1,2) = 6$

" " " " $C_2 = N(2,2) = 5$

En $P_3(C)$

grado de densidad de $C_1 = N(1,3) = 10$

" " " " $C_2 = N(2,3) = 11$

" " " " $C_3 = N(3,3) = 9$

DEFINICION 2.2 : Diremos que una n-cadena normal en $P_n(C)$ es <u>propia</u> si no es igual a ninguna (n-j)-cadena normal contenida en ella , con $1 \leq j \leq n-1$ .

TEOREMA 3

Si dos n-cadenas propias en $P_n(C)$ se intersectan en (n+1) puntos distintos, estos son ortogonales entre sí.

DEMOSTRACION

Sean $\lambda_o x^o + \ldots + \lambda_n x^n = \lambda^t . X$ una n-cadena y

$\mu_o y^o + \ldots + \mu_n y^n = \mu^t . Y$ otra n-cadena con

la notación $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_o \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x^o \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix}$ y analoga para $\mu$ e Y

La propiedad de normalización puede expresarse

$$X.\bar{X}^t = \begin{pmatrix} x^o\bar{x}^o & x^o\bar{x}^1 & \ldots & x^o\bar{x}^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^n\bar{x}^o & x^n\bar{x}^1 & \ldots & x^n\bar{x}^n \end{pmatrix} = I$$

siendo I la matriz identidad. Tambien $Y\,\bar{Y}^t = I$

Existe una matriz A tal que

$Y = AX$ , $\bar{Y} = \bar{A}.\bar{X}$ y que satisface

$$I = Y\,\bar{Y}^t = AX\bar{X}^t\bar{A}^t = A\,\bar{A}^t = I$$

(1) $A\bar{A}^t = I \Leftrightarrow \bar{A}.A^t = I \Leftrightarrow \bar{A}^t.A = I \Leftrightarrow A^t\bar{A} = I$

Los puntos comunes a las dos cadenas serán

$\rho\,\lambda^t X = \mu^t Y = \mu^t AX \Rightarrow \rho\,\lambda^t = \mu^t A$ entonces

(2) $\rho . \lambda^t = \mu^t A$ ,con $\lambda$, $\mu$ reales debe ser

(3) $\bar{\rho} . \lambda^t = \mu^t\,\bar{A}$

Separando la parte real e imaginaria y poniendo $\rho = \rho_1 + i\,\rho_2$ queda

$$\rho_1\,\lambda_i = \sum_{h=0}^{n} \mu_h \,\mathrm{Re}\, a_{hi}$$
$$\rho_2\,\lambda_i = \sum_{h=0}^{n} \mu_h \,\mathrm{Im}\, a_{hi} \qquad i:o,1,\ldots,n$$

Las incógnitas son $\lambda_o, \ldots, \lambda_n, \mu_o, \ldots, \mu_n$. Para $\rho_1$ y $\rho_2$ tenemos la ecuación

$$\begin{vmatrix} \rho_1 & & & \text{Re } a_{oo} & \text{Re } a_{o1} & \cdots & \text{Re } a_{on} \\ & \ddots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \rho_1 & \text{Re } a_{no} & \text{Re } a_{n1} & \cdots & \text{Re } a_{nn} \\ \rho_2 & & & \text{Im } a_{oo} & \text{Im } a_{o1} & \cdots & \text{Im } a_{on} \\ & \ddots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \rho_2 & \text{Im } a_{no} & \text{Im } a_{n1} & \cdots & \text{Im } a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

que es de la forma

$$\alpha_o \rho_1^{n+1} + \alpha_1 \rho_1^n \rho_2 + \ldots + \alpha_m \rho_2^{n+1} = 0$$

Tenemos una ecuación de grado $n+1$ en $\dfrac{\rho_2}{\rho_1}$

$$\alpha_o + \alpha_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + \ldots\ldots + \alpha_m \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{n+1} = 0$$

Para cada una de estas raíces tendremos una solución $\lambda_i, \mu_i$ i:0,1,..,n.

Supongamos que tenga $n+1$ raíces distintas, vamos a ver que a raíces distintas $\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)_p$, $\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)_q$ corresponden puntos ortogonales.

Pongamos $\rho_p = \rho_{1p} + i\rho_{2p}$, $\rho_q = \rho_{1q} + i\rho_{2q}$ ; tenemos en matrices

$$\bar{\rho}\ \lambda^t = \mu^t \bar{A}$$ , $\rho$ escalar, $\lambda, \mu$, A matrices

usando (1)

$$\mu^t = \bar{\rho}\ \lambda^t A^t$$ y sustituyendo en (2)

$$\rho . \lambda^t = \bar{\rho}\ \lambda^t A^t A$$ o sea,

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} \lambda^t = \lambda^t A^t A$$ esta es una ecuación que cumplen los autovalores $\dfrac{\rho}{\bar{\rho}}$.

Sean $\dfrac{\rho_p}{\bar{\rho}_p}$ , $\dfrac{\rho_q}{\bar{\rho}_q}$ dos autovalores . Será

$$\frac{\rho_p}{\bar{\rho}_p}\lambda_p^t = \lambda_p^t A^t A \Rightarrow \frac{\rho_p}{\bar{\rho}_p}\lambda_p^t\lambda_q = \lambda_p^t A^t A\,\lambda_q$$

$$\frac{\rho_q}{\bar{\rho}_q}\lambda_q^t = \lambda_q^t A^t A \Rightarrow \frac{\rho_q}{\bar{\rho}_q}\lambda_q^t\lambda_q = \lambda_q^t A^t A\,\lambda_p$$

Restando

$$\left(\frac{\rho_p}{\bar{\rho}_p} - \frac{\rho_q}{\bar{\rho}_q}\right)\lambda_p^t\,\lambda_q = \lambda_p^t A^t A\,\lambda_q - \lambda_q^t A^t A\,\lambda_p = 0$$

la última igualdad por ser $A^t A$ matriz simétrica.

Por tanto, si $p \neq q$

$$\frac{\rho_p}{\bar{\rho}_p} \neq \frac{\rho_q}{\bar{\rho}_q} \Rightarrow \lambda_p^t\lambda_q = 0$$

Es decir, queda la condición de ortogonalidad de los puntos comunes :

$$\xi_p = \rho_p\,\lambda_p^t x\ , \qquad \xi_q = \rho_q\,\lambda_q^t x$$

es

$$(\xi_p, \bar{\xi}_q) = \rho_p\,\bar{\rho}_q\,\lambda_p^t x\,\bar{x}^t\lambda_q = \rho_p\,\bar{\rho}_q\,\lambda_p^t\lambda_q = \delta_{pq}$$

pues si $p = q$ $\quad \rho_p\bar{\rho}_p = 1$ y $\quad \lambda_p^t\lambda_p = 1.$

Con esto queda entonces , que si dos n-cadenas normales se intersectan en $n+1$ puntos distintos estos forman un n- vértice autopolar.

TEOREMA 4.

Sea $C_n$ la n-cadena de ecuación $\lambda_0 x^0 + \ldots + \lambda_n x^n$ con $\lambda_J \in R$ y $\sum_{J=0}^{n} \lambda_J^2 = 1$. Sean $y^0 \ldots, y^n$ $n+1$ puntos de $C_n$ ortogonales entre sí, entonces la cadena $\mu_0 y^0 + \ldots + \mu_n y^n$ con

$\sum_{j=0}^{n} \mu_j^2 = 1$ coincide con la $C_n$ dada.

DEMOSTRACION

Sea $x \in C_n \Rightarrow x = \lambda_0 x^0 + \ldots + \lambda_n x^n$ para alguna $n+1)$-upla $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ con $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j^2 = 1$

Como $y^j \in C_n$ existe una matriz $B \in R^{(n+1)x(n+1)}$ formada por los coeficientes de

$$y^j = \alpha_{oj} x^o + \ldots + \alpha_{nj} x^n \qquad j:0,1,..,n$$

Como les $y^j$ son unitarios y ortogonales entre sí, la matriz $(\alpha_{ij})$ satisface

$$(\alpha_{ij})(\alpha_{ij})^t = I$$

Luego

$$(\lambda_o \ldots \lambda_n)(\alpha_{ij}) = (\mu_o, \ldots \mu_n)$$

y

$$x = \mu_o y^o + \ldots + \mu_n y^n$$ para alguna $(n+1)$-upla $(\mu_o \ldots \mu_n$ que verifica $\sum_{j=0}^{n} \mu_j^2 = 1$

La otra inclusión se demuestra de igual manera usando la matriz $(\alpha_{ij})^t$.-

# CAPITULO III

## DENSIDADES ENTRE ELEMENTOS QUE SE PERTENECEN

En los espacios proyectivos complejos,de cualquier dimensión,no sólo podemos estudiar los subespacios lineales y las cadenas normales sino tambien cada uno de estos elementos en otros, teniendo en cuenta exclusivamente su dimensión.

La notación que usaremos será para " A en B":A(B) y para "A que pasa por B" : A [B] .

### 1. CASOS DE LA RECTA $P_1(C)$

1)$dP(C_1) = w_{01}$

Se refiere a la densidad del punto $P \equiv x^0$ en la cadena $C_1$ $\quad x = \lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 \quad , \quad \sum_{i=0}^{1} \lambda_i^2 = 1 \quad , \quad \lambda_0, \lambda_1 \in R$

Vamos a interpretar geometricamente esta densidad.

Para el punto general x (en vez de $x^0$ ) hay que buscar el conjugado y ( en vez de $x^1$)

Poniendo $\lambda_0 = \cos\varphi$ , $\lambda_1 = \operatorname{sen}\varphi$ ( siempre es posible por ser $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 1$) en $x = \cos\varphi\, x^0 + \operatorname{sen}\varphi\, x^1$

y su conjugado en la misma cadena $C_1$ será

$$y = -\operatorname{sen}\varphi\, x^0 + \cos\varphi\, x^1 \quad , \text{ pues } \quad (x, \bar{y}) = 0$$

Por tanto,

$$dP(C_1) = w_{01} = (dx, \bar{y}) = \quad ,$$
$$= d\varphi\,(-\operatorname{sen}\varphi\, x^0 + \cos\varphi\, x^1 \,,\, -\operatorname{sen}\varphi\, \bar{x}^0 + \cos\varphi\, \bar{x}^1$$
$$= d\varphi$$

Por el método general, la densidad es el producto de todas las formas igualadas a cero. Aquí , $dP(C_1) = w_{01}$

pues $w_{01} = 0$ pero $\overline{w}_{01} = w_{01}$ , al no ser independiente no interviene en la expresión buscada.

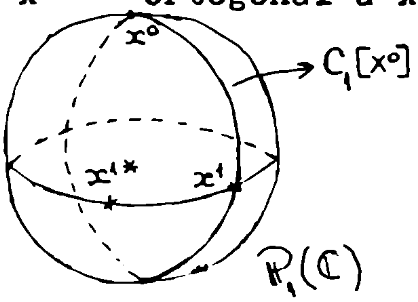
De aquí , la longitud de una 1-cadena es $2\pi$ , como ya sabíamos( cap. II, § 4,a) ).

2) $dC_1[P] = (dx^1, \overline{x}^1) = \beta_{11}$

Se refiere a $P \equiv x^0$ y la $C_1$ de ecuación

$\lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1$ , $\lambda_0, \lambda_1 \in R$ y $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 1$

Para tener una interpretación geométrica tomemos $x^{1*}$ ortogonal a $x^0$ , o sea , $x^{1*} = e^{i\alpha} x^1$.




De aquí, $(dx^{1*}, \overline{x}^{1*}) =$

$= e^{i(\alpha-\alpha)}(dx^1, \overline{x}^1) = (dx^1, \overline{x}^1)$

Si parametrizamos $x^0$, $x^1$ como en capII, § 4,a) tenemos

$x^0 = (\rho_0 , \rho_1 e^{i\theta_1})$

$x^1 = (r_0 e^{i\varphi_0} , r_1 e^{i\varphi_1})$ con $\rho_0^2 + \rho_1^2 = 1$

$r_0^2 + r_1^2 = 1$ y por la ortogonalidad queda

$r_0 \rho_0 + r_1 \rho_1 = 0$ y $\theta_1 = \varphi_1 - \varphi_0$

Un breve cálculo nos da $(dx^1, \overline{x}^1) = d\theta_1$ , de donde

$$\int_{\text{total}} d\, C_1[x^0] \cdot \int_0^{2\pi} d\theta_1 = 2\pi$$

Verifiquemos la siguiente'expresión dual'

$$dP \wedge dC_1[P] = dC_1 \wedge dP(C_1)$$

$dP = w_{01} \wedge \overline{w}_{01} = -2i\, \alpha_{01} \wedge \beta_{01}$ según notación de pag. 19

$dC_1[P] = \beta_{11}$

Así el primer miembro es $-2i\,\alpha_{01} \wedge \beta_{01} \wedge \beta_{11}$

Tambien por lo visto en pag.19

$dC_1 = 2\beta_{01}\beta_{11}$

$dP(C_1) = w_{01} = \alpha_{01} + i\beta_{01}$

El segundo miembro queda

$$2\beta_{01} \wedge \beta_{11} \wedge (\alpha_{01} + i\,\beta_{01}) = 2\beta_{01} \wedge \beta_{11} \wedge \alpha_{01}$$

Luego, salvo un factor constante , tenemos lo afirmado

Resumiendo

a)TABLA DE ELEMENTOS QUE SE PERTENECEN EN $P_1(C)$

| | DENSIDAD | MED. TOTAL |
|---|---|---|
| $P(C_1)$ | $w_{01}$ | $2\pi$ |
| $C_1[P]$ | $\beta_{11}$ | $2\pi$ |

2. CASOS DEL PLANO $P_2(C)$

Sean $x^0, x^1, x^2$ los vértices del triángulo autopolar de referencia; llamamos

$w_{rs} = (dx^r, \bar{x}^s)$ y $w_{rs} - \bar{w}_{rs} = 2i\beta_{rs}$ , $w_{rs} + \bar{w}_{rs} = 2\alpha_{rs}$

con $r,s$: 0,1,2

Los elementos que encontramos en este espacio son punto y recta y cadenas normales uni- y bi-dimensionales,con estos se generan 12 elementos que se pertenecen y que estudiaremos a continuación.

Debemos tener presente que en $P_2(C)$ , punto y recta son duales. Llamaremos en lo que sigue G alas rectas.

1) $dP(G)$

El caso de punto en una recta se reduce a $dP$ en $P_1(C)$ , pag.17 (2.6) ,luego ya sabemos que si $P \equiv x^o$ y $G$ la recta que pasa por $x^o$ ,$x^1$

$$dP(G) = w_{o1} \wedge \bar{w}_{o1} \quad \text{y su medida total} = 2\pi$$

2) $dP(C_1)$

Sea $P \equiv x^o$ y $C_1$ la 1-cadena formada por los puntos

$$\lambda_o x^o + \lambda_1 x^1 \quad \text{con} \quad \lambda_o^2 + \lambda_1^2 = 1 \text{ , } \lambda_o, \lambda_1 \in R$$

Fijemos , ahora, la 1-cadena y tomemos $P$ variando en ella. Esta variación no depende de la dimensión en que se halle $C_1$ , luego, como en $P_1(C)$,

$$dP(C_1) = w_{o1}$$

3)$dP(C_2)$

Como siempre $P \equiv x^o$ y la $C_2$ la 2-cadena normal definida por $\lambda_o x^o + \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$ con $\sum_{J=0}^{2} \lambda_J^2 = 1$ , $\lambda_J \in R$

Afirmación: $dP(C_2) = w_{o1} \wedge w_{o2}$

A partir del caso 1) de pag. 34 y teor. 1 se tiene la justificación de esta afirmación .

4) $dC_1(C_2)$

Nuevamente , $C_2 = \sum_{J=0}^{2} \lambda_J x^j$ y tomemos $C_1$ tal que pase por $x^o, x^1$..

Afirmación:$dC_1(C_2) = \alpha_{o2} \wedge \alpha_{12}$ donde los $\alpha_{ij}$ fueron definidos en pag.19

La invariancia está asegurada. Falta ver que la densidad se encuentra así.

Sea $x\in C_1$ , entonces debe ser

$$dx = \lambda_0\, dx^0 + \lambda_1\, dx^1$$

$$= \sum_i \lambda_0 w_{0i}x^i + \lambda_1\, w_{1i}x^i \qquad (*)$$

Para que pertenezca a $C_2$ , $w_{0i}$ deben ser reales y para que $C_1$ permanezca invariante por los desplazamientos dx, la expresión $(*)$ debe ser de la forma

$$dx = A_0x^0 + A_1x^1$$ es decir, debe ser

$$\lambda_0\,\alpha_{02} + \lambda_1\,\alpha_{12} = 0 \qquad \forall\ \lambda_i$$

entonces $\alpha_{02} = \alpha_{12} = 0$. Según la teoría general

$$dC_1(C_2) = \alpha_{02} \wedge \alpha_{12}$$

Veámoslo desde otro punto de vista. A modo de ejemplificación ,verifiquemos la densidad como lo hace Rohde ([5]) usando exclusivamente referencia móvil.

Ya sabemos que se elige positiva;por ser producto exterior su integral no depende de reparametrizaciones y por ser producto de productos interiores ( parte real ) es invariante por movimientos hermitianos elípticos.

Veámos que está bien definido

Sean, en $C_2$ , $y^0, y^1$ ortogonales entre sí y sea $C_1^*$ la 1-cadena

$$\mu_0 y^0 + \mu_1\ y^1 \qquad \text{con } \mu_0^2+\mu_1^2 = 1 \qquad \mu_j \in R$$

existe $y^2$ perteneciente a $C_2$ , ortogonal a $y^0$ , $y^1$

$$dC_1(C_2) = \left\{(dy^0,\bar{y}^2) + (d\bar{y}^0,y^2)\right\} \wedge \left\{(dy^1,\bar{y}^2) + (d\bar{y}^1,y^2)\right\}$$

Tomemos ahora,

$$y^{0*} = e^{i\alpha}(\cos\varphi\ y^0 + \operatorname{sen}\varphi\ y^1)$$

$$y^{1*} = e^{i\alpha}(\cos\varphi\ y^1 - \operatorname{sen}\varphi\ y^0)$$

$$y^{2*} = \left[\bar{y}^{o*}, \bar{y}^{1*}\right] = e^{-2i\alpha}\left[\bar{y}^{o},\bar{y}^{1}\right] = e^{-2i\alpha}y^{2}$$

$$dC_1^*(C_2^*) = \left\{ (dy^{o*},\bar{y}^{2*}) + (d\bar{y}^{o*},y^{2*}) \right\} \wedge \left\{ (dy^{1*},\bar{y}^{2*}) + (d\bar{y}^{1*},y^{2*}) \right\}$$

$$= \left\{ \left\{ e^{i\alpha}\cos\varphi\,(dy^{o},\bar{y}^{2*}) + e^{i\alpha}\operatorname{sen}\varphi\,(dy^{1},\bar{y}^{2*}) + \right.\right.$$

$$\left. + e^{-i\alpha}\cos\varphi\,(d\bar{y}^{o}, y^{2*}) + e^{-i\alpha}\operatorname{sen}\varphi\,(d\bar{y}^{1},y^{2*}) \right\} \wedge$$

$$\wedge \left\{ e^{i\alpha}\cos\varphi\,(dy^{1},\bar{y}^{2*}) - e^{i\alpha}\operatorname{sen}\varphi\,(dy^{o},\bar{y}^{2*}) + \right.$$

$$\left.\left. + e^{-i\alpha}\cos\varphi\,(d\bar{y}^{1},y^{2*}) - e^{-i\alpha}\operatorname{sen}\varphi\,(d\bar{y}^{o},y^{2*}) \right\}\right\} =$$

$$= \left\{ \cos\varphi \left\{ e^{i\alpha}(dy^{o},\bar{y}^{2*}) + e^{-i\alpha}(d\bar{y}^{o},y^{2*}) \right\} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}\varphi \left\{ e^{i\alpha}(dy^{1},\bar{y}^{2*}) + e^{-i\alpha}(d\bar{y}^{1},y^{2*}) \right\} \right\} \wedge$$

$$\wedge \left\{ \cos\varphi \left\{ e^{i\alpha}(dy^{1},\bar{y}^{2*}) + e^{-i\alpha}(d\bar{y}^{1},y^{2*}) \right\} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sen}\varphi \left\{ e^{i\alpha}(dy^{o},\bar{y}^{2*}) + e^{-i\alpha}(d\bar{y}^{o},y^{2*}) \right\} \right\} =$$

$$= \cos^2\varphi \left\{ e^{2i\alpha}(dy^{o},\bar{y}^{2*})\wedge(dy^{1},\bar{y}^{2*}) + (d\bar{y}^{o},y^{2*})\wedge(dy^{1},\bar{y}^{2*}) \right.$$

$$\left. + (dy^{o},\bar{y}^{2*})\wedge(d\bar{y}^{1},y^{2*}) + e^{-2i\alpha}(d\bar{y}^{o},y^{2*})\wedge(d\bar{y}^{1},y^{2*}) \right\} -$$

$$- \operatorname{sen}^2\varphi \left\{ e^{2i\alpha}(dy^{1},\bar{y}^{2*})\wedge(dy^{o},\bar{y}^{2*}) + (d\bar{y}^{1},y^{2*})\wedge(dy^{o},\bar{y}^{2*}) + \right.$$

$$\left. + (dy^{1},\bar{y}^{2*})\wedge(d\bar{y}^{o},y^{2*}) + e^{-2i\alpha}(d\bar{y}^{1},y^{2*})\wedge(d\bar{y}^{o},y^{2*}) \right\} =$$

$$= \cos^2\varphi \left\{ (dy^{o},\bar{y}^{2})\wedge(dy^{1},\bar{y}^{2}) + (d\bar{y}^{o},y^{2})\wedge(dy^{1},\bar{y}^{2}) + \right.$$

$$\left. + (dy^{o},\bar{y}^{2})\wedge(d\bar{y}^{1},y^{2}) + (d\bar{y}^{o},y^{2})\wedge(d\bar{y}^{1},y^{2}) \right\} +$$

$$+ \operatorname{sen}^2\varphi \left\{ (dy^{o},\bar{y}^{2})\wedge(dy^{1},\bar{y}^{2}) + (dy^{o},\bar{y}^{2})(d\bar{y}^{1},y^{2}) + \right.$$

$$\left. + (d\bar{y}^{o},y^{2})\wedge(dy^{1},\bar{y}^{2}) + (d\bar{y}^{o},y^{2})\wedge(d\bar{y}^{1},y^{2}) \right\} =$$

$$=(dy^o,\bar{y}^2)\wedge(dy^1,\bar{y}^2)+(d\bar{y}^o,y^2)\wedge(dy^1,\bar{y}^2)+(dy^o,\bar{y}^2)\wedge(d\bar{y}^1,y^2)+$$

$$+(d\bar{y}^o,y^2)\wedge(d\bar{y}^1,y^2)= \quad dC_1(C_2)$$

5) $dG[P]$

Por Rohde, [5], ya sabemos que este resultado es dual de $dP(G)$.

6) $dC_1[P]$

Dado el punto $P \equiv x^o$ fijo, sea $x^1$ perteneciente a su recta polar. Sea, ahora, $C_1$ la 1-cadena generada por $x^o$, $x^1$. La variación de $C_1$ que pasa por P fijo dependerá directamente (exclusivamente) de la variación de $x^1$ en la recta G polar de $x^o$. Luego, llamando $dC_1^1[P]$ a la densidad de $C_1$ que pasa por P en la recta compleja $x^ox^1$ y $dx^1(G)$ a la densidad de $x^1$ en G se tiene

$$dC_1[P] = dC_1^1[P]\wedge dx^1(G)$$

Como cada uno de los factores verifica la invariancia, tambien el producto.

7) $dC_2[P]$

Dado $P \equiv x^o$, sea G su recta polar; tomamos en G, $x^1$ $x^2$ ortogonales entre sí. Para cada $x^1$, $x^2$ queda univocamente determinada $C_2$.

Así, si $C_2$ es la 2-cadena $\sum_{J=0}^{2}\lambda_J x^J$ con $\sum_{J=0}^{2}\lambda_J^2=1$

$\lambda_J \in R$, la variación de $C_2$ que pasa por $x^o$ dependerá de $x^1$; es decir, de la variación de la 1-cadena generada por $x^o$, $x^1$, y luego, de la variación de la 1-cadena que pasa por $x^1, x^2$, que llamaremos $C_1^*$.

Con esto

$$dC_2[P] = dC_1[P] \wedge dC_1^*$$

8) $dC_2[C_1]$

Tomando, a partir del teor. 1, una $C_2$ generada por la 1-cadena fija, la variación es análoga a la de 1-cadena que pasa por un punto fijo, es decir

$$dC_2[C_1] = \beta_{22}$$

9) $dG(C_1)$

Como la $\dim_R G = 2$ y $\dim_R C_1 = 1$ no cabe considerar este caso.

10) $dG(C_2)$, $dG[C_2]$, $dC_2(G)$

Estos casos quedan excluídos pues $\dim_R G = \dim_R C = 2$

3. $dP(C_2)$ = ELEMENTO DE AREA DE LA ESFERA $S_2$

Sean $x^o$, $x^1$, $x^2$ los vértices del triángulo autopolar de referencia. Fijamos una 2-cadena $C_2$ que pasa por $x^o, x^1, x^2$ y en ella tres puntos ortogonales entre sí, X,Y,Z, es decir

$$X = \lambda_o x^o + \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$$

$$(1) \qquad Y = \nu_o x^o + \nu_1 x^1 + \nu_2 x^2$$

$$Z = \mu_o x^o + \mu_1 x^1 + \mu_2 x^2$$

con $\sum_{i=0}^{2} \lambda_i^2 = \sum_{i=0}^{2} \nu_i^2 = \sum_{i=0}^{2} \mu_i^2 = 1$

$$\sum_{i=0}^{2} \lambda_i \nu_i = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i \mu_i = \sum_{i=0}^{2} \nu_i \mu_i = 0$$

Con esto sabemos que siendo $P \equiv X$

$$dP(C_2) = (dX,\bar{Y})(dX,\bar{Z})$$

y si en $R^3$ consideramos la esfera unidad ,los tres vectores

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \qquad \nu = (\nu_0, \nu_1, \nu_2) \qquad \mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2)$$

el elemento de área correspondiente al extremo de $\lambda$ es

$$d\sigma = (\nu_0 \mu_1 - \nu_1 \mu_0 \; d\lambda_0 d\lambda_1 + (\nu_2 \mu_0 - \nu_0 \mu_2) d\lambda_0 d\lambda_2 + (\nu_1 \mu_2 - \nu_2 \mu_1) d\lambda_1 d\lambda_2$$

En el sistema (1), siendo $C_2$ fija , se tiene :

$$dX = d\lambda_0 x^0 + d\lambda_1 x^1 + d\lambda_2 x^2$$

$$(dX,\bar{Y}) = \nu_0 \, d\lambda_0 + \nu_1 \, d\lambda_1 + \nu_2 \, d\lambda_2$$

$$(dX,\bar{Z}) = \mu_0 \, d\lambda_0 + \mu_1 \, d\lambda_1 + \mu_2 \, d\lambda_2$$

Agrupando convenientemente y cuidando el signo del producto exterior

$$(dX,\bar{Y})\wedge(dX,\bar{Z}) = dP(C_2) = d\sigma$$

Integrando sobre todas las variables tenemos que

$$\text{med. total } P(C_2) = \int_{\text{total}} dP(C_2) = \int d\sigma = \text{ área esfera} = 4\pi$$

4.MEDIDAS TOTALES DE ALGUNOS ELEMENTOS QUE SE PERTENECEN EN $P_2(C)$

En base a las densidades halladas anteriormente tenemos que se verifican las siguientes expresiones:

(1) $\qquad dP \wedge dC_1 \, [P] = dC_1 \wedge dP(C_1)$

(2) $$dP \wedge dC_2[P] = dC_2 \wedge dP(C_2)$$

(3) $$dC_1 \wedge dC_2[C_1] = dC_2 \wedge dC_1(C_2)$$

Integrando sobre todo el espacio en (1), según lo anterior y [5] , que nos dice que

$\int_{tot.} dP = 2\pi^2$ y $\int_{tot.} dC_1 = 4\pi^3$ , obtenemos

med. total $C_1[P] = 2\pi . 4\pi^3 (2\pi^2)^{-1} = 4\pi^2$

En (2), si $P \equiv x^o$, al considerar la $C_2$

$$\lambda_o x^o + \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \quad \text{con } \lambda_J \in R \text{ y } \sum \lambda_J^2 = 1,$$

fijando $x^o$ , queda la $C_1^1 = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$; fijando $x^1$ queda la $C_1^{1*} = \lambda_o x^o + \lambda_2 x^2$ y fijando $x^2$ queda la

$C_1^{1**} = \lambda_o x^o + \lambda_1 x^1$ , es decir, al integrar estamos considerando la misma cadena $C_2$ tres veces. Por tanto

$$\int_{total} dP \int_{tot.} dC_2[P] = 3 \int_{tot.} dC_2 . \int_{tot.} dP(C_2)$$

reemplazando de [5] y lo anterior queda :

$$3 . 4\pi \frac{2}{3}\pi^3 = 2\pi^2 . \text{med. total } C_2[P] \qquad \text{entonces}$$

$$\text{med. total } C_2[P] = 4\pi^2$$

Tambien observamos de la pag. 22 y 41 que

$$dC_2[P] = dC_2[C_1] \wedge dC_1^1 = \beta_{22} \wedge \beta_{11} \wedge \beta_{01}$$

Integrando

$$\text{med. total } C_2[C_1] = 4\pi^2(2\pi)^{-1} = 2\pi$$

Con esto en (3) vemos que si $C_1$ es la 1-cadena que pasa por $x^o, x^1$ debe ser $C_2$ la generada por $C_1$ y $x^2$, variando $C_1$ por los vértices $x^1$ , $x^2$ y $x^2$ , $x^o$ como en la página anterior, el caso es análogo a la variación de punto en la 2-cadena, luego al integrar

$$3\int dC_1\,(C_2)\cdot\int dC_2 = \int dC_1\cdot\int dC_2\,[C_1]$$

reemplazando

$$\text{med. total } C_1(C_2) = (3\tfrac{2}{3}\pi^3)^{-1}.4\pi^3.2\pi = 4\pi$$

lo que reafirma la analogía con punto en la 2-cadena.

Resumiendo, en $P_2(C)$ :

## 5.TABLA DE ELEMENTOS EN $P_2(C)$:

Se halla en la página siguiente.

Recordemos que los paréntesis A(B) significan que la variedad A se supone variable dentro de la variedad B que la contiene, y los corchetes A [B] indican que la variedad A contiene siempre ala variedad B . Por eso en el caso A(B) debe ser dimA < dim B , y en el caso A [B] debe ser dim A > dim B .

| | DENSIDAD | MED. TOTAL |
|---|---|---|
| P | $w_{01} \wedge w_{02} \wedge \bar{w}_{01} \wedge \bar{w}_{02}$ | $2\pi^2$ |
| G | $w_{02} \wedge w_{12} \wedge \bar{w}_{02} \wedge \bar{w}_{12}$ | $2\pi^2$ |
| $C_1$ | $\beta_{01} \wedge \beta_{00} \wedge w_{02} \wedge w_{12} \wedge \bar{w}_{02} \wedge \bar{w}_{12}$ | $4\pi^3$ |
| $C_2$ | $\beta_{01} \wedge \beta_{02} \wedge \beta_{12} \wedge \beta_{00} \wedge \beta_{11}$ | $\frac{2}{3}\pi^3$ |
| $P(G)$ | $w_{01} \wedge \bar{w}_{01}$ | $2\pi$ |
| $P(C_1)$ | $w_{01}$ | $2\pi$ |
| $P(C_2)$ | $w_{01} \wedge w_{02}$ | $4\pi$ |
| $C_1(C_2)$ | $\alpha_{02} \wedge \alpha_{12}$ | $4\pi$ |
| $G[P]$ | $w_{01} \wedge \bar{w}_{01}$ | $2\pi$ |
| $C_1[P]$ | $\beta_{11} \wedge w_{01} \wedge \bar{w}_{01}$ | $4\pi^2$ |
| $C_2[P]$ | $\beta_{12} \wedge \beta_{11} \wedge \beta_{22}$ | $4\pi^2$ |
| $C_2[C_1]$ | $\beta_{22}$ | $2\pi$ |

## 6. CASOS EN $P_3(C)$

En este espacio se encuentran puntos , rectas y planos como subespacios lineales y cadenas normales uni, bi, y tridimensionales, por lo que podemos estudiar 19 elementos que se pertenecen.

Como notación , llamaremos P,G, E a punto , recta y plano respectivamente, y $C_1$ , $C_2$ , $C_3$ , a las cadenas donde el subíndice indica su dimensión ; en caso de posiple confusión indicaremos $C_r^n$ a una r-cadena normal en $P_n(C)$, eventualmente, n,r:1,2,3, $n>r$ .

1) dP(G)

Es equivalente a dP en $P_1(C)$ .(pag.19)

2) dP(E)

Es equivalente a dP en $P_2(C)$ , aplicando (2.6) de pag. 17.

3) $dP(C_1)$

Por idénticas consideraciones a las hechas en $P_2(C)$

$$dP(C_1^1) = dP(C_1^3) \qquad \text{en pag. } 34$$

4) $dP(C_2)$

Idem 3) . $\qquad dP(C_2^3) = dP(C_2^2) \qquad$ en pag,37

5) $dP(C_3)$

Como se demuestra en pag.

$$dP(C_3) = w_{o1} \wedge w_{o2} \wedge w_{o3} \qquad \text{con } P \equiv x^o \text{ y}$$

$x^o, x^1, x^2, x^3$ como referencia.

6) dG(E)

Es equivalente a dG en $P_2(C)$ que se obtiene aplicando (2.6) .

7) $dC_1(E)$

Es equivalente a $dC_1$ en $P_2(C)$ dada por Rohde,[5] .

8) $dC_1(C_2^1)$

Nuevamente,$C_2$ es fija, luego $C_1$ en $C_2$ no depende de la dimensión de $P_n(C)$, y

$$dC_1^3(C_2^3) = dC_1^2(C_2^2) = \alpha_{02} \wedge \alpha_{12} \quad \text{según caso 4) de } P_2(C).$$

9) $dC_1(C_3)$

Sean $y^o, y^1$, dos puntos ortogonales entre sí pertenecientes a la cadena $C_3$. Con ellos podemos generar una 1-cadena en $C_3$. Cada uno de estos pares de puntos determina una recta y por lo tanto, otra ( polar de la anterior ) de manera unívoca.

Tomemos en la recta polar $y^2, y^3$ ortogonales entre sí; con $y^o, y^1, y^2, y^3$ se genera una 3-cadena que coincide con $C_3$ ( teor. 4 ) dada, luego, salvo signo, según notación de pag. 19

$$dC_1(C_3) = dC_1(C_2) \wedge dC_1(C_2^*) = \alpha_{02} \wedge \alpha_{12} \wedge \alpha_{03} \wedge \alpha_{13}$$

donde $\alpha_{ij} = (dy^i, \bar{y}^j) + (d\bar{y}^i, y^j)$ con $i$: o,1 $j$: 2,3

y $dC_1(C_2)$ indica la densidad de $C_1$ en la 2-cadena generada por $y^o, y^1, y^2$ ; $dC_1(C_2^*)$ la densidad de $C_1$ en la 2-cadena generada por $y^o, y^1, y^3$,.

10) $dC_2(C_3)$

Sean $x^o, x^1, x^2$ tres puntos ortogonales entre sí pertenecientes a la 3-cadena $C_3$. Estos generan una 2-cadena y determinan un punto $x^3$ ortogonal a los mencionados y tal que $x^o, x^1, x^2, x^3$ generan la $C_3$ dada. Luego, la variación de $C_2$ en $C_3$ fija está dada por la variación de $x^o$, $x^1$, $x^2$ en $C_3$ ,; recordando $dC_1^2(C_2^2)$, es

$$dC_2(C_3) = \alpha_{03} \wedge \alpha_{13} \wedge \alpha_{23}$$

11) $dG[P]$

Dado $P \equiv x^o$ fijo , la variación de una recta G que pasa por P queda expresada por la variación de otro punto de la recta , $x^1$ , respecto de $x^2, x^3$ que completan los vértices del tetraedro de referencia , por lo tanto:

$$dG[P] \doteq w_{12} \wedge w_{13} \wedge \bar{w}_{12} \wedge \bar{w}_{13}$$

12) $dE[P]$

Sea $P \equiv x^o$; un plano queda determinado por tres puntos sean estos $x^o, x^1, x^2$ ortogonales entre sí. La variación del plano que pasa por $x^o$ es la variación de $x^1$, $x^2$ en el sistema $x^o, x^1, x^2, x^3$ con $x^o$ fijo, o sea,

$$dE[P] = w_{13} \wedge w_{23} \wedge \bar{w}_{13} \wedge \bar{w}_{23}$$

13) $dE[G]$

En $P_3(C)$ plano y punto son elementos duales, por lo tanto, si G pasa por $x^o, x^1$ , el plano E determinado por $x^o, x^1$, $x^2$ tiene como variación la del punto $x^2$ en la recta que pasa por $x^2$, $x^3$ . Con esto según (2.6)

$$dE[G] = w_{23} \wedge \bar{w}_{23}$$

14) $dC_1[P]$

La densidad de una 1-cadena que pasa por un punto fijo debe ser igual a la densidad de una 1-cadena en una recta que pasa por dicho punto por la densidad de la recta en $P_3(C)$ que pasa por un punto dado , es decir,

$$dC_1[P] = dC_1^1[P] \wedge dG[P] = \beta_{11} \wedge w_{12} \wedge w_{13} \wedge \bar{w}_{12} \wedge \bar{w}_{13}$$

donde G es la recta que pasa por $x^o, x^1$; P $x^o$ y el último miembro con la notación ya usada anteriormente.

15) $dC_2[P]$

Analogamente al 14) la variación de una 2-cadena que pase por $P \equiv x^o$ será la variación de $x^1, x^2$ ortogonales entre sí, en $P_3(C)$, luego

$$dC_2[P] = dC_2^2[P] \wedge dE[P]$$

siendo E el plano que contiene a $C_2$.

16) $dC_2[C_1]$

Consideremos $C_2$ generada por $x^o, x^1, x^2$ y $C_1$ generada por $x^o, x^1$. Si $G^*$ es la recta dual de la recta $x^o x^1$ quedará según pag. 17 y 45

$$dC_2[C_1] = dC_2^2[C_1] \wedge dx^2(G^*) = \beta_{22} \wedge w_{23} \wedge \bar{w}_{23}$$

17) $dC_3[P]$

Sea $P \equiv x^o$, elijamos $x^1, x^2, x^3$ en el plano polar de $x^o$ de modo que $x^i$, $i:0,..,3$ verifiquen

$(x^i, \bar{x}^j) = \delta_{ij}$ $i,j;0,..,3$. Como $x^o$ es fijo, en la densidad de $C_3$ son cero las formas pfaffianas en que aparece $dx^o$, luego

$$dC_3[P] = \beta_{12} \wedge \beta_{13} \wedge \beta_{23} \wedge \beta_{11} \wedge \beta_{22} \wedge \beta_{33}$$

18) $dC_3[C_1]$

En toda r-cadena hay contenidas s-cadenas si $s < r$ y además $(s+1)$ puntos ortogonales elegidos en $C_s$ generan la misma $C_s$, (teor.4).

Ahora, $r=3$, $s=1$ , en $dC_3[C_1]$ sólo intervienen las formas pfaffianas $\beta_{ij}$ que no dependen de los puntos que generan la 1-cadena, es decir

$$dC_3[C_1] = \beta_{22} \wedge \beta_{33} \wedge \beta_{23}$$

Si $C_1$ pasa por $x^o$, $x^1$ en la referencia $x^o$ ,$x^1$ , $x^2$ , $x^3$ , y $\beta_{ij} = (dx^i, \bar{x}^j) - (d\bar{x}^i, x^j)$

19) $dC_3[C_2]$

Analogamente a 16) y caso 8) del cap.III, § 2

$$dC_3[C_2] = \beta_{33}$$

7. $dP(C_3) =$ ELEMENTO DE VOLUMEN DE LA ESFERA $S_3$

Respecto de $x^o, x^1, x^2, x^3$ vértices del tetraedro fundamental de referencia , siendo $P \equiv x^o$

$$dP(C_3) = (dx^o, \bar{x}^1) \wedge (dx^o, \bar{x}^2) \wedge (dx^o , \bar{x}^3)$$

Sean ahora, X,Y , Z,V puntos ortonormales de $C_3$ , entonces :

$$X = \lambda_o^o x^o + \lambda_o^1 x^1 + \lambda_o^2 x^2 + \lambda_o^3 x^3$$

$$Y = \lambda_1^o x^o + \lambda_1^1 x^1 + \lambda_1^2 x^2 + \lambda_1^3 x^3$$

$$Z = \lambda_2^o x^o + \lambda_2^1 x^1 + \lambda_2^2 x^2 + \lambda_2^3 x^3$$

$$V = \lambda_3^o x^o + \lambda_3^1 x^1 + \lambda_3^2 x^2 + \lambda_3^3 x^3$$

Con la matriz $\left(\lambda_i^j\right)$ i,j:0,..,3 real y unitaria. Los $\lambda_i^j$ deben ser reales pues X,Y,Z,V pertenecen a la cadena.

Dejando fija la cadena normal tenemos :

$$dX = d\lambda_0^0\, x^0 + d\lambda_0^1\, x^1 + d\lambda_0^2\, x^2 + d\lambda_0^3\, x^3$$

$$(dX,\bar{Y}) = \lambda_1^0\, d\lambda_0^0 + \lambda_1^1 d\lambda_0^1 + \lambda_1^2 d\lambda_0^2 + \lambda_1^3 d\lambda_0^3$$

$$(dX,\bar{Z}) = \lambda_2^0\, d\lambda_0^0 + \lambda_2^1 d\lambda_0^1 + \lambda_2^2 d\lambda_0^2 + \lambda_2^3 d\lambda_0^3$$

$$(dX,\bar{V}) = \lambda_3^0\, d\lambda_0^0 + \lambda_3^1 d\lambda_0^1 + \lambda_3^2 d\lambda_0^2 + \lambda_3^3 d\lambda_0^3$$

Ahora,

$$\begin{aligned}(dX,\bar{Y})\wedge(dX,\bar{Z}) = {} & \lambda_1^1\, \lambda_2^0 d\lambda_0^1\wedge d\lambda_0^0 + \lambda_1^2\, \lambda_2^0\, d\lambda_0^2\wedge d\lambda_0^0 + \\ & + \lambda_1^3\, \lambda_0^3 d\lambda_0^3\wedge d\lambda_0^0 + \lambda_1^0\, \lambda_2^1\, d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^1 + \lambda_1^2\, \lambda_2^1\, d\lambda_0^2\wedge d\lambda_0^1 + \\ & + \lambda_1^3\, \lambda_2^1 d\lambda_0^3\wedge d\lambda_0^1 + \lambda_1^0\, \lambda_2^2\, d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^2 + \lambda_1^1\, \lambda_2^2\, d\lambda_0^1\wedge d\lambda_0^2 + \\ & + \lambda_1^3\, \lambda_2^2 d\lambda_0^3\wedge d\lambda_0^2 + \lambda_1^0 \lambda_2^3\, d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^3 + \lambda_1^1 \lambda_2^3\, d\lambda_0^1\wedge d\lambda_0^3 + \\ & + \lambda_1^2\, \lambda_2^3\, d\lambda_0^2 \wedge d\lambda_0^3\end{aligned}$$

Agrupando :

$$\begin{aligned}(dX,\bar{Y})\wedge(dX,\bar{Z}) = {} & (\lambda_1^0 \lambda_2^1 - \lambda_1^1 \lambda_2^0)\, d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^1 + (\lambda_1^0 \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^0) d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^2 + \\ & + (\lambda_1^0 \lambda_2^3 - \lambda_1^3 \lambda_2^0)\, d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^3 + (\lambda_1^1\, \lambda_2^2 - \lambda_1^2\, \lambda_2^1) d\lambda_0^1 \wedge d\lambda_0^2 + \\ & + (\lambda_1^1 \lambda_2^3 - \lambda_2^1 \lambda_1^3) d\lambda_0^1 \wedge d\lambda_0^3 + (\lambda_1^2 \lambda_2^3 - \lambda_1^3 \lambda_2^2) d\lambda_0^2 \wedge d\lambda_0^3\end{aligned}$$

$$(dX,\bar{Y})\wedge(dX,\bar{Z})\wedge(dX,\bar{V}) = \lambda_3^0(\lambda_1^1 \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^1) d\lambda_0^1\wedge d\lambda_0^2\wedge d\lambda_0^0 +$$

$$+\lambda_0^3(\lambda_1^1\lambda_2^3-\lambda_2^1\lambda_1^3)d\lambda_0^1\wedge d\lambda_0^3\wedge d\lambda_0^0+\lambda_3^0(\lambda_1^1\lambda_2^3-\lambda_1^3\lambda_2^1)d\lambda_0^2\wedge d\lambda_0^3\wedge d\lambda_0^0$$

$$+\lambda_3^1(\lambda_1^0\lambda_2^2-\lambda_1^2\lambda_2^0)\, d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^2\wedge d\lambda_0^1+\lambda_3^1(\lambda_1^0\lambda_2^3-\lambda_1^3\lambda_2^0)d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^3\wedge d\lambda_0^1$$

$$+\lambda_3^1(\lambda_1^2\lambda_2^3-\lambda_1^3\lambda_2^2)d\lambda_0^2\wedge d\lambda_0^3\wedge d\lambda_0^1+\lambda_3^2(\lambda_1^0\lambda_2^1-\lambda_1^1\lambda_2^0)d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^1\wedge d\lambda_0^2$$

$$+\lambda_3^2(\lambda_1^0\lambda_2^3-\lambda_1^3\lambda_2^0)d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^3\wedge d\lambda_0^2+\lambda_3^2(\lambda_1^1\lambda_2^3-\lambda_2^1\lambda_1^3)d\lambda_0^1\wedge d\lambda_0^3\wedge d\lambda_0^2$$

$$+\lambda_3^3(\lambda_1^0\lambda_2^1-\lambda_1^1\lambda_2^0)d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^1\wedge d\lambda_0^3+\lambda_3^3(\lambda_1^0\lambda_2^2-\lambda_1^2\lambda_2^0)d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^2\wedge d\lambda_0^3$$

$$+\lambda_3^3(\lambda_1^1\lambda_2^2-\lambda_1^2\lambda_2^1)d\lambda_0^1\wedge d\lambda_0^2\wedge d\lambda_0^3 =$$

$$(\lambda_1^0\lambda_2^1\lambda_3^2-\lambda_2^0\lambda_1^1\lambda_3^2+\lambda_2^0\lambda_3^1\lambda_1^2-\lambda_1^0\lambda_3^1\lambda_2^2+\lambda_3^0\lambda_1^1\lambda_2^2-\lambda_3^0\lambda_2^1\lambda_1^2)d\lambda_0^0\wedge$$

$$\wedge d\lambda_0^1\wedge d\lambda_0^2+(\lambda_1^0\lambda_2^1\lambda_3^3-\lambda_2^0\lambda_1^1\lambda_3^3+\lambda_2^0\lambda_3^1\lambda_1^3-\lambda_1^0\lambda_3^1\lambda_2^3+\lambda_3^0\lambda_1^1\lambda_2^3-$$

$$-\lambda_3^0\lambda_2^1\lambda_1^3)d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^1\wedge d\lambda_0^3+(\lambda_1^0\lambda_2^2\lambda_3^3-\lambda_2^0\lambda_1^2\lambda_3^3+\lambda_2^0\lambda_3^2\lambda_1^3-$$

$$-\lambda_1^0\lambda_3^2\lambda_2^3+\lambda_3^0\lambda_1^2\lambda_2^3-\lambda_3^0\lambda_2^2\lambda_1^3)d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^2\wedge d\lambda_0^3+$$

$$+(\lambda_1^1\lambda_2^2\lambda_3^3-\lambda_2^1\lambda_1^2\lambda_3^3+\lambda_2^1\lambda_3^2\lambda_1^3-\lambda_1^1\lambda_3^2\lambda_2^3+\lambda_3^1\lambda_1^2\lambda_2^3-\lambda_3^1\lambda_2^2\lambda_1^3)d\lambda_0^1$$

$$\wedge d\lambda_0^2\wedge d\lambda_0^3$$

**El coeficiente numérico de cada sumando es el determinante del menor complementario de la matriz $(\lambda_i^j)$ por la primera fila. Esta matriz de transformación tiene determinante 1 (uno) y es sabido (Santaló,[8])**

$$\lambda_i^j = \mathrm{adj}(i/j) \qquad \textbf{de donde queda}$$

$$(dX,\bar{Y})\wedge(dX,\bar{Z})\wedge(dX,\bar{V})=\lambda_0^3\, d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^1\wedge d\lambda_0^2+\lambda_0^2 d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^1\wedge d\lambda_0^3+$$

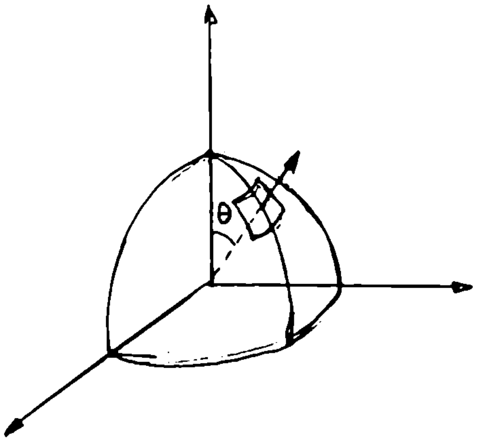
$$+\lambda_0^1 d\lambda_0^0\wedge d\lambda_0^2\wedge d\lambda_0^3+\lambda_0^0 d\lambda_0^1\wedge d\lambda_0^2\wedge d\lambda_0^3$$

Por otro lado, considerando la esfera de ecuación $(\lambda^0)^2+(\lambda^1)^2+(\lambda^2)^2+(\lambda^3)^2=1$, su elemento de volumen satisface

$$d\lambda^0\, d\lambda^1\, d\lambda^2 = ds^3.\lambda^3$$

donde $\lambda^3$ es $\cos\theta$ con $\theta=$ ángulo formado por el eje y un vector de la esfera .

Si consideramos el elemento de volumen respecto de los distintos hiperplanos posibles queda:




$$d\lambda^0\wedge d\lambda^1\wedge d\lambda^2 = ds^3.\lambda^3$$

$$d\lambda^0\wedge d\lambda^1\wedge d\lambda^3 = ds^3.\lambda^2$$

$$d\lambda^0\wedge d\lambda^2\wedge d\lambda^3 = ds^3.\lambda^1$$

$$d\lambda^1\wedge d\lambda^2\wedge d\lambda^3 = ds^3.\lambda^0$$

Multiplicando cada igualdad por el $\lambda^J$ que aparece en el 2º miembro y sumando queda

$$ds^3 = \lambda^3 d\lambda^0\wedge d\lambda^1\wedge d\lambda^2+\lambda^2 d\lambda^0\wedge d\lambda^1\wedge d\lambda^3+\lambda^1 d\lambda^0\wedge d\lambda^2\wedge d\lambda^3+\lambda^0 d\lambda^1\wedge d\lambda^2\wedge d\lambda^3$$

Esto , junto con la última igualdad de la pag. 52 nos dice que el elemento de volumen de la esfera $S_3$ correspondiente al extremo del vector $(\lambda_0^0, \lambda_0^1, \lambda_0^2, \lambda_0^3)$ es $dP(C_3)$ y su medida total es $2\pi^2$.

## 8. MEDIDAS TOTALES DE ALGUNOS ELEMENTOS QUE SE PERTENECEN EN $P_3(C)$ .

Podemos comprobar con facilidad que se verifican las identidades:

(1) $$dP \wedge dG[P] = dG \wedge dP(G)$$

(2) $$dP \wedge dE[P] = dE \wedge dP(E)$$

(3) $$dP \wedge dC_1^3[P] = dC_1 \wedge dP(C_1^3)$$

(4) $$dP \wedge dC_2^3[P] = dC_2 \wedge dP(C_2^3)$$

(5) $$dP \wedge dC_3[P] = dC_3 \wedge dP(C_3)$$

(6) $$dC_2 \wedge dC_3[C_2] = dC_3 \wedge dC_2'(C_3)$$

Integrando sobre todo el espacio se tiene :

de (1) , según pag. 26

$$\text{med. total } G[P] = \frac{4}{3}\pi^4 . 2\pi(\frac{4}{3}\pi^3)^{-1} = 2\pi^2$$

de (2), por dualidad

$$\text{med total } E[P] = 2\pi^2$$

de (3)

$$\text{med. total } C_1[P] = \frac{8}{3}\pi^5 . 2\pi(\frac{4}{3}\pi^3)^{-1} = 4\pi^2$$

de (5) queremos hallar la medida total de una 3-cadena que pasa por un punto. Tomemos $P \equiv x^o$ , al considerar la $C_3$ $\lambda_0 x^o + \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$, fijando $x^o$ queda la 2-cadena $C_2^2 = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$ . Al medir, es decir, al integrar tenemos la medida de la 2-cadena ; fijando $x^1$ tendremos la medida de la 2-cadena $\lambda_0 x^o + \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$ y analogamente fijando alternativamente $x^2$ ,$x^3$ y luego integrando.

Es decir, al variar el vértice que fijamos y luego integrar contamos la 2-cadena , 4 veces. Por tanto, de (5)

$$\int dP.\int dC_3[P] = 4\int C_3 .\int dP(C_3) \qquad (*)$$

Un razonamiento idéntico puede hacerse en cada $P_n(C)$ y obtenemos

$$\int dP.\int dC_n^n[P]=(n+1)\int C_n^n .\int dP(C_n)$$

Por otro lado ,tenemos en caso 17) que

$$dC_3[P]=\beta_{12}\wedge\beta_{13}\wedge\beta_{23}\wedge\beta_{11}\wedge\beta_{22}\wedge\beta_{33}$$ podemos pensar los cinco primeros factores correspondientes a la densidad de la 2-cadena $C_2$ que pasa por $x^1,x^2,x^3$ y recordando de [6] que

$$\int w_{jj} = \int\beta_{jj} = 2\pi$$ , nos queda

$$dC_3^3[P]= dC_2^2\wedge\beta_{33}$$ , integrando, según [5]

$$\int dC_3^3[P]=\frac{2}{3}\pi^3 .2\pi = \frac{4}{3}\pi^4$$

Volviendo a (*) y reemplazando por los valores hallados en pag. 18 y 53

$$\int_{total} dC3=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\pi^4\right).\frac{4}{3}\pi^3(2\pi^2)^{-1}= \frac{2}{9}\pi^5$$

De (4), según pag. 18, 26 y 41

$$\text{med,total } C_2^3[P]= \frac{8}{9}\pi^6 . 4\pi\left(\frac{4}{3}\pi^3\right)^{-1}= \frac{8}{3}\pi^4$$

Nuevamente , de [6]

$$\int \beta_{33} = 2\pi \quad \text{entonces} \quad \text{med.total } C_3[C_2] = \int \beta_{33} = 2\pi$$

A partir de (6) , encontramos una situación análoga a la de (5), pag. 54, al integrar, ya que variando la 2-cadena fijada se cuenta 4 veces, la misma medida, entonces

$$\int dC_2^3 \cdot \int dC_3[C_2] = 4\int dC_3 \cdot \int dC_2(C_3)$$

reemplazando según pag. 26 y lo anterior , queda

$$\text{med.total } C_2(C_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{9}\pi^6 \cdot 2\pi\left(\frac{2}{9}\pi^5\right)^{-1} = 2\pi^2$$

Por dualidad, $dE[G] = dP(G)$ , luego med. total $E[G] = 2\pi$

Analogamente a lo visto para 1-cadenas y 2-cadenas en $P_2(C)$ , sabemos que se verifica

$$dC_1 \wedge dC_3[C_1] = dC_3 \wedge dC_1(C_3) \qquad \text{y al integrar}$$

estamos contando las 1-cadenas 6 veces , queda

$$\int dC_1 \cdot \int dC_3[C_1] = 6\int dC_3 \cdot \int dC_1(C_3)$$

reemplazando

$$\frac{8}{3}\pi^5 \cdot 4\pi^2 = 6 \cdot \frac{2}{9}\pi^5 \cdot \text{med. total } C_1(C_3)$$

$$\text{med. total } C_1(C_3) = 8\pi^2$$

Con esto, de pag. 45 tenemos

$$\int dC_2^3[C_1^3] : \int dC_2^2[C_1^2] \wedge \int dL_2^3[G] = 4\pi^2$$

Resumiendo,

## 9. TABLA DE ELEMENTOS QUE SE PERTENECEN EN $P_3(C)$.

| | DENSIDAD | MED. TOTAL |
|---|---|---|
| $P(G)$ | $w_{01} \wedge \bar{w}_{01}$ | $2\pi$ |
| $P(E)$ | $w_{01} \wedge w_{02} \wedge \bar{w}_{01} \wedge \bar{w}_{02}$ | $2\pi$ |
| $P(C_1)$ | $w_{01}$ | $2\pi$ |
| $P(C_2)$ | $w_{01} \wedge w_{02}$ | $4\pi$ |
| $P(C_3)$ | $w_{01} \wedge w_{02} \wedge w_{03}$ | $2\pi^2$ |
| $G(E)$ | $w_{02} \wedge w_{12} \wedge \bar{w}_{02} \wedge \bar{w}_{12}$ | $2\pi^2$ |
| $C_1(E)$ | $\beta_{01} \wedge \beta_{11} \wedge w_{02} \wedge w_{12} \wedge \bar{w}_{02} \wedge \bar{w}_{12}$ | $4\pi^3$ |
| $C_1(C_2)$ | $\alpha_{02} \wedge \alpha_{12}$ | $4\pi$ |
| $C_1(C_3)$ | $\alpha_{02} \wedge \alpha_{12} \wedge \alpha_{03} \wedge \alpha_{13}$ | $8\pi^2$ |
| $C_2(C_3)$ | $\alpha_{03} \wedge \alpha_{13} \wedge \alpha_{23}$ | $2\pi^2$ |
| $G[P]$ | $w_{12} \wedge w_{13} \wedge \bar{w}_{12} \wedge \bar{w}_{13}$ | $2\pi^2$ |
| $E[P]$ | $w_{13} \wedge w_{23} \wedge \bar{w}_{13} \wedge \bar{w}_{23}$ | $2\pi^2$ |
| $E[G]$ | $w_{23} \wedge \bar{w}_{23}$ | $2\pi$ |
| $C_1[P]$ | $\beta_{11} \wedge w_{12} \wedge w_{13} \wedge \bar{w}_{12} \wedge \bar{w}_{13}$ | $4\pi^3$ |
| $C_2[P]$ | $\beta_{12} \wedge \beta_{11} \wedge \beta_{22} \wedge w_{13} \wedge w_{23} \wedge \bar{w}_{13} \wedge \bar{w}_{23}$ | $\frac{8}{3}\pi^4$ |
| $C_2[C_1]$ | $\beta_{22} \wedge w_{23} \wedge \bar{w}_{23}$ | $4\pi^2$ |

continua

| | DENSIDAD | MED.TOTAL |
|---|---|---|
| $C_3[P]$ | $\beta_{12}\wedge\beta_{13}\wedge\beta_{23}\wedge\beta_{11}\wedge\beta_{22}\wedge\beta_{33}$ | $\frac{4\pi^4}{3}$ |
| $C_3[C_1]$ | $\beta_{22}\wedge\beta_{33}\wedge\beta_{23}$ | $4\pi^2$ |
| $C_3[C_2]$ | $\beta_{33}$ | $2\pi$ |

10. $dP(C_n^n)$ ELEMENTO DE VOLUMEN DE LA ESFERA $S_n$

A) En $P_n(C)$ la densidad de un punto en una n-cadena normal es:

$$dP(C_n) = \bigwedge_{J=1}^{n} w_{0J} \qquad \text{si} \quad P \equiv x^0 \ \text{y} \quad w_{0J} = (dx^0, \bar{x}^J)$$

lo demostraremos usando sólo referencia móvil.

Se elige positivo; por ser producto de productos interiores no varía cuando los $x^i$ son transformados por movimientos hermitianos elípticos .

Veamos por inducción que no depende del punto elegido.

Sean

$$\begin{cases} y^0 = e^{i\alpha}\, x^0 \\ y^h = \sum_{J=1}^{n} a_{hJ}\, x^J \qquad h:1,\dots,n \end{cases}$$

La matriz de la transformación , A , está dada por

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & (a_{hJ}) \end{pmatrix}$$

Por cap. I, pag. 1, sabemos que A y $e^{i\alpha}.A$ definen la misma transformación , por lo tanto, podemos considerar la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (a'_{hj}) \end{pmatrix}$$ y para nuestros fines,

directamente $(a'_{hj})$

Indicaremos con un asterisco la densidad respecto de los nuevos puntos( $dP^*(C^*_n)$ ) .

Para $r = 2$, hemos visto cap III, § 3 , que

$$dP^*(C^*_2) = \det (a'_{pq}).dP(C_2) = dP(C_2) \qquad p,q:1,2$$

Supongamos que para $r = n-1$ se verifica:

$$\begin{cases} y^o = e^{i\alpha} x^o \\ y^h = \sum_{j=1}^{n-1} a'_{hj} x^j & h:1,..,n-1 \end{cases}$$

$$dP^*(C^*_{n-1}) = \det A.\ dP(C_{n-1}) = dP(C_{n-1})$$

Para $r = n$ tenemos :

$$\begin{cases} y^o = e^{i\alpha} x^o \\ y^h = \sum_{j=1}^{n} a'_{hj} x^j & h:1,..,n \end{cases}$$

Tambien podríamos escribir

$$\begin{cases} y^o = e^{i\alpha} x^o \\ y^h = \sum_{j=1}^{n} a'_{hj} x^j & h:1,..,n-1 \\ y^n = \sum_{j=1}^{n} a'_{nj} x^j \end{cases}$$

Llamaremos $dP(C_{n-1}[x^o,..,\widehat{x^i},..,x^n])$ densidad de un punto en la (n-1)-cadena que pasa por $x^o,..,x^n$ y no pasa por $x^i$ .

Por la hipótesis inductiva

$$dP^*(C^*_{n-1}[y^o,..,y^{n-1},\widehat{y^n}]) = \det B_{nn}\ dP(C_{n-1}[x^o,..,x^{n-1},\widehat{x^n}])$$

donde $B_{nn}$ es la matriz $A$ suprimiendo fila y columna n-sima, o sea,

$$B_{nn} = \text{Adj } (n/n)$$

En general,

$$dP^*(C^*_{n-1}[y^o,..,\widehat{y^i},..,y^n]) = \sum_{i=1}^{m} \text{Adj } A(n/i)\ dP(C_{n-1}[x^o,..,\widehat{x^i},..,x^n])$$

Un cálculo cuidadoso nos da

$$(dy^o,\overline{y}^1)\wedge..\wedge(dy^o,\overline{y}^{n-1}) = \sum_{h=1}^{m} \text{Adj } A(n/h)\ dP(C_{n-1}[x^o,..,\widehat{x^h},..,x^n])$$

Ahora ,

$$(dy^o,\overline{y}^1)\wedge...\wedge(dy^o,\overline{y}^{n-1})\wedge(dy^o,\overline{y}^n) =$$

$$= \sum_{h=1}^{m} \text{Adj } A(n/h)\ dP(C_{n-1}[x^o,..,\widehat{x^h},..x^n])\wedge(dy^o,\overline{y}^n)$$

$$= \sum_{h=1}^{m} \text{Adj } A(n/h) dP(C_{n-1}[x^o,..,\widehat{x^h},..,x^n]) \wedge (a'_{n1}(dx^o,\overline{x}^1) + \dots + a'_{nn}(dx^o,\overline{x}^n)) =$$

$$\sum_{h=1}^{m} \text{Adj } A(n/h)\ a'_{nh}\ dP(C_{n-1}[x^o,..,\widehat{x^h},..,x^n])\wedge(dx^o,\overline{x}^h) =$$

$$= \det A \ .\ dP(C_n) = dP(C_n)$$

b) $dP(C^n_r)$ elemento de volumen de la esfera $S_r$

Sea $C_r$ la cadena dterminada por los vértices $x^o,..,x^r$

Tomemos $(r+1)$ puntos en $C_r$ ortonormales :

$y^j = \sum_{s=0}^{r} \alpha_s^J x^s$ , $(\alpha_s^J)$ matriz de orden $r+1$ , unitaria.

Es sabido que si $P \equiv x^o$, $dP(C_r) = \bigwedge_{J=1}^{r} (dy^o, \bar{y}^j)$

Siendo $C_r^n$ fija , los $x^s$ son fijos , entonces

$$dy^o = \sum_{s=0}^{r} d\alpha_s^o x^s \qquad \text{y por ortogonalidad}$$

$$(dy^o, \bar{y}^J) = \sum_{s=0}^{r} d\alpha_s^o \alpha_s^J \qquad j:1,..,r$$

con esto ,

$$\bigwedge_{J=1}^{r} (dy^o, \bar{y}^J) = \bigwedge_{J=1}^{r} \sum_{s=0}^{r} \alpha_s^J d\alpha_s^o$$

$$= \sum_{\substack{J=0 \\ i_m \in \text{perm}\{0,1,..,\hat{j},..,n\} = \pi \\ m: \{0,1,..,\hat{j},..,r\}}}^{r} (-1)^{sg.\pi} \alpha_{i_1}^1 \cdot \cdot \hat{\ } \cdot \cdot \alpha_{i_r}^r \, d\alpha_o^o \wedge .. \wedge \widehat{d\alpha_J^o} \wedge .. \wedge d\alpha_r^o$$

$$= \sum_{\substack{J=0 \\ i_p < i_q \text{ si } p<q \\ i_p \in \{0,1,..,\hat{j},.r\}}}^{r} \alpha_{i_1}^1 \alpha_{i_2}^2 .. \alpha_{i_r}^r \, d\alpha_o^o \wedge d\alpha_1^o \, .. \wedge \widehat{d\alpha_J^o} \wedge .. \wedge d\alpha_r^o$$

En el último miembro de la igualdad anterior cada coeficiente es el determinante del menor complementario del elemento $\alpha_s^o$ con $s:0,1,..,r$ .-

Recordemos que

$$\alpha_s^o = \text{Adj } A(0/s) \qquad \text{por lo que queda}$$

(1) $dP(C_r^m) = \sum_{J:0}^{r} \alpha_J^o \, d\alpha_o^o \wedge .. \wedge \widehat{d\alpha_J^o} \wedge .. \wedge d\alpha_r^o$

Por otro lado , considerando las proyecciones sobre cada eje cartesiano $\alpha_J$ con $J:0,1,..,r$ , llamando $ds^r$ al elemento de volumen , se tiene

$$d\alpha_0 \wedge d\alpha_1 \wedge \dots \wedge d\alpha_{n-1} = ds^r \cdot \alpha_r$$

$$d\alpha_0 \wedge d\alpha_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d_{r-1}} = ds^r \alpha_{r-1}$$

.................................

$$d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 \wedge \dots \wedge d\alpha_r = ds^r \alpha_0$$

multiplicando cada expresión por el $\alpha_s$ que figura en el 2º miembro y sumando , como $\sum_{J=0}^{r} \alpha_J^2 = 1$ , queda

$$ds^r = \sum_{J=0}^{r} \alpha_J d\alpha_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\alpha_J} \wedge \dots \wedge d\alpha_r$$

De (1) , se tiene

$$dP(C_r^n) = ds^r \quad .-$$

# CAPITULO IV

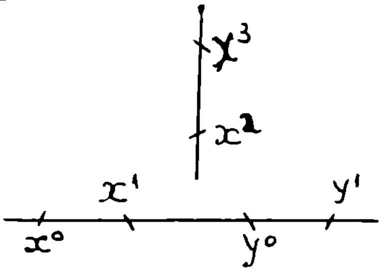
## DENSIDAD DE PARES DE ELEMENTOS

### 1. DENSIDADES DE PARES DE SUBESPACIOS LINEALES

a) Pares de puntos

Sean $P_1$ , $P_2$ dos puntos dados. Consideremos los tetraedros autopolares de referencia $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ , $(y^0, y^1, y^2, y^3)$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $P_1 \equiv x^0$, $P_2 \equiv y^0$ ; $x^0, x^1$, $y^0, y^1$ colineales $y^2 \equiv x^2$ y , $x^3 \equiv y^3$.




Así, de pag. 17, la densidad de pares de puntos es , salvo un factor constante :

$$dP_1 \wedge dP_2 = (dx^0,\bar{x}^1) \wedge (dx^0,\bar{x}^2) \wedge (dx^0,\bar{x}^3) \wedge (d\bar{x}^0,x^1) \wedge (d\bar{x}^0,x^2) \wedge$$

$$\wedge (d\bar{x}^0,\bar{x}^3) \wedge (dy^0,\bar{y}^1) \wedge (dy^0,\bar{y}^2) \wedge (dy^0,\bar{y}^3) \wedge (d\bar{y}^0,y^1) \wedge$$

$$\wedge (d\bar{y}^0,y^2) \wedge (d\bar{y}^0,y^3) \qquad (*)$$

Teniendo en cuenta la colinealidad mencionada hacemos

$$y^0 = \lambda x^1 + \mu x^0 \quad \text{con} \quad \lambda = (y^0,\bar{x}^0) \ , \quad \mu = (y^0,\bar{x}^1)$$

$$(dy^0,\bar{x}^2) = \lambda(dx^1,\bar{x}^2) + \mu(dx^0,\bar{x}^2)$$

$$(dy^0,\bar{x}^3) = \lambda(dx^1,\bar{x}^3) + \mu(dx^0,\bar{x}^3)$$

Sea $r = \text{dist}(x^0,y^0)$ entonces $\lambda\bar{\lambda} = 1 - \mu\bar{\mu} = 1 - \cos^2\frac{r}{2} = \text{sen}^2\frac{r}{2}$

reemplazando en (*)

$$dP_1 \wedge dP_2 = (dx^0,\bar{x}^1) \wedge (d\bar{x}^0,x^1) \wedge (dy^0,\bar{y}^1) \wedge (d\bar{y}^0,y^1) \wedge (dx^0,\bar{x}^2) \wedge$$

$$\wedge (d\bar{x}^0,x^2) \wedge (dx^0,\bar{x}^3) \wedge (d\bar{x}^0,x^3) \wedge (dx^1,\bar{x}^2) \wedge (d\bar{x}^1,x^2) \wedge$$

$\wedge(dx^1,\bar{x}^3)\wedge(d\bar{x}^1,x^3)\;(\lambda\bar{\lambda})^2$

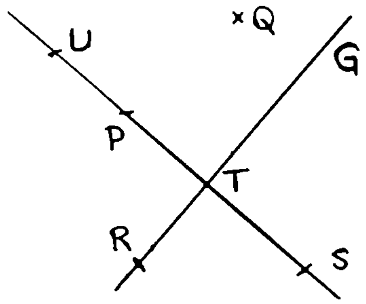
Llamando G a la recta que pasa por $x^0$, $y^0$ queda, pag. 17

$$(4.1)\qquad dP_1\wedge dP_2 = \operatorname{sen}^4\frac{r}{2}\; dG\wedge dP_1(G)\wedge dP_2(G)$$

b) Punto y recta

Sean, respectivamente , P y G , punto y recta dados. Llamemos E al plano que ellos determinan y Q al polo de dicho plano. Consideremos los vértices (P,Q,R,S) y (T,R,Q,U).

Para ser consecuentes con la notación anterior llamemes $P\equiv x^0$ , $R\equiv x^1$ , $S\equiv x^2$ , $Q\equiv x^3$ , $U\equiv y^1$ , $T\equiv y^2$




Por pag. 17,

$$dP = (dx^0,\bar{x}^3)\wedge(d\bar{x}^0,x^3)\wedge(dx^0,\bar{x}^1)\wedge$$
$$\wedge(d\bar{x}^0,x^1)\wedge(dx^0,\bar{x}^2)\wedge(d\bar{x}^0,x^2)$$ y

$$dG = (dy^2,\bar{x}^3)\wedge(d\bar{y}^2,x^3)\wedge(dy^2,\bar{y}^1)\wedge$$
$$\wedge(d\bar{y}^2,y^1)\wedge(dx^1,\bar{x}^3)\wedge(d\bar{x}^1,x^3)\wedge(dx^1,\bar{y}^1)\wedge(d\bar{x}^1,y^1)$$

Por ser colineales,

$P = \lambda T + \mu U$ , $\lambda = (P,\bar{T})$ , llamando $r = \text{dist}\,(P,T)$:

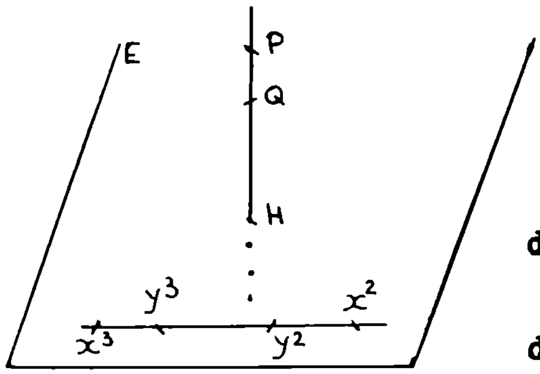
$$\lambda\bar{\lambda} = 1 - \mu\bar{\mu} = \cos^2\frac{r}{2}$$

Ahora , usando [5], pag. 17 y 57

$$(4.2)\qquad dP\wedge dG = \mu\bar{\mu}\, dE\wedge dG(E)\wedge dP(E) = \operatorname{sen}^2\frac{r}{2}\; dE\wedge dG(E)\wedge$$
$$\wedge dP(E)$$

c) Punto y plano

Sean P y E los dados; llamemos Q al polo de E y H al pie de la normal G a E por P. Entonces P,Q,H son colineales. Tomemos como vértices de tetraedros autoconjugados $(P,H,x^2,x^3)$ , $(Q,H,y^2,y^3)$ con $y^2,y^3,x^2,x^3$ colineales. En lo que sigue llamaremos $P \equiv x^0$ , $H \equiv x^1$ , $Q \equiv y^0$ , y $d = \text{dist}\,(Q,H)$




$$G = \overline{QH} - \overline{QP} = \overline{HP}$$

Ahora,

$$dP(G) = (dx^0,\bar{x}^1) \wedge (d\bar{x}^0,x^1)$$

$$dH(G) = (d\bar{x}^1,y^0) \wedge (dx^1,\bar{y}^0) \quad .$$

$$dP \wedge dE = (dx^0,\bar{x}^1) \wedge (d\bar{x}^0,x^1) \wedge (dx^0,\bar{x}^2) \wedge (d\bar{x}^0,x^2) \wedge (dx^0,\bar{x}^3) \wedge$$
$$\wedge (d\bar{x}^0,x^3) \wedge (dx^1,\bar{y}^0) \wedge (d\bar{x}^1,y^0) \wedge (dx^2,\bar{y}^0) \wedge (d\bar{x}^2,y^0) \wedge (dx^3,\bar{y}^0) \wedge$$
$$\wedge (dx^3,\bar{y}^0)$$

Tomando

$$y^0 = \lambda x^0 + \mu x^1 \quad , \quad \lambda = (y^0,\bar{x}^0) \quad \mu = (y^0,\bar{x}^1)$$

$$\mu\bar{\mu} = \cos^2 \frac{\hat{d}}{2}$$

$$(dx^2,\bar{y}^0) = \bar{\lambda}(dx^2,\bar{x}^0) + \bar{\mu}(dx^2,\bar{x}^1)$$
$$(dx^3,\bar{y}^0) = \bar{\lambda}(dx^3,\bar{x}^0) + \bar{\mu}(dx^3,\bar{x}^1)$$

Reemplazando , queda

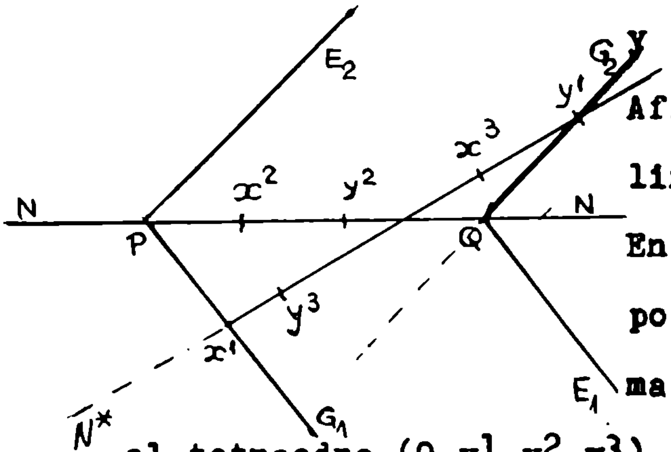
$$dP \wedge dE = (\mu\bar{\mu})^2 dP(G) \wedge dH(G) \wedge (d\bar{x}^0,x^2) \wedge (dx^0,\bar{x}^2) \wedge (d\bar{x}^0,x^3) \wedge (dx^0,\bar{x}^3) \wedge$$
$$\wedge (dx^2,\bar{x}^1) \wedge (d\bar{x}^2,x^1) \wedge (dx^3,\bar{x}^1) \wedge (d\bar{x}^3,x^1)$$

Usando pag. 17 y 57

$$(4.3)\qquad dP \wedge dE = \cos^4 \frac{d}{2}\, dP(G) \wedge dH(G) \wedge dG$$

d) Par de rectas

Sean $G_1$, $G_2$, las rectas dadas; llamemos N a la recta normal a $G_1$, y $G_2$ en P y Q respectivamente; $E_1$ el plano determinado por G y Q; $E_2$ el plano determinado por $G_2$ y P. Tomemos los cuadrivérticos autoconjugados $(P,x^1,x^2,x^3)$ y $(Q,y^1,y^2,y^3)$.




Afirmación: $x^3$, $y^3$, $x^1$, $y^1$ son colineales.

En $(P,x^1,x^2,x^3)$ la recta $x^1x^3$ es polar de la recta $Px^2$. Esta última coincide con la recta $Qy^2$, que en el tetraedro $(Q,y^1,y^2,y^3)$ es polar de la recta $y^1y^3$, luego $y^3,y^1,x^3,x^1$ son colineales.

Ahora, de pag. 17

$$dG_1 = (d\bar{P},x^2) \wedge (dP,\bar{x}^2) \wedge (d\bar{P},x^3) \wedge (dP,\bar{x}^3) \wedge (dx^1,\bar{x}^2) \wedge (d\bar{x}^1,x^2) \wedge$$
$$\wedge (dx^1,\bar{x}^3) \wedge (d\bar{x}^1,x^3)$$

$$dG_2 = (dQ,\bar{y}^2) \wedge (d\bar{Q},y^2) \wedge (dQ,\bar{y}^3) \wedge (d\bar{Q},y^3) \wedge (d\bar{y}^1,y^2) \wedge (dy^1,\bar{y}^2) \wedge$$
$$\wedge (d\bar{y}^1,y^3) \wedge (dy^1,\bar{y}^3)$$

Es conveniente tener presente que

$$dN = (dQ,\bar{y}^1) \wedge (d\bar{Q},y^1) \wedge (dQ,\bar{y}^3) \wedge (dQ,y^3) \wedge (dy^2,\bar{y}^3) \wedge (d\bar{y}^2,y^3) \wedge$$
$$\wedge (dy^2,\bar{y}^1) \wedge (d\bar{y}^2,y^1)$$

y que por colinealidad, podemos escribir

$$x^1 = ay^3 + by^1 \qquad , \qquad x^2 = \lambda y^2 + \mu Q$$

entonces

$$(dx^1,\bar{x}^2) = a\bar{\lambda}(dy^3,\bar{y}^2) + a\bar{\mu}(dy^3,\bar{Q}) + b\bar{\lambda}(dy^1,\bar{y}^2) + b\bar{\mu}(dy^1,\bar{Q})$$

tomando

$$P = ry^2 + sQ \qquad , \qquad x^3 = \alpha y^3 + \beta y^1$$

$$(dP,\bar{x}^3) = r\bar{\alpha}(dy^2,\bar{y}^3) + r\bar{\beta}(dy^2,\bar{y}^1) + s\bar{\alpha}(dQ,\bar{y}^3) + s\bar{\beta}(dQ,\bar{y}^1)$$

Considerando sólo los factores que intervendrán en $dG_1 \wedge dG_2$ se tiene

$$(dx^1,\bar{x}^2)\wedge(d\bar{x}^1,x^2)\wedge(dP,\bar{x}^3)\wedge(d\bar{P},x^3) = (\lambda\bar{\lambda}\, a\bar{a}\beta\bar{\beta} s\bar{s} - \mu\bar{\mu} b\bar{b}\alpha\bar{\alpha} r\bar{r}) .$$
$$.(dy^3,\bar{y}^2)\wedge(d\bar{y}^3,y^2)\wedge(d\bar{Q},y^1)\wedge(dQ,\bar{y}^1)$$

$$(dP,\bar{x}^2)\wedge(d\bar{P},x^2) = dP(N) \qquad \text{y}$$

$$(dQ,\bar{y}^2)\wedge(d\bar{Q},y^2) = dQ(N) \qquad \text{por, pag. 57 ,}$$

Reemplazando con estos datos, salvo signo , queda

$$dG_1 \wedge dG_2 = (\lambda\bar{\lambda}\, a\bar{a}\beta\bar{\beta} s\bar{s} - \mu\bar{\mu} b\bar{b}\alpha\bar{\alpha} r\bar{r}) dP(N) \wedge dQ(N) \wedge dN \wedge (dy^1,\bar{y}^3)\wedge$$
$$\wedge(d\bar{y}^1,y^3)\wedge(dx^1,\bar{x}^3)\wedge(d\bar{x}^1,x^3)$$

Como sobre N se miden distancias, sobre su polar $N^*$ se miden ángulos diedros alrededor de N.

Hemos llamado

$d$ = distancia entre P y Q

$\theta$ = ángulo de los planos $E_1$, $E_2$

Entonces

$$a\bar{a} = (x^1,\bar{y}^3) . (\bar{x}^1,y^3) = \cos^2\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right) = \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\lambda\bar{\lambda} = (x^2,\bar{y}^2) . (\bar{x}^2,y^2) = \cos^2 \frac{d}{2}$$

$\beta\bar{\beta}:(x^3,\bar{y}^1)(\bar{x}^3,y^1) = \cos^2\frac{\pi-\theta}{2} = \quad \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$

$\alpha\bar{\alpha}:(x^3,\bar{y}^3)(\bar{x}^3,y^3) = \cos^2\frac{\theta}{2}$

$s\bar{s} = (P,\bar{Q})(\bar{P},Q) = \quad \cos^2\frac{d}{2}$

$r\bar{r} = (P,\bar{y}^2)(P,y^2) = \cos^2\frac{d(P,y^2)}{2} = \quad 1-s\bar{s} = \operatorname{sen}^2\frac{d}{2}$

$b\bar{b} = (x^1,\bar{y}^1)(\bar{x}^1,y^1) = \cos^2\frac{\theta}{2}$

$\mu\bar{\mu} = (\bar{x}^2,Q)(x^2,\bar{Q}) = \operatorname{sen}^2\frac{d}{2}$

Reemplazando queda

$$dG_1 \wedge dG_2 = (\cos^4\frac{d}{2}\ \operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^4\frac{d}{2}\cos^4\frac{\theta}{2})\ dP(N)\wedge dQ(N)\wedge dN\wedge .$$

$$\wedge(dy^1,\bar{y}^3)\wedge(d\bar{y}^1,y^3)\wedge(dx^1,\bar{x}^3)\wedge(d\bar{x}^1,x^3)$$

Con la notación definida en cap. III, pag. 34, se tiene

$$(4.4)\quad dG_1 \wedge dG_2 = (\cos^4\frac{d}{2}\ \operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^4\frac{d}{2}\ \cos^4\frac{\theta}{2})\ dP(N)\wedge$$

$$\wedge dQ(N)\wedge dN\wedge dG_1[P]\wedge dG_2[Q]$$

e) Recta y plano

El resultado deberá ser dual del caso b).

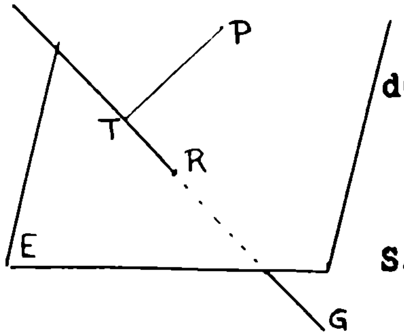
Sea G y E la recta y el plano cuyas densidades buscamos . Llamemos P al polo de E y en el plano determinado por G y P se toma la perpendicular a G por P, sea T el pie de dicha perpendicular.

Llamemos $R = E \cap G$ , y $S = \overline{PT} \cap E$.

Consideremos los tetraedros $(P,Q,R,S)$ y $(Q,R,T,U)$ con $S,T,P,U$ colineales ; o, con la notación habitual $P \equiv x^0$ ,$Q \equiv x^1$ , $R \equiv x^2$ ,$S \equiv x^3$ , $T \equiv y^2$ ,$U \equiv y^3$

Ahora , de pag.17

$$dE = (dx^1,\bar{x}^0)\wedge(d\bar{x}^1,x^0)\wedge(dx^2,\bar{x}^0)\wedge(d\bar{x}^2,x^0)\wedge(dx^3,\bar{x}^0)\wedge(d\bar{x}^3,x^0)$$




$$dG = (dy^2,\bar{x}^1)\wedge(d\bar{y}^2,x^1)\wedge(dy^2,\bar{y}^3)\wedge(d\bar{y}^2,y^3)\wedge$$

$$\wedge(dx^2,\bar{x}^1)\wedge(d\bar{x}^2,x^1)\wedge(dx^2,\bar{y}^3)\wedge(d\bar{x}^2,y^3)$$

Salvo signo , podemos escribir

$$dG\wedge dE = dG[R]\wedge dE[R]\,(dx^2,\bar{x}^0)\wedge(d\bar{x}^2,x^0)\wedge(dx^2,\bar{x}^1)\wedge(d\bar{x}^2,x^1)\wedge$$

$$\wedge(dx^2,\bar{y}^3)\wedge(d\bar{x}^2,y^3)$$

Como $P = \lambda T + \mu U$ .

$$(dx^2,\bar{x}^0) = \bar{\lambda}(dx^2,\bar{y}^2) + \bar{\mu}(dx^2,\bar{y}^3) \qquad \text{donde}$$

$\lambda = (P,\bar{T})$ $\qquad \lambda\bar{\lambda} = \cos^2\frac{d}{2}$ $\qquad$ con $d = \text{dist}(P,T)$

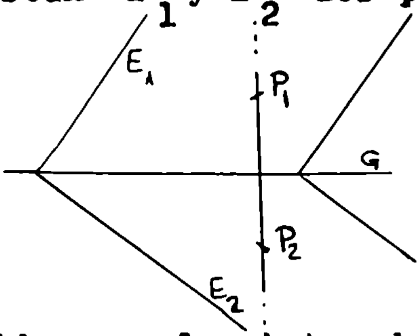
Ahora,

$$dG\wedge dE = \lambda\bar{\lambda}\; dG[R]\wedge dE[R]\wedge dR \qquad \text{o sea ,}$$

$$dG\wedge dE = \cos^2\frac{d}{2}\; dG[R]\wedge dE[R]\wedge dR \tag{4.5}$$

f) Par de planos

Sean $E_1$ y $E_2$ los planos a considerar; $P_1$ y $P_2$ los polos de dichos planos . Sea $G$ la recta en que se intersectan $E_1$ y $E_2$ .




Llamando $P_1 \equiv x^0$ , $P_2 \equiv y^0$ consideremos los tetraedros autoconjugados de vértices

$(x^o, x^1, x^2, x^3)$ , $(y^o, y^1, y^2, y^3)$ donde $x^o, x^2, y^o, y^3$ son colineales y tambien lo son $x^1, y^1, y^2, x^3$ .

Ahora , por pag. 17 ,

$$dE_1 = (dx^2, \bar{x}^o) \wedge (d\bar{x}^2, x^o) \wedge (dx^1, \bar{x}^o) \wedge (d\bar{x}^1, x^o) \wedge (dx^3, \bar{x}^o) \wedge (d\bar{x}^3, x^o)$$

$$dE_2 = (dy^3, \bar{y}^o) \wedge (d\bar{y}^3, y^o) \wedge (dy^1, \bar{y}^o) \wedge (d\bar{y}^1, y^o) \wedge (dy^2, \bar{y}^o) \wedge (d\bar{y}^2, y^o)$$

Sea $x^1 = \lambda\, y^1 + \mu\, y^2$ entonces

$$(dx^1, \bar{x}^o) = \lambda\, (dy^1, \bar{x}^o) + \mu (dy^2, \bar{x}^o)$$

Escribiendo $x^o = a\, y^3 + b\, y^o$ queda,

$$(dx^1, \bar{x}^o) = \lambda\, \bar{a}\, (dy^1, \bar{y}^3) + \lambda\, \bar{b}\, (dy^1, \bar{y}^o) + \mu\, \bar{a}\, (dy^2, \bar{y}^3) +$$
$$+ \mu\, \bar{b}\, (dy^2, \bar{y}^o)$$

El 2º y 4º sumandos , al incluirlos en el producto $dE_1 \wedge dE_2$ son cero, entonces :

$$dE_1 \wedge dE_2 = a\, \bar{a}\, (dx^2, \bar{x}^o) \wedge (d\bar{x}^2, x^o) \wedge \left\{ \lambda (dy^1, \bar{y}^3) + \mu (dy^2, \bar{y}^3) \right\} \wedge$$
$$\wedge \left\{ \bar{\lambda} (d\bar{y}^1, y^3) + \bar{\mu} (d\bar{y}^2, y^3) \right\} \wedge (dx^3, \bar{x}^o) \wedge (d\bar{x}^3, x^o) \wedge (d\bar{y}^3, y^o) \wedge$$
$$\wedge (dy^1, \bar{y}^o) \wedge (d\bar{y}^1, y^o) \wedge (dy^2, \bar{y}^o) \wedge (d\bar{y}^2, y^o)$$

Tomando ahora, $x^3 = \alpha\, y^1 + \beta\, y^2$ queda

$$(dx^3, \bar{x}^o) = \bar{a}\, \alpha\, (dy^1, \bar{y}^3) + \bar{a}\, \beta\, (dy^2, \bar{y}^3) + \bar{b}\, \alpha\, (dy^1, \bar{y}^o) + \bar{b}\beta (dy^2, \bar{y}^o)$$

Con esto , cuidando el orden de los factores en el producto exterior ,

$$dE_1 \wedge dE_2 = (a\ \bar{a})^2 (dx^2,\bar{x}^0)\ (d\bar{x}^2,x^0) \Big\{ \lambda\bar{\lambda}\ (dy^1,\bar{y}^3)\wedge(d\bar{y}^1,y^3)+$$
$$\mu\bar{\mu}(dy^2,\bar{y}^3)\wedge(d\bar{y}^2,y^3)+\lambda\bar{\mu}\ (dy^1,\bar{y}^3)\wedge(d\bar{y}^2,y^3)\ +$$
$$+\bar{\lambda}\mu(d\bar{y}^1,y^3)\wedge(dy^2,\bar{y}^3)\Big\}\wedge \Big\{ \alpha\ (dy^1,\bar{y}^3)\ +\beta\,(dy^2,\bar{y}^3)\Big\}\wedge$$
$$\wedge\Big\{\bar{\alpha}\,(d\bar{y}^1,y^3)+\bar{\beta}\ (d\bar{y}^2,y^3)\Big\}\wedge (dy^3,\bar{y}^0)\wedge(d\bar{y}^3,y^0)\wedge(dy^1,\bar{y}^0)\wedge$$
$$\wedge(d\bar{y}^1,y^0)\wedge(dy^2,\bar{y}^0)\wedge(d\bar{y}^2,y^0)$$

$$dE_1\wedge dE_2\ =\ (a\ \bar{a})^2 (dx^2,\bar{x}^0)\wedge(d\bar{x}^2,x^0)\wedge\Big\{\lambda\bar{\lambda}\beta\bar{\beta}(dy^1,\bar{y}^3)\wedge(d\bar{y}^1,y^3)\wedge$$
$$\wedge(dy^2,\bar{y}^3)\wedge(d\bar{y}^2,y^3)+\mu\bar{\mu}\ \alpha\ \bar{\alpha}\ \ (dy^2,\bar{y}^3)\wedge(d\bar{y}^2,y^3)\wedge(dy^1,\bar{y}^3)\wedge$$
$$\wedge(d\bar{y}^1,y^3)\Big\}\wedge\ (dy^3,\bar{y}^0)\wedge(d\bar{y}^3,y^0)\wedge(dy^1,\bar{y}^0)\wedge(d\bar{y}^1,y^0)\wedge\ .$$
$$\wedge(dy^2,\bar{y}^0)\wedge(d\bar{y}^2,y^0)$$

$$dE_1\wedge dE_2=(a\ \bar{a})^2\Big\{\lambda\bar{\lambda}\beta\bar{\beta}-\mu\bar{\mu}\alpha\bar{\alpha}\Big\}dG\wedge(dx^2,\bar{x}^0)\wedge(d\bar{x}^2,x^0)\wedge(dy^3,\bar{y}^0)\wedge$$
$$\wedge(d\bar{y}^3,y^0)$$

$$dE_1\wedge dE_2 = (a\ \bar{a})^2\Big\{\lambda\bar{\lambda}\beta\bar{\beta}-\mu\bar{\mu}\alpha\bar{\alpha}\Big\}dG\wedge dE_1[G]\wedge dE_2[G]$$

con $a=(x^0,\bar{y}^3)$, $\lambda=(x^1,\bar{y}^1)$ , $\beta=(x^3,\bar{y}^2)$ , $\mu=(x^1,\bar{y}^2)$ ,

$\alpha=(x^3,\bar{y}^1)$ . Sin pérdida de generalidad podemos tomar $x^1=y^1$ , $x^3=y^2$ y resulta $\beta=\lambda=1$ , $\alpha=\mu=0$ luego,

$$dE_1\wedge dE_2\ =\ (a\ \bar{a})^2\ dG\wedge dE_1[G]\wedge dE_2[G]$$ , usando pag.57

$a\ \bar{a}+b\ \bar{b}=1=(x^0,\bar{y}^0)$, sea $r=\text{dist}\ (x^0,y^0)$ ,$a.\bar{a}=\text{sen}^2\dfrac{r}{2}$

Finalmente,

$$(4.6) \qquad dE_1 \wedge dE_2 = \operatorname{sen}^4 \frac{r}{2}\; dG \wedge dE_1[G] \wedge dE_2[G]$$

2. DENSIDAD DE PARES DE CADENAS NORMALES

a) Pares de 1-cadenas

Sean las 1-cadenas $C_1$ ,$C_1^*$ es decir,

$C_1 \equiv \lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1$ con $\sum_{i=0}^{1} \lambda_i^2 = 1$ $\lambda_i \in R$ , respecto de $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ y $C_1^* \equiv \mu_0 y^0 + \mu_1 y^1$ $\sum_{i=0}^{1} \mu_i^2 = 1$ $\mu_i \in R$ respecto de $(y^0, y^1, y^2, y^3)$ .

Los sistemas de referencia están vinculados entre sí por la propiedad de que $x^0, y^2, y^3, x^3$ , al igual que $y^1$, $y^2, x^2, x^1$ son colineales , como en pares de rectas.

Llamando G a la recta que pasa por $x^0, x^1$ , y $G^*$ a la que pasa por $y^0$, $y^1$ , queda de pag. 24 ,

$$dC_1 = \left\{ (dx^0, \bar{x}^1) - (d\bar{x}^0, x^1) \right\} \wedge (dx^1, \bar{x}^1) \wedge dG$$

$$dC_1^* = \left\{ (dy^0, \bar{y}^1) - (d\bar{y}^0, y^1) \right\} \wedge (dy^1, \bar{y}^1) \wedge dG^*$$

Ahora, salvo un factor constante, tenemos según pag. 57

$$dC_1 \wedge dC_1^* = \left\{ \cos^4 \frac{d}{2} \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^4 \frac{d}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2} \right\} \left\{ (dx^0, \bar{x}^1) - (d\bar{x}^0, x^1) \right\} \wedge (dx^1, \bar{x}^1) \wedge \left\{ (dy^0, \bar{y}^1) - (d\bar{y}^0, y^1) \right\} \wedge (dy^1, \bar{y}^1) \wedge$$
$$\wedge\, dP(N) \wedge dQ(N) \wedge dE_1[N] \wedge dE_2[N]$$

Recordando (4.4), con la notación N es la recta normal a G y $G^*$ en P y Q respectivamente; $E_1$ plano determinado por G y Q ; $E_2$ plano determinado por $G^*$ y P

$d = \text{dist}\ (P,Q)$ y $\theta = $ ángulo entre G y $G^*$ ; es decir

$$(4.7)\quad dC_1 \wedge dC_1^* = (\cos^4 \frac{d}{2} \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^4 \frac{d}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2})\ dC_1(G) \wedge dC_1^*(G^*) \wedge$$
$$\wedge dP(N) \wedge dQ(N) \wedge dN \wedge dE_1[N] \wedge dE_2[N]$$

b) Cadena unidimensional y bidimensional

Analogamente a recta y plano , tomemos los tetraedros $(x^0,x^1,x^2,x^3)$ y $(x^0,x^1,y^0,y^1)$ donde $x^2,y^0,x^3,y^1$ son colineales y consideremos

$$C_1 \equiv \lambda_0 y^0 + \lambda_1 y^1 \qquad \sum_{i=0}^{1} \lambda_i^2 = 1 \qquad \lambda_i \in R$$

$$C_2 \equiv \mu_0 x^0 + \mu_1 x^1 + \mu_2 x^2 \qquad \sum_{i=0}^{2} \mu_i^2 = 1 \qquad \mu_i \in R$$

es decir , no usan vértices comunes; de pag. 24 y 25

$$dC_1 = \{(dy^0,\bar{y}^1) - (d\bar{y}^0,y^1)\} \wedge (dy^1,\bar{y}^1) \wedge dG \qquad \text{con } G = \overline{y^0y^1}$$

$$dC_2 = \{(dx^0,\bar{x}^1) - (d\bar{x}^0,x^1)\} \wedge \{(dx^0,\bar{x}^2) - (d\bar{x}^0,x^2)\} \wedge$$
$$\wedge \{(dx^1,\bar{x}^2) - (d\bar{x}^1,x^2)\} \wedge (dx^0,\bar{x}^0) \wedge (dx^1,\bar{x}^1) \wedge dE$$

donde E es el plano determinado por $x^0,x^1,x^2$ .

Luego, salvo un factor constante,

$$dC_1 \wedge dC_2 = \cos^2 \frac{d}{2}\ dG[x^2] \wedge dE\,[x^2] \wedge dx^2 \wedge \{(dy^0,\bar{y}^1) - (d\bar{y}^0,y^1)\} \wedge$$
$$\wedge \{(dx^0,\bar{x}^1) - (d\bar{x}^0,x^1)\} \wedge \{(dx^0,\bar{x}^2) - (d\bar{x}^0,x^2)\}$$
$$\wedge \{(dx^1,\bar{x}^2) - (d\bar{x}^1,x^2)\} \wedge (dy^0,\bar{y}^0) \wedge (dx^0,\bar{x}^0) \wedge (dx^1,\bar{x}^1)$$

donde $\cos^2 \frac{d}{2}$ proviene de $dG \wedge dE$ en pag.69;

recordando pag. 57

$$(4.8)\quad dC_1 \wedge dC_2 = \cos^2 \frac{d}{2}\; dG[x^2] \wedge dE[x^2] \wedge dx^2 \wedge dC_1(G) \wedge dC_2(E)$$

c) Par de 2-cadenas

Sean $C_2 \equiv \lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \qquad \sum_{i=0}^{2} \lambda_i^2 = 1\ ,\ \lambda_i \in R$

y $C_2^* \equiv \mu_0 y^0 + \mu_1 y^1 + \mu_2 y^2 \qquad \sum_{i=0}^{2} \mu_i^2 = 1 \qquad \mu_i \in R$

en los vértices $(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $(y^0, y^1, y^2, y^3)$ respectivamente.

Según ya hemos visto,

$dC_2 = dC_2(E) \wedge dE$ con E plano determinado por $x^0$, $x^1, x^2$ ; analogamente,

$dC_2^* = dC_2^*(E^*)\ dE^*$ con $E^*$ plano determinado por $y^0, y^1, y^2$ . Ahora,

$dC_2 \wedge dC_2^* = dC_2(E) \wedge dC_2^*(E^*) \wedge dE \wedge dE^*$ , usando (4.6)

$$(4.9)\quad dC_2 \wedge dC_2^* = \operatorname{sen}^4 \frac{r}{2}\; dG \wedge dE[G] \wedge dE^*[G] \wedge dC_2(E) \wedge dC_2^*(E^*)$$

con $r = \operatorname{dist}(x^0, y^0)$ .-

d) Par de 3-cadenas.

Sean $C_3$ y $C_3$ las cadenas tridimensionales dadas por $\sum_{J=0}^{3} \lambda_J x^J \quad \lambda_J \in R \quad \sum_{J=0}^{3} \lambda_J^2 = 1$ y por

$\sum_{J=0}^{3} \mu_J y^J \quad \mu_J \in R \quad \sum_{J=0}^{3} \mu_J^2 = 1$ en los tetraedros de vértices $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ , e $(y^0, y^1, y^2, y^3)$ . Sabemos que $x^3$ verifica ser el polo del plano determinado por $x^0, x^1, x^2$, analogamente $y^3$ ;

Con objeto de que las cadenas sean independientes , podemos considerar

$$y^0 = e^{i\alpha} x^0 \quad , \quad y^1 = e^{i\beta} x^1 \quad , \quad y^2 = e^{i\gamma} x^2$$ de donde

$$y^3 = e^{-i(\alpha+\beta+\gamma)} x^3$$

Así ,

$$\beta_{01} = (dx^0, \bar{x}^1) - (d\bar{x}^0, x^1) \quad , \quad \beta^*_{01} = (dy^0, \bar{y}^1) - (d\bar{y}^0, y^1) =$$

$$= e^{i(\alpha-\beta)}(dx^0, \bar{x}^1) - e^{-i(\alpha-\beta)}(d\bar{x}^0, x^1)$$

$$= \left\{ e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)} \right\} w_{01} \wedge \bar{w}_{01} = 2\mathrm{sen}(\alpha-\beta) w_{01} \wedge \bar{w}_{01}$$

Analogamente ,

$$\beta_{02} \wedge \beta^*_{02} = 2\mathrm{sen}(\alpha-\gamma) w_{02} \wedge \bar{w}_{02} \quad ; \quad \beta_{03} \wedge \beta^*_{03} = 2\mathrm{sen}(2\alpha+\beta+\gamma) w_{03} \wedge \bar{w}_{03}$$

$$\beta_{12} \wedge \beta^*_{12} = 2\mathrm{sen}(\beta-\gamma) w_{12} \wedge \bar{w}_{12} \quad ; \quad \beta_{13} \wedge \beta^*_{13} = 2\mathrm{sen}(\alpha+2\beta+\gamma) w_{13} \wedge \bar{w}_{13}$$

$$\beta_{23} \wedge \beta^*_{23} = 2\mathrm{sen}(\alpha+\beta+2\gamma) w_{23} \wedge \bar{w}_{23} \quad ; \quad \beta_{ii} \wedge \beta^*_{ii} = (dx^i, \bar{x}^i) \wedge (dy^i, \bar{y}^i)$$

Entonces ,

$$dC_3 \wedge dC^*_3 = 2\mathrm{sen}(\alpha-\beta) 2\mathrm{sen}(\gamma-\alpha) 2\mathrm{sen}(\gamma-\beta) 2\mathrm{sen}(2\alpha+\beta+\gamma) .$$

$$2\mathrm{sen}(\alpha+2\beta+\gamma) 2\mathrm{sen}(\alpha+\beta+2\gamma) w_{01} \wedge \bar{w}_{01} \wedge w_{02} \wedge w_{03} \wedge \bar{w}_{02} \wedge$$

$$\wedge \bar{w}_{03} \wedge w_{12} \wedge \bar{w}_{12} \wedge w_{13} \wedge \bar{w}_{13} \wedge w_{23} \wedge \bar{w}_{23}$$

(4.10)
$$dC_3 \wedge dC^*_3 = 2\ \mathrm{sen}(\alpha-\beta)\ 2\ \mathrm{sen}(\gamma-\alpha)\ 2\ \mathrm{sen}(\gamma-\beta) \ .$$

$$2\ \mathrm{sen}\ (2\alpha+\beta+\gamma)\ 2\mathrm{sen}(\alpha+2\beta+\gamma)\ 2\mathrm{sen}\ (\alpha+\beta+2\gamma) \wedge dx^0 \wedge$$

$$\wedge dG[x^0] \wedge dE[G] \wedge dC_3(x^0, x^1, x^2, x^3)\ dC^*_3(y^0, y^1, y^2, y^3)$$

con la notación usada por Rohde, [5] .

Veamos que son los ángulos que aparecen.

En 1-cadenas:

$$\cos\varphi\, x^0 + \operatorname{sen}\varphi\, x^1$$

$$\cos\psi\, y^0 + \operatorname{sen}\psi\, y^1 = e^{i\alpha}(\cos\psi\, x^0 + \operatorname{sen}\psi\, x^1 e^{-i(\alpha-\beta)})$$

se dice que $\alpha-\beta$ es el ángulo que forman las 1-cadenas entre sí, Rohde [5] .

En $P_3(C)$ hay 6 cadenas unidimensionales: las que pasan por 1) $x^0,x^1$ ; 2) $x^0,x^2$ ; 3) $x^0,x^3$ ; 4) $x^1, x^2$ ; 5) $x^1,x^3$ ; 6) $x^2,x^3$ .

Luego tomamos :

$$\cos\theta\, x^0 + \operatorname{sen}\theta\, x^1; \quad \cos\psi\, y^0 + \operatorname{sen}\psi\, y^1 = e^{i\alpha}(\cos\psi\, x^0 + \operatorname{sen}\psi\, x^1 . e^{-i(\alpha-\beta)})$$

o sea, el ángulo entre estas 1-cadenas es $\alpha-\beta$.

Analogamente, para $x^0$ ,$x^2$ será $\alpha-\gamma$ y para las que pasan por $x^1,x^2$ será $\beta-\gamma$ .

Para las cadenas que pasan por $x^0,x^3$ será :

$$\cos\theta\, x^0 + \operatorname{sen}\theta\, x^3 ; \quad \cos\psi\, y^0 + \operatorname{sen}\psi\, y^3 = e^{i\alpha}(\cos\psi\, x^0 + \operatorname{sen}\psi\, x^3 . e^{-i(2\alpha+\beta+\gamma)})$$

Luego, el ángulo que forman es $2\alpha+\beta+\gamma$

Es fácil verificar que para $x^1,x^3$ será $\alpha+2\beta+\gamma$ y para $x^2$, $x^3$ será $\alpha+\beta+2\gamma$.

3. PARES ENTRE SUBESPACIOS LINEALES Y CADENAS NORMALES

a) Punto y 1-cadena

A partir de pag. 24 y (4.2) se tiene que

$$(4.11) \qquad dP\wedge dC_1 = \left\{(dx^o,\bar{x}^1)-(d\bar{x}^o,x^1)\right\}\wedge(dx^o,\bar{x}^o)\wedge dG\wedge dP$$

$$= \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2} \; dE\wedge dG(E)\wedge dP(E)\wedge dC_1(G)$$

b) Punto y 2-cadena

Recordando pag. 25 y (4.3)

$$(4.12) \qquad dP\wedge dC_2 = \cos^2 \frac{d}{2} \; dP(G)\wedge dH(G)\wedge dG\wedge dC_2(E)$$

c) Recta y 1-cadena

Tomando los vértices $x^o,x^1,x^2,x^3$ y llamando G a la recta que pasa por $x^o$, $x^1$ y recordando (4.4)

$$(4.13) \qquad dG\wedge dC_1 = (\cos^4 \frac{d}{2} \; \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2} - \cos^4 \frac{\theta}{2} \; \operatorname{sen}^4 \frac{d}{2}) \; dP(N)\wedge$$

$$\wedge dQ(N)\wedge dN\wedge dG[P]\wedge dG[Q]\wedge dC_1(G\;)$$

d) Recta y 2-cadena

Mediante la expresión de recta y plano (4.5), queda

$$(4.14) \qquad dG\wedge dC_2 = \cos^2 \frac{d}{2} \; dE[R]\wedge dG[R]\wedge dR\wedge dC_2(E)$$

e) Plano y 1-cadena

Llamando E al plano dado y recordando (4.5) queda

$$(4.15) \qquad dE\wedge dC_1 = \cos^2 \frac{d}{2} \; dE[R]\wedge dG[R]\wedge dR\wedge dC_1(G)$$

Naturalmente , dual de a) .

f) Plano y 2-cadena

Llamemos E al plano dado y $E^*$ al plano que contiene a $C_2$ , $G = E \cap E^*$ . Tomando la expresión (4.6) queda

$$(4.16) \qquad dE \wedge dC_2 = \operatorname{sen}^4 \frac{r}{2} \; dG \wedge dE[G] \wedge dE^*[G] \wedge dC_2(E^*)$$

CAPITULO V

# FORMULAS INTEGRALES

## 1. FORMULAS INTEGRALES REFERENTES A SUBESPACIOS LINEALES

Con referencia a subespacios lineales $L_1$ , $L_2$ hay dos fórmulas integrales notables que vamos a estudiar, siempre para $n=3$ .

a) Sea C una curva analítica, $x_j = x_j(u+iv)$ $u,v \in R$ , $j:0,1,2,3$. A ella está asociado el "elemento de arco "( o volumen bidimensional ) dado por la forma exterior invariante

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{3} dx_j \wedge d\bar{x}_j$$

La longitud de C es la integral de $\Omega$ sobre la misma.

Salvo posiciones de tangencia, de medida nula, C y un plano $L_2$ arbitrario se cortan en un número finito de puntos , cap.I, § 5 .

La primera fórmula integral es

$$\int n(C \cap L_2) dL_2^* = \frac{1}{\pi} \int_C \Omega \tag{1}$$

donde $n(C \cap L_2)$ es el número de puntos de intersección de C y $L_2$ , y $dL_2$ es la densidad de planos, cap.II, § 5 normalizada de manera que la medida total valga 1 .

La fórmula (1) es conocida y la demostración puede verse en Griffiths, [4] , ó en Santaló ,[6] .

Vamos a reproducir la de [4] , detallando sus pasos y adaptándola a nuestra nomenclatura.

Sea $C$ una curva analítica , es decir, dada por

$$x_j = x_j \ (u + iv) \qquad u,v \in R \ , \ j:o,1,2,3.$$

Sabemos que $C \cap L_2$ es un conjunto finito de puntos, llamemos $n(C \cap L_2)$ a este número; $w$ al "elemento de área" de $C$

$$w = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{3} dx_j \wedge d\bar{x}_j$$

y $P_3^*$ al espacio de hiperplanos $L_2$ .

Queremos evaluar

$$\int_{P_3^*} n(C \cap L_2) \ dL_2^*$$

Denotemos por $z = (z_o, z_1, z_1, z_3)$ puntos de $P_3(C)$ y $L = (l_o, l_1, l_2, l_3)$ hiperplanos en $P_3^*$ .

Tomemos $\langle L_2, z \rangle = \sum_{j=0}^{3} l_j z_j$ , $|L_2, z| = |\langle L_2, z \rangle|$

y $d^c = \frac{1}{4} (\bar{\partial} - \partial)$

Entonces , $w = d \ d^c \log \| z \|^2$ (a)

pues siendo

$$(z, d\bar{z}) = \sum_{j=0}^{3} z_j d\bar{z}_j \qquad \text{queda ,}$$

$$d \ d^c \log \| z \|^2 = \frac{1}{\| z \|^2} \left\{ \| z \|^2 d \ d^c \| z \|^2 - (d^c \| z \|^2)(d \| z \|^2) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(dz, d\bar{z}) \ (z, \bar{z}) - (1/4) \{ (z, d\bar{z}) - (dz, \bar{z}) \} \wedge \{ (dz, \bar{z}) + (z, d\bar{z}) \}}{(z, \bar{z})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(z, \bar{z})(dz, d\bar{z}) - (z, d\bar{z}) \wedge (dz, \bar{z})}{(z, \bar{z})^2} \right\}$$

Como $\quad (z,\bar{z}) = \sum z_i \bar{z}_i = 1$ ,

$$(dz,\bar{z}) + (z,d\bar{z}) = 0 \text{ , } \quad \text{de donde}$$

$$(dz,\bar{z}) \wedge (z,d\bar{z}) = 0 \qquad \text{y queda}$$

$$d\, d^c \log \| z \|^2 = \frac{1}{2}(dz,d\bar{z}) = w$$ , y la 1-forma

(b) $$\eta_{L_2} = d^c \log \frac{\| z \|^2 \, \| L_2 \|^2}{| z, L_2 |^2} \quad \text{es } C^\infty \text{ en } P_3 - L_2$$

y allí vale

(c) $$d\eta_{L_2} = w \qquad \text{pues siendo}$$

$$d^c \log \frac{\| z \|^2 \| L_2 \|^2}{| z, L_2 |^2} = \frac{| z, L_2 |^2}{\| z \|^2 \, \| L_2 \|^2} \, d^c \left( \frac{\| z \|^2 \, \| L_2 \|^2}{| z, L_2 |^2} \right) =$$

$$= \frac{| z, L_2 |^2}{\| z \|^2 \, \| L_2 \|^2} \left\{ \frac{\| L_2 \|^2 \, (1/4) \left\{ (z,d\bar{z}) - (dz,\bar{z}) \right\} | z, L_2 |^2 - 0}{| z, L_2 |^4} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \frac{(z,d\bar{z}) - (dz,\bar{z})}{\| z \|^2} \right\} = d^c \log \| z \|^2$$

Pero $| z, L_2 | = 0$ es la ecuación del plano $L_2$ , luego para que el denominador de (b) sea distinto de cero, $z \notin L_2$ .

Es decir, en cada punto de $L_2$ , $\eta_{L_2}$ tiene una singularidad. Para ver el orden tomemos un punto, por ejemplo ,el origen.

Un punto próximo al origen es $(1,t,t,t)$ con $|t| < \varepsilon$, $t$ complejo.

Si el hiperplano pasa por el origen, un punto de $L_2$ deberá satisfacer $l_0=0$

Con esto , en $L_2$

$$\eta_{L_2} = d^c \log \frac{(1+3t\bar{t})(l_1\bar{l}_1 + l_2\bar{l}_2 + l_3\bar{l}_3)}{t\bar{t}\,(l_1+l_2+l_2)\,(\bar{l}_1+\bar{l}_2+\bar{l}_3)}$$

$$= d^c \log\left(\frac{1}{t\bar{t}} + 3\right)\left(\frac{\sum_i l_i \bar{l}_i}{(\sum_i l_1)\,(\sum_i \bar{l}_1)}\right)$$

$$\text{(d)} \qquad = d^c \log\left(\frac{1}{t\bar{t}} + 3\right) + d^c \log \frac{\sum_i l_1 \bar{l}_1}{\sum_i l_i \cdot \sum_i \bar{l}_i}$$

El segundo sumando es cero.

Por lo tanto, para $t \to 0$ , esto es del orden de

$$\eta_{L_2} = d^c \log \frac{1}{|t|^2} = d^c \log \frac{1}{t} + d^c \log \frac{1}{\bar{t}}$$

$$= (-t)\left(\frac{-1}{t^2}\right)^2 dt + \bar{t}\left(\frac{-1}{t^2}\right)^2 d\bar{t} = \frac{dt}{t} - \frac{d\bar{t}}{\bar{t}} =$$

(e) $\frac{-1}{2} d\theta$ si $t = r.e^{i\theta}$

Por lo tanto,

$$\int \eta_{L_2} = \frac{-1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = -\pi$$

Normalizando se tiene

$$\frac{1}{\pi} d\eta_{L_2} = \frac{1}{\pi} w - T_{L_2}$$

donde $T_{L_2}$ es tal que fuera de $L_2$ vale cero y en los puntos de $L_2$ satisface $\int T_{L_2} = 1$ ( corriente)

Consideremos $L_2 \cap C$ , fuera de allí, $d\eta_{L_2} = w$ y en la intersección

$$\frac{1}{\pi} d\eta_{L_2} = \frac{1}{\pi} w - T_{L_2}$$

Integrando sobre C, aplicando Stokes ,

$$\frac{1}{\pi} \int_C w = \frac{1}{\pi} \int_{\partial C} \eta_{L_2} + \int T_{L_2}$$

El último sumando vale 1 en cada punto de la intersección , luego

$$\frac{1}{\pi} \int_C w = \frac{1}{\pi} \int_{\partial C} \eta_{L_2} + n(C \cap L_2)$$

Integrando sobre todos los $L_2$ y recordando que $dL_2$ es la dēnsidad de plano , cap II, § 5 , y normalizando de modo que $\int dL_2^* = 1$ se tiene:

$$\text{(f)} \qquad \frac{1}{\pi} \int_C w = \int_{P_3^*} n(C \cap L_2)\, dL_2^* = \int_{P_3^*} \frac{1}{\pi} \int_{\partial C} \eta_{L_2} \wedge dL_2^*$$

La forma $\eta_{L_2}$ sobre $L_2$ , (e) es invariante por movimientos elípticos y tambien los es $dL_2^*$ , que es una densidad.

Así, sobre $L_2$ $\eta_{L_2} \wedge dL_2$ es invariante y de grado impar, y por [7], cap. 10, pag.166 ,

$$d( \eta_{L_2} \wedge dL_2^* ) = d\,\eta_{L_2} \wedge dL_2^* = 0$$

Como se sabe que toda forma invariante sobre $L_2$ es par, se infiere que

$$d\,\eta_{L_2} = 0 \quad , \text{ es decir } \quad \eta_{L_2} = \text{cte.}$$

Para fijar la constante volvamos a (d), tomando $t = 1$ tenemos que $\eta_{L_2} = 0$ de domde (f) queda

$$\frac{1}{\pi} \int_C w = \int_{P_3^*} n(C \cap L_2)\, dL_2^*$$

En realidad , la fórmula (1) es inmediata si se usa el hecho, demostrado por E. Cartan (Santaló, [6] ) de que $\Omega$ es la única forma diferencial unida a una cuεva analítica, que es invariante por transformaciones hermitianas.

Según esto , como el primer miembro de (1) es invariante para tales transformaciones ( que son biyecciones) , debe ser

$$\int n(C \cap L_2)\, dL_2^* = H \int_C \Omega$$

y sólo queda por hallar la constante H.

Pero ello es inmediato considerando el caso en que C es una recta fija $L_1$, en cuyo caso sabemos que, cap. III, §1

$$\int_{L_1} \Omega = 2\pi \qquad \text{salvo el factor } \frac{1}{2}$$

puesto en $\Omega$.

O sea, tomando la densidad de planos normalizada de manera que la medida total valga 1, y llamando a esta densidad normalizada $dL_2^*$, debe ser $H = \frac{1}{2\pi}$

Si C no es una curva analítica, sino una curva general

$$x_j = x_j(u,v)$$

su longitud es la obtenida a partir de la expresión

$$ds^2 = 4 \left\{ (dx, d\bar{x}) - (x, d\bar{x})(\bar{x}, dx) \right\}$$

Llamemos a esta longitud general $\Lambda_C$. Por la misma razón debe ser ahora,

$$\int n(C \cap L_2) dL_2^* = H \cdot \Lambda_C$$

Para hallar H, consideremos el caso en que C es una 2-cadena. En este caso $n(C \cap L_2) = 2$, cap. I, §5, y $\Lambda_C = 4\pi$ (conocido). Luego $H = \frac{1}{2\pi}$

b) Sea, ahora, S una " superficie analítica" y $L_1$ una recta que la corta en $n(S \cap L_1)$ puntos.

El área ( volumen ) de S es la integral sobre S de la forma

$$(*)\quad \Omega^{(2)} = -\frac{1}{2} \sum_{i<j} dx_i \wedge d\bar{x}_i \wedge dx_j \wedge d\bar{x}_j$$

Entonces la segunda fórmula integral es

$$(2)\qquad \int n(S \cap L_1)\, dL_1^* = \frac{1}{2\pi^2} \int_S \Omega^{(2)}$$

La demostración puede hacerse siguiendo los lineamientos de Griffiths [4] ó Santaló, [6] .

Sabiendo que (*) es la única forma diferencial invariante por transformaciones hermitianas, se puede ver, como antes, poniendo en el segundo miembro un coeficiente constante, que se determina para el caso particular en que S es un $L_2$, recordemos que la integral de $\Omega^{(2)}$ es $2\pi^2$ .

2. FORMULAS INTEGRALES CON CADENAS.

En $P_3(C)$ , com la métrica hermitiana , considerando cadenas móviles, tenemos tres posibles fórmulas integrales, a saber :

a) Si $V_5$ es una variedad de dimensión 5 (real) cabe considerar

$$I_5 = \int n(V_5 \cap C_1)\, dC_1^*$$

con la integral extendida a todas las 1-cadenas .

b) Si $V_4$ es una variedad de dimensión 4 (real)

$$I_4 = \int n(V_4 \cap C_2)\, dC_2^*$$

con la integral extendida a todas las $C_2$ . En este caso puede ocurrir que $V_4$ sea una superficie analítica.

c) Si $V_3$ es una variedad de 3 dimensiones reales,

$$I_3 = \int n(V_3 \cap C_3)dC_3^*$$

En todos los casos las integrales son invariantes por transformaciones hermitianas y por tanto, el resultado , salvo un factor constante, debe ser igual al volumen de la variedad $V_j$ $(j:3,4,5)$, volumen medido com la métrica

$$ds^2 = 4 \left\{ (dx,d\bar{x})-(x,d\bar{x})\wedge(\bar{x},dx) \right\} \qquad 6$$

$$dV_j = \sum \sqrt{|g_{hk}|}\, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_j$$

ver cap. I , § 6 .

Sólo en algunos casos podemos determinar esta constante . Estos son :

a) Para $I_4$ ; si $V_4$ es una superficie analítica, suponiendo que sea un $L_2$ y tomando $dC_2^*$ normalizado de modo que la medida total de las 2-cadenas sea 1 , debe ser

$$1 = H_4 \cdot \int \Omega^{(2)} = H_4 . 2\pi^2$$

y queda

$$\int n(V_4 \cap C_2)dC_2^* = \frac{1}{2\pi^2} \text{ vol. } V_4$$

b) Para $I_3$ ; si $V_3$ es una 3-cadena, sabemos que su volumen es $2\pi^2$ (cap. III, § 7) y por tanto

$$4 = H_3 . 2\pi^2$$

De teor. 3, pag. 29 y Cartan ,[2] , pag.261 , hemos tomado

$$m\left(C_3 \cap C_3^*\right) = 4$$

Por tanto,

$$\int n(V_3 \cap C_3)\, dC_3^* = \frac{2}{\pi^2}\ \text{vol.}(V_3)$$

—o—

REFERENCIAS

[1] Blaschke,W.- Densità negli spazi di Hermite,Rendiconti dell' Academia dei Lincei, vol.29,105- 108, 1939.

[2] Cartan, E.- Lecons sur la géométrie complexe. París, 1931.

[3] Coolidge, J.L.-Geometry of the complex domain. Oxford, 1924.

[4] Griffiths,P.-Complex differential and integral geometry and curvature integrals associated to singularities of complex analytic varieties.Duke Math. Journal, vol. 45, Nº 3, 1978.

[5] Rohde,H.- Unitäre Integralgeometrie. Hamburger Abhandlungen, vol. 13, 295-318, 1940.

[6] Santaló,L.A.-Integral geometry in Hermitian spaces. American J.Math.,vol. 74,nº2, 1952.

[7] Santaló,L.A.-Integral geometry and Geometric probability Addison-Wesley, Reading, 1976.

[8] Santaló,L.A.- Vectores y tensores y sus aplicaciones EUDEBA, Buenos Aires, 1961.

[9] Varga,O.-Crofton's formula in $E_3$ . Math. Z. ,vol. 40 387-405, 1935.