Sobre representación a la Darlington de matrices de scattering y matrices de transferencia de N-puertos lineales

Cortina, Elsa Aurora

1978

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

ELSA AURORA CORTINA

SOBRE REPRESENTACION A LA DARLINGTON DE MATRICES DE SCATTERING Y MATRICES DE TRANSFERENCIA DE N-PUERTOS LINEALES

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTORA EN MATEMATICA

BUENOS AIRES, DICIEMBRE DE 1978.

Al Dr. Alberto González Domínguez,

con mucho cariño.

Mi profundo agradecimiento al Dr. Alberto González Domínguez por su invalorable consejo y por la generosidad con que me enseña.

Aprecio el gesto amistoso del Dr. Enrique D'Attellis al dedicarme, pacientemente, su tiempo para discutir muchos de los temas aquí desarrollados.

Agradezco a mi amiga Kitty Lang por la excelente transcripción del manuscrito y a mi padre por su colaboración en el dibujo de las figuras y algunos símbolos matemáticos.

Introducción .... pág. 1

I. Teoremas sobre representación de funciones matriciales de la clase $S\Pi$ .... pág. 12

II. Realización a la Darlington .... pág. 54

III. Multiplicidad de las realizaciones .... pág. 80

IV. Transformaciones lineales fraccionarias de funciones matriciales j-expansivas .... pág. 100

V. Multiplicidad de las realizaciones de una función matricial j-expansiva .... pág. 123

INTRODUCCION

0. NOTACIONES Y ENUNCIADOS DE ALGUNOS RESULTADOS CONOCIDOS QUE SE UTILIZAN EN LA TESIS.

Llamaremos $L^2(C^n)$ el espacio de las funciones medibles $h(\xi)$ ($\xi = e^{it}$) con valores en C^n y de norma de cuadrado sumable; consta de las funciones cuya serie de Fourier es (en el sentido de la convergencia en promedio) $h(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} h_k \xi^k$ con $h_k \in C^n$ y $\|h\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \|h_k\|^2 < \infty$ (cf. (1), p. 183).

$L^2_+(C^n)$ es el subespacio de $L^2(C^n)$ que consta de las funciones para las cuales $h_k = 0$ si $k < 0$ (cf. (1), p. 184).

$H^2(C^n)$ designa el espacio de funciones $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k$ ($z = re^{it}$) con $h_k \in C^n$, holomorfas en el interior del círculo unidad $D = \{z \; ; \; |z| < 1\}$, tales que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|h(re^{it})\|^2 \, dt \qquad (0 \leqslant r < 1)$$

tiene una cota independiente de r (cf. (1), p. 185).

Una función $u(z)$ holomorfa en D se llama interior si ((1), p. 101)

$$|u(z)| \leqslant 1 \qquad (z \in D),$$

$$|u(\xi)| = 1 \;, \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

Una función $\Phi(z)$ holomorfa en D se llama exterior si ((1), p. 102)

$$\Phi(z) = \chi \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \ln k(t) \, dt \qquad (z \in D).$$

donde $k(t) \geq 0$, $\ln k(t) \in L^1$ y χ es un número complejo de módulo 1.

Toda función holomorfa acotada en D puede escribirse como producto de una función interior por una función exterior acotada.

Para una función $w(z)$, meromorfa en D, la característica de Nevanlinna $T(w;r)$ está definida por la expresión ((2), p. 1303;(3), p. 168)

$$T(w;r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |w(re^{it})| \, dt + \int_0^r \frac{n(t,w) - n(0,w)}{t} \, dt + $$

$$+ \; n(0,w) \ln r,$$

donde

$$\ln^+ a = \begin{cases} \ln a, & \text{si } a \geq 1, \\ 0, & \text{si } 0 < a < 1, \end{cases}$$

y $n(t,w)$ es el número de polos de $w(z)$, contado cada uno con su respectiva multiplicidad, comprendidos en el círculo $|z| \leq t$. Decimos que $w(z)$ es de característica acotada si $\sup_{r<1} T(w;r) < \infty$. Llamaremos N la clase de funciones de característica acotada en D. De acuerdo con un teorema de Nevanlinna ((3), p. 189) la clase N coincide con la clase de funciones que pueden escribirse como cociente de funciones holomorfas acotadas en D. Por consiguiente, las funciones de la clase N están unívocamente determinadas por sus valores de contorno en un conjunto de medida positiva.

Designaremos con el símbolo N_0 la subclase de funciones de N que pueden escribirse en la forma

$$F(z) = z^m u(z) \phi(z), \quad m \geq 0,$$

donde $u(z)$ es una función interior y $\phi(z)$ es función exterior. Para las funciones de la clase N_0 vale el principio del máximo ((2), p. 1305).

Una matriz A se llamará contractiva si verifica la condición

$$I - A^*A \geqslant 0 ,$$

donde I es la matriz unidad y el símbolo * denota la adjunción hermitiana.

Sea J una matriz que satisface a las condiciones $J^* = J$, $J^2 = I$.

Una matriz A se llamará J-expansiva si verifica la condición

$$A^*JA - J \geqslant 0$$

y J-unitaria si verifica la condición

$$A^*JA - J = 0.$$

Las expresiones anteriores son respectivamente equivalentes a

$$AJA^* - J \geqslant 0,$$

$$AJA^* - J = 0.$$

Llamaremos S la clase de funciones matriciales $S(z)$, definidas y holomorfas en D, que verifican la condición $\|S(z)\| \leqslant 1$ $(z \in D)$ ((2), p. 1299).

Una función matricial $A(z)$ se llama de característica acotada si todos sus elementos son funciones de característica acotada.

$S\Pi$ es la subclase de funciones matriciales de S cuyos valores en casi todo punto de la circunferencia unidad son, simultáneamente, valores de contorno de alguna función matricial de característica acotada en $|z| > 1$.

Una función matricial $A(z)$, meromorfa en D, se llama J-expansiva si toma valores J-expansivos en cada punto de holomorfismo; es decir, si se verifica

$$A^*(z)\ J\ A(z)\ -\ J \geqslant 0\ ,$$

donde z es un punto de holomorfismo de $A(z)$.

La función matricial $A(z)$ se llama J-interior si es J-expansiva ($z \in D$) y toma valores J-unitarios en casi todo punto del contorno; es decir, si se verifica

$$A^*(z)\ J\ A(z)\ -\ J \geqslant 0\quad (z \in D),$$

$$A^*(\xi)\ J\ A(\xi)\ -\ J = 0\ ,\ \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

Lema Fundamental (cf. (2), p. 1306)

Hipótesis.

La función matricial de orden 2n de característica acotada

$$A(z) = \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{pmatrix}$$

tal que $\det \delta(z) \not\equiv 0$ ($z \in D$), satisface a las siguientes condiciones:

1) $A^*(\xi)\ j\ A(\xi) - j \geqslant 0\ ,\quad$ p.p. en $|\xi| = 1$, (0,1)

donde $$j = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\ ;$$

2) las funciones

$$a(z) \overset{\text{def}}{=} \beta(z)\, \delta^{-1}(z), \tag{0,2}$$

$$b(z) \overset{\text{def}}{=} \alpha(z) - \beta(z)\, \delta^{-1}(z)\, \gamma(z), \tag{0,3}$$

$$c(z) \overset{\text{def}}{=} \delta^{-1}(z)\, \gamma(z), \tag{0,4}$$

$$d(z) \overset{\text{def}}{=} \delta^{-1}(z), \tag{0,5}$$

son de la clase N_o $(z \in D)$.

<u>Tesis</u>.

La función matricial $A(z)$ es j-expansiva; es decir, se verifica

$$A^*(z)\, j\, A(z) - j \geqslant 0 \quad (z \in D)\ ;$$

y, además,

$$\|a(z)\| \leqslant 1\ ;\quad \|b(z)\| \leqslant 1\ ;\quad \|c(z)\| \leqslant 1\ ;\quad \|d(z)\| \leqslant 1.$$

Llamaremos $T\Pi$ la clase de funciones $T(z)$ j-expansivas $(z \in D)$ cuyos valores en casi todo punto de la circunferencia unidad son, simultáneamente, valores de contorno de alguna función matricial de característica acotada en $|z| > 1$.

<u>Teorema de Matveev</u> (cf.(2), p. 1311)

<u>Hipótesis</u>.

$F(z)$ es una función matricial de orden n, de característica acotada en D y verifica la condición

$$F(\xi) \geqslant 0 \quad , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

<u>Tesis</u>.

Existen funciones matriciales, de orden n, $\Theta(z)$ y $\Psi(z)$ acotadas y holomorfas en D, tales que

$$F(\xi) = \Theta^*(\xi)\ \Theta(\xi) = \Psi(\xi)\ \Psi^*(\xi) \quad , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

Una función matricial H(z) es por definición real si

$$\overline{H(\bar{z})} = H(z) .$$

Llamaremos P la clase de funciones matriciales holomorfas y definidas en el semiplano abierto de la derecha Re $p > 0$, $p = x + iy$, que tienen parte real no negativa en ese semiplano. Las funciones reales de la clase P se llaman positivas reales.

$\hat{S}_J$ es la clase de funciones matriciales holomorfas en el semiplano abierto de la derecha (Re $p > 0$), salvo un conjunto de puntos aislados, que en cada punto de holomorfismo son iguales a una matriz J-expansiva.

Definiremos a continuación funciones matriciales que tienen interés en la teoría de n-puertos eléctricos lineales.

La <u>matriz de impedancia</u> Z(p) de un n-puerto lineal pasivo es una función matricial de orden $n < \infty$, racional positiva real; es decir, que la función Z(p) verifica las condiciones:

1) Z(p) es holomorfa en Re $p > 0$;

2) $\dfrac{Z(p) + \overline{Z(p)}}{2} \geqslant 0$ en Re $p > 0$;

3) $\overline{Z(\bar{p})} = Z(p)$.

Si el n-puerto es un sistema sin pérdidas, la matriz de impedancia satisface, además, a la condición

4) $\dfrac{\overline{Z(\bar{p})} + Z(p)}{2} = 0$ en Re p = 0

La <u>matriz de scattering</u> S(p) de un n-puerto lineal pasivo es una función matricial real, de orden n, de la clase $\hat{S}_{-I}$; es decir, que S(p) verifica las condiciones

1) S(p) es holomorfa en Re p > 0;

2) $I_n - S^*(p)\, S(p) \geqslant 0$ en Re p > 0;

3) $\overline{S(\bar{p})} = S(p)$.

La matriz de scattering de un n-puerto lineal sin pérdidas verifica la condición adicional

4) $I_n - S^*(p)\, S(p) = 0$ en Re p = 0.

La <u>matriz de cadena</u> A(p) de un 2n-puerto lineal pasivo es una función matricial racional real, de orden 2n, de la clase $\hat{S}_{J_p}$, donde $J_p = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$; es decir, que A(p) verifica las siguientes condiciones:

1) $A^*(p)\, J_p\, A(p) - J_p \geqslant 0$ en Re p > 0 ;

2) $\overline{A(\bar{p})} = A(p)$.

En los 2n-puertos reales se cumple, además, la condición

3) $A^*(p)\, J_p\, A(p) - J_p = 0$ en $\operatorname{Re} p = 0$.

La <u>matriz de transferencia</u> $T(p)$ de un 2n-puerto lineal pasivo es una función matricial racional real, de orden 2n, de la clase $\hat{S}_j$, donde $j = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$; es decir, que $T(p)$ verifica las condiciones

1) $T^*(p)\, j\, T(p) - j \geqslant 0$ en $\operatorname{Re} p > 0$;

2) $\overline{T(\bar{p})} = T(p)$.

Para un 2n-puerto lineal sin pérdidas $T(p)$ cumple, además, la condición

4) $T^*(p)\, j\, T(p) - j = 0$ en $\operatorname{Re} p = 0$.

Es de particular interés para nosotros la realización a la Darlington (4) de un dipolo. El resultado de Darlington puede formularse como la siguiente proposición matemática (cf. (2), p. 1298):

Una función racional positiva real $z(p)$ se representa en la forma de una transformación lineal fraccionaria

$$z(p) = (a(p)\, r + b(p))\, (c(p)\, r + d(p))^{-1} ,$$

con una constante $r \geqslant 0$, cuya matriz de coeficientes

$$A(p) = \begin{pmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{pmatrix}$$

es una función matricial de segundo orden de la clase $\hat{S}_{J_p}$, y toma valores J_p-unitarios en el eje imaginario.

El dipolo buscado se obtiene cerrando con una resistencia r los bornes de salida del cuadripolo sin pérdidas cuya matriz de cadena es, justamente, A(p).

El resultado de Darlington ha sido generalizado por Melamud (5) para funciones matriciales racionales positivas reales de la clase P.

De la representación de funciones racionales de la clase P en forma de transformación lineal fraccionaria con una constante r (ϵ P) y matriz de coeficientes A(p) (ϵ $\hat{S}_{J_p}$), fácilmente se pasa a representaciones análogas para funciones de las clases $\hat{S}_{-I}$ y S.

En el trabajo de Arov (2) sobre representación a la Darlington de funciones matriciales de la clase S se prescinde de la condición de racionalidad y como matriz de coeficientes de la transformación se admite cualquier función matricial j-interior. El resultado fundamental de Arov es un criterio de realización para funciones matriciales de la clase S, a saber: S(z) (ϵ S) puede realizarse a la Darlington si y sólo si S(z) ϵ SΠ.

1. RESULTADOS NUEVOS OBTENIDOS EN LA TESIS.

En el capítulo I se demuestran teoremas sobre descomposición del espacio C^n y, a base de ellos, el Teorema 1-1 (Teorema Fundamental) que suministra una representación de una función matricial S(z) ϵ SΠ como suma directa de dos funciones matriciales que operan sobre dos subespacios ortogonales. Demostramos, también, que para funciones matriciales S(z) (ϵ SΠ) reales, la representación obtenida es real.

A partir de la representación hallada en el parágrafo I construimos, en el parágrafo II, una única expresión de la transformación lineal fraccionaria (a la Darlington) de S(z) (ϵ SΠ) que incluye los tres casos tratados separadamente por Arov en (2).

Este expresión permite estudiar, en el capítulo III, el problema de la multiplicidad de las realizaciones a la Darlington de una función matricial $S(z)$ ($\in S\Pi$) prefijada. Obtenemos una fórmula que generaliza el resultado de Arov, el cual, en [2], trata sólo un caso particular y propone, como problema abierto, el caso que nosotros también resolvemos.

En el capítulo IV se demuestra que toda función matricial $T(z)$ de las clase $T\Pi$ que satisfaga a una de las condiciones

1) $$T^*(\xi)\, j\, T(\xi) - j > 0, \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1,$$

2) $$T^*(\xi)\, j\, T(\xi) - j = 0, \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1,$$

puede representarse a la Darlington; es decir, en forma de una transformación lineal fraccionaria

$$T(z) = \left(A(z)\, t_0 + B(z)\right)\left(C(z)\, t_0 + D(z)\right)^{-1},$$

donde t_0 es una matriz constante j-expansiva, cuya matriz de coeficientes

$$W(z) = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix}$$

es J'-interior (donde $J' = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}$).

Mostramos, también, que es condición suficiente para que valga la inclusión $T(z) \in T\Pi$, que $T(z)$ pueda representarse como la trans formación lineal fraccionaria mencionada más arriba.

En el parágrafo V obtenemos teoremas sobre la multiplicidad de las realizaciones de una función matricial $T(z)$ ($\in T\Pi$) prefijada que satisface a la condición $T^*(\xi)\, j\, T(\xi) - j > 0$, p.p. en $|\xi| = 1$.

I. TEOREMAS SOBRE REPRESENTACION DE FUNCIONES MATRICIALES DE LA CLASE $S\Pi$.

I,1. Demostraremos a continuación trece lemas y dos teoremas que desempeñan papel fundamental en la construcción de las realizaciones a la Darlington de las funciones matriciales reales de la clase $S\Pi$.

I,1 - Consideremos una función matricial $S(z) \in S$. Pondremos

$$N \overset{\text{def}}{=} \{h(\xi) \in L^2_+(C^n);\ \ T(\xi)h(\xi) = h(\xi)\ \ \text{p.p. en } |\xi| = 1\},$$

donde $\quad T(\xi) = S^*(\xi)S(\xi)\ ; \qquad\qquad (I,1;1)$

$$N' \overset{\text{def}}{=} \{h'(\xi) \in L^2_+(C^n);\ T'(\xi)h'(\xi)=h'(\xi)\ \ \text{p.p. en } |\xi| = 1\},$$

donde $\quad T'(\xi) = S(\xi)S^*(\xi)\ . \qquad\qquad (I,1;2)$

<u>Lema 1-1</u>

<u>Hipótesis</u>.

$S(z) \in S$.

<u>Tesis</u>.

$$L^2_+(C^n) = N \oplus N_\perp , \qquad (I,1;3)$$

donde $N\perp$ es el complemento ortogonal de N con respecto a $L^2_+(C^n)$.

<u>Demostración</u>.

Sean $h_1(\xi)$ y $h_2(\xi)$ ($\xi = e^{it}$, $0 < t \leqslant 2\Pi$) dos funciones de N. De la definición de N es fácil ver que $\lambda\, h_1(\xi) + \mu\, h_2(\xi) \in N$. ($\lambda$, $\mu \in C$); es decir que N es una variedad lineal de $L^2_+(C^n)$.

Mostraremos que N es un subespacio de $L^2_+(C^n)$.

Designaremos con el símbolo $\bar{N}$ la clausura de N.

Sea $f(\xi) \in \bar{N}$ y $\{f_n(\xi)\} \in N$ $(n=1,2,\ldots)$ una sucesión que converge a $f(\xi)$ en $L^2_+(C^n)$; es decir, que vale la fórmula

$$\|f_n(\xi) - f(\xi)\|^2_{L^2(C^n)} = \frac{1}{2\Pi} \int_0^{2\Pi} \|f_n(e^{it}) - f(e^{it})\|^2 \, dt \to 0$$

para $n \to \infty$.

De esto se concluye que existe una subsucesión $\{f_{n_k}(\xi)\}$que verifica

$$\sum_k \int_0^{2\Pi} \|f_{n_k}(e^{it}) - f(e^{it})\|^2 \, dt < \infty .$$

Por el teorema de Beppo-Levi (6), para casi todo punto de la circunferencia unidad vale

$$\sum_k \|f_{n_k}(\xi) = f(\xi)\|^2 < \infty ;$$

por lo tanto

$$\|f_{n_k}(\xi) - f(\xi)\| \to 0 \qquad (I,1;4)$$

en casi todo punto del contorno.

Pondremos

$$F(\xi) \overset{def}{=} I_n - T(\xi) . \qquad (I,1;5)$$

De la definición de N concluimos que, para todo $h(\xi) \in N$, se verifica

$$F(\xi)\, h(\xi) = 0 \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1 . \qquad (I,1;6)$$

En virtud de (I,1;4) resulta

$$\|F(\xi)\, f_{n_k}(\xi) - F(\xi)\, f(\xi)\| \to 0$$

para $n_k \to \infty$, en casi todo punto de la circunferencia unidad.

Como $\{f_{n_k}(\xi)\} \in N$, teniendo en cuenta (I,1;6), concluimos que

$$F(\xi)\ f(\xi) = 0 \qquad \text{p.p.} \quad \text{en}\ |\xi| = 1\ ;$$

es decir, que $f(\xi) \in N$. Hemos demostrado que N es cerrado. Luego, N es un subespacio de $L^2_+(C^n)$ y es correcta la fórmula (I,1;3). Queda, así, demostrado el Lema 1-1.

Lema 1-2

Hipótesis.

$S(z) \in S$.

Tesis.

$$L^2_+(C^n) = N' \oplus N'_\perp \ .$$

donde $N'_\perp$ es el complemento ortogonal de N' con respecto a $L^2_+(C^n)$.

Omitimos la demostración del Lema 1-2, similar a la del Lema 1-1.

Consignaremos, ahora, algunas definiciones y fórmulas que tienen que ver con el Lema 1-3, más abajo demostrado.

Para cada ξ fijo de la circunferencia unidad donde $T(\xi)$ y $F(\xi)$ están definidos, pondremos

$$N_\xi \overset{def}{=} \{h \in C^n;\ T(\xi)\ h = h\}\ , \qquad (I,1;7)$$

$$N'_\xi \overset{def}{=} \{h' \in C^n;\ T'(\xi)h' = h'\}. \qquad (I,1;8)$$

Es evidente, de las definiciones anteriores, que N_ξ y N'_ξ son subespacios de C^n; por consiguiente, se verifican las relaciones

$$C^n = N_\xi \oplus N_{\xi\perp}\ ; \qquad (I,1;9)$$

$$C^n = N'_\xi \oplus N'_{\xi\perp}\ ; \qquad (I,1;10)$$

donde $N_{\xi\perp}$ y $N'_{\xi\perp}$ son, respectivamente, los complementos ortogonales de N_ξ y N'_ξ con respecto a C^n.

Lema 1-3

Hipótesis.

$S(z) \in S$.

Tesis.

Para cada ξ fijo de la circunferencia unidad, excepto, quizá, un conjunto de medida nula, se verifica

a) $S(\xi)N_\xi = N'_\xi$,

$S^*(\xi)N'_\xi = N_\xi$.

b) $S(\xi)N_{\xi\perp} \subset N'_{\xi\perp}$.

Demostración.

a) Consideremos un ξ fijo de la circunferencia unidad. Sean $h \in N_\xi$ y $h' \in N'_\xi$; entonces

$$T(\xi)h = h,$$

$$T'(\xi)h' = h'.$$

Luego

$$S(\xi)T(\xi)h = T'(\xi)S(\xi)h = S(\xi)h ,$$

$$S^*(\xi)T'(\xi)h' = T(\xi)S^*(\xi)h' = S^*(\xi)h' .$$

De las definiciones (I,1;7) y (I,1;8), y teniendo en cuenta las dos expresiones anteriores, concluimos que

$$S(\xi)\, h \in N'_{\xi} ,$$

$$S^*(\xi) h' \in N_{\xi} ;$$

por consiguiente

$$S(\xi)\, N_{\xi} \subset N'_{\xi} , \qquad (I,1;11)$$

$$S^*(\xi) N'_{\xi} \subset N_{\xi} . \qquad (I,1;12)$$

Para demostrar la parte a) de la tesis sólo resta probar que

$$N'_{\xi} \subset S(\xi)\, N_{\xi} , \qquad (I,1;13)$$

y

$$N_{\xi} \subset S^*(\xi)\, N'_{\xi} . \qquad (I,1;14)$$

Probaremos (I,1;13) por el absurdo. Admitamos que $N'_{\xi} \not\subset S(\xi) N_{\xi}$. Luego existe un elemento $f' \in N'_{\xi}$ tal que $f' \neq S(\xi)h$ para todo $h \in N_{\xi}$.

De la definición de N'_{ξ} sabemos que

$$T'(\xi) f' = f' . \qquad (I,1;15)$$

En virtud de (I,1;12) se verifica

$$S^*(\xi) f' = f \in N_{\xi}; \qquad (I,1;16)$$

luego, de las fórmulas (I,1;15) y (I,1;16) se concluye que

$$S(\xi) f = f' . \qquad (I,1;17)$$

La fórmula (I,1;17) contradice la hipótesis de partida. Por consiguiente debe verificarse (I,1;13).

La inclusión (I,1;14) se demuestra en forma similar.

Queda, así, demostrada la parte a) de la tesis.

b) Demostraremos la parte b) de la tesis por el absurdo.

Admitamos que no se cumple la parte b) de la tesis, es decir que

$$S(\xi)N_{\xi\perp} \not\subset N'_{\xi\perp} \, .$$

Esto es equivalente a afirmar que existe un vector $g \in N_{\xi\perp}$ tal que

$$g' \overset{\text{def}}{=} S(\xi)g \notin N'_{\xi\perp} \, .$$

Como $g' \in C^n$, este vector puede escribirse, en virtud de (I,1;10) como la suma de dos vectores pertenecientes, respectivamente, a los subespacios ortogonales N'_ξ y $N'_{\xi\perp}$. De acuerdo con esto, afirmar que $g' \notin N'_{\xi\perp}$ es equivalente a afirmar que

$$g' = g'_1 + g'_2 \, , \qquad (I,1;18)$$

donde $g'_1 \in N'_\xi$ y $g'_2 \in N'_{\xi\perp}$.

De (I,1;18) concluimos

$$\|g'\|^2 = \|g'_1\|^2 + \|g'_2\|^2 \, . \qquad (I,1;19)$$

De la definición de g'y de (I,1;18) resulta, además,

$$\|g'\|^2 = \langle g',g'\rangle = \langle S(\xi)g,g'_1 + g'_2\rangle =$$

$$= \langle S(\xi)g,g'_1\rangle + \langle S(\xi)g,g'_2\rangle \, . \qquad (I,1;20)$$

Veremos que en la expresión anterior es nulo el primer término del último miembro. Sabemos que $g_1' \in N_\xi'$; por lo tanto, en virtud de (I,1;11), $S^*(\xi)g_1' \in N_\xi$. Luego

$$\langle S(\xi)g, g_1'\rangle = \langle g, S^*(\xi)g_1'\rangle = 0 ,$$

pues $g \in N_{\xi\perp}$ y $S^*(\xi)g_1' \in N_\xi$.

De (I,1;18), (I,1;20) y la fórmula anterior

$$\|g'\|^2 = \langle S(\xi)g,\ g_2'\rangle = \langle g_1' + g_2', g_2'\rangle =$$

$$= \langle g_2', g_2'\rangle = \|g_2'\|^2 . \qquad \text{(I,1;21)}$$

De (I,1;19) y (I,1;21) concluimos que $\|g_1'\|^2 = 0$. Esta conclusión contradice la hipótesis de partida, que era suponer $g_1' \neq 0$ o, equivalentemente, $S(\xi)N_{\xi\perp} \not\subset N_{\xi\perp}'$. Luego debe verificarse la inclusión $S(\xi)N_{\xi\perp} \subset N_{\xi\perp}'$, y queda, así, demostrada la parte b) de la tesis.

Queda, pues, demostrado el Lema 1-3.

Lema 1-4

Hipótesis.

$S(z) \in S\Pi$.

Tesis.

Los subespacios N_ξ de C^n, definidos por la fórmula (I,1;7) tienen la misma dimensión para todo ξ donde esté definida la matriz $F(\xi)$, dada por la fórmula (I,1;5).

Demostración.

Consideremos la función matricial $F(\xi)$, definida por la fórmula (I,1;5). Como $S(z) \in S\Pi$, entonces $F(\xi)$ es el límite en casi todo punto del contorno de la función matricial.

$$F(z) = I_n - S^*(\tfrac{1}{\bar z})\ S(z) , \qquad \text{(I,1;22)}$$

de característica acotada en D (cf. (2), p. 1308).

Para la función escalar $f(z) \overset{def}{=} \det F(z)$ hay tres casos posibles:

1) $f(\xi) = \det F(\xi) \neq 0$ p.p. en $|\xi| = 1$. De esta hipótesis resulta $F(\xi) > 0$, p.p. en $|\xi| = 1$; por consiguiente, para cada ξ fijo de la circunferencia unidad donde está definida, la matriz $F(\xi)$ es hermitiana positiva; es decir que $F(\xi)\, h \neq 0$ para todo $h \in C^n$. De esto se concluye que $N_\xi = \{0\}$ para casi todo ξ; por consiguiente

$$\dim N_\xi = 0$$

para casi todo ξ de la circunferencia unidad.

2) $f(z) \equiv 0$ $(z \in D)$ y $S(z)$ es función interior. En este caso $F(\xi) = 0$ (p.p. en $|\xi| = 1$). Para cada ξ fijo de la circunferencia unidad donde está definida, la matriz autoadjunta $F(\xi)$ es nula; es decir, para todo $h \in C^n$, se verifica $F(\xi)h = 0$. Por lo tanto, $\dim N_\xi = n$, para casi todo punto de la circunferencia unidad.

3) $f(z) \equiv 0$ $(z \in D)$ y $S(z)$ no es función matricial interior.

La función escalar $f(z)$ es de característica acotada en D y, por lo tanto, está definida en el interior del círculo unidad por sus valores de contorno en un conjunto de medida positiva, verificándose

$$f(\xi) = \lim_{|z| \to 1} f(z) \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 .$$

Si $f(z) \equiv 0$ $(z \in D)$, entonces $f(\xi) = 0$ p.p. en $|\xi| = 1$. Como $S(z)$ no es función matricial interior, $F(\xi) \neq 0$ en un conjunto de medida positiva de la circunferencia unidad; entonces, $F(\xi)$ tiene algún menor principal $A_k(\xi)$ de orden k tal que (cf. (2), p. 1310)

$$\det A_k(\xi) \neq 0 \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 , \tag{I,1;23}$$

$$\ln \det A_k(\xi) \in L^1 ;$$

en tanto que, para cualquier menor principal $A_{k+i}(\xi)$ $(i=1,2,\ldots,n-k)$ de orden mayor que k, se verifica (cf. [2], p. 1310)

$$\det A_{k+i}(\xi) = 0 \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 . \tag{I,1;24}$$

Como las igualdades (I,1;23) y (I,1;24) valen para casi todo punto de la circunferencia unidad, para cada ξ fijo donde está definida la matriz $F(\xi)$ se verifica

$$\text{Rg } F(\xi) = \dim \text{im } F(\xi) = k \tag{I,2;25}$$

(Rg = rango, dim im = dimensión de la imagen); por lo tanto, en virtud de (I,1;25) y teniendo en cuenta resultados conocidos de álgebra lineal (cf. [7], p. 71), resulta

$$\dim \ker F(\xi) = \dim C^n - \dim \text{im } F(\xi) .$$

De la definición de N_ξ es evidente que

$$\ker F(\xi) = N_\xi .$$

Luego, de las fórmulas que preceden concluimos que

$$\dim N_\xi = n - k ,$$

para casi todo ξ de la circunferencia unidad.

Queda, así, demostrado el Lema 1-4.

Lema 1-5

Hipótesis.

$S(z) \in S\Pi$.

Tesis.

Los subespacios N'_ξ de C^n, definidos por la expresión (I,1;8) tienen la misma dimensión para casi todo ξ de la circunferencia unidad.

Omitimos la demostración de este lema, similar a la del Lema 1-4.

Lema 1-6

Hipótesis.

$S(z) \in S\Pi$.

Tesis.

$$\dim N_\xi = \dim N'_\xi ,$$

para casi todo ξ de la circunferencia unidad.

Demostración.

Sea $\dim N_\xi = n - k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Existe una base ortonormal $\{h_m\}_1^{n-k}$ de N_ξ tal que

$$\langle h_i , h_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i=1,2,\dots,n-k) \; (j=1,2,\dots,n-k). \qquad \text{(I,1;26)}$$

En virtud de la definición de N_ξ, los h_m satisfacen a la fórmula

$$T(\xi)\, h_m = h_m . \qquad \text{(I,1;27)}$$

Como $h_m \in N_\xi$ $(m=1,2,\dots,n-k)$, sabemos, del Lema 1-3, que se verifica

$$S(\xi)\ h_m = h'_m \in N' \qquad (I,1;28)$$

y

$$\| h'_m \|^2 = \| S(\xi) h_m \|^2 = \langle S(\xi)h_m , S(\xi)h_m \rangle = \langle h_m , T(\xi)h_m \rangle =$$

$$= \langle h_m , h_m \rangle = \| h_m \|^2 .$$

De las fórmulas (I,1;26), (I,1;27) y (I,1;28) resulta

$$\langle h'_i , h'_j \rangle = \langle S(\xi)h_i , S(\xi)h_j \rangle = \langle h_i , T(\xi)h_j \rangle =$$

$$= \langle h_i , h_j \rangle = \delta_{ij} ;$$

es decir que $\{h'_m\}_1^{n-k}$ es un conjunto de n-k vectores ortonormales en N'_ξ.

Admitamos que dim $N'_\xi \neq$ dim N_ξ. Sin restricción de la generalidad podemos suponer que dim $N'_\xi = r >$ dim N_ξ $(r < n)$. Existen, entonces, $r - (n-k)$ vectores ortonormales $\{f'_m\}_1^{r-(n-k)}$ de N'_ξ que satisfacen a las siguientes igualdades

$$\langle f'_i , f'_j \rangle = \delta_{ij} , \qquad (I,1;29)$$

$$\langle f'_i , h'_m \rangle = 0 ,$$

para todo i, j, m $(i = 1,2,\ldots,r-(n-k))$ $(j = 1,2,\ldots,r-(n-k))$ $(m = 1,2,\ldots,n-k)$.

Sabemos, del Lema 1-3, que para cada f'_m $(\in N'_\xi)$ existe un vector $f_m \in N_\xi$ tal que

$$S(\xi)\ f_m = f'_m .$$

De (I,1;27), (I,1;28), (I,1;29) y la fórmula anterior concluimos que

$$\langle f_i', h_j' \rangle = \langle S(\xi) f_i, S(\xi) h_j \rangle = \langle f_i, T(\xi) h_j \rangle =$$

$$= \langle f_i, h_j \rangle = 0 ,$$

$$\langle f_i', f_j' \rangle = \langle S(\xi) f_i, S(\xi) f_j \rangle = \langle f_i, T(\xi) f_j \rangle =$$

$$= \langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij} .$$

Observemos que, de acuerdo con las dos últimas ecuaciones los $\{f_m\}_1^{r-(n-k)}$ ($\in N_\xi$) son ortogonales entre sí, tienen norma 1 y son ortogonales a todos los vectores de la base $\{h_m\}_1^{n-k}$ de N_ξ. Este resultado contradice la hipótesis $\dim N_\xi = n - k$. Debe verificarse entonces $\dim N_\xi = \dim N_\xi'$.

Queda, pues, demostrado el Lema 1-6.

<u>Lema 1-7</u>

<u>Hipótesis</u>.

$S(z) \in S\Pi$.

<u>Tesis</u>.

a) Los autovalores $\delta_m(\xi)$ de la función matricial $F(\xi)$, definida por la fórmula (I,1;5) son de la forma

$$\delta_m(\xi) = \frac{\lambda_m(\xi)}{u(\xi)} ,$$

donde $\lambda_m(\xi)$ es una función de $L_+^2(C^n)$ y $u(\xi)$ es el valor de contorno de una función escalar interior.

b) Pueden elegirse autofunciones $\{\Phi_m(\xi)\}_1^n$ de la función matricial $F(\xi)$ que sean límite en casi todo punto del contorno de funciones holomorfas y acotadas en D.

Demostración.

Como $S(z) \in S\Pi$, entonces $S^*(\xi)$ es el valor en casi todo punto del contorno de la función matricial $S^*(\frac{1}{\bar{z}})$, de característica acotada en D; luego $F(\xi)$ es el valor en casi todo punto del contorno de la función matricial $F(z)$, dada por la fórmula (I,1;22), de característica acotada en D.

Los elementos de $F(z)$ son funciones escalares de característica acotada en D; por lo tanto pueden escribirse como cocientes de funciones holomorfas acotadas en D. Una función holomorfa acotada en el disco unidad es el producto de una función interior por una función exterior acotada. Por consiguiente, los elementos de $F(z)$ pueden escribirse en la forma

$$F_{ij}(z) = \frac{u_1^{ij}(z)\ \phi_1^{ij}(z)}{u_2^{ij}(z)\ \phi_2^{ij}(z)}, \qquad (I,1;30)$$

donde $u_1^{ij}(z)$ y $u_2^{ij}(z)$ son funciones interiores; $\phi_1^{ij}(z)$ y $\phi_2^{ij}(z)$ son funciones exteriores acotadas.

Sabemos que el cociente de funciones exteriores es una función exterior. Entonces

$$\phi^{ij}(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\phi_1^{ij}(z)}{\phi_2^{ij}(z)}$$

es función exterior. Reemplacemos la fórmula anterior en (I,1;30); obtenemos

$$F_{ij}(z) = \frac{u_1^{ij}(z)\,\phi^{ij}(z)}{u_2^{ij}(z)} .$$

Veremos que $\phi^{ij}(z)$ es una función exterior acotada. Como los elementos $F_{ij}(z)$ de la función matricial $F(z)$ son de característica acotada en D, es bien sabido que vale la fórmula

$$F_{ij}(\xi) = \lim_{|z|\to 1} F_{ij}(z), \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \qquad (I,1;31)$$

Por lo tanto, en casi todo punto del contorno, se verifica

$$F_{ij}(\xi) = \frac{u_1^{ij}(\xi)\,\phi^{ij}(\xi)}{u_2^{ij}(\xi)} . \qquad (I,1;32)$$

Como $S(z)$ e S, $F(\xi)$ está acotada inferior y superiormente por 0 y 1, respectivamente, y

$$0 < |F_{ij}(\xi)| = \left|\frac{u_1^{ij}(\xi)\,\phi^{ij}(\xi)}{u_2^{ij}(\xi)}\right| = |\phi^{ij}(\xi)| \leqslant 1 .$$

en casi todo punto de la circunferencia unidad. Sabemos que $\phi^{ij}(z)$ es función exterior; entonces, en virtud del principio del máximo (cf. [2], p. 1304)

$$|\phi^{ij}(z)| \leqslant |\phi^{ij}(\xi)| \leqslant 1 . \qquad (I,1;33)$$

Sea $u(z)$ la función escalar interior, que se común denominador de todos los elementos de $F(z)$, definida por la fórmula

$$u(z) = \prod_{i,j=1}^{n} u_2^{ij}(z) . \qquad (I,1;34)$$

Resulta evidente que

$$G(z) \stackrel{def}{=} F(z)\, u(z) \quad (\in H^2(C^n))$$

es una función matricial holomorfa y acotada en D, y sus elementos $G_{ij}(z)$ son funciones escalares holomorfas y acotadas en D. Podemos escribir F(z) en la forma

$$F(z) = \frac{G(z)}{u(z)} \tag{I,1;35}$$

En virtud de (I,1;31) y (I,1;35) se verifica

$$F(\xi) = \frac{G(\xi)}{u(\xi)} \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 , \tag{I,1;36}$$

donde $G(\xi)$ y $u(\xi)$ son, respectivamente, los valores en casi todo punto del contorno de G(z) y u(z). Es inmediato ver que $u(\xi)$ y los elementos $G_{ij}(\xi)$, de la función matricial $G(\xi)$, pertenecen a L^2_+, pues son valores límite de funciones de H^2.

Para cada valor de ξ donde está definida, $F(\xi)$ es una matriz autoadjunta en C^n, acotada inferior y superiormente por 0 y 1, respectivamente. Por lo tanto, existe una base ortonormal $\{\Psi_m(\xi)\}_1^n$ de C^n compuesta por autovectores de $F(\xi)$, que satisfacen, para cada ξ fijo y para cada m (m=1,2,...,n) a la fórmula

$$F(\xi)\, \Psi_m(\xi) = \delta_m(\xi)\, \Psi_m(\xi) . \tag{I,1;37}$$

Ordenaremos los autovalores $\delta_m(\xi)$ en la forma

$$1 \geqslant \delta_1(\xi) \geqslant \delta_2(\xi) \geqslant \dots \geqslant \delta_n(\xi) \geqslant 0 .$$

Para cada valor de ξ donde está definida $F(\xi)$, también está definida, por la fórmula (I,1;36), la matriz $G(\xi)$ que, en virtud de (I,1;37), satisface a la ecuación

$$G(\xi)\ \Psi_m(\xi) = u(\xi)\ \delta_m(\xi)\ \Psi_m(\xi) = \lambda_m(\xi)\ \Psi_m(\xi)\ , \qquad \text{(I,1;38)}$$

donde $\lambda_m(\xi) = u(\xi)\ \delta_m(\xi)$. Observamos, entonces, que los $\{\Psi_m(\xi)\}_1^n$ son, también, autovectores de $G(\xi)$ con autovalores $\lambda_m(\xi)$ ($m=1,2,\ldots,n$).

Veremos que las funciones $\lambda_m(\xi)$, definidas en casi todo punto del contorno por la fórmula (I,1;38), son límite (p.p. en $|\xi| = 1$) de funciones escalares holomorfas y acotadas en D y, por consiguiente, pertenecen a L^2_+.

Sabemos que (cf. (1), p. 272) para el máximo autovalor de $F(\xi)$, en este caso $\delta_1(\xi)$, se verifica la ecuación

$$\delta_1(\xi) = \sup \langle F(\xi)\ f_n\ ,\ f_n \rangle\ ,$$

donde f_n es una sucesión densa en la esfera unidad de C^n. La expresión anterior puede escribirse en la forma

$$\delta_1(\xi) = \sup \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(\xi)\ f_n^j\ f_n^i\ . \qquad \text{(I,1;39)}$$

Como las funciones $F_{ij}(\xi)$, definidas en casi todo punto del contorno por (I,1;32), son, p.p. en $|\xi| = 1$, valores límites de funciones de característica acotada en D, entonces la función $\delta_1(\xi)$, definida en casi todo punto del contorno por (I,1;39), es una suma de funciones que son límite, p.p. en $|\xi| = 1$, de funciones de característica acotada en D. Por consiguiente, teniendo en cuenta (I,1;32), concluimos que

$$\delta_1(\xi) = \lim_{|z|\to 1} \delta_1(z),\quad \text{p.p.}\quad \text{en } |\xi| = 1\ , \qquad \text{(I,1;40)}$$

donde $\delta_1(z)$ es de característica acotada en D.

Escribamos $\lambda_1(\xi)$ teniendo en cuenta (I,1;40); obtenemos

$$\lambda_1(\xi) = u(\xi)\ \delta_1(\xi) = u(\xi)\ \sup \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(\xi)\ f_n^j\ f_n^i\ .$$

De (I,1;33), (I,1;34) y la expresión anterior concluimos que

$$\lambda_1(\xi) = \lim_{|z|\to 1} \lambda_1(z)\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1\ , \tag{I,1;41}$$

donde $\lambda_1(z)$ es holomorfa y acotada en D y, por lo tanto, pertenece a H^2. Sabemos (cf. (1), p. 185) que el límite en casi todo punto del contorno de una función de H^2 es una función de L^2_+; entonces $\lambda_1(\xi)$ pertenece a la clase L^2_+.

Consideremos la función matricial

$$F_1(z) \stackrel{def}{\equiv} \delta_1(z)\ I_n - F(z)\ ,$$

cuyo valor en casi todo punto del contorno es

$$F_1(\xi) = \delta_1(\xi)\ I_n - F(\xi)\ .$$

Para cada ξ donde está definida, $F_1(\xi)$ es una matriz autoadjunta en C^n. Teniendo en cuenta (I,1;37) resulta, para cada ξ fijo y para cada m,

$$\begin{aligned} F_1(\xi)\ \Psi_m(\xi) &= \left(\delta_1(\xi)\ I_n - F(\xi)\right)\ \Psi_m(\xi) = \\ &= \left(\delta_1(\xi) - \delta_m(\xi)\right)\ \Psi_m(\xi)\ ; \end{aligned}$$

es decir que $\{\Psi_m(\xi)\}_1^n$ son autovectores de $F_1(\xi)$ correspondientes a los autovalores $\delta_1(\xi) - \delta_m(\xi)$.

Sea $\delta_k(\xi)$ el mínimo autovalor de $F(\xi)$ distinto de cero. Entonces $\delta_1(\xi) - \delta_k(\xi)$ será el máximo autovalor de $F_1(\xi)$, para el cual se verifica (cf. (1), p. 272)

$$\delta_1(\xi) - \delta_k(\xi) = \sup\langle (\delta_1(\xi) I_n - F(\xi))\, f_n , f_n\rangle ,$$

donde f_n es una sucesión densa en la esfera unidad de C^n. Multipliquemos la ecuación anterior por $u(\xi)$; obtenemos

$$u(\xi)\,(\delta_1(\xi) - \delta_k(\xi)) = u(\xi) \sup\langle (\delta_1(\xi) I_n - F(\xi)\, f_n , f_n\rangle =$$

$$= u(\xi) \sup\, (\delta_1(\xi) - \langle F(\xi)\, f_n , f_n\rangle) =$$

$$= \sup u(\xi)\, (\delta_1(\xi) - \langle F(\xi)\, f_n , f_n\rangle) =$$

$$= \sup\, (\lambda_1(\xi) - u(\xi)\, \langle F(\xi)\, f_n , f_n\rangle) .$$

Sabemos, de (I,1;41) que $\lambda_1(\xi)$ es el límite en casi todo punto del contorno de la función $\lambda_1(z)$, holomorfa y acotada en D; y de (I,1;32) y (I,1;34) vemos que $u(\xi)\,\langle F(\xi)\, f_n , f_n\rangle$ es límite en casi todo punto del contorno de una función escalar holomorfa y acotada en D. Por consiguiente

$$u(\xi)\,(\delta_1(\xi) - \delta_k(\xi))$$

también es límite, p.p. en $|\xi| = 1$, de una función holomorfa y acotada en D y, por lo tanto, se verifica

$$\lambda_k(\xi) = u(\xi)\,\delta_k(\xi) = \lim_{|z|\to 1} \lambda_k(z), \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1,$$

donde $\lambda_k(z)$ es holomorfa y acotada en D. Luego, $\lambda_k(z) \in H^2$ y $\lambda_k(\xi) \in L^2_+$.

Repitiendo en procedimiento anterior, se puede demostrar que los $\lambda_m(\xi)$ son funciones de L^2_+ para todo m (m=1,2,...,n) y son límites, en casi todo punto del contorno, de funciones holomorfas y acotadas en D.

Queda, así, demostrada la parte a) de la tesis.

b) Veremos, ahora, que a partir de las funciones $\{\Psi_m(\xi)\}_1^n$, definidas en casi todo punto de la circunferencia unidad por la fórmula (I,1;37), se pueden construir funciones $\{\Phi_m(\xi)\}_1^n$, pertenecientes a la clase $L_+^2(C^n)$, que, para cada ξ donde $F(\xi)$ está definida, son autovectores de $F(\xi)$ y forman una base ortonormal de C^n.

Para cada punto de la circunferencia unidad donde $F(\xi)$ está definida, las componentes $\Psi_m^i(\xi)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ de los autovectores $\{\Psi_m(\xi)\}_1^n$ son, en virtud de (I,1;38), las soluciones del sistema de n ecuaciones lineales para cada m

$$\sum_{j=1}^{n} G_{ij}(\xi)\ \Psi_m^j(\xi) = \lambda_m(\xi)\ \Psi_m^i(\xi)$$

$(i = 1,2,\dots,n)$

Reescribamos la última ecuación; obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \left(G_{ij}(\xi) - \lambda_m(\xi)\ \delta_{ij}\right) \Psi_m^j(\xi) = 0\ , \qquad (I,1;42)$$

$(i = 1,2,\dots,n)$.

Para cada ξ, donde $F(\xi)$ está definida, las soluciones $\Psi_m^i(\xi)$ de (I,1;42) pueden expresarse en la forma

$$\Psi_m^i(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_m^{ij}(\xi)}{g_m^{ij}(\xi)}\ , \qquad (I,1;43)$$

donde $f_m^{ij}(\xi)$ y $g_m^{ij}(\xi)$ son productos de coeficientes de las ecuaciones del sistema (I,1;42).

Hemos demostrado, en la parte a), que

$$\lambda_m(\xi) = \lim_{|z|\to 1} \lambda_m(z)\ ,\quad \text{p.p. en } |\xi| = 1\ ,$$

$$G_{ij}(\xi) = \lim_{|z|\to 1} G_{ij}(z)\ ,\quad \text{p.p. en } |\xi| = 1\ ,$$

donde $\lambda_m(z)$ y $G_{ij}(z)$ son funciones holomorfas y acotadas en D. Por consiguiente, las funciones $\Psi^i_m(\xi)$, definidas en casi todo punto del contorno por (I,1;43), son límites de funciones de característica acotada en D; es decir

$$\Psi^i_m(\xi) = \lim_{|z|\to 1} \Psi^i_m(z), \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 ,$$

donde $\Psi^i_m(z)$ puede escribirse en la forma (cf. [2], p. 1304)

$$\Psi^i_m(z) = \frac{u^{i1}_m(z)\ \phi^i_m(z)}{u^{i2}_m(z)} ,$$

donde $u^{i1}_m(z)$ y $u^{i2}_m(z)$ son funciones interiores y $\phi^i_m(z)$ es función exterior.

La función interior

$$u_m(z) \overset{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} u^{i2}_m(z)$$

es común denominador de los elementos de $\Psi_m(z)$; por consiguiente

$$\Phi_m(z) \overset{\text{def}}{=} u_m(z)\ \Psi_m(z) \quad (\in H^2(C^n)) \tag{I,1;44}$$

es holomorfa en D. Se verifica entonces

$$\Phi_m(\xi) = \lim_{|z|\to 1} \Phi_m(z) = u_m(\xi)\ \Psi_m(\xi) ,$$

p.p. en $|\xi| = 1$.

En virtud de (I,1;37) y las tres últimas fórmulas concluimos que

$$u_m(\xi)\ F(\xi)\ \Psi_m(\xi) = F(\xi)\ \Phi_m(\xi) = \delta_m(\xi)\ u_m(\xi)\ \Psi_m(\xi) =$$

$$= \delta_m(\xi)\ \Phi_m(\xi), \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \tag{I,1;45}$$

De acuerdo con (I,1;45), las funciones $\{\Phi_m(\xi)\}_1^n$ ($\in L_+^2(C^n)$) son, para cada ξ donde $F(\xi)$ está definida, autovectores de la matriz autoadjunta $F(\xi)$ y, por lo tanto, base de C^n.

Teniendo en cuenta que, por construcción, $|u_m(\xi)| = 1$, p.p. en $|\xi| = 1$, resulta

$$\|\Phi_m(\xi)\| = |u_m(\xi)| \, \|\Psi_m(\xi)\| = \|\Psi_m(\xi)\| \text{ , p.p. en } |\xi| = 1.$$

Recordemos que $\{\Psi_m(\xi)\}_1^n$ es, para cada ξ donde $F(\xi)$ está definida, base ortonormal de C^n;, es decir $\|\Psi_m(\xi)\| = 1$ ($m = 1,2,\ldots,n$), p.p. en $|\xi| = 1$. Concluimos, entonces, que las funciones $\{\Phi_k(\xi)\}_1^n$, que son límite en casi todo punto del contorno de funciones holomorfas y acotadas en D, forman base ortonormal de C^n para cada ξ fijo de la circunferencia, excepto, quizá, un conjunto de medida nula.

Queda, pues, demostrada la parte b) de la tesis.

Queda, así, demostrado el Lema 1-7.

En forma similar se demuestra el

Lema 1-8

Hipótesis.

$S(z) \in S\Pi$.

Tesis.

a) Los autovalores $\delta'_m(\xi)$ de la función matricial

$$F'(\xi) \overset{def}{=} I_n - S(\xi)\, S^*(\xi) \qquad \text{(I,1;46)}$$

son de la forma

$$\delta'_m(\xi) = \frac{\lambda'_m(\xi)}{u'(\xi)} \text{ ,}$$

donde $\lambda'_m(\xi)$ es una función de L^2_+ y $u'(\xi)$ es el valor en casi todo punto del contorno de una función interior.

b) Pueden elegirse autofunciones $\{\phi'_m(\xi)\}_1^n$ de la función matricial $F'(\xi)$ que pertenezcan a $L^2_+(C^n)$.

Lema 1-9

Hipótesis.

$S(z) \in S\Pi$.

Tesis.

Para todo $g(\xi) \in N_\perp$ se verifica $F(\xi)g(\xi) \neq 0$ (p.p. en $|\xi| = 1$), donde $N_\perp$ es el complemento ortogonal de N con respecto a $L^2_+(C^n)$.

Demostración.

Consideremos la función matricial $F(z)$, definida por la fórmula (I,1;22). Hemos visto que para la función escalar $f(z) = \det F(z)$ hay tres casos posibles:

a) $f(\xi) \neq 0$ p.p. en $|\xi| = 1$. De la hipótesis resulta $F(\xi) > 0$ p.p. en $|\xi| = 1$; por consiguiente $N = \{0\}$ y $N_\perp = L^2_+(C^n)$. En este caso la demostración de la tesis es inmediata: para todo $g(\xi) \in L^2_+(C^n)$, $F(\xi)g(\xi) \neq 0$ p.p. en $|\xi| = 1$.

b) $f(z) = 0$ $(z \in D)$ y $S(z)$ es función matricial interior. Este caso no interesa pues $N = L^2_+(C^n)$ y $N_\perp = \{0\}$.

c) $f(z) = 0$ $(z \in D)$ y $S(z)$ no es función matricial interior. Luego $F(\xi) \neq 0$ en un conjunto de medida positiva de la circunferencia unidad. Como $f(z)$ es de característica acotada en D, está definida en el interior del círculo unidad por sus valores de contorno en un conjunto de medida positiva, verificándose

$$f(\xi) = \lim_{|z|\to 1} f(z), \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

Resulta, entonces, $f(\xi) = 0$, p.p. en $|\xi| = 1$. Esto significa que existe una función $h(\xi) \in L^2_+(C^n)$ que verifica $F(\xi)h(\xi) = 0$ p.p. en $|\xi| = 1$; por lo tanto, $h(\xi) \in N$ y $N \neq \{0\}$.

De acuerdo con la definición de N, para una función $g(\xi) \in N\perp$ se cumple

$$F(\xi)\, g(\xi) \neq 0 \;, \quad \xi \in E \;, \tag{I,1;47}$$

donde E es un conjunto de medida positiva de la circunferencia unidad. Pongamos

$$g'(\xi) \overset{\text{def}}{=} G(\xi)\, g(\xi) \;. \tag{I,1;48}$$

En virtud de (I,1;36) obtenemos

$$g'(\xi) \neq 0 \;, \qquad \xi \in E \;. \tag{I,1;49}$$

Como $G(\xi)$ es el valor en casi todo punto del contorno de la función matricial $G(z)$, holomorfa y acotada en D, se verifica

$$G(\xi)\, L^2_+(C^n) \subset L^2_+(C^n) \;.$$

De (I,1;47) y (I,1;49) resulta

$$g'(\xi) \in L^2_+(C^n) \;;$$

por consiguiente

$$g'(\xi) = \lim_{|z|\to 1} g'(z) \;, \quad \text{p.p. en} |\xi| = 1 \;,$$

donde $g'(z) \in H^2(C^n)$. Como $g'(\xi) \neq 0$ en E, entonces $g'(z) \neq 0$ ($z \in D$). En consecuencia

$$g'(\xi) \neq 0 \;, \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 \;. \tag{I,1;50}$$

Por lo tanto, en virtud de (I,1;36), (I,1;48) y (I,1;50) obtenemos

$$F(\xi)\ g(\xi) \ = \ \frac{g'(\xi)}{u(\xi)} \neq 0, \quad \text{p.p.} \quad \text{en } |\xi| = 1.$$

Queda, así, demostrado el Lema 1-9.

En forma similar se demuestra el

Lema 1-10

Hipótesis.

$S(z) \in S\Pi$.

Tesis.

Para toda función $g'(\xi) \in N_{\perp}'$ se verifica $F(\xi)g'(\xi) \neq 0$ en casi todo punto de la circunferencia unidad. $N_{\perp}'$ es el complemento ortogonal de N' con respecto de $L_+^2(C^n)$.

Lema 1-11

Hipótesis.

$g(\xi) \in N\perp \quad (\subset L_+^2(C^n))$.

Tesis.

Para cada ξ donde $F(\xi)$ está definida, $g(\xi) \in N_{\xi\perp}$.

Demostración.

Como $g(\xi) \in N_{\perp}$, del Lema 1-1 concluimos que

$$\langle g(\xi),\ h(\xi)\rangle_{L^2(C^n)} = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi}\langle g(e^{it}),\ h(e^{it})\rangle \quad dt = 0 \ , \qquad \text{(I,1;51)}$$

para toda función $h(\xi) \in \mathbf{N}$.

Admitamos que no se cumple la tesis. Esto es equivalente a afirmar que existe un conjunto E, de medida positiva, contenido en la circunferencia unidad tal que, para cada $\xi \in E$, $g(\xi) \notin N_{\xi\perp}$.

En virtud de (I,1;9) se verifica

$$g(\xi) = g_1(\xi) + g_2(\xi) \qquad (I,1;52)$$

para cada $\xi \in E$, donde $g_1(\xi) \in N_\xi$ y $g_2(\xi) \in N_{\xi\perp}$. Entonces podemos definir funciones $g_1(\xi)$ y $g_2(\xi)$ ($\in L^2_+(C^n)$) que verifiquen (I,1;52).

Sabemos que $g_1(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in E$; por lo tanto,

$$g_1(\xi) = \lim_{|z|\to 1} g_1(z) , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 ,$$

donde $g_1(z) \not\equiv 0$ ($z \in D$) y $g_1(z) \in H^2(C^n)$. Luego $g_1(\xi) \neq 0$ p.p. en $|\xi| = 1$.

Pongamos

$$F(\xi)\, g_1(\xi) \overset{def}{=} g_1'(\xi) . \qquad (I,1;53)$$

Como $g_1(\xi) \in N_\xi$, para cada $\xi \in E$, de la definición de N_ξ resulta

$$F(\xi)\, g_1(\xi) = g_1'(\xi) = 0 , \quad \xi \in E . \qquad (I,1;54)$$

Teniendo en cuenta que $F(\xi)$ es límite en casi todo punto del contorno de una función matricial de característica acotada en D, concluimos que

$$g_1'(\xi) = \lim_{|z|\to 1} g_1'(z) , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1,$$

donde $g_1'(z)$ es una función cuyos elementos son de característica acotada en D y, por consiguiente, está definida por sus valores de contorno en un conjunto de medida positiva. En virtud de (I,1;54) obtenemos

$$g_1'(\xi) = 0 , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 . \qquad (I,1;55)$$

De la definición (I,1;53) y de (I,1;55) resulta

$$F(\xi)\ g_1(\xi) = 0\ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1\ .$$

Es decir,que $g_1(\xi) \in N$ $(\subset L^2_+(C^n))$. Entonces

$$\langle g(\xi),\ g_1(\xi)\rangle_{L^2(C^n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle g(e^{it}),\ g_1(e^{it})\rangle \quad dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|g_1(e^{it})\|^2\, dt \neq 0\ .$$

La expresión anterior contradice (I,1;51). Debe verificarse, entonces, $g_1(\xi) = 0$, p.p. en $|\xi| = 1$ y $g(\xi) \in N_{\xi\perp}$ para casi todo punto del contorno.

Queda, así, demostrado el Lema 1-11.

En forma similar demostramos el

Lema 1-12

Hipótesis.

$g'(\xi) \in N'_\perp$ $(\subset L^2_+(C^n))$.

Tesis.

Para cada ξ donde $F'(\xi)$ está definida, $g'(\xi) \in N'_{\xi\perp}$.

I,2 - Teorema 1-1 (Teorema Fundamental)

Hipótesis.

$S(z) \in S\Pi$.

Tesis.

Existe una representación de $S(\xi)$ de la forma

$$\begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix}\ , \qquad (I,2;1)$$

donde los bloques $S_1(\xi)$ y $S_2(\xi)$, de orden k y n-k (n-k = dim N_ξ), respectivamente, satisfacen a las condiciones

$$I_k - S_1^*(\xi)\, S_1(\xi) \quad > \quad 0 , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1 ;$$

$$I_{n-k} - S_2^*(\xi) S_2(\xi) \quad = \quad 0 , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1 .$$

Demostración.

Para todo ξ de la circunferencia unidad donde $F(\xi)$ está definida resulta, en virtud de los Lemas 1-4, 1-5, y 1-6

$$\dim N_\xi = \dim N'_\xi = n - k \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Para cada ξ fijo ordenaremos en forma decreciente los autovalores $\delta_m(\xi)$ de la matriz hermitiana $F(\xi)$

$$1 \geqslant \delta_1(\xi) \geqslant \delta_2(\xi) \geqslant \ldots\ldots \geqslant \delta_n(\xi) \geqslant 0 .$$

Como dim N_ξ = n-k, teniendo en cuenta la ordenación de los $\delta_m(\xi)$, se verifica (cf. [7], p. 186)

$$\delta_m(\xi) = 0 \qquad \text{para } m = k+1,\ k+2, \ldots, n .$$

Consideremos la base ortonormal de C^n formada por los autovectores $\{\Phi_m(\xi)\}_1^n$ de la matriz autoadjunta $F(\xi)$, definidos por (I,1;44), e introduzcamos la notación

$$\Phi_m(\xi) = \begin{pmatrix} \Phi_{m1}(\xi) \\ \Phi_{m2}(\xi) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_{mn}(\xi) \end{pmatrix} \qquad (m = 1,2,\ldots,n)$$

Construyamos la matriz

$$U_1(\xi) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(\xi) & \Phi_{12}(\xi) & & \Phi_{1n}(\xi) \\ \Phi_{21}(\xi) & \Phi_{22}(\xi) & & \Phi_{2n}(\xi) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{n1}(\xi) & \Phi_{n2}(\xi) & & \Phi_{nn}(\xi) \end{pmatrix} \qquad (I,2;2)$$

Como la base $\{\Phi_m(\xi)\}_1^n$ es ortonormal, resulta

$$U_1^*(\xi)U_1(\xi) = \begin{pmatrix} \|\Phi_1(\xi)\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|\Phi_2(\xi)\|^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|\Phi_n(\xi)\|^2 \end{pmatrix} = I_n .$$

Es decir que, para todo ξ fijo de la circunferencia, excepto, quizá, un conjunto de medida nula, $U_1(\xi)$ es una matriz unitaria.

De acuerdo con la ordenación de los autovalores, las n-k últimas filas de la matriz $U_1(\xi)$ son los autovectores correspondientes al autovalor cero de $F(\xi)$.

Construyamos en forma similar la matriz

$$U_2(\xi) = \begin{pmatrix} \Phi'_{11}(\xi) & \Phi'_{12}(\xi) & & \Phi'_{1n}(\xi) \\ \Phi'_{21}(\xi) & \Phi'_{22}(\xi) & & \Phi'_{2n}(\xi) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi'_{n1}(\xi) & \Phi'_{n2}(\xi) & & \Phi'_{nn}(\xi) \end{pmatrix} , \qquad (I,2;3)$$

donde

$$\Phi'_m(\xi) = \begin{pmatrix} \Phi'_{m1}(\xi) \\ \Phi'_{m2}(\xi) \\ \vdots \\ \Phi'_{mn}(\xi) \end{pmatrix} \qquad (m = 1,2,\dots,n)$$

son los autovectores de la matriz autoadjunta $F'(\xi)$, definida por (I,1;46) en casi todo punto del contorno. Como, para todo ξ donde $F'(\xi)$ está definida $\{\Phi'_m(\xi)\}_1^n$ es base ortonormal de C^n, la matriz $U_2(\xi)$ es unitaria.

Sabemos que $\dim N_\xi = \dim N'_\xi = n-k$; por consiguiente, podemos construir $U_2(\xi)$ en forma tal que las n-k últimas filas sean los autovectores correspondientes al autovalor cero de $F'(\xi)$.

En virtud de los Lemas 1-7 y 1-8, se pueden elegir autofunciones $\{\Phi_m(\xi)\}_1^n$ de $F(\xi)$ y $\{\Phi'_m(\xi)\}_1^n$ de $F'(\xi)$ que pertenezcan a $L^2_+(C^n)$; por lo tanto las funciones matriciales $U_1(\xi)$ y $U_2(\xi)$, definidas en casi todo punto del contorno por las fórmulas (I,2;2) y (I,2;3) verifican, respectivamente,

$$U_1(\xi) = \lim_{|z|\to 1} U_1(z), \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 ;$$

$$U_2(\xi) = \lim_{|z|\to 1} U_2(z), \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 ;$$

donde $U_1(z)$ y $U_2(z)$ son funciones matriciales holomorfas en D que, por construcción, satisfacen a las condiciones

$$\|U_1(\xi)\| = 1 , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 ;$$

$$\|U_2(\xi)\| = 1 . \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 .$$

Es decir, que $U_1(z)$ y $U_2(z)$ son funciones matriciales interiores y, por consiguiente, pertenecen a la clase S.

De la definición de la clase S se concluye que

$$U_1(\xi)\ H^2(C^n) \subset H^2(C^n)\ ,$$

$$U_2(\xi)\ H^2(C^n) \subset H^2(C^n)\ .$$

Podemos identificar el espacio $H^2(C^n)$ con el espacio $L^2_+(C^n)$ (cf. [1], p. 185). Se verifica, entonces

$$U_1(\xi)\ L^2_+(C^n) \subset L^2_+(C^n)\ ,$$

$$U_2(\xi)\ L^2_+(C^n) \subset L^2_+(C^n)\ .$$

Consideremos una función $h(\xi) \in N$ $(\subset L^2_+(C^n))$. Para cada ξ fijo donde $F(\xi)$ está definida, el vector $h(\xi) \in N_\xi$. En virtud del Lema 1-3, se verifica

$$S(\xi)\ h(\xi) = h'(\xi) \in N'_\xi\ . \tag{I,2;4}$$

Expresemos el vector $h(\xi)$ en la base $\{\Phi_m(\xi)\}_1^n$ de autovectores de $F(\xi)$ y el vector $h'(\xi)$ en la base $\{\Phi'_m(\xi)\}_1^n$ de autovectores de $F'(\xi)$.

Pongamos, para cada ξ fijo donde $F(\xi)$ y $F'(\xi)$ están definidas,

$$U_1(\xi)\ h(\xi) \overset{def}{=} x(\xi)\ , \tag{I,2;5}$$

$$U_2(\xi) h'(\xi) \overset{def}{=} x'(\xi)\ , \tag{I,2;6}$$

Por construcción de $U_1(\xi)$ y $U_2(\xi)$, las primeras k componentes de $x(\xi)$ y $x'(\xi)$ son nulas; es decir que, en general, se verifica

$$x(\xi) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \\ \\ x_{k+1}(\xi) \\ x_{k+2}(\xi) \\ \\ \\ \\ x_n(\xi) \end{pmatrix} \tag{I,2;7}$$

$$x_n'(\xi) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{k+1}'(\xi) \\ x_{k+2}'(\xi) \\ \\ \\ x_n'(\xi) \end{pmatrix} \tag{I,2;8}$$

Reemplazando (I,2;5) y (I,2;6) en (I,2;4) obtenemos

$$U_2(\xi)\; S(\xi)\; U_1^{-1}(\xi)\; x(\xi) \quad = \quad x'(\xi)\ . \tag{I,2;9}$$

Introduzcamos la notación

$$S'(\xi) \overset{def}{=} U_2(\xi)\, S(\xi)\, U_1^{-1}(\xi) \overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=} \begin{pmatrix} s'_{11}(\xi) & s'_{12}(\xi) & & s'_{1n}(\xi) \\ s'_{21}(\xi) & s'_{22}(\xi) & & s'_{2n}(\xi) \\ & & & \\ & & & \\ s'_{n1}(\xi) & s'_{n2}(\xi) & & s'_{nn}(\xi) \end{pmatrix} \qquad (I,2;10)$$

Escribamos (I,2;9) en forma matricial, teniendo en cuenta (I,2;7) (I,2;8) y (I,2;10); obtenemos

$$\begin{pmatrix} s'_{11}(\xi) & s'_{12}(\xi) & & s'_{1n}(\xi) \\ s'_{21}(\xi) & s'_{22}(\xi) & & s'_{2n}(\xi) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s'_{n1}(\xi) & s'_{n2}(\xi) & & s'_{nn}(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{k+1}(\xi) \\ x_{k+2}(\xi) \\ \vdots \\ x_n(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x'_{k+1}(\xi) \\ x'_{k+2}(\xi) \\ \vdots \\ x'_n(\xi) \end{pmatrix}$$

De la fórmula anterior concluimos que

$$\begin{pmatrix} s'_{1(k+1)}(\xi) & s'_{1(k+2)}(\xi) & \dots & s'_{1n}(\xi) \\ s'_{2(k+1)}(\xi) & s'_{2(k+2)}(\xi) & \dots & s'_{2n}(\xi) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s'_{k(k+1)}(\xi) & s'_{k(k+2)}(\xi) & \dots & s'_{kn}(\xi) \end{pmatrix} = 0 . \qquad (I,2;11)$$

Consideremos, ahora, una función $g(\xi) \in N_{\perp}$. De acuerdo con la definición de N_{ξ} y en virtud del Lema 1-11, para todo ξ fijo de la circunferencia unidad, excepto, quizá, un conjunto de medida nula, $g(\xi) \in N_{\xi\perp}$.

En virtud del Lema 1-3 se verifica

$$S(\xi)\, g(\xi) = g'(\xi) \in N'_{\xi\perp} . \qquad (I,2;12)$$

De (I,1;9), (I,1;10) y el Lema 1-6, resulta

$$\dim N'_{\xi\perp} = \dim N_{\xi\perp} = k .$$

Expresemos $g(\xi)$ en la base $\{\Phi_m(\xi)\}_1^n$ de autovectores de $F(\xi)$ y $g'(\xi)$ en la base $\{\Phi'_m(\xi)\}_1^n$ de autovectores $F'(\xi)$. Pongamos

$$U_1(\xi)\, g(\xi) \overset{\text{def}}{=} y(\xi) , \qquad (I,2;14)$$

$$U_2(\xi) g'(\xi) \overset{\text{def}}{=} y'(\xi) . \qquad (I,2;15)$$

Teniendo en cuenta la definición (I,2;10) y reemplazando (I,2;14) y (I,2;15) en (I,2;12), obtenemos

$$S'(\xi)\, y(\xi) = y'(\xi) . \qquad (I,2;16)$$

Por construcción de $U_1(\xi)$ y $U_2(\xi)$ y en virtud de (I,2;13), las n-k últimas componentes de $y(\xi)$ e $y'(\xi)$ son nulas. Entonces, en general, $y(\xi)$ e $y'(\xi)$ tendrán la forma

$$y(\xi) = \begin{pmatrix} y_1(\xi) \\ y_2(\xi) \\ \vdots \\ y_k(\xi) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$y'(\xi) = \begin{pmatrix} y_1'(\xi) \\ y_2'(\xi) \\ \vdots \\ y_k'(\xi) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

De (I,2;10), (I,2;16) y las dos fórmulas que preceden concluimos que

$$\begin{pmatrix} s'_{(k+1)1}(\xi) & s'_{(k+1)2}(\xi) & \dots & s'_{(k+1)k}(\xi) \\ s'_{(k+2)1}(\xi) & s'_{(k+2)2}(\xi) & \dots & s'_{(k+2)k}(\xi) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s'_{n1}(\xi) & s'_{n2}(\xi) & & s'_{nk}(\xi) \end{pmatrix} = 0 . \tag{I,2;17}$$

En virtud de (I,2;11) y (I,2;17) podemos escribir

$$S'(\xi) = \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix}, \qquad (I,2;18)$$

donde

$$S_1(\xi) = \begin{pmatrix} s'_{11}(\xi) & s'_{12}(\xi) & s'_{1k}(\xi) \\ s'_{21}(\xi) & s'_{22}(\xi) & s'_{2k}(\xi) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s'_{k1}(\xi) & s'_{k2}(\xi) & s'_{kk}(\xi) \end{pmatrix}, \qquad (I,2;18bis)$$

$$S_2(\xi) = \begin{pmatrix} s'_{(k+1)(k+1)}(\xi) & s'_{(k+1)(k+2)}(\xi) & \ldots\ldots & s'_{(k+1)n}(\xi) \\ s'_{(k+2)(k+1)}(\xi) & s'_{(k+2)(k+2)}(\xi) & \ldots\ldots & s'_{(k+2)n}(\xi) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s'_{n(k+1)}(\xi) & s'_{n(k+2)}(\xi) & \ldots\ldots & s'_{nn}(\xi) \end{pmatrix} \qquad (I,2;18ter)$$

La fórmula (I,2;18) define una función matricial $S'(\xi)$ en casi todo punto del contorno. Para todo ξ fijo de la circunferencia unidad, excepto, quizá, un conjunto de medida nula, se verifican las igualdades (I,2;11) y (I,2;17); por consiguiente vale (I,2;1).

Teniendo en cuenta que $S(z)$, $U_1(z)$ y $U_2(z)$ son funciones matriciales holomorfas y acotadas en D, concluimos que la función $S'(\xi)$, es el límite, en casi todo punto del contorno de una función matricial $S'(z)$ de característica acotada en D.

Demostraremos, a continuación, que el bloque $S_2(\xi)$ satisface a la condición

$$I_{n-k} - S_2^*(\xi)\, S_2(\xi) = 0\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1\ .$$

Sea $h(\xi) \in N$. Pongamos

$$S(\xi)\, h(\xi) \overset{\text{def}}{=} h'(\xi)\ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1\ .$$

De la fórmula anterior resulta

$$\|h'(\xi)\|^2 = \langle h'(\xi),\, h'(\xi)\rangle = \langle S(\xi)\, h(\xi),\, S(\xi)\, h(\xi)\rangle =$$

$$= \langle h(\xi),\, S^*(\xi)\, S(\xi)\, h(\xi)\rangle\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1\ .$$

(I,2;19)

De la definición de N sabemos que $S^*(\xi)S(\xi)h(\xi) = h(\xi)$, p.p. en $|\xi| = 1$. Reemplacemos esta igualdad en (I,2;19); obtenemos

$$\|h'(\xi)\|^2 = \|h(\xi)\|^2\ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \qquad \text{(I,2;20)}$$

Pongamos

$$U_1(\xi)h(\xi) \overset{\text{def}}{=} x(\xi)\ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1, \qquad \text{(I,2;21)}$$

$$U_2(\xi)h'(\xi) \overset{\text{def}}{=} x'(\xi)\ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \qquad \text{(I,2;22)}$$

Las funciones matriciales $U_1(\xi)$ y $U_2(\xi)$, definidas en casi todo punto del contorno por las fórmulas (I,2;2) y (I,2;3) son unitarias, p.p. en $|\xi| = 1$; por lo tanto se verifica

$$\|h(\xi)\|^2 = \|x(\xi)\|^2 , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 ;$$

$$\|h'(\xi)\|^2 = \|x'(\xi)\|^2 , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 .$$

De (I,2;20) y las dos últimas fórmulas resulta

$$\|x'(\xi)\|^2 = \|x(\xi)\|^2 , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 . \qquad (I,2;23)$$

En virtud de (I,2;21), (I,2;22) y de la definición de $S'(\xi)$ en casi todo punto del contorno, dada por la fórmula (I,2;10), concluimos que

$$S'(\xi)\, x(\xi) = x'(\xi) , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 . \qquad (I,2;24)$$

Sabemos, además, de (I,2;18), que

$$S_1(\xi) = S'(\xi)\Big|_{U_1(\xi)N} . \qquad (I,2;25)$$

Por lo tanto, de (I,2;24) y (I,2;25) obtenemos

$$S'(\xi)\, x(\xi) = S_1(\xi)\, x(\xi) , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 . \qquad (I,2;26)$$

Entonces, de (I,2;23) y (I,2;26) resulta

$$\|x'(\xi)\|^2 = \|S_1(\xi)\, x(\xi)\|^2 = \|x(\xi)\|^2 , \text{ p.p. en } |\xi| = 1 ;$$

y, por consiguiente

$$\|S_1(\xi)\| = 1 \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 .$$

Es decir, que $S_1(\xi)$ es unitaria en casi todo punto de la circunferencia.

Se demuestra, en forma similar que $\|S_2(\xi)\| < 1$, p.p. en $|\xi| = 1$.

Queda, así, demostrado el Teorema Fundamental.

Demostraremos a continuación un lema del cual es conclusión casi inmediata el Teorema 1-2.

<u>Lema 1-13</u>

<u>Hipótesis</u>.

i) $S(z) \in S\Pi$.

ii) $S(z)$ es una función matricial real; es decir, $\overline{S(\bar{z})} = S(z)$.

<u>Tesis</u>.

Las funciones matriciales $U_1(\xi)$ y $U_2(\xi)$, definidas en casi todo punto del contorno por las fórmulas (I,1;2) y (I,1;3), respectivamente, son límites de funciones $U_1(z)$ y $U_2(z)$ ($\in H^2(C^n)$) que satisfacen a

$$\overline{U_1(\bar{z})} = U_1(z) \qquad (z \in D) ; \qquad (I,2;27)$$

$$\overline{U_2(\bar{z})} = U_2(z) \qquad (z \in D) . \qquad (I,2;28)$$

<u>Demostración</u>.

Como $S(z)$ ($\in S\Pi$) es real, se verifica

$$\overline{S(\bar{\xi})} = S(\xi) \quad , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 .$$

Por consiguiente, la función matricial $F(\xi)$ satisface a

$$\overline{F(\bar{\xi})} = F(\xi) \quad , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 . \qquad (I,2;29)$$

En virtud de (I,1;45) y (I,2;29) obtenemos

$$F(\xi)\ \overline{\Phi_m(\bar{\xi})} = \overline{\delta_m(\bar{\xi})}\ \overline{\Phi_m(\bar{\xi})}\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \qquad (I,2;30)$$

Para cada ξ donde está definida, $F(\xi)$ es una matriz autoadjunta; entonces

$$\overline{\delta_m(\bar{\xi})} = \delta_m(\bar{\xi})\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \qquad (I,2;31)$$

Reemplacemos (I,2;31) en (I,2;30); obtenemos

$$F(\xi)\ \overline{\Phi_m(\bar{\xi})} = \delta_m(\bar{\xi})\ \overline{\Phi_m(\bar{\xi})}\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \qquad (I,2;32)$$

De acuerdo con (I,1;45) y (I,2;32) $\delta_m(\xi)$ y $\delta_m(\bar{\xi})$ son, respectivamente, soluciones de las ecuaciones

$$\det\left(F(\xi) - \delta_m(\xi)\, I_n\right) = 0\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

$$\det\left(F(\xi) - \delta_m(\bar{\xi})\, I_n\right) = 0\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

En virtud de las dos ecuaciones anteriores concluimos que

$$\delta_m(\xi) = \delta_m(\bar{\xi})\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

En consecuencia

$$F(\xi)\ \overline{\Phi_m(\bar{\xi})} = \delta_m(\xi)\ \overline{\Phi_m(\bar{\xi})}\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

Consideremos las autofunciones $\{\Phi_m(\xi)\}_1^k$ y $\{\overline{\Phi_m(\bar{\xi})}\}_1^k$ de $F(\xi)$ correspondientes a los autovalores $\delta_m(\xi) \neq 0$ $(m = 1,2,\dots,k)$. Para cada m fijo, $\Phi_m(\xi)$ y $\overline{\Phi_m(\bar{\xi})}$ son autofunciones correspondientes al mismo autovalor. Teniendo en cuenta que $\|\Phi_m(\xi)\| = \|\overline{\Phi_m(\bar{\xi})}\|$ (p.p. en $|\xi| = 1$), concluimos que hay dos posibilidades para $\Phi_m(\xi)$:

$$\text{a)} \qquad \Phi_m(\xi) = \overline{\Phi_m(\bar{\xi})} \quad , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 \; ;$$

$$\text{b)} \qquad \Phi_m(\xi) = -\overline{\Phi_m(\bar{\xi})} \quad , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 \; . \qquad (I,2;33)$$

En el primer caso $\Phi_m(\xi)$ es, evidentemente, real. Supongamos ahora que valga b). Como $\Phi_m(\xi)$ puede escribirse en la forma

$$\Phi_m(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{m_k} e^{ikt} \quad , \quad a_{m_k} \in C^n \; ,$$

entonces

$$\overline{\Phi_m(\bar{\xi})} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_{m_k}} \; e^{ikt} \quad .$$

De las igualdades anteriores y de (I,2;33) resulta

$$a_{m_k} = -\overline{a_{m_k}} \quad ;$$

es decir, que los coeficientes a_{m_k} son imaginarios.

Pongamos ahora

$$\Phi^{\circ}_m(\xi) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \Phi_m(\xi) & \text{si} \quad \Phi_m(\xi) = \overline{\Phi_m(\bar{\xi})}, \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1, \\ i\Phi_m(\xi) & \text{si} \quad \Phi_m(\xi) = -\overline{\Phi_m(\bar{\xi})}, \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \end{cases}$$

$(m=1,2,\dots,k)$ (I,2;34)

Vemos, inmediatamente, que las autofunciones $\Phi^{\circ}_m(\xi)$ de $F(\xi)$ $(m=1,2,\dots,k)$ son reales; es decir, que satisfacen a la fórmula

$$\Phi^{\circ}_m(\xi) = \overline{\Phi^{\circ}_m(\bar{\xi})} \quad , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 \; .$$

Consideremos, ahora, las autofunciones $\{\Phi_m(\xi)\}_{k+1}^{n}$ y

$\{\overline{\Phi_m(\bar{\xi})}\}_{k+1}^n$ de $F(\xi)$ correspondientes al autovalor cero.

Sabemos que se verifican las igualdades

$$F(\xi)\ \Phi_m(\xi) = 0\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

$$F(\xi)\ \overline{\Phi_m(\bar{\xi})} = 0\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 \quad (m=k+1,k+2,\dots,n)$$

Hay dos posibilidades con respecto a $\Phi_m(\xi)$

a) $\qquad \Phi_m(\xi) = \overline{\Phi_m(\bar{\xi})}\ , \quad$ p.p. en $|\xi| = 1$;

b) $\qquad \Phi_m(\xi) \neq \overline{\Phi_m(\bar{\xi})}\ , \quad$ p.p. en $|\xi| = 1$.

Pongamos

$$\Phi_m^\circ(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Phi_m(\xi) \quad \text{si} \quad \Phi_m(\xi) = \overline{\Phi_m(\bar{\xi})}\ , & \text{p.p. en } |\xi| = 1; \\ \\ \dfrac{\Phi_m(\xi) + \overline{\Phi_m(\bar{\xi})}}{2} \quad \text{si} \quad \Phi_m(\xi) \neq \overline{\Phi_m(\bar{\xi})}, & \text{p.p. en } |\xi| = 1. \end{cases}$$

$(m=k+1,k+2,\dots,n)$ $\qquad$ (I,2;35)

Es evidente que $\Phi_m^\circ(\xi) = \overline{\Phi_m^\circ(\bar{\xi})}$, p.p. en $|\xi| = 1$. Por consiguiente la función matricial $U_1(\xi)$, construida con las autofunciones $\Phi_m^\circ(\xi)$, definidas por las fórmulas (I,2;34) y (I,2;35), satisface a

$$U_1(\xi) = \overline{U_1(\bar{\xi})}\ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \qquad (I,2;36)$$

Como $\Phi_m^\circ(\xi) \in L_+^2(C^n)$, para $U_1(\xi)$ vale la fórmula

$$U_1(\xi) = \lim_{|z|\to 1} U_1(z)\ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1, \qquad (I,2;37).$$

donde $U_1(z)$ es holomorfa y acotada en D; entonces, en virtud de

(I,2;36) y (I,2;37) resulta (I,2;27).

En forma similar se demuestra la fórmula (I,2;28).

Queda, pues, demostrado el Lema 1-13.

Del Lema que precede resulta inmediatamente el

Teorema 1-2

Si la función $S(z)$ ($\in S\Pi$) es real, entonces la función matricial $S'(\xi)$, definida por la fórmula (I,2;18), es límite en casi todo punto del contorno de una función matricial real.

Este Teorema tiene una aplicación importante en teoría de circuitos porque suministra un procedimiento de síntesis de matrices de scattering, según veremos más adelante.

II - REALIZACION A LA DARLINGTON

II,1. Por realización a la Darlington de una función matricial S(z) de la clase S entendemos la representación de S(z) como transformación lineal fraccionaria

$$S(z) = \big(\alpha(z)\varepsilon + \beta(z)\big)\big(\gamma(z)\varepsilon + \delta(z)\big)^{-1} , \qquad (II,1;1)$$

donde $\varepsilon \in S$ es matriz constante y la matriz de coeficientes

$$A(z) = \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{pmatrix}$$

es j-interior (donde $j = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$).

La ecuación (II,1;1) también puede escribirse en la forma

$$\begin{pmatrix} S(z) \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ I_n \end{pmatrix} \big(\gamma(z)\varepsilon + \delta(z)\big)^{-1} . \qquad (II,1;2)$$

Arov demostró en (2) que una condición necesaria y suficiente para que una función matricial S(z) sea realizable a la Darlington, es que S(z) pertenezca a la clase $S\Pi$.

Hay tres posibilidades con respecto a S(z):

a) S(z) es una función matricial interior;

b) S(z) no es función matricial interior y $\det F(\xi) \neq 0$ en casi todo punto del contorno

c) S(z) no es función matricial interior y $\det F(z) = 0$ $(z \in D)$.

A partir de resultados de Arov y teniendo en cuenta la representación (I,2;18) demostraremos un teorema cuya utilidad reside en dos hechos:

1) Arov, para probar que las matrices $S(z)$ e $S\Pi$ pueden representarse a la Darlington, utiliza tres métodos distintos, según se verifique a), b) o c); en cambio nosotros obtenemos una fórmula única válida para los tres casos.

2) Este teorema permite estudiar el problema de la multiplicidad de representaciones a la Darlington no solo en el caso b) (ya demostrado por Arov) sino también en el caso c), que Arov no resuelve.

Teorema 2-1

Hipótesis.

$S(z)$ e $S\Pi$.

Tesis.

La función matricial $S'(\xi)$, definida en casi todo punto del contorno por la fórmula (I,2;10), puede representarse como transformación lineal fraccionaria

$$S'(\xi) = \left(\alpha'(\xi)\varepsilon + \beta'(\xi)\right)\left(\gamma'(\xi)\varepsilon + \delta'(\xi)\right)^{-1} , \qquad \text{(II,1;3)}$$

donde ε e S es matriz constante y la matriz de coeficientes

$$A'(\xi) = \begin{pmatrix} \alpha'(\xi) & \beta'(\xi) \\ & \\ \gamma'(\xi) & \delta'(\xi) \end{pmatrix}$$

es j-unitaria en casi todo punto del contorno.

Demostración.

La idea de la demostración consiste en:

1) elegir ε de una manera adecuada (fórmula (II,1;4));

2) mostrar, luego, que eligiendo los elementos de la matriz de coeficientes en la forma (II,1;5) el problema está resuelto.

Construiremos la representación (II,1;3) con la matriz constante

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \quad (n-k = \dim N_\xi), \qquad \text{(II,1;4)}$$

y la matriz de coeficientes $A'(\xi)$ formada por los bloques

$$\alpha'(\xi) = \left\{ \begin{pmatrix} \Psi^*(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \left[U_2^{-1}(\xi) + U_1^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & S_2^*(\xi) \end{pmatrix} \right] \right\}^{-1} +$$

$$+ U_2(\xi) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} ;$$

$$\beta'(\xi) = \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \left[U_1^{-1}(\xi) + U_2^{-1}(\xi) \right.\right. .$$

$$. \left.\left. \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} \right] \right\}^{-1} - \frac{1}{2} U_2(\xi) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} ;$$

$$\gamma'(\xi) = \begin{pmatrix} S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & S_2^*(\xi) \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \Psi^*(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \left[U_2^{-1}(\xi) + U_1^{-1}(\xi) \right.\right. .$$

$$. \left.\left. \begin{pmatrix} S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & S_2^*(\xi) \end{pmatrix} \right] \right\}^{-1} - \frac{1}{2} U_1(\xi) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} ;$$

$$\delta'(\xi) = \left\{\begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}\left[U_1^{-1}(\xi) + U_2^{-1}(\xi)\begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix}\right]\right\}^{1} +$$

$$+ \frac{1}{2} U_1(\xi) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} , \qquad \text{(II,1;5)}$$

donde $U_1(\xi)$ y $U_2(\xi)$ son las funciones matriciales definidas en casi todo punto del contorno por las fórmulas (I,2;2) y (I,2;3), respectivamente, y las funciones matriciales $\Theta(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ satisfacen a

$$F_1(\xi) \overset{def}{=} I_k - S_1^*(\xi)S_1(\xi) = \Theta^*(\xi)\Theta(\xi), \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1; \qquad \text{(II,1;6)}$$

$$F_1'(\xi) \overset{def}{=} I_k - S_1(\xi)S_1^*(\xi) = \Psi(\xi)\Psi^*(\xi), \text{ p.p. en } |\xi| = 1. \qquad \text{(II,1;7)}$$

Como $S(z)$ e $S\Pi$, las funciones matriciales no negativas $F_1(\xi)$ y $F_1'(\xi)$ son límites en casi todo punto de la circunferencia unidad de funciones matriciales $F_1(z)$ y $F_1'(z)$, respectivamente, de característica acotada en D. Por consiguiente, el teorema de Matveev asegura que existen soluciones $\Theta(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ de los problemas de factorización (II,1;6) y (II,1;7). Estas soluciones están unívocamente determinadas por las condiciones de normalización $\Theta(0) \geq 0$ y $\Psi(0) \geq 0$; det $\Theta(z)$ y det $\Psi(z)$ son funciones exteriores. Además, $\Theta(\xi)$ y $\Theta(\xi)$ satisfacen a las fórmulas

$$\Theta(\xi) = \lim_{|z|\to 1} \Theta(z) , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1 ;$$

$$\Psi(\xi) = \lim_{|z|\to 1} \Psi(z) , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1 ,$$

donde $\Theta(z)$ y $\Psi(z)$ son funciones matriciales holomorfas y acotadas en D.

Probaremos que se verifica (II,1;3) con ε y $A'(\xi)$ definidas por (II,1;4) y (II,1;5), respectivamente. En efecto

$$S'(\xi)\ \left(\gamma'(\xi)\varepsilon + \delta'(\xi)\right) - \left(\alpha'(\xi)\varepsilon + \delta'(\xi)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & S_2^*(\xi) \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \Psi^*(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \left[U_2^{-1}(\xi) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + U_1^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & S_2^*(\xi) \end{pmatrix} \right] \right\}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} - U_1(\xi)\,\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} +$$

$$+ \left\{ \begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \left[U_1^{-1}(\xi) + U_2^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} \right] \right\}^{-1} +$$

$$+ U_1(\xi)\,\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\} - \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \Psi^*(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left[U_2^{-1}(\xi) + U_1^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} \right] \right\}^{-1} \cdot \right.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\, U_2(\xi) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left.\left. + \left[U_1^{-1}(\xi) + U_2^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} \right] \right\}^{-1} + U_2(\xi)\,\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} S_1(\xi)S_1^*(\xi) - I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \Psi^*(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \left[U_2^{-1}(\xi) \quad + \right.\right.$$

$$+ U_1^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix}\Bigg]\Bigg\}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} = 0, \text{ p.p. en } |\xi| = 1. \tag{II,1;8}$$

Para probar la tesis queda por demostrar que la función matricial $A'(\xi)$ es j-unitaria; es decir, que satisface a la ecuación

$$A'^*(\xi)\, jA'(\xi) - j = 0 , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \tag{II,1;9}$$

La expresión anterior es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones para los bloques de $A'(\xi)$:

$$\alpha'^*(\xi)\, \alpha'(\xi) - \gamma'^*(\xi)\, \gamma'(\xi) = I_n , \tag{II,1;10a}$$

$$\delta'^*(\xi)\, \delta'(\xi) - \beta'^*(\xi)\, \beta'(\xi) = I_n , \tag{II,1;10b}$$

$$\alpha'^*(\xi)\, \beta'(\xi) - \gamma'^*(\xi)\, \delta'(\xi) = 0 , \tag{II,1;10c}$$

en casi todo punto del contorno.

Probaremos que los bloques de la función matricial $A'(\xi)$, definidos por (II,1;5), satisfacen a las ecuaciones (II,1;10a), (II,1;10b) y (II,1;10c).

$$\alpha'^*(\xi)\, \alpha'(\xi) - \gamma'^*(\xi)\, \gamma'(\xi) =$$

$$= \Bigg\{\Bigg\{ \begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Bigg[U_2(\xi) + U_1(\xi) \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix}\Bigg] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}\Bigg\}^{-1} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \frac{1}{2} U_2^{-1}(\xi) \Bigg\} \Bigg\{\Bigg\{ \begin{pmatrix} \Psi^*(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg[U_2^{-1}(\xi) \quad +$$

$$+ \begin{pmatrix} S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & S_2^*(\xi) \end{pmatrix} U_1^{-1}(\xi) \Big]\Big\}^{-1} + U_2(\xi)\,\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Big\} -$$

$$- \Big\{\Big\{\begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Big[U_2(\xi) + \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_1(\xi)\Big] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Big\}^{-1} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} U_1^{-1}(\xi)\,\frac{1}{2}\Big\} \Big\{\Big(\begin{pmatrix} S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & S_2^*(\xi) \end{pmatrix} \Big\{\begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \Big[U_1(\xi) + \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_2(\xi)\Big] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Big\}^{*-1} - \frac{1}{2}\, U_1(\xi) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Big\} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Psi^{-1}(\xi)\,(I_k - S_1(\xi)S_1^*(\xi))\,\Psi^{-1*}(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} \Big\{ \Big[U_2(\xi) + \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_1(\xi)\Big]^{-1} \begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Big\}^{-1}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\Big\{\Big[U_2(\xi) + \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_1(\xi)\Big] \begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Big\}^{*-1} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

$$\delta'^*(\xi)\ \delta'(\xi) - \beta'^*(\xi)\ \beta'(\xi) \ =$$

$$= \left\{\left\{\begin{pmatrix}\Theta(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\left[U_1^{-1}(\xi) + U_2^{-1}(\xi)\begin{pmatrix}S_1(\xi) & 0\\ 0 & S_2(\xi)\end{pmatrix}\right]\right\}^{*-1} +\right.$$

$$+ \left.\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix} U_1^{-1}(\xi)\ \frac{1}{2}\right\}\left\{\left\{\left\{\begin{pmatrix}\Theta(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\left[U_1^{-1}(\xi) \ +\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+ \ U_2^{-1}(\xi)\begin{pmatrix}S_1(\xi) & 0\\ 0 & S_2(\xi)\end{pmatrix}\right]\right\}^{-1} + \frac{1}{2}\,U_1(\xi)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\} \ -$$

$$- \left\{\left\{\begin{pmatrix}\Theta(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\left[U_1^{-1}(\xi) + U_2^{-1}(\xi)\begin{pmatrix}S_1(\xi) & 0\\ 0 & S_2(\xi)\end{pmatrix}\right]\right\}^{*-1}\right.$$

$$\left.\cdot\ \begin{pmatrix}S_1^*(\xi) & 0\\ 0 & S_2^*(\xi)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\,U_2^{-1}(\xi)\right\}\left\{\begin{pmatrix}S_1(\xi) & 0\\ 0 & S_2(\xi)\end{pmatrix}\right\}\left\{\left\{\begin{pmatrix}\Theta(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\left[U_1^{-1}(\xi)+U_2^{-1}(\xi)\begin{pmatrix}S_1(\xi) & 0\\ 0 & S_2(\xi)\end{pmatrix}\right]\right\}^{-1} - \frac{1}{2}\,U_2(\xi)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\} \ =$$

$$= \begin{pmatrix}\Theta^{*-1}(\xi)\left(I_k - S_1^*(\xi)S_1(\xi)\right)\,\Theta^{-1}(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\ \left\{\left\{\begin{pmatrix}\Theta(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right.\right.$$

$$\cdot \left[U_1^{-1}(\xi) + U_2^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} \right]^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\}^{*-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\{ \Bigg(\begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[U_1^{-1}(\xi) + U_2^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} \right]^{-1} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg) \Bigg\}^{-1} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \quad , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

$$\alpha'^*(\xi)\ \beta'(\xi) - \gamma'^*(\xi)\ \delta'(\xi) =$$

$$= \Bigg\{ \Bigg\{ \Bigg(\begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left[U_2(\xi) + \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_1(\xi) \right] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg)^{-1} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \frac{1}{2} U_2^{-1}(\xi) \Bigg\} \Bigg\{ \Bigg(\begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} \Bigg\{ \Bigg(\begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \left[U_2^{-1}(\xi) + U_1^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} \right] \Bigg] \Bigg)^{-1} - \frac{1}{2} U_2(\xi) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg) \Bigg\} -$$

$$- \Bigg\{ \Bigg\{ \Bigg(\begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left[U_2(\xi) + \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_1(\xi) \right] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg) \Bigg\}^{-1}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \frac{1}{2} U_1^{-1}(\xi) \Bigg\} \Bigg\{ \begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \left[U_2^{-1}(\xi) + U_1^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} \right] \Bigg\}^{-1} + \frac{1}{2} U_1(\xi) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\} =$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \left[U_2(\xi) + \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_1(\xi) \right]^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\{ \begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[U_1^{-1}(\xi) + U_2^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} \right]^{-1} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\}^{-1} = 0 , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

Queda, así, demostrado el Teorema 2-1.

II,2. Obtendremos, ahora, la expresión general de una realización a la Darlington, válida para los tres casos, a), b) y c), mencionados en II,1.

Consideremos la fórmula (I,2;10), que relaciona $S'(\xi)$ con $S(\xi)$ en casi todo punto del contorno,

$$S'(\xi) = U_2(\xi)\, S(\xi)\, U_1^{-1}(\xi) .$$

De la expresión anterior resulta inmediatamente

$$S(\xi) = U_2^{-1}(\xi)\ S'(\xi)\ U_1(\xi)\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \qquad (II,2;1)$$

Como consecuencia del Teorema 2-1 sabemos que se verifica

$$S'(\xi) = \left(\alpha'(\xi)\varepsilon + \beta'(\xi)\right)\ \left(\gamma'(\xi)\varepsilon + \delta'(\xi)\right)^{-1}$$

en casi todo punto del contorno, con bloques $\alpha'(\xi)$, $\beta'(\xi)$, $\gamma'(\xi)$ y $\delta'(\xi)$ definidos por las fórmulas (II,1;5) y la matriz ε dada por (II,1;4).

De la ecuación anterior y (II,2;1) obtenemos

$$S(\xi) = U_2^{-1}(\xi)\ \left(\alpha'(\xi)\varepsilon + \beta'(\xi)\right)\left(\gamma'(\xi)\varepsilon + \delta'(\xi)\right)^{-1}\ U_1(\xi) =$$

$$= \left(U_2^{-1}(\xi)\alpha'(\xi)\varepsilon + U_2^{-1}(\xi)\beta'(\xi)\right)\left(U_1^{-1}(\xi)\gamma'(\xi)\varepsilon + U_1^{-1}(\xi)\delta'(\xi)\right)^{-1} ,$$

$$\text{p.p. en } |\xi| = 1 \ ; \qquad (II,2;2)$$

por consiguiente, la expresión (II,2;2) es una transformación lineal fraccionaria de $S(\xi)$ con matriz constante ε (e S) definida por (II,1;4) y matriz de coeficientes $A(\xi) = U(\xi)\ A'(\xi)$, donde

$$U(\xi) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} U_2^{-1}(\xi) & 0 \\ 0 & U_1^{-1}(\xi) \end{pmatrix}$$

y $A'(\xi)$ está formada por los bloques (II,1;5).

Sabemos que, por construcción de $U(\xi)$ y $A'(\xi)$, se verifica

$$A(\xi) = \lim_{|z|\to 1} A(z), \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1, \qquad (II,2;3)$$

donde $A(z) = U(z)\ A'(z) \quad (z \in D)$ (II,2;4) es una función matricial de característica acotada en D.

Pasaremos, ahora, a demostrar el

Teorema 2-2

Hipótesis.

$S(z) \in S\Pi$.

Tesis.

La transformación lineal fraccionaria

$$S(z) = \big(\alpha(z)\varepsilon + \beta(z)\big)\big(\gamma(z)\varepsilon + \delta(z)\big)^{-1} , \qquad (II,2;5)$$

con matriz constante ε ($\in$ S), definida por (II,1;4) y matriz de coeficientes $A(z)$, dada por la fórmula (II,2;4), es una realización a la Darlington de $S(z)$.

Demostración.

Para probar la tesis debemos demostrar que la matriz de coeficientes $A(z)$ de la transformación lineal fraccionaria (II,2;5) es j-expansiva en D y toma valores j-unitarios en casi todo punto de la circunferencia unidad.

Es inmediato ver que $A(\xi)$ es j-unitaria en casi todo punto del contorno. En efecto, sabemos que $U_1(\xi)$ y $U_2(\xi)$ son unitarias por construcción en casi todo punto del contorno; por lo tanto, en virtud del Teorema 2-1, resulta

$$A^*(\xi)jA(\xi) - j = U^*(\xi)\, A'^*(\xi)\, jA'(\xi)\, U(\xi) - j =$$

$$= U^*(\xi)\, jU(\xi) - j = 0 \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 .$$

Como la función matricial $A(\xi)$ es j-unitaria (p.p. en $|\xi| = 1$), para que $A(z)$ sea j-expansiva ($z \in D$) los bloques $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$ y $\delta(\xi)$ deben ser, de acuerdo con el Lema Fundamental, límites en casi todo punto del contorno de funciones matriciales $\alpha(z)$, $\beta(z)$.

$\gamma(z)$ y $\delta(z)$ que satisfagan a las condiciones (0,2), (0,3), (0,4) y (0,5) del Lema Fundamental de Arov.

Probaremos que esto se cumple.

La ecuación (II,2;6) es equivalente al sistema

$$\alpha^*(\xi)\alpha(\xi) - \gamma^*(\xi)\,\gamma'(\xi) = I_n \;; \qquad (II,2;7)$$

$$\delta^*(\xi)\delta(\xi) - \beta^*(\xi)\,\beta(\xi) = I_n \;; \qquad (II,2;8)$$

$$\alpha^*(\xi)\beta(\xi) - \gamma^*(\xi)\,\delta(\xi) = 0 \;; \qquad (II,2;9)$$

en casi todo punto del contorno.

De (II,2;9) resulta

$$\gamma^*(\xi) = \alpha^*(\xi)\,\beta(\xi)\,\delta^{-1}(\xi)\,, \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1\,.$$

Reemplazando esta igualdad en (II,2;7) obtenemos

$$\alpha^*(\xi)\,\left(\alpha(\xi) - \beta(\xi)\,\delta^{-1}(\xi)\,\gamma(\xi)\right) = I_n\,, \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

De la fórmula anterior y (0,2) concluimos que

$$a(\xi) = \alpha^{-1*}(\xi)\,, \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

por consiguiente

$$a(\xi) = \left\{U_2^{-1}(\xi)\begin{pmatrix}\Psi(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \left[U_2(\xi) + \begin{pmatrix}S_1(\xi) & 0\\ 0 & S_2(\xi)\end{pmatrix}U_1(\xi)\right]\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}^{-1} +$$

$$+\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}^{*-1} =$$

$$= \left\{\left\{U_2^{-1}(\xi)\begin{pmatrix}\Psi(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + (I_n + S(\xi))\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}^{-1}\left\{I_n +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\left\{U_2^{-1}(\xi)\begin{pmatrix}\Psi(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + (I_n + S(\xi))\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}^{-1} =$$

$$= \left\{I_n + \frac{1}{2}\left\{U_2^{-1}(\xi)\begin{pmatrix}\Psi(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + (I_n + S(\xi))\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}^{-1}$$

$$\cdot\left\{U_2^{-1}(\xi)\begin{pmatrix}\Psi(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + (I_n + S(\xi))\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}, \text{ p.p. en } |\xi| = 1.$$

Entonces

$$a(z) = \left\{I_n + \left\{U_2^{-1}(z)\begin{pmatrix}\Psi(z) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + (I_n + S(z))\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}^{-1}\left\{U_2^{-1}(z)\begin{pmatrix}\Psi(z) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + (I_n + S(z))\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{I_n + (I_n + S(z))\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}^{-1}$$

$$\cdot \left\{ U_2^{-1}(z) \begin{pmatrix} \Psi(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (I_n + S(z)) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \right\} \quad . \qquad (II,2;10)$$

Veremos que los elementos del primer factor de (II,2;10) son funciones exteriores y el segundo factor es una función matricial holomorfa y acotada en D.

Sin restricción de la generalidad podemos admitir que la unidad no es autovalor de $- S(z)$ (cf. [2], p. 1310) para $z \in D$; por lo tanto, la unidad no es autovalor de

$$- (I_n + S(z)) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

Entonces $$I_n + (I_n + S(z)) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

es inversible para todo $z \in D$. En virtud del Lema 3-1 de Arov (cf. [2], p. 1313), los elementos del primer factor de (II,2;10) son funciones exteriores.

Consideremos el segundo factor del tercer miembro de (II,2;10). Es evidente que $(I_n + S(z)) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$ es una función matricial holomorfa y acotada en D, pues $S(z) \in S$. Debemos probar que el término $U_2^{-1}(z) \begin{pmatrix} \Psi(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es función matricial holomorfa en D. Sea $b_1(z)$ una función escalar interior que es común denominador de los elementos de la función matricial de característica acotada $U_2^{-1}(z)$. Si $\Psi_o(\xi)$ es una función matricial solución del problema de factorización (II,1;7) que satisface a las condiciones de normalización, $\psi(\xi) \overset{def}{=} \psi_o(\xi)\, b_1(\xi)$ también es solución de (II,1;7) y satisface a las mismas condiciones. La función $\psi(\xi)$ verifica, además

$$\psi(\xi) = \lim_{|z|\to 1} \psi(z) , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1 ,$$

donde $\psi(z) = \psi_o(z)\, b_1(z)$ es holomorfa y acotada en D. Entonces, los elementos de la función matricial

$$U_2^{-1}(z) \begin{pmatrix} \psi(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son funciones escalares de la clase N_o. Concluimos que $a(z) \in N_o$.

Consideremos el bloque

$$d(\xi) = \delta^{-1}(\xi) =$$

$$= \left\{ U_1^{-1}(\xi) \left\{ \begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \right] \left[U_1^{-1}(\xi) + U_2^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} \right] \right\}^{-1} +$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\}^{-1} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1(\xi) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(\xi)) \right\} \Bigg\{ I_n +$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(\xi)) \Bigg\}^{-1} , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

Luego

$$d(z) = \left\{ \begin{pmatrix} \theta(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1(z) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(z)) \right\} \left\{ I_n + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(z)) \right\}^{-1} \quad (z \in D). \qquad (II,2;11)$$

Es evidente que el primer factor de (II,2;11) es una función matricial holomorfa y acotada en D. Podemos ver fácilmente que los elementos del segundo factor son funciones exteriores. Admitiendo que la unidad no es autovalor de $- S(z)$, la función $I_n + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(z))$ resulta inversible y, por lo tanto, en virtud del Lema 3-1 de (2), todos los elementos del segundo factor de (II,2;11), son funciones de N_o. Luego, la función matricial $d(z) \in N_o$.

Consideremos el bloque $b(z)$. Sabemos que

$$b(\xi) = \beta(\xi)\, \delta^{-1}(\xi), \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

Teniendo en cuenta (II,2;11), por medio de sencillos cálculos, obtenemos

$$b(\xi) = U_2^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_1^{-1}(\xi) \left\{ I_n - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} \theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1(\xi) + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(\xi)) \right\}\Bigg\} \left\{ I_n + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(\xi)) \right\}^{-1},$$

p.p. en $|\xi| = 1$. Por lo tanto

$$b(z) = U_2^{-1}(z)\begin{pmatrix} S_1(z) & 0 \\ 0 & S_2(z)\end{pmatrix} U_1(z)\left\{I_n - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}\left\{\begin{pmatrix} \Theta(z) & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} U_1(z) +\right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}(I_n + S(z))\right\}\left\{I_n + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}(I_n + S(z))\right\}^{-1} =$$

$$= S(z)\left\{I_n - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}\left\{\begin{pmatrix} \Theta(z) & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} U_1(z) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}(I_n + S(z))\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{I_n + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}(I_n + S(z))\right\}^{-1} \quad (z \in D). \qquad \text{(II,2;12)}$$

Se ve inmediatamente que el primer factor de (II,2;12) es una función matricial holomorfa y acotada en D. Hemos demostrado más arriba que los elementos del segundo factor son funciones escalares exteriores; por consiguiente los elementos de b(z) pertenecen a la clase N_0 y $b(z) \in N_0$.

Por último consideremos el bloque

$$c(\xi) = \delta^{-1}(\xi)\,\gamma(\xi) =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} U_1(\xi) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}(I_n + S(\xi))\right\}\left\{I_n + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right. .$$

$$. \left(I_n + S(\xi)\right)\Bigg\}^{-1} \Bigg\{ U_1(\xi) \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} \Bigg] \Bigg\{ \begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Bigg[U_2(\xi) +$$

$$+ \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_1(\xi) \Bigg] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\}^{*-1} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\} \quad ,$$

p.p. en $|\xi| = 1.$ (II,2;13)

El segundo miembro de (II,2;13) es la suma de dos términos que designaremos con la siguiente notación:

$$c_1(\xi) \overset{\text{def}}{=} \Bigg\{ \begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1(\xi) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(\xi)) \Bigg\} \Bigg\{ I_n + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} .$$

$$. \left(I_n + S(\xi)\right)\Bigg\}^{-1} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \qquad \text{(II,2;14)}$$

$$c_2(\xi) \overset{\text{def}}{=} \Bigg\{ \begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1(\xi) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(\xi)) \Bigg\} \Bigg\{ I_n + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} .$$

$$. \left(I_n + S(\xi)\right)\Bigg\}^{-1} U_1(\xi) \begin{pmatrix} S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & S_2^*(\xi) \end{pmatrix} \Bigg\{ \begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + U_2(\xi) +$$

$$+ \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_1(\xi) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\}^{*-1}, \quad \text{p.p. en} \quad |\xi| = 1. \qquad (II,2;15)$$

Teniendo en cuenta que, según hemos demostrado, $d(z) \in N_o$, concluimos que

$$c_1(z) = d(z)\, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \in N_o. \qquad (II,2;16)$$

Probaremos que el término $c_2(\xi)$ es límite en casi todo punto de la circunferencia unidad de una función matricial $c_2(z)$ $(z \in D)$ de la clase N_o.

Reemplacemos en (II,2;15) la igualdad

$$\left\{ I_n + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(\xi)) \right\}^{-1} = I_n - \left\{ I_n + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(\xi)) \right\}^{-1} .$$

$$. \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(\xi)), \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

obtenemos

$$c_2(\xi) = \left\{ \begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1(\xi) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(\xi)) \right\} U_1(\xi) \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} .$$

$$. \left\{ \begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left[U_2(\xi) + \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_1(\xi) \right] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \right\}^{*-1} -$$

$$- \left\{ \begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1(\xi) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(\xi)) \right\} \left\{ I_n + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, (I_n + S(\xi)) \right\}^{-1} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(\xi))\, U_1^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & S_2^*(\xi) \end{pmatrix}$$

$$\cdot \left\{ \begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left[U_2(\xi) + \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_1(\xi) \right] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \right\}^{*-1} ,$$

p.p. en $|\xi| = 1.$ (II,2;17)

Introduzcamos la siguiente notación:

$$c_2(\xi) = c_3(\xi) + c_4(\xi) ,$$

donde

$$c_3(\xi) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1(\xi) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} (I_n + S(\xi)) \right\} U_1(\xi) \begin{pmatrix} S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & S_2^*(\xi) \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left[U_2(\xi) + \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_1(\xi) \right] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \right\}^{-1} ,$$

p.p. en $|\xi| = 1$; (II,2;18)

$$c_4(\xi) \overset{\text{def}}{=} \left\{\left[\begin{pmatrix}\Theta(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} U_1(\xi) + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right](I_n + S(\xi))\right\}\left\{I_n + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right. \cdot$$

$$\cdot \left.(I_n + S(\xi))\right\}^{-1} \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix} U_1^{-1}(\xi)\begin{pmatrix}S_1^*(\xi) & 0\\ 0 & S_2^*(\xi)\end{pmatrix}\left\{\left[\begin{pmatrix}\Psi(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right.\right. +$$

$$+ \left.\left[U_2(\xi) + \begin{pmatrix}S_1(\xi) & 0\\ 0 & S_2(\xi)\end{pmatrix} U_1(\xi)\right] \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}^{*-1}, \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \tag{II,2;19}$$

Consideremos el término $c_4(\xi)$.

$$c_4(\xi) = d(\xi)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix} U_1^{-1}(\xi)\begin{pmatrix}S_1^*(\xi) & 0\\ 0 & S_2^*(\xi)\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}\Psi(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \left[U_2(\xi) +\right.\right.$$

$$+ \left.\left.\begin{pmatrix}S_1(\xi) & 0\\ 0 & S_2(\xi)\end{pmatrix} U_1(\xi)\right] \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}^{*-1}, \text{ p.p. en } |\xi| = 1. \tag{II,2;20}$$

Sabemos que $d(\xi) = \lim\limits_{|z| \to 1} d(z)$, p.p. en $|\xi| = 1$, donde $d(z) \in N_o$; debemos demostrar que el factor

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}(I_n + S(\xi))\ U_1^{-1}(\xi)\begin{pmatrix}S_1^*(\xi) & 0\\ 0 & S_2^*(\xi)\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}\Psi(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \left[U_2(\xi) +\right.\right.$$

$$+ \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_1(\xi) \Bigg] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\}^{*-1} \qquad (II,2;21)$$

es límite en casi todo punto del contorno de una función matricial de la clase N_0.

Por medio de sencillos cálculos el factor dado por la fórmula (II,2;21) resulta igual a

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\{ \Bigg[U_2^{-1}(\xi) + U_1^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & S_2^*(\xi) \end{pmatrix} \Bigg] - U_2^{-1}(\xi) \; I_n -$$

$$- \begin{pmatrix} S_1(\xi)S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\} \Bigg\{ \begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Bigg[U_2(\xi) + \begin{pmatrix} S_1(\xi) & 0 \\ 0 & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_1(\xi) \Bigg] \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\}^{*-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\{ \begin{pmatrix} \Psi^*(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg[U_2^{-1}(\xi) + U_1^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & S_2^*(\xi) \end{pmatrix} \Bigg] +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \Bigg\}^{-1} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} U_2^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}\left[I_n - U_2^{-1}(\xi)\begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right], \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \tag{II,2;22}$$

Luego

$$c_4(z) = d(z)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}\left[I_n - U_2^{-1}(z)\begin{pmatrix} \Psi(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \quad (z \in D). \tag{II,2;23}$$

Habíamos visto que podíamos elegir $\Psi(z) = b_1(z)\,\Psi_o(z)$ $(z \in D)$, donde $b_1(z)$ es una función escalar interior, común denominador de los elementos de $U_2^{-1}(z)$ y $\Psi_o(z)$ es solución del problema de factorización (II,1;7). Concluimos entonces que la función matricial

$$U_2^{-1}(z)\begin{pmatrix} \Psi(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es holomorfa y acotada en D; por lo tanto

$$c_4(z) \in N_o\ . \tag{II,2;24}$$

Consideremos el término $c_3(\xi)$, definido por la fórmula (II,2;18). Por medio de sencillos cálculos obtenemos

$$c_3(\xi) = \begin{pmatrix} \Theta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & S_2^*(\xi) \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} \Psi(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left[U_2(\xi) + \begin{pmatrix} S_1(\xi) & \\ & S_2(\xi) \end{pmatrix} U_1(\xi)\right] \cdot\right.$$

$$\left. \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}\right\}^{-1\,*} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}\left(I_n + S(\xi)\right)\, U_1^{-1}(\xi)\begin{pmatrix} S_1^*(\xi) & 0 \\ 0 & S_2^*(\xi) \end{pmatrix}$$

$$\cdot\left\{\begin{pmatrix}\Psi(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \left[U_2(\xi) + \begin{pmatrix}S_1(\xi) & 0\\ 0 & S_2(\xi)\end{pmatrix} U_2(\xi)\right]\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\right\}^{-1*},$$

p.p. en $|\xi| = 1.$ (II,2;25)

Consideremos el primer término de (II,2;25)

$$\begin{pmatrix}\Theta(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_1(\xi) & 0\\ 0 & S_2(\xi)\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}\Psi^*(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}\left[U_2^{-1}(\xi)+U_1^{-1}(\xi).\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\begin{pmatrix}S_1^*(\xi) & 0\\ 0 & S_2^*(\xi)\end{pmatrix}\right]\right\}^{-1} = \begin{pmatrix}\Theta(\xi)S_1^*(\xi)\Psi^{*-1}(\xi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

p.p. en $|\xi| = 1.$ (II,2;26)

La función matricial definida por (II,2;26) es límite en casi todo punto del contorno de la función

$$\begin{pmatrix}\Theta(z)S_1^*(\frac{1}{\bar z})\Psi^{*-1}(\frac{1}{\bar z}) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (z \in D),$$

de característica acotada en D. Sea $b_2(z)$ una función escalar interior que es común denominador de $S_1^*(\frac{1}{\bar z})\ \Psi^{*-1}(\frac{1}{\bar z})$. Si $\Theta_\circ(\xi)$ es una función matricial solución del problema de factorización (II,1;6) que satisface a las condiciones de normalización, $\Theta(\xi) = b_2(\xi)\ \Theta_\circ(\xi)$ también es solución de (II,1;6) y satisface a las mismas condiciones.

$\Theta(\xi)$ verifica, además

$$\Theta(\xi) = \lim_{|z| \to 1} \Theta(z) , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1 ,$$

donde $\Theta(z)$ es holomorfa y acotada en D. Entonces $\Theta(z)S_1^*(\frac{1}{\bar{z}})\Psi^{*^{-1}}(\frac{1}{\bar{z}})$ es de la clase N_o.

Hemos demostrado más arriba que el segundo término de (II,2;25) es límite en casi todo punto del contorno de una función matricial de la clase N_o. Por lo tanto, $c_3(z) \in N_o$.

Concluimos entonces que $c(z) \in N_o$. Luego, la matriz de coeficientes A(z), dada por la fórmula (II,2;4) es j-interior y la transformación lineal fraccionaria (II,2;5) es una realización a la Darlington.

Queda, así, demostrado el Teorema 2-2.

III - MULTIPLICIDAD DE LAS REALIZACIONES

La realización a la Darlington de una función matricial $S(z) \in S\Pi$ no es única. Tiene importancia, tanto desde el punto de vista teórico como desde el punto de vista práctico (síntesis de un n-puerto de matriz S(z) prefijada), la determinación de las infinitas soluciones del problema (esto es lo que Cauer llamó, en el caso de circuitos de matriz de reactancia prefijadas, el <u>problema de equivalencia</u> [8]).

Arov ha resuelto el problema de la multiplicidad en un caso particular; nosotros generalizamos el resultado de Arov, obteniendo una fórmula válida, también, para el caso c), que Arov no resuelve. Es nuestra fórmula (III,2;17), que obtenemos utilizando, esencialmente, el Teorema Fundamental (Teorema 1-1).

Este es el principal resultado del capítulo III. Comenzamos demostrando tres lemas preparatorios (lema 3-1; lema 3-2 y lema 3-3), como consecuencia de los cuales y del Teorema Fundamental llegamos a las fórmulas (III,2;16) y (III,2;17) que resuelven nuestro problema. Mostramos, luego, que como caso particular de estas dos fórmulas se obtiene el resultado de Arov.

III,1. Sea

$$S(z) = \left(\alpha(z)\varepsilon + \beta(z)\right)\left(\gamma(z)\varepsilon + \delta(z)\right)^{-1},$$

$$A(z) = \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{pmatrix} \qquad \text{(III,1;1)}$$

una realización arbitraria de $S(z)$ con matriz constante ε y matriz de coeiicientes $A(z)$.

Como ε e S las matrices

$$F \overset{\text{det}}{=} I_n - \varepsilon^*\varepsilon \ ,$$

$$F' \overset{\text{def}}{=} I_n - \varepsilon\varepsilon^* \ ,$$

son hermitianas no negativas.

El espacio C^n puede descomponerse en la forma (cf. [1], p. 7)

$$C^n = \ker F + \ker_\perp F \ ;$$

$$C^n = \ker F' + \ker_\perp F' \ .$$

Del Lema 1-3 resulta

$$\varepsilon \ker F = \ker F' \ ;$$

$$\varepsilon \ker_\perp F \subset \ker_\perp F' \ .$$

Sea $r = \dim \operatorname{rg} F$ y V_1 y V_2 las matrices unitarias que diagona lizan, respectivamente, F y F'. En virtud del Teorema Fundamental, la matriz

$$\varepsilon' \overset{def}{=} V_c \ \varepsilon \ V_1^{-1} \tag{II,1;2}$$

puede escribirse en la forma

$$\varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} , \tag{II,1;3}$$

donde los bloques ε_1, de orden r, y ε_2, de orden n-r, satisfacen a las condiciones

$$\|\varepsilon_1\| < 1; \qquad \|\varepsilon_2\| = 1 .$$

Consideremos la transformación lineal fraccionaria

$$\varepsilon' = (\alpha_{\varepsilon'} \varepsilon_o + \beta_{\varepsilon'})(\gamma_{\varepsilon'} \varepsilon_o + \delta_{\varepsilon'})^{-1} ,$$

donde

$$\varepsilon_o = \begin{pmatrix} 0_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} ; \tag{II,1;4}$$

mostraremos que la matriz de coeficientes

$$U_{\varepsilon'} = \begin{pmatrix} \alpha_{\varepsilon'} & \beta_{\varepsilon'} \\ \gamma_{\varepsilon'} & \delta_{\varepsilon'} \end{pmatrix} ,$$

cuyos elementos están definidos por las fórmulas a continuación consignadas, es j-unitaria:

$$\alpha_{\varepsilon'} = \begin{pmatrix} F'^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \beta_{\varepsilon'} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 F^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ;$$

$$\gamma_{\varepsilon'} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^* F'^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \delta_{\varepsilon'} = \begin{pmatrix} F^{-1/2} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \tag{III,1;5}$$

Pasaremos a demostrar esta aserción.

En virtud de (III,1;2) y teniendo en cuenta que V_1 y V_2 son matrices unitarias concluimos que

$$\varepsilon = (\alpha_\varepsilon \, \varepsilon_o + \beta_\varepsilon)(\gamma_\varepsilon \, \varepsilon_o + \delta_\varepsilon)^{-1} \quad , \tag{III,1;6}$$

donde

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} \alpha_\varepsilon & \beta_\varepsilon \\ \gamma_\varepsilon & \delta_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2^{-1} & 0 \\ & V_1^{-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \alpha_{\varepsilon'} & \beta_{\varepsilon'} \\ \gamma_{\varepsilon'} & \delta_{\varepsilon'} \end{pmatrix} . \tag{III,1;7}$$

Como $U_{\varepsilon'}$ es j-unitaria la matriz U_ε también resulta j-unitaria.

De (III,1;1) y (III,1;6) obtenemos

$$S(z) = (\alpha_o(z) \, \varepsilon_o + \beta_o(z))(\gamma_o(z) \, \varepsilon_o + \delta_o(z))^{-1} \quad , \tag{III,1;8}$$

$$A_o(z) = \begin{pmatrix} \alpha_o(z) & \beta_o(z) \\ \gamma_o(z) & \delta_o(z) \end{pmatrix} \overset{def}{=} A(z) \, U_\varepsilon \, . \tag{III,1;9}$$

Del Teorema Fundamental sabemos que, en casi todo punto de la circunferencia unidad, se verifica

$$S'(\xi) = U_2(\xi)\, S(\xi)\, U_1^{-1}(\xi) ,$$

donde $S'(\xi)$ es el valor de contorno de una función matricial $S'(z)$, de característica acotada en D, y puede escribirse en la forma (I,2;18).

De la fórmula anterior y (III,1;7) obtenemos

$$S'(\xi) = \left(\alpha'(\xi)\,\varepsilon_0 + \beta'(\xi)\right)\left(\gamma'(\xi)\,\varepsilon_0 + \delta'(\xi)\right)^{-1} , \qquad \text{(III,1;10)}$$

p.p. en $|\xi| = 1$, donde

$$A'(\xi) = \begin{pmatrix} \alpha'(\xi) & \beta'(\xi) \\ \gamma'(\xi) & \delta'(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2(\xi) & 0 \\ 0 & U_1(\xi) \end{pmatrix} . A_0(\xi), \qquad \text{(III,1;11)}$$

p.p. en $|\xi| = 1$.

Como $A_0(\xi)$ es j-unitaria y las funciones $U_1(\xi)$ y $U_2(\xi)$ son unitarias en casi todo punto del contorno, concluimos que

$$A'^*(\xi)\, jA'(\xi) - j = 0 , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1; \qquad \text{(III,1;12)}$$

lo cual demuestra el Lema.

Lema 3-1

Hipótesis.

1) $S(z) \in S\Pi$.

2) $N = L_+^2(C^n)$.

Tesis.

$\dim \ker F = n$.

Demostración.

Sea r = dim ker F. Admitamos que la tesis no se cumple; es decir que $r \neq n$.

Como $L^2_+(C^n) = N$, teniendo en cuenta (III,1;8) y la definición de N, concluimos que para todo $h(\xi) \in L^2_+(C^n)$ se verifica

$$F(\xi)h(\xi) = \left(\gamma_o(\xi)\varepsilon_o + \delta_o(\xi)\right)^{*-1}(I_n - \varepsilon_o^*\varepsilon_o)\left(\gamma_o(\xi)\varepsilon_o + \delta_o(\xi)\right)^{-1}h(\xi) = 0,$$

p.p. en $|\xi| = 1$. (III,1;13)

Introduzcamos la notación

$$w(\xi) \overset{\text{def}}{=} \left(\gamma_o(\xi)\ \varepsilon_o + \delta_o(\xi)\right)^{-1}. \tag{III,1;14}$$

Como r = dim ker F, de (III,1;5) resulta

$$I_n - \varepsilon_o^*\ \varepsilon_o = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} \tag{III,1;15}$$

Reemplacemos (III,1;14) y (III,1;15) en (III,1;13); obtenemos

$$F(\xi)h(\xi) = w^*(\xi) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} w(\xi)h(\xi) = 0, \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

De la hipótesis 2) y de la definición de N sabemos que para todo $h(\xi) \in L^2_+(C^n)$, $S(\xi)h(\xi) \neq 0$, p.p. en $|\xi| = 1$; por lo tanto $w(\xi)$ está definida en casi todo punto del contorno.

Consideremos una función $h(\xi) \in L^2_+(C^n)$ de la forma

$$h(\xi) = \begin{pmatrix} h_1(\xi) \\ h_2(\xi) \\ \vdots \\ h_r(\xi) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que

$$\left(\gamma_0(\xi)\varepsilon_0 + \delta_0(\xi)\right) h(\xi) = h'(\xi) \neq 0, \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \qquad (III,1;17)$$

Como $\gamma_0(\xi)\varepsilon_0 + \delta_0(\xi)$ es el límite, en casi todo punto de la circunferencia unidad, de una función matricial de característica acotada en D, se verifica

$$h'(\xi) = \lim_{|z| \to 1} h'(z) , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 ,$$

donde $h'(z)$ es una función, que toma valores en C^n, cuyos elementos son funciones escalares de característica acotada en D. Llamaremos $b_1(z)$ a la función escalar interior que es común denominador de los elementos de $h'(z)$. Entonces

$$b_1(\xi)\, h'(\xi) \in L^2_+ (C^n) ;$$

por consiguiente, de (III,1;17) obtenemos

$$F(\xi)b_1(\xi)h'(\xi) = w^*(\xi) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} w(\xi)b_1(\xi)h'(\xi) =$$

$$= w^*(\xi)b_1(\xi)h(\xi) \neq 0 , \text{ p.p. en } |\xi| = 1. \qquad (III,1;18)$$

La fórmula (III,1;18) contradice la hipótesis 2). Debe verificarse, entonces, dim ker F = n.

Queda, así, demostrado el Lema 3-1.

Lema 3-2

Hipótesis.

1) $S(z) \in S\Pi$.

2) $N_{\perp} = L^2_+(C^n)$.

Tesis.

dim ker F = 0.

Demostración.

Sea r = dim ker F. Admitamos que la tesis no se cumple; es decir, que $r \neq 0$.

Sabemos, por hipótesis, que para todo $g(\xi) \in L^2_+(C^n)$, $g(\xi) \in N_{\perp}$; por lo tanto, en virtud de (I,1;1), (III,1;13), (III,1;14) y (III,1;15), resulta

$$F(\xi)g(\xi) = w^*(\xi) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} w(\xi)g(\xi) \neq 0, \text{ p.p. en} |\xi| = 1. \quad (III,1;19)$$

De la fórmula anterior concluimos que $w(\xi)g(\xi) \neq 0$, p.p. en $|\xi| = 1$, para todo $g(\xi) \in L^2_+(C^n)$.

Consideremos una función $g(\xi) \in L^2_+(C^n)$ de la forma

$$g(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{r+1}(\xi) \\ g_{r+2}(\xi) \\ \vdots \\ g_n(\xi) \end{pmatrix} \quad (III,1;20)$$

Sabemos que la función matricial $(\gamma_o(\xi)\varepsilon_o + \delta_o(\xi))$ está definida en casi todo punto de la circunferencia unidad; por lo tanto, de (III,1;19) resulta

$$(\gamma_o(\xi)\varepsilon_o + \delta_o(\xi))\ g(\xi) = g'(\xi) \neq 0, \text{ p.p. en } |\xi| = 1. \quad \text{(III,1;21)}$$

Como $(\gamma_o(\xi)\varepsilon_o + \delta_o(\xi)$ es límite, en casi todo punto del contorno, de una función matricial de característica acotada en D, se verifica

$$g'(\xi) = \lim_{|z|\to 1} g'(z), \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1,$$

donde $g'(z)$ es una función, que toma valores en C^n, cuyos elementos son funciones escalares de característica acotada en D. Llamaremos $b_2(z)$ a la función escalar interior que es común denominador de todos los elementos de $g'(z)$. Entonces

$$b_2(\xi)\ g'(\xi) \in L^2_+(C^n)\ .$$

De las fórmulas (III,1;20) y (III,1;21) concluimos que

$$F(\xi)b_2(\xi)g'(\xi) = w^*(\xi) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} w(\xi)b_2(\xi)g'(\xi) = 0\ ,$$

p.p. en $|\xi| = 1$.

La igualdad anterior contradice la hipótesis 2). Debe verificarse, entonces, dim ker F = 0.

Queda, así, demostrado el Lema 3-2.

Introduzcamos la notación

$$\dim N_\xi = n - k\ .$$

Lema 3-3

Hipótesis.

1) $S(z) \in S\Pi$.

2) $N \neq \emptyset$ y $N_\perp \neq \emptyset$.

Tesis.

$\dim \ker F = n - k$.

Demostración.

Introduzcamos la notación

$$w'(\xi) \overset{\text{def}}{=} \left(\gamma'(\xi)\varepsilon_0 + \delta'(\xi)\right)^{-1} = w(\xi)\, U_1^{-1}(\xi)\ , \qquad \text{(III,1;22)}$$

p.p. en $|\xi| = 1$, donde la función matricial $U_1(\xi)$, definida por la fórmula (I,2;2) es, por construcción, unitaria en casi todo punto del contorno.

De las fórmulas (I,2;10), (III,1;16) y (III,1;22) obtenemos

$$\left(I_n - S'^*(\xi)S'(\xi)\right) x(\xi) = w'^*(\xi) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} w'(\xi)x(\xi) = 0\ ,$$

p.p. en $|\xi| = 1$, donde $x(\xi)$ está definida, en casi todo punto del contorno, por (I,2;5) y se puede escribir, en general, en la forma (I,2;7).

Como $\left(\gamma'(\xi)\varepsilon_0 + \delta'(\xi)\right)$ y $w'(\xi)$ no son funciones matriciales singulares, debe verificarse, en virtud de (III,1;3)

$$\begin{pmatrix} I_r - \varepsilon_1^*\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} w'(\xi)x(\xi) = 0. \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \qquad \text{(III,1;23)}$$

Admitamos que la tesis no se cumple; es decir que $r \neq k$, e introduzcamos la notación

$$w'(\xi) = \begin{pmatrix} w'_{11}(\xi) & w'_{12}(\xi) \\ w'_{21}(\xi) & w'_{22}(\xi) \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma'(\xi) = \begin{pmatrix} \gamma'_{11}(\xi) & \gamma'_{12}(\xi) \\ \gamma'_{21}(\xi) & \gamma'_{22}(\xi) \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\delta'(\xi) = \begin{pmatrix} \delta'_{11}(\xi) & \delta'_{12}(\xi) \\ \delta'_{21}(\xi) & \delta'_{22}(\xi) \end{pmatrix} \quad , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1, \qquad (III,1;24)$$

donde los bloques $\gamma'_{11}(\xi)$ y $\delta'_{11}(\xi)$ son de $r \times k$, $\gamma'_{21}(\xi)$ y $\delta'_{21}(\xi)$ de $r \times (n-k)$, $\gamma'_{12}(\xi)$ y $\delta'_{12}(\xi)$ de $(n-r) \times k$, $\gamma'_{22}(\xi)$ y $\delta'_{22}(\xi)$ de $(n-r) \times (n-k)$, $w'_{11}(\xi)$ de $k \times r$, $w'_{12}(\xi)$ de $(n-k) \times r$, $w'_{21}(\xi)$ de $k \times (n-r)$ y $w'_{22}(\xi)$ de $(n-k) \times (n-r)$.

De la fórmula (III,1;23) concluimos que el bloque rectangular $w'_{12}(\xi)$, de $n-k$ columnas y r filas, satisface a la ecuación

$$w'_{12}(\xi) = 0 \,, \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

Calculemos $w'(\xi)$, teniendo en cuenta la igualdad anterior, (III,1;22) y (III,1;24); obtenemos

$$w'(\xi) = \begin{pmatrix} \delta'^{-1}_{11}(\xi) & 0 \\ (\gamma'_{22}(\xi)+\delta'_{22}(\xi))^{-1}\delta'_{21}(\xi)\delta'^{-1}_{11}(\xi) & (\gamma'_{22}(\xi)+\delta'_{22}(\xi))^{-1} \end{pmatrix}$$

p.p. en $|\xi| = 1$. (III,1;25)

De las fórmulas (I,2;10), (I,2;18), (III,1;4), (III,1;22) y (III,1;25) resulta

$$\begin{pmatrix} I_k - S_1^*(\xi)S_1(\xi) & 0 \\ 0 & 0_{n-k} \end{pmatrix} = w'^*(\xi) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} w'(\xi) \, ,$$

p.p. en $|\xi| = 1$.

De la ecuación anterior concluimos que

$$I_k - S_1^*(\xi)S_1(\xi) = \delta_{11}'^{-1*}(\xi)\delta_{11}'^{-1}(\xi), \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \tag{III,1;26}$$

Podemos aplicar el teorema de Matveev a la función positiva $I_k - S_1^*(\xi)S_1(\xi)$ (cf. [2], p. 1311); de acuerdo con este teorema existen funciones matriciales $\Theta(z)$ de orden k, holomorfas y acotadas en D, tales que det $\Theta(z) \neq 0$, que son soluciones de problema de factorización

$$I_k - S_1^*(\xi)\, S_1(\xi) = \Theta^*(\xi)\, \Theta(\xi), \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \tag{III,1;27}$$

Dentro del sistema infinito de soluciones está unívocamente determinada la función matricial $\Theta_o(z)$, de orden k, por las condiciones de normalización $\Theta_o(0) > 0$ y det $\Theta_o(z)$ es función exterior. Sabemos, además (cf. [9], p. 285; [10], p.304) que cualquier solución del problema de factorización (III,1;27) satisface a la condición

$$\Theta(\xi) = V_1(\xi)\, \Theta_o(\xi)\, , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1, \tag{III,1;27bis}$$

donde $V_1(\xi)$ es una isometría. Para cada ξ del contorno donde está definida, $V_1(\xi)$ es una matriz unitaria; por lo tanto debe ser una matriz cuadrada. Entonces, como $\Theta_o(\xi)$ es función matricial de orden k, $V_1(\xi)$ debe ser también de orden k; por consiguiente, toda solución de (III,1;27) es función matricial de orden k.

De (III,1;26) y (III,1;27) resulta

$$\delta_{11}'(\xi) = \Theta^{-1}(\xi)\, , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

Luego $\delta'_{11}(\xi)$ debe ser de orden k y, por lo tanto, el bloque $w'_{11}(\xi)$ también es de orden k; entonces el bloque $w'_{12}(\xi)$ que, en virtud de (III,1;23), es nulo (p.p. en $|\xi| = 1$), es de (n-k)xk; por consiguiente, resulta r = k. Esta conclusión contradice la hipótesis de partida. Debe verificarse, entonces, la tesis dim ker F = n-k.

Queda, así, demostrado el Lema 3-3.

III,2. Después de demostrar estos tres lemas preparatorios, pasamos, con su ayuda, a la demostración de nuestras dos fórmulas fundamentales (fórmula (III,2;16) y fórmula (III,2;17)).

Introduzcamos la notación

$$\alpha'(\xi) = \begin{pmatrix} \alpha'_{11}(\xi) & \alpha'_{12}(\xi) \\ \alpha'_{21}(\xi) & \alpha'_{22}(\xi) \end{pmatrix}, \quad \beta'(\xi) = \begin{pmatrix} \beta'_{11}(\xi) & \beta'_{12}(\xi) \\ \beta'_{21}(\xi) & \beta'_{22}(\xi) \end{pmatrix},$$

p.p. en $|\xi| = 1$. (III,2;1)

Consideremos una función $h(\xi) \in N$. Sabemos, del Lema 1-3, que para todo ξ de la circunferencia unidad excepto, quizá, un conjunto de medida nula, se verifica

$$S(\xi)\ h(\xi) = h'(\xi) \in N'_\xi .$$

En virtud de (I,2;2), (I,2;3). (I,2;10) y (III,1;10) obtenemos

$$S'(\xi)\ x(\xi) = (\alpha'(\xi)\varepsilon_0 + \beta'(\xi))\ w'(\xi)\ x(\xi) = x'(\xi) \quad \text{(III,2;2)}$$

p.p. en $|\xi| = 1$, donde $x(\xi)$ y $x'(\xi)$ están definidas por las fórmulas (I,2;5) y (I,2;6) respectivamente.

Consideremos, ahora, una función $g(\xi) \in N_\perp$. Del Lema 1-3 sabemos que, para casi todo punto del contorno, se verifica

$$S(\xi)\ g(\xi) = g'(\xi) \in N_{\xi\perp} .$$

De las fórmulas (I,2;10), (I,2;14), (I,2;15) y (III,2;10) resulta

$$S'(\xi)y(\xi) = \left(\alpha'(\xi)\varepsilon_0 + \beta'(\xi)\right) w'(\xi)y(\xi) = y'(\xi), \qquad \text{(III,2;3)}$$

p.p. en $|\xi| = 1$, donde $y(\xi)$ e $y'(\xi)$ están definidas por las fórmulas (I,2;14) y (I,2;15) respectivamente.

Teniendo en cuenta (I,2;18), de las fórmulas (III,2;1), (III,2;2) y (III,2;3) se concluye que

$$\left(\alpha'_{22}(\xi) + \beta'_{22}(\xi)\right)\left(\gamma'_{22}(\xi) + \delta'_{22}(\xi)\right)^{-1} = S_2(\xi), \text{ p.p. en } |\xi| = 1; \qquad \text{(III,2;4)}$$

$$\beta'_{11}(\xi)\ \delta'^{-1}_{11}(\xi) = S_1(\xi), \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1; \qquad \text{(III,2;5)}$$

$$\alpha'_{12}(\xi) + \beta'_{12}(\xi) = 0\ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1; \qquad \text{(III,2;6)}$$

$$\left(\alpha'_{22}(\xi) + \beta'_{22}(\xi)\right)\left(\gamma'_{22}(\xi) + \delta'_{22}(\xi)\right)^{-1} \delta'_{21}(\xi)\ \delta'^{-1}_{11}(\xi) -$$

$$- \beta'_{21}(\xi)\ \delta'^{-1}_{11}(\xi) = 0\ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \qquad \text{(III,2;7)}$$

Reemplazando (III,2;4) en (III,2;7) resulta

$$\beta'_{21}(\xi) = S_2(\xi)\ \delta'_{21}(\xi), \text{ p.p. en } |\xi| = 1. \qquad \text{(III,2;8)}$$

La ecuación matricial (III,1;12) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones para los bloques de $A'(\xi)$:

$$\alpha'^*(\xi)\ \alpha'(\xi) - \gamma'^*(\xi)\ \gamma'(\xi) = I_n\ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

$$\delta'^*(\xi)\ \delta'(\xi) - \beta'^*(\xi)\ \beta'(\xi) = I_n\ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

$$\alpha'^*(\xi)\ \beta'(\xi) - \gamma'^*(\xi)\ \delta'(\xi) = 0\ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

Desarrollemos el sistema anterior; obtenemos

$$\alpha'^{*}_{11}(\xi)\ \alpha'_{11}(\xi) + \alpha'^{*}_{21}(\xi)\alpha'_{21}(\xi) - \gamma'^{*}_{11}(\xi)\ \gamma'_{11}(\xi) -$$

$$- \gamma'^{*}_{21}(\xi)\ \gamma'_{21}(\xi) = I_k , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1; \qquad \text{(III,2;9)}$$

$$\alpha'^{*}_{22}(\xi)\ \alpha'_{22}(\xi) + \alpha'^{*}_{12}(\xi)\ \alpha'_{12}(\xi) - \gamma'^{*}_{22}(\xi)\ \gamma'_{22}(\xi) -$$

$$- \gamma'^{*}_{12}(\xi)\ \gamma'_{12}(\xi) = I_{n-k} , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

$$\alpha'^{*}_{11}(\xi)\ \alpha'_{12}(\xi) + \alpha'^{*}_{21}(\xi)\ \alpha'_{22}(\xi) - \gamma'^{*}_{11}(\xi)\ \gamma'_{12}(\xi) -$$

$$- \gamma'^{*}_{21}(\xi)\ \gamma'_{22}(\xi) = 0 , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1; \qquad \text{(III,2;10)}$$

$$\delta'^{*}_{11}(\xi)\ \delta'_{11}(\xi) + \delta'^{*}_{21}(\xi)\ \delta'_{21}(\xi) - \beta'^{*}_{11}(\xi)\ \beta'_{11}(\xi) -$$

$$- \beta'^{*}_{21}(\xi)\ \beta'_{21}(\xi) = I_k , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

$$\delta'^{*}_{22}(\xi)\ \delta'_{22}(\xi) + \delta'^{*}_{12}(\xi)\ \delta'_{12}(\xi) - \beta'^{*}_{22}(\xi)\ \beta'_{22}(\xi) -$$

$$- \beta'^{*}_{12}(\xi)\ \beta'_{12}(\xi) = I_{n-k} , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

$$\delta'^{*}_{11}(\xi)\ \delta'_{12}(\xi) + \delta'^{*}_{21}(\xi)\ \delta'_{22}(\xi) - \beta'^{*}_{11}(\xi)\ \beta'_{12}(\xi) -$$

$$- \beta'^{*}_{21}(\xi)\ \beta'_{22}(\xi) = 0 , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

$$\alpha'^{*}_{11}(\xi)\ \beta'_{11}(\xi) + \alpha'^{*}_{21}(\xi)\ \beta'_{21}(\xi) - \gamma'^{*}_{11}(\xi)\ \delta'_{11}(\xi) -$$

$$- \gamma'^{*}_{21}(\xi)\ \delta'_{21}(\xi) = 0 , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1; \qquad \text{(III,2;11)}$$

$$\alpha'^{*}_{11}(\xi)\ \beta'_{12}(\xi) + \alpha'^{*}_{21}(\xi)\ \beta'_{22}(\xi) - \gamma'^{*}_{11}(\xi)\ \delta'_{12}(\xi) -$$

$$- \gamma'^{*}_{21}(\xi)\ \delta'_{22}(\xi) = 0 , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1; \qquad \text{(III,2;12)}$$

$$\alpha'^{*}_{12}(\xi)\ \beta'_{11}(\xi) + \alpha'^{*}_{22}(\xi)\ \beta'_{21}(\xi) - \gamma'^{*}_{12}(\xi)\ \delta'_{11}(\xi) -$$

$$- \gamma'^{*}_{22}(\xi)\ \delta'_{21}(\xi) = 0 , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

$$\alpha'^{*}_{12}(\xi)\ \beta'_{12}(\xi) + \alpha'^{*}_{22}(\xi)\ \beta'_{22}(\xi) - \gamma'^{*}_{12}(\xi)\ \delta'_{12}(\xi) -$$

$$- \gamma'^{*}_{22}(\xi)\ \delta'_{22}(\xi) = 0 , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

Sumando (III,2;10) y (III,2;12) resulta

$$\alpha'^{*}_{21}(\xi)\ S_2(\xi) = \gamma'_{21}(\xi) , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

es decir

$$\gamma'_{21}(\xi) = S^{*}_{2}(\xi)\ \alpha'_{21}(\xi) , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 \qquad \text{(III,2;13)}$$

Reemplacemos (III,2;5), (III,2;8) y (III,2;13) en (III,2;11); obtenemos

$$\alpha'^{*}_{11}(\xi)\ S_1(\xi)\ \delta'_{11}(\xi) - \gamma'^{*}_{11}(\xi)\ \delta'_{11}(\xi) = 0 , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

por lo tanto resulta

$$\gamma'_{11}(\xi) = S^{*}_{1}(\xi)\ \alpha'_{11}(\xi) , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \qquad \text{(III,2;14)}$$

Consideremos el problema de factorización

$$I_k - S_1(\xi)S^{*}_{1}(\xi) = \Psi(\xi)\ \Psi^{*}(\xi), \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1 \qquad \text{(III,2;15)}$$

dentro del sistema infinito de soluciones está unívocamente determinada la función matricial de orden k $\Psi_o(z)$, holomorfa y acotada en D que satisface a la condición det $\Psi_o(z) \not\equiv 0$, por las condiciones de normalización $\Psi_o(0) > 0$ y det $\Psi_o(z)$ es función exterior. Toda solución de (III,2;15) se obtiene por medio de la fórmula

$$\Psi(\xi) = \Psi_o(\xi)\, V_2(\xi), \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1, \qquad \text{(III,2;15,bis)}$$

donde $V_2(\xi)$ es una isometría.

Reemplacemos (III,2;13) en (III,2;9); obtenemos

$$\alpha'^{*}_{11}(\xi)\, \alpha'_{11}(\xi) - \gamma'^{*}_{11}(\xi)\, \gamma'_{11}(\xi) = I_k, \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

De la fórmula anterior,(III,1;26), (III,2;14) y (III,2;15) resulta

$$\beta'_{11}(\xi) = S_1(\xi)\, \Theta^{-1}(\xi), \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

$$\alpha'_{11}(\xi) = \Psi^{-1*}(\xi) \quad , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

$$\gamma'_{11}(\xi) = S^{*}_{1}(\xi)\Psi^{-1*}(\xi) \ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

Teniendo en cuenta que las soluciones $\Theta(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ de (III,1;27) y (III,2;15) se pueden expresar por medio de las soluciones unívocamente determinadas $\Theta_o(\xi)$ y $\Psi_o(\xi)$, respectivamente, en la forma

$$\Theta(\xi) = V_1(\xi)\, \Theta_o(\xi) \ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1 \ ,$$

$$\Psi(\xi) = \Psi_o(\xi)\, V_2(\xi) \ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1,$$

concluimos que

$$\delta'_{11}(\xi) = \Theta_o^{-1}(\xi)\, V_1^{-1}(\xi) \ , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1,$$

$$\beta'_{11}(\xi) \;=\; S_1(\xi)\Theta_o^{-1}(\xi)V_1^{-1}(\xi)\,, \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1,$$

$$\alpha'_{11}(\xi) \;=\; \Psi^{*-1}(\xi)\; V_2(\xi)\,, \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1,$$

$$\gamma'_{11}(\xi) \;=\; S_1^*(\xi)\; \Psi^{*-1}(\xi)\; V_2(\xi), \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1,$$

donde $V_1(\xi)$ y $V_2(\xi)$ son isometrías.

Sabemos, de (III,1;25), que se verifica

$$\gamma'_{12}(\xi) + \delta'_{12}(\xi) \;=\; 0\,, \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

Finalmente, en virtud de (III,2;6), (III,2;13) y las fórmulas anteriores concluimos que A'(z) está dada por la expresión

$$A'(z) = \begin{pmatrix} \Psi_o^{*-1}(\frac{1}{\bar z})V_1(\xi) & \alpha'_{12}(\xi) & S_1(z)\Theta_o^{-1}(z)V_2^{-1}(z) & -\alpha_{12}(z) \\ \alpha'_{21}(z) & \alpha'_{22}(z) & S_2(z)\delta'_{21}(z) & \beta'_{22}(z) \\ S_1^*(\frac{1}{\bar z})\Psi_o^{*-1}(\frac{1}{\bar z})V_1(z) & \gamma'_{12}(z) & \Theta_o^{-1}(z)\; V_2^{-1}(z) & -\gamma'_{12}(z) \\ S_2^*(\frac{1}{\bar z})\;\gamma'_{21}(z) & \gamma'_{22}(z) & \delta'_{21}(z) & \delta'_{22}(z) \end{pmatrix}$$

$(z \in D)$, (III,2;16)

y satisface, además, a la condición (III,2;4).

De (III,1;9) y (III,1;11) se concluye que la matriz de coeficientes de cualquier realización a la Darlington de S(z) se escribe en la forma

$$A(z) = \begin{pmatrix} U_1^{-1}(z) & 0 \\ 0 & U_2^{-1}(z) \end{pmatrix} A'(z)\; U_\varepsilon^{-1} \qquad \text{(III,2;17)}$$

donde A'(z) está dada por la fórmula (III,2;16) y U_ε por la fórmula

(III,1;7); y debe satisfacer a las hipótesis (0,2), (0,3), (0,4) y (0,5) del Lema Fundamental de Arov.

La fórmula (III,2;17) es nuestra solución del problema de la multiplicidad. Variando las funciones $V_1(z)$ y $V_2(z)$, definidas por las fórmulas (III,1;27 bis) y (II,2;15 bis), obtenemos todas las realizaciones de $S(z)$.

Para ser completos, no está de más demostrar que nuestra fórmula (III,2;17) contiene a la (4.14) de Arov (cf. (2), p. 1318) como caso particular. Es lo que hacemos a continuación.

Cuando la función matricial $F(\xi)$, definida por la fórmula (I,1;5) satisface a la condición $F(\xi) > 0$, p.p. en $|\xi| = 1$, dim $N = 0$; por lo tanto, la fórmula (III,2;16) se reduce a

$$A'(z) = \begin{pmatrix} \Psi_o^{*-1}(\frac{1}{\bar{z}}) & S_1(z)\,\Theta_o^{-1}(z) \\ S_1^{*-1}(\frac{1}{\bar{z}})\Psi_o^{*-1}(\frac{1}{\bar{z}}) & \Theta_o^{-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2(z) & 0 \\ 0 & V_1^{-1}(z) \end{pmatrix} \qquad \text{(III,2;18)}$$

Teniendo en cuenta que, como dim $N = 0$, se verifica

$$S(\xi) = U_2^{-1}(\xi)\, S_1(\xi)\, U_1(\xi)\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1, \qquad \text{(III,2;19)}$$

resulta, en virtud de (III,1;27) y (III,1;15)

$$I_n - S^*(\xi)S(\xi) = U_1^*(\xi)\Theta_o^*(\xi)\Theta_o(\xi)U_1(\xi), \text{ p.p. en } |\xi| = 1;$$

$$I_n - S(\xi)S^*(\xi) = U_2^{-1}(\xi)\Psi_o(\xi)\Psi_o^*(\xi)U_2(\xi), \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

De las expresiones anteriores vemos que las funciones

$$P(\xi) \overset{\text{def}}{=} \Theta_o(\xi)\, U_1(\xi) \quad , \text{ p.p. en } |\xi| = 1,$$

y

$$Q(\xi) \overset{\text{def}}{=} U_2^{-1}(\xi)\,\Psi_o(\xi) \quad , \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1 ,$$

son soluciones de los problemas de factorización

$$I_n - S^*(\xi)S(\xi) = P^*(\xi)P(\xi) \text{ , p.p. en } |\xi| = 1;$$

$$I_n - S(\xi)S^*(\xi) = Q(\xi)Q^*(\xi) \text{ , p.p. en } |\xi| = 1.$$

De las fórmulas que preceden, (III,2;17),(III,2;18) y (III,2;19) concluimos que, en este caso, se verifica

$$A(z) = \begin{pmatrix} Q^{*-1}(\frac{1}{\bar{z}}) & S(z)P^{-1}(z) \\ S^*(\frac{1}{\bar{z}})Q^{*-1}(\frac{1}{\bar{z}}) & P^{-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2(z) & 0 \\ 0 & V_1^{-1}(z) \end{pmatrix} U_\varepsilon$$

$(z \in D)$. (III,2;20)

La fórmula (III,2;20) coincide con la fórmula (4.14) que obtiene Arov (cf. [2], p. 1318) al resolver el problema de multiplicidad de representaciones a la Darlington de una función matricial $S(z)(\in S\Pi)$ cuando $F(\xi) > 0$, p.p. en $|\xi| = 1$.

IV - TRANSFORMACIONES LINEALES FRACCIONARIAS DE FUNCIONES MATRICIALES j-EXPANSIVAS.

Demostraremos en este capítulo tres teoremas para funciones matriciales j-expansivas a base de los cuales se puede resolver el problema de la síntesis a la Darlington de matrices de transferencia de 2n-puertos, a partir de la síntesis de multipolos no disipativos con doble número de puertos. El sistema buscado se obtiene, como veremos en el parágrafo IV,2, cerrando los puertos sobrantes con cuadripolos.

IV,1. Consideremos las matrices $P = 1/2\ (I_{2n} + j)$ y $Q = 1/2\ (I_{2n} - j)$ donde

$$j = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \qquad \text{(IV,1;1)}$$

Para una matriz T, de orden 2n, j-expansiva, está definida la matriz

$$S = (QT + P)\ (PT + Q)^{-1}\ J_p \ , \qquad \text{(IV,1;2)}$$

donde

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(IV,1;3)}$$

De la fórmula (IV,1;2) obtenemos

$$I_{2n} - S{*}S = J_p\ (QT + P)^{*-1}\ (T{*}\ j\ T - j)\ (QT + P)^{-1}\ J_p \ .$$

En virtud de la expresión anterior podemos afirmar que T es j-expansiva si, y sólo si, la matriz S, definida por (IV,1;2) es contractiva. La matriz T se expresa, en función de la matriz S, por medio de la fórmula

$$T = (Q - S\,J_p\,P)^{-1}\,(P - S\,J_p\,Q).$$

Si T(z) es una función matricial j-expansiva, de orden 2n, de acuerdo con la fórmula (IV,1;2) la función matricial

$$S(z) = \big(Q\,T(z) + P\big)\,\big(P\,T(z) + Q\big)^{-1}\,J_p \qquad \text{(IV,1;4)}$$

es holomorfa y contractiva en D. Sabemos (cf. (2), p. 1303, Lema 2-1), además, que T(z) es de característica acotada en D.

Nos interesarán funciones matriciales G(z) j_{2n}-interiores, esto es, funciones matriciales G(z) j_{2n}-expansivas ($z \in D$) cuyo valor $G(\xi)$, en casi todo punto del contorno satisface a la condición

$$G^*(\xi)\,j_{2n}\,G(\xi) - j_{2n} = 0, \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1,$$

donde

$$j_{2n} = \begin{pmatrix} -I_{2n} & 0 \\ 0 & I_{2n} \end{pmatrix} \qquad \text{(IV,1;5)}$$

Sea

$$G(z) = \begin{pmatrix} g_{11}(z) & g_{12}(z) \\ g_{21}(z) & g_{22}(z) \end{pmatrix}$$

una función matricial, de orden 4n, de característica acotada en D.

En virtud del Lema Fundamental (cf.(2), p. 1306), citado en la Introducción, si G(z) satisface a la condición

$$G^*(\xi)\ j_{2n}\ G(\xi) - j_{2n} \geq 0, \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1,$$

y si, además, los bloques

$$a(z) \overset{\text{def}}{=} g_{12}(z)\ g_{22}^{-1}(z) \qquad (z \in D),$$

$$b(z) \overset{\text{def}}{=} g_{11}(z) - g_{12}(z)\ g_{22}^{-1}(z)\ g_{21}(z) \qquad (z \in D),$$

$$c(z) \overset{\text{def}}{=} g_{22}^{-1}(z)\ g_{21}(z) \qquad (z \in D),$$

$$d(z) \overset{\text{def}}{=} g_{22}^{-1}(z) \qquad (z \in D), \qquad (IV,1;6)$$

pertenecen a la clase N_o, entonces G(z) verifica

$$G^*(z)\ j_{2n}\ G(z) - j \geq 0 \qquad (z \in D).$$

O sea, que el Lema Fundamental nos permite afirmar que si una función matricial G(z) toma valores j_{2n}-unitarios en casi todo punto del contorno y para sus bloques se cumplen las condiciones (IV,1;6), la función matricial G(z) es j_{2n}-expansiva (z e D).

El resultado anterior desempeña un papel importante en la demostración del

Teorema 4-1

Hipótesis.

T(z) es una función matricial, de orden 2n, de la clase $T\Pi$ y cumple una de las siguientes condiciones

1) $$T^*(\xi)\ j\ T(\xi) - j = 0, \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1,$$

2) $$T^*(\xi)\ j\ T(\xi) - j > 0, \qquad \text{p.p. en } |\xi| = 1,$$

donde j está dada por la fórmula (IV,1;1).

Tesis.

T(z) se puede representar como una transformación lineal fraccionaria

$$T(z) = \left(A(z)\, t_o + B(z)\right)\left(C(z)\, t_o + D(z)\right)^{-1}, \qquad (IV,1;7)$$

donde t_o es una matriz constante j-expansiva de orden 2n, y la matriz de coeficientes

$$W(z) = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix}$$

verifica las condiciones

$$\begin{aligned} &W^*(z)\, J'\, W(z) - J' > 0 \quad (z \in D); \\ &W^*(\xi)\, J'\, W(\xi) - J' = 0\,, \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1, \end{aligned} \qquad (IV,1;8)$$

donde

$$J' = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix} \qquad (IV,1;9)$$

Demostración.

1) Es trivial demostrar la tesis cuando T(z) es j-interior; es decir, cuando T(z) satisface a la condición 1) de la hipótesis. En este caso la realización de T(z) como transformación lineal fraccionaria

se obtiene con la matriz constante $t_\circ = I_{2n}$ y la matriz de coeficientes

$$W(z) = \begin{pmatrix} T(z) & 0 \\ 0 & I_{2n} \end{pmatrix}$$

2) Consideremos, ahora, una función matricial T(z) que satisfaga a la hipótesis 2).

Como T(z) e $T\Pi$ la función matricial S(z), holomorfa y acotada en D, relacionada con T(z) por medio de la fórmula (IV,1;4), es de la clase $S\Pi$. Podemos, entonces, aplicar el teorema de Matveev (cf.[2], p. 1311) a las funciones $I_{2n} - S^*(\xi)S(\xi)$ y $I_{2n}-S(\xi)S^*(\xi)$. De acuerdo con este teorema, existen funciones matriciales $\Theta(z)$ y $\Psi(z)$, de orden 2n, holomorfas y acotadas en D, tales que $\det \Theta(z) \not\equiv 0$ y $\det \Psi(z) \not\equiv 0$, que son soluciones de los problemas de factorización

$$I_{2n} - S^*(\xi)\, S(\xi) = \Theta^*(\xi)\, \Theta(\xi) \ ;$$

$$I_{2n} - S(\xi)\, S^*(\xi) = \Psi(\xi)\, \Psi^*(\xi) \ .$$

Dentro del sistema infinito de soluciones están unívocamente determinadas las funciones matriciales $\Theta_\circ(z)$ y $\Psi_\circ(z)$ que satisfacen a las condiciones de normalización $\Theta_\circ(0) > 0$, $\Psi_\circ(0) > 0$; $\det \Theta_\circ(z)$ y $\det \Psi_\circ(z)$ son funciones exteriores.

Obtendremos la realización (IV,1;7) de T(z) con la matriz constante j-expansiva

$$t_\circ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} \qquad \text{(IV,1;10)}$$

Introduzcamos las siguientes designaciones

$$A(z) = \{Q + P\,(T^*(\tfrac{1}{\bar z})P + Q)^{-1}(T^*(\tfrac{1}{\bar z})Q + P)\}\,\Psi^{*-1}(\tfrac{1}{\bar z})\left[\sqrt{5}\,Q - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix}\right] + \{Q\,(QT(z) + P)(PT(z) + Q)^{-1}\,J_p + PJ_p\}\,\Theta^{-1}(z)\,.$$

$$.\left[\sqrt{5}\,QJ_p - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 2I_n & 0 \end{pmatrix}\right] \quad ;$$

$$B(z) = \left\{Q + P\,(T^*(\tfrac{1}{\bar z})P + Q)^{-1}(T^*(\tfrac{1}{\bar z})Q + P)\right\}\,\Psi^{*-1}(\tfrac{1}{\bar z})\left[\sqrt{5}\,P - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}\right] + \{Q(QT(z) + P)\,(PT(z) + Q)^{-1}\,J_p + PJ_p\}\,\Theta^{-1}(z)\,.$$

$$.\left[\sqrt{5}\,PJ_p - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 & 2I_n \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}\right] \quad ;$$

$$C(z) = \{P + Q\,(T^*(\tfrac{1}{\bar z})P + Q)^{-1}\,(T^*(\tfrac{1}{\bar z})Q + P)\}\,\Psi^{-1*}(\tfrac{1}{\bar z})\left[\sqrt{5}\,Q - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix}\right] + \{P(QT(z) + P)\,(PT(z) + Q)^{-1}\,J_p + QJ_p\}\,\Theta^{-1}(z)\,.$$

$$.\left[\sqrt{5}\,QJ_p - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 2I_n & 0 \end{pmatrix}\right] \quad ;$$

$$D(z) = \{P + Q\,(T^*(\tfrac{1}{\bar z})P + Q)^{-1}\,(T^*(\tfrac{1}{\bar z})Q + P)\}\,\Psi^{*-1}(\tfrac{1}{\bar z})\left[\sqrt{5}\,P - \right.$$

$$- \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}\Bigg]\Bigg] + \{P(QT(z) + P)(PT(z) + Q)^{-1} J_p + QJ_p\} \Theta^{-1}(z) .$$

$$\left[\sqrt{5}\, PJ_p - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 2I_n \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}\right]\Bigg] . \qquad (IV,1;11)$$

Demostraremos a continuación que si T(z) satisface a la condición 2) de la hipótesis, puede representarse en la forma (IV,1;7), con la matriz de coeficientes W(z) construida con los bloques definidos por las fórmulas (IV,1;11). Para ello calcularemos $(A(z)t_o + B(z))(C(z)t_o + D(z))^{-1}$ con t_o dada por (IV,1;10) y A(z), B(z), C(z) y D(z) dadas por (IV,1;11), y veremos que el resultado es T(z). Los cálculos que siguen no ofrecen dificultad alguna.

$$A(z)t_o + B(z) = \{Q + P(T^*(\tfrac{1}{\bar z})P + Q)^{-1}(T^*(\tfrac{1}{\bar z})Q + P)\} \quad \Psi^{*-1}(\tfrac{1}{\bar z}) \quad .$$

$$\left\{\sqrt{5} \left[\frac{Q}{2}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} + P\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}\right]\right\} +$$

$$+ \{Q(QT(z) + P)(PT(z) + Q)^{-1} J_p + PJ_p\} \quad \Theta^{-1}(z) \left\{\sqrt{5}\, \frac{QJ_p}{2} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + PJ_p\right] - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2I_n \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \{Q + P\ (T^*(\tfrac{1}{\bar z})P + Q)^{-1}\ (T^*(\tfrac{1}{\bar z})Q + P)\} \quad \Psi^{-1*}(\tfrac{1}{\bar z}) \quad .$$

$$\left[\begin{pmatrix} \sqrt{5/2}\ I_n & \sqrt{5/2}\ I_n \\ 0 & \sqrt{5}\ I_n \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5/2}\ I_n & \sqrt{5/2}\ I_n \\ 0 & 5\ I_n \end{pmatrix}\right] + \{Q(QT(z) + P)$$

$$. \ (PT(z) + Q)^{-1} J_p + PJ_p\} \ \Theta^{-1}(z) \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5}\, I_n & 2\sqrt{5}\, I_n \\ 4/\sqrt{5}\, I_n & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \{Q \ (QT(z) + P)(PT(z) + Q)^{-1} J_p + PJ_p\} \ \Theta^{-1}(z)$$

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5}\, I_n & 2\sqrt{5}\, I_n \\ 4/\sqrt{5}\, I_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(z)t_o + D(z) = \{P + Q \ (T^*(\tfrac{1}{\bar{z}})P + Q)^{-1} \ (T^*(\tfrac{1}{\bar{z}})Q + P)\}\Psi^{-1}{}^*(\tfrac{1}{\bar{z}}) \ .$$

$$. \left\{\sqrt{5}\left[\frac{Q}{2}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} + QJ_p\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}\right]\right\} + \{P \ (QT(z) + P)(PT(z) + Q)^{-1} J_p + PJ_p\} \ \Theta^{-1}(z) \ .$$

$$. \left\{\sqrt{5}\left[\frac{QJ_p}{2}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} + PJ_p\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 2I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \begin{pmatrix} 0 & 2I_n \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}\right]\right\} =$$

$$= \{P + Q \ (T^*(\tfrac{1}{\bar{z}})P + Q)^{-1} \ (T^*(\tfrac{1}{\bar{z}})Q + P)\}\Psi^{-1}{}^*(\tfrac{1}{\bar{z}}) \ \left\{\sqrt{5}\ \left[\frac{Q}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left. . \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} + QJ_p\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}\right]\right\} +$$

$$+ \quad \{P\left(QT(z) + P\right)\left(PT(z) + Q\right)^{-1} J_p + QJ_p\} \quad \Theta^{-1}(z) \left\{ \sqrt{5} \left[\frac{QJ_p}{2} \right.\right.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} + PJ_p - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 2I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2I_n \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \right]\left.\left.\right]\right\} =$$

$$= \{P\left(QT(z) + P\right)\left(PT(z) + Q\right)^{-1} J_p + QJ_p\} \; \Theta^{-1}(z) \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5}\, I_n & 2\sqrt{5}\, I_n \\ 4/\sqrt{5}\, I_n & 0 \end{pmatrix} .$$

Teniendo en cuenta los cálculos anteriores concluimos que

$$\left(A(z)t_0 + B(z)\right)\left(C(z)t_0 + D(z)\right)^{-1} = \{Q\left(QT(z) + P\right)\left(PT(z) + Q\right)^{-1} J_p + PJ_p\}$$

$$. \quad \{P\left(QT(z) + P\right)\left(PT(z) + Q\right)^{-1} J_p + QJ_p\}^{-1} = T(z).$$

Mostraremos que la matriz W(z) construida con los bloques (IV,1;11) satisface a las condiciones (IV,1;8).

Introduzcamos la matriz

$$R \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Q & PJ_p \\ P & QJ_p \end{pmatrix} , \qquad \text{(IV,1;12)}$$

que es unitaria por construcción, y la función matricial

$$H(z) = \begin{pmatrix} h_{11}(z) & h_{12}(z) \\ h_{21}(z) & h_{22}(z) \end{pmatrix}$$

formada por los bloques

$$h_{11}(z) = \sqrt{5}\; \Psi^{*-1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) I_{2n} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(QT(z) + P\right)\left(PT(z) + Q\right)^{-1} J_p\; \Theta^{-1}(z) .$$

$$\cdot \begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} \quad ;$$

$$h_{12}(z) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\, \psi^{*-1}(\frac{1}{\bar{z}}) \begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} + \sqrt{5}\, \left(QT(z) + P\right)\left(PT(z) + Q\right)^{-1} J_p \,\cdot$$

$$\cdot\ \Theta^{-1}(z)\ I_{2n} \ ;$$

$$h_{21}(z) = \sqrt{5}\ J_p \ \left(T^*(\frac{1}{\bar{z}})P + Q\right)^{-1} \left(T^*(\frac{1}{\bar{z}})Q + P\right)\ \psi^{*-1}(\frac{1}{\bar{z}})\ I_{2n} - \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cdot\ \Theta^{-1}(z) \begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} \quad ;$$

$$h_{22}(z) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\, J_p \ \left(T^*(\frac{1}{\bar{z}})P + Q\right)^{-1} \left(T^*(\frac{1}{\bar{z}})Q + P\right)\ \psi^{*-1}(\frac{1}{\bar{z}}) \begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} +$$

$$+\ \sqrt{5}\ \Theta^{-1}(z)\ I_{2n} \ . \qquad \text{(IV,1;13)}$$

Es fácil comprobar que la matriz R satisface a la igualdad

$$R\ j_{2n}\ R^* = J' \ , \qquad \text{(IV,1;14)}$$

donde j_{2n} está dada por la fórmula (IV,1;5).

Teniendo en cuenta (IV,1;11) y (IV,1;12), observamos que W(z) puede escribirse en la forma

$$W(z) = R\ H(z)\ R^* \ .$$

De la igualdad que precede, conjuntamente con (IV,1;13), concluimos que

$$W^*(z)\ J'W(z) - J' = R\ \left(H^*(z)\ j_{2n}\ H(z) - j_{2n}\right)\ R^*.$$

La relación anterior nos permite afirmar que $W(z)$ es J'-expansiva (unitaria) si y sólo si la función matricial $H(z)$ es j_{2n}-expansiva (unitaria).

Multipliquemos la función matricial

$$H^*(z)\ j_{2n}\ H(z) - j_{2n}$$

a la izquierda y a la derecha por la matriz autoadjunta

$$t_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{5}\ I_n & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\ I_n & \frac{2}{\sqrt{5}}\ I_n \\ 0 & \sqrt{5}\ I_n & \frac{2}{\sqrt{5}}\ I_n & \frac{1}{\sqrt{5}}\ I_n \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\ I_n & \frac{2}{\sqrt{5}}\ I_n & \sqrt{5}\ I_n & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}}\ I_n & \frac{1}{\sqrt{5}}\ I_n & 0 & \sqrt{5}\ I_n \end{pmatrix}, \qquad (IV,1;15)$$

e introduzcamos la función

$$G(z) = \begin{pmatrix} g_{11}(z) & g_{12}(z) \\ g_{21}(z) & g_{22}(z) \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} t_1\ H(z)\ t_1\ .$$

Por medio de un sencillo cálculo obtenemos

$$g_{11}(z) = \Psi^{-1}{}^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\ ;$$

$$g_{12}(z) = \left(QT(z) + P\right)\left(PT(z) + Q\right)^{-1}\ \Theta^{-1}(z)\ ;$$

$$g_{21}(z) = \left(T^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)P + Q\right)^{-1}\left(T^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)Q + P\right)\ \Psi^{*-1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\ ;$$

$$g_{22}(z) = \Theta^{-1}(z)\ .$$

Teniendo en cuenta que t_1 satisface, por construcción, a la igualdad

$$t_1 \, j_{2n} \, t_1 = j_{2n} ,$$

concluimos inmediatamente que se verifica

$$t_1 \left(H^*(z) j_{2n} H(z) - j_{2n}\right) t_1 = G^*(z) j_{2n} G(z) - j_{2n} ,$$

Por lo tanto, para comprobar que $W(z)$ satisface a las condiciones (IV,1;8), basta mostrar que $G(z)$ es una función matricial j_{2n}-interior.

Un sencillo cálculo nos permite ver que la función matricial $G(z)$ toma valores j_{2n}-unitarios en casi todo punto del contorno. Teniendo en cuenta, además, que en (2) se demuestra que los bloques (IV,1;6), definidos a partir de los bloques de $G(z)$ son de la clase N_0, concluimos, a base del Lema Fundamental, que $G(z)$ es j_{2n}-interior; por consiguiente $W(z)$ satisface a las condiciones (IV,1;8).

Queda, pues, demostrado el Teorema 4-1.

Como $T(z)$ e $T\Pi$, entonces $T^*(\xi)$ es el límite en casi todo punto del contorno de la función matricial $T^*(\frac{1}{z})$, de característica acotada en D. Por lo tanto, la función matricial $T^*(\xi)\, j\, T(\xi) - j$ es el límite (p.p. en $|\xi| = 1$) de la función matricial $T^*(\frac{1}{z})\, j\, T(z) - j$, de característica acotada en D.

Para la función escalar det $\left(T^*(\frac{1}{z})\, j\, T(z) - j\right)$, de característica acotada en D, hay tres posibilidades:

1) det $\left(T^*(\xi)\, j\, T(\xi) - j\right) = 0$, p.p. en $|\xi| = 1$, y $T(z)$ es función matricial j-interior.

2) det $\left(T^*(\xi)\, j\, T(\xi) - j\right) \neq 0$, p.p. en $|\xi| = 1$. De esta hipótesis resulta que $T^*(\xi)\, j\, T(\xi) - j > 0$, p.p. en $|\xi| = 1$.

3) det $\left(T^*(\frac{1}{z})\, j\, T(z) - j\right) = 0$ (z e D) y $T(z)$ no es función matricial j-interior.

Hemos demostrado el Teorema 4-1 en los casos 1) y 2). Es útil señalar que si pudiéramos probar un teorema análogo al 4-1 para el caso 3) podríamos afirmar que es condición <u>suficiente</u> para representar una función matricial T(z) j-expansiva en la forma (IV,1;7), que la función T(z) pertenezca a la clase $T\Pi$ (este es un problema que queda abierto).

<u>Teorema 4-2</u>

<u>Hipótesis</u>.

La función matricial T(z), de orden 2n, puede escribirse en la forma

$$T(z) = \left(A(z)\, t_o + B(z)\right)\left(C(z)\, t_o + D(z)\right)^{-1} , \qquad (IV,1;16)$$

donde t_o es una matriz constante j-expansiva y la matriz de coeficientes

$$W(z) = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix}$$

verifica las condiciones

$$W^*(z)\, J'W(z) - J' > 0 \qquad (z \in D) ;$$

$$W^*(\xi)\, J'W(\xi) - J' = 0 , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

<u>Tesis</u>.

$T(z) \in T\Pi$.

<u>Demostración</u>.

En virtud de (IV,1;16) podemos escribir

$$\begin{pmatrix} T(z) \\ I_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_o \\ I_{2n} \end{pmatrix} (C(z)\ t_o + D(z))^{-1}$$

De la expresión anterior obtenemos

$$(C(z)t_o + D(z))^{*^{-1}} \begin{pmatrix} t_o \\ I_{2n} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_o \\ I_{2n} \end{pmatrix} (C(z)t_o + D(z))^{-1} = T^*(z)\ j\ T(z) - j \quad (z \in D). \qquad \text{(IV,1;17)}$$

Sabemos, por hipótesis, que $W(z)$ es J'-expansiva $(z \in D)$; por lo tanto, de (IV,1;17), concluimos que

$$T^*(z)\ j\ T(z) - j \geq (C(z)t_o + D(z))^{*^{-1}} (t_o^*\ jt_o - j)(C(z)t_o + D(z))^{-1}$$

$$(z \in D). \qquad \text{(IV,1;18)}$$

Como t_o es j-expansiva por hipótesis resulta, entonces,

$$T^*(z)\ j\ T(z) - j \geq 0 \qquad (z \in D).$$

Mostraremos, ahora, que $T(z) \in T\Pi$.

Sabemos, por hipótesis, que la función matricial J'-expansiva $W(z)$ verifica la condición $W^*(\xi)\ J'\ W(\xi) = J'$, p.p. en $|\xi| = 1$. Por consiguiente, la función matricial

$$\hat{W}(z) = J'\ W^{*^{-1}}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) J' ,$$

definida en $|z| > 1$ de acuerdo con el principio de simetría tiene característica acotada en $|z| > 1$, y sus valores de contorno

$$\hat{W}(\xi) = \lim_{|z| \downarrow 1} \hat{W}(z) , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1,$$

coinciden, en casi todo punto, con los valores de contorno $W(\xi)$ de $W(z)$. Por lo tanto, la función matricial $T(z)$, que admite una representación (IV,1;16), tiene la propiedad adicional de que sus valores de contorno son, simultáneamente, valores límites de una función matricial de característica acotada en $|z| > 1$. O sea, que $\Gamma(z) \in T\Pi$.

Queda, así, demostrado el Teorema 4-2.

Teorema 4-3

Hipótesis.

$T(z) \in T\Pi$ es función matricial real y cumple una de las siguientes condiciones:

1) $T^*(\xi)\, j\, T(\xi) - j = 0$, p.p. en $|\xi| = 1$;

2) $T^*(\xi)\, j\, T(\xi) - j > 0$, p.p. en $|\xi| = 1$.

Tesis.

La matriz de coeficientes $W(z)$ de la transformación lineal fraccionaria (IV,1;7) es real; es decir que $W(z)$ verifica

$$\overline{W(\bar{z})} = W(z) .$$

Demostración.

1) La demostración es inmediata cuando $T(z)$ satisface a la hipótesis 1). En este caso, la matriz de coeficientes propuesta en el Teorema 4-1 es

$$W(z) = \begin{pmatrix} T(z) & 0 \\ 0 & I_{2n} \end{pmatrix}$$

Como T(z) es real por hipótesis W(z) es, evidentemente, real.

2) Admitamos ahora que T(z) verifica la hipótesis 2). Como T(z) es real, también es real la función matricial S(z), relacionada con T(z) por medio de la fórmula (IV,1;4). Por lo tanto, junto con $\Theta(z)$ y $\Psi(z)$ son soluciones de los problemas de factorización $I_{2n}-S^*(\xi)S(\xi)$ y $I_{2n}-S(\xi)S^*(\xi)$ las funciones matriciales $\overline{\Theta(\bar{z})}$ y $\overline{\Psi(\bar{z})}$ (cf. (2), p. 1322). Estas soluciones satisfacen a las condiciones de normalización $\overline{\Theta(0)} > 0$, $\overline{\Psi(0)} > 0$; det $\overline{\Theta(\bar{z})}$ y det $\overline{\Psi(\bar{z})}$ son funciones exteriores. Entonces, debido a la unicidad de las soluciones, resulta $\Theta(z) = \overline{\Theta(\bar{z})}$ y $\Psi(z) = \overline{\Psi(\bar{z})}$ $(z \in D)$. Por consiguiente, es real la matriz de coeficientes W(z) de la transformación lineal fraccionaria (IV,1;7), cuyos bloques están dados por las fórmulas (IV,1;11).

Queda, pues, demostrado el Teorema 4-3.

Llamaremos realizaciones reales de una función matricial T(z) j-expansiva las transformaciones lineales fraccionarias con matrices constantes j-expansivas reales y matrices de coeficientes reales.

El Teorema 4-3 nos permite afirmar que para una función matricial T(z) que verifique las hipótesis del Teorema 4-1 siempre existe una realización real.

IV,2. Nos ocuparemos, a continuación, del problema de la síntesis de matrices de transferencia de 2n-puertos en relación con los teoremas demostrados en el parágrafo IV,1. Nuestro tratamiento es análogo al de Efimov y Potapov (11) para matrices de cadena.

Es útil recordar que la matriz de transferencia de un 2n-puerto pasivo es una función matricial T(p), de orden 2n, j-expansiva real en el semiplano abierto de la derecha (Re p > 0). Si el sistema es no disipativo T(p) satisface a la condición adicional
$T^*(p)\ j\ T(p) - j = 0$ en Re p = 0.

Consignaremos, para ser más claros, la relación que establece la matriz de transferencia T(p) entre las variables de entrada y de salida de un 2n-puerto, según la convención usada para el sentido de las corrientes.

Consideremos el 2n-puerto

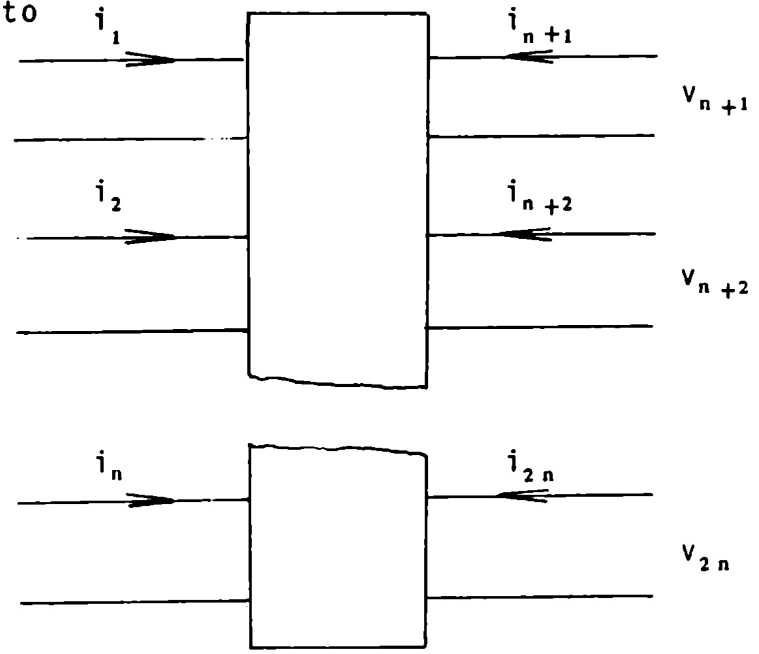


fig. 1

donde i_i y v_i (i = 1,2,....,2n) designan, respectivamente, las corrientes y las tensiones.

Introduzcamos la notación

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad ; \quad V_2 = \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{pmatrix} ; \quad I_1 = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{pmatrix} \quad ; \quad I_2 = \begin{pmatrix} i_{n+1} \\ \vdots \\ i_{2n} \end{pmatrix}$$

De acuerdo con el sentido de las corrientes, la matriz de transferencia

$$T(p) = \begin{pmatrix} t_{11}(p) & t_{12}(p) \\ t_{21}(p) & t_{22}(p) \end{pmatrix}$$

del sistema de la figura 1 se define por medio de la siguiente fórmula

$$\begin{pmatrix} V_1 - I_1 \\ V_1 + I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}(p) & t_{12}(p) \\ t_{21}(p) & t_{22}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 + I_2 \\ V_2 - I_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(IV,2;1)}$$

Consideremos el 4n-puerto

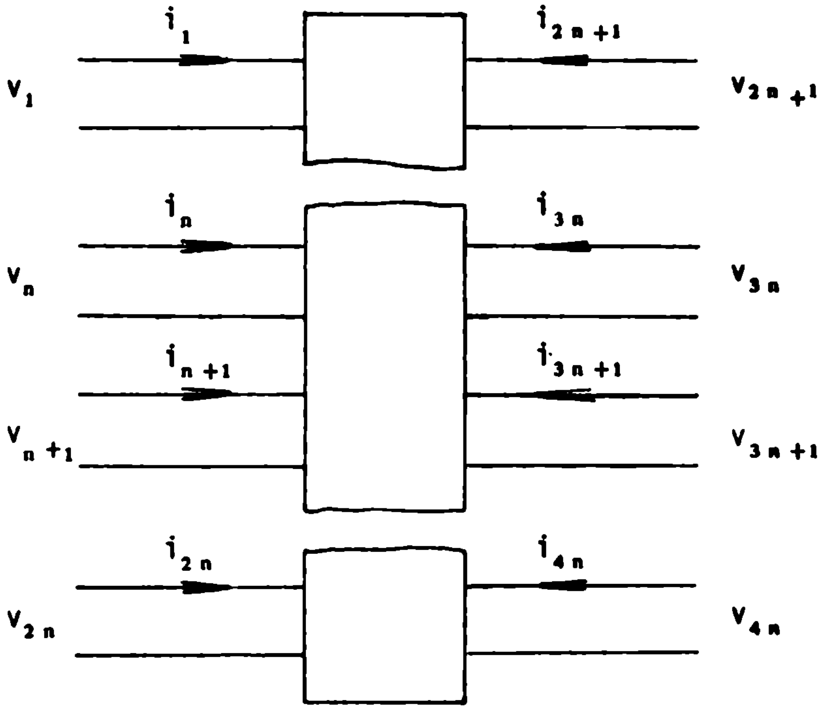


fig. 2

Introduzcamos las notaciones

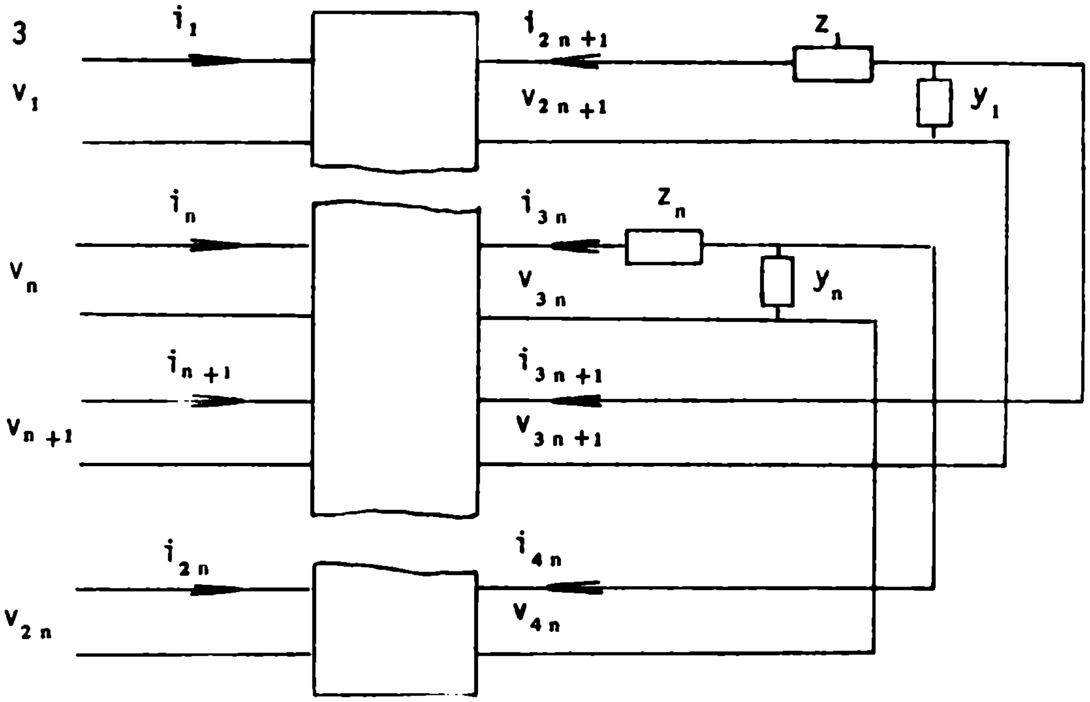
$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} ; \quad V_2 = \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{pmatrix} ; \quad V_3 = \begin{pmatrix} v_{2n+1} \\ \vdots \\ v_{3n} \end{pmatrix} ; \quad V_4 = \begin{pmatrix} v_{3n+1} \\ \vdots \\ v_{4n} \end{pmatrix} ;$$

$$I_1 = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{pmatrix} ; \quad I_2 = \begin{pmatrix} i_{n+1} \\ \vdots \\ i_{2n} \end{pmatrix} ; \quad I_3 = \begin{pmatrix} i_{2n+1} \\ \vdots \\ i_{3n} \end{pmatrix} ; \quad I_4 = \begin{pmatrix} i_{3n+1} \\ \vdots \\ i_{4n} \end{pmatrix}$$

Llamaremos H(p) la matriz de transferencia del 4n-puerto. De acuerdo con la convención usada se verifica

$$\begin{pmatrix} V_1 - I_1 \\ V_2 - I_2 \\ V_1 + I_1 \\ V_2 + I_2 \end{pmatrix} = H(p) \begin{pmatrix} V_3 + I_3 \\ V_4 + I_4 \\ V_3 - I_3 \\ V_4 - I_4 \end{pmatrix} \qquad (IV,2;2)$$

fig. 3



z_i e y_i (i = 1,...,n) son, respectivamente, las impedancias y admitancias de los n cuadripolos.

Cerrando los 2n-puertos de salida con n cuadripolos, como se muestra en la figura 3, obtenemos un 2n-puerto para el cual las variables de entrada y salida son

$$\begin{pmatrix} V_1 - I_1 \\ \\ V_1 + I_1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} V_2 + I_2 \\ \\ V_2 - I_2 \end{pmatrix}$$

Llamaremos t_o la matriz de transferencia de los n cuadripolos que conectan de a pares los puertos de salida. Teniendo en cuenta el sentido de las corrientes vemos que se verifica la relación

$$\begin{pmatrix} V_3 + I_3 \\ \\ V_3 - I_3 \end{pmatrix} = t_o \begin{pmatrix} V_4 + I_4 \\ \\ V_4 + I_4 \end{pmatrix} \qquad (IV,2;3)$$

Multipliquemos (IV,2;2) por la matriz R, definida por la fórmula (IV,1;12); obtenemos

$$R \begin{pmatrix} V_1 - I_1 \\ V_2 - I_2 \\ V_1 + I_1 \\ V_2 + I_2 \end{pmatrix} = R\ H(p)\ R^*R \begin{pmatrix} V_3 + I_3 \\ V_4 + I_4 \\ V_3 - I_3 \\ V_4 - I_4 \end{pmatrix} \qquad (IV,2;4)$$

Introduzcamos la notación

$$W(p) \overset{def}{=} R\ H(p)\ R^* \overset{def}{=} \begin{pmatrix} A(p) & B(p) \\ \\ C(p) & D(p) \end{pmatrix} , \qquad (IV,2;5)$$

donde los bloques A(p), B(p), C(p) y D(p) son de orden 2n.

Calculemos (IV,2;4) teniendo en cuenta (IV,2;5) y la definición de R; obtenemos

$$\begin{pmatrix} V_1 - I_1 \\ V_1 + I_1 \\ V_2 + I_2 \\ V_2 - I_2 \end{pmatrix} = W(p) \begin{pmatrix} V_3 + I_3 \\ V_3 - I_3 \\ V_4 - I_4 \\ V_4 + I_4 \end{pmatrix} \qquad (IV,2;6)$$

De las fórmulas (IV,2;5) y (IV,2;6) resulta

$$\begin{pmatrix} V_1 - I_1 \\ V_1 + I_1 \end{pmatrix} = A(p) \begin{pmatrix} V_3 + I_3 \\ V_3 - I_3 \end{pmatrix} + B(p) \begin{pmatrix} V_4 - I_4 \\ V_4 + I_4 \end{pmatrix} \; ; \qquad (IV,2;7)$$

$$\begin{pmatrix} V_2 + I_2 \\ V_2 - I_2 \end{pmatrix} = C(p) \begin{pmatrix} V_3 + I_3 \\ V_3 - I_3 \end{pmatrix} + D(p) \begin{pmatrix} V_4 - I_4 \\ V_4 + I_4 \end{pmatrix} \; . \qquad (IV,2;8)$$

Reemplazando (IV,2;3) en (IV,2;7) y (IV,2;8) obtenemos

$$\begin{pmatrix} V_1 - I_1 \\ V_1 + I_1 \end{pmatrix} = (A(p)\, t_o + B(p)) \begin{pmatrix} V_4 - I_4 \\ V_4 + I_4 \end{pmatrix} \; ; \qquad (IV,2;9)$$

$$\begin{pmatrix} V_2 + I_2 \\ V_2 - I_2 \end{pmatrix} = (C(p)\, t_o + D(p)) \begin{pmatrix} V_4 - I_4 \\ V_4 + I_4 \end{pmatrix} \; . \qquad (IV,2;10)$$

De las dos fórmulas anteriores resulta

$$\begin{pmatrix} V_1 - I_1 \\ V_1 + I_1 \end{pmatrix} = (A(p)\, t_o + B(p))(C(p)\, t_o\, D(p))^{-1} \begin{pmatrix} V_2 + I_2 \\ V_2 - I_2 \end{pmatrix} \; .$$

(IV,2;11)

Comparemos (IV,2;11) con (IV,2;1). Concluimos que la función matricial $\left(A(p)\, t_o + B(p)\right)\left(C(p)\, t_o + D(p)\right)^{-1}$ es la matriz de transferencia del 2n-puerto que se obtuvo cerrando de a pares los puertos de salida del 4n-puerto de la figura 2 con cuadripolos.

Si el 4n-puerto es no disipativo, su matriz de transferencia H(p) verifica las condiciones

$$H^*(p)\; j_{2n}\; H(p) - j_{2n} \geqslant 0 \quad \text{en Re } p > 0 \;;$$

$$H^*(p)\; j_{2n}\; H(p) - j_{2n} = 0 \quad \text{en Re } p = 0 \;,$$

donde j_{2n} está dada por la fórmula (IV,1;5).

En virtud de las dos fórmulas anteriores, podemos afirmar que, para sistemas sin pérdidas de energía, la función matricial W(p), relacionada con H(p) por medio de la fórmula (IV,2;5), satisface a las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} &W^*(p)\; R\; j_{2n}\; R^* W(p) - R\; j_{2n}\; R^* \geqslant 0 \quad \text{en Re } p > 0; \\ &W^*(p)\; R\; j_{2n}\; R^* W(p) - R\; j_{2n}\; R^* = 0 \quad \text{en Re } p = 0. \end{aligned} \tag{IV,2;12}$$

De (IV,1;14) y (IV,2;12) resulta, inmediatamente, que la función matricial W(p) verifica las condiciones

$$\begin{aligned} &W^*(p)\; J'\; W(p) - J' \geqslant 0 \quad \text{en Re } p > 0 \;; \\ &W^*(p)\; J'\; W(p) - J' = 0 \quad \text{en Re } p = 0 \;. \end{aligned} \tag{IV,2;13}$$

La función analítica $z = \frac{p-1}{p+1}$ transforma conformemente el semiplano de la derecha en el círculo unidad. Por lo tanto, es inmediato que teoremas equivalentes a los Teoremas 4-1, 4-2 y 4-3 valen para funciones matriciales j-expansivas en el semiplano abierto de la derecha.

Queda claro, ahora, que el Teorema 4-2 nos da una condición suficiente para que una función matricial racional T(p) sea la matriz de transferencia de un 2n-puerto.

A base de los Teoremas 4-1 y 4-3 podemos afirmar que existe una realización real para la matriz de transferencia de un 2n-puerto que verifique las hipótesis 1) o 2). A partir de este resultado obtenemos un método de síntesis de 2n-puertos con matrices de transferencia prefijadas. Consiste en cerrar de a pares con n cuadripolos (de matriz de transferencia conocida) los puertos de salida de un 4n-puerto no disipativo. En efecto, según vimos en el parágrafo IV,2, la matriz constante de la transformación lineal fraccionaria es la matriz de transferencia del sistema de n cuadripolos y la matriz de coeficientes W(p) está relacionada por medio de la fórmula (IV,2;5) con la matriz de transferencia del 4n-puerto no disipativo. El resultado tiene interés ya que existen métodos de síntesis de 2n-puertos no disipativos de matriz de transferencia prefijada (cf. [12]).

V - MULTIPLICIDAD DE LAS REALIZACIONES DE UNA FUNCION MATRICIAL j-EXPANSIVA.

La realización de una función matricial j-expansiva $T(z)$, de orden $2n$, como transformación lineal fraccionaria, no es única. Tiene importancia la descripción de todas las posibles realizaciones, especialmente en el problema de la síntesis de un 2n-puerto de matriz de transferencia prefijada.

Nosotros hemos logrado obtener una fórmula (cf. fórmula (V,2;10) que resuelve el problema de la multiplicidad de las realizaciones en el caso particular en que la matriz j-expansiva $T(z)$ verifica la condición

$$T^*(\xi)\ j\ T(\xi) - j > 0, \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

V,1. Demostraremos un teorema preparatorio, a base del cual obtendremos, en el parágrafo V,2, las fórmulas (V,2;10) y (V,2;11), que son los resultados fundamentales de este capítulo.

Sea $T(z)$ una función matricial j-expansiva en D, y $S(z)$ la función matricial contractiva relacionada con $T(z)$ por medio de la fórmula (IV,1;4).

Introduzcamos la notación

$$S(z) = \begin{pmatrix} s_{11}(z) & s_{12}(z) \\ s_{21}(z) & s_{22}(z) \end{pmatrix} \qquad (V,1;1)$$

<u>Teorema 5-1</u>

<u>Hipótesis</u>.

La función matricial $T(z)$, de orden $2n$, es de la clase $T\pi$ y verifica la condición

$$T^*(\xi)\ j\ T(\xi) - j > 0, \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \qquad (V,1;2)$$

Tesis.

La matriz de coeficientes

$$T_1(z) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} T_{11}(z) & T_{12}(z) \\ T_{21}(z) & T_{22}(z) \end{pmatrix}$$

de la transformación lineal fraccionaria

$$S(z) = \left(T_{11}(z)\varepsilon_o + T_{12}(z)\right)\left(T_{21}(z)\varepsilon_o + T_{22}(z)\right)^{-1} ,$$

con $\varepsilon_o = 0_{2n}$, de la función matricial $S(z)$, relacionada con $T(z)$ por medio de la fórmula (IV,1;4), verifica

$$T_1(z) = R\, W(z)\, R^*\, t_1^{-1} \qquad (z \in D) , \qquad (V,1;3)$$

donde $W(z)$ es la matriz de coeficientes de la transformación lineal fraccionaria (IV,1;7) de $T(z)$ y las matrices R y t_1 están definidas por las fórmulas (IV,1;12) y (IV,1;15) respectivamente.

Demostración.

Sea

$$T(z) = \left(A(z)\, t_o + B(z)\right) \left(C(z)\, t_o + D(z)\right)^{-1} ,$$

donde

$$A(z) = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix} ; \qquad B(z) = \begin{pmatrix} b_{11}(z) & b_{12}(z) \\ b_{21}(z) & b_{22}(z) \end{pmatrix} ;$$

$$C(z) = \begin{pmatrix} c_{11}(z) & c_{12}(z) \\ c_{21}(z) & c_{22}(z) \end{pmatrix} \quad ; \quad D(z) = \begin{pmatrix} d_{11}(z) & d_{12}(z) \\ d_{21}(z) & d_{22}(z) \end{pmatrix} \quad ;$$

$$t_\circ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix}$$

Entonces

$$T(z) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} t_{11}(z) & t_{12}(z) \\ t_{21}(z) & t_{22}(z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(a_{11}(z)+a_{12}(z)\right) + b_{11}(z) & \frac{1}{2}\left(a_{11}(z)+5a_{12}(z)\right) + b_{12}(z) \\ \frac{1}{2}\left(a_{21}(z)+a_{22}(z)\right) + b_{21}(z) & \frac{1}{2}\left(a_{21}(z)+5a_{22}(z)\right) + b_{22}(z) \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(c_{11}(z)+c_{12}(z)\right) + d_{11}(z) & \frac{1}{2}\left(c_{11}(z)+5c_{12}(z)\right) + d_{12}(z) \\ \frac{1}{2}\left(c_{21}(z)+c_{22}(z)\right) + d_{21}(z) & \frac{1}{2}\left(c_{21}(z)+5c_{22}(z)\right) + d_{22}(z) \end{pmatrix}^{-1}$$

Calculemos la matriz $T_1(z)$ dada por la fórmula (V,1;3); obtenemos

$$T_1(z) = \begin{pmatrix} Q & P \\ QJ_p & PJ_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & PJ_p \\ P & QJ_p \end{pmatrix}$$

$$\circ \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{5}\ I_n & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} I_n & \frac{2}{\sqrt{5}} I_n \\ 0 & \sqrt{5}\ I_n & \frac{2}{\sqrt{5}} I & -\frac{1}{\sqrt{5}} I_n \\ \frac{1}{\sqrt{5}} I_n & \frac{2}{\sqrt{5}} I_n & \sqrt{5}\ I_n & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} I_n & -\frac{1}{\sqrt{5}} I_n & 0 & \sqrt{5}\ I_n \end{pmatrix}$$

Por medio de un sencillo cálculo obtenemos los bloques de la matriz $T_1(z)$:

$$T_{11}(z) = \{(QA(z) + PC(z))Q + (QB(z) + PD(z))P\} \frac{\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \{(QA(z) + PC(z))PJ_p + (QB(z) + PD(z))QJ_p\} \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} ;$$

$$T_{12}(z) = \{(QA(z) + PC(z))Q + (QB(z) + PD(z))P\} \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \{(QA(z) + PC(z))PJ_p + (QB(z) + PD(z))QJ_p\} \frac{\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} ;$$

$$T_{21}(z) = \{(QJ_pA(z) + PJ_pC(z))Q + (QJ_pB(z) + PJ_pD(z))P\} \frac{\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \{(QJ_pA(z) + PJ_pC(z))PJ_p + (QJ_pB(z) + PJ_pD(z))QJ_p\} \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} ;$$

$$T_{22}(z) = \{(QJ_pA(z)+PJ_pC(z))Q + (QJ_pB(z)+PJ_pD(z))P\} \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \{(QJ_pA(z)+PJ_pC(z))PJ_p + (QJ_pB(z)+PJ_pD(z))QJ_p\}\frac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

$$(V,1;4)$$

Calculemos ahora la matriz S(z) a partir de la representación a la Darlington con la matriz constante $\varepsilon = 0_{2n}$ y la matriz de coeficientes dada por la fórmula (V,1;4); obtenemos

$$S(z) = T_{12}(z)\, T_{22}^{-1}(z)$$

$$S(z) = \{Q\{A(z)\ (Q\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} + PJ_p\frac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}) +$$

$$+ \quad B(z)\ (P\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} + QJ_p\frac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix})\} +$$

$$+ \quad P\{C(z)\ (Q\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} + PJ_p\frac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}) +$$

$$+ \quad D(z)\ (P\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} + QJ_p\frac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix})\}\}$$

$$\circ\ \{QJ_p\ \{\ A(z)\ (\ Q\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} + PJ_p\frac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}) +$$

$$+ \quad B(z) \; \left(P \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} + QJ_p \frac{\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \right)\} \; +$$

$$+ \; PJ_p \quad \{C(z) \; \left(Q \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} + PJ_p \frac{\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \right) \; +$$

$$+ \quad D(z) \; \left(P \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 2I_n & -I_n \end{pmatrix} + QJ_p \frac{\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \right)\}\}^{-1} .$$

Saquemos factor común de $T_{12}(z)$ y $T_{22}(z)$ la matriz

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} I_n \\ I_n & -\frac{1}{2} I_n \end{pmatrix}$$

Resulta (después de cálculos largos pero elementales)

$$S(z) = \{Q \; \left(A(z) \; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} + B(z)\right) \; +$$

$$P \; \left(C(z) \; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} + D(z)\right)\} \; .$$

$$. \; \{QJ_p \; \left(A(z) \; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} + B(z)\right) \; +$$

$$+ \quad PJ_p \; \left(C(z) \; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix} + D(z)\right)\}^{-1} \; =$$

$$= Q \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_{11}(z)+a_{12}(z)) + b_{11}(z) & \frac{1}{2}(a_{11}(z)+5a_{12}(z)) + b_{12}(z) \\ \frac{1}{2}(a_{21}(z)+a_{22}(z)) + b_{21}(z) & \frac{1}{2}(a_{21}(z)+5a_{22}(z)) + b_{22}(z) \end{pmatrix} \right. +$$

$$+ \quad P \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c_{11}(z)+c_{12}(z)) + d_{11}(z) & \frac{1}{2}(c_{11}(z)+5c_{12}(z)) + d_{12}(z) \\ \frac{1}{2}(c_{21}(z)+c_{22}(z)) + d_{21}(z) & \frac{1}{2}(c_{21}(z)+5c_{22}(z)) + d_{22}(z) \end{pmatrix}$$

$$. \quad QJ_p \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_{11}(z)+a_{12}(z)) + b_{11}(z) & \frac{1}{2}(a_{11}(z)+5a_{12}(z)) + b_{12}(z) \\ \frac{1}{2}(a_{21}(z)+a_{22}(z)) + b_{21}(z) & \frac{1}{2}(a_{21}(z)+5a_{22}(z)) + b_{22}(z) \end{pmatrix} +$$

$$\left. + \quad PJ_p \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c_{11}(z)+c_{12}(z)) + d_{11}(z) & \frac{1}{2}(c_{11}(z)+5c_{12}(z)) + d_{12}(z) \\ \frac{1}{2}(c_{21}(z)+c_{22}(z)) + d_{21}(z) & \frac{1}{2}(c_{21}(z)+5c_{22}(z)) + d_{22}(z) \end{pmatrix} \right\}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_{11}(z)+a_{12}(z)) + b_{11}(z) & \frac{1}{2}(a_{11}(z)+5a_{12}(z)) + b_{12}(z) \\ \frac{1}{2}(c_{21}(z)+c_{22}(z)) + d_{21}(z) & \frac{1}{2}(c_{21}(z)+5c_{22}(z)) + d_{22}(z) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_{21}(z)+a_{22}(z)) + b_{21}(z) & \frac{1}{2}(a_{21}(z)+5a_{22}(z)) + b_{22}(z) \\ \frac{1}{2}(c_{11}(z)+c_{12}(z)) + d_{11}(z) & \frac{1}{2}(c_{11}(z)+5c_{12}(z)) + d_{12}(z) \end{pmatrix}^{-1}$$

Introduzcamos, para abreviar, las siguientes notaciones:

$$a_1(z) = \frac{1}{2}\left(a_{11}(z) + a_{12}(z)\right) + b_{11}(z) \;;$$

$$a_2(z) = \frac{1}{2}\left(a_{11}(z) + 5a_{12}(z)\right) + b_{12}(z) \;;$$

$$a_3(z) = \frac{1}{2}\left(a_{21}(z) + a_{22}(z)\right) + b_{21}(z) \;;$$

$$a_4(z) = \frac{1}{2}\left(a_{21}(z) + 5a_{22}(z)\right) + b_{22}(z) \;;$$

$$c_1(z) = \frac{1}{2}\left(c_{11}(z) + c_{12}(z)\right) + d_{11}(z) \;;$$

$$c_2(z) = \frac{1}{2}\left(c_{11}(z) + 5c_{12}(z)\right) + d_{12}(z) \;;$$

$$c_3(z) = \frac{1}{2}\left(c_{21}(z) + c_{22}(z)\right) + d_{21}(z) \;;$$

$$c_4(z) = \frac{1}{2}\left(c_{21}(z) + 5c_{22}(z)\right) + d_{22}(z) \;.$$

Escribamos los bloques de $T(z)$ y $S(z)$:

$$t_{11}(z) = \left(a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)\left(c_2(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)^{-1} \;;$$

$$t_{12}(z) = \left(a_2(z) - a_1(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right)\left(c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right)^{-1} \;;$$

$$t_{21}(z) = \left(a_4(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)\left(c_2(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)^{-1} \;;$$

$$t_{22}(z) = \left(a_4(z) - a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right)\left(c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right)^{-1} \;;$$

(V,1;5)

$$s_{11}(z) = \left(a_2(z) - a_1(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right)\left(a_4(z) - a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right)^{-1} \;;$$

$$s_{12}(z) = \left(a_2(z) - a_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)\left(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)^{-1} \;;$$

$$s_{21}(z) = (c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))(a_4(z) - a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))^{-1} \quad ;$$

$$s_{22}(z) = (c_4(z) - c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))^{-1} \quad ;$$

$$(V,1;6)$$

Calculemos ahora la matriz $T'(z)$ relacionada con $S(z)$ por medio de la fórmula (IV,1;4); obtenemos

$$T'(z) = \begin{pmatrix} s_{12}(z) - s_{11}(z)s_{21}^{-1}(z)s_{22}(z) & s_{11}(z)s_{21}^{-1}(z) \\ - s_{21}^{-1}(z)s_{22}(z) & s_{21}^{-1}(z) \end{pmatrix}$$

Debemos demostrar que $T'(z) = T_1(z)$.

Es inmediato ver que

$$t_{22}(z) = s_{21}^{-1}(z) \; ,$$

$$t_{12}(z) = s_{11}(z)s_{21}^{-1}(z) \; .$$

Demostraremos que $s_{21}^{-1}(z)s_{22}(z) = t_{21}(z)$. Para ello calculemos $s_{21}^{-1}(z)s_{22}(z)$ utilizando las expresiones (V,1;6); obtenemos

$$s_{21}^{-1}(z)s_{22}(z) = (a_4(z)-a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))(c_4(z)-c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))^{-1}$$

$$(c_4(z)-c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))(c_2(z)-c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))^{-1} \; .$$

Sumemos y restemos el término $a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)$ en el segundo factor y el término $c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)$ en el cuarto factor (los cálculos que siguen son elementales y aburridos):

$$
\begin{aligned}
s_{21}^{-1}(z)s_{22}(z) = & -\{(a_4(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)) + (a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z) - \\
& - a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))\} \, (c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))^{-1} \\
& \quad \{(c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)) + (c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) - \\
& - c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))\} \, (c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))^{-1} \quad = \\
& = (a_4(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)) \, (c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))^{-1} \cdot \\
& \cdot \{(c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)) + \; c_3(z)c_1^{-1}(z) \; \cdot \\
& \cdot \; (c_2(z)-c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))\}(c_2(z)-c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))^{-1} + \\
& + \; a_3(z)c_3^{-1}(z) \; (c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)) \; \cdot \\
& \cdot \; (c_4(z)-c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))^{-1}(c_4(z)-c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)) \; \cdot \\
& \cdot \; (c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)) \quad = \\
& = (a_4(z)-a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z))\{I_n+(c_4(z)-c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)) \; \cdot \\
& \cdot \; c_3(z)c_1^{-1}(z)(c_2(z)-c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))\}(c_2(z)-c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))^{-1} + \\
& + a_3(z)c_3^{-1}(z)(c_4(z)-c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)) \; (c_2(z)-c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))^{-1} \; = \\
& = (a_4(z)-a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z))\{(c_2(z)-c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))^{-1} + \\
& + \; (c_4(z)-c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))^{-1}c_3(z)c_1^{-1}(z)\}+a_3(z)c_3^{-1}(z) \; \cdot \\
& \cdot \; (c \; (z)-c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))(c_2(z)-c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))^{-1} \quad =
\end{aligned}
$$

$$= \left(a_4(z)-a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)\{\left(c_2(z)-c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)^{-1} +$$

$$+ \{c_1(z)c_3^{-1}(z)\left(c_4(z)-c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right)\}^{-1}\} + a_3(z)c_3^{-1}(z) \,.$$

$$\cdot \left(c_4(z)-c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)\left(c_2(z)-c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)^{-1} =$$

$$= \left(a_4(z)-a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)\left(c_2(z)-c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)^{-1} -$$

$$- \left(a_4(z)-a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)\left(c_2(z)-c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)^{-1} +$$

$$+ \ a_3(z)c^{-1}(z) \ \left(c_4(z) - c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right) \quad .$$

$$\cdot \ \left(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)^{-1} =$$

$$= \quad \left(a_4(z)-a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)\left(c_2(z)-c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)^{-1} +$$

$$+ \left(a_4(z)-a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)+a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)-a_4(z)\right) \quad .$$

$$\cdot \ \left(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)^{-1} =$$

$$= \left(a_4(z)-a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)\left(c_2(z)-c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)^{-1} =$$

$$= \ t_{21}(z).$$

Para finalizar la demostración sólo resta ver que

$$t_{11}(z) = s_{12}(z) - s_{11}(z)s_{21}^{-1}(z)s_{22}(z) \ .$$

Calculemos $s_{12}(z) - s_{11}(z)s_{21}^{-1}(z)s_{22}(z)$ utilizando las expresiones (V,1;6); obtenemos

$$s_{12}(z) - s_{11}(z)s_{21}^{-1}(z)s_{22}(z) = \left(a_2(z) - a_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)$$

$$\cdot \left(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)^{-1} + \left(a_2(z) - a_1(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(a_4(z) - a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right)^{-1} \left(a_4(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(c_2(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)^{-1} .$$

Saquemos factor común$\left(c_2(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)^{-1}$. Resulta

$$s_{12}(z) - s_{11}(z)s_{21}^{-1}(z)s_{22}(z) = \{\left(a_2(z) - a_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)^{-1} \left(c_2(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right) +$$

$$+ \left(a_2(z) - a_1(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right) \left(a_4(z) - a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left(a_4(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)\}\left(c_2(z) \quad c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)^{-1} . \tag{V,1;7}$$

Calculemos el factor que figura entre llaves (lò cual es fácil pero largo y tedioso):

$$\left(a_2(z) - a_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right) \left(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)^{-1}$$

$$\cdot \left(c_2(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right) + \left(a_2(z) - a_1(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(a_4(z) - a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right)^{-1} \left(a_4(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right) =$$

$$= \{\left(a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right) + \left(a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)-a_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)\}$$

$$\cdot \left(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)^{-1}\{\left(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z).a_4(z)\right) +$$

$$+ \quad (c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z))\} + \{(a_2(z) -$$

$$- \quad a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)) + (a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z) - a_1(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))\} \cdot$$

$$(a_4(z) - a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))^{-1} \{(a_4(z) - a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)) +$$

$$+ \quad (a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z))\} =$$

$$= \quad (a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)) \{(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))^{-1} \cdot$$

$$(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)) + (c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))^{-1} \cdot$$

$$(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)) + (a_4(z) -$$

$$- \quad a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))^{-1} (a_4(z) - a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)) + (a_4(z) -$$

$$- \quad a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))^{-1} (a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z))\} +$$

$$+ \quad (a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z) - a_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)) \{I_n + (c_2(z) -$$

$$- \quad c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))^{-1} (c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z))\} +$$

$$+ \quad (a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z) - a_1(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)) \{I_n + (a_4(z) -$$

$$- a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))^{-1} (a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)) =$$

$$= \quad (a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z))\{I_n - (c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))^{-1}$$

$$(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)) + I_n + (a_4(z) -$$

$$- \quad a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))^{-1} (a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z))\} +$$

$$+ \quad a_1(z)c_3^{-1}(z)\ \big(c_4(z) - c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\big)\ \{I_n + \big(c_2(z) -$$

$$- \quad c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\big)^{-1}\ \big(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big)\} \ +$$

$$+ \quad a_1(z)c_3^{-1}(z)\ \big(c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\big)\{I_n + \big(a_4(z) -$$

$$- \quad a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\big)^{-1}\ \big(a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big)\} \ =$$

$$= \big(a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big)\ \{2I_n + \big(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\big)^{-1}$$

$$c_1(z)a_3^{-1}(z)\ \big(a_4(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big) + \big(a_4(z) \ -$$

$$- \quad a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\big)\ \big(a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big)\} \ +$$

$$+ \quad a_1(z)c_3^{-1}(z)\ \{\big(c_4(z) - c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\big) + \big(c_4(z) -$$

$$- \quad c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\big)\ \big(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\big)^{-1}\ \big(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)$$

$$- \quad c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big) + \big(c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\big) + \big(c_4(z) -$$

$$- \quad c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\big)\ \big(a_4(z) - a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\big)^{-1}\big(a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)$$

$$- \quad a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big)\} \ =$$

$$= \big(a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big)\ \{2I_n + \big(a_4(z) - a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\big)^{-1}$$

$$.\ \big(a_4(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big) + \big(a_4(z) - a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\big)^{-1} \ .$$

$$.\ \big(a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big)\} + a_1(z)c_3^{-1}(z)\ \{\big(c_4(z) \ -$$

$$- \quad c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\big) + \big(c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\big) + \big(c_4(z) -$$

$$- \quad c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)) \ (c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))^{-1} \ c_1(z)a_3^{-1}(z) \ .$$

$$. \quad (a_4(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)) + (c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)) \ (a_4(z) -$$

$$- \quad a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))^{-1} \ (a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z))\} \ =$$

$$= \quad (a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)) \ \{2I_n - (a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) - a_4(z))$$

$$. \quad (a_4(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z) + a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z) - a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))\} \ +$$

$$+ \quad a_3(z)c_1^{-1}(z) \ \{(c_4(z) - c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)) + (c_4(z) -$$

$$- \quad c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)) + (c_4(z) - c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)) \ (a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) -$$

$$- \quad a_4(z))^{-1} \ (a_4(z) - a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) + a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) -$$

$$- \quad a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)) + (c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z))(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) -$$

$$- \quad a_2(z))^{-1} \ (c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) + c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) -$$

$$- \quad c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z))\} \ =$$

$$= \quad (a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)) + a_3(z)c_1^{-1}(z) \ \{c_4(z) -$$

$$- \quad c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) + c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) + (c_4(z) -$$

$$- \quad c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))(a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) - a_4(z))^{-1} \ (a_4(z) -$$

$$- \quad a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)) + (c_4(z) - c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z))(a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) -$$

$$- \quad a_4(z))^{-1} \left(a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) - a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right) + \left(c_4(z) -\right.$$

$$- \quad c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\big) \left(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_2(z)\right)^{-1} \left(c_2(z) -\right.$$

$$- \quad c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\big) + \left(c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right)$$

$$\left(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_2(z)\right)^{-1} \left(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) -\right.$$

$$- \quad c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big)\} \quad =$$

$$= \quad \left(a_2(z)-a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right) + a_1(z)c_3^{-1}(z) \ \{c_4(z) - c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) +$$

$$+ \quad c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) + c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_4(z) +$$

$$+ \quad c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_4(z) + \left(c_4(z) - c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right) \quad .$$

$$\left(a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) - a_4(z)\right)^{-1} \left(a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) -\right.$$

$$- \quad a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big) + \left(c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right)\left(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)-\right.$$

$$- \quad c_2(z)\big)^{-1} \left(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)\} \quad =$$

$$= \quad \left(a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right) + a_1(z)c_3^{-1}(z) \ \{\left(c_4(z) -\right.$$

$$- \quad c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\big) \left(a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) - a_4(z)\right)^{-1}\left(a_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)-\right.$$

$$- \quad a_3(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big) + \left(c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\right)\left(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)-\right.$$

$$- \quad c_2(z)\big)^{-1} \left(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)\} \quad =$$

$$= \quad \left(a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right) + a_1(z)c_3^{-1}(z) \ \{\left(c_4(z) -\right.$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\big) \ \big(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\big)^{-1} \ \big(c_2(z) - \\
&- \quad c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big) + \big(c_4(z) - c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z)\big)\big(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - \\
&- \quad c_2(z)\big)^{-1} \ \big(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big)\big\} \ = \\
&= \ \big(a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big) + a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z) \ \big(c_2(z) - \\
&- \quad c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\big)^{-1} \ \big(c_2(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z) - \\
&- \quad c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) + c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big) - c_3(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) \ \big(c_2(z) - \\
&- \quad c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\big)^{-1} \ \big(c_2(z) - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big) - \\
&- \quad c_3(z)c_1^{-1}(z)c_2(z) \ \big(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_2(z)\big)^{-1}\big(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - \\
&- \quad c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big) \ = \\
&= \ \big(a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big) + a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z) - \\
&- \quad a_1(z)c_3^{-1}(z)c_3(z) \ \{a_3^{-1}(z)a_4(z) \ \big(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\big)^{-1}c_2(z) - \\
&- \quad a_3^{-1}(z)a_4(z) \ \big(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\big)^{-1} \ c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z) + \\
&+ \quad c_1^{-1}(z)c_2(z) \ \big(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_2(z)\big)^{-1} \ c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - \\
&- \quad c_1^{-1}(z)c_2(z) \ \big(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_2(z)\big)^{-1} \ c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\} \ = \\
&= \ \big(a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\big) + a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z) - a_1(z)
\end{aligned}
$$

$$\{a_3^{-1}(z)a_4(z)\ \left(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)\ c_2(z) + c_1^{-1}(z)c_2(z)\ .$$

$$\left(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_2(z)\right)^{-1}\ c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) -$$

$$- \left(a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_1^{-1}(z)c_2(z)\right)\ \left(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_2(z)\right)^{-1} .$$

$$c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\} =$$

$$= \left(a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right) + a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z) - a_1(z)\ .$$

$$.\ \{\{c_2^{-1}(z)\ \left(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)\ a_4^{-1}(z)a_3(z)\}^{-1} +$$

$$+ \{a_4^{-1}(z)a_3(z)c_1^{-1}(z)\ \left(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_2(z)\right)\ c_2^{-1}(z)c_1(z)\}^{-1} -$$

$$- c_1^{-1}(z)\ \left(c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z) - c_2(z)\right)\ \left(c_2(z) - c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\right)^{-1}$$

$$c_1(z)a_3^{-1}(z)a_4(z)\} =$$

$$= \left(a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right) + a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z) - a_1(z)\ .$$

$$.\ \{\left(a_4^{-1}(z)a_3(z) - c_2^{-1}(z)c_1(z)\right)^{-1} + \left(c_2^{-1}(z)c_1(z) - a_4^{-1}(z)a_3(z)\right)^{-1} -$$

$$- c_3^{-1}(z)c_4(z)\} =$$

$$= \left(a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right) + a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z). \tag{V,1;8}$$

De (V,1;7) y (V,1;8) obtenemos

$$s_{12}(z) - s_{11}(z)s_{21}^{-1}(z)s_{22}(z) = \left(a_2(z) - a_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)\left(c_2(z) - \right.$$

$$\left. - c_1(z)c_3^{-1}(z)c_4(z)\right)^{-1} .$$

De la fórmula anterior resulta, en virtud de (V,1;5),

$$s_{12}(z) - s_{11}(z)\ s_{12}^{-1}(z)\ s_{22}(z) = t_{11}(z) \qquad (z \in D).$$

Queda, así, demostrado el Teorema 5-1.

V,2. Utilizando el Teorema 5-1 obtendremos una fórmula que resuelve el problema de la multiplicidad de las representaciones de una función matricial j-expansiva $T(z)$ ($\in T\Pi$) de orden $2n$, que satisface a la condición (V,1;2) .

Sea

$$T(z) = \left(A(z)\ t + B(z)\right)\left(C(z)\ t + D(z)\right)^{-1} \qquad (V,2;1)$$

una representación cualquiera de $T(z)$, con matriz constante t, j-expansiva, y matriz de coeficientes

$$W(z) = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix} \qquad (V,2;2)$$

que verifica

$$W^*(z)\ J'W(z) - J' \geq 0 \quad (z \in D);$$

$$W^*(\xi)\ J'W(\xi) - J' = 0\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1. \qquad (V,2;3)$$

En virtud de (V,2;1) resulta

$$T^*(\xi)\ j\ T(\xi) - j = (C(\xi)\ t + D(\xi))^{*-1}\ \{(A(\xi)t + B(\xi))^*\ j\ (A(\xi)t + B(\xi)) - (C(\xi)t + D(\xi))^*\ j\ (C(\xi)t + D(\xi))\}\ .\ (C(\xi)t + D(\xi))^{-1}\ ,$$

p.p. en $|\xi| = 1$. (V,2;4)

La igualdad (V,2;3) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones para los bloques de $W(z)$:

$$A^*(\xi)\ j\ A(\xi) - C^*(\xi)\ j\ C(\xi) = j\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

$$B^*(\xi)\ j\ B(\xi) - D^*(\xi)\ j\ D(\xi) = j\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1;$$

$$A^*(\xi)\ j\ B(\xi) - C^*(\xi)\ j\ D(\xi) = 0\ , \quad \text{p.p. en } |\xi| = 1.$$

(V,2;5)

De las fórmulas (V,2;4) y (V,2;5) obtenemos

$$T^*(\xi)\ j\ T(\xi) - j = (C(\xi)t + D(\xi))^{*-1}(t^*jt - j)(C(\xi)t + D(\xi))^{-1}\ ,$$

p.p. en $|\xi| = 1$. (V,2;6)

Como $T(\xi)$ satisface a la condición (V,1;2), de la fórmula anterior concluimos que

$$t^*\ j\ t\ -\ j\ >\ 0\ ;$$

por lo tanto, la matriz j-expansiva t se puede representar como una transformación lineal fraccionaria

$$t = (u_{11} t_o + u_{12})\ (u_{21} t_o + u_{22})^{-1} \tag{V,2;7}$$

donde t_o es la matriz j-expansiva constante dada por la fórmula (IV,1;10) y la matriz de coeficientes

$$U_t = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

cuyos bloques consignamos a continuación, es J'-unitaria.

$$u_{11} = (P(Pt + Q)^{*-1}(Qt + P)^* + Q)(P(Pt + Q)^{*-1}(Qt + P)^* - Q)^{-1}$$

$$.\ (tjt^* - j)^{-1/2}(\sqrt{5}\ Q - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix}) + t(t^*jt - j)^{-1/2}\ .$$

$$.\ (\sqrt{5}\ Q\ J_p - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 2I_n & 0 \end{pmatrix}) ;$$

$$u_{12} = (P(Pt + Q)^{*-1}(Qt + P)^* + Q)(P(Pt + Q)^{*-1}(Qt + P)^* - Q)^{-1}$$

$$.\ (tjt^* - j)^{-1/2}(\sqrt{5}\ P - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}) + t(t^*jt - j)^{-1/2}\ .$$

$$.\ (\sqrt{5}\ PJ_p - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 2I_n \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}) ;$$

$$u_{21} = \big(Q(Pt + Q)^{*-1}(Qt + P)^* + P\big)\big(P(Pt + Q)^{*-1}(Qt + P)^* - Q\big)^{-1}$$

$$\cdot\ (tjt^* - j)^{-1/2}\Big(\sqrt{5}\ Q - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix}\Big) + (t^*jt - j)^{-1/2}$$

$$\cdot\ \Big(\sqrt{5}\ Q\ J_p - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 2I_n & 0 \end{pmatrix}\Big)\ ;$$

$$u_{22} = \big(Q(Pt + Q)^{*-1}(Qt + P)^* + P\big)\big(P(Pt + Q)^{*-1}(Qt + P)^* - Q\big)\ .$$

$$\cdot\ (tjt^* - j)^{-1/2}\Big(\sqrt{5}\ P - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}\Big) + (t^*jt - j)^{-1/2}\ .$$

$$\cdot\ \Big(\sqrt{5}\ PJ_p - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 & 2I_n \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}\Big) \qquad (V,2;8)$$

De las fórmulas (V,2;1) y (V,2;7) resulta

$$T(z) = \big(A_o(z)t_o + B_o(z)\big)\big(C_o(z)t_o + D_o(z)\big)^{-1}\ , \qquad (V,2;9)$$

donde

$$W_o(z) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_o(z) & B_o(z) \\ C_o(z) & D_o(z) \end{pmatrix} = W(z)\ U_t\ . \qquad (V,2;10)$$

Como $T(z)$ satisface a la hipótesis del Teorema 5-1, la matriz de coeficientes $W_o(z)$ de la realización (V,2;9), puede expresarse, en virtud de este teorema, en la forma

$$W_o(z) = R^{-1}T_1(z)(R^* t_1^{-1})^{-1}, \qquad (V,2;11)$$

donde $T_1(z)$ es la matriz de coeficientes de una realización a la Darlington de la función matricial $S(z)$, relacionada con $T(z)$ por la fórmula (IV,1;4), con matriz constante $\varepsilon_o = 0_{2n}$.

Sabemos (cf. [2], p. 1316, fórmulas 4.8 y 4.9 y fórmula (III,2;18)), que se verifica

$$T_1(z) = \begin{pmatrix} \Psi^{*-1}(\frac{1}{\bar z}) & S(z)\,\Theta^{-1}(z) \\ S^*(\frac{1}{\bar z})\,\Psi^{*-1}(\frac{1}{\bar z}) & \Theta^{-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2(z) & 0 \\ 0 & V_1^{-1}(z) \end{pmatrix},$$

(V,2;12)

donde $\Theta(z)$ y $\Psi(z)$ son las soluciones de los problemas de factorización, $I_{2n} - S^*(\xi)S(\xi)$ y $I_{2n} - S(\xi)S^*(\xi)$, determinadas unívocamente por las condiciones de normalización, y $V_1(z)$ y $V_2(z)$ son funciones matriciales interiores que caracterizan el grado de arbitrariedad de la realización.

En las aplicaciones físicas las funciones matriciales que aparecen son reales en D; es decir, que cumplen la condición $\overline{S(\bar z)} = S(z)$. En relación con esto consideraremos matrices $T(z)$ j-expansivas reales ($z \in D$) y sus realizaciones reales.

Teorema 5-2

Hipótesis.

T(z) es una función matricial, de orden 2n, es de la clase $T\Pi$ y verifica la condición

$$T^*(\xi)\ j\ T(\xi) - j > 0, \text{ p.p. en } |\xi| = 1.$$

Tesis.

Todas las realizaciones reales de T(z) se obtienen de las fórmulas (V,2;10), (V,2;11) y (V,2;12) con matrices $V_1(z)$ y $V_2(z)$ reales.

Demostración.

Demostramos en el Teorema 4-3 que si T(z) es real, son reales las soluciones $\Theta(z)$ y $\Psi(z)$ de los problemas de factorización $I_{2n} - S^*(\xi)S(\xi)$ y $I_{2n} - S(\xi)S^*(\xi)$; por lo tanto, la matriz $T_1(z)$ obtenida con funciones $V_1(z)$ y $V_2(z)$ reales, resulta real. Entonces, la matriz $W_o(z)$ es real, por construcción.

Para las realizaciones reales la matriz constante t, j-expansiva es real, luego U_t es real. Es decir, que todas las realizaciones reales se obtienen con las fórmulas (V,2;10), (V,2;12) y (V,2;11) von $V_1(z)$ y $V_2(z)$ reales.

A. González Domínguez

BIBLIOGRAFIA

(1) B. Sz.-Nagy and C. Foias, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North Holland, Amsterdam, American Elsevier, New York; Akad. Kiadó, Budapest, 1970.

(2) D.Z. Arov, Darlington realization of matrix-valued functions, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. Tom 37 (1973), N°6; English transl., Math USSR Izvestija, Vol. 7 (1973), N°6, 1295-1326.

(3) R. Nevanlinna, Eindeutige analitische funktionen, Springer-Verlag, Berlin, Gotingen, Heidelberg, 1953.

(4) S. Darlington, Synthesis of reactance 4-poles which produce prescribed insertion loss characteristic including special applications to filter design, J. Math. Phys. 18 (1939), 257-353.

(5) E. Ja. Melamud, Sobre una generalización del teorema de Darlington, Izv. Akad Nauk Armjan. SSR Ser. Mat. 7 (1972), 183-195 (en ruso).

(6) F. Riesz and B. Sz.-Nagy, Lecons d'analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars 1955.

(7) A.I. Maltsev, Fundamentos de álgebra, Editorial Mir. Moscú, 1972.

(8) W. Cauer, Synthesis of linear communication networks, Mc Graw Hill, New York, 1958.

(9) D.Z. Arov, On unitary coupling with losses, Funktional Anal. i Prilozhen. 8 (1974), N°4; English transl. Functional Anal. Appl. 8 (1974), 280-293.

(10) M. Rosemblum and J. Rovnyak, The factorization problem for non-negative operator-valued functions, Bull. Ame. Math. Soc., vol. 77 (1971), N°3, 287-219.

(11) A.V. Efimov and V.P. Potapov, J-expanding matrix-valued functions and their role in the analytical theory of electric circuits, Uspehi Mat. Nauk 28 (1973), N°1, 65-130; English transl. Russian Math Surveys 28 (1973), N°1, 69-140.

(12) G. Gnavi, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 1974.