Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Descomposición atómica de distribuciones en espacios Hp parabólicos

Gatto, Angel Bartolomé Eduardo

1979

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Gatto, Angel Bartolomé Eduardo. (1979). Descomposición atómica de distribuciones en espacios Hp parabólicos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1603_Gatto.pdf

Cita tipo Chicago:
Gatto, Angel Bartolomé Eduardo. "Descomposición atómica de distribuciones en espacios Hp parabólicos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1979. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1603_Gatto.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

"DESCOMPOSICION ATOMICA DE DISTRIBUCIONES EN ESPACIOS H^p PARABOLICOS"

Angel B. Eduardo Gatto

Tesis presentada para optar al título

de Doctor en Ciencias Matemáticas

Director: Prof. Alberto P. Calderón

Dpto. de Matemática, Fac. de Cs.

Exactas y Naturales, U. B. A.

Septiembre de 1979

INTRODUCCION

En este trabajo se obtiene una descomposición atómica de las distribuciones pertenecientes a un espacio H^p parabólico, $0 < p \leq 1$.

Este tipo de descomposición fue obtenido en el caso elíptico por R. Coifman en [4] y R. Latter en [7]. Posteriormente en el caso parabólico, para espacios asociados a grupos de dilataciones diagonalizables por A. Calderón en [1].

El principal interés de nuestra descomposición es que abarca a todos los espacios H^p parabólicos, en particular los asociados a grupos de dilataciones no diagonalizables, para los cuales no había sido hecha.

El método usado se basa en el de Calderón en [1] para el caso diagonalizable; la principal modificación consiste en introducir una partición de la unidad del tipo de Whitney, que nos permite hacer las estimaciones necesarias; incidentalmente éstas resultan de una manera más simple.

Hemos dividido este trabajo en cuatro secciones.

La primera sección se dedica a ciertos preliminares. Estos

son resultados básicos de la Teoría de Espacios H^p Parabólicos,que han sido incluídos con el propósito de que esta exposición sea lo más autocontenida posible.Simultáneamente introducimos la notación.Por último se enuncia el Teorema de Descomposición Atómica.

La segunda sección consiste de tres lemas;los dos primeros constituyen el material básico del método empleado,el tercero da estimaciones entre la norma en H^p de un átomo,la norma en L^r y la llamada p-norma de éste.

La tercera sección está dedicada a la construcción de la partición de la unidad.

En la cuarta sección,dada $f \in H^p$,se construyen los átomos y se demuestra que éstos dan la descomposición requerida de f.

Finalmente queremos mencionar que varios autores han aplicado este tipo de resultado,especialmente en el caso elíptico,al estudio de varios problemas en H^p;también,resultados conocidos de esta teoría han sido obtenidos de manera más simple usando esta descomposición.Es ilustrativo al respecto el trabajo de R. Coifman y G. Weiss,[5].Uno de los resultados importantes que se obtienen de la descomposición atómica

es la dualidad de los espacios H^p,(ver [5]),cuyas demostraciones se pueden extender al caso parabólico.

RECONOCIMIENTOS

Deseo expresar mi reconocimiento y gratitud al Prof. Alberto P. Calderón por su generosa actitud,su apoyo y sus enseñanzas,mediante las cuales he podido llevar a cabo este trabajo.

Quiero también expresar mi agradecimiento al Prof. Alberto González Domínguez por su constante interés y estímulo;a los Profesores Norberto Fava y Enzo Gentile,quienes me brindaron siempre su aliento y confianza;a mis amigos y colegas Eduardo Antín,Nestor Bucari,Pablo Werning por el apoyo recibido de ellos,y especialmente a Cristian Gutiérrez con quien he recorrido diversas partes del Análisis Armónico durante nuestros años de doctorado.

Finalmente quiero agradecer al C.O.N.I.C.E.T.,la beca que me otorgó para realizar esta investigación.

1. Preliminares y Enunciado del Resultado

En esta sección, estableceremos algunos resultados básicos de la Teoría de Espacios H^p Parabólicos de A. Calderón y A. Torchinsky, éstos pueden hallarse en [2] y [3], razón por la cual omitiremos las demostraciones correspondientes. Simultáneamente introduciremos la notación, que en general es la usada en este contexto. Por último se enuncia el Teorema de Descomposición Atómica.

Notación

R^n denotará el espacio euclídeo n-dimensional. Si $x \in R^n$, $|x|$ será la norma de x. $R_+ = \{ t \in R : t > 0 \}$, $R_+^{n+1} = R^n \times R_+$. Si $E \subset R^n$, es un conjunto medible Lebesgue, $|E|$ denotará su medida. C_0^∞ será la clase de funciones en R^n infinitamente derivables y con soporte compacto, S la clase de funciones infinitamente derivables y de decrecimiento rápido en el ∞, S' la clase de distribuciones temperadas. L^p será la clase de funciones medibles f tales que $\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty$, $0 < p \leq \infty$, si $p=\infty$, $\|f\|_\infty = \text{sup. esencial } |f|$. Para $f \in S'$, $\hat{f}$ denotará la transformada de Fourier de f. En todo el trabajo usaremos la letra c para denotar una constante, la cuál puede ser diferente en ocasiones distintas.

Grupo de dilataciones y métrica asociada

Consideraremos un grupo multiplicativo de parámetro $t \in R_+$ de transformaciones lineales de R^n, que denotamos A_t, con la siguiente propiedad:

(1.1) Existen α y β, $1 \leq \alpha \leq \beta$, tales que para todo $x \in R^n$ y $t \geq 1$,

$$t^{\alpha} |x| \leq |A_t x| \leq t^{\beta} |x|.$$

Es consecuencia de (1.1):

(1.2) $$t^{\beta} |x| \leq |A_t x| \leq t^{\alpha} |x|, \ \forall\ x \in R^n \text{ y } t < 1.$$

El generador infinitesimal del grupo A_t será denotado por P, como es sabido $A_t = e^{P.\log t}$ y si γ = traza de P, $\det(A_t) = t^{\gamma}$. Con $\rho(x)$ denotaremos el único valor de t tal que $|A_t^{-1}x| = 1$ y con $d(x,y) = \rho(x-y)$ la métrica asociada al grupo A_t. La función $\rho(x)$ satisface las siguientes propiedades:

(1.3) $$\rho(A_t x) = t\ \rho(x),$$

(1.4) $$\rho(x) \leq 1 \text{ si y solo si } |x| \leq 1,$$

(1.5) $$\rho(x)^{\beta} \leq |x| \leq \rho(x)^{\alpha}, \quad \text{si } \rho(x) \leq 1,$$

(1.6) $$\rho(x)^{\alpha} \leq |x| \leq \rho(x)^{\beta}, \quad \text{si } \rho(x) \geq 1,$$

(1.7) $d(x,y)$ es una métrica en R^n invariante por traslaciones.

El traspuesto de A_t respecto del producto escalar usual de R^n será denotado por A_t^*, éstos forman un grupo multiplicativo que satisface (1.1) y $\rho^*(x)$ será la métrica asociada.

Aproximaciones de la identidad, Función Maximal y Espacios H^p

Dadas $\varphi \in S$ y $f \in S'$, sean

$$\varphi_t(x) = t^{-\gamma} \varphi(A_t^{-1}x),$$

$$F(x,t) = (f * \varphi_t)(x), \quad (x,t) \in R_+^{n+1},$$

y la función maximal no tangencial

$$M_a(x,F) = \sup_{\rho(x-y) \leq at} |F(y,t)|, \quad a > 0, \ x \in R^n.$$

Definiremos ahora los espacios H^p parabólicos, introducidos en [3] .

DEFINICION 1.1. Sean $\varphi \in S$, $\int \varphi(x)\, dx \neq 0$, $0 < p \leq \infty$, $f \in S'$. Entonces $f \in H^p$ si $M_a(x,F) \in L^p$ y la norma de $f \in H^p$ esta dada por

$$\| f \|_{H^p} = \| M_a(x,F) \|_p.$$

Los espacios H^p no dependen de la elección de $\varphi \in S$, ni de $a \in R_+$ y para otra elección de φ y a, las correspondientes normas son equivalentes. Si $1 < p \leq \infty$, H^p coincide con L^p y ambas normas son equivalentes. Si $p=1$, H^1 es un espacio de Banach ($H^1 \subsetneq L^1$). Para $0 < p < 1$,

la función distancia $\|f - g\|_{H^p}^p$ dota a H^p de la estructura de espacio métrico completo.

Necesitaremos las siguientes proposiciones:

PROPOSICION 1.1. Sea f en $H^p, 0 < p < \infty$, $a > 0$. Entonces

$$|F(x,t)| \leq c \, \|M_a\|_p \, t^{-\gamma/p}. \tag{1.8}$$

Esta proposición es parte del Teorema 2.6 de [2] .

PROPOSICION 1.2. Sean $f \in H^p, \varphi \in S, \int \varphi(x)\, dx \neq 0, \psi \in S; F(x,t) = (f * \varphi_t)(x)$ y $H(x,t) = (f * \psi_t)(x); 0 < p \leq \infty$. Entonces

$$\|M_a(x,H)\|_p \leq c \, \|M_a(x,F)\|_p. \tag{1.9}$$

Esta proposición es parte del Teorema 4.7 de [2] .

<u>Descomposición Atómica</u>

DEFINICION 1.2. Un k-átomo α es una función acotada con soporte compacto y momentos nulos hasta el orden k, k entero mayor o igual que 0. La p-norma, $0 < p \leq 1$, de un átomo α se define como

$$\|\alpha\|_{(p)} = \|\alpha\|_\infty \left(\inf_B |B|^{1/p}\right),$$

donde B es una bola $\{x : \rho(x-x_0) \leq r\}$ que contiene al soporte de α.

Como veremos en el Lema 2.3 , si $k \geq \gamma/p - \gamma$, $0 < p \leq 1$, entonces $\alpha \in H^p$ y $\|\alpha\|_{H^p} \leq c \, \|\alpha\|_{(p)}$.

Enunciaremos ahora nuestro resultado:

TEOREMA. Sea $f \in H^p, 0 < p \leq 1$ y $k \geq \gamma/p - \gamma$. Entonces existe una sucesión α_j de k-átomos, tales que $f = \sum_1^\infty \alpha_j$ en H^p, o sea $\| f - \sum_1^N \alpha_j \|_{H^p}^p \longrightarrow 0$ para $N \to \infty$. Además fijada una norma en H^p y el valor de k, existe una constante c tal que

$$c^{-1} \| f \|_{H^p}^p \leq \sum \|\alpha_j\|_{(p)}^p \leq c \| f \|_{H^p}^p,$$

para toda $f \in H^p$.

2.-

LEMA 2.1. Sea $\psi \in C_0^\infty$, con soporte contenido en $|x| \leq 1$ y momentos nulos hasta el orden k, k entero mayor o igual que 0, tal que $|\hat{\psi}(A_t^* x)|$ no se anula identicamente en t para $x \neq 0$. Entonces existe una función $\varphi(x)$, tal que $\hat{\varphi} \in C_0^\infty$, $\hat{\varphi}(x) = 0$ en un entorno del origen y tiene la propiedad

$$(2.1) \qquad \int_0^\infty \hat{\varphi}(A_t^* x)\, \hat{\psi}(A_t^* x)\, \frac{dt}{t} = 1, \quad x \neq 0.$$

Si φ es la función considerada anteriormente, la función

$$(2.2) \qquad \hat{\eta}(x) = \int_1^\infty \hat{\varphi}(A_t^* x)\, \hat{\psi}(A_t^* x)\, \frac{dt}{t}, \quad x \neq 0,$$

$$\hat{\eta}(0) = 1,$$

pertenece a C_0^∞ y es 1 en un entorno del origen, además

$$(2.3) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \hat{\varphi}(A_t^* x)\, \hat{\psi}(A_t^* x)\, \frac{dt}{t} = \hat{\eta}(A_{t_0}^* x) - \hat{\eta}(A_{t_1}^* x).$$

DEMOSTRACION. La primera afirmación es consecuencia de Lema 4.1. de [3]. Para probar las propiedades de $\hat{\eta}$, observemos que $\hat{\varphi}$ tiene soporte compacto y por lo tanto $\hat{\varphi}(A_t^* x) = 0$ para $t \geq 1$ si $\rho^*(x)$ es suficientemente grande, luego $\hat{\eta}$ tiene soporte compacto; por otra parte es inmediato que es infinitamente derivable en el complemento del origen y

es 1 en un entorno del origen contenido donde $\hat{\varphi}(x) = 0$. La propiedad (2.3) es consecuencia inmediata de la definición de $\hat{\eta}$.

LEMA 2.2 Sean $f \in H^p$, ψ, φ y η como en el Lema 2.1, η es la antitransformada de Fourier de $\hat{\eta}$, $F(x,t) = (f * \varphi_t)(x)$ y $G(x,t) = (f * \eta_t)(x)$. Entonces f puede expresarse como

$$f = \int_0^\infty \int F(y,t)\, \psi_t(x-y)\, dy\, \frac{dt}{t},$$

en el sentido de las distribuciones, o sea

$$(2.4) \qquad \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \delta \to \infty}} \int \zeta(x) \int_\varepsilon^\delta \int F(y,t)\, \psi_t(x-y)\, dy\, \frac{dt}{t}\, dx = (f,\zeta),$$

$\zeta \in S$. Más aún

$$(2.5) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \int F(y,t)\, \psi_t(x-y)\, dy\, \frac{dt}{t} = G(x,t_0) - G(x,t_1).$$

DEMOSTRACION. (2.5) resulta transformando Fourier y usando (2.3). Ahora (2.5) implica (2.4) ya que $G(x,t_0) \longrightarrow f$ en S' para $t_0 \to 0$ y $G(x,t_1) \longrightarrow 0$ en S' para $t_1 \to \infty$.

LEMA 2.3. Sea α un k-átomo y a el radio de una bola que contiene el soporte de α, $0 < p \leq 1$. Si $k \geq \gamma/p - \gamma$, k entero mayor o igual que 0, entonces $\alpha \in H^p$ y

(2.6) $$\|\alpha\|_{H^p} \leq c\,\|\alpha\|_r\, a^{\gamma/p - \gamma/r},$$

para $1 < r \leq \infty$. En particular

(2.7) $$\|\alpha\|_{H^p} \leq c\,\|\alpha\|_{(p)},$$

donde c depende de k y la elección de la norma en H^p y r.

DEMOSTRACION. Como $\|f(A_a x)\|_{H^p} = a^{-\gamma/p}\|f\|_{H^p}$ y $\|f\|_r$ también verifica una relación análoga, y ambas son invariantes por traslaciones, es suficiente considerar α con soporte en la bola de centro 0 y radio 1, y $\|\alpha\|_r = 1$. Sea $\varphi \in C_0^\infty$, con soporte en $\rho(x) \leq 1$, $\int \varphi(x)\,dx \neq 0$, y tomamos $\|f\|_{H^p} = \|M_1(x,F)\|_p$, $0 < p \leq 1$, donde $F(x,t) = (f * \varphi_t)(x)$.

Sea ahora

$$F(x,t) = \int \alpha(y)\,\varphi_t(x-y)\,dy = \int_{\rho(y)\leq 1} \alpha(y)\,\varphi_t(x-y)\,dy.$$

Como α es un k-átomo, podemos escribir

$$F(x,t) = \int_{\rho(y)\leq 1} \alpha(y)\left[\varphi_t(x-y) - t^{-\gamma}P(A_t^{-1}x, A_t^{-1}y)\right]dy,$$

donde $P(u,v)$ es el polinomio de Taylor de grado k de $\varphi(v)$ en el punto u; entonces

$$\left|\varphi_t(x-y) - t^{-\gamma}P(A_t^{-1}x, A_t^{-1}y)\right| \leq c\,|A_t^{-1}y|^{k+1}\,t^{-\gamma}.$$

Si $t \geq 1$, teniendo en cuenta que $\rho(y) \leq 1$, se tiene

$$\left| A_t^{-1} y \right|^{k+1} \leq (t^{-1})^{\alpha(k+1)} |y|^{k+1} \leq t^{-k-1},$$

usando (1.2).Por lo tanto,

$$\left| F(x,t) \right| \leq c \, \|\alpha\|_1 \, t^{-\gamma-k-1} \leq c \, t^{-\gamma-k-1},$$

para $t \geq 1$, ($\|\alpha\|_r = 1$).

Notemos ahora que $F(x,t) = 0$ si $t+1 \leq \rho(x)$, en consecuencia $F(y,t) = 0$ para $\rho(x-y) \leq t \leq \frac{\rho(x) - 1}{2}$;luego si $\rho(x) \geq 3$, tenemos

$$\sup_{\rho(x-y) \leq t} \left| F(y,t) \right| \leq c \, t^{-\gamma-k-1} \leq c \left[\frac{\rho(x) - 1}{2} \right]^{-\gamma-k-1},$$

y como $k \geq \gamma/p - \gamma$,resulta

$$\int_{\rho(x) \geq 3} \left[M_1(x,F) \right]^p dx \leq c.$$

Por otra parte

$$\int_{\rho(x) < 3} \left[M_1(x,F) \right]^p dx \leq \left(\int_{\rho(x) < 3} \left[M_1(x,F) \right]^r dx \right)^{p/r} (3^\gamma \omega_n)^{1-p/r}$$

$$\leq c' \left(\frac{r}{r-1} \right)^p \|\alpha\|_r^p \, (3^\gamma . \omega_n)^{1-p/r}$$

$$\leq c' \left(\frac{r}{r-1} \right)^p (3^\gamma . \omega_n)^{1-p/r}.$$

El Lema resulta combinando ambas estimaciones.

3.- UNA PARTICION DE LA UNIDAD

LEMA 3.1. Sea $\mathcal{O}$ un conjunto abierto de R^n, de medida finita. Entonces existe una familia numerable de funciones ζ_j, con las siguientes propiedades:

(3.1) $$\forall\, x \in \mathcal{O},\ 0 \leq \zeta_j(x) \quad y \quad \sum \zeta_j(x) = 1.$$

(3.2) Soporte$(\zeta_j) \subset B_j$, donde B_j es una bola de radio r_j, o sea $B_j = \{x : \rho(x-x_j) \leq r_j\}$, tal que

$$d(B_j, \mathcal{O}^c) \leq c\, r_j \quad y \quad \sum_j |B_j| \leq c\,|\mathcal{O}|.$$

(3.3) $$|\zeta_j(x+z) - \zeta_j(x)| \leq c\, \frac{1}{r_j}\, \rho(z), \quad \forall\, x,z \cdot R^n.$$

DEMOSTRACION. Para cada entero k consideramos el conjunto definido por

(3.4) $$\Omega_k = \{x : 2^{-k-1} < d(x,\mathcal{O}^c) \leq 2^{-k}\}.$$

Como $|\mathcal{O}|$ es finita, se tiene $\mathcal{O} = \bigcup_{k \geq k_0} \Omega_k$. Sea para cada x en Ω_k, $B_{r'}(x)$ la bola con centro en x y radio $r' = 2^{-k-5}$. Luego $\mathcal{O} \subset \bigcup_{k \geq k_0} B_{r'}(x)$ y el sup $\{$radio $(B_{r'}(x))\}$ es finito. Por lo tanto es posible ([2], Lema 1.6) extraer una subfamilia disjunta y numerable $\{B_{r'_j}(x_j)\}$ tal que

(3.5) $$\mathcal{O} \subset \bigcup_j B_{3r'_j}(x_j).$$

Tomemos $r_j = 4\, r'_j$ y $B_j = B_{r_j}(x_j)$, o sea la bola con centro x_j y

radio r_j. Entonces $E = \{B_j\}$ satisface

(3.6) $$\mathcal{O} = \bigcup_j B_j,$$

(3.7) $$\sum_j |B_j| \leq c\,|\mathcal{O}|,$$

(3.8) $$d(B_j, \mathcal{O}^c) \leq c\, r_j\,,$$

(3.9) Sea $B_j \in E$, fija, entonces existen a lo sumo N bolas en E que intersecan a B_j. N depende solo de la dimensión.

En efecto, sea $B_{r_j}(x_j)$ una bola de E, entonces existe un k tal que $x_j \in \Omega_k$ y $r_j = 2^{-k-3}$, por lo tanto si $z \in B_{r_j}(x_j)$ se tiene

(3.10) $$2^{-k-1} - 2^{-k-3} < d(z, \mathcal{O}^c) \leq 2^{-k} + 2^{-k-3}.$$

Ahora de (3.10) resulta que $B_{r_j}(x_j) \subset \mathcal{O}$ y junto con (3.5) se obtiene (3.6). Observemos que $\sum |B_{r_j}(x_j)| = 4^{\gamma} \sum |B_{r'_j}(x_j)| \leq 4^{\gamma} |\mathcal{O}|$, que es (3.7). También (3.8) sigue de (3.10), con $c = 2^3+1$. Para probar (3.9), notemos que por (3.10), si $B_{r_{j'}}(x_{j'})$ es una bola que interseca a $B_{r_j}(x_j)$, entonces $r_{j'}$ debe ser uno de los valores $2r_j$, r_j o $2^{-1}r_j$ y por lo tanto las correspondientes $B_{r'_{j'}}(x_{j'})$, $(r'_{j'} = 4^{-1}r_{j'})$, están contenidas en la bola $B_{4r_j}(x_j)$ y como son disjuntas debe ser

$$N\, \omega_n\, (8^{-1} r_j)^{\gamma} \leq \omega_n\, (4 r_j)^{\gamma},$$

donde N es el número de bolas que intersecan a B_j, ω_n la medida de la bola unitaria; (3.9) es consecuencia de esta última desigualdad.

Sea ahora $\zeta(x)$ una función de C_0^∞ con las siguientes propiedades: $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta(x) = 1$ para $\rho(x) \leq 1$ y $\zeta(x) = 0$ para $\rho(x) \geq 1+3^{-1}$. Definimos

$$\zeta_j'(x) = \zeta(A_{3r_j'}^{-1}(x-x_j)),$$

donde x_j es el centro de B_{r_j}, $r_j=4r_j'$;

$$\Xi(x) = \sum \zeta_j'(x) \quad \text{y}$$

$$\zeta_j(x) = \frac{\zeta_j'(x)}{\Xi(x)} .$$

Notemos que $\zeta_j'(x) = 1$ para x en $B_{3r_j'}(x_j)$ y es igual a 0 en el complemento de $B_{r_j}(x_j)$, luego, de acuerdo con (3.9) se tiene $1 \leq \Xi(x) \leq N$; por lo tanto las funciones ζ_j están bien definidas, pertenecen a C_0^∞, $0 \leq \zeta_j$, $\sum \zeta_j(x) = 1$ para $x \in \Theta$, y soporte$(\zeta_j) \subset B_j$. Ahora estas propiedades combinadas con (3.6), (3.7) y (3.8) dan (3.1) y (3.2). Finalmente probaremos (3.3). Sea z tal que $\rho(A_{3r_j'}^{-1}z) < 1$ y observemos que

$$\zeta_j(x) = \frac{\zeta(A_{3r_j'}^{-1}(x-x_j))}{\sum_i \zeta(A_{3r_i'}^{-1}(x-x_i))} ,$$

donde i toma los valores para los cuales B_i interseca a B_j, y x_i es el centro de B_i. Como hemos mostrado anteriormente, existen a lo sumo N valores de i, y r_i' debe ser r_j' o $2r_j'$ o $2^{-1}r_j'$. Por otra parte, la función

$$\frac{\mathfrak{Z}\,(\,y - A^{-1}_{3r'_j}x_j\,)}{\sum\limits_i \mathfrak{Z}\,(\,A^{-1}_{a_i}(y - A^{-1}_{3r'_j}x_j)\,)}\,,$$

donde i toma los mismos valores que antes y $a_i = 1$, 2 o 2^{-1} para $r'_i = r'_j$, $2r'_j$ o $2^{-1}r'_j$ respectivamente, tiene primeras derivadas acotadas y la cota c depende solamente de N, $\mathfrak{Z}$ y el grupo A_t. Por lo tanto

$$\left|\,\mathfrak{Z}_j(x+z) - \mathfrak{Z}_j(x)\,\right| = \left|\frac{\mathfrak{Z}(A^{-1}_{3r'_j}x + A^{-1}_{3r'_j}z - A^{-1}_{3r'_j}x_j)}{\sum\limits_i \mathfrak{Z}\,(\,A^{-1}_{a_i}(A^{-1}_{3r'_j}x + A^{-1}_{3r'_j}z - A^{-1}_{3r'_j}x_i)\,)}\right.$$

$$\left. - \frac{\mathfrak{Z}\,(\,A^{-1}_{3r'_j}x - A^{-1}_{3r'_j}x_j\,)}{\sum\limits_i \mathfrak{Z}\,(\,A^{-1}_{a_i}(A^{-1}_{3r'_j}x - A^{-1}_{3r'_j}x_i)\,)}\right| \leq c\,\left|A^{-1}_{3r'_j}z\right| .$$

Como $\rho(A^{-1}_{3r'_j}z) < 1$, entonces $\left|A^{-1}_{3r'_j}z\right| < 1$, por (1.4), y usando (1.5) se tiene

$$\left|A^{-1}_{3r'_j}z\right| \leq \left[\rho(\,A^{-1}_{3r'_j}z\,)\right]^{\alpha} \leq \rho(\,A^{-1}_{3r'_j}z\,)\,. \tag{3.12}$$

En el caso opuesto, esto es si z es tal que $\rho(A^{-1}_{3r'_j}z) \geq 1$, como $\mathfrak{Z}_j \leq 1$, se tiene

$$\left|\,\mathfrak{Z}_j(x+z) - \mathfrak{Z}_j(x)\,\right| \leq 2\,\rho(\,A^{-1}_{3r'_j}z\,)\,. \tag{3.13}$$

Ahora usando la propiedad (1.3) de ρ, de (3.11), (3.12) y (3.13) sigue que

$$\left| \xi_j(x+z) - \xi_j(x) \right| \leq c \; \rho(A^{-1}_{3r_j'} z) \leq c \; \frac{1}{r_j} \rho(z),$$

como queríamos probar.

4.-

Sea $f \in H^p, 0 < p \leq 1$, ψ, φ y η como en el Lema 2.1, con $k \geq \gamma/p - \gamma$.

Consideremos la función

$$M(x) = \sup_{\rho(x-y) \leq 3t} \left(|F(y,t)| + |G(y,t)| \right),$$

donde $F(x,t) = (f * \varphi_t)(x)$, $G(x,t) = (f * \eta_t)(x)$. Como $f \in H^p$ se tiene

$$M(x) \in L^p \quad y \quad \|M(x)\|_p \leq c \; \|f\|_{H^p} .$$

La función $M(x)$ es semicontinua inferiormente, por lo tanto los conjuntos

$$\mathcal{O}_i = \left\{ x : M(x) > 2^i \right\},$$

son abiertos. Sean ξ_{ij} las funciones de la partición de la unidad, Lema 3.1., para $\mathcal{O}_i$. Consideremos también los subconjuntos de R^{n+1}_+

$$\tilde{\mathcal{O}}_i = \left\{ (x,t) : 0 < 2t < d(x, \mathcal{O}_i^c) \right\},$$

donde $d(x, \mathcal{O}_i^c)$ denota la distancia de x al complemento $\mathcal{O}_i^c$ de $\mathcal{O}_i$ (como siempre d es la métrica parabólica), y sea $\chi_i(x,t)$ la función característica del conjunto $\tilde{\mathcal{O}}_i - \tilde{\mathcal{O}}_{i+1}$. Definimos las funciones

$$\alpha_{ij}^{(\varepsilon)}(x) = \int_\varepsilon^\infty \int \xi_{ij}(y) \, \chi_i(y,t) \, F(y,t) \, \psi_t(x-y) \, dy \, \frac{dt}{t}, \tag{4.1}$$

$$\alpha_{ij}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_{ij}^{(\varepsilon)}(x) \; , \; (\text{p.p.}). \tag{4.2}$$

Probaremos que α_{ij} son los k-átomos que dan la descomposición requerida de f.

Estimaremos primero los soportes de las funciones $\alpha_{ij}^{(\varepsilon)}$.

Fijemos i y j, y sea B_{ij} la bola dada por (3.2) Lema 3.1. tal que $sop(\mathcal{Z}_{ij}) \subset B_{ij}$ y r_{ij} el radio de B_{ij}. Luego si $y \in B_{ij}$ se tiene $d(y, \mathcal{O}_i^c) \leq c\, r_{ij}$, por lo tanto $\chi_i(y,t) = 0$ si $t \geq \frac{c}{2} r_{ij}$, para todo $y \in B_{ij}$. Ahora $sop(\psi_t(x-y)) \subset \{x : \rho(x-y) \leq t\}$, luego si $B_{ij} \cap \{\rho(x-y) \leq t\} \neq \emptyset$ y $\chi_i(y,t) \neq 0$, debe ser $d(x,B_{ij}) \leq t \leq \frac{c}{2} r_{ij}$.

En consecuencia

$$sop(\alpha_{ij}^{(\varepsilon)}) \subset B_{c'r_{ij}}, \tag{4.3}$$

donde $B_{c'r_{ij}}$ es la bola de igual centro y radio $c'r_{ij}$, $c' = 1+\frac{c}{2}$.

Estimaremos ahora el tamaño de $\alpha_{ij}^{(\varepsilon)}$. Para lo cual estimaremos la integral de (4.1). Dado $x \in R^n$, consideremos los siguientes valores de t :

$$t_o = \frac{d(x,\mathcal{O}_{i+1}^c)}{3}, \qquad \bar{t}_o = d(x,\mathcal{O}_{i+1}^c),$$

$$t_1 = \frac{d(x,\mathcal{O}_i^c)}{3}, \qquad \bar{t}_1 = d(x,\mathcal{O}_i^c).$$

Luego $0 \leq t_k \leq \bar{t}_k$, $\bar{t}_k \leq 3\, t_k$, $k = 0, 1$; y

$$\chi_i(y,t)\, \psi_t(x-y) = 0, \text{ para } t < t_o,\ t_o \neq 0 \text{ o } 0 \leq \bar{t}_1 < t., \tag{4.4}$$

$$\chi_i(y,t)\, \psi_t(x-y) = \psi_t(x-y), \text{ para } 0 \leq \bar{t}_o \leq t < t_1,\ t_1 \neq 0, t \neq 0. \tag{4.5}$$

Para mostrar (4.4) y (4.5), observemos que $\chi_i(y,t) = \chi^{(1)}(y,t).\chi^{(2)}(y,t)$, donde $\chi^{(1)}(y,t)$ es la función característica de $\tilde{\mathcal{O}}_i$ y $\chi^{(2)}(y,t)$ la función característica de $\tilde{\mathcal{O}}^c_{i+1}$. Ahora si $y \in \operatorname{sop}(\psi_t(x-y))$ se tiene $\rho(x-y) \leq t$, por lo tanto

$$d(y, \mathcal{O}^c_i) \leq d(x, \mathcal{O}^c_i) + t \leq 2t, \quad \text{para} \quad 0 \leq \bar{t}_1 < t,$$

$$d(y, \mathcal{O}^c_i) \geq d(x, \mathcal{O}^c_i) - t > 2t, \quad \text{para} \quad t < t_1, \ t_1 \neq 0;$$

en consecuencia

$$\chi^{(1)}(y,t)\ \psi_t(x-y) = 0, \text{ para } 0 \leq \bar{t}_1 < t, \tag{4.6}$$

$$\chi^{(1)}(y,t)\ \psi_t(x-y) = \psi_t(x-y), \text{ para } t < t_1, t_1 \neq 0. \tag{4.7}$$

De manera análoga se deduce que

$$\chi^{(2)}(y,t)\ \psi_t(x-y) = 0, \text{ para } t < t_o, \ t_o \neq 0, \tag{4.8}$$

$$\chi^{(2)}(y,t)\ \psi_t(x-y) = \psi_t(x-y), \text{ para } 0 \leq \bar{t}_o \leq t, \ t \neq 0. \tag{4.9}$$

Combinando (4.6) y (4.8) resulta (4.4), y (4.7) con (4.9) da (4.5).

Consideremos primero la integral de (4.1) sobre intervalos $(a,\bar{t}_k)$, donde $t_k \leq a < \bar{t}_k$, $k = 0, 1$. Notemos que si $\chi_i(y,t) \neq 0$ entonces $(y,t) \in \tilde{\mathcal{O}}^c_{i+1}$ y por lo tanto $|F(y,t)| \leq 2^{i+1}$. Por otra parte $\int |\psi_t(x-y)|\, dy$ es una constante independiente de t y de x, y $\bar{t}_k \leq 3t_k$, entonces

$$\left| \int_a^{\bar{t}_k} \int \xi_{ij}(y)\ \chi_i(y,t)\ F(y,t)\ \psi_t(x-y)\, dy\, \frac{dt}{t} \right| \leq \tag{4.10}$$

$$\leq 2^{i+1} \int_{t_k}^{\bar{t}_k} \left[\int |\psi_t(x-y)| \, dy \right] \frac{dt}{t} \leq c\, 2^i .$$

Consideremos ahora la integral de (4.1) sobre intervalos (a,t_1), donde $0 < \bar{t}_0 \leq a < t_1$ o $0 = t_0 < a < t_1$. En este caso vale (4.5) y esta integral se escribe

$$(4.11) \qquad \int_a^{t_1} \int \xi_{ij}(y) \; F(y,t) \; \psi_t(x-y) \, dy \, \frac{dt}{t} =$$

$$= \int_a^{t_1} \int \left[\xi_{ij}(y) - \xi_{ij}(x) \right] F(y,t) \; \psi_t(x-y) \, dy \, \frac{dt}{t}$$

$$+ \; \xi_{ij}(x) \int_a^{t_1} \int F(y,t) \; \psi_t(x-y) \, dy \, \frac{dt}{t} .$$

Usando el Lema 2.2 (2.5), se obtiene que el último término es igual a

$$(4.12) \qquad \xi_{ij}(x) \left[G(x,t_1) - G(x,a) \right] ,$$

como (x,t_1) y $(x,a) \notin \tilde{\mathcal{O}}_{i+1}$, es $|G(x,t_1)| \leq 2^{i+1}$ y $|G(x,a)| \leq 2^{i+1}$, por lo tanto el valor absoluto de (4.12) es menor o igual que $c2^i$.

Llamando $z=x-y$, el primer sumando de (4.11) se escribe

$$(4.13) \qquad \int_a^{t_1} \int \left[\xi_{ij}(x+z) - \xi_{ij}(x) \right] F(x+z,t) \; \psi_t(z) \, dz \, \frac{dt}{t} ,$$

ahora observemos que $|F(x+z,t)| \leq 2^{i+1}$ cuando $\Psi_t(z) \neq 0$,entonces usando la propiedad (3.3),podemos mayorar el valor absoluto de (4.13) por

$$(4.14) \qquad c\ 2^{i+1} \frac{1}{r_{ij}} \int_a^{t_1} \int \rho(z)\ |\Psi_t(z)|\ dz\ \frac{dt}{t}.$$

Teniendo en cuenta (4.3),podemos considerar $x \in B_{c'r_{ij}}$,lo cual implica $t_1 \leq c\ r_{ij}$;por otra parte $\frac{1}{t}\rho(z) = \rho(A_t^{-1}z)$,(1.3),luego $\int \frac{\rho(z)}{t} |\Psi_t(z)|\, dz$ es una constante independiente de t y x.Entonces (4.14) es menor o igual que

$$(4.15) \qquad c\ \ 2^{i+1} \frac{1}{r_{ij}} \int_0^{c\ r_{ij}} dt \leq c\ 2^i.$$

De (4.15) y la estimación obtenida para (4.12) resulta que (4.11) está mayorada por $c\ 2^i$.Finalmente,combinando (4.4) con (4.10),la estimación obtenida para (4.11),y (4.3),resulta

$$(4.16) \qquad \| \alpha_{ij}^{(\varepsilon)}(x) \|_\infty \leq c\ 2^i, \quad \varepsilon > 0.$$

Sea β un multiíndice,entonces

$$(4.17) \qquad \int \alpha_{ij}^{(\varepsilon)}(x)\ \ x^\beta\ dx\ = 0, \text{ para } |\beta| \leq k.$$

En efecto,(4,17) resulta mediante integración de la anulación de los momentos de $\Psi_t(x-y)$ como función de x hasta ese orden.

Mostraremos ahora que los α_{ij} están bien definidos,(4.2),y que las estimaciones (4.3),(4.16) y (4.17) son válidas para α_{ij}.Para probar esto es suficiente demostrar que $\alpha_{ij}^{(\varepsilon)}$ converge en casi todo punto.Notemos que si $\bar{t}_1 = 0$ o $t_o \neq 0$,entonces $\alpha_{ij}^{(\varepsilon)}(x)$es constante para todo ε en el primer caso,para $\varepsilon < t_o$ en el otro.En caso contrario, si $\bar{t}_1 \neq 0$ y $t_o = 0$,como (4.12) converge en casi todo punto para $a \to 0$ y la integral (4.13) converge absolutamente en $(0,t_1)$,resulta que (4.11) converge para $\varepsilon = a \to 0$,en casi todo punto,y por lo tanto se obtiene el resultado requerido.

De (4.3) y (4.16) obtenemos

$$\|\alpha_{ij}^{(\varepsilon)}\|_{(p)}^{p} \leq c \quad 2^{ip} \, |B_{ij}| \, , \tag{4.18}$$

y la misma estimación para α_{ij}.Ahora mediante (4.18) se tiene

$$\begin{aligned} \sum \|\alpha_{ij}^{(\varepsilon)}\|_{(p)}^{p} &\leq c \sum 2^{ip} \, |B_{ij}| \leq c \sum 2^{ip} \, |\sigma_i| \\ &\leq c \, (1 - 2^{-p})^{-1} \sum 2^{ip} \, (|\sigma_i| - |\sigma_{i+1}|) \\ &\leq c \, (1 - 2^{-p})^{-1} \quad \|M(x)\|_{p}^{p} \leq c' \, \|f\|_{H^p}^{p} \, , \end{aligned} \tag{4.19}$$

y la misma estimación para α_{ij}.Teniendo en cuenta que $k \geq \gamma/p - \gamma$, del Lema 2.3 (2.7) se deduce que $\|\alpha_{ij}\|_{H^p}^{p} \leq c \, \|\alpha_{ij}\|_{(p)}^{p}$;por lo tanto

la serie $\sum \alpha_{ij}$ converge en la métrica de H^p, sea g su suma, tenemos

$$\| g \|^p_{H^p} \leq c \sum \| \alpha_{ij} \|^p_{(p)} \leq c' \| f \|^p_{H^p} .$$

Mostraremos ahora que $g = f$. Observemos que $\sum \alpha^{(\varepsilon)}_{ij}$ es convergente en H^p, para cada ε, por el mismo argumento anterior; sea $g^{(\varepsilon)} = \sum \alpha^{(\varepsilon)}_{ij}$ en H^p. Por otra parte, de las propiedades (4.3), (4.16), (4.17) y la convergencia en casi todo punto, mediante el Lema 2.3 (2.6), se deduce que $\alpha^{(\varepsilon)}_{ij} \to \alpha_{ij}$ en H^p, para $\varepsilon \to 0$, entonces como (4.11) es independiente de ε, resulta que $\| g^{(\varepsilon)} - g \|^p_{H^p} \to 0$, para $\varepsilon \to 0$. Ahora si $\zeta(x) \in S$, tenemos

$$(g^{(\varepsilon)}, \zeta) = \sum (\alpha^{(\varepsilon)}_{ij}, \zeta) =$$

$$= \sum \int \zeta(x) \int_{\varepsilon}^{\infty} \int \xi_{ij}(y) \; \chi_i(y,t) \; F(y,t) \; \psi_t(x-y) \, dy \, \frac{dt}{t} \, dx$$

$$= \int \zeta(x) \int_{\varepsilon}^{\infty} \int F(y,t) \; \psi_t(x-y) \, dy \, \frac{dt}{t} \, dx = \int \zeta(x) \; G(x,\varepsilon) \, dx ,$$

la suma bajo el signo integral es posible por ser $|F(y,t)| \leq c \, t^{-\gamma/p}$, Proposición 1.1 (1.8) y el siguiente paso por que $\sum \xi_{ij}(y) \, \chi_i(y,t) = 1$ y el Lema 2.2, finalmente usando otra vez el Lema 2.2 resulta

$$(g , \zeta) = \lim (g^{(\varepsilon)}, \zeta) = \lim (G(\cdot,\varepsilon) , \zeta) = (f , \zeta)$$

lo cual implica $g = f$. Nuestro Teorema queda demostrado.

REFERENCIAS

[1] Calderón,A.P. "An atomic decomposition of distributions in Parabolic H^p Spaces".

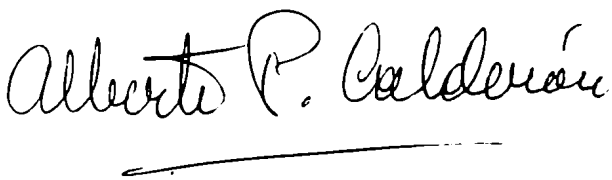
[2] Calderón,A.P. and Torchinsky,A. "Parabolic Maximal Functions associated with a distribution".Adv.in Math.,16,(1975), N^o1,p.p. 1 - 64.

[3] Calderón,A.P. and Torchinsky,A. "Parabolic Maximal Functions associated with a distribution".Adv.in Math. 24,(1977), N° 2,p.p. 101 - 171.

[4] Coifman R.R. "A real characterization of H^p".Studia Math. 51, (1974),p.p. 269 - 274.

[5] Coifman,R. and Weiss,G. "Extensions of Hardy Spaces and their use in analysis".Bulletin of the American Math. Soc. Vol. 83,N^o4,(1977),p.p. 569 - 645.

[6] Fefferman,C. and Stein,E. "H^p spaces of several variables" Acta Math. 129,(1972),p.p. 137 - 193.

[7] Latter, R.H. "A characterization of $H^p(R^n)$ in terms of atoms". Ph.D. dissertation.

[8] Stein, E.M. "Singular integrals and differentiability properties of functions". Princeton Univ. Press, Princeton, (1970).