Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Residuos iterados de formas meromorfas

Romero Grados, Luis Antonio

1979

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Romero Grados, Luis Antonio. (1979). Residuos iterados de formas meromorfas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1614_RomeroGrados.pdf

Cita tipo Chicago:
Romero Grados, Luis Antonio. "Residuos iterados de formas meromorfas". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1979.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1614_RomeroGrados.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

RESIDUOS ITERADOS DE FORMAS MEROMORFAS

Trabajo presentado para optar el Título de
Doctor en Ciencas Matemáticas

Luis A. Romero Grados

Director: Dr. Miguel Herrera

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
de la Universidad Nacional de Buenos Aires

Diciembre 1979

Expreso mi profundo agradecimiento al Dr. Miguel Herrera por su asesoramiento y valiosa orientación en el presente trabajo.

Agradezco también a los Drs. Nicolás Coleff, Adrián Paenza y Néstor Búcari por sus importantes sugerencias. Del mismo modo al Doctor Manuel Balanzat y al Ing. Orlando Villamayor, quienes indirectamente hicieron posible la materialización del presente trabajo.

Buenos Aires, Diciembre 1979

A mis padres, hermanos y esposa.

CONTENIDO

INTRODUCCION

Sea Y una hipersuperficie compleja regular de una variedad holomorfa X de dimensión n. En su trabajo fundamental sobre Residuos de formas meromorfas [6], J.Leray define la forma Residuo, $\mathrm{Res}(\tilde{\omega})$, de una forma diferencial meromorfa $\tilde{\omega}$ de X, con polos logarítmicos sobre Y.

Brevemente, si $z = (z_1,\ldots,z_n)$ es un sistema de coordenadas locales de X, $z_1 = 0$ una ecuación local de Y y $\tilde{\omega} = \omega \wedge \frac{dz}{z} + \nu$ localmente, con ω y ν formas regulares C^∞, entonces $\mathrm{Res}(\tilde{\omega}) = \omega|_Y$, localmente.

Esta definición puede iterarse de la siguiente manera:

Si $\tilde{\omega}$ tiene polos logarítmicos sobre la unión de dos hipersuperficies Y_1, Y_2 de X, es posible construir la forma residuo $\mathrm{Res}_{Y_1}(\tilde{\omega})$ de Y_1, con polos logarítmicos sobre Y_2, y luego nuevamente, la forma $\mathrm{Res}_{Y_2}(\mathrm{Res}_{Y_1}(\tilde{\omega}))$ de Y_2, denominada <u>residuo iterado</u> de $\tilde{\omega}$.

La generalización de C-H de dicha teoría, presentada en [1], no contempla en principio la posibilidad de iteración, ya que el residuo de una forma meromorfa es siempre una corriente.

El objeto de este trabajo es remediar parcialmente esta laguna, mostrando que, en determinadas condiciones, es posible iterar la definición de corriente Residual, reobteniendo la forma Residuo iterado de J.Leray cuando las condiciones son las consideradas por este autor.

La situación que nos interesa es la siguiente:

Sea $F = \{Y_1,\ldots,Y_{p+1}\}$ una familia de hipersuperficies complejas, $p \geq 0$, en una variedad holomorfa de dimensión n, y formas diferenciales semimeromorfas $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\nu}$ sobre X, de dimensión 2n-p y 2n-p-1, respectivamente, con polos sobre la unión $\tilde{Y} = \bigcup_{i=1}^{p+1} Y_i$.

C-H probaron en [1] la existencia de los Residuos

$$R^{p}_{X}\ P^{p+1}(\tilde{\omega}) = \underset{\delta_{p+1}\to 0}{\mathrm{dim}}\ \underset{\delta\to 0}{\mathrm{dim}} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta},\delta_{p+1}}(\varphi)} \tilde{\omega} \qquad (1)$$

$$R^{p+1}_{X}(\tilde{\nu}) = \underset{\delta\to 0}{\mathrm{dim}} \int_{T^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta}}(\varphi)} \tilde{\omega} \qquad (2)$$

$$\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_{p+1}):U \to C$$

donde φ_i, $1 \leq i \leq p+1$, son ecuaciones locales de Y_i en un abierto U de X; $\underset{\sim}{\delta} = (\delta_1(\delta),\ldots,\delta_p(\delta))$ es una trayectoria admisible en R^p y $D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta},\delta_{p+1}}(\varphi)$, $T^{p}_{\underset{\sim}{\delta}}(\varphi)$ son tubos convenientes construídos con φ y $\underset{\sim}{\delta}$. (c.f Cap. I § [1]).

En particular se demuestra que, si $\dim_C Y = 2n-p-1$

$$Y = \bigcap_{i=1}^{p+1} Y_i,\ \tilde{\omega} = \omega \wedge \frac{d\varphi_1 \ \ldots \ d\varphi_{p+1}}{\varphi_1 \ldots \varphi_{p+1}}$$

y ω es regular sobre X, entonces

$$R^{p+1}_{X}(\tilde{\omega}) = I[\varphi^{-1}[0]](\omega) \quad , \qquad (3)$$

donde $\varphi^{-1}[0]$ es el ciclo imagen inversa de [0] por φ y $I[\varphi^{-1}[0]]$ es la corriente de integración sobre ese ciclo ([1], 1.9).

En el caso en que p = 0, esta fórmula establece la relación entre las teorías de Leray y Coleff-Herrera, mediante la identificación

$$R^{1}_{X}(\tilde{\omega}) \leftrightarrow \omega|_{Y}.$$

J.Solomín [5] generaliza estos resultados, probando en primer término que los límites en (1) y (2) no varían si se reemplazan las trayectorias admisibles $\underset{\sim}{\delta}$ por trayectorias admitidas de ordenes suficientemente elevados.

Una aplicación $\gamma:(0,1) \to R^p$

$$\gamma(t) = (t^{n_1},\dots,t^{n_p}), \quad n_i \in N, \quad i = 1,\dots,p$$

tal que

$$\frac{n_i}{n_{i+1}} > m, \quad i = 1,\dots,p \ , \quad n_p > m$$

para cierto $m \in N$, se denomina trayectoria admitida de orden m.

A continuación, Solomín extiende (3) al caso en que $\dim_C Y > n-p-1$ (intersección no completa), $Y = \bigcap_{i=1}^{p+1} Y_i$, obteniendo entonces:

$$R_X^{p+1}(\tilde{\omega}) = I[\varphi_e^{-1}[0]](\omega) \ , \qquad (4)$$

donde $\varphi_e^{-1}[0]$ denota el ciclo esencial asociada a la aplicación φ. Para construir este ciclo esencial, se define por recurrencia la <u>variedad esencial</u> $V_e(\varphi)$ como sigue (cf, [5].)

$$V_e(\varphi_1) = \varphi_1^{-1}(0);$$

Si se supone definido $V_e(\varphi_1,\dots,\varphi_s)$ $1 \leq s \leq p$, se toma

$$V_e(\varphi_1,\dots,\varphi_{s+1}) = \tilde{V}_e(\varphi_1,\dots,\varphi_s) \cap \varphi_{s+1}^{-1}(0)$$

donde $\tilde{V}_e(\varphi_1,\dots,\varphi_s)$ es la unión de las componentes de $V_e(\varphi_1,\dots,\varphi_s)$ sobre las que no se anula idénticamente la función φ_{s+1}

Denotando con $[0]$ al punto $0 \in C^p$ provisto de su orientación canónica, el ciclo esencial $C_e(\varphi)$ se define también inductivamente:

$$C_e(\varphi_1) = \varphi_1^{-1}[0];$$

Si $C_e(\varphi_1,\dots,\varphi_s) = \sum_{i\in I} n_i M_i$ para $1 < s \leq p$ donde $\{M_i\}_{i\in I}$ es la familia de los componentes de $V_e(\varphi_1,\dots,\varphi_s)$ y $n_i \in N$; definimos

$$C_e(\varphi_1,\dots,\varphi_{s+1}) = \tilde{C}_e(\varphi_1,\dots,\varphi_s).\varphi_{s+1}^{-1}[0]$$

donde $\tilde{C}_e(\varphi_1,\dots,\varphi_s) = \sum_{i\in E(s)} n_i M_i$, con

$$E(s) = \{i \in I \ / \ M_i \subset \tilde{V}_e(\varphi_1,\dots,\varphi_s)\} .$$

Si F tiene intersección completa ($\dim \cap F = n-p-1$) se tiene

$$V_e(\varphi) = \varphi^{-1}(0), \quad C_e(\varphi) = \varphi^{-1}[0] .$$

En el presente trabajo, consideraremos el caso $p \geq 2$ y trayectorias admisibles (o admitidas)

$$\underset{\sim}{\delta}' = (\delta_1(\delta'),\dots,\delta_k(\delta')), \quad \delta'' = (\delta_{k+1}(\delta''),\dots,\delta_p(\delta'')) ,$$
$$1 < k \leq p$$

probando que los Residuos (1) y (2) pueden obtenerse como Límites iterados,

$$R_X^p \, P^{p+1}[\tilde{\omega}] = \lim_{\delta_{p+1}\to 0} \ \lim_{\delta''\to 0} \ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}(\varphi)} \tilde{\omega} \ , \qquad (5)$$

$$R^{p+1}[\tilde{\omega}] = \lim_{\delta''\to 0} \ \lim_{\delta'\to 0} \int_{T^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}''}(\varphi)} \tilde{\omega} \ ,$$

aquí

$$\underset{\sim}{\delta}'' = (\delta_{k+1}(\delta''),\dots,\delta_{p+1}(\delta'')) .$$

El caso $k = 1$ ya está incluído en [1].

El Capítulo II, contiene las demostraciones de estos resultados para el caso de trayectorias admisibles. En primer término probamos la igualdad (5) cuando la unión U F de la familia dada tiene solo cruzamientos normales, lo que implica que, localmente las ecuaciones de cada Y_i puede escribirse como

$$\varphi_i(z) = h_i(z)\, z^{\alpha_i}, \qquad i = 1,\dots,p+1;$$

donde $\alpha_i = (\alpha_{i1},\dots,\alpha_{in}) \in N^n$ y $h_i(z)$ son funciones inversibles en $\mathcal{O}(\bar{B})$.

El caso general; en que las hipersuperficies son arbitrarias, se reduce al primero mediante resolución de singularidades.

En segundo término, y como aplicación de estos resultados, probamos una generalización de la fórmula (4), en la que consideramos

$$\tilde{\omega} = \frac{d\varphi_1 \dots d\varphi_k}{\varphi_1 \dots \varphi_k} \wedge \frac{\nu}{\varphi_{k+1} \dots \varphi_{p+1}} \quad ;$$

permitimos aquí, por lo tanto que

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu}{\varphi_{k+1} \dots \varphi_{p+1}}$$

tenga singularidades sobre el conjunto $(\varphi_1 = 0,\dots,\varphi_k = 0)$, aunque suponemos que el lugar polar de $\tilde{\nu}$ no contiene ninguna componente de la variedad esencial $V_e(\varphi_1,\dots,\varphi_k)$.

En estas condiciones, probaremos que (c.f, Cap. II)

$$R_X^{p+1}(\tilde{\omega}) = (2\pi i)^k \, R_\gamma^{p+1-k}(\tilde{\nu}|_\gamma)$$

donde γ es el <u>ciclo esencial</u> asociado a la aplicación $(\varphi_1,\dots,\varphi_k)$. El residuo de $\tilde{\omega}$ sobre X se calcula, por lo tanto, como el residuo de $\tilde{\nu}|_\gamma$ sobre γ. Si esta última forma se escribe a su vez como

$$\tilde{\nu} = \frac{d\varphi_{k+1} \quad \dots \quad d\varphi_{\rho+1}}{\varphi_{k+1} \dots \varphi_{\rho+1}} \wedge \tilde{\tau} \quad ,$$

$$k \le \rho < p+1$$

donde

$$\tilde{\tau} = \frac{\tau}{\varphi_{\rho+1} \dots \varphi_{p+1}}$$

obtenemos

$$R_X^{p+1}(\tilde{\omega}) = (2\pi i)^k \, R_\gamma^{p+1-k}(\tilde{\nu}|_\gamma) = (2\pi i)^{k+\rho} \, R_{\gamma'}^{p+1-\rho-k}(\tilde{\tau}|_{\gamma'}) \quad ,$$

donde γ' es el <u>ciclo esencial</u> en γ de la aplicación $(\varphi_{k+1},\dots,\varphi_\rho)|_\gamma$.

Es en este sentido que podemos iterar los operadores residuales.

CAPITULO I

En este trabajo respetamos las notaciones y convenciones de Coleff-Herrera y la incluiremos aquí para referencias posteriores junto con algunos adicionales y resultados fundamentales.

1.1. N designará el conjunto de los números enteros no negativos y C el cuerpo de los números complejos.

Para cada $z = (z_1,\dots,z_n) \in C^n$ y $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n) \in N^n$ escribiremos

$$\rho = (\rho_1,\dots,\rho_n), \quad \rho_i = |z_i|, \quad |\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n.$$

$$z^\gamma = \prod_{i=1}^{n} z_i^{\gamma_i}, \qquad \rho^\gamma = \prod_{i=1}^{n} \rho_i^{\gamma_i}.$$

Sea $\Lambda(p,n)$ la familia de los conjuntos $I = \{i_1,\dots,i_p\} \subset \{1,\dots,n\}$; $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$. Para cada $I \in \Lambda(p,n)$ se denota

$$z_I = \prod_{i\in I} z_i, \quad z_I^\gamma = \prod_{i\in I} z_i^{\gamma_i}, \quad \rho_I^\gamma = \prod_{i\in I} \rho_i^{\gamma_i}.$$

Si $J = \{j_1,\dots,j_{n-p}\} = \{1,\dots,n\}-I$, $1 \leq j_1 < \dots < j_{n-p} \leq n$ entonces

$$z(I) = (z_{j_1},\dots,z_{j_{n-p}}) \text{ y } z(I)^\gamma = \prod_{j\in J} z_j^{\gamma_j}$$

$$\|z\| = \max\{|z_i|;\ 1 \leq i \leq n\}; \quad \|z(I)\| = \max\{|z_j|;\ j \in J\}$$

$$B = \{z \in C^n \ / \ \|z\| < 1\}; \quad B(I) = \{z(I) \ / \ \|z(I)\| < 1\},$$

y para cada $\delta > 0$

$$B_\delta^\gamma = \{z \in B/|z^\gamma| > \delta\}; \quad B(I)_\delta^\gamma = \{z(I) \in B(I)/|z(I)^\gamma| > \delta\}.$$

1.2. $M_{(p+1)\times n}(N)$ denotará el conjunto de matrices de orden $(p+1)\times n$ cuyos elementos son enteros no negativos.

$\alpha_i = (\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in})$ designará la i-ésima fila de α.

$\alpha(i,j)$ designará la matriz obtenida suprimiendo la i-fila y la j-columna de α.

α_I es la matriz construída con las (p+1) filas y las columnas $i_1 < \ldots < i_p$ de α.

$\alpha(p+1)$ es la matriz que se obtiene de eliminar de α la fila p+1.

1.3. Se denotará también

$$dz_I = dz_{i_1}\wedge \ldots \wedge dz_{i_p}; \quad d\overline{z}_I = d\overline{z}_{i_1}\wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{i_p};$$

$$dw_I = dz_{i_1}\wedge d\overline{z}_{i_1} \quad \ldots \quad dz_{i_p}\wedge d\overline{z}_{i_p}.$$

Si $A \subset \{1,\ldots,n\}$, designaremos por $|A|$ al cardinal de A.

Una forma $\omega \in \Gamma(C^n,\mathcal{E}^{2n-p}) = \mathcal{E}^{2n-p}(C^n)$ $0 \leq p \leq n$, admite una representación única, la expresión canónica de ω

$$\omega = \sum_{A,B,M} f_{A,B,M}(z,\overline{z})\, dz_A \wedge d\overline{z}_B \wedge dw_M$$

donde A, B y M son los subconjuntos ordenados de $\{1,\ldots,n\}$ disjuntos dos a dos tales que $|A| + |B| + 2|M| = 2n-p$. Se tiene necesariamente $|A| + |B| + |M| \leq n$ y $|M| \geq n-p$.

1.4. Se dice que $\alpha \in M_{p,p}(N)$ es normal si det $\alpha \neq 0$ y si α se puede transformar en una matriz triangular superior mediante una permutación de sus columnas.

Se dice que $\alpha \in M_{p+1,p}(N)$ es normal si $\alpha_{p+1} = 0$ y $\alpha(p+1)$ es normal.

Se dice que la forma ω es normal respecto a $\alpha \in M_{p,n}(N)$ ó $\alpha \in M_{p+1,n}(N)$ si:

$$|B| = 0, \quad |M| = n-p \quad \text{y} \quad \alpha_A \text{ es normal.}$$

1.5. Sea $k \in \mathcal{E}^0(C^n)$, $\gamma \in N^n$ y $I \in \Lambda(p,n)$, entonces, denotaremos:

$$\partial_j k = \frac{\partial k}{\partial z_j}, \quad \bar{\partial}_j k = \frac{\partial k}{\partial \bar{z}_j}, \quad \partial^\gamma K = \partial_1^{\gamma_1} \ldots \partial_n^{\gamma_n} K,$$

$$\partial^\gamma(I)k = \partial_{i_1}^{\gamma_{i_1}} \ldots \partial_{i_p}^{\gamma_{i_p}} K \qquad \gamma! = \gamma_1! \ldots \gamma_n!,$$

$$\gamma(I)! = \gamma_{i_1}! \ldots \gamma_{i_p}!,$$

$$k^\gamma(I) = \frac{1}{\gamma(I)!} [\partial^\gamma(I)k]_{z_{i_1} = \ldots = z_{i_p} = 0},$$

$$\tilde{k}^\gamma(I) = z_I^\gamma \, k^\gamma(I) .$$

Si $r,s \in N^n$; entonces

$$r-1 = (r_1-1,\ldots,r_n-1); \quad r \leq s \Leftrightarrow r_i \leq s_i; \quad 1 \leq i \leq n .$$

1.6. Una trayectoria admisible en R^p, $p \geq 2$, es una aplicación analítica

$$\underset{\sim}{\delta} = (\delta_1(\delta),\ldots,\delta_p(\delta)): (0,1) \to R^p > 0.$$

tal que:

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\delta_j}{\delta_{j+1}^q} = 0, \; 1 \leq j \leq p-1; \text{ para cada } q \in N$$

y

$$\lim_{\delta\to 0} \delta_p(\delta) = 0 .$$

Uno ve inmediatamente que, dadas las $\nu_j \in R \quad 1 \leq j \leq p$ se tiene

$$\lim_{\delta\to 0} \prod_{j=i}^{p} \delta_j(\delta)^{\nu_j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \nu_i > 0 \\ \\ +\infty & \text{si} \quad \nu_i < 0 \end{cases} .$$

1.7. Las cadenas semianalíticas $T^p_{\delta',\delta''}$ y $D^\alpha_{\delta',\delta'',\delta_{p+1}}$.

Sea $W \subset C^n$ un abierto conexo y

$$\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_{p+1}): W \to C^p$$

una aplicación analítica tal que ninguna de las funciones φ_j es identicamente nula.

Denotemos con $V(\varphi_i) = \{z \in W/\varphi_i(z) = 0\}$.

Sean

$$\underset{\sim}{\delta}' = (\delta_1(\delta'),\dots,\delta_k(\delta')), \quad \underset{\sim}{\delta}'' = (\delta_{k+1}(\delta''),\dots,\delta_p(\delta''))$$

trayectorias admisibles en R^k y R^{p-k}, respectivamente; denotaremos:

$$T^p_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}''}(\varphi^*) = \left\{ \begin{array}{r} z = (z_1,\dots,z_n) \in B/|\varphi_i(z)| = \delta_i(\delta'),\ i = 1,\dots,k \\ |\varphi_i(z)| = \delta_i(\delta''),\ i = k+1,\dots,p \end{array} \right\}$$

con $\varphi^* = (\varphi_1,\dots,\varphi_p)$,

$$D^\alpha_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}(\varphi) = \left\{ \begin{array}{r} z = (z_1,\dots,z_n) \in B/|\varphi_i(z)| = \delta_i(\delta'), i=1,\dots,k \\ |\varphi_i(z)| = \delta_i(\delta''), i=k+1,\dots,p \\ |\varphi_{p+1}(z)| > \delta_{p+1} \end{array} \right\}$$

δ_{p+1} fijo > 0 .

Como la aplicación

$$|\varphi| = (|\varphi_1|,\ldots,|\varphi_{p+1}|): W-Y \to R^p > 0, \quad Y = \bigcup_{i=1}^{p+1} V(\varphi_i)$$

es analítica y si

$$\dim|T^p_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}''}(\varphi^*)| \le 2n-p \quad y \quad \dim|D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}(\varphi)| \le 2n-p$$

para δ' y δ'' pequeños, se pueden definir como en [1] las cadenas semianalíticas:

$$T^p_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}''}(\varphi^*) = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} |\varphi^*|^{-1} [(\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'')] \quad ,$$

$$D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}(\varphi) = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} |\varphi|^{-1} ([(\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'')] \cdot [x_{p+1} > \delta_{p+1}])$$

$\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}''$ y $x_{p+1} > \delta_{p+1}$ con las orientaciones canónicas.

Si $\varphi_i = h_i z^{\alpha_i}$ $i = 1,\ldots,p+1$, donde $h_i(z)$ son funciones inversibles en $\mathcal{O}(\bar{B})$, denotaremos a estas cadenas semianalíticas con

$$T^p_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}''}(h),\ D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}(h) \ ;$$

y si $h_i \equiv 1$ $\forall$ i, denotamos simplemente con

$$T^p_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}''},\quad D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}.$$

1.8. Sea $\alpha \in M_{p+1,n}(N)$ tal que rango $\alpha(p+1) = p$

a) Mediante una permutación conveniente de las variables z_i, podemos suponer que

$$\Delta = \det \alpha_A(p+1) > 0$$

con $A = \{1,\ldots,p\}$.

Denotamos $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \alpha'(i,j)$, con

$$\alpha' = \alpha_A(p+1)$$

Si $z \in D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}$; se tiene: (c.f. [1], 2.3)

$$\rho^{\alpha_1} = \delta_1, \dots, \rho^{\alpha_p} = \delta_p,\ \rho^{\alpha_{p+1}} > \delta_{p+1}$$

$\delta_i = \delta_i(\delta')$, $i = 1,\dots,k$; $\delta_i = \delta_i(\delta'')$, $i = k+1,\dots,p$.

La regla de Cramer permite deducir.

$$\rho_i^{\Delta} = \frac{\hat{\delta}_i}{[\rho_{p+1}\dots\rho_n]^{\beta_i}} \qquad i = 1,\dots,p \tag{1}$$

donde $\hat{\delta}_i = \delta_1^{\Delta_{1i}} \dots \delta_p^{\Delta_{pi}}$; $\beta_i = \Delta_{1i}\,\alpha_1 + \dots + \Delta_{pi}\,\alpha_p$.

Como $\rho_i < 1$, se tiene

$$[\rho_{p+1}\dots\rho_n]^{\beta_i} > \hat{\delta}_i; \quad i = 1,\dots,p \tag{2}$$

y reemplazando en $\rho^{\alpha_{p+1}} > \delta_{p+1}$ los valores de ρ_i encontrados en (1) obtenemos

$$[\rho_{p+1}\dots\rho_n]^{\beta_{p+1}} > \hat{\delta}_{p+1} \tag{3}$$

con $\hat{\delta}_{p+1} = \delta_{p+1}^{\Delta} \prod_{j=1}^{p} \delta_j^{-\lambda_j}$, $\lambda_j = \Delta_{j1}\,\alpha_{p+1,1} + \dots + \Delta_{jp}\alpha_{p+1,p}$,

$$\beta_{p+1} = \Delta\,\alpha_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \alpha_{p+1,i}\,\beta_i .$$

Denotamos con $V_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}$ al conjunto abierto en B(A) dado por las desigualdades (2) y (3). Es decir:

$$V_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}} = \left\{ \begin{array}{l} (z_{p+1},\dots,z_n)/\rho_i < 1 \\ \qquad [\rho_{p+1}\dots\rho_n]^{\beta_i} > \hat{\delta}_i;\ i = 1,\dots,p \\ \qquad [\rho_{p+1}\dots\rho_n]^{\beta_{p+1}} > \hat{\delta}_{p+1} \end{array} \right\}$$

Para $T^{p}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}''}$ tenemos solamente

$$\rho^{\alpha_1} = \delta_1, \dots, \rho^{\alpha_p} = \delta_p$$

y denotamos

$$V_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}''} = \left\{ \begin{array}{l} (z_{p+1},\dots,z_n)/\rho_i < 1,\ [\rho_{p+1}\dots\rho_n]^{\beta_i} > \hat{\delta}_i \\ \qquad\qquad\qquad i = 1,\dots,p \end{array} \right\}$$

con

$$\hat{\delta}_i = \delta_1^{\Delta_{1i}}, \dots, \delta_p^{\Delta_{pi}} .$$

En estas condiciones, de (1) deducimos que $|D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}|$ y $|T^{p}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}''}|$ son subvariedades (lisas) de B y la aplicación,

$$(0,2\pi)^p \times V_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}} \to |D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}|$$

$$(\theta_1,\dots,\theta_p,z(A)) \to (g_1 e^{i\theta_1},\dots,g_p\ e^{i\theta_p},z(A))$$

con

$$g_i = \left| \frac{\hat{\delta}_i}{[\rho_{p+1}\dots\rho_n]^{\beta_i}} \right|^{1/\Delta} \qquad i = 1,\dots,p$$

es una parametrización de $|D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}|$.

En igual forma para $|T^{p}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}''}|$.

Observemos que $\beta_i = (\beta_{i1},\dots,\beta_{in})$, donde

$$\beta_{ij} = \sum_{h=1}^{p} \Delta_{hi}\ \alpha_{hj} \qquad j = 1,\dots,n \quad ;$$

y cuando fijemos i, denotaremos algunas veces $\sigma_j = \beta_{ij}$, $j = 1,\dots,n$

b) Sea $\alpha \in M_{p+1,n}(N)$, si $\alpha_A(p+1)$ es triangular, entonces

$$\Delta > 0,\ \Delta_{1i} = \ldots = \Delta_{i-1\ i} = 0,\ \Delta_{ii} > 0$$

$$i = 1,\ldots,p$$

y luego en las desigualdades (2) y (3) de parte (a) se tiene:

$$\hat{\delta}_i = \delta_i^{\Delta_{ii}} \ldots \delta_p^{\Delta_{pi}} \qquad 1 \leq i \leq p$$

$$\hat{\delta}_{p+1} = \delta_{p+1}^{\Delta} \prod_{j=1}^{p} \delta_j^{-\lambda_j},\quad \lambda_j = \Delta_{jj}\, \alpha_{p+1,j} + \ldots + \Delta_{jp}\, \alpha_{p+1,p}\ .$$

Si α_A es normal, se obtiene

$$\hat{\delta}_i = \delta_i^{\Delta_{ii}} \ldots \delta_p^{\Delta_{pi}} \quad 1 \leq i \leq p;\ \hat{\delta}_{p+1} = \delta_{p+1}^{\Delta},\ \beta_{p+1} = \Delta\, \alpha_{p+1}$$

1.9. Sea Y un subconjunto analítico del abierto W de C^n.

Una forma $\tilde{\omega} \in \varepsilon(W-Y)$ se dice semimeromorfa en W, con polos en Y; si $\forall\ z \in Y$ existen W_z entorno de z, una forma $\omega \in \mathcal{E}(W_z-Y)$ y una ecuación φ de Y en W_z tales que, sobre W_z-Y se tenga

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\varphi}\ .$$

$\mathcal{E}_W(*Y)$ denotará las formas semimeromorfas de W, con polos en Y; y $D_W(*Y)$ denotará el conjunto de las formas semimeromorfas de W, con polos en Y, a soporte compacto.

Sean $Y_1,\ldots,Y_p$ hipersuperficies admisibles en W, Coleff-Herrera Han definido en [1], las aplicaciones

$$\left.\begin{array}{l} R^p : D_W^{2n-p}(*Y) \to C \\[2ex] R^{p-1}\, R^p : D_W^{2n-p-1}(*Y) \to C \end{array}\right\},\quad Y = \bigcup_{i=1}^{p} V(\varphi_i)$$

el p-residuo y (p-1)-residuo valor principal, respectivamente, como los límites :

$$R_W^p[\tilde{\alpha}] = \lim_{\delta\to 0} \int_{T^p_{\tilde{\delta}}(\varphi)} \tilde{\omega}$$

$$R_W^{p-1}\, P^p(\tilde{\omega}) = \lim_{\delta\to 0} \int_{D^\alpha_{\tilde{\delta}}(\varphi)} \tilde{\omega}$$

donde $\tilde{\delta} = (\delta_1(\delta),\ldots,\delta_p(\delta))$ es admisible y δ suficientemente pequeño; y demuestran la igualdad

$$R_W^{p-1}\, P^p(\tilde{\omega}) = \lim_{\delta_p\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^\alpha_{\tilde{\delta}',\delta_p}(\varphi)} \tilde{\omega}$$

donde $\tilde{\delta}' = (\delta_1(\delta'),\ldots,\delta_{p-1}(\delta'))$ es una trayectoria admisible y $\delta_p > 0$, cuando W es un abierto relativamente compacto, de C^n ó de una variedad holomorfa paracompacta de dimensión n.

Para demostrar las fórmulas (5) y (6) mencionadas en Introducción debemos suponer que $D^\alpha_{\tilde{\delta}',\tilde{\delta}'',\delta_{p+1}}(\varphi)$ y $T^{p+1}_{\tilde{\delta}',\tilde{\delta}''}(\varphi)$ sean efectivamente cadenas semianalíticas; es decir que los tubos tengan la dimensión correcta; esto es:

$$\dim_R |T^{p+1}_{\tilde{\delta}',\tilde{\delta}''}(\varphi)| \leq 2n-p-1;\ \dim_R |D^\alpha_{\tilde{\delta}',\tilde{\delta}'',\delta_{p+1}}(\varphi)| \leq 2n-p$$

para δ' y δ'' suficientemente pequeños. La demostración de estas desigualdades la haremos en el Lema 2.16 de Cap. II, mientras tanto la supondremos válidas.

CAPITULO II

2.0 En este Capítulo demostraremos los resultados principales del presente trabajo:

$$R_W P[\tilde{\omega}] = \lim_{\delta_{p+1}\to 0} \lim_{\delta''\to 0} \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\delta',\delta'',\delta_{p+1}}(\varphi)} \tilde{\omega} \qquad (1)$$

$$R_W[\tilde{\omega}] = \lim_{\delta''\to 0} \lim_{\delta'\to 0} \int_{T^p_{\delta',\delta''}(\varphi)} \tilde{\omega} \qquad (2)$$

cuando δ' y δ'' denotan trayectorias admisibles (δ admitidas), para toda forma semimeromorfa $\tilde{\omega}$ en el abierto relativamente compacto W de una variedad holomorfa paracompacta X de dimensión n, con polos en $\tilde{Y} = \cup V(\varphi_i)$.

Primero consideraremos el caso en que W es la bola unitaria $B \subset C^n$ y $\tilde{Y}$ tiene cruzamientos normales. Por lo tanto supondremos que:

$$\alpha \in M_{p+1,n}(N) \text{ y } \gamma \in N^n \text{ tal que } V(z^{\gamma}) \subset V(\prod_{i=1}^{p+1} z^{\alpha_i})$$

$$\omega = k\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge dw_M \in \mathcal{E}^{2n-p}(C^n)$$

$$\varphi_i(z) = h_i(z) z^{\alpha_i} \quad i = 1,\dots,p+1, \quad h_i \text{ inversible en } \mathcal{O}(\bar{B});\ \text{y}$$

notaremos

$$I_{\delta',\delta''} = \int_{D^{\alpha}_{\delta',\delta'',\delta_{p+1}}(h)} z^{-\gamma}\omega \quad ;$$

En el caso en que $h_i \equiv 1$, escribiremos simplemente $D^{\alpha}_{\delta',\delta'',\delta_{p+1}}$.

Lema 2.1.

i. Si rango $\alpha(p+1) < p$

$$I_{\delta',\delta''} = 0$$

Para cada $\delta_{p+1} > 0$, δ' y δ'' suficientemente pequeños

ii. Si rango $\alpha < p+1$ y $\alpha_{p+1} \neq 0$

$$I_{\delta',\delta''} = 0$$

para cada $\delta_{p+1} > 0$, δ' y δ'' suficientemente pequeños.

Demostración

i. Como $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ son linealmente dependientes existen $t_1,\dots,t_p$ enteros, no todos nulos tal que

$$t_1\alpha_1 +\dots+ t_p\alpha_p = 0$$

Sea r el menor subíndice i, tal que $t_i \neq 0$; t_r se puede suponer positivo. Entonces los puntos del tubo $D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}(h)$ cumple la igualdad:

$$\prod_{i=r}^{p} |h_i(z)|^{t_i} = \prod_{i=r}^{p} |h_i(z)\, z^{\alpha_i}|^{t_i}$$

$$= \delta_r^{t_r} \dots \delta_p^{t_p} = \delta^*$$

si $r \leq k$; $\lim\limits_{\delta' \to 0} \delta^* = 0$

y el tubo es vacío para δ' pequeño y δ'' fijo, por ser las h_i inversibles en $O(\overline{B})$.

si $r > k$; $\lim\limits_{\delta'' \to 0} \delta^* = 0$

y el tubo es vacío para δ'' pequeño y δ' fijo, por ser las h_i inversibles en $O(\overline{B})$.

ii. En esta situación; las hipótesis implican que no existe $A \subset \Lambda(p,n)$ tal que α_A sea normal.

Para cada $s = 1,\dots,p$, sea

$$I_s = \{1 \leq i \leq n: \alpha_{si} > 0,\ \alpha_{s+1,i} = \dots = \alpha_{p+1,i} = 0\}$$

Existe r tal que $I_r = \emptyset$, $1 \leq r \leq p$, c.f [1]. Lema 2.2.3; de donde, se deduce la existencia de números $k_{r+1},\dots,k_{p+1} \in N$ tales que

$$\alpha_{ri} \leqslant k_{r+1}\,\alpha_{r+1,i} + \dots + k_{p+1}\,\alpha_{p+1,i} \qquad 1 \leq i \leq n$$

Los puntos en $|D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}(h)|$ verifican

$$|h_i(z)\, z^{\alpha_i}| = \delta_i,\ 1 \leq i \leq p, \quad \text{y} \quad |h_{p+1}\, z^{\alpha_{p+1}}| > \delta_{p+1}.$$

Sean

$$m = \inf\{|h_r(z)|: z \in \overline{B}\} > 0$$

$$M = \sup\{|h_{r+1}^{k_{r+1}}(z)\dots h_{p+1}^{k_{p+1}}(z)|: z \in \overline{B}\} > 0$$

y se deduce c.f [1]; Lema 2.2.3 que

$$\delta^* = \delta_r \cdot (\delta_{r+1}^{k_{r+1}} \dots \delta_{p+1}^{k_{p+1}})^{-1} \geq \frac{m}{M} \qquad (3)$$

Si $r \leq k$, $\lim\limits_{\delta' \to 0} \delta^* = 0$

y de (3), el tubo $|D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}(h)|$ es vacío para δ' pequeño y δ'' fijo.

Si $r > k$, $\lim_{\delta''\to 0} \delta^* = 0$

y de (3) el tubo $|D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}(h)|$ es vacío para δ'' pequeño.□□

Para la demostración de los Lemas 2.2 y 2.3 siguientes, c.f [1] Lemas 2.7 y 2.9.

<u>Lema 2.2.</u>

Si rango $\alpha(p+1) = p$, entonces $I_{\delta',\delta''} = 0$, en cada uno de los casos siguientes:

a) $m = |M| > n-p$

b) $m = |M| = n-p$ y $\det \alpha_{A\cup B}(p+1) = 0$.

<u>Lema 2.3.</u>

Sean $g = g(z(j), \overline{z}(j)) \in \mathcal{E}^0(C^n)$ una función independiente de z_j y $\overline{z}_j$, y $r,s \in N$ tal que $r+s < \gamma_j$; sea

$$\det \alpha_{A\cup B}(p+1) \neq 0, \quad \text{con} \quad |A \cup B| = p$$

Entonces

$$\int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\, z_j^r\, \overline{z}_j^s\, g(z(j), \overline{z}(j))\, dz_A \wedge d\overline{z}_B \wedge dw_M = 0 \ ,$$

en cualquiera de los casos siguientes

a) $j \in B \cup M$

b) $j \in A$, $s > 0$

c) $j \in A$, $s = 0$, $r < \gamma_j - 1$

Gracias a los Lemas 2.1 y 2.2, podemos considerar por el resto del capítulo II que:

$$|M| = n-p \ (\text{Luego } |A \cup B| = p) \ \text{ y } \ \det\alpha_{A\cup B}(p+1) \neq 0 \ .$$

Veremos mas adelante que el Límite iterado en δ' y δ'' de la integral $I_{\delta',\delta''}$ es algunas veces cero.

Proposición 2.4.

Sea $f(z,\bar{z}) = \dfrac{g(z,\bar{z})}{z^{\gamma}}$, con $g(z,\bar{z}) = z^{\mu}\,\bar{z}^{\nu}\,h(z,\bar{z})$ donde $h(z,\bar{z})$ es C^{∞} y $\mu,\nu,\gamma \in N^{n}$ tal que $\mu+\nu = \gamma$

y sea $I \underset{\neq}{\subset} A \cup B$; Entonces:

i. Para cada $\delta'' > 0$ y $\delta_{p+1} > 0$ suficientemente pequeños, existe el límite

$$\lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z_I^{-1}\, f(z,\bar{z})\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge dw_M$$

ii. Para cada $\delta_{p+1} > 0$ suficiente pequeño se verifica

$$\lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z_I^{-1}\, f(z,\bar{z})\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge dw_M = 0 \ .$$

Demostración de i.:

Mediante una permutación de las variables z_i, podemos suponer $A \cup B = \{1,\dots,p\}$, $M = \{p+1,\dots,n\}$ y $\det \alpha_{A\cup B}(p+1) > 0$; denotemos

$$U = (A \cup B) - I$$

Por hipótesis $U \neq \emptyset$. Sea

$$J_{\delta',\delta''} = \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z_I^{-1}\, f(z,\bar{z})\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge dw_M$$

como $\Delta = \det \alpha_{A\cup B}(p+1) > 0$, podemos utilizar la parametrización de $D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}$ descripta en el capítulo I; Secc. 1.8, obteniendo:

$$J_{\delta',\delta''} = i^n \int_{T\times V_{\delta',\delta''}} \hat{\rho}_U \, \rho_M \, e^{i\gamma} f(\theta,\rho)\, d\theta_A \wedge d\theta_B \wedge d\theta_M \wedge d\rho_M; \qquad (4)$$

donde

$$\hat{\rho}_i = \rho_i(\rho_{p+1},\dots,\rho_n) = \frac{\hat{\delta}_i}{[\rho_{p+1}\cdots\rho_n]^{\beta_i}} \qquad 1 \le i \le p$$

$$T = [0,2\pi]^n, \quad \theta = (\theta_1,\dots,\theta_n), \quad \rho = (\rho_1,\dots,\rho_n)$$

$$V_{\delta',\delta''} = \left\{ \begin{array}{l} (\rho_{p+1},\dots,\rho_n)/\rho_j < 1 \\ \qquad [\rho_{p+1}\cdots\rho_n]^{\beta_i} > \hat{\delta}_i \\ \qquad i = 1,\dots,p+1 \end{array} \right\}$$

$$\hat{\delta}_i = \delta_1^{\Delta_{1i}}\cdots\delta_p^{\Delta_{pi}}, \quad \beta_i = \sum_{h=1}^{p} \alpha_h \Delta_{hi}, \quad 1 \le i \le p$$

$$\hat{\delta}_{p+1} = \delta_{p+1}^{\Delta} \prod_{j=1}^{p} \delta_j^{-\lambda_j}, \quad \lambda_j = \Delta_{j1}\alpha_{p+1,1}+\dots+\Delta_{jp}\alpha_{p+1,p}$$

$$\beta_{p+1} = \Delta\, \alpha_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \alpha_{p+1,i}\, \beta_i$$

$$\gamma = \sum_{a\in A} \theta_a - \sum_{b\in B} \theta_b - \sum_{j\in I} \theta_j .$$

En particular

$$\hat{\rho}_u = \frac{\hat{\delta}_u}{[\rho_{p+1}\cdots\rho_n]^{\beta_u}}, \qquad u \in U. \qquad (5)$$

Sea $c > 0$ una cota de $|f|$ en B. Integrando en (4) respecto de las variables angulares obtenemos:

$$|J_{\delta',\delta''}| \leq c \int_{V_{\delta',\delta''}} \hat{\rho}_U \, \rho_M \, d\rho_M$$

$$\leq c \int_{V_{\delta',\delta''}} \hat{\rho}_u \, \rho_{p+1} \cdots \rho_n \, d\rho_{p+1} \cdots d\rho_n . \qquad (6)$$

para cualquier u fijo en U.

Aquí consideraremos dos casos separadamente.

a) $\alpha_{A\cup B}(p+1)$ es una matriz triangular superior (o se puede transformar mediante una permutación de sus columnas en una matriz triangular superior).

En este caso $\Delta > 0$, $\Delta_{11} > 0, \ldots, \Delta_{pp} > 0$, y para cualquier $u \in U$ fijo los puntos de $V_{\delta',\delta''}$ verifican:

$$\rho_{p+1}^{\sigma_{p+1}} \cdots \rho_n^{\sigma_n} = [\rho_{p+1} \cdots \rho_n]^{\beta_u} > \hat{\delta}_u$$

donde

$$\hat{\delta}_u = \delta_u^{\Delta_{uu}} \cdots \delta_p^{\Delta_{pu}} \qquad (7)$$

$$\sigma_j = \beta_{uj} = \alpha_{uj} \, \Delta_{uu} + \ldots + \alpha_{pj} \, \Delta_{pu}, \quad p+1 \leq j \leq n$$

Reemplazando $\hat{\rho}_u$ en (6), obtenemos

$$|J_{\delta',\delta''}| \leq c(\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \int_{V_{\delta',\delta''}} \prod_{j=p+1}^{n} \rho_j^{1-\frac{\sigma_j}{\Delta}} \, d\rho_{p+1} \cdots d\rho_n \quad (8) ;$$

<u>Lema 2.5.</u>

Si se renumeran variables de manera que

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_j > 0 & 1 \leq j \leq s \\ \sigma_j \leq 0 & s+1 \leq j \leq n-p \end{array}\right\} ; \quad 0 \leq s \leq n-p$$

se verifica:

$$|J_{\delta',\delta''}| \leq c_1 \ (\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \int_{D_{\hat{\delta}_u,\hat{\hat{\delta}}_u}} \prod_{j=1}^{s} \rho_j^{1-\frac{\sigma_j}{\Delta}} d\rho_1 \ldots d\rho_s,$$

donde $\hat{\delta}_u = \delta_u^{\Delta_{uu}} \ldots \delta_p^{\Delta_{pu}}$ y $\hat{\hat{\delta}}_u$ es un producto de potencias no negativas de algunos elementos de la sucesiõn $\delta_{u+1}, \delta_{u+2}, \ldots, \delta_p$, y

$$D_{\hat{\delta}_u,\hat{\hat{\delta}}_u} = \{(\rho_1,\ldots,\rho_s)/0 \leq \rho_j < 1, \ \prod_{j=1}^{s} \rho_j^{\sigma_j} > \hat{\delta}_u . \hat{\hat{\delta}}_u\}$$

$$0 \leq s \leq n-p, \qquad c_1 \text{ constante} > 0.$$

En efecto:

Como $\Delta_{uu} > 0$, la igualdad (7) implica que si $\sigma_j < 0$, entonces $\alpha_{u+h,j} > 0$ para algũn $h = h(j) > 0$; de donde

$$\delta_{u+h(j)} = \rho^{\alpha_{u+h}} \leq \rho_j, \quad \text{pues} \quad \rho_j \leq 1 \quad \forall\, j \qquad ,$$

luego

$$\prod_{j=1}^{s} \rho_j^{\sigma_j} = \frac{\prod_{\lambda=1}^{n-p} \rho_\lambda^{\sigma_\lambda}}{\prod_{j=s+1}^{n-p} \rho_j^{\sigma_j}} > \hat{\delta}_u \prod_{j=s+1}^{n-p} \rho_j^{-\sigma_j}$$

$$\geq \hat{\delta}_u \prod_{j=s+1}^{n-p} (\delta_{u+h(j)})^{-\sigma_j}$$

$$= \hat{\delta}_u \, . \, \hat{\hat{\delta}}_u \qquad , \qquad (9)$$

donde

$$\hat{\hat{\delta}}_u = \prod_{j=s+1}^{n-p} (\delta_{u+h(j)})^{-\sigma_j} \qquad ;$$

Por lo tanto se tiene que

$$V_{\delta',\delta''} \subset \{(\rho_{p+1},\ldots,\rho_n) \in V_{\delta',\delta''} / \prod_{i=1}^{s} \rho_j^{\sigma_j} \geq \hat{\delta}_u . \mathring{\delta}_u\}$$

$$= D_{\hat{\delta}_u,\mathring{\delta}_u} \;.$$

Integrando en (8) los términos donde $\sigma_i \leq 0$ obtenemos

$$|\dot{J}_{\delta',\delta''}| \leq c_1(\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \int_{D_{\hat{\delta}_u,\mathring{\delta}_u}} \prod_{j=1}^{s} \rho_j^{1-\frac{\sigma_j}{\Delta}} d\rho_1\ldots d\rho_s,$$

como queríamos demostrar.□

En la situación (a), consideramos ahora los casos:

a_1) $u \leq k$ para algún $u \in U$

a_2) $u > k$ $\forall\, u \in U$

a_1) Veamos que aquí se verifica

$$\lim_{\delta' \to 0} J_{\delta',\delta''} = 0,$$ para cada δ'' fijo y pequeño.

Fijemos $u \leq k$, $u \in U$; reemplazando la expresión (5) de ρ_u en $J_{\delta',\delta''}$ vemos por el lema anterior que basta probar el siguiente:

<u>Lema 2.6.</u>

$$\lim_{\delta' \to 0} (\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \int_{D_{\hat{\delta}_u,\mathring{\delta}_u}} \prod_{j=1}^{s} \rho_j^{1-\frac{\sigma_j}{\Delta}} d\rho_1\ldots d\rho_s = 0 \qquad (10)$$

donde

1. $\sigma_j > 0$, $\forall\; j = 1,\ldots,s$, $\Delta > 0$

2. $\hat{\delta}_u = \delta_u^{\gamma_u}\ldots\delta_p^{\gamma_p}$; $\gamma_u > 0$; $u \leq k$

3. $\hat{\hat{\delta}}_u$ es un producto de potencias no negativas de algunos elementos de la sucesión,

   $\delta_{u+1},\ldots,\delta_p$.

4. $\underset{\sim}{\delta}' = (\delta_1(\delta'),\dots,\delta_k(\delta'))$, $\underset{\sim}{\delta}'' = (\delta_{k+1}(\delta''),\dots,\delta_p(\delta''))$ son trayectorias admisibles de R^k y R^{p-k}

5. $D_{\hat{\delta}_u,\hat{\hat{\delta}}_u} = D_{\hat{\delta}_u,\hat{\hat{\delta}}_u}(s) = \{(\rho_1,\dots,\rho_s)/\rho_j < 1;\ \prod_{j=1}^{s} \rho_j^{\sigma_j} \geq \hat{\delta}_u.\hat{\hat{\delta}}_u\}$.

Demostraremos este lema por inducción sobre s. Para s = 1,

Si $\quad 1 - \frac{\sigma_1}{\Delta} \neq -1$

La integral (10) se reduce a

$$(\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \int_{(\hat{\delta}_u.\hat{\hat{\delta}}_u)^{1/\sigma_1}}^{1} \rho_1^{1-\frac{\sigma_1}{\Delta}}\, d\rho_1$$

$$= (\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \left(1 - (\hat{\delta}_u.\hat{\hat{\delta}}_u)^{\frac{1}{\sigma_1}(2-\frac{\sigma_1}{\Delta})}\right)$$

$$= (\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} - (\hat{\delta}_u)^{2/\sigma_1} (\hat{\hat{\delta}}_u)^{\frac{2}{\sigma_1}-\frac{1}{\Delta}} \quad ;$$

cuando $\delta' \to 0$, como $u \leq k$ se tiene $\hat{\delta}_u \to 0$ y como $\hat{\delta}_u(\hat{\hat{\delta}}_u)^{1-\frac{\sigma_1}{2\Delta}}$ es de la forma

$$\delta_u^{\gamma_u}.\delta_{u+1}^{\gamma'_{u+1}}\dots\delta_p^{\gamma'_p}\ , \qquad \gamma_u > 0 \tag{11}$$

también tiende a cero, por ser $\underset{\sim}{\delta}'$ trayectoria admisible.

Si $\quad 1 - \frac{\sigma_1}{\Delta} = -1$

entonces $\sigma_1 = 2\Delta$ y la integral (10) se reduce a:

$$(\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \int_{(\hat{\delta}_u.\hat{\hat{\delta}}_u)^{1/2\Delta}}^{1} \rho_1^{-1}\, d\rho_1$$

$$\leq (\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \int_{(\hat{\delta}_u \cdot \hat{\hat{\delta}}_u)^{1/2\Delta}}^{1} \frac{1}{(\hat{\delta}_u \cdot \hat{\hat{\delta}}_u)^{1/2\Delta}} d\rho_1$$

$$= [\hat{\delta}_u(\hat{\hat{\delta}}_u)^{-1}]^{1/2\Delta} - (\hat{\delta}_u)^{1/\Delta}$$

como $\hat{\delta}_u(\hat{\hat{\delta}}_u)^{-1}$ es de la forma (11), tiende a cero cuando $\delta' \to 0$. Supongamos que (10) se verifica para el caso s-1, y consideramos la integral

$$(\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \int_{D_{\hat{\delta}_u,\hat{\hat{\delta}}_u}(s)} \prod_{j=1}^{s} \rho_j^{1-\frac{\sigma_j}{\Delta}} d\rho_1 \ldots d\rho_s \quad .$$

Si $1 - \frac{\sigma_s}{\Delta} \neq 1$, se tiene en $D_{\hat{\delta}_u \hat{\hat{\delta}}_u}$ que

$$\left(\frac{\hat{\delta}_u \cdot \hat{\hat{\delta}}_u}{\prod_{j=1}^{s-1} \rho_j^{\sigma_j}}\right)^{1/\sigma_s} < \rho_s < 1$$

la integral (10) es igual a

$$(\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \int_{D_{\hat{\delta}_u,\hat{\hat{\delta}}_u}(s-1)} \prod_{j=1}^{s-1} \rho_j^{1-\frac{\sigma_j}{\Delta}} d\rho_1 \ldots d\rho_{s-1} \left[\int_{\left(\frac{\hat{\delta}_u \hat{\hat{\delta}}_u}{\prod_{j=1}^{s-1} \rho_j^{\sigma_j}}\right)^{1/\sigma_s}}^{1} \rho_s^{1-\frac{\sigma_s}{\Delta}} d\rho_s\right]$$

$$= (\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \int_{D_{\hat{\delta}_u,\hat{\hat{\delta}}_u}} \prod_{j=1}^{s-1} \rho_j^{1-\frac{\sigma_j}{\Delta}} d\rho_1 \ldots d\rho_{s-1}$$

$$- (\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} (\hat{\delta}_u \hat{\hat{\delta}}_u)^{\frac{2}{\sigma_s}-\frac{1}{\Delta}} \int_{D_{\hat{\delta}_u,\hat{\delta}_u}(s-1)} \frac{\prod_{j=1}^{s-1} \rho_j^{1-\frac{\sigma_j}{\Delta}}}{\prod_{j=1}^{s-1} \rho_j^{2\frac{\sigma_j}{\sigma_s}-\frac{\sigma_j}{\Delta}}} d\rho_1 \ldots d\rho_{s-1}$$

$$= (\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \int \prod_{j=1}^{s-1} \rho_j^{1-\frac{\sigma_j}{\Delta}} d\rho_1 \ldots d\rho_{s-1}$$

$$- (\hat{\delta}_u)^{2/\delta_s} (\hat{\hat{\delta}}_u)^{\frac{2}{\sigma_s}-\frac{1}{\Delta}} \int \prod_{j=1}^{s-1} \rho_j^{1-2\frac{\sigma_j}{\sigma_s}} d\rho_1 \ldots d\rho_{s-1}$$

Por la hipôtesis inductiva, la primera integral tiende a cero cuando $\delta' \to 0$.

Por otro lado $\gamma_u = (\hat{\delta}_u)^{2/\sigma_s} (\hat{\hat{\delta}}_u)^{\frac{2}{\sigma_s}-\frac{1}{\Delta}}$ tien e la forma

$$\delta_u^{\gamma_u} . \delta_{u+1}^{\gamma'_{u+1}}, \ldots, \delta_p^{\gamma'_p} \qquad \text{con} \qquad \gamma_u > 0,\ u \leq k$$

γ_u tiende a cero, cuando $\delta' \to 0$; y como σ_i, σ_s son estrictamente positivos, por hipôtesis inductiva la segunda integral tiende a cero cuando $\delta' \to 0$.

Si $1 - \frac{\sigma_s}{\Delta} = -1$, entonces $\sigma_s = 2\Delta$, la integral (10) es igual a :

$$(\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \int \prod_{j=1}^{s-1} \rho_j^{1-\frac{\sigma_j}{\Delta}} d\rho_1 \ldots d\rho_{s-1} \left[\int_{\left(\frac{\hat{\delta}_u \hat{\hat{\delta}}_u}{\prod_{j=1}^{s-1} \rho_j^{\sigma_j}}\right)^{1/2\Delta}}^{1} \rho_s^{-1} d\rho_s \right]$$

$$\leq (\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \int \prod_{j=1}^{s-1} \rho_j^{1-\frac{\sigma_j}{\Delta}} d\rho_1 \ldots d\rho_{s-1} \left[\int_{\left(\frac{\hat{\delta}_u \hat{\hat{\delta}}_u}{\prod_{j=1}^{s-1} \rho_j^{\sigma_j}} \right)^{1/2\Delta}}^{1} \left(\frac{\prod \rho_j^{\sigma_j}}{\hat{\delta}_u \hat{\hat{\delta}}_u} \right)^{1/2\Delta} d\rho_s \right]$$

$$= (\hat{\delta}_u)^{1/2\Delta} (\hat{\hat{\delta}}_u)^{-1/2\Delta} \int \prod_{j=1}^{s-1} \rho_j^{1-\frac{\sigma_j}{2\Delta}} d\rho_1 \ldots d\rho_{s-1}$$

$$- (\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \int \prod_{j=1}^{s-1} \rho_j^{1-\frac{\sigma_j}{\Delta}} d\rho_1 \ldots d\rho_{s-1}$$

como

$$\tilde{\delta}_u = (\hat{\delta}_u)^{1/2\Delta} (\hat{\hat{\delta}}_u)^{-1/2\Delta}$$

es de la forma

$$\delta_u^{\gamma_u} . \delta_{u+1}^{\gamma'_{u+1}}, \ldots, \delta_p^{\gamma_p}, \quad \gamma_u > 0, \quad u \leq k$$

$\tilde{\delta}_u$ tiende a cero, cuando $\delta' \to 0$.

Por la hipótesis inductiva, ambas integrales tienden a cero cuando $\delta' \to 0$.□

a_2) Si $\quad u > k \quad \forall\, u \in U$

En este caso, integrando en (4) respecto de las variables angulares obtenemos:

$$J_{\delta',\delta''} = \int_{V_{\delta',\delta''}} \hat{\rho}_U\, g(\hat{\rho})\, \rho_{p+1} \ldots \rho_n\, d\rho_{p+1} \ldots d\rho_n$$

donde

$$g(\rho) = \mathcal{K}(i)^n \int_T e^{i\vartheta} f(\theta,\hat{\rho})\, d\theta_A\, d\theta_B\, d\theta_M \qquad (12)$$

El punto $\hat{\rho} = (\hat{\rho}_1,\dots,\hat{\rho}_k,\hat{\rho}_{k+1},\dots,\hat{\rho}_p,\rho_{p+1},\dots,\rho_n) \in V_{\delta',\delta''}$

tiende, cuando $\delta' \to 0$, al punto

$$\hat{\rho}_0 = (0,\dots,0,\hat{\rho}_{k+1},\dots,\hat{\rho}_p,\rho_{p+1},\dots,\rho_n)$$

y por lo tanto

$$g(\hat{\rho}) \to g(\hat{\rho}_0).$$

Por otra parte

$$\hat{\delta}_{p+1} = \delta^{\Delta}_{p+1} \prod_{j=1}^{p} \delta_j^{-\lambda_j}$$

donde

$$\lambda_j = \Delta_{jj}\, \alpha_{p+1,j} + \dots + \Delta_{jp}\, \alpha_{p+1,p};$$

cuando $\delta' \to 0$: $\hat{\delta}_i \to 0 \quad i = 1,\dots,k$ y $\hat{\delta}_{p+1}$ tiene tres posibilidades

c_1) Si $\lambda_j = 0 \ \forall\, j \leq k$ entonces $\hat{\delta}_{p+1}$ permanece fijo.

Si $\lambda_j \neq 0$, para algún $j \leq k$ entonces, si el primer elemento no nulo del vector $(\lambda_j)_{j=1,\dots,p}$ es negativo se tiene

c_2) $\hat{\delta}_{p+1} \to 0$

y si dicho primer elemento es positivo se tiene

c_3) $\hat{\delta}_{p+1} \to +\infty$.

c_1).- En caso $\hat{\delta}_{p+1}$ queda fijo, veamos que

$$\lim_{\delta'\to 0} J_{\delta',\delta''} = \int_{V_{\delta''}} \hat{\rho}_U\, g(\hat{\rho}_0)\rho_{p+1}\cdots\rho_n \; d\rho_{p+1}\cdots d\rho_n\,, \quad (13)$$

donde

$$V_{\delta''} = \{(\rho_{p+1},\ldots,\rho_n)/\rho_j < 1,\; (\rho_{p+1}\cdots\rho_n)^{\beta_i} > \hat{\delta}_i;\; i = k+1,\ldots,p+1$$

En efecto; de la inclusión $V_{\delta',\delta''} \subset V_{\delta''}$ deducimos

$$J_{\delta',\delta''} = -\int_{V_{\delta''}-V_{\delta',\delta''}} \hat{\rho}_U\, g(\hat{\rho})\, \rho_{p+1}\cdots\rho_n \; d\rho_{p+1}\cdots d\rho_n$$

$$+\int_{V_{\delta''}} \hat{\rho}_U\, g(\hat{\rho})\, \rho_{p+1}\cdots\rho_n \; d\rho_{p+1}\cdots d\rho_n$$

cada integrando es aquí acotado y $V_{\delta''}$ tiene medida finita.

Cuando $\delta' \to 0$; $\hat{\delta}_i \to 0 \quad \forall\, i = 1,\ldots,k$, y evidentemente

$$\mathrm{med}(V_{\delta''}-V_{\delta',\delta''}) \to 0\;;$$

la primera integral tiende entonces a cero.

Por otro lado, $g(\hat{\rho}) \to g(\hat{\rho}_0)$ para casi todo punto de $V_{\delta''}$; por el teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue

$$\int_{V_{\delta''}} \hat{\rho}_U\, g(\hat{\rho})\rho_{p+1}\cdots\rho_n\, d\rho_{p+1}\cdots d\rho_n \to \int_{V_{\delta''}} \hat{\rho}_U\, g(\hat{\rho}_0)\rho_{p+1}\cdots\rho_n\, d\rho_{p+1}\cdots\rho_n$$

lo que demuestra (13).

c_2) En caso $\hat{\delta}_{p+1} \to 0$ se verifica (c.f, (12))

$$\lim_{\delta'\to 0} J_{\delta',\delta''} = \int_{V^*_{\delta''}} \hat{\rho}_U\, g(\hat{\rho}_o)\, \rho_{p+1}\cdots\rho_n\, d\rho_{p+1}\cdots d\rho_n\,, \quad (14)$$

donde

$$V^*_{\delta''} = \left\{ \begin{array}{l} (\rho_{p+1},\dots,\rho_n)/\rho_j < 1,\ (\rho_{p+1}\dots\rho_n)^{\beta_i} > \hat{\delta}_i \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = k+1,\dots,p \end{array} \right\} .$$

En efecto, en este caso también $V_{\delta',\delta''} \subset V^*_{\delta''}$ y $\mathrm{med}(V^*_{\delta''} - V_{\delta',\delta''}) \to 0$, y (14) se obtiene de la misma manera que (13).

c_3) En el caso en que $\hat{\delta}_{p+1} \to \infty$, sean $e_1,\dots,e_s$ los elementos extrictamente negativos del vector $(\beta_{p+1,j})_{j=p+1,\dots,n}$ se verifica en este caso:

$$V_{\delta',\delta''} \subset \{(\rho_{r_1},\dots,\rho_{r_s})/1 > \frac{1}{\hat{\delta}_{p+1}} > \rho_{r_1}^{-e_1}\dots\rho_{r_s}^{-e_s};\ \rho_{r_j} < 1\}$$

por lo que entonces $\mathrm{med}(V_{\delta',\delta''}) \to 0$ y

$$\lim_{\delta'\to 0} J_{\delta',\delta''} = 0.$$

b) Caso en que $\alpha_{A\cup B}(p+1)$ no se puede transformar por permutaciones de sus columnas en una matriz triangular superior.

Se puede permutar variables de tal manera que $\Delta = \det \alpha_{A\cup B}(p+1) > 0$

Consideremos la matriz de cofactores (Δ_{ij}) y para cada j, $1 \leq j \leq p$, denotemos con $\Delta_{h_j j}$ al primer elemento no nulo de la columna $\Delta_{.j}$.

En este caso se demuestra en [1], Lema 2.5, que existen columnas $\Delta_{.t}$ en la matriz de cofactores, cuyo primer término no nulo es negativo.

Sea

$A' = \{t \in \{1,\dots,p\}/$ si $\Delta_{h_t t}$ es el primer término distinto de cero de $\Delta_{.t}$ entonces $\Delta_{h_t t} < 0\}$

Para cada $t \in A'$, los puntos de $V_{\delta',\delta''}$ cumplen la desigualdad

$$(\rho_{p+1}\dots\rho_n)^{\beta_t} > \hat{\delta}_t \quad , \tag{15}$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_t &= (\beta_{t\ p+1},\dots,\beta_{t\ n}) \\ \hat{\delta}_t &= \delta_{h_t}^{\Delta_{h_t t}}\dots\delta_p^{\Delta_{pt}} \quad , \quad \Delta_{h_t t} < 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Sean $\beta_{tr_1},\dots,\ \beta_{tr_s}$ los β_{tj} estrictamente negativos en el vector $(\beta_{tj})_{j=p+1,\dots,n}$, entonces

$$V_{\delta',\delta''} \subset \{(\rho_{p+1},\dots,\rho_n)/\rho_i < 1,\ 1 \geq \prod_{j=1}^{s} \rho_{r_j}^{\beta_{tr_j}} > \hat{\delta}_t\} = V_{\hat{\delta}_t} \tag{17}$$

De (6) se deduce

$$|J_{\delta',\delta''}| \leq c_2 \ \mathrm{med}(V_{\hat{\delta}_t}) \quad . \tag{18}$$

Es necesario distinguir aquí dos casos diferentes

b_1) Si $h_t \leq k$ para algún $t \in A'$

b_2) Si $h_t > k \quad \forall\ t \in A'$

b_1) Sea $t \in A'$ tal que $h_t \leq k$; de (16) se deduce

$$\lim_{\delta'\to 0} \hat{\delta}_t = +\infty \quad ,$$

y por (17), $\mathrm{med}(V_{\hat{\delta}_t}) \to 0$ cuando $\delta' \to 0$.

De (18) deducimos entonces

$$\lim_{\delta'\to 0} J_{\delta',\delta''} = 0 \ .$$

b_2) Si $h_t > k \quad \forall\ t \in A'$, Sea

$A'' = \{j \in \{1,\ldots,p\}/\text{si } \Delta_{h_j j}$ es el primer término distinto de cero de $\Delta_{.j}$ entonces $\Delta_{h_j j} > 0\}$,

$D' = \{j \in A''/h_j \leq k\}$, $B' = \{j \in A''/h_j > k\}$;

B' es eventualmente vacío; pero $D' \neq \emptyset$, puesto que $\Delta = \alpha_{11}\,\Delta_{11} + \ldots + \alpha_{1p}\,\Delta_{1p} > 0$ implica la existencia de un índice j tal que $\Delta_{1j} > 0$; de aquí $j \in D'$.

Denotemos al vector

$$\hat{\rho}_0 = (\tilde{\rho}_1,\ldots,\tilde{\rho}_p,\rho_{p+1},\ldots,\rho_n)$$

donde

$$\tilde{\rho}_j = \hat{\rho}_j \quad j \in A' \cup B' \quad \text{y} \quad \rho_j = 0 \quad \forall\, j \in D'.$$

cuando $\delta' \to 0$ se tiene

$$\hat{\delta}_j \to 0 \qquad \forall\, j \in D'$$

y el punto $\hat{\rho} = (\hat{\rho}_1,\ldots,\hat{\rho}_p,\rho_{p+1},\ldots,\rho_n) \in V_{\delta',\delta''}$ tiende al punto $\hat{\rho}_0$ cuando $\delta' \to 0$ y por lo tanto para la función g de (12), se tiene:

$$g(\hat{\rho}) \to g(\hat{\rho}_0)\,.$$

Por otra parte

$$\hat{\delta}_{p+1} = \delta^{\Delta}_{p+1} \prod_{j=1}^{p} \delta_j^{-\lambda_j}, \quad \lambda_j = \Delta_{j1}\,\alpha_{p+1,1} + \ldots + \Delta_{jp}\,\alpha_{p+1,p}\ ;$$

cuando $\delta' \to 0$, $\hat{\delta}_{p+1}$ tiene tres posibilidades :

c_1) Si $\lambda_j = 0 \quad \forall\, j \leq k$, $\hat{\delta}_{p+1}$ permanece fijo.

Si $\lambda_j \neq 0$ para algún $j \leq k$, entonces, si el primer elemento no nulo de la sucesión $(\lambda_j)_{j=1,\ldots,p}$ es negativo se tiene

$c_2)\ \hat{\delta}_{p+1} \to 0$

y si dicho primer elemento es positivo setiene

$c_3)\ \hat{\delta}_{p+1} \to \infty.$

En el caso (c_1), veamos que

$$\lim_{\delta' \to 0} J_{\delta',\delta''} = \int_{V_{A',B',\delta_{p+1}}} \hat{\rho}_U\, g(\rho_0)\, \rho_{p+1}\cdots\rho_n\, d\rho_{p+1}\cdots d\rho_n \qquad (19)$$

donde

$$V_{A',B',\delta_{p+1}} = \left\{ \begin{array}{l} (\rho_{p+1}\cdots\rho_n)/\rho_i < 1 \\ \qquad (\rho_{p+1}\cdots\rho_n)^{\beta_j} > \hat{\delta}_j,\ j \in A' \cup B' \cup \{p+1\} \end{array} \right\}$$

En efecto notando $V^* = V_{A',B',\delta_{p+1}}$, tenemos que

$$J_{\delta',\delta''} = -\int_{V^*-V_{\delta',\delta''}} \hat{\rho}_U\, g(\hat{\rho})\, \rho_{p+1}\cdots\rho_n\, d\rho_{p+1}\cdots d\rho_n +$$

$$+ \int_{V^*} \hat{\rho}_U\, g(\hat{\rho})\, \rho_{p+1}\cdots\rho_n\, d\rho_{p+1}\cdots d\rho_n$$

Si $\delta' \to 0$, entonces $\hat{\delta}_j \to 0\ \ \forall\ j \in D'$ y $\mathrm{med}(V^*-V_{\delta',\delta''}) \to 0$, por lo que la primer integral tiende a cero. La igualdad (19) es entonces evidente, ya que $g(\hat{\rho}) \to g(\hat{\rho}_0)$ en forma mayorada.

En el caso (c_2) se verifica; mediante un argumento similar que

$$\lim_{\delta' \to 0} J_{\delta',\delta''} = \int_{V_{A',B'}} \hat{\rho}_U\, g(\hat{\rho}_0)\, \rho_{p+1}\cdots\rho_n\, d\rho_{p+1}\cdots d\rho_n \qquad (20)$$

donde

$$V_{A',B'} = \{(\rho_{p+1},\ldots,\rho_n)/\rho_i < 1, (\rho_{p+1}\cdots\rho_n)^{\beta_j} > \hat{\delta}_j, j \in A' \cup B'\}.$$

En el caso (c_3) en que $\hat{\delta}_{p+1} \to \infty$; sean $e_1,\ldots,e_s$ los elementos estrictamente negativos del vector $(\beta_{p+1,j})_{j=p+1,\ldots,n}$; se verifica en este caso:

$$V_{\delta',\delta''} \subset \{(\rho_1,\dots,\rho_s)/1 > \frac{1}{\hat{\delta}_{p+1}} > \rho_1^{-e_1}\cdots\rho_s^{-e_s},\ \rho_j < 1\}\ ,$$

por lo que entonces $\mathrm{med}(V_{\delta',\delta''}) \to 0$ y

$$\lim_{\delta'\to 0} J_{\delta',\delta''} = 0.$$

ii. Sea $\tilde{J}_{\delta''} = \lim\limits_{\delta'\to 0} J_{\delta',\delta''}$

a) Si $a_{A\cup B}(p+1)$ es triangular superior

Según la sección (i) de la proposición 2.4, $\tilde{J}_{\delta''} = 0$ excepto en el caso (a_2); en este caso el Lema 2.5 implica

$$|J_{\delta''}| \le c_1(\hat{\delta}_u)^{1/\Delta} \int_{D_{\hat{\delta}_u,\hat{\hat{\delta}}_u}} \prod_{i=1}^{s} \rho_i^{1-\frac{\sigma_i}{\Delta}}\, d\rho_1\dots d\rho_s$$

con $\hat{\delta}_u = \delta_u^{\Delta_{uu}}\dots\delta_p^{\Delta_{pu}}$, $u > k$; para cada $u \in U$.

Como $\lim\limits_{\delta''\to 0} \hat{\delta}_u = 0$, la propiedad buscada $\lim\limits_{\delta''\to 0} \tilde{J}_{\delta''} = 0$ se deduce del Lema 2.6.

b) $a_{A\cup B}(p+1)$ no se puede transformar por permutaciones de sus columnas en una matriz triangular superior.

En esta situación $\tilde{J}_{\delta''} = 0$ salvo en los subcasos

c_1) $\hat{\delta}_{p+1}$ queda fijo

c_2) $\hat{\delta}_{p+1} \to 0$

del caso (b_2), (c.f sección "i" de la proposición 2.4) la propiedad buscada $\lim\limits_{\delta''\to 0} \tilde{J}_{\delta''} = 0$ se deduce de (19) y (20), teniendo en cuenta que :

$$\lim_{\delta''\to 0} \text{med } V_{A',B',\delta_{p+1}} = 0 \qquad \text{y}$$

$$\lim_{\delta''\to 0} \text{med } V_{A',B'} = 0. \quad \square\square$$

Lema 2.7.

Dada la forma $z^{-\gamma}\, b(z,\bar{z})\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge dw_M$ con $B \neq \emptyset$, $\forall\, b \in \mathcal{E}^0(C^n)$, se tiene:

i. Para cada δ'' y δ_{p+1}, positivos y suficientemente pequeños, existe el siguiente Límite

$$\lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\delta',\delta'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\, b(z,\bar{z})\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge dw_M$$

ii. $$\lim_{\delta''\to 0} \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\delta',\delta'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\, b(z,\bar{z})\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge dw_M = 0$$

Demostración:

Para la demostración; c.f, [1], Lema 2.12.

Consiste en demostrar que

$$\lim_{\delta''\to 0} \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\delta',\delta'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\, z_J^{\gamma-1}\, b(z(J),\bar{z}(J))\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge dw_M = 0 \quad (2$$

$\forall\ J = \{j_1,\ldots,j_u\} \subset A$ y todo $b \in \mathcal{E}^0(C^n)$ independiente de $z_{j_1},\bar{z}_{j_1};\ldots;z_{j_u},\bar{z}_{j_u}$.

La igualdad (21) se demuestra por inducción sobre u, usando Lema 2.3 y Proposición 2.4 del presente trabajo en lugar de los Lemas 2.9 y 2.10 que usa C-H en [1] para demostrar Lema 2.12.□□

Por el Lema anterior, nos resta estudiar la integral $I_{\delta',\delta''}$ cuando $\omega \in \mathcal{E}^{2n-p}(W)$ es de la forma

$$\omega = k\, dz_A \wedge dw_M; \qquad (B = \emptyset)$$

para tal estudio necesitamos los Lemas 2.8 y 2.9 siguientes:

Lema 2.8.

Sea $f = f(z(A), \overline{z}(A)) \in \mathcal{E}^0(C^n)$ una función independiente de las variables z_i, $\overline{z}_i$, $i \in A$.

Si α_A no es normal, entonces

i. Para cada δ'' y δ_{p+1} positivos, suficientemente pequeños, existe el siguiente Límite.

$$\lim_{\delta' \to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z(A)^{-\gamma}\, z_A^{-1}\, f\, dz_A \wedge dw_M \quad .$$

ii. Para cada $\delta_{p+1} > 0$

$$\lim_{\delta'' \to 0} \lim_{\delta' \to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z(A)^{-\gamma}\, z_A^{-1}\, f\, dz_A \wedge dw_M = 0 \;.$$

Demostración

Si α_A no es normal, se presentan los casos siguientes:

a) $\alpha_A(p+1)$ no se puede transformar en una matriz triangular por permutaciones de sus columnas.

b) $\alpha_A(p+1)$ se puede transformar en una matriz triangular por permutaciones de sus columnas pero existe $t \in A$ tal que $\alpha_{p+1,t} > 0$.

Probaremos primero la parte "i", en casos a y b.

i. Sea

$$J_{\delta',\delta''} = \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z(A)^{-\gamma}\, z_A^{-1}\, f\, dz_A \wedge dw_M \ .$$

<u>Caso a)</u>

Mediante una permutación σ de las variables z_i podemos suponer; $A = \{1,\dots,p\}, M = \{p+1,\dots,n\}$, $\Delta > 0$ y obtener

$$J_{\delta',\delta''} = c \int_{T\times V_{\delta',\delta''}} z(A)^{-\gamma}\, f(z(A),\overline{z}(A))\, dw_M \ ,$$

donde

$$c = \text{signo } \sigma\ (2\pi i)^p \ , \qquad T = [0,2\pi]^{n-p}$$

$$V_{\delta',\delta''} = \{(\rho_{p+1},\dots,\rho_n) / \rho_j < 1,\ [\rho_{p+1}\cdots\rho_n]^{\beta_i} > \hat{\delta}_i ; i=1,\dots,p+1\}$$

$$\hat{\delta}_i = \delta_i^{\Delta_{ii}}\cdots\delta_p^{\Delta_{pi}};\ \beta_i = \Delta_{1i}\,\alpha_1+\dots+\Delta_{pi}\,\alpha_p;\ i = 1,\dots,p$$

$$\hat{\delta}_{p+1} = \delta_{p+1}^{\Delta} \prod_{j=1}^{p} \delta_j^{-\lambda_j};\ \lambda_j = \Delta_{j1}\,\alpha_{p+1,1} + \dots + \Delta_{jp}\,\alpha_{p+1,p}$$

$$\beta_{p+1} = \Delta\alpha_{p+1} - \prod_{i=1}^{p} \alpha_{p+1,i}\,\beta_i \ .$$

Desarrollemos f en términos de las variables z_i, $i \notin A$; c.f [1] Lema 2.4

$$f = \sum_{i=p+1}^{n} \Big(\sum_{r+s<\gamma_i} z_i^r\, \overline{z}_i^s\, g_{rs}^i\, (z(i),\overline{z}(i)) \Big) + K(z(A),\overline{z}(A)) \ , \qquad (22)$$

$$K(z(A),\overline{z}(A)) = \sum_{\mu+\nu=\gamma} z^{\mu}\, \overline{z}^{\nu}\, k(z(A),\overline{z}(A));\quad C^{\infty}.$$

Por Lema 2.3, obtenemos

$$J_{\delta',\delta''} = c \int_{T\times V_{\delta',\delta''}} z(A)^{-\gamma}\, K(z(A),\overline{z}(A))dw_{M}.$$

Consideremos la matriz de los cofactores (Δ_{ij}) y para cada j, $1 \leq j \leq p$ denotamos con $\Delta_{h_j j}$ el primer elemento no nulo de la columna $\Delta_{.j}$.

En este caso se demuestra en [1], Lema 2.5; que existen columnas $\Delta_{.t}$ en la matriz de cofactores, cuyo primer término no nulo es negativo; de donde el siguiente conjunto ,

$$A' = \{t \in \{1,\dots,p\}/\text{si } \Delta_{h_t t} \text{ es el primer término distinto de cero de } \Delta_{.t} \text{ entonces } \Delta_{h_t t} < 0\}$$

no es vacío.

Consideremos los casos siguientes:

a_1) Existe $t \in A'$ tal que $h_t \leq k$.

a_2) $\forall\, t \in A'$, $h_t > k$.

Fijemos un t cualquiera en A'; los puntos de $V_{\delta',\delta''}$ satisfacen la desigualdad

$$[\rho_{p+1}\cdots\rho_n]^{\beta_t} > \hat{\delta}_t,\quad \hat{\delta}_t = \delta_{h_t}^{\Delta_{h_t t}}\cdots\delta_p^{\Delta_{pt}}$$

Sean $\sigma_1,\dots,\sigma_s$ los elementos estrictamente negativos del vector $(\beta_{tj})_{j=p+1,\dots,n}$; se tiene:

$$\prod_{i=1}^{s} \rho_i^{\sigma_i} > (\rho_{p+1}\cdots\rho_n)^{\beta_t} > \hat{\delta}_t.$$

de aquí; para $\tilde{\nu} \geq - \sum_{i=1}^{s} \sigma_i > 0$ se obtiene

$$(\hat{\delta}_t)^{-1} > \prod_{i=1}^{s} \rho_i^{-\sigma_i} > \left(\prod_{i=1}^{s} \rho_i\right)^{\tilde{\nu}}$$

de donde

$$V_{\delta',\delta''} \subset \bigcup_{i=1}^{s} \{(\rho_1,\ldots,\rho_s)/\rho_i < 1,\ 0 < \rho_i < (\hat{\delta}_t)^{-1/s\tilde{\nu}}\} = \tilde{\mho} \quad (23)$$

$$0 \leq s \leq n-p .$$

<u>Caso a_1</u>

Tomemos $t \in A'$ tal que $h_t \leq k$ y

$$\hat{\delta}_t = \delta_{h_t}^{\Delta_{h_t t}} \ldots \delta_p^{\Delta_{pt}}, \quad \Delta_{h_t t} < 0, \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{\delta' \to 0} \hat{\delta}_t = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\delta' \to 0} (\hat{\delta}_t)^{-1/s\tilde{\nu}} = 0 \quad ;$$

de aquí $\mathrm{med}(\tilde{\mho}) \to 0$; por 23 se tiene:

$$\lim_{\delta' \to 0} J_{\delta',\delta''} = 0.$$

<u>Caso a_2</u>

Si $\forall\ t \in A'$, $h_t > k$

Sea

$$A'' = \{j \in \{1,\ldots,p\}/\text{si } \Delta_{h_j j} \text{ es el primer término distinto de cero de } \Delta_{\cdot j} \text{ entonces } \Delta_{h_j j} > 0\}$$

$D' = \{j \in A''/h_j \leq k\}$, $B' = \{j \in A''/h_j > k\}$

B' puede ser vacío; pero $D' \neq \emptyset$ (c.f, proposición 2.4 caso b_2).

Cuando $\delta' \to 0$, se tiene $\hat{\delta}_j \to 0 \quad \forall\, j \in D'$ (24)

y puesto que

$$\hat{\delta}_{p+1} = \delta^{\Delta}_{p+1} \prod_{j=1}^{p} \delta_j^{-\lambda_j}; \qquad \lambda_j = \Delta_{j1}\, \alpha_{p+1,1} + \dots + \Delta_{jp}\, \alpha_{p+1,p}$$

entonces $\hat{\delta}_{p+1}$ tiene tres posibilidades:

Si $\lambda_j = 0 \quad \forall\, j \leq k$; tenemos

c_1) $\hat{\delta}_{p+1}$ permanece fijo

Si $\lambda_j \neq 0$ para algún $j \leq k$, entonces, si el primer elemento no nulo del vector $(\lambda_j)_{j=1,\dots,p}$ es negativo, se tiene:

c_2) $\hat{\delta}_{p+1} \to 0$

y si dicho primer elemento es positivo se tiene:

c_3) $\hat{\delta}_{p+1} \to \infty$.

c_1) En caso $\hat{\delta}_{p+1}$ permanece fijo, por (24) se obtiene

$$\lim_{\delta' \to 0} J_{\delta',\delta''} = \int_{T \times V_{A',B',\delta_{p+1}}} z(A)^{-\gamma}\, K(z(A), \bar{z}(A))\, dw_M$$

donde

$$V_{A',B',\delta_{p+1}} = \left\{ (\rho_{p+1}, \dots, \rho_n)/\rho_i < 1 \quad (\rho_{p+1} \dots \rho_n)^{\beta_j} > \hat{\delta}_j,\ j \in A' \cup B' \cup \{p+1\} \right\}. \tag{25}$$

c_2) En caso $\hat{\delta}_{p+1} \to 0$, por (24) se obtiene

$$\lim_{\delta'\to 0} J_{\delta',\delta''} = \int_{T\times V_{A',B'}} z(A)^{-\gamma}\ K(z(A),\overline{z}(A))dw_M \tag{26}$$

donde

$$V_{A',B'} = \left\{ \begin{array}{l} (\rho_{p+1},\dots,\rho_n)/\rho_i < 1 \\ \qquad\qquad (\rho_{p+1}\dots\rho_n)^{\beta_j} > \hat{\delta}_j,\ j \in A' \cup B' \end{array} \right\}$$

Como el integrando es acotado y $V_{\delta',\delta''}$, $V_{A',B';\delta_{p+1}}$, $V_{A',B'}$ son de medida finita, las integrales existen.

c_3) En caso $\hat{\delta}_{p+1} \to +\infty$.

Sean $e_1,\dots,e_s$ los elementos estrictamente negativos del vector $(\beta_{p+1,j})_{j=p+1,\dots,n}$, se verifica en este caso :

$$V_{\delta',\delta''} \subset \{(\rho_1,\dots\rho_s)/1 > \frac{1}{\hat{\delta}_{p+1}} > \rho_1^{-e_1}\dots\rho_s^{-e_s}\} \qquad 0 \leq s \leq n-p$$

por lo que entonces med $(V_{\delta',\delta''}) \to 0$, y

$$\lim_{\delta'\to 0} J_{\delta',\delta''} = 0.$$

b) Mediante una permutación σ de índices de las variables z_i, podemos suponer $A = \{1,\dots,p\}$, $M = \{p+1,\dots,n\}$, α_A triangular superior; y obtener

$$J_{\delta',\delta''} = c \int_{T\times V_{\delta',\delta''}} z(A)^{-\gamma}\ f(z(A),\overline{z}(A))\ dw_M$$

donde

$$c = \text{signo}\ \sigma\ (2\pi i)^p, \quad T = [0,2\pi]^{n-p}$$

$$V_{\delta',\delta''} = \left\{ \begin{array}{l} (\rho_{p+1},\dots,\rho_n)/\rho_j < 1 \\ \qquad\qquad [\rho_{p+1}\dots\rho_n]^{\beta_i} > \hat{\delta}_i;\ i = 1,\dots,p+1 \end{array} \right\}$$

$$\hat{\delta}_i = \delta_i^{\Delta_{ii}} \cdots \delta_p^{\Delta_{pi}}; \quad \beta_i = \Delta_{1i}\,\alpha_1 + \ldots + \Delta_{pi}\,\alpha_p, \quad \Delta_{ii} > 0$$

$$i = 1, \ldots, p.$$

$$\hat{\delta}_{p+1} = \delta_{p+1}^{\Delta} \prod_{j=1}^{p} \delta_j^{-\lambda_j} \quad ; \quad \lambda_j = \Delta_{j1}\,\alpha_{p+1,1} + \ldots + \Delta_{jp}\,\alpha_{p+1,p}$$

$$\beta_{p+1} = \Delta\alpha_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \alpha_{p+1,i}\,\beta_i \ .$$

Desarrollemos f como en (22); por Lema 2.3 obtenemos

$$J_{\delta',\delta''} = c \int_{T \times V_{\delta',\delta''}} z(A)^{-k}\, K(z(A), \bar{z}(A))\, dw_M \ .$$

Sea $A' = \{j \in \{1, \ldots, p\} / \alpha_{p+1,j} \neq 0\}$. Por hipotesis A' es no vacío y podemos tomar $t = \min A'$.

Los puntos de $V_{\delta',\delta''}$ verifican:

$$\rho_t \geq \rho_t^{\alpha_{p+1,t}} \geq \prod_{i=1}^{p} \rho_i^{\alpha_{p+1,i}} > \frac{\delta_{p+1}}{(\rho_{p+1} \cdots \rho_n)^{\alpha_{p+1}}}$$

de donde

$$(\rho_{p+1} \cdots \rho_n)^{\alpha_{p+1}\Delta - \beta_t} = \frac{[(\rho_{p+1} \cdots \rho_n)^{\alpha_{p+1}}]^{\Delta}}{[\rho_{p+1} \cdots \rho_n]^{\beta_t}}$$

$$> \frac{\delta_{p+1}^{\Delta}}{\rho_t^{\Delta}\,[\rho_{p+1} \cdots \rho_n]^{\beta_t}} \tag{27}$$

$$= \delta_{p+1}^{\Delta}\, \delta_t^{-\Delta_{tt}} \cdots \delta_p^{-\Delta_{pt}} \ .$$

Llamemos

$$\delta^* = \delta_t^{-\Delta_{tt}} \ldots \delta_p^{-\Delta_{pt}} \; \delta_{p+1}^{\Delta} \quad ,$$

$$\beta'_t = \alpha_{p+1}\Delta - \beta_t \quad ;$$

de aquí $\quad (\rho_{p+1} \ldots \rho_n)^{\beta'_t} > \delta^* \, .$ (28)

Sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ los elementos estrictamente negativos del vector $(\beta'_{tj})_{j=p+1,\ldots,n}$; obtenemos

$$\prod_{i=1}^{s} \rho_{r_i}^{\sigma_i} > [\rho_{p+1} \ldots \rho_n]^{\beta'_t} > \delta^*$$

entonces, para $\tilde{\nu} \geq - \sum_{i=1}^{s} \sigma_i$ se tiene

$$(\delta^*)^{-1} > \prod_{i=1}^{s} \rho_{r_i}^{-\sigma_i} > \Big(\prod_{i=1}^{s} \rho_{r_i} \Big)^{\tilde{\nu}} ;$$

de donde

$$V_{\delta',\delta''} \subset \bigcup_{i=1}^{s} \{(\rho_{p+1}, \ldots, \rho_n)/\rho_{r_i} < 1,\ 0 < \rho_{r_i} < (\delta^*)^{-1/s\tilde{\nu}}\} = \tilde{U} \, . \tag{29}$$

<u>Caso $t \leq k$</u>, en este caso se tiene

$$\lim_{\delta' \to 0} \delta^* = +\infty \quad ;$$

de aquí $\operatorname{med}(\tilde{U}) \to 0$; y por (29) obtenemos

$$\lim_{\delta' \to 0} J_{\delta',\delta''} = 0 \, .$$

<u>Caso $t > k$</u>, en este caso $\hat{\delta}_i \to 0 \;\; \forall \; i = 1, \ldots, k$ cuando $\delta' \to 0$; y luego

$$\lim_{\delta' \to 0} J_{\delta',\delta''} = \int_{V_{\delta'',\delta_{p+1}}} z(A)^{-\gamma} \, K(z(A), \overline{z}(A)) dw_M \tag{30}$$

donde

$$V_{\delta'',\delta_{p+1}} = \left\{ (\rho_{p+1},\ldots,\rho_n)/(\rho_{p+1}\ldots\rho_n)^{\beta_i} > \hat{\delta}_i,\ i = k+1,\ldots,n \atop \rho_j < 1 \right\}$$

En $V_{\delta'',\delta_{p+1}}$ figura $\hat{\delta}_{p+1}$ pues $t > k$.

Como el integrando es acotado y $V_{\delta'',\delta_{p+1}}$ es de medida finita, la integral existe.

ii. Sea $\tilde{J}_{\delta''} = \lim\limits_{\delta'\to 0} J_{\delta',\delta''}$

a) Según sección (i), de Lema 2.8, $\mathcal{J}_{\delta',\delta''} = 0$ excepto en el caso a_2), cuando

c_1) $\hat{\delta}_{p+1}$ permanece fijo, y

c_2) $\hat{\delta}_{p+1} \to 0$

La propiedad buscada, $\lim\limits_{\delta''\to 0} \mathcal{J}_{\delta''} = 0$ se deduce de (25) y (26), si demostramos que

$$\lim_{\delta''\to 0} \operatorname{med}(V_{A',B',\delta_{p+1}}) = 0 \qquad (31)$$

$$\lim_{\delta''\to 0} \operatorname{med}(V_{A',B'}) = 0 \quad . \qquad (32)$$

probemos (31). Sea $(\rho_{p+1},\ldots,\rho_n) \in V_{A',B';\delta_{p+1}}$, tomemos $t \in A'$; los puntos de $V_{A',B',\delta_{p+1}}$ cumplen la desigualdad :

$$(\rho_{p+1}\ldots\rho_n)^{\beta_t} > \hat{\delta}_t,\ \hat{\delta}_t = \delta_{h_t}^{\Delta_{h_t t}}\ldots\delta_p^{\Delta_{pt}},\ \Delta_{h_t t} < 0 \ ;$$

como $h_t > k$, $\lim\limits_{\delta''\to 0} \hat{\delta}_t = +\infty$;

Razonando como en (23) podemos deducir que $V_{A',B',\delta_{p+1}}$ está contenido en $\tilde{U}$; cuya medida tiende a cero cuando $\delta'' \to 0$.

(32) se obtiene en forma similar.

b) En este caso, de Sección (i) sabemos que $\tilde{J}_{\delta''} = 0$, excepto cuando $t > k$. La propiedad buscada $\lim\limits_{\delta''\to 0} \tilde{J}_{\delta''} = 0$, se deduce de (30), si nosotros probamos que

$$\lim_{\delta''\to 0} \operatorname{med}(V_{\delta'',\delta_{p+1}}) = 0 .$$

En efecto; si $(\rho_{p+1},\dots,\rho_n) \in V_{\delta'',\delta_{p+1}}$, como $t > k$ entonces

$$(\rho_{p+1}\cdots\rho_n)^{\beta_t} > \hat{\delta}_t \quad \text{y} \quad \rho_t^{\Delta} = \frac{\hat{\delta}_t}{(\rho_{p+1}\cdots\rho_n)^{\beta_t}}$$

Como en (27) se tiene

$$\rho_t > \frac{\delta_{p+1}}{(\rho_{p+1}\cdots\rho_n)^{\alpha_{p+1}}} \quad \text{y} \quad (\rho_{p+1}\cdots\rho_n)^{\beta_t'} > \delta^*$$

con $\delta^* = \delta_t^{-\Delta_{tt}}\cdots\delta_p^{-\Delta_{pt}}\,\delta_{p+1}^{\Delta}$, $\Delta_{tt} > 0$

como $t > k$,

$$\lim_{\delta''\to 0} \delta^* = +\infty.$$

Razonando como en (28) y (29) deducimos que $V_{\delta'',\delta_{p+1}}$ está contenido en $\tilde{U}$, cuya medida tiende a cero, cuando $\delta'' \to 0$. □□

<u>Lema 2.9.</u>

Sea $f = f(z(A),\bar{z}(A)) \in \mathcal{E}^0(\mathbb{C}^n)$

Si α_A es normal se tiene

i. para $\delta'' > 0$ y $\delta_{p+1} > 0$ suficientemente pequeños existe el Límite

$$\tilde{J}_{\delta''} = \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\tilde{\delta}',\tilde{\delta}'',\delta_{p+1}}} z(A)^{-\gamma}\, z_A^{-1}\, f\, dz_A \wedge dw_M$$

ii. Para cada $\delta_{p+1} > 0$ pequeño, se tiene

$$\lim_{\delta''\to 0} \mathcal{J}_{\delta''} = \lim_{\delta\to 0} \sigma(2\pi i)^{p} \int_{B(A)^{\gamma}_{\delta} \cap B(A)^{\alpha_{p+1}}_{\delta_{p+1}}} z(A)^{-\gamma} f \, dw_M$$

iii. $$\lim_{\delta_{p+1}\to 0} \lim_{\delta''\to 0} \tilde{J}_{\delta''} = \lim_{\delta\to 0} \sigma(2\pi i)^{p} \int_{B(A)^{\gamma}_{\delta}} z(A)^{-\gamma} f \, dw_M .$$

Demostración

i. Mediante una permutación σ de las variables z_i podemos suponer que $A = \{1,\dots,p\}$, $M = \{p+1,\dots,n\}$ y $a_A(p+1)$ es triangular superior, y obtener

$$J_{\delta',\delta''} = c \int_{T\times V_{\delta',\delta''}} z(A)^{-\gamma} f \, dw_M$$

donde

$$T = [0,2\pi]^{n-p} , \qquad c = \text{signo } \sigma \ (2\pi i)^{p}$$

$$V_{\delta',\delta''} = \{(\rho_{p+1},\dots,\rho_n)/\rho_j < 1,\ [\rho_{p+1}\dots\rho_n]^{\beta_i} > \hat{\delta}_i; i=1,\dots,p+1$$

$$\hat{\delta}_i = \delta_i^{\Delta_{ii}}\dots\delta_p^{\Delta_{pi}} , \quad \Delta_{ii} > 0$$

$$\hat{\delta}_{p+1} = \delta_{p+1}^{\Delta} , \quad \beta_{p+1} = \Delta a_{p+1}.$$

Desarrollemos f como en (22), y por Lema 3 obtenemos

$$J_{\delta',\delta''} = c \int_{T\times V_{\delta',\delta''}} z(A)^{-\gamma} K(z(A),\bar{z}(A)) dw_M .$$

Si $\delta' \to 0$, $\hat{\delta}_i \to 0 \ \forall\ i = 1,\dots,k$; luego

$$\tilde{J}_{\delta''} = \operatorname*{Lim}_{\delta'\to 0} J_{\delta',\delta''} = c \int_{T\times V_{\delta'',\,p+1}} z(A)^{-\gamma}\, K(z(A),\overline{z}(A))\,dw_M$$

donde (33)

$$V_{\delta'',p+1} = \left\{ (\rho_{p+1},\dots,\rho_n)/\rho_j < 1 \quad [\rho_{p+1}\cdots\rho_n]^{\beta_i} > \hat{\delta}_i,\ i = k+1,\dots,p+1 \right\};$$

las integrales existen pues el integrando es acotado y $V_{\delta',\delta''}$, $V_{\delta'',p+1}$ son de medida finita.

ii. Si $\delta'' \to 0$, $\hat{\delta}_i \to 0$ $\forall\ i = k+1,\dots,p$; de aquí y por (33) se tiene

$$\operatorname*{Lim}_{\delta''\to 0} \mathcal{J}_{\delta''} = c \int_{T\times V_{\delta_{p+1}}} z(A)^{-\gamma}\, K(z(A),\overline{z}(A))\,dw_M , \qquad (34)$$

donde $V_{\delta_{p+1}} = \{(\rho_{p+1},\dots,\rho_n)/\rho_i < 1,\ [\rho_{p+1}\cdots\rho_n]^{\alpha_{p+1}} > \delta_{p+1}\}$.

por Lema 2.3, ésta última integral es igual a

$$\operatorname*{Lim}_{\delta\to 0} c \int_{B(A)^{\gamma}_{\delta} \cap B(A)^{\alpha_{p+1}}_{\delta_{p+1}}} z(A)^{-\gamma}\, f\, dw_M$$

iii. por (34) tenemos

$$\operatorname*{Lim}_{\delta_{p+1}\to 0}\ \operatorname*{Lim}_{\delta''\to 0} \mathcal{J}_{\delta''} = c \int_{B(A)} z(A)^{-\gamma}\, K(z(A),\overline{z}(A))\,dw_M$$

y por Lema 2.3, esta integral es igual a

$$\operatorname*{Lim}_{\delta\to 0} c \int_{B(A)^{\gamma}_{\delta}} z(A)^{-\gamma}\, f\, dw_M . \quad \square\square$$

Lema 2.10.

Sea $\omega = b\, dz_A \wedge dw_M \in \mathcal{E}^{2n-p}(\mathbb{C}^n)$ entonces

a) Si ω no es normal

$$\lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\omega = 0$$

b) Si ω es normal

i. $$\lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\omega = \sigma(2\pi i)^p \lim_{\delta\to 0} \int_{B(A)^{\gamma}_{\delta} \cap B(A)^{\alpha_{p+1}}_{\delta_{p+1}}} z(A)^{-\gamma}\, b^{\gamma-1}(A)\, dw_M$$

ii. $$\lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\omega = \sigma(2\pi i)^p \lim_{\delta\to 0} \int_{B(A)^{\gamma}_{\delta}} z(A)^{-\gamma}\, b^{\gamma-1}(A)\, dw_M$$

Demostración

La demostración la haremos por partes

1. Veamos primero que el siguiente Límite existe

$$\lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\, \tilde{b}^{\gamma-1}(A)\, dz_A \wedge dw_M .$$

En efecto, de Cap. I; 1.5, esta límite iterado es igual a

$$\lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\, z_A^{\gamma-1} \left.\frac{\partial^{\gamma-1}}{\partial z_1^{\gamma_1-1}\cdots\partial z_p^{\gamma_p-1}}\right|_{z_1=0,\ldots,z_p=0} dz_A \wedge dw_M$$

$$= \lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z_A^{-1}\, z(A)^{-\gamma} \left.\frac{\partial^{\gamma-1}}{\partial z_1^{\gamma_1-1}\cdots\partial z_p^{\gamma_p-1}}\right|_{z_1=0,\dots,z_p=0} dz_A \wedge dw_M$$

este último Límite; es cero si ω no es normal (Lema 2.8) y si ω es normal es igual a

$$\lim_{\delta\to 0} \sigma(2\pi i)^p \int_{B(A)^{\gamma}_{\delta} \cap B(A)^{\alpha_{p+1}}_{\delta_{p+1}}} z(A)^{-\gamma}\, b^{\gamma-1}(A)\, dw_M$$

por Lema 2.9.

2. Se cumple la siguiente igualdad

$$\lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\, \tilde{b}^{\gamma-1}(I)\, dz_A \wedge dw_M =$$

$$= \lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\, \tilde{b}^{\gamma-1}(A)\, dz_A \wedge dw_M$$

$\forall\ I \subset A$ tal que $|I| = t;\ 0 \leq t \leq p;$

la que se prueba por inducción decreciente sobre t; usando Lema 2.3 y proposición 2.4 del presente trabajo, en lugar de los Lemas 2.9 y 2.10, que usa C-H en [1] para demostrar la igualdad (4) de proposición 2.13.

3. haciendo $t = 0$ en 2), tenemos

$$\lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\omega = \lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\, \tilde{b}^{\gamma-1}(A)\, dz_A \wedge dw_M$$

ahora bien:

Si ω no es normal, de (1) y (3) obtenemos la propiedad (a) del lema.

Si ω es normal, de (1) y (3) obtenemos parte (i) de (b); la propiedad (ii) se deduce de (i). □□

Estamos en condiciones de probar la igualdad (1) para el caso en que $h_i \equiv 1$, $i = 1,\ldots,p+1$, en el siguiente teorema.

Teorema 2.11.

$\forall\ \omega = k\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge dw_M \in \mathcal{E}^{2n-p}(\mathbb{C}^n)$, se tiene

$$\lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\omega = \lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta},\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\omega .$$

Demostración

Por los Lemas 2.1, 2.2 y 2.5 del presente trabajo y de los Lemas 2.2.1, 2.7 y 2.12 de [1], ambos Límites son cero, salvo en el caso en que:

$$\omega = b\, dz_A \wedge dw_M; \quad |M| = n-p, \quad \det \alpha_A(p+1) \neq 0$$

a) Si ω no es normal, por el Lema 2.10, (a) del presente trabajo y C-H, [1], proposición 2.13, ambos Límites son cero.

b) Si ω es normal, por Lema 2.10, (b) de este trabajo y proposición 2.13 de [1], ambos Límites son iguales a

$$\sigma(2\pi i)^p \lim_{\delta\to 0} \int_{B(A)^{\gamma}_{\delta}} z(A)^{-\gamma}\, b^{\gamma-1}(A)\, dw_M . \quad \square\square$$

Para la demostración del Lema 2.12 y Teorema 2.13 siguientes; c.f [1], Lema 2.14 y proposición 2.15.

Lema 2.12.

Consideremos $\omega = k\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge dw_M \in \mathcal{E}^{2n-p-1}(C^n)$.

a) Sea $|M| = n-p$, entonces

$$\lim_{\delta''\to 0} \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} d(z^{-\gamma}\omega) = 0$$

b) Sea $|M| = n-p-1$, $|B| = 1$ y

$$\text{sop } k \subset \{z/|z_j| < 1,\ J \in B \cup M\}$$

entonces

$$\lim_{\delta_{p+1}\to 0} \lim_{\delta''\to 0} \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} d(z^{-\gamma}\omega) = 0 .$$

Teorema 2.13.

Sean $\alpha \in M_{p+1,n}(N)$, $0 \leq p \leq n$ y $\gamma \in N^n$ tal que

$$V(z^{\gamma}) \subset V(\prod_{i=1}^{p+1} z^{\alpha_i})$$

$$c = \inf\{|h_{p+1}(z)|/z \in \bar{B}\}.$$

Existe una vecindad abierta $\tilde{B} \subset B \subset C^n$ del origen tal que

a) $\forall\ \omega \in D^{2n-p}(\tilde{B})$

$$\lim_{\delta''\to 0} \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}(h)} z^{-\gamma}\omega$$

existe para $0 < \delta_{p+1} < c$, y no depende de la trayectoria admisible y

$$\lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}(h)} z^{-\gamma}\omega = \lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\omega \tag{35}$$

Además

b_1) Si $\omega = b(z,\bar{z})dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge dw_M \in D^{2n-p}(\tilde{B})$, no es normal, el límite (35) es nulo.

b_2) Si $\omega = b(z,\bar{z})\ dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge dw_M \in D^{2n-p}(\tilde{B})$, $|M| = n-p$ y $b^{\mu}(A) = 0$ $\forall\ \mu \in N^n$ tal que $\mu \leq \gamma-1$ entonces el límite (35) es nulo.

<u>Teorema 2.14.</u>

Existe una vecindad $\tilde{B} \subset C^n$ del origen tal que $\forall\ \omega \in D^{2n-p}(\tilde{B})$ se tiene :

$$\lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}(h)} z^{-\gamma}\omega = \lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta},\delta_{p+1}}(h)} z^{-\gamma}\omega .$$

<u>Demostración</u>

Por Teoremas 2.11 y 2.13 de este trabajo y por proposición 2.15 de [1], ambos Límites son iguales a

$$\lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\underset{\sim}{\delta}',\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}} z^{-\gamma}\omega . \qquad \square\square$$

<u>2.15. Límites Iterados en el caso general. Trayectorias admisibles</u>

En este parágrafo, X denota una variedad holomorfa paracompacta de dimensión n. Los resultados se extienden con facilidad al caso en que X es un espacio (ó un ciclo) analítico; según la técnica de Coleff-Herrera, [1]; pero suprimiremos los detalles correspondientes por mayor simplicidad.

Sea $F = \{Y_1,\ldots,Y_{p+1}\}$ una sucesión admisibles de hipersuperficies en X, $0 \leq p \leq n-1$. Elegimos las ecuaciones φ_j de Y_j sobre el abierto relativamente compacto W de X, $1 \leq j \leq p+1$, y $\underset{\sim}{\delta}' = (\delta_1(\delta'),\ldots,\delta_k(\delta'))$, $\underset{\sim}{\delta}'' = (\delta_{k+1}(\delta''),\ldots,\delta_p(\delta''))$, trayectorias admisibles en R^k y R^{p-k} respectivamente, para cierto k fijo, $1 < k < p$.

En estas condiciones tenemos:

Lema 2.16.

Sea $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_k)$, $\psi = (\varphi_{k+1},\ldots,\varphi_{p+1})$ y

$$T^k_{(0,\delta_0')}(\varphi) = \left\{ \begin{array}{c} z \in B/|\varphi_i(z)| = \delta_i(\delta'),\ i=1,\ldots,k \\ \delta' \in (0,\delta_0') \end{array} \right\}$$

entonces:

Existen un abierto $U \subset W$, $\delta_0' > 0$ y $\delta_0'' > 0$ suficientemente pequeños tal que:

a) para cada w fijo $\in T^k_{\underset{\sim}{\delta}'}(i) \subset C^k$ y $\delta' \in (0,\delta_0')$, $\delta'' \in (0,\delta_0'')$ se tiene:

$$\dim\,[\varphi^{-1}(w) \cap D^{p-k+1}_{\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}(\psi) \cap U] \leq 2n-(p+k) \qquad (36)$$

b) $\forall$ $\delta'' \in (0,\delta_0'')$ fijo, se tiene:

$$\dim\,(T^k_{(0,\delta_0')}(\varphi) \cap D^{p-k+1}_{\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}(\psi) \cap U) \leq 2n-p+1$$

c) para cada $\delta' \in (0,\delta_0')$ y $\delta'' \in (0,\delta_0'')$ se tiene:

$$\dim\, T^k_{\underset{\sim}{\delta}'}(\varphi) \cap D^{p-k+1}_{\underset{\sim}{\delta}'',\delta_{p+1}}(\psi) \cap U \leq 2n-p$$

Demostración

Por el teorema de Resolución de singularidades, [2], basta probar el Lema para el caso de cruzamientos normales. (c.f, [1], Teorema 1.7.2). Sea $p \in X$ y $z = (z_1,\ldots,z_n)$ un sistema de coordenadas en el abierto U, con $z_i(p) = 0 \;\; \forall\, i$, y la bola $B = \{\|z\| < 1\} \subset U$.

Si rango $\alpha(p+1) < p$, por el Lema 2.1, existen δ_0' y δ_0'' suficientemente pequeños tal que el conjunto intersección (36) es vacío, para $0 < \delta' < \delta_0'$, y $0 < \delta'' < \delta_0''$.

Si rango $\alpha(p+1) = p$, permutando las variables z_i; podemos suponer $A = \{1,\ldots,p\}$ y $\Delta = \det \alpha_A(p+1) > 0$.

a) Si $w = (w_1,\ldots,w_n) \in T^k_{\delta'}(i) \subset C^k$, sea $z = (z_1,\ldots,z_n)$ $\in \varphi^{-1}(w) \cap D^{p-k+1}_{\delta''}(\psi) \cap B$.

Puesto que $\varphi_j(z) = w_j = \delta_j(\delta')e^{i\lambda_j}$, $j = 1,\ldots,k$; por Cap. I, 1.8, se tiene:

$$\begin{cases} \rho_i^{\Delta} = \dfrac{\hat{\delta}_i(\delta',\delta'')}{[\rho_{p+1}\cdots\rho_n]^{\beta_i}}, \quad i = 1,\ldots,p; \;\; \delta' \text{ y } \delta'' \text{ fijos} \\ \rho^{\alpha_{p+1}} > \rho_{p+1} \end{cases} \tag{37}$$

con $\hat{\delta}_i(\delta',\delta'') = \delta_1(\delta')^{\Delta_{1i}}\ldots\delta_k(\delta')^{\Delta_{ki}}.\delta_{k+1}(\delta'')^{\Delta_{k+1,i}}\ldots\delta_p(\delta'')^{\Delta_{pi}}$.

$$\begin{cases} 0 \le \theta_j \le 2\pi & j = 1,\ldots,n \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\,\theta_j = \lambda_j, & \lambda_j \text{ fijo } \; 1 \le j \le k \end{cases} \tag{38}$$

Es obvio entonces que para δ' y δ'' fijos; $\delta' \in (0,\delta'_0)$, $\delta'' \in (0,\delta''_0)$ la dimensión de la variedad real definida por las ecuaciones (37) y (38) es $\leq 2n-(p+k)$

b) En este caso tenemos las ecuaciones dadas por (37) con δ' variable y δ'' fijo; y $0 \leq \theta_j \leq 2\pi$, $j = 1,\dots,n$; que definen una variedad real de dimensión $\leq 2n-p+1$.

c) Se obtiene facilmente de parte (b), fijando $\delta' \in (0,\delta'_0)$. □□

<u>Teorema 2.17.</u>

Para cada $\tilde{\alpha} \in \Gamma_c(W,\mathcal{E}_X^{2n-p}(* \cup F))$

$$\lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\delta',\delta'',\delta_{p+1}}(\varphi)} \tilde{\alpha} = R_X^p\, P^{p+1}(\tilde{\alpha})$$

<u>Demostración</u>

Tomemos en W (achicando W si fuese necesario) una resolución de singularidades para $Y_0 = V(\varphi_1\dots\varphi_{p+1})$; es decir tomemos una variedad holomorfa W_1 y una aplicación holomorfa propia

$$\pi : W_1 \to W$$

tal que

$$\pi : W_1-\pi^{-1}(Y_0) \to W-Y_0$$

es un isomorfismo y $\pi^{-1}(Y_0)$ tiene cruzamientos normales en W_1.
Para $x_1 \in W_1$, existe un abierto U de x_1 y las coordenadas $(z_1,\dots,z_n)$ definidas sobre U, con $z_i(x_1) = 0$, $i = 1,\dots,n$, y la bola $B = \{|z| < 1\} \subset U$, tales que

$$\prod_{j=1}^{p+1} \varphi_j^* = g_1\, z^{\nu_1}$$

donde $\varphi_j^* = \varphi_j \circ \pi$, $\nu_1 \in N^n$, g_1 inversible en $\mathcal{O}(U)$.

También existen los vectores $\alpha_1,\dots,\alpha_{p+1} \in N^n$ y funciones inversibles $h_1,\dots,h_{p+1} \in \mathcal{O}(\overline{B})$, tales que

$$\varphi_i^*\Big|_B = h_i\, z^{\alpha_i} \qquad 1 \leq i \leq p+1$$

Por el teorema 2.13 existe una vecindad $\tilde{B} \subset B$ del origen tal que si $\gamma \in N^n$ verifica

$$V(z^\gamma) \subset V\left(\prod_{i=1}^{p+1} z^{\alpha_i}\right)$$

y si $\omega_1 \in D^{2n-p}(\tilde{B})$ entonces existe

$$\lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^\alpha_{\tilde{\delta}',\tilde{\delta}'',\delta_{p+1}}(h)} z^{-\gamma}\omega_1 \tag{39}$$

y no depende de las trayectorias admisibles.

Por el teorema 2.14, se tiene

$$\lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^\alpha_{\tilde{\delta}',\tilde{\delta}'',\delta_{p+1}}(h)} z^{-\gamma}\,\omega_1 = \lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta\to 0} \int_{D^\alpha_{\tilde{\delta},\delta_{p+1}}(h)} z^{-\gamma}\,\omega_1 \tag{40}$$

Sea $\tilde{\alpha} \in \Gamma_c(W,\mathcal{E}_X^{2n-p}(*\ UF))$, entonces $\pi^*(\tilde{\alpha})$ es semimeromorfa sobre W_1 con polos sobre $\pi^{-1}(UF)$ y con soporte K compacto. Tomando una partición C^∞ de la unidad, adecuada sobre K, es posible descomponer $\pi^*(\tilde{\alpha})$ en suma finita de formas $\tilde{\omega}_1 = \dfrac{\omega_1}{z^\gamma}$ en un abierto de W_1, a cada una de las cuales se pueden aplicar (39) y la igualdad (40);obteniendose así

$$\lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{D^\alpha_{\tilde{\delta}',\tilde{\delta}'',\delta_{p+1}}(h)} \pi^*(\tilde{\alpha}) = \lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta\to 0} \int_{D^\alpha_{\tilde{\delta},\delta_{p+1}}(h)} \pi^*(\tilde{\alpha})$$

y de aquí obtenemos el teorema, usando el isomorfismo π . □□

2.18. Limites iterados en el caso general. Trayectorias admitidas

El Lema 2.16 y Teorema 2.17 son válidas también, si en lugar de utilizar trayectorias admisibles se utiliza trayectorias admitidas, introducidas por Solomin, [5]. La demostración del equivalente a Lema 2.16 y Teorema 2.17 es semilar a la de Lema 2.16 y Teorema 2.17 respectivamente y no la duplicaremos aqui; solamente lo enunciaremos para futuras referencias.

En las condiciones de Lema 2.16, existe $q \in N$ suficientemente grande tal que, si

$$\gamma'(t') = (t'^{n_1}, \dots, t'^{n_k}), \qquad \gamma''(t'') = (t''^{n_{k+1}}, \dots, t''^{n_p})$$

verifican

$$\frac{n_i}{n_{i+1}} > q; \quad n_k > q \qquad i = 1, \dots, k-1$$

$$\frac{n_i}{n_{i+1}} > q; \quad n_p > q \qquad i = k, \dots, p-1$$

y,

$$T^k_{(0,t'_0)}(\varphi) = \left\{ \begin{array}{l} z \in B/|\varphi_i(z)| = \gamma'_i(t'),\ i = 1, \dots, k \\ \qquad t' \in (0, t'_0) \end{array} \right\}$$

Entonces:

Teorema 2.19.

Existen un abierto $U \subset W$, $t'_0 > 0$ y $t''_0 > 0$ suficientemente pequeños tal que:

a) para cada w fijo $\in T^k_{\underset{\sim}{\delta}'}(i) \subset C^k$ y $t' \in (0, t'_0)$, $t'' \in (0, t''_0)$ se tiene:

$$\dim[\varphi^{-1}(w) \cap D^{p-k+1}_{\gamma'',c}(\psi) \cap U] \leq 2n-(p+k)$$

b) $\forall\ t'' \in (0,t''_0)$ fijo se tiene:

$$\dim(T^k_{(0,t'_0)}(\varphi) \cap D^{p-k+1}_{\gamma'',c}(\psi) \cap U) \leq 2n-p+1$$

c) Para cada $t' \in (0,t'_0)$ y $t'' \in (0,t''_0)$ se tiene

$$\dim[(T^k_{\gamma'}(\varphi) \cap D^{p-k+1}_{\gamma'',c}(\psi) \cap U] \leq 2n-p.$$

Teorema 2.20.

Para cada $\tilde{\alpha} \in \Gamma_c\ (W,\ {}_X^{2n-p}(*\ UF))$ se tiene

$$\lim_{c\to 0}\ \lim_{t''\to 0}\ \lim_{t'\to 0} \int_{D^{\alpha}_{\gamma',\gamma'',c}(\varphi)} \tilde{\alpha} = R^p_X\ P^{p+1}(\tilde{\alpha})$$

Los resultados dados en Teorema 2.17 y 2.20 son también válidos para el residuo $R^p_X(\tilde{\omega})$. En este caso tenemos

Corolario 2.21.

En las condiciones de Teorema 2.16; para una familia $F = \{Y_1,\ldots,Y_p\}$ de hipersuperficies en X se tiene

$$R^p_X(\tilde{\omega}) = \lim_{\delta''\to 0}\ \lim_{\delta'\to 0} \int_{T^p_{\delta',\delta''}(\varphi)} \tilde{\omega}$$

$$\forall\ \tilde{\omega} \in \Gamma_c(W, \mathcal{E}^{2n-p}_X(*\ UF)).$$

Demostración

La demostración se reduce al caso considerado en el Teorema 2.17, introduciendo la familia

$$F' = \{\varphi'_i\}_{i=1,\ldots,p+1} \quad i = 1,\ldots,p \qquad y \qquad \varphi'_{p+1} \equiv 1. \ \square\square$$

En forma analoga se prueba el

Corolario 2.22.

En las condiciones ya descriptas para γ' y γ'' trayectorias admitidas en R^k y R^{p-k} se tiene:

$$R_X^p(\tilde{\omega}) = \lim_{t''\to 0} \lim_{t'\to 0} \int_{T^p_{\gamma',\gamma''}(\varphi)} \tilde{\omega}$$

$\forall\ \tilde{\omega} \in D^{2n-p}(* \, UF).$

2.23. Una Generalización del Residuo Logarítmico

Probaremos ahora una generalización de un resultado de J.Solomín, [5] referente al residuo logarítmico en el caso de intersecciones no completas.

La situación que consideraremos es la siguiente:

Sea W un abierto conexo de C^n, U un abierto relativamente compacto tal que $U \subset \overline{U} \subset W$, y

$$\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_k):W \to C^k$$

$$\psi = (\psi_{k+1},\ldots,\psi_p):W \to C^{p-k}$$

aplicaciones holomorfas. Sean $V_e(\varphi)$ y $C_e(\varphi)$ la intersección esencial y el ciclo esencial asociados por C.H y J. Solomín, a la familia $\{\varphi_i\}$, (c.f, Introducción).

Antes de presentar nuestro resultado, observemos que las definiciones de los operadores $RP_W[\tilde{\omega}]$ y $R_W[\tilde{\omega}]$, definidas en el Cap. I para un abierto $W \subset C^n$, se extienden naturalmente al caso en que $W = X$ es un ciclo analítico (c.f, [1], Cap. I).

En estas condiciones demostraremos el ;

Teorema 2.24.

Supongamos $\psi_j|_{V_e(\varphi)} \not\equiv 0$, $k+1 \leq j \leq p$

Sea

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\psi}, \quad \omega \in D^{2n-p-k}(W), \quad y \; \frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{d\varphi_1 \quad \cdots \quad d\varphi_k}{\varphi_1 \cdots \varphi_k}$$

entonces

$$R^P_{W,\varphi,\psi}\left(\frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \tilde{\omega}\right) = \tau(2\pi i)^k \; R_{c_e(\varphi),\hat{\psi}}(\hat{\omega}).$$

con $\hat{\psi} = \psi|_{V_e(\varphi)}$ y $\hat{\omega} = \lambda^*(\tilde{\omega})$, donde $\lambda: V_e(\varphi) \to W$ denota el morfismo de inclusión; $\tau = (-1)^{k(p-k)}$.

Demostración

Como el resultado es local, se puede suponer que el soporte de ω es suficientemente pequeño como para que sea aplicable el corolario 2.22.

Entonces

$$R^P_{W,\varphi,\psi}(\tilde{\omega}) = \lim_{t''\to 0} \lim_{t'\to 0} I_{\gamma',\gamma''}$$

donde

$$I_{\gamma',\gamma''} = \int_{T^P_{\gamma',\gamma''}(\varphi,\psi)} \frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \frac{\omega}{\psi} \quad .$$

con $\gamma'(t')$ y $\gamma''(t'')$ trayectorias admitidas convenientes asociadas a φ y ψ respectivamente; tenemos aquí que:

$$\begin{aligned} T^P_{\gamma',\gamma''}(\varphi,\psi) &= (-1)^{k(p-k)} \; T^k_{\gamma'}(\varphi).T^{p-k}_{\gamma''}(\psi) \\ &= (-1)^{k(p-k)} \varphi^{-1}(T^k_{\gamma'}(i)).T^{p-k}_{\gamma''}(\psi)) \end{aligned}$$

(c.f, [1] Cap. I; 1.4.2, (4); 1.5.1, (1) y 1.5.6); i = identidad en C^k.

Si denotamos con $X = \varphi^{-1}[T^k_{\gamma'}(i)].T^{p-k}_{\gamma''}(\psi)$ y $\tilde{\varphi} = \varphi|_X$ por el teorema de integración fibrado, c.f [3], se verifica:

$$I_{\gamma',\gamma''} = \tau \int_X \varphi^* \left(\frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_k}{z_k}\right) \wedge \frac{\omega}{\Psi}$$

$$= \tau \int_{T^k_{\gamma'}(i)} h(z) \frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_k}{z_k} \quad ; \quad \tau = (-1)^{k(p-k)} \qquad (41$$

donde $h(z) = \int_{\tilde{\varphi}^{-1}[z]} \frac{\omega}{\Psi}$, $z \in T^k_{\gamma'}(i)$

En efecto; con las notaciones de C-H, [1], 1.6.8 basta tomar

$$U = T = T^k_{\gamma'}(i),\ X = \alpha = \varphi^{-1}[T^k_{\gamma'}(i)].T_{\gamma''}(\psi)$$

$$\pi = \tilde{\varphi} = \varphi|_X, \quad \nu = \frac{\omega}{\Psi}, \quad \xi = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_k}{z_k}$$

observemos aquí, que si t' y t'' son suficientemente pequeños, el Lema 2.16 asegura que

$$\dim_R \varphi^{-1}(z) \cap T^{p-k}_{\gamma''}(\psi) \leq 2n-(p+k)$$

para cada $z \in T^k_{\gamma'}(i)$.

y por lo tanto (c.f, C-H; 1.3.1)

$$\tilde{\varphi}^{-1}[z] = \varphi^{-1}[z].T^{p-k}_{\gamma'}(\psi) = T^{p-k}_{\gamma''}(\psi|_{\varphi^{-1}[z]}); \qquad (42)$$

Resulta conveniente introducir aquí la siguiente familia de trayectorias en C^k, parametrizada por $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_k) \in [0,2\pi]^k$:

$$z = z_\theta(t') = (z_{\theta,1}(t'),\ldots,z_{\theta,k}(t')),$$

donde $z_{\theta,j}(t') = (t')^{n_j} e^{i\theta_j}$, $t' \in (0,1)$. Los exponentes n_j son los definidos en 2.18.

Si denotamos $h_{t'}(\theta) = h(z_\theta(t'))$ de (41) tenemos que:

$$I_{t''} = \lim_{t'\to 0} I_{\gamma',\gamma''} = \tau i^k \lim_{t'\to 0} \int_{[0,2\pi]^k} h_{t'}(\theta)\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_k \tag{43}$$

donde $$h_{t'}(\theta) = \int_{\tilde{\varphi}^{-1}[z]} \frac{\omega}{\Psi} . \tag{44}$$

de (42) obtenemos

$$h_{t'}(\theta) = \int_{T^{p-k}_{\gamma''}(\psi|_{[\varphi^{-1}(z_\theta(t'))]})} \frac{\omega}{\Psi} \tag{45}$$

En las condiciones ya descriptas, podemos demostrar el siguiente:

<u>Lema 2.25.</u>

Existe $t'_0 \in (0,1)$ tal que para $t' \in (0,t'_0)$ la función

$$h_{t'}:[0,2\pi]^k \to C$$

verifica las siguientes propiedades:

a) $h_{t'}(\theta)$ es continua

b) $\exists$ $M \in R$ independiente de $t' \in (0,t'_0)$ tal que

$$|h_{t'}(\theta)| \leq M \qquad \forall\, \theta \in [0,2\pi]^k.$$

c) $$\lim_{t'\to 0} h_{t'}(\theta) = \int_{T^{p-k}_{\gamma''}(\psi|_{C_e(\varphi)})} \frac{\omega}{\Psi} .$$

<u>Demostración</u>

a) puesto que $\tilde{\varphi}:\varphi^{-1}(T^k_{\gamma'}(i)).T^{p-k}_{\gamma''}(\psi) \to T^k_{\gamma'}(i)$;

es una aplicación analítica de espacios analíticos reales, por (44) y según [3], la función $h_{t'}(\theta)$ es continua y obtenemos a); (c.f; [1], 1.6.8)

b) Si denotamos

$$S = I[U \cap \tilde{\varphi}^{-1}[z]] \in {}'D(X), \quad z \in T^k_{(0,t_0')}(i)$$

donde U es el abierto relativamente compacto de Lema 2.16.

Según [3], existe una constante $C > 0$ tal que

$$M_U(S) \leq C, \qquad z \in T^k_{(0,t_0')}(i)$$

donde $M_U(S)$ es la masa de S.

Entonces

$$|h_{t'}(\theta)| = \left|\int_{\tilde{\varphi}^{-1}[z]} \frac{\omega}{\psi}\right| \leq M_U(S)\ \nu\left(\frac{\omega}{\psi}\right), \quad z \in T^k_{\gamma'}(i),$$

donde la comasa $\nu(\frac{\omega}{\psi}) = \sup\{\|\frac{\omega}{\psi}(x)\| : x \in X_{(0,t_0')}\}$

con $X_{(0,t_0')} = \varphi^{-1}(T^k_{(0,t_0')}(i)) \cap T^{p-k}_{\gamma''}(\psi)$, esta acotado uniformemente en $t' \in (0,t_0')$; esto demuestra (b).

c) Como en [5], páginas 40 y 41, para cada $t' \in (0,1)$ sea el conjunto $\beta_{t'} = z_\theta((0,t_0'))$ orientado tal que

$$\partial\beta_{t'} = [0] - [z_\theta(t')]$$

y según J. Solomín [5], existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\forall\ t' \in (0,t_0)$ se verifica:

$$\partial\varphi^{-1}(\beta_{t'}) = C_e(\varphi) - \varphi^{-1}[z_\theta(t')], \qquad (46)$$

donde $C_e(\varphi)$ es el ciclo analíticoesencial asociado a φ.

como $\quad \dim V_e(\varphi) = 2(n-k) \quad$ y $\quad \psi_j|_{V_e(\varphi)} \not\equiv 0$,

$j = k+1,\ldots p$, entonces, para t" suficientemente pequeño se tiene:

$$\dim_R T^{p-k}_{\gamma''}(\psi|_{V_e(\varphi)}) \leq 2(n-k) - (p-k) = 2n -(p+k)$$

De aquí

$$\dim_R (T^{p-k}_{\gamma''}(\psi) \cap V_e(\varphi)) \leq 2n-(p+k)$$

y por lo tanto (c.f [1], 1.3.1)

$$T^{p-k}_{\gamma''}(\psi).C_e(\varphi) = T^{p-k}_{\gamma''}(\psi|_{C_e(\varphi)}). \tag{47}$$

Sean $t'_0 \in (0,1)$ y $t''_0 \in (0,1)$ de tal manera que valga (46) y Lema 2.16 sea aplicable; entonces

$$\dim_R \varphi^{-1}(|\beta_{t'}|) \cap T^{p-k}_{\gamma''}(\psi) \leq 2n-p+1 \tag{48}$$

y por lo tanto de (42), (46), (47) y (48) obtenemos:

$$\partial(\varphi^{-1}(\beta_{t'}).T^{p-k}_{\gamma''}(\psi)) = T^{p-k}_{\gamma''}(\psi|_{C_e(\varphi)})-T^{p-k}_{\gamma''}(\psi|_{\varphi^{-1}[z_\theta(t')]}) \tag{49}$$

Como en Teorema 4.1.3, [5], pág 54 se demuestra que:

$$\lim_{t'\to 0} \int_{\partial(\varphi^{-1}(\beta_{t'}).T^{p-k}_{\gamma''}(\psi))} \frac{\omega}{\Psi} = 0$$

y luego de (49) se obtiene el lema. □

Ahora, por Lema 2.25, (a) y (b), pasamos en (43) el límite bajo el signo de integral y obtenemos:

$$I_{t''} = \tau(2\pi i)^k \int_{T^{p-k}_{\gamma''}(\psi|_{C_e(\varphi)})} \frac{\omega}{\Psi} .$$

y luego

$$\lim_{t''\to 0} I_{t''} = \mathbf{T}(2\pi i)^k \, R^{p-k}_{C_e(\varphi),\hat{\psi}}(\hat{\omega}).$$

como queríamos demostrar. □□

Luis A. Romero G.

BIBLIOGRAFIA

[1] Coleff,N.-Herrera,M.; Les Courants Residuels Associés a une forme meromorphe.

[2] Hironaka,H.; The Resolution of singularites of an algebraic variety over a field of caracteristica cero. ANN. Math. 19, 109-326 (1964)

[3] Hardt,R.M.; Slicing and intersection theory for chains associated with real analytic varietes. Acta Math. 129,1972, 75-136.

[4] Poly,J.B.; Formule des residues et intersection des chaines sous-analytiques. Thesis, Université de Poitiers, 1974.

[5] Solomín,J.; Sobre residuos esenciales y evaluadores asociados a funciones meromorfas, 1977.

[6] Leray,J.; Le calcul differentiel et integral sur une varieté analytique. Bull. Soc. Math. France 87,1959, 81-180.

[7] Federer,H.; Geometric Measure Theory, Springer Verlag, New York, 1969.