Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

# Intersección de corrientes residuales

Bucari, Néstor

1979

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Bucari, Néstor. (1979). Intersección de corrientes residuales. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1602_Bucari.pdf

Cita tipo Chicago:
Bucari, Néstor. "Intersección de corrientes residuales". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1979.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1602_Bucari.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

**Dirección:** Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293 **Contacto:** digital@bl.fcen.uba.ar

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

# INTERSECCION DE CORRIENTES RESIDUALES

TRABAJO PRESENTADO PARA OPTAR AL TITULO DE
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS POR NESTOR BUCARI

DIRECTOR: DR. MIGUEL HERRERA

BUENOS AIRES, OCTUBRE DE 1979.

1602

1602
ej. 2

A mi esposa Flora y

a mi hija Lucila.

Quiero expresar mi profunda gratitud al Dr. Miguel Herrera, director de esta tesis, y a mi compañero Adrián Paenza; sin la guía y consejo de uno, o sin la amistad del otro, la realización de este trabajo hubiera sido imposible.

Agradezco también al Dr.Nicolás R.Coleff, de la Universidad Nacional de La Plata, por el tiempo que me ha dedicado, y por las fructíferas conversaciones que durante el mismo mantuvimos.

Por último quiero manifestar mi reconocimiento a mis compañeros del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Buenos Aires, a las autoridades y al personal del mismo.

Buenos Aires, octubre de 1979

# INTRODUCCION

## 1. Generalidades

Es sabido que el cup-producto define una estructura de anillo sobre el grupo de cohomología $H^{\bullet}(X;K)$ de un espacio topológico $X$ con coeficientes en el anillo $K$ (cf.[4] ). En el caso en que $X$ es una variedad $C^{\infty}$ y $K = C$ , el cup-producto se construye, por ejemplo, mediante el producto exterior de formas diferenciales $C^{\infty}$ sobre $X$ .

Si la variedad $X$ es de dimensión m, orientada y paracompacta, la dualidad de Poincaré define isomorfismos

$$\Delta_p : H^p(X;C) \longrightarrow H_{m-p}(X;C) \quad , \quad 0 \leqslant p \leqslant m \ , \tag{1}$$

donde $H^p(X;C)$ se identifica con el cociente

$$\frac{\{\text{p-formas cerradas de X }\}}{\{\text{p-formas exactas de X }\}} \ ,$$

y $H_q(X;C)$ , la q-homología (de Borel-Moore) a soportes cerrados de $X$ , se identifica con el cociente

$$\frac{\{\text{q-corrientes cerradas de X}\}}{\{\text{q-corrientes exactas de X}\}} \tag{2}$$

(teoremas de De Rham).

Estos isomorfismos son inducidos por la aplicación

$$\omega \longrightarrow I[X] \wedge \omega = \int_X \omega \wedge \cdot \qquad (3)$$

que asocia a cada forma $\omega$, la corriente:

$$I[X] \wedge \omega : \alpha \longrightarrow I[X](\omega \wedge \alpha).$$

Los isomorfismos $\Delta_p$ permiten trasladar el cup-producto en $H^{\bullet}(X;C)$ a la homología $H_{\bullet}(X;C)$, mediante las fórmulas:

$$\alpha.\beta = \Delta(\Delta^{-1}(\alpha) \cup \Delta^{-1}(\beta)) \; ; \qquad (4)$$

$\alpha.\beta$ se denomina el <u>producto de intersección</u> de $\alpha$ con $\beta$.

Este producto está definido solamente sobre las clases de homología de $X$. No existe, en general, una multiplicación en el espacio de todas las corrientes de $X$, que induzca el producto de intersección.

El producto de intersección se generaliza a la homología (de Borel-Moore) con soportes de $X$, de la siguiente manera: sean $Y_1$, $Y_2$ subespacios cerrados de $X$, $H_{\bullet}(Y_1;C)$ y $H_{\bullet}(Y_2;C)$ sus espacios de homología de Borel-Moore (a soportes cerrados). Existe entonces una forma bilineal canónica, llamada también producto de intersección,

$$H_p(Y_1;C) \otimes H_q(Y_2;C) \longrightarrow H_{p+q-n}(Y_1 \cap Y_2;C)$$

que aplica: $\alpha \otimes \beta \longrightarrow \alpha . \beta$ (5)

compatible con el producto de intersección en $H_{\cdot}(X;C)$ y los homomorfismos en homología inducidos por las inclusiones:

$$Y_1, Y_2, Y_1 \cap Y_2 \hookrightarrow X .$$

Si $X$ es un conjunto analítico real e $Y \hookrightarrow X$ es semianalítico -o subanalítico- (2) admite la generalización siguiente (cf. [10] )

$$H_q(Y;C) \approx \frac{\{\text{q-corrientes cerradas de } X \text{ con soporte en } Y\}}{\{\text{q-corrientes exactas de } X \text{ con soporte en } Y\}} \quad (6)$$

El problema general de intersección , puede plantearse, pues, de la siguiente manera: dadas corrientes cerradas $T$ y $S$ de $X$, pertenecientes a una cierta familia (por ejemplo: corrientes de integración, corrientes residuales, etc.), que definen clases de homología $[T]$ y $[S]$ , respectivamente, en $H_{\bullet}(X;C)$ ,¿existe una corriente $J$ de la misma familia (esto es: de integración, residual, etc.) tal que

$$[J] = [T] . [S] \ ? \quad (7)$$

Si $T$ y $S$ tienen soportes en subespacios cerrados $Y_1$ e $Y_2$ de $X$ , ¿puede construirse $J$ con soporte en $Y_1 \cap Y_2$ ? Si tal corriente existe, y se construye explícitamente a partir de las corrientes $T$ y $S$ , escribiremos $J = T . S$ (8)

(8') <u>Ejemplo</u> : Cuando $I_Z$ e $I_W$ son corrientes de integración sobre ciclos semianalíticos -ó subanalíticos- Z y W , el problema está resuelto bajo la hipótesis de "intersección propia":

$$\dim_{\mathbb{C}} (Z \cap W) \leqslant (\dim_{\mathbb{C}} (Z) + \dim_{\mathbb{C}} (W)) - m \tag{9}$$

La respuesta a (7) es: el representante de $[I_Z] . [I_W]$ es $I_{Z.W}$ , donde Z.W es el "ciclo intersección" de los ciclos dados (cf. [10], para el caso analítico complejo, y también [3] ) para las corrientes localmente playas ("locally flat"). En este caso escribimos por lo tanto $I_{Z.W} = I_Z . I_W$ .

## 2.- <u>Intersección de corrientes residuales</u>

Dada una familia de hipersuperficies $\mathcal{H} = \{Y_1,\ldots,Y_{p+1}\}$ en una variedad holomorfa paracompacta y orientada de dimensión n, y una k-forma meromorfa $\widetilde{\lambda}$ con polos en $\cup Y_i$ , Coleff y Herrera defienen en [1] las corrientes (p+1)-residuo $R_{\mathcal{H}}[\widetilde{\lambda}]$ y p-residuo valor principal $RP_{\mathcal{H}}[\widetilde{\lambda}]$ de grados 2n-p-k-1 y 2n-p-k respectivamente.

El problema de intersección (7) admite en este caso la conjetura siguiente: si $\mathcal{H} = \{Y_1,\ldots,Y_p\}$ $\mathcal{H}' = \{Z_1,\ldots,Z_q\}$ son dos familias de hipersuperficies en X , $\widetilde{\lambda}$ y $\widetilde{\omega}$ son formas meromorfas de grados k y s , con polos en $\cup\mathcal{H}$ y $\cup\mathcal{H}'$ respectivamente, entonces: $[R_{\mathcal{H}}[\widetilde{\lambda}]] . [R_{\mathcal{H}'}[\omega]] = [R_{\mathcal{H}\cup\mathcal{H}'}[\widetilde{\lambda} \wedge \widetilde{\omega}]]$, con hipótesis adecuadas sobre los soportes de las corrientes residuales dadas.

## 3.- Resultados obtenidos

En este trabajo, se encara el problema de intersección de corrientes residuales, obteniéndose resultados satisfactorios en dos casos particulares significativos:

a) $X = C^n$ . Sean $RP\left[\frac{\omega}{z^\gamma}\right]$ y $RP\left[\frac{\omega'}{z^\nu}\right]$ los operadores residuos-valores principales (cf.[1] ), definidos por:

$$RP\left[\frac{\omega}{z^\gamma}\right](\eta) = \lim_{\delta\to 0} \int_{D_{\underset{\sim}{\delta}}^{p+1,\alpha}} \frac{\omega}{z^\gamma} \wedge \eta$$

$$RP\left[\frac{\omega'}{z^\nu}\right](\xi) = \lim_{\delta\to 0} \int_{D_{\underset{\sim}{\delta}}^{q+1,\beta}} \frac{\omega'}{z^\nu} \wedge \xi$$

donde $\alpha \in \mathbb{N}^{(p+1)\times n}$, $\beta \in \mathbb{N}^{(q+1)\times n}$, $p+q \leq n$, $\gamma,\nu \in \mathbb{N}^n$, tales que

$$V(z^\gamma) \subset V\left(\prod_{i=1}^{p+1} z^{\alpha_i}\right) \quad , \quad V(z^\nu) \subset V\left(\prod_{j=1}^{q+1} z^{\beta_j}\right)$$

($\alpha_i$ , $\beta_j$ filas de $\alpha$ y $\beta$ respectivamente) , $\omega \in \mathcal{E}^p(C^n)$ , $\omega' \in \mathcal{E}^q(C^n)$.

Entonces $J = RP_{\alpha,\beta}\left[\frac{\omega \wedge \omega'}{z^\gamma . z^\nu}\right] : f \longrightarrow \lim_{\delta\to 0} \int_{D_\delta^{p+q+1,\alpha+\beta}} \frac{\omega \wedge \omega'}{z^{\gamma+\nu}} \wedge f$

b) $X$ = variedad holomorfa de dimensión $n$. $\mathcal{H} = \{Y_1, \ldots, Y_p\}$ una familia de hipersuperficies en $X$; $W \subset X$, una subvariedad holomorfa lisa de codimensión $p$, tales que:

i) $\dim_C \cap \mathcal{H} = n - p$

ii) $\dim_C ((\cap\mathcal{H}) \cap W) = 0$

Sea $\tilde{\omega} \in \Gamma(X; \mathcal{E}_X^{2n-p}(*\cup\mathcal{H}))$. Consideremos en este caso, las corrientes $T = R_{\mathcal{H}}$, la corriente residual asociada a la familia $\mathcal{H}$ y a $\tilde{\omega}$ (cf. [1]), y $S = I_W$, la corriente de integración sobre $W$.

Entonces $R_{\mathcal{H}_W}[\tilde{\omega}|_W] = R_{\mathcal{H}}[\tilde{\omega}] \cdot I_W$

donde

$\mathcal{H}_W = \{Y_1 \cap W, \ldots, Y_p \cap W\}$ y $\tilde{\omega}|_W$ denota la restricción de la forma $\tilde{\omega}$ a $W$.

Se deduce, además, el siguiente resultado: si $\mathcal{H} = \{Y_1, \ldots, Y_p\}$ $\mathcal{H}' = \{Y', \ldots, Y'_{n-p}\}$ son dos familias de hipersuperficies en $X$ tales que:

i) $\dim_C \cap \mathcal{H} = n - p$, $\dim_C \cap \mathcal{H}' = p$

ii) $\dim_C ((\cap \mathcal{H}) \cap (\cap \mathcal{H}')) = 0$,

y si

$\tilde{\psi} \in \Gamma(X; \mathcal{E}_X^q(*\cup \mathcal{H}))$, $\tilde{\mu} \in \Gamma(X; \mathcal{E}_X^r(*\cup\mathcal{H}')$ son tales

que las corrientes residuales $R_{\mathcal{H}}[\tilde{\psi}]$ y $R_{\mathcal{H}'}[\tilde{\mu}]$ son cerradas, entonces:

$$\left[R_{\mathcal{H}}[\tilde{\psi}]\right] \cdot \left[R_{\mathcal{H}'}[\tilde{\mu}]\right] = \left[R_{\mathcal{H}\cup\mathcal{H}'}[\tilde{\psi} \wedge \tilde{\mu}]\right] \tag{10}$$

(donde [ ] indica la clase de homología )

## 4.- Idea de la demostración

(10') : De Rham prueba en [2] el siguiente teorema de regularización: existen endomorfismos $R_\varepsilon$ y $A_\varepsilon$ de $'D(X)$ homogéneos de grados 0 y 1 respectivamente, dependientes ambos de un parámetro real $\varepsilon$ , $0 < \varepsilon \leq 1$ , tales que:

i) $R_\varepsilon T - T = bA_\varepsilon T + A_\varepsilon bT$ , para toda $T \in {}'D(X)$ donde b denota el borde en $'D(X)$ .

ii) los soportes de $R_\varepsilon T$ y $A_\varepsilon T$ están contenidos en un entorno arbitrario del soporte de T, para $\varepsilon$ suficientemente pequeño.

iii) para cada $\varepsilon$ , $R_\varepsilon T$ es una forma diferencial $C^\infty$.

iv) para toda $\omega \in D(X)$ , se verifica:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} R_\varepsilon T\ (\omega) = T(\omega)$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon T\ (\omega) = 0$$

(11) Es claro que, cuando T es cerrada, $R_\varepsilon T$ y T definen la misma clase de homología en $H_\bullet(X;C)$. Se demuestra además, que si $S = \omega$ una forma diferencial $C^\infty$ cerrada, entonces $T \wedge \omega$ representa a $[S] . [T]$ . (12)

En vista del teorema precedente y las observaciones (11) y (12), para verificar que dadas corrientes T, S y J , éstas satisfacen:

$$[T] . [S] = [J] \qquad (13)$$

es suficiente probar: existe una familia de formas diferenciales $C^\infty$ $R_\varepsilon S$ , $0 < \varepsilon \leqslant 1$ , tales que:

1. $R_\varepsilon S$ regulariza a $S$ en el sentido ya expuesto (10').
2. Si se define la corriente $T \wedge R_\varepsilon S$ como:

$$T \wedge R_\varepsilon S\ (\omega) = T\ (R_\varepsilon S \wedge \omega) \quad ,$$

y notando que $T \wedge R_\varepsilon S$ representa a $[T] \cdot [S]$ en virtud de la observación (12), entonces:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T \wedge R_\varepsilon S\ (\omega) = J(\omega) \qquad , \text{ para toda } \quad \omega \in D(X)$$

5.- Notas

1. Es conveniente destacar que las corrientes consideradas en los casos 3a) y 3b) no son necesariamente cerradas.

2. En el caso 3a) no se formula ninguna hipótesis referida a la dimensión del soporte de las corrientes $T$ y $S$ . Estas condiciones son esenciales para los resultados citados en el ejemplo 8'.

3. La hipótesis de 'intersección completa' de 3b)i) es en realidad innecesaria. El resultado se probará sin formular hipótesis sobre la dimensión de $\cap \mathcal{H}$, bajo la condición más débil siguiente:

$$\dim_C (V_\bullet(\mathcal{H}) \cap W) = 0 \qquad ,$$

donde $V_\bullet(\mathcal{H})$ denota la intersección esencial de la familia $\mathcal{H}$ (cf.[1]).

# CAPITULO 0

## 0.1

Sea X una variedad holomorfa de dimensión $n$. Sea $\phi = (\phi_1,\dots,\phi_p) : X \to C$ un morfismo, tal que las funciones $\phi_i$ no sean idénticamente nulas. Notemos $Y_i = V(\phi_i)$ , $\tilde{Y} = \cup \{Y_i : 1 \leq i \leq p\}$ y $\mathbb{R}^p_>$ el producto cartesiano de $p$ copias del conjunto $\mathbb{R}_>$ de números reales positivos.

Para cada $\delta = (\delta_1,\dots,\delta_p) = (\delta';\delta_p) \in \mathbb{R}^p_>$ , se tienen los conjuntos:

$$|T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)| = \{x \in X - \tilde{Y} : |\phi_i| = \delta_i , 1 \leq i \leq p\}$$
$$|D^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)| = \{x \in X - \tilde{Y} : |\phi_i| = \delta_i , 1 \leq i < p , |\phi_p| > \delta_p\}$$

Cuando se verifica que

$$\dim_R |T^p_\delta(\phi)| \leq 2n - p$$
$$\dim_R |D^p_\delta(\phi)| \leq 2n - p + 1$$

estos conjuntos se orientan mediante las convenciones siguientes: la aplicación $|\phi| = (|\phi_1|,\dots,|\phi_p|): X - Y \to \mathbb{R}$ es analítica. Entonces

$$T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi) = (-1)^{p(p-1)/2} |\phi|^{-1} [\underset{\sim}{\delta}]$$
$$D^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi) = (-1)^{(p-1)(p-2)/2} |\phi|^{-1} ([\delta] \times [x_p > \delta_p])$$

para cada $\delta \in \mathbb{R}$ , donde $|\phi|^{-1}$ denota la operación 'imagen inversa' de cadena semianalítica definida en [1] .

La orientación de los tubos $T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)$ y $D^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)$ es la misma que en [1] , y se mantendrá a lo largo de este trabajo. En el caso en que $X = \mathbb{C}$ , $\mathcal{H} = \{Y_1\}$, $Y_1 = V(z)$ , $T_{\underset{\sim}{\delta}}$ es el círculo $|z| = \delta$ con la orientación habitual.

En el caso de intersección completa, se verifica, que si $\underset{\sim}{\delta}$ y $\underset{\sim}{\delta}'$ son suficientemente pequeños, entonces $T_{\underset{\sim}{\delta}}$ y $T_{\underset{\sim}{\delta}'}$ son homólogos, o sea que $T_{\underset{\sim}{\delta}} - T_{\underset{\sim}{\delta}'} = b_{\bullet} S$ , donde $S$ es una $2n - p + 1$ cadena semianalítica conveniente.

## 0.2

Introducimos la notación:

$$\mathcal{H}(i) = \{Y_1, \ldots, Y_{i+1}, Y_{i+1}, \ldots, Y_{p+1}\}$$
$$\cup\,\mathcal{H} = \cup\,\{Y_i : 1 \leqslant i \leqslant p+1\}$$
$$\cap\,\mathcal{H} = \cap\,\{Y_i : 1 \leqslant i \leqslant p+1\}$$

No se hace ninguna hipótesis sobre la dimensión de $\cap\,\mathcal{H}$ . Se acepta también la posibilidad que $Y_i = Y_1$ , $2 \leqslant i \leqslant p + 1$ .

## 0.3

Una <u>trayectoria admisible</u> en $\mathbb{R}^p$ , $p \geqslant 2$ es una aplicación

$$\underset{\sim}{\delta} = (\delta_1(\delta), \ldots, \delta_p(\delta)) : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^p_>$$

tal que

a) $\lim\limits_{\delta\to 0} \delta_p(\delta) = 0$

b) $\lim\limits_{\delta\to 0} \dfrac{\delta_i}{\delta_{i+1}^q}$ , $1 \leqslant i \leqslant p-1$ , para todo $q \in \mathbb{N}$

Es inmediato entonces, que dados $(\varepsilon_i) \in \mathbb{R}$ , $1 \leqslant i \leqslant p$ , se tiene

$$\lim_{\delta\to 0} \prod_{s=1}^{p} \delta_s(\delta)^{\varepsilon_s} = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon_i > 0 \\ +\infty & \text{si } \varepsilon_i < 0 \end{cases}$$

<u>0.4</u> <u>Teorema</u> (cf. [1] , (1.7.2) pag.36)

Sea $\mathcal{H} = \{Y_1, \ldots, Y_{p+1}\}$ una familia de hipersuperficies en X, $0 \leqslant p \leqslant n-1$ .

Elijamos ecuaciones $\phi_i$ de $Y_i$ sobre un abierto relativamente compacto W de X y una trayectoria admisible $\underset{\sim}{\delta}$ en $\mathbb{R}^{p+1}_{>}$ . Llamemos $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_{p+1})$. Los tubos $T^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)$ y $D^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)$ están entonces definidos para $\delta$ pequeño y los límites:

$$R^p P^{p+1}(\tilde{\alpha}) = \lim_{\delta\to 0} I[D^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)](\tilde{\alpha}) \qquad (0.4.1)$$

$\tilde{\alpha} \in \Gamma_c(W; \mathcal{E}^{2n-p}_X(*\cup\mathcal{H}))$ , y

$$R^{p+1}(\tilde{\beta}) = \lim_{\delta\to 0} I[T^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)](\tilde{\beta}) \qquad (0.4.2)$$

$\tilde{\beta} \in \Gamma_c(W; \mathcal{E}^{2n-p-1}_X(*\cup\mathcal{H}))$ , existen y verifican las siguientes propiedades:

- Los límites (0.4.1) y (0.4.2) son independientes de la elección de la trayectoria $\underset{\sim}{\delta}$ . (0.4.3)
- Los límites (0.4.1) y (0.4.2) tienen bigrado (n,n-p) y (n,n-p-1)

respectivamente. En particular

$$R^p P^{p+1}(\bar{\partial}\tilde{u}) = (-1)^{p+1} R^{p+1}(\tilde{u})$$

y $$\qquad (0.4.4)$$

$$R^{p+1}(\bar{\partial}\tilde{w}) = 0$$

para

$$\tilde{u} \in \Gamma_c(W; \mathcal{E}_X^{2n-p-1}(*\cup\mathcal{H}))$$

$$\tilde{v} \in \Gamma_c(W; \mathcal{E}_X^{2n-p-2}(*\cup\mathcal{H}))$$

- Para cada $\tilde{u} \in \Gamma(W; \mathcal{E}_X^{q-p}(*\cup\mathcal{H}))$ , los funcionales

$$R^p P^{p+1}[\tilde{u}](\alpha) = R^p P^{p+1}(\tilde{u} \wedge \alpha) \qquad (0.4.5)$$
$$R^{p+1}[\tilde{u}](\beta) = R^{p+1}(\tilde{u} \wedge \beta)$$

con $\alpha \in D^{2n-q}(W)$ y $\beta \in D^{2n-q-1}(W)$ , son contínuos si uno considera el espacio $D^{\bullet}(W)$ con la topología usual.

- Existen conjuntos analíticos complejos $V_e(\mathcal{H})$ y $\tilde{V}_e(\mathcal{H})$ en $X$ , canónicamente asociados a. $\mathcal{H}$ , de dimensión pura $n-p-1$ y $n-p$ , conteniendo respectivamente los soportes de las corrientes $R^{p+1}[\tilde{u}]$ y $R^p P^{p+1}[\tilde{u}]$ .

- Para cada trayectoria admisible $\underset{\sim}{\delta}$ en $\mathbb{R}^p_>$ puede encontrarse $\delta^o_{p+1} > 0$ , tal que para cada $\delta_{p+1}$ fijo , $0 < \delta_{p+1} < \delta^o_{p+1}$ , el límite

$$\lim_{\delta\to 0} I[D^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta};\,\delta_{p+1}}(\phi)](\tilde{\alpha})$$

existe y además

$$R^p P^{p+1}(\tilde{\alpha}) = \lim_{\delta_{p+1}\to 0}\ \lim_{\delta\to 0}\ I[D^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta}\,\delta_{p+1}}(\phi)](\tilde{\alpha}) \qquad (0.4.7)$$

- Las definiciones locales de $R^p P^{p+1}$ y $R^{p+1}$ se recolectan sobre $X$, en virtud de (0.4.3) y resultan los homomorfismos:

$$\begin{aligned} RP_{\mathcal{H}} &: \Gamma_c(X;\mathcal{E}_X^{2n-p}(*\cup\mathcal{H})) \longrightarrow C \\ R_{\mathcal{H}} &: \Gamma_c(X;\mathcal{E}_X^{2n-p-1}(*\cup\mathcal{H})) \longrightarrow C \end{aligned} \qquad (0.4.8)$$

y sus valores en las formas $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ se llamarán *el p-residuo valor principal* de $\tilde{\alpha}$ y el *(p+1)-residuo* de $\tilde{\beta}$ respectivamente.

- Para cada $\tilde{\lambda} \in \Gamma(X;\mathcal{E}_X^{q-p}(*\cup\mathcal{H}))$, $q \geq p$, se definen los operadores

$$RP_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}](\alpha) = RP_{\mathcal{H}}(\tilde{\lambda}\wedge\alpha) \qquad , \quad \alpha \in D^{2n-q}(X)$$

y

$$R_{\mathcal{H}}[\lambda](\beta) = R_{\mathcal{H}}(\tilde{\lambda}\wedge\beta) \qquad , \quad \beta \in D^{2n-q-1}(X)$$

que son corrientes sobre X gracias a (0.4.5) y serán llamados el *p-residuo valor principal* de $\tilde{\lambda}$ y el *(p+1)-residuo* de $\tilde{\lambda}$. En el caso $p = 0$, se obtienen las corrientes *valor principal* *PV* y *residuo* *Res* de [2]. En este trabajo serán notados como P y R, respectivamente.

## 0.5 La intersección esencial

Con la misma notación que en (0.4) definimos el conjunto $\tilde{V}_e(\phi)$ (respectivamente $V_e(\phi)$ ) de los puntos $x \in W$ tales que para todo entorno $U$ de $x$ , y cada $\delta_o > 0$ , existe $\delta$ , $0 < \delta < \delta_o$ , tal que

$$U \cap |D_{\underset{\sim}{\delta}}^{p+1}(\phi)| \neq \emptyset$$

(resp.: $U \cap |T_{\underset{\sim}{\delta}}^{p+1}(\phi)| \neq \emptyset$ ).

Es claro que

$$\tilde{V}_e(\phi) \subset \cap \mathcal{H}(p+1)$$

$$V_e(\phi) \subset \cap \mathcal{H}$$

y usando (0.4.6), se tiene:

$$R^p P^{p+1}(\tilde{\alpha}) = 0 \quad , \text{ si } \operatorname{sop}(\tilde{\alpha}) \cap \tilde{V}_e(\phi) = \emptyset \tag{0.5.1}$$

$$R^{p+1}(\tilde{\beta}) = 0 \quad , \text{ si } \operatorname{sop}(\tilde{\beta}) \cap V_e(\phi) = \emptyset \tag{0.5.2}$$

Los conjuntos $V_e(\phi)$ y $\tilde{V}_e(\phi)$ son independientes de la trayectoria admisible $\underset{\sim}{\delta}$ y de las ecuaciones $\phi_i$ elegidas para constuirlos. En consecuencia quedan definidos los conjuntos $V_e(\mathcal{H})$ y $\tilde{V}_e(\mathcal{H})$ en $X$ llamados <u>intersecciones esenciales de la familia $\mathcal{H}$</u> que coinciden localmente con $V_e(\phi)$ y $\tilde{V}_e(\phi)$ .

$\tilde{V}_e(\mathcal{H})$ y $V_e(\mathcal{H})$ pueden construirse por recurrencia de la siguiente forma: $Y_o' = X$ , y para cada $i$ , $1 \leq i \leq p$ , sea $Y_i' = \cup\{$componentes irreducibles de $Y_{i-1}' \cap Y_i \not\subset Y_{i+1}\}$ . Entonces

$$\tilde{V}_e(\mathcal{H}) = Y_p' \quad \text{y} \quad V_e(\mathcal{H}) = Y_p' \cap Y_{p+1} \tag{0.5.3}$$

Se sigue de la construcción anterior:

a) Si $\tilde{V}_e(\mathcal{H})$ (resp.: $V_e(\mathcal{H})$ ) no es vacío, es un conjunto analítico en X de dimensión pura n-p (resp.: n-p-1).

b) Si $\dim_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{H}(p+1) = n-p$ , entonces $\tilde{V}_e(\mathcal{H})$ es la unión de las componentes irreducibles de $\cap\mathcal{H}(p+1)$ que no estén contenidas en $Y_{p+1}$ .

c) Si $\dim_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{H} = n-p-1$ (caso de intersección completa), entonces

$$\tilde{V}_e(\mathcal{H}) = \cap\mathcal{H}(p+1)$$

y

$$V_e(\mathcal{H}) = \cap\mathcal{H}$$

En general $\tilde{V}_e(\mathcal{H})$ y $V_e(\mathcal{H})$ dependen del orden de las hipersuperficies en la familia $\mathcal{H}$ como se observa en el siguiente ejemplo:

$$Y_1 = \{z_1 . z_2\} = 0$$

$$Y_2 = \{z_2\} = 0$$

En este caso, $V_e(Y_1, Y_2) = 0$ mientras que $V_e(Y_2, Y_1) = \phi$ .

## 0.6 Notación

$\mathbb{N}$ denotará el conjunto de números naturales y el cero. Si $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ , $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $\mathbb{N}^n$ , entonces

$$z^{\alpha} = \prod_{k=1}^{n} z^{\alpha_k} \quad , \quad |\alpha| = \sum_k \alpha_k$$

Sea $\Lambda(p,n)$ la familia de subconjuntos $I = \{i_1, \ldots, i_p\} \subset$

$\subset \{1,\dots,n\}$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$. Para cada $I \in \Lambda(p,n)$, notaremos:

$$z_I = (z_i : i \in I) = (z_{i_1},\dots,z_{i_p})$$

$$z_I^\alpha = \prod_{i\in I} z_i^{\alpha_i}$$

Si $J = \{j_1,\dots,j_{n-p}\} = \{1,\dots,n\} - I$ , $1 \leq j_1 < \dots < j_{n-p} \leq n$, entonces

$$z(I) = (z_{j_1},\dots,z_{j_{n-p}}) = z_J \quad , \quad z(I)^\alpha = \prod_{j\in J} z_j^{\alpha_j}$$

$$\|z\| = \max\{|z_i| : 1 \leq i \leq n\} \quad , \quad \|z(I)\| = \max\{|z_j| : j \in J\}$$

$$B = \{z \in C^n : \|z\| < 1\} \quad , \quad B(I) = \{z(I) : \|z(I)\| < 1\}$$

Asimismo, para cada $\delta > 0$

$$B_\delta^\alpha = \{z \in B : \|z^\alpha\| > \delta\} \quad , \quad B(I)_\delta^\alpha = \{z(I) \in B(I) : \|z(I)^\alpha\| > \delta\}.$$

Si $\beta \in \mathbb{N}^{p\times n}$ es una matriz de $p$ filas por $n$ columnas, denotaremos por $\beta_{ij}$ el elemento de la i-ésima fila y j-ésima columna de $\beta$. $\beta_i = (\beta_{i1},\dots,\beta_{in})$ es la i-ésima fila. $\beta_I$ es la matriz construida con las $p$ filas y las columnas $i_1 < \dots < i_p$ de $\beta$. Si $\beta \in \mathbb{N}^{(p+1)\times n}$, $\beta_I(p+1)$ designa la matriz que tiene las primeras $p$ filas y las columnas $i_1 < \dots < i_p$ de $\beta$ y $\beta(p+1)$ es la matriz construida con las primeras $p$ filas de $\beta$. Asimismo notaremos:

$$
\begin{aligned}
dz &= dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \\
dz_I &= dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \\
d\bar{z} &= d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n \\
d\bar{z}_I &= d\bar{z}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{i_p} \\
d\omega_I &= dz_{i_1} \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \cdots dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{i_p} \quad .
\end{aligned}
$$

Una forma $\omega \in \Gamma(C^n; \mathcal{E}^{2n-p}) = \mathcal{E}^{2n-p}(C^n)$ , $0 \leqslant p \leqslant n$ admite una representación única, la <u>expresión</u> <u>canónica</u> de $\omega$ :

$$
\omega = \sum_{A,\, B,\, M} a_{ABM}(z,\bar{z})\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge d\omega_M
$$

donde $A,B,M$ son subconjuntos ordenados de $\{1,\ldots,n\}$ , dos a dos disjuntos y tales que $|A| + |B| + 2|M| = 2n - p$ . Necesariamente es $|A| + |B| + |M| \leqslant n$ y $|M| \geqslant n - p$ .

Diremos que $\beta \in \mathbb{N}^{p \times p}$ es <u>normal</u> si $\det(\beta) \neq 0$ y si $\beta$ puede transformarse en una matriz triangular superior mediante una permutación de sus columnas.

Decimos que $\beta \in \mathbb{N}^{(p+1)\times p}$ es <u>normal</u> si $\beta_{p+1} = 0$ y $\beta(p+1)$ es normal. Diremos también que $\beta \in \mathbb{N}^{p\times n}$ es <u>normal</u> , si existe $A \subset \{1,\ldots,n\}$ , $|A| = p$ , tal que $\beta_A$ es normal.

Consideremos la expresión canónica

$$
\omega = b(z,\bar{z})\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge d\omega_M \in \mathcal{E}^{2n-p}(C^n) \; .
$$

Decimos que <u>$\omega$</u> <u>es</u> <u>normal</u> <u>respecto</u> <u>de</u> $\beta \in \mathbb{N}^{p\times n}$ ó $\beta \in \mathbb{N}^{(p+1)\times n}$ (ó simplemente, que es normal, si no hay lugar a confusión), si:

$|B| = 0$ , $|M| = n - p$ y $\beta_A$ es normal.

Sea $k \in \mathcal{E}(C^n)$ , $\gamma \in \mathbb{N}^n$ , $I \in \Lambda(p,n)$. Entonces

$$\partial_j k = \frac{\partial k}{\partial z_j} , \quad \partial^\gamma k = \partial_1^{\gamma_1} \dots \partial_n^{\gamma_n} k = k^{(\gamma)}$$

$$\bar{\partial}_j k = \frac{\partial k}{\partial z_j} , \quad \partial^\gamma(I) = \partial_{i_1}^{\gamma_{i_1}} \dots \partial_{i_p}^{\gamma_{i_p}} k$$

$$\gamma! = \gamma_1! \dots\dots \gamma_n! , \qquad \gamma(I)! = \gamma_{i_1}! \dots\dots \gamma_{i_p}!$$

$$k^\gamma(I) = \frac{1}{\gamma(I)!}[\partial^\gamma(I)k]_{z_{i_1} = \dots = z_{i_p} = 0}$$

$$\tilde{k}^\gamma(I) = z_I^\gamma k^\gamma(I).$$

Se usará también la siguiente notación:

Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, y $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, llamaremos

$$\varepsilon^\alpha = \varepsilon^{\Sigma\alpha_i}$$

Si $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in [0, 2\pi]^n$, y $z \in C^n$, notaremos

$$z \cdot e^{i\theta} = (z_1 . e^{i\theta_1}, \dots, z_n e^{i\theta_n})$$

y si $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$\alpha \cdot \theta \quad \sum_i \alpha_i \theta_i$$

## 0.7. Regularización.

En lo que sigue, y en el resto del trabajo, $f$ denotará una función $C^\infty$ definida sobre el conjunto $C$ de los números complejos, con soporte contenido en $B = \{ z \in C : |z| \leq 1\}$, radial, tal que:

$$\int_C f(z)\, dz\, d\bar{z} = 1 .$$

Para cada $\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq 1$, se define:

$$f_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-2} f\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) .$$

Es sabido que $(f_\varepsilon)$ es una familia regularizante de la distribución $\delta \in {}'D^0(C)$; esto es: para cada $a \in \mathcal{E}^0(C)$ y cada $z \in C$ se tiene

$$a(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_C f\,(z-t)\, a(t)\, dt\, d\bar{t} \quad .$$

Para $z \in C^n$, definimos:

$$F_\varepsilon(z) = \prod_{i=1}^{n} f_\varepsilon(z_i) \qquad \text{si} \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \; ,$$

se obtiene así una familia regularizante, 'cartesiana y radial', de la distribución $\delta \in {}'D^0(C^n)$.

El resultado fundamental a usarse sobre regularización de corrientes es el enunciado en la Introducción, pag.7 (10'); al respecto, es conveniente formular las siguientes precisiones:

1. Consideremos la distribución "valor principal" $T_\alpha \in {}'D(C^n)$, donde $\alpha \in \mathbb{N}^n$, definida como:

$$T_a\ (a) = \lim_{\delta \to o} \int_{|t^a| > \delta} a(t)\ \frac{dt\ d\bar{t}}{t^a} \ .$$

Una familia de regularizantes $R_\epsilon T$ de la distribución T será:

$$^{(a)}\phi_\epsilon(w) = \lim_{\delta \to o} \int_{|t^a| > \delta} f_\epsilon(w-t)\ \frac{dt\ d\bar{t}}{t^a}$$

2. Si T es una corriente perteneciente a $'D(C^n)$, la familia regularizante construída según [2], admite la siguiente descripción:

Sea $\omega$ una forma diferencial $C^\infty$ sobre $C^n$, y sea

$\omega = \sum_H a_H(x)\ dx_H$ la expresión canónica de $\omega$.

Entonces:

$R_\epsilon T(\omega) = T[R^*_\epsilon(\omega)]$, donde $R^*_\epsilon$ es el endomorfismo de $D^\cdot(C^n)$ definido por

$$R_\epsilon^*(\omega) = \sum_H [\int_{C_y^n} a_H(x+y)\, f_\epsilon(y)\, dy ]\, dx_H$$

3. La referencia sobre regularización es:de Rham , G. Variétés Différentiables, Hermann, Paris, 1960, Cap.III, §15.

# C A P I T U L O   I

En este Capítulo se encara el problema enunciado en la Introducción 3. a) ( pag.5). El teorema fundamental se demuestra en el parágrafo 3.

En §1 se obtiene el siguiente resultado, referido al producto de dos valores principales en C:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{\delta \to 0} \int_{|z^{\nu}|>\delta} {}^{(\kappa)}\phi_{\epsilon}(z) \; a(z,\bar{z}) \; \frac{dz\, d\bar{z}}{z^{\nu}} = \lim_{\delta \to 0} \int_{|z^{\kappa+\nu}|>\delta} a(z,z) \; \frac{dz\, d\bar{z}}{z^{\kappa+\nu}} \; .$$

La fórmula anterior se generaliza a $C^n$ en §2, a la siguiente (cf. 0.7):

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{\delta \to 0} \int_{|w^{\gamma}|>\delta} {}^{(\alpha_J)}\phi_{\epsilon}(w_J) \; F_{\epsilon}^{(\alpha_I)}(w_I) \; b(w,\bar{w}) \; \frac{dw\, d\bar{w}}{w^{\gamma}} =$$

$$= \frac{\alpha_I\,!}{(\alpha_I + \gamma_I)!} \; \lim_{\delta \to 0} \int_{|w_I^{\gamma}|>\delta} \frac{\partial^{\alpha_I+\gamma_I}}{\partial_I} \, b \, \Big|_{w_I = 0} \; \frac{dw_J \cdot d\bar{w}_J}{w^{\alpha_J+\gamma_J}}$$

§ 1.

1.1 Lema

Sea $t \in C$ , $a(t) \in D$ , $r \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \int_{|t^r|>\delta} \frac{f_\varepsilon(t).a(t)}{t^r}\, dt\, d\bar{t} = \frac{1}{r!} \frac{\partial}{\partial t^r} a(t)\Big|_{t=0} \qquad (1.1.1)$$

Demostración: Sea $a(t,\bar{t}) =$

$$= \sum_{k+j\leqslant r} g_{kj}\, t^k \bar{t}^j + \sum_{k+j=r+1} B_{kj}(t,\bar{t})\, t^k \bar{t}^j$$

el desarrollo en serie de Taylor de $a(t,\bar{t})$ (cf. [1]).

Entonces

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{|t^r|>\delta} \frac{f_\varepsilon(t).a(t,\bar{t})}{t^r}\, dt\, d\bar{t} = \qquad (1.1.2)$$

$$\sum_{k+j\leqslant r} g_{kj} .\lim_{\delta\to 0} \int_{|t^r|>\delta} \frac{f_\varepsilon(t).t^k \bar{t}^j}{t^r}\, dt\, d\bar{t} + \sum_{k+j=r+1} \lim_{\delta\to 0} \int_{|t^r|>\delta} \frac{f_\varepsilon(t) B_{kj}(t,\bar{t}) t^k \bar{t}^j}{t^r}\, dt d\bar{t}$$

Analicemos cada término de 1.1.2 :

a) Supongamos $k + j < r$ y además, siempre podemos suponer que el soporte de $a(t,\bar{t})$ está contenido en la bola de radio uno. Entonces, si $t = \rho e^{i\phi}$ , $dt \wedge d\bar{t} = (-2i)\rho\, d\rho \wedge d\phi$

$$\int_{|t^r|>\delta} \frac{f_\varepsilon(t)t^k \bar{t}^j}{t^r}\, dt\, d\bar{t} = (-2i)\int_{\delta^{1/r}}^{1} \int_0^{2\pi} e^{(k-j-r)i\phi} d\phi\ f_\varepsilon(\rho)\rho^{k+1-j-r}\, d\rho$$

Usando que $f_\varepsilon$ es una función radial y

$$k - j \leq k + j < r$$

se sigue

$$\int_0^{2\pi} e^{(k-j-r)i\phi}\, d\phi = 0 \qquad (1.1.3)$$

b) Luego de a), basta considerar el caso $k+j = r$ , y en virtud de (1.1.3) sólo si $j=0$. Considerando entonces (1.1.2) cuando $j=0$ , $k=r$ se tiene:

$$g_{r0} \cdot \lim_{\delta\to 0} \int_{|t^r|>\delta} f_\varepsilon(t)\, dt\, d\bar{t} = g_{r0} = \frac{1}{r!} \frac{\partial}{\partial t^r} a \Big|_{t=0}$$

c) Sea $k+j=r+1$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{|t^r|>\delta}\frac{f_\varepsilon(t).B_{kj}(t,\bar{t}).t^k\bar{t}^j}{t^r}\,dt\,d\bar{t}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{|t^r|>\delta} f_\varepsilon(t).A_{kj}(t,\bar{t})\,dt\,d\bar{t}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_t} f_\varepsilon(t).A_{kj}(t,\bar{t})\,dt\,d\bar{t}$$

$$= 0$$

donde

$$A_{kj}(t,\bar{t}) = B_{kj}(t,\bar{t})\ .\ \frac{t^k.\bar{t}^j}{t^r}$$

función continua de $t$, que en el origen vale cero, ya que $k+j=r+1$.

## 1.2 Lema

Sea $x\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\prod_{\substack{j\neq k\\ j=0}}^{s}(x+j) = s! \qquad (1.2.1)$$

Demostración: El término de la izquierda de la fórmula (1.2.1), define un polinomio con coeficientes reales. Verificaremos primero que es constante, y luego que efectivamente $P(x) = s!$

Como el grado de $P(x)$ es $\leq s$ , para ver que es constante, basta ver que alcanza el mismo valor en $s+1$ puntos distintos de $\mathbb{R}$.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} x(x+1)\dots(x+k-1)(x+k+1)\dots(x+s)$$

Un cálculo inmediato muestra que:

$$P(0) = s!$$

$$P(-t) = (-1)^t \binom{s}{t} [(-t)(-t+1)\dots(-1)]\,[(-t+t+1)\dots(-t+s)]$$

$$= (-1)^t \frac{s!}{(s-t)!\,t!} [(-1)^t t(t-1)\dots(t-t+1)]\,[1.2\dots(s-t)]$$

$$= \frac{s!}{(s-t)!\,t!}\, t!\,(s-t)!$$

$$= s!$$

Luego, $P(-t) = s!$ , $0 \leqslant t \leqslant s$ , y por lo tanto

$$P(x) = s! \qquad , \quad x \in \mathbb{R}$$

<u>1.3</u> <u>Corolario</u>

$$\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \frac{1}{(m+k)} = \frac{1}{m.\binom{m+s}{s}} \qquad , \ m \geqslant 1 \ , \ s \in \mathbb{N}$$

Demostración: $\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \frac{1}{(m+k)}$

$$= \frac{1}{\prod_{j=0}^{s} (m+j)} \left[ \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{s} (m+j) \right] \qquad \text{(usando lema (1.2))}$$

$$= \frac{(m-1)!}{(m+s)!} \cdot s!$$

$$= \frac{s!\, m!}{m(m+s)!}$$

$$= \frac{1}{m\binom{m+s}{s}}$$

1.4 Lema

Sea $b \in D$ , $m,s \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \int_{|w^m|>\delta} b(w) \frac{\partial^s}{\partial w^s} f_\varepsilon(w,\bar{w}) \frac{dw\, d\bar{w}}{w^m}$$

$$= \frac{s!}{(m+s)!} \left. \frac{\partial^{m+s}}{\partial w^{m+s}} b(w,\bar{w}) \right|_{w=0}$$

Demostración: $\lim_{\delta\to 0} \int_{|t|>\delta} \frac{\partial}{\partial t} f_\varepsilon(t) . \frac{a(t)}{t^m}\, dt\, d\bar{t} \qquad =$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{|t|>\delta} d\left(f_\varepsilon(t)\,\frac{a(t)}{t^m}\,d\bar{t}\right) - \lim_{\delta\to 0} \int_{|t|>\delta} f_\varepsilon(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a(t)}{t^m}\right) dt\; d\bar{t}$$

Pero

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{|t|>\delta} d\left(f_\varepsilon(t)\,\frac{a(t)}{t^m}\,d\bar{t}\right)$$

$$= \lim_{\delta\to} \int_{|t|=\delta} \frac{f_\varepsilon(t).a(t)}{t^m}\,d\bar{t}$$

$$= 0 \quad (\text{cf. } [7])$$

Luego

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{|w^m|>\delta} \frac{\partial^s}{\partial w^s} f_\varepsilon(w,w).b(w)\,\frac{dw\; d\bar{w}}{w^m}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{|w^m|>\delta} f_\varepsilon(w,\bar{w}).\partial^s\left[\frac{b(w)}{w^m}\right] dw\; d\bar{w}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{|w^m|>\delta} f_\varepsilon(w)\left[\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}(-1)^k\, b^{(s-k)}(w).\frac{m(m+1)\ldots(m+k-1)}{w^m}\right] dw d\bar{w}$$

$$= \sum_{k=0}^{s} (-1)^k\binom{s}{k}\frac{(m+k-1)!}{(m-1)!}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{|w^m|>\delta} \frac{b^{(s-k)}(w).f_\varepsilon(w)}{w^m}\, dw\; d\bar{w}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} \frac{1}{(m+k)!} \quad b^{(s-k+m+k)}(0)$$

$$= b^{(s+m)}(0) . [\sum_{k=0}^{s} (-1)^k . \binom{s}{k} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!\,(m+k)!}]$$

$$= \frac{b^{(s+m)}(0)}{(m-1)!} . [\sum_{k=0}^{s} (-1)^k . \binom{s}{k} \frac{1}{m+k}] \qquad \text{(usando (1.3))}$$

$$= \frac{b^{(s+m)}(0)}{(m-1)} . \frac{1}{m\binom{m+s}{s}}$$

$$= \frac{s!}{(m+s)!} . \frac{\partial^{m+s}}{\partial w^{m+s}} b(w)\Big|_{w=0}$$

1.5 Lema

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial^m}{\partial w^m} [{}^{(r)}\phi_\varepsilon(w)] = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq 0 \text{ ó } m \neq 0 \\ 1 & \text{si } r = m = 0 \end{cases}$$

Demostración: Como ${}^{(r)}\phi_\varepsilon(w)$ es la convolución de un valor principal con una regularizante de la $\delta$, es bien sabido de la teoría de distribuciones que:

$$\frac{\partial^m}{\partial w^m} {}^{(r)}\phi_\varepsilon(w)\Big|_{w=0} = \frac{\partial^m}{\partial w^m} [\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|t^r|>\delta} \frac{f_\varepsilon(w-t)}{t^r} dt\, d\bar{t}\,]\Big|_{w=0}$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{|t^r|>\delta} \frac{\partial^m}{\partial w^m} f_\varepsilon(w-t)\Big|_{w=0} dt\, d\bar{t}$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{|t^r|>\delta} \frac{f_\varepsilon^{(m)}(t)}{t^r}\, dt\, d\bar{t}$$

Entonces, por inducción, para $m = 1$

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{|t^r|>\delta} \frac{\partial}{\partial t} f_\varepsilon(t)\, \frac{dt\, d\bar{t}}{t^r}$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{|t^r|>\delta} d\left(\frac{f_\varepsilon(t)}{t^r}\, d\bar{t}\right) - \lim_{\delta\to 0} \int_{|t^r|>\delta} \frac{f_\varepsilon(t)}{t^{r+1}}\, dt\, d\bar{t}$$

Entonces, usando el teorema de Stokes, se tiene:

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{|t^r|>\delta} d\left(\frac{f_\varepsilon(t)}{t^r}\, d\bar{t}\right) = \lim_{\delta\to 0} \int_{|t^r|=\delta} \frac{f_\varepsilon(t)}{t^r}\, d\bar{t}$$

$= 0$ (cf. [7] ,pag.286 (9))

Luego, notando que por lema (1.1)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \int_{|t|>\delta} \frac{f_\varepsilon(t)}{t^{r+1}}\, dt\, d\bar{t} = 0$$

se sigue

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{|t^r|>\delta}\frac{f'_\varepsilon(t)}{t^r}\,dt\,d\bar{t} = 0$$

En el caso general, usando la hipótesis inductiva y la misma idea que para $m=1$, se tiene:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{|t^r|>\delta}\frac{f_\varepsilon^{(m+1)}(t)\,dt\,d\bar{t}}{t^r} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{|t^r|=\delta}\frac{f_\varepsilon^{(m)}(t)\,d\bar{t}}{t^r} - \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{|t^r|>\delta}\frac{f_\varepsilon^{(m)}(t)}{t^r}\,dt\,d\bar{t} = 0$$

Es obvio que si $r=m=0$

$$^{(0)}\phi_\varepsilon(0) = 1$$

## 1.6 Lema

Sea $a \in D(C^n)$, de manera que $\operatorname{sop}(a) \subset B$. Sea $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Entonces, si

$$V_\delta^\alpha = \{t \in B : |t_i^{\alpha_i}| > \delta_i\}$$

se tiene

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{|t^\alpha|>\delta}\frac{a(t)}{t^\alpha}\,dt\,d\bar{t} = \lim_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\to 0}\int_{V_\delta^\alpha}\frac{a(t)}{t^\alpha}\,dt\,d\bar{t}$$

<u>Demostración</u>:
$$\lim_{\delta \to 0} \int_{|t^\alpha| > \delta} \frac{a(t)}{t^\alpha} \, dt \, d\bar{t} = \int_B \frac{K_\alpha(t)}{t^\alpha} \, dt \, d\bar{t} \qquad (1.6'.2')$$

donde

$$a(t) = \sum_{j=1}^{n} \Big( \sum_{r+s<\alpha_j} t_j^r \, \bar{t}_j^s \, g^j_{r,s}(t(j),\bar{t}(j)) \Big) + K_\alpha(t,\bar{t})$$

es el desarrollo en serie de Taylor de $a(t)$,(cf. [2] ,Prop.6.5 (11) ).

Por otro lado, se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} \Big( \sum_{r+s<\alpha_j} \Big\{ \lim_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\to 0} \int_{V_\delta^\alpha} \frac{t_j^r \, \bar{t}_j^s \, g^j_{rs}(t(j),\bar{t}(j))}{t_j^{\alpha_j} \cdot t(j)^\alpha} \, dt \, d\bar{t} \Big\} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \Big( \sum_{r+s<\alpha_j} \lim_{(\delta_1,\ldots,\check{\delta}_j,\ldots,\delta_n)\to 0} \int_{V_\delta^\alpha(j)} \lim_{\delta_j \to 0} \int_{|t_j^{\alpha_j}|>\delta_j} \frac{t_j^r \, \bar{t}_j^s \, g^j_{rs}(t(j),t(j))}{t_j^{\alpha_j}} dt_j \, d\bar{t}_j \, \frac{dt(j)d\bar{t}(j)}{t(j)^\alpha} \Big)$$

$= 0$ (cf. [2] ,lema 6.3 (a)) , donde $(\delta_1,\ldots,\check{\delta}_j,\ldots,\delta_n) =$
$= (\delta_1,\ldots,\delta_{j-1},\delta_{j+1},\ldots,\delta_n)$ y

$$V_\delta^\alpha(j) = \{ t \in B : |t_i^{\alpha_i}| > \delta_i \ , \ 1 \leq i \leq n \ , \ i \neq j \}$$

Luego

$$\lim_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} \int_{V_\delta^\alpha} \frac{a(t)}{t^\alpha} \, dt \, d\bar{t} = \int_B \frac{K_\alpha(t)}{t^\alpha} \, dt \, d\bar{t} \qquad (1.6'.3')$$

Luego, comparando (1.6.2) y (1.6.3) , se tiene la tesis.

## 1.7 Lema

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{|t_1^r t_2^s|>\delta} \frac{f_\varepsilon^{(k)}(t_1)f_\varepsilon(w_2-t_2)}{t_1^r\ t_2^s}\, dt_1\, d\bar{t}_1\, dt_2\, d\bar{t}_2 = 0 \quad , \text{ si } \quad r > 0$$

Demostración: Sea $D = \{ (t_1, t_2) \in C^2 : |t_1^r . t_2^s| > \delta \}$

$$D_2^\delta = \{t_2 \in C : \ 1 > |t_2^s| > \delta \ \}$$

y para cada $t_2 \in D_2^\delta$, se tiene

$$D_1^\delta = \{t_1 \in C : \ 1 > |t_1^r| > \delta / |t_2^s|\}$$

Entonces

$$\lim_{\delta\to 0} \int_D f_\varepsilon^{(k)}(t_1)f_\varepsilon(w_2-t_2)\frac{dt_1\, d\bar{t}_1\, dt_2\, d\bar{t}_2}{t_1^r\ t_2^s} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{D_2^\delta} \left( \int_{D_1^\delta} \frac{f_\varepsilon^{(k)}(t_1)dt_1\, d\bar{t}_1}{t_1^r} \right) \frac{f_\varepsilon(w_2-t_2)\ dt_2\, d\bar{t}_2}{t_2^s}$$

Usando lema 1.2 , como $r > 0$, se tiene:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{D_1^\delta} \frac{f_\varepsilon^{(k)}(t_1)dt_1\, d\bar{t}_1}{t_1^r} = 0$$

y de allí, la tesis.

1.8 Lema

$$ {}^{(p)}\phi_{\varepsilon}(w) = \varepsilon^{-p} \cdot {}^{(p)}\phi_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{-p}\left[f\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) * \frac{1}{w^p}\right] $$

Demostración: $$ {}^{(p)}\phi_{\varepsilon}(w) = \lim_{\delta\to 0} \int_{|t|>\delta} \frac{f_{\varepsilon}(w-t)}{t^p}\, dt\, d\bar{t} = $$

$$ = \lim_{\delta\to 0} \int_{|t|>\delta} \frac{f\left(\frac{w-t}{\varepsilon}\right) \cdot \varepsilon^{-2}}{t^p}\, dt\, d\bar{t} $$

(cambiando de variable $t = \varepsilon . z$ )

$$ = \varepsilon^{-p} \lim_{\delta\to 0} \int_{|z|>\frac{\delta}{\varepsilon}} \frac{f\left(\frac{w}{\varepsilon} - z\right)}{z^p}\, dz\, d\bar{z} = \varepsilon^{-p} \cdot \left[f\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) * \frac{1}{w^p}\right] $$

Notar que $$ {}^{(p)}\phi_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = \lim_{\delta\to 0} \int_{|t|>\delta} \frac{f_1\left(\frac{w}{\varepsilon} - t\right)}{t^p}\, dt\, d\bar{t} $$

y además $f_1 = f$ y por lo tanto

$$ \varepsilon^{-p} \cdot {}^{(p)}\phi_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = {}^{(p)}\phi_{\varepsilon}(w) $$

## 1.9 Lema

Sea $0 \leqslant \theta < 2\pi$ . Entonces

$$ {}^{(p)}\phi_1(z.e^{-i\theta}) = e^{ip\theta}.{}^{(p)}\phi_1(z) $$

Demostración: $$ {}^{(p)}\phi_1(z.e^{-i\theta}) = \lim_{\delta\to 0} \int_{|u|>\delta} \frac{f(e^{-i\theta}z - u)}{u^p}\, du\, d\bar{u} $$

$$ = \lim_{\delta\to 0} \int_{|u|>\delta} \frac{f(e^{-i\theta}(z-e^{i\theta}u))}{u^p}\, du\, d\bar{u} $$

(usando que $f$ es una función radial)

$$ = \lim_{\delta\to 0} \int_{|u|>\delta} \frac{f(z - e^{i\theta}u)}{u^p}\, du\, d\bar{u} $$

(haciendo el cambio de variable $t = e^{i\theta}u$ )

$$ = \lim_{\delta\to 0} \int_{|t|>\delta} \frac{f(z - t)}{e^{-ip\theta}\, t^p}\, dt\, d\bar{t} $$

$$ = e^{ip\theta}[f(z) * \frac{1}{z^p}] = e^{ip\theta}.{}^{(p)}\phi(z) $$

1.10 Lema

$$w^p \cdot {}^{(p)}\phi_\varepsilon(w) \xrightarrow[w\to\infty]{} 1 \quad , \quad \text{uniformemente respecto de } 0 < \varepsilon \leqslant 1$$

Demostración: Sea $\operatorname{sop}(f_\varepsilon) \subset \{z \in C : |z| \leqslant 1\}$ , $0 < \varepsilon \leqslant 1$

Luego, dado $d > 0$ , existe $C > 0$ tal que

$$|w - z| \geqslant d > 0 \qquad (1.7.1)$$

si $|w| \geqslant C$ y $|z| \leqslant 1$

Luego, para $|w| \geqslant C$ , puede escribirse

$$^{(p)}\phi_\varepsilon(w) = \int_{|z|\leqslant 1} \frac{f_\varepsilon(z)}{(w-z)^p}\, dz\, d\bar{z} \qquad (1.7.2)$$

En efecto: haciendo el cambio de variable $w-t=z$ en

$$^{(p)}\phi_\varepsilon(w) = \lim_{\delta\to 0} \int_{|t|>\delta} \frac{f_\varepsilon(w-t)}{t^p}\, dt\, d\bar{t}$$

y teniendo en cuenta la consideración (1.7.1), desaparece el valor principal, ya que en $|z| \leqslant 1$ , es siempre $|w-z| \geqslant d$ .

a) Probaremos primero que

$$\lim_{w\to\infty} \frac{w^p}{(w-z)^p} = 1$$

uniformemente respecto de $z$ en $\{|z| \leqslant 1\}$, por inducción en $p$.

Para $p=1$

$$\left|\frac{w}{w-z} - 1\right| = \frac{|z|}{|w-z|} \leqslant \frac{1}{|w|-1} \xrightarrow[w\to\infty]{} 0 \qquad (1.8.1)$$

ya que si $|w| > 1$,

$$|w-z| \geqslant \big||w|-|z|\big| \geqslant |w|-|z| \geqslant |w|-1 > 0$$

Supongamos que a) se cumple para $1,2,\ldots,p-1$. Usando que

$$a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \ldots + ab^{p-2} + b^{p-1})$$

se tiene

$$\frac{w^p}{(w-z)^p} - 1 = \frac{w^p - (w-z)^p}{(w-z)^p}$$

$$= \frac{[w-(w-z)]}{(w-z)^p}\,[w^{p-1} + w^{p-2}(w-z) + \ldots + (w-z)^{p-1}]$$

$$= \frac{z}{(w-z)}\left[\frac{w^{p-1}}{(w-z)^{p-1}} + \frac{w^{p-2}}{(w-z)^{p-2}} + \ldots + \frac{w}{w-z} + 1\right] \qquad (1.8.2)$$

Por hipótesis inductiva, cada término del corchete converge a uno uniformemente respecto de $z$ en $\{|z| \leqslant 1\}$. Asimismo, de acuerdo con (1.8.1),

$$\frac{z}{w-z} \xrightarrow[w\to\infty]{} 0$$

uniformemente respecto de $z$ en $\{|z| \leqslant 1\}$ . Afirmamos ahora, que el producto en (1.8.2) , converge a cero uniformemente en $\{|z| \leqslant 1\}$. (notar que tomando $|w| \geqslant 2$ , de (1.8.1) resulta $|\frac{z}{w-z}| \leqslant 1$ ).

Llamamos

$$g_w = \frac{z}{w-z}$$

$$f_w = [ (\frac{w}{w-z})^{p-1} + \ldots + \frac{w}{w-z} + 1] \tag{1.8.3}$$

Queremos probar que:

$$\lim_{w\to\infty} f_w . g_w = 0 \quad , \quad \text{uniformemente en } \{|z| \leqslant 1\} .$$

$$|g_w . f_w| = |g_w . f_w + p . g_w - p . g_w| \leqslant |g_w| |f_w - p| + p|g_w| \leqslant$$

$$|f_w - p| + p|g_w| \quad , \quad \text{ya que } |g_w| \leqslant 1 .$$

Pero como cada término de (1.8.3) converge uniformemente a $1$ , se sigue que

$$f_w \xrightarrow[w\to\infty]{} p \quad , \text{ uniformemente}$$

y por lo tanto

$$|f_w . g_w| \xrightarrow[w\to\infty]{} 0$$

b) Probaremos ahora, que

$$w^p \cdot {}^{(p)}\phi_\varepsilon(w) \xrightarrow[w\to\infty]{} 1$$

uniformemente en $\{|z| \leq 1\}$.

Sea $|w| \geq C$. Usando la expresión (1.7.2)

$$|w^p \cdot {}^{(p)}\phi_\varepsilon(w) - 1| = \left| w^p \int_{|z|\leq 1} \frac{f_\varepsilon(z)}{(w-z)^p}\, dz\, d\bar{z} - 1 \right|$$

$$= \left| \int_{|z|\leq 1} \frac{w^p \cdot f_\varepsilon(z)}{(w-z)^p}\, dz\, d\bar{z} - \int_{|z|\leq 1} f_\varepsilon(z)\, dz\, d\bar{z} \right| \leq$$

$$\leq \int_{|z|\leq 1} \left| \frac{w^p}{(w-z)^p} - 1 \right| \cdot f_\varepsilon(z)\, dz\, d\bar{z} \qquad (1.9.1)$$

Verificaremos ahora, que dado $\alpha > 0$ , existe $K > 0$ , tal que para todo $z$ , con $|z| \leq 1$ , es

$$|w^p \cdot {}^{(p)}\phi_\varepsilon(w) - 1| \leq \alpha \qquad , \text{ si } |w| \geq K$$

De acuerdo con a), dado $\alpha > 0$ , existe $C_1$ tal que

$$\left| \frac{w^p}{(w-z)^p} - 1 \right| < \alpha \qquad , \text{ si } |w| > C_1$$

Entonces, tomando $K = \max(C_1, C)$ , se tiene en (1.9.1)

$$\int_{|z|\leqslant 1} \left| \frac{w^p}{(w-z)^p} - 1 \right| . f_\varepsilon(z)\, dz\, d\bar{z} \leqslant \alpha \int_{|z|\leqslant 1} f_\varepsilon(z) dz\, d\bar{z} = \alpha$$

1.11 Lema

Existe $K' > 0$, tal que para todo $w \in C$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, se tiene

$$|{}^{(p)}\phi_\varepsilon(w)| \leqslant \frac{K'}{(1+|w|)^p}$$

Demostración: Según lema (1.10), como la sucesión

$$w^p . {}^{(p)}\phi_\varepsilon(w) \xrightarrow[w \to \infty]{} 1$$

para $0 < \varepsilon \leqslant 1$, entonces

$$|w^p . {}^{(p)}\phi_\varepsilon(w)| \leqslant 1 + |w^p . {}^{(p)}\phi_\varepsilon(w) - 1| \leqslant 2 \qquad (1.10.1)$$

para $|w| \geqslant C$ y $0 < \varepsilon \leqslant 1$

Fijemos ahora $w$, con $|w| < C$. Existe $\delta < C$, tal que para todo $z$ con $|z| > \delta$, sea $|w-z| > C-\delta$. Por lo tanto, para ese $\delta$ fijo, elegido de esa forma, vale:

$$\left| \int_{1 \geqslant |z| > \delta} \frac{w^p}{(w-z)^p} f_\varepsilon(z)\, dz\, d\bar{z} \right| \leqslant \frac{C^p}{(C-\delta)^p} \qquad (1.10.2)$$

Como

$$w^p \cdot {}^{(p)}\phi_\varepsilon(w) = \lim_{\nu\to 0} \int\limits_{1\geq|z|>\nu} \frac{w^p}{(w-z)^p} f_\varepsilon(z)\, dz\, d\bar{z}$$

entonces, existe el límite, cuando $\delta \to 0$ en (1.10.2) , y por lo tanto como

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{C^p}{(C-\delta)^p} = 1 \qquad (\delta < C)$$

se tiene

$$|w^p \cdot {}^{(p)}\phi_\varepsilon(w)| \leq 1 \tag{1.10.3}$$

para $0 < \varepsilon \leq 1$ y $|w| < C$.

Por otro lado, afirmamos que para todo $w \in C$

$$|{}^{(p)}\phi_\varepsilon(w)| \leq C_1$$

uniformemente respecto de $0 < \varepsilon \leq 1$. De acuerdo con (1.10.1), es

$$|{}^{(p)}\phi_\varepsilon(w)| \leq \frac{2}{C^p} \tag{1.10.4}$$

para $|w| \geq C$ , uniformemente en $0 < \varepsilon \leq 1$.

Por un razonamiento similar al de (1.10.2), se sigue

$$\left| \int\limits_{1\geq|z|>\delta} \frac{f_\varepsilon(z)\, dz\, d\bar{z}}{(w-z)^p} \right| \leq \frac{1}{|C-\delta|^p} \qquad , \quad 0 < \varepsilon \leq 1$$

Luego

$$|{}^{(p)}\phi_\varepsilon(w)| \leq \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{(C-\delta)^p} = \frac{1}{C^p} \tag{1.10.5}$$

para $|w| \leqslant C$ y $0 < \varepsilon \leqslant 1$ . Resumiendo (1.10.1) y (1.10.3) por un lado, y (1.10.4) y (1.10.5) por otro, se tiene:

$$|w^{p} \cdot {}^{(p)}\phi_{\varepsilon}(w)| \leqslant K$$

para todo $w \in C$ uniformemente para $0 < \varepsilon \leqslant 1$ , y

$$|{}^{(p)}\phi_{\varepsilon}(w)| \leqslant K_{1}$$

para todo $w \in C$ uniformemente para $0 < \varepsilon \leqslant 1$ . Sumando entonces (1.11.1) y (1.11.2)

$$|{}^{(p)}\phi_{\varepsilon}(w)| \leqslant \frac{K''}{|w^{p}|+1} \sim \frac{K''}{(1+|w|)^{p}}$$

<u>1.12</u> <u>Proposición</u>

$$\lim_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to 0} \int_{C_z} {}^{(p)}\phi_{\varepsilon_1}(z) \cdot {}^{(q)}\phi_{\varepsilon_2}(z) \cdot a(z,\bar{z})\, dz\, d\bar{z}$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{|w|>\delta} \frac{a(w,\bar{w})}{w^{p+q}}\, dw\, d\bar{w} \qquad , a(z,\bar{z}) \in D$$

<u>Demostración</u>: Como $a(z,\bar{z}) \in D(C)$ , sea $\chi \in D(C)$ tal que:

a) $\chi$ es una función radial

b) $\chi \equiv 1$ en sop(a).

Entonces

$$\int_{C_z} {}^{(p)}\phi_{\varepsilon_1}(z).{}^{(q)}\phi_{\varepsilon_2}(z).a(z,\bar{z})\, dz\, d\bar{z}$$

$$= \int_{C_z} {}^{(p)}\phi_{\varepsilon_1}(z).{}^{(q)}\phi_{\varepsilon_2}(z).\chi(z,\bar{z}).a(z,\bar{z})\, dz\, d\bar{z}$$

$$= \int_{C_z} {}^{(p)}\phi_{\varepsilon_1}(z).{}^{(q)}\phi_{\varepsilon_2}(z).\chi(z,\bar{z})\Big[\sum_{n+m<p+q} a_{nm}\, z^n\, \bar{z}^m + R_{pq}(z,\bar{z})\Big]\, dz\, d\bar{z}$$

donde

$$R_{pq}(z,\bar{z}) = \sum_{n+m=p+q} A_{nm}(z,\bar{z}).z^n\,\bar{z}^m \qquad \text{(cf. [7] ,Prop.(6.2),pag.284)}$$

Observemos entonces que

$$\sum_{n+m<p+q} \int_{C_z} {}^{(p)}\phi_{\varepsilon_1}\,{}^{(q)}\phi_{\varepsilon_2}\,\chi.a_{nm}\, z^n\,\bar{z}^m\, dz\, d\bar{z}$$

$$= (-2i)\sum_{n+m<p+q} a_{nm} \int_0^K \int_0^{2\pi} {}^{(p)}\phi_{\varepsilon_1}(\rho e^{i\theta})\, {}^{(q)}\phi_{\varepsilon_2}(\rho e^{i\theta})\,\chi(\rho).\, \rho^{n+m+1}\, e^{i(n-m)\theta}\, d\rho\, d\theta$$

Usando entonces el lema 1.8 la última expresión es:

$$(-2i)\sum_{n+m<p+q} a_{nm}\int_0^K\int_0^{2\pi} \varepsilon_1^{-p}\,.^{(p)}\phi_1\left(\frac{\rho e^{i\theta}}{\varepsilon_1}\right)\varepsilon_2^{-q}\,.^{(q)}\phi_2\left(\frac{\rho e^{i\theta}}{\varepsilon_2}\right)\chi(\rho)\rho^{n+m+1}e^{i(n-m)\theta}\,d\rho\,d\theta$$

(usando ahora el lema 1.9)

$$(-2i)\sum_{n+m<p+q} a_{nm}\int_0^K\int_0^{2\pi} \varepsilon_1^{-p}e^{-ip\theta}\,.^{(p)}\phi_1\left(\frac{\rho}{\varepsilon_1}\right)\varepsilon_2^{-q}e^{-iq\theta}\,.^{(q)}\phi_1\left(\frac{\rho}{\varepsilon_2}\right)\chi(\rho)\rho^{n+m+1}e^{i(n-m)\theta}d\rho d\theta$$

$$(-2i)\sum_{n+m<p+q} a_{nm}\int_0^K \varepsilon_1^{-p}\varepsilon_2^{-q}\,.^{(p)}\phi_1\left(\frac{\rho}{\varepsilon_1}\right)^{(q)}\phi_1\left(\frac{\rho}{\varepsilon_2}\right)\chi(\rho)\left\{\int_0^{2\pi} e^{i(n-m-p-q)\theta}\,d\theta\right\}d\rho$$

Esta última expresión es siempre nula, ya que

$$n-m \leqslant n+m < p+q$$

Volviendo entonces a (1.11.3), basta probar entonces que:

$$\lim_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to 0} {}^{(p)}\phi_{\varepsilon_1}(z)\,.^{(q)}\phi_{\varepsilon_2}(z)\chi(z)R_{pq}(z,\bar{z})\,dz\,d\bar{z} = \tag{1.12.2}$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int_{|w|>\delta}\frac{a(w,\bar{w})}{w^{p+q}}\,dw\,d\bar{w}$$

En virtud de [7] (pag.286, (8) y (11))

$$\lim_{\delta\to} \int_{|w|>\delta} \frac{a(w,\bar{w})}{w^{p+q}}\, dw\, d\bar{w} = \int_{C_w} \frac{R_{pq}(w,\bar{w})}{w^{p+q}}\, dw\, d\bar{w} \qquad (1.12.3)$$

Por lo tanto, probar (1.12.2) , es equivalente por (1.12.3) a demostrar

$$\lim_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to 0} \int_{C_z} {}^{(p)}\phi_{\varepsilon}(z)\,{}^{(q)}\phi_{\varepsilon}(z)\chi(z)R_{pq}(z,\bar{z})\, dz\, d\bar{z} \qquad (1.12.4)$$

$$= \int_{C_w} \frac{R_{pq}(w,\bar{w})}{w^{p+q}}\, dw\, d\bar{w}$$

Del lema 1.11, como el integrando de (1.12.4) está acotado por una función integrable, se puede usar el teorema de convergencia mayorada, y por ende se puede pasar al límite bajo el signo de integral, y por lo tanto alcanza demostrar

$$\lim_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to 0} {}^{(p)}\phi_{\varepsilon_1}(z)\,{}^{(q)}\phi_{\varepsilon_2}(z)\chi(z) = \frac{1}{z^{p+q}} \qquad (1.13.1)$$

o bien que

$$\lim_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to 0} z^p\,.\,{}^{(p)}\phi_{\varepsilon}(z)\,.\,z^q\,.\,{}^{(q)}\phi_{\varepsilon}(z)\chi(z) = 1 \qquad (1.13.2)$$

Por lema 1.8 es

$$^{(p)}\phi_{\varepsilon_1}(z) = \varepsilon_1^{-p} \cdot {}^{(p)}\phi_1\left(\frac{z}{\varepsilon_1}\right)$$

$$^{(q)}\phi_{\varepsilon_1}(z) = \varepsilon_2^{-q} \cdot {}^{(q)}\phi_1\left(\frac{z}{\varepsilon_2}\right)$$

Luego, como $\chi \equiv 1$ en el soporte de $a(z,\bar{z})$, probar (1.13.2) es equivalente a demostrar

$$\lim_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to 0} \left(\frac{z}{\varepsilon_1}\right)^p \cdot {}^{(p)}\phi_1\left(\frac{z}{\varepsilon_1}\right) \cdot \left(\frac{z}{\varepsilon_2}\right)^q \cdot {}^{(q)}\phi_1\left(\frac{z}{\varepsilon_2}\right) = 1$$

que es exactamente lo que demuestra el lema 1.10 .

<u>1.13</u> <u>Proposición</u>

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \int_{|z|>\delta} {}^{(p)}\phi_\varepsilon(z) . a(z,\bar{z}) \frac{dz\, d\bar{z}}{z^q} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{|w|>\delta} \frac{a(z,\bar{z})}{z^{p+q}} \, dz\, d\bar{z}$$

<u>Demostración</u>: $\displaystyle \lim_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to 0} \int_{C_z} {}^{(p)}\phi_{\varepsilon_1}(z) {}^{(q)}\phi_{\varepsilon_2}(z) a(z,\bar{z}) \, dz\, d\bar{z} =$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{C_z} \{{}^{(p)}\phi_{\varepsilon_1}(z).a(z,\bar{z})\}.{}^{(q)}\phi_{\varepsilon_2}(z)\ dz\ d\bar{z} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \lim_{\delta \to 0} \int_{|z|>\delta} \phi_{\varepsilon_1}(z).a(z,\bar{z}) \frac{dz\ d\bar{z}}{z^q} \qquad (1.13.4)$$

Por otro lado, en virtud de la proposición 1.12 , se sigue:

$$\lim_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to 0} \int_{C_z} {}^{(p)}\phi_{\varepsilon_1}(z).{}^{(q)}\phi_{\varepsilon_2}(z).a(z,\bar{z})\ dz\ d\bar{z} = \qquad (1.13.5)$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \int_{|z|>\delta} \frac{a(z,\bar{z})}{z^{p+q}}\ dz\ d\bar{z}$$

A partir de (1.13.4) y de (1.13.5) se tiene la tesis.

§ 2

Lema 1.14

Sean $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $w \in C^n$. Entonces:

$$^{(\alpha)}\phi_\varepsilon(w) = \varepsilon^{-\alpha} . {}^{(\alpha)}\phi_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right)$$

Demostración:

$$^{(\alpha)}\phi_\varepsilon(w) = \lim_{\delta\to 0} \int_{|t^\alpha|>\delta} \frac{f_\varepsilon(t-w)}{t^\alpha}\, dt\, d\bar{t} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{|t^\alpha|>\delta} \frac{\prod_{k=1}^{n} f_\varepsilon(t_k - w_k)}{t^\alpha}\, dt\, d\bar{t} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{|t^\alpha|>\delta} \frac{\varepsilon^{-2n} \prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{t_k - w_k}{\varepsilon}\right)}{t^\alpha}\, dt\, d\bar{t}$$

y haciendo el cambio de variable $\frac{t}{\varepsilon} = z$, se tiene:

$$^{(\alpha)}\phi_\varepsilon(w) = \lim_{\delta\to 0} \int_{|(\varepsilon z)^\alpha|>\delta} \frac{\prod_{k=1}^{n} f\left(z_k - \frac{w_k}{\varepsilon}\right)}{(\varepsilon z)^\alpha}\, dz\, d\bar{z} =$$

$$= \varepsilon^{-\alpha} \lim_{\delta\to} \int_{|z^\alpha| > \frac{\delta}{\varepsilon^\alpha}} \frac{f(z-\frac{w}{\varepsilon})}{z^\alpha}\, dz\, d\bar{z} = \varepsilon^{-\alpha}\ {}^{(\alpha)}\phi_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right)$$

Lema 1.15

Sea $z \in C^n$, $\theta \in [0, 2\pi]^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Entonces:

$${}^{(\alpha)}\phi_1(z\, e^{-i\theta}) = e^{i\alpha\theta}\ {}^{(\alpha)}\phi_1(z)$$

Demostración:

$${}^{(\alpha)}\phi_1(z\, e^{-i\theta}) = \lim_{\delta\to 0} \int_{|u^\alpha| > \delta} \prod_{k=1}^{n} f(e^{-i\theta_k} z_k - u_k) \quad \frac{du\, d\bar{u}}{u^\alpha} =$$

y, puesto oue f es radial:

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{|u^\alpha| > \delta} \prod_{k=1}^{n} f(e^{-i\theta}\ (z_k - e^{i\theta_k}\ u_k)) \quad \frac{du\, d\bar{u}}{u^\alpha} =$$

haciendo el cambio de variable $e^{-i\theta_k} t_k = u_k$ , $1 \leqslant k \leqslant n$ :

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{|t^\alpha| > \delta} \prod_{k=1}^{n} f(z_k - t_k)\ \frac{dt\, d\bar{t}}{e^{-i\theta\alpha} t^\alpha} = e^{i\theta\alpha}\ {}^{(\alpha)}\phi_1(z) \qquad (1.16.0)$$

1.16 Lema

Sea $A \in \mathbb{N}^{n\times n}$ , $A = [\alpha_{ij}]$ , $\alpha_k = (\alpha_{k1},\dots,\alpha_{kn})$ los vectores fila de $A$ .

Sea $a(w,\bar{w}) \in \mathcal{E}^0(\mathbb{C}^n_w)$ , $\chi(w,\bar{w}) \in \mathcal{E}^0(\mathbb{C}^n_w)$ una función radial tal que $\chi \equiv 1$ en el soporte de $a(z,\bar{z})$.

Si $\gamma \in \mathbb{N}^n$ , $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ y

$$a(w,\bar{w}) = \sum_{j=1}^{n} \left( \Sigma \; w_j^r \bar{w}_j^s g^{rs}(w(j),\bar{w}(j) : r+s < \alpha_j \right) + \qquad (1.16.1)$$

$$+ \; K_\gamma(w,\bar{w})$$

donde

$$K_\gamma(w,\bar{w}) = \Sigma \; (w^\beta \bar{w}^\mu K_{\beta\mu}(w,\bar{w}) : \beta+\mu = \gamma) ,$$

entonces

$$\int_{\mathbb{C}^n_w} [\prod_{k=1}^{n} {}^{(\alpha_k)}\phi_{\varepsilon_k}(w)] . \chi(w,\bar{w}) . a(w,\bar{w}) \, dw \, d\bar{w} = \qquad (1.16.2)$$

$$= \int_{\mathbb{C}^n_w} [\prod_{k=1}^{n} {}^{(\alpha_k)}\phi_{\varepsilon_k}(w)] . \chi(w,\bar{w}) . K_\gamma(w,\bar{w}) \, dw \, d\bar{w}$$

Demostración: $\displaystyle\int_{\mathbb{C}^n_w} [\prod_{k=1}^{n} {}^{(\alpha_k)}\phi_{\varepsilon_k}(w)] . \chi(w) . a(w,\bar{w}) \, dw \, d\bar{w} =$

$$= \int_{C_w^n} [\prod_{k=1}^{n} {}^{(\alpha_k)}\phi_{\varepsilon_k}(w)]\,\chi(w)[\sum_{j=1}^{n} (\Sigma\, w_j^r\, \bar{w}_j^s\, g_{rs}^j(w(j),\bar{w}(j)) : r+s<\alpha_j)]\; dw\; d\bar{w} \quad +$$

$$(1.16.3)$$

$$+ \int_{C_w^n} [\prod_{k=1}^{n} {}^{(\alpha_k)}\phi_{\varepsilon_k}(w)\chi(w)K_\gamma(w,\bar{w})\; dw\; d\bar{w}\,]$$

La demostración consistirá en verificar que el primer término de (1.16.3) es nulo. Sea entonces $1 \leq j \leq n$ . Afirmamos entonces que

$$\sum_{r+s<\alpha_j} \int_{C_w^n} [\prod_{k=1}^{n} {}^{(\alpha_k)}\phi_{\varepsilon_k}(w)]\chi(w)\, w_j^r\, \bar{w}_j^s\, g_{rs}^j(w(j),\bar{w}(j))\; dw\; d\bar{w} \;=\; 0$$

Hacemos el cambio de variable

$$w_q = \rho_q e^{i\theta_q}$$

$$dw\; d\bar{w} = \rho(-2i)^n\, d\rho\; d\theta$$

donde

$$\rho = \rho_1 . \rho_2 . \dots . \rho_n$$

$$d\rho = d\rho_1\; d\rho_2 . \dots . d\rho_n$$

$$d\theta = d\theta_1\; d\theta_2 . \dots . d\theta_n$$

Por lema 1.13

$${}^{(\alpha_k)}\phi_{\varepsilon_k}(w) = \varepsilon_k^{-\alpha_k} . {}^{(\alpha_k)}\phi_1\left(\frac{w}{\varepsilon_k}\right)$$

o sea

$$\overset{(\alpha_k)}{\phi}_{\varepsilon_k}(\rho_k,\theta_k) = \varepsilon_k^{-\alpha_k} . \overset{(\alpha_k)}{\phi_1}\left(\frac{\rho_k e^{i\theta_k}}{\varepsilon_k}\right)$$

Luego, por lema 1.15

$$\overset{(\alpha_k)}{\phi_1}\left(\frac{\rho_k e^{i\theta_k}}{\varepsilon_k}\right) = e^{-i\theta_k\alpha_k} . \overset{(\alpha_k)}{\phi_1}(\rho_k)$$

Por lo tanto

$$\prod_{k=1}^{n} \overset{(\alpha_k)}{\phi}_{\varepsilon_k}(w_k) = \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k^{-\alpha_k} . e^{-i\alpha_k\theta_k} . \overset{(\alpha_k)}{\phi_1}(\rho_k)$$

En la integral múltiple, al integrar con respecto a la variable j , se tiene

$$\int_0^{B_j}\int_0^{2\pi} e^{i(r-s-\alpha_j)\theta_j} d\theta_j \quad \rho_j^{r+s+1} \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k^{-\alpha_k} . \overset{(\alpha_k)}{\phi_1}(\rho_k)\chi(\rho)\, d\rho_j$$

(donde la constante $B_j$ surge del soporte de $\chi$ ) que es nula, pues

$$r - s \leqslant r + s < \alpha_j$$

y por lo tanto se sigue la tesis.

<u>1.17</u> <u>Lema</u>

Sea $w \in C^n$ , $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ . Existe entonces una constante $K > 0$ , tal que

$$\left| {}^{(\alpha)}\phi_{\varepsilon}(w) \right| \leqslant \frac{1}{(1+|w_1|)^{\alpha_1} \ldots (1+|w_n|)^{\alpha_n}} \tag{1.19.1}$$

Demostración: $f_{\varepsilon}(t-w) = \prod_{k=1}^{n} f_{\varepsilon}(t_k - w_k)$ . Usando entonces lema 1.6 se sigue

$$\left| {}^{(\alpha)}\phi_{\varepsilon}(w) \right| = \left| \lim_{\delta \to 0} \int_{1>|t^{\alpha}|>\delta} \frac{f_{\varepsilon}(t-w)}{t^{\alpha}}\, dt\, d\bar{t} \right| = \tag{1.19.2}$$

$$= \left| \lim_{(\delta_1, \ldots, \delta_n) \to 0} \int_{V_{\delta}^{\alpha}} \frac{\prod_{k=1}^{n} f_{\varepsilon}(t_k - w_k)}{t_1^{\alpha_1} \ldots t_n^{\alpha_n}}\, dt\, d\bar{t} \right| \tag{1.19.3}$$

donde $V_{\delta}^{\alpha} = \{t \in B : |t_k^{\alpha_k}| > \delta_k\}$

Luego, en virtud de lema 1.10, la expresión en (1.19.3) es equivalente a:

$$\left| \prod_{k=1}^{n} \left[ \lim_{\delta_k \to 0} \int_{|t_k^{\alpha_k}| > \delta_k} \frac{f_{\varepsilon}(t_k - w_k)}{t_k^{\alpha_k}}\, dt_k\, d\bar{t}_k \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K_1 \ldots K_n}{(1+|w_1|)^{\alpha_1} \ldots (1+|w_n|)^{\alpha_n}}$$

1.18 Lema

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{w}{\varepsilon}\right)^{\alpha} \cdot {}^{(\alpha)}\phi_1 \left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = 1 \quad , w \in C^n, \alpha \in \mathbb{N}^n$$

Demostración: En virtud de (1.19.3) v lema 1.10 , se tiene:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{w}{\varepsilon}\right)^{\alpha} \cdot {}^{(\alpha)}\phi_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\left(\frac{w_1}{\varepsilon}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{w_n}{\varepsilon}\right)^{\alpha_n} \cdot \prod_{k=1}^{n} \lim_{\delta_k\to 0} \int_{1>|t_k^{\alpha_k}|>\delta_k} \frac{f(t_k - \frac{w_k}{\varepsilon})}{t_k^{\alpha_k}} dt_k\, d\bar{t}_k\right]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left[\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{w_k}{\varepsilon}\right)^{\alpha_k} \cdot {}^{(\alpha_k)}\phi_1 \left(\frac{w_k}{\varepsilon}\right)\right]$$

$$= 1$$

1.19 Lema

Sea $w \in C^n$ , $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ . Entonces

$${}^{(\alpha)}\phi_\varepsilon (w) = \prod_{k=1}^{n} {}^{(\alpha_k)}\phi_\varepsilon (w_k)$$

Demostración: Apelando al lema 1.6 con la misma notación, se sigue:

$$ {}^{(\alpha)}\phi_\varepsilon(w) = \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|t^\alpha|>\delta} \frac{\prod_{k=1}^{n} f_\varepsilon(t_k - w_k)}{t^\alpha} \, dt\, d\bar{t} $$

$$ = \lim_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\to 0} \int_{V_\delta^\alpha} \frac{\prod_{k=1}^{n} f_\varepsilon(t_k - w_k)}{t^\alpha} \, dt\, d\bar{t} $$

$$ = \prod_{k=1}^{n} \left[ \lim_{\delta_k \to 0} \int_{1>|t_k^{\alpha_k}|>\delta_k} \frac{f_\varepsilon(t_k - w_k)}{t_k^{\alpha_k}} \, dt_k\, d\bar{t}_k \right] $$

$$ = \prod_{k=1}^{n} {}^{(\alpha_k)}\phi_\varepsilon(w_k) . $$

1.20 Lema

$$ \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial^n}{\partial w_j^n} [{}^{(\alpha)}\phi_\varepsilon(w)] \Big|_{w_j=0} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \text{ ó } \alpha_j \neq 0 \\ \lim_{\varepsilon\to 0} {}^{(\alpha(j))}\phi_\varepsilon(w(j)) & \text{si } n = \alpha_j = 0 \end{cases} $$

Demostración: En virtud de los lemas (1.19) y (1.5), se tiene:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial^n}{\partial w_j^n} [\, ^{(\alpha)}\phi_\varepsilon (w)] \Big|_{w_j = 0} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial^n}{\partial w_j^n} [\, ^{(\alpha_j)}\phi_\varepsilon (w_j)] . \prod_{k=1}^{n} {}^{(\alpha_k)}\phi_\varepsilon (w_k)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \quad \text{ó} \quad \alpha_j \neq 0 \\ \lim_{\varepsilon\to 0} {}^{(\alpha(j))}\phi_\varepsilon (w(j)) & \text{si} \quad n = \alpha_j = 0 \end{cases}$$

<u>1.21</u> <u>Lema</u>

Sea $w \in C^n$ , $I = \{p+1,\dots,n\}$ , $\gamma,\zeta \in \mathbb{N}^n$ , $a(w) \in D(C^n)$.
Entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial^{\zeta(I)}}{\partial w(I)^{\zeta(I)}} [\, ^{(\gamma(I)}\phi_\varepsilon (w(I)).a(w,\bar{w})] \Big|_{w(I) = 0} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \gamma(I) \neq 0 \\ \dfrac{\partial^{\zeta(I)}}{\partial w(I)^{\zeta(I)}} a(w,\bar{w}) \Big|_{w(I)=0} & \text{si} \quad \gamma(I) = 0 \end{cases}$$

b) Cuando $\nu = \gamma(I) = 0$ , es innecesario tomar límite.

Por lo tanto, en (1.21.1) se tiene:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\nu\leq\zeta} n_\nu . S_{\varepsilon,\nu} . t_\nu = \lim_{\varepsilon\to 0} n_\nu . S_{\varepsilon,0} . t_0 + \tag{1.21.2}$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\substack{\nu\leq\zeta \\ \nu\neq}} n_\nu . S_{\varepsilon,\nu} . t_\nu = \lim_{\varepsilon\to 0} n_0 . t_0 = t_0 .$$

Luego, basta analizar el caso $\gamma(I) = 0$ , y en virtud de (1.21.2) y (1.21.1) , sólo cuando $\nu = 0$ , haciendo innecesario el paso al límite. Por lo tanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial^{\zeta(I)}}{\partial w(I)^{\zeta(I)}} [\,{}^{\gamma(I)} \phi_\varepsilon(w(I)) . a(w,\bar{w})] \Big|_{w(I)=0} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma(I) \quad 0 \\ t_0 & \text{si } \gamma(I) = 0 \end{cases}$$

donde

$$t_0 = \frac{\partial^{\zeta(I)}}{\partial w(I)^{\zeta(I)}} a(w,\bar{w}) \Big|_{w(I)=0}$$

1.22 Lema

Sea $a \in D(C^n)$ , tal que

$$a(z,\bar{z}) = \sum_{j=1}^{n} [ \sum_{r+s \leq \alpha_j} z_j^r \bar{z}_j^s g_{rs}^j(z(j),\bar{z}(j))] + K(z,\bar{z})$$

es el desarrollo de $a(z,\bar{z})$ (cf. [7], lema 2.4, pag. 265), donde $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Entonces , si $1 \leq h \leq n$ , se sigue:

$$\frac{\partial^{\alpha(h)}}{\partial w^{\alpha(h)}}[g^h_{\alpha_h,0}]\Big|_{w(h)=0} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_1!}\dfrac{\partial^{\alpha}}{\partial w^{\alpha}}[a(z,\bar{z})]\Big|_{w=0} & \text{si } h = 1 \\ 0 & \text{si } h > 1 \end{cases}$$

---

Demostración: Por inducción en h. Para h=1, se tiene:

$$g^1_{rs} = \frac{1}{r!\,s!}\frac{\partial^{r+s}}{\partial w_1^r\,\partial w_2^s}[a(z,\bar{z})]\Big|_{w_1=0}$$

(cf. [1], lema 2.4) que es la tesis para este caso.

Para h=2

$$g^2_{\alpha_2,0} = \frac{1}{\alpha_2!}\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial w_2^{\alpha_2}}[a - \sum_{k+m \leq \alpha_1} w_1^k \bar{w}_1^m g^1_{km}(w(1),\bar{w}(1))]\Big|_{w_2=0}$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial^{\alpha(2)}}{\partial w(2)^{\alpha}}\Bigg|_{w(h)=0} = \frac{1}{\alpha_2!}\Big[\frac{\partial^{\alpha}}{\partial w^{\alpha}} a(z,\bar{z}) - \alpha_1! \frac{\partial^{\alpha(1)}}{\partial w(1)^{\alpha}}[g^{1}_{\alpha_1,0}(w(1),\bar{w}(1))]\Big]\Bigg|_{w=0} =$$

(por el caso h=1)

$$= \frac{1}{\alpha_2!}\Big[\frac{\partial^{\alpha}}{\partial w^{\alpha}}[a(z,\bar{z})] - \frac{1}{\alpha_1!}\alpha_1! \frac{\partial^{\alpha}}{\partial w^{\alpha}}[a(z,\bar{z})]\Big]\Bigg|_{w=0} = 0$$

Procediendo por recurrencia, se tiene:

$$\frac{\partial^{\alpha(h+1)}}{\partial w^{\alpha(h+1)}}[g^{h+1}_{\alpha_{h+1},0}]\Bigg|_{w=0} =$$

$$= \frac{\partial^{\alpha(h+1)}}{\partial w(h+1)^{\alpha}}\Big[\frac{\partial^{\alpha_{h+1}}}{\partial w_h^{\alpha_{h+1}}}[a(w,\bar{w}) - \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{u+v\leq\alpha_j} w_j^{u}\bar{w}_j^{v} g^{j}_{uv}\Big)\Big]\Bigg|_{w=0} =$$

$$= \frac{\partial^{\alpha}}{\partial w^{\alpha}}[a(w,\bar{w})]\Bigg|_{w=0} - \alpha_1! \frac{\partial^{\alpha(1)}}{\partial w^{\alpha(1)}}[g^{1}_{\alpha_1,0}] -$$

$$- \sum_{j=2}^{h} \alpha_j! \frac{\partial^{\alpha(j)}}{\partial w(j)^{\alpha}}[g^{j}_{\alpha_j,0}(w(j),\bar{w}(j))] =$$

$= 0$ , usando el caso h=1 y la hipótesis inductiva en los términos de la sumatoria.

1.23 Lema

Sea $a \in D(C^n)$ , $F_\varepsilon(w,\bar{w}) = \prod_{i=1}^{n} f_\varepsilon(w_i,\bar{w}_i)$ ,

$\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$ . Entonces:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w^\alpha|>\delta} F_\varepsilon^{(\beta)}(w,\bar{w}).a(w,\bar{w})\,\frac{dw\,d\bar{w}}{w^\alpha} = \frac{\beta!}{(\alpha+\beta)!}\,\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial w^{\alpha+\beta}}[a(z,\bar{z})]\Big|_{w=0}$$

Demostración: Por inducción en n . Para n=1 , es el lema 1.4 . Como en lema 1.22 , sea

$$a(w,\bar{w}) = \sum_{j=1}^{n}\ \sum_{r+s\leqslant\alpha_j+\beta_j} w_j^r\,\bar{w}_j^s\,g_{rs}^j(w(j),\bar{w}(j)) + A(w,\bar{w})$$

Entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w^\alpha|>\delta} F_\varepsilon^{(\beta)}.a(w,\bar{w}).\,\frac{dw\,d\bar{w}}{w^\alpha} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{n} \int_{1>|w^\alpha|>\delta}\ \sum_{r+s\leqslant\alpha_j+\beta_j} w_j^r\,\bar{w}_j^s\,g_{rs}^j(w(j),\bar{w}(j))F_\varepsilon^{(\beta)}(w,\bar{w})\,\frac{dw\,d\bar{w}}{w^\alpha} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w^\alpha|>\delta} A(w,\bar{w}).F_\varepsilon^{(\beta)}(w,\bar{w}).\ \frac{dw\ d\bar{w}}{w^\alpha}$$

El segundo sumando de (1.26.1) es igual a:

$$\frac{\partial^\beta}{\partial w^\beta}\left[\frac{A}{w^\alpha}\right]\Bigg|_{w=0} = 0$$

ya que $\frac{A}{w^\alpha}$ es regular en el origen y el desarrollo se efectúa hasta $\alpha+\beta+1$ .

En virtud del lema 1.6 , la expresión (1.26.1) es igual a:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=1}^{n} R(j,\varepsilon).S(j,\varepsilon)$$

donde

$$R(j,\varepsilon) = \sum_{r+s\leq \alpha_j+\beta_j} \lim_{\delta_j\to 0} \int_{1>|w_j^{\alpha_j}|>\delta_j} w_j^r\,\bar{w}_j^s\, f_\varepsilon^{(\beta_j)}(w_j)\ \frac{dw_j\ d\bar{w}_j}{w_j^{\alpha_j}}$$

y

$$S(j,\varepsilon) = \lim_{\delta(j)\to 0} \int_{1>|w(j)^\alpha|>\delta(j)} \frac{F_\varepsilon^{\beta}\ (w(j))}{w(j)^\alpha}\ g_{rs}^j\ dw(j)\ d\bar{w}(j)$$

Por el caso $n = 1$ , se sabe que para cada j fijo, es:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R(j,\varepsilon) = \frac{\beta_j!}{(\alpha_j+\beta_j)!} \frac{\partial^{\alpha_j+\beta_j}}{\partial w_j^{\alpha_j+\beta_j}} [w_j^r \bar{w}_j^s]\Big|_{w=0} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad s \neq 0 \quad \text{ó} \quad r < \alpha_j + \beta_j \\ \beta_j! & \text{si} \quad s = 0 \quad \text{y} \quad r = \alpha_j + \beta_j \end{cases}$$

Por lo tanto, el límite en (1.26.1) se reduce a:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=1}^{n} \beta_j! \lim_{\delta(j)\to 0} \int_{1>|w(j)^\alpha|>\delta(j)} F_\varepsilon^{\beta(j)}(w(j))\; g^j_{\alpha_j+\beta_j,0} \frac{dw(j)\; d\bar{w}(j)}{w(j)^\alpha} =$$

(por hipótesis inductiva)

$$= \sum_{j=1}^{n} \beta_j! \frac{\partial^{(\alpha+\beta)}}{\partial w(j)^{\alpha+\beta}} [g^j_{\alpha_j+\beta_j,0}]\Big|_{w=0} =$$

$$= \frac{\beta_1!\; \beta(1)!}{(\alpha(1)+\beta(1))!} \frac{\partial^{(\alpha+\beta)(1)}}{\partial w(1)^{(\alpha+\beta)(1)}} [g^1_{\alpha_1+\beta_1,0}]\Big|_{w=0}$$

(por lema 1.22)

$$= \frac{\beta!}{(\alpha+\beta)!} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial^{\alpha+\beta}} [a]\Big|_{w=0}$$

## 1.24 Lema

Sea $\alpha = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{N}^{n\times n}$ una matriz triangular superior, tal que $\det(\alpha) \neq 0$.

Sea $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ donde $\gamma_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}$ y sea $a \in D(C^n)$.

Entonces

$$\lim_{(\delta_1 \ldots \delta_n)\to 0} \int_{T_{\underset{\sim}{\delta}}^{\alpha, n}} \frac{a(w,\bar{w})dw_1 \ldots dw_n}{w^\gamma} = \frac{(2\pi i)^n}{(\gamma-1)!} \frac{\partial^{\gamma-1}}{\partial w^{\gamma-1}} [a(w,\bar{w})] \Big|_{w=0}$$

Demostración: Como $\alpha$ es triangular superior, de las ecuaciones

$$\begin{aligned} |w_1^{\alpha_{11}} \ldots w_k^{\alpha_{1k}} \ldots w_n^{\alpha_{1n}}| &= \delta_1 \\ &\vdots \\ |w_k^{\alpha_{kk}} \ldots w_n^{\alpha_{kn}}| &= \delta_k \\ &\vdots \\ |w_n^{\alpha_{nn}}| &= \delta_n \end{aligned} \qquad (1,27,2)$$

se deducen

$$\begin{aligned} |w_1| &= \nu_1 \\ &\vdots \\ |w_n| &= \nu_n \end{aligned} \qquad (1,27,3)$$

donde

$$\nu_k = \left(\frac{\delta_k}{\mu_k}\right)^{\tau_k} \qquad (1,27,4)$$

y donde

$$\tau_k = \frac{1}{\alpha_{kk}}$$

$$\mu_k = \prod_{i=1}^{n-k} \delta_{i+k}^{\varepsilon(i,k)}$$

$$\varepsilon(i,k) = \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \cdot \alpha_{k+j,\,i+k}\right) \cdot \frac{1}{\alpha_{k+i,k+i}}$$

Luego

$$\lim_{(\delta_1 \dots \delta_n)\to 0} \int_{T_{\underset{\sim}{\delta}}^{\alpha,n}} \frac{a(w,\bar{w})\, dw}{w^{\gamma}} =$$

$$= \lim_{(\delta_1 \dots \delta_n)\to 0} \int_{|w_1| = \nu_1} \frac{dw_1}{w_1^{\gamma_1}} \cdots \int_{|w_n| = \nu_n} \frac{a(w,\bar{w})\, dw_n}{w_n^{\gamma_n}} \tag{1.27.5}$$

Como $\underset{\sim}{\delta}$ es una trayectoria admisible, al tender el parámetro real $\delta$ a cero, $\nu_i$ tienden también a cero para todo $1 \leq i \leq n$.

Luego, (cf. [7]) , cada integral aporta

$$\frac{(2\pi i)}{(\gamma_k - 1)!} \frac{\partial^{\gamma_k - 1}}{\partial w^{\gamma_k - 1}} [a(w_1, \dots, w_n)] \Big|_{w_k = 0}$$

y por lo tanto, en (1.27.5) se tiene

$$\frac{(2\pi i)}{(\gamma-1)!}\;\frac{\partial^{\gamma-1}}{\partial w^{\gamma-1}}\;[a(w,\bar{w})]\Big|_{w=0}$$

## 1.25 Lema

Sean $w \in C^n$ , $a_\varepsilon(w,\bar{w})$ y $a(w,\bar{w}) \in D(C^n)$ con soporte contenido en la bola unitaria de $C^n$. Entonces, si $a\,(w) \rightrightarrows a(w)$ uniformemente en B, se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C^n_w} F_\varepsilon(w).a_\varepsilon(w)\; dw\; d\bar{w} \;=\; a(0)$$

Demostración: Por inducción en el número de variables. Para $n=1$ :

$$\Big| \int_{C_w} f_\varepsilon(w)\,[a_\varepsilon(w) - a(0)]\; dw\; d\bar{w}\,\Big| \;=$$

$$= \Big| \int_{C_w} f_\varepsilon(w)\,[a_\varepsilon(w) - a(w)]\; dw\; d\bar{w} \;+\; \int_{C_w} f_\varepsilon(w)[a(w)-a(0)]\; dw d\bar{w}\Big| \tag{1.29.1}$$

Como la convergencia de las funciones $a\,(w,\bar{w})$ es uniforme, es posible encontrar $\varepsilon$ suficientemente chico como para que

$$|a_\varepsilon(w) - a(w)| \leq \frac{1}{n}$$

Por lo tanto, el primer sumando en (1.29.1) está acotado superiormente por

$$\frac{1}{n} \int_{C_w} f_\varepsilon(w)\, dw\, d\bar{w} = \frac{1}{n}$$

Para el segundo sumando, basta notar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_w} f_\varepsilon(w).a(w) dw\, d\bar{w} = a(0)$$

y en consecuencia para $\varepsilon$ suficientemente chico, se sigue:

$$\left| \int_{C_w} f_\varepsilon(w).a(w) dw\, d\bar{w} - a(0) \right| \leq \frac{1}{n}$$

Supongamos ahora que la tesis es cierta para n-1 variables. Entonces

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_w^n} F_\varepsilon(w).a_\varepsilon(w)\, dw\, d\bar{w} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_w^{n-1}} F_\varepsilon(w(1)) \left[ \int_{C_{w_1}} f_\varepsilon(w_1).a_\varepsilon(w)dw_1 d\bar{w}_1 \right] dw(1)\, d\bar{w}(1)$$

Llamemos $b_\varepsilon(w(1)) = \int_{C_{w_1}} f_\varepsilon(w_1).a_\varepsilon(w_1,\ldots,w_n)dw_1 d\bar{w}_1$

Entonces, por el caso n=1 , se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0} b_\varepsilon(w(1)) = a(0,w_2,\ldots,w_n).$$

Usando ahora la hipótesis inductiva

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C^{n-1}} F_\varepsilon(w(1)).b_\varepsilon(w(1))dw(1)d\bar{w}(1) = [\lim_{\varepsilon\to 0} b_\varepsilon(w(1))]\Big|_{w(1)=0} = a(0)$$

1.26 Lema

Seàn $I$ , $J \subset \{1,\ldots,n\}$ una partición de $\{1,\ldots,n\}$ . Sean $\alpha$ , $\gamma \in \mathbb{N}^n$ . Entonces:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w^\gamma|>\delta} {}^{(\alpha_J)}\phi_\varepsilon(w).F_\varepsilon^{(\alpha_I)}(w_I).b(w,\bar{w}) \frac{dw\, d\bar{w}}{w^\gamma} =$$

$$= \frac{\alpha_I!}{(\alpha_I+\gamma_I)!} \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w_J^\gamma|>\delta} \frac{\partial^{\alpha_I+\gamma_I}}{\partial w^{\alpha_I+\gamma_I}} [b(w,\bar{w})]\Big|_{w_I=0} \frac{dw_J\, d\bar{w}_J}{w_J^{\alpha_J+\gamma_J}}$$

donde $b(w,\bar{w}) \in D(C^n)$

Demostración: Por inducción en $n$ . El caso $n=1$ está contemplado en los lemas 1.4 y 1.2 . Por simplicidad, supondremos que

$$I = \{1,\dots,p\} \qquad J = \{p+1,\dots,n\}$$

Sea $\beta \in \mathbb{N}^n$ definido por las siguiéntes ecuaciones:

$$\beta_I = \alpha_I + \gamma_I + 1 \qquad \beta_J = \gamma_J + \alpha_J$$

Desarrollando $b(w)$ en serie de Taylor (cf. [1] , pag.65) hasta el orden $\beta$ se sigue:

$$b(w,\bar{w}) = \sum_{i=1}^{n} [\sum_{r+s<\beta_i} w_i^r \bar{w}_i^s g_{rs}^i(w(i),\bar{w}(i))] + K(w,\bar{w})$$

Entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w^\gamma|>\delta} {}^{(\alpha_J)}\phi_\varepsilon(w\ ).F_\varepsilon^{(\alpha_I)}(w_I).b(w,\bar{w}).\frac{dw\, d\bar{w}}{w^\gamma} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i\,.B_i + \sum_{j=1}^{n} C_j\,.D_j + M$$

donde

$$M = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w^\gamma|>\delta} K(w,\bar{w}).F_\varepsilon^{(\alpha_I)}(w_I).{}^{(\alpha_J)}\phi_\varepsilon(w_J)\ \frac{dw\, d\bar{w}}{w^\gamma}$$

$$A_i = \sum_{r+s<\beta_i} \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\delta_i\to 0} \int_{1>|w_i^{\gamma_i}|>\delta_i} f_\varepsilon^{(\alpha_i)}(w_i)\, w_i^r \bar{w}_i^s \, \frac{dw_i\, d\bar{w}_i}{w_i^{\gamma_i}}$$

$$B_i = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w(i)^\gamma|>\delta} g_{rs}^i(w(i),\bar{w}(i)) . F_\varepsilon^{\alpha_I(i)}(w_I(i))\, {}^{(\alpha)_J}\phi_\varepsilon(w_J) \, \frac{dw(i)d\bar{w}(i)}{w(i)^\gamma}$$

$$C_j = \sum_{r+s<\beta_j} \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w_j^{\gamma_j}|>\delta_j} {}^{(\alpha_j)}\phi_\varepsilon(w_j) . w_j^r \bar{w}_j^s \, \frac{dw_j\, d\bar{w}_j}{w_j^{\gamma_j}}$$

$$D_j = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w(j)^\gamma|>\delta_j} {}^{(\alpha_J(j))}\phi_\varepsilon(w_J(j)) . F_\varepsilon^{(\alpha)_I}(w_I) . g_{rs}^j \, \frac{dw(j)\, d\bar{w}(j)}{w(j)^\gamma}$$

Por lema 1.4 , $\sum_{i=1}^n A_i . B_i =$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i! \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w(i)^\gamma|>\delta} g_{\alpha_i+\gamma_i,0}^i . F_\varepsilon^{(\alpha_I(i))}(w_I(i))\, {}^{(\alpha)_J}\phi_\varepsilon(w_J) \frac{dw(i)\, d\bar{w}(i)}{w(i)^\gamma} =$$

(por hipótesis inductiva)

$$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i ! \frac{\alpha_I (i)!}{[(\alpha_I + \gamma_I)(i)]!} \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w_J^\gamma|>\delta} \partial^{(\alpha_I+\gamma_I)(i)} [g^i_{\alpha_i+\gamma_i,0}]\Big|_{w_I=0} \frac{dw_J\, d\bar{w}_J}{w_J^{\alpha_J+\gamma_J}} =$$

$$= \frac{\alpha_I !}{(\alpha_I+\gamma_I)!} \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w_J^\gamma|>\delta} \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i+\gamma_i)! \quad \partial^{(\alpha_I+\gamma_I)(i)} [g^i_{\alpha_i\ \gamma_i,0}]\Big|_{w_I=0} \frac{dw_J\, d\bar{w}_J}{w_J^{\alpha_J+\gamma_J}} =$$

$$= \frac{\alpha_I!}{(\alpha_I+\gamma_I)!} \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w_J^\gamma|>\delta} \partial^{\alpha_I+\gamma_I} [b(w,\bar{w})]\Big|_{w_I=0} \frac{dw_J\, d\bar{w}_J}{w_J^{\alpha_J\ \gamma_J}}$$

La demostración se completa probando que:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j . D_j = 0 \qquad (1.30.1)$$

y

$$M = 0 \qquad (1.30.2)$$

Para (1.30.1), notemos que por lema 1.13, se tiene:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w_j^{\gamma_j}|>\delta_j} {}^{\alpha_j}\phi_\varepsilon (w_j).w_j^r \bar{w}_j^s \frac{dw_j\, d\bar{w}_j}{w_j^{\gamma_j}} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w_j^{\gamma_j}|>\delta_j} \frac{w_j^r \bar{w}_j^s}{w_j^{\gamma_j+\alpha_j}} \, dw_j \, d\bar{w}_j = 0 \,,$$ salvo que $r-s=\alpha_j+\gamma_j$ situación

que no puede darse ya que $r+s < \alpha_j + \gamma_j$ .

Para (1.30.2), recordemos que

$$K(w,\bar{w}) = \sum_{\mu+\nu=\beta} K_{\mu\nu}(w,\bar{w}).w^{\mu}\bar{w}^{\nu}$$

y por lo tanto

$$M = \sum_{\mu+\nu=\beta} \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\delta_1\to 0} \int_{1>|w_I^{\gamma}|>\delta_1} \lim_{\delta_2\to 0} \int_{1>|w_J^{\gamma}|>\delta_2} {}^{(\alpha)_J}\phi_{\varepsilon}(w_J).K_{\mu\nu}(w,\bar{w})\frac{w_J^{\mu}\bar{w}_J^{\nu}}{w_J^{\gamma}}.F_{\varepsilon}^{(\alpha)_I}(w_I)\frac{w_I^{\mu}\bar{w}_I^{\nu}}{w_I^{\gamma}} \, dw_I \, d\bar{w}_I$$

Si llamamos

$$A_{\varepsilon}^{\mu\nu}(w_I) = \frac{w^{\mu}\bar{w}^{\nu}}{w^{\gamma}} \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w_J^{\gamma}|>\delta_2} {}^{(\alpha)_J}\phi_{\varepsilon}(w_J).K_{\mu\nu}(w,\bar{w}).\frac{w_J^{\mu}\bar{w}_J^{\nu}}{w_J^{\gamma}} \, dw_J \, d\bar{w}_J$$

entonces $A_{\varepsilon}^{\mu\nu}(w)$ es una función $C^{\infty}$ , y puesto que

$(\mu+\nu)_I = \alpha_I + \gamma_I + 1$ se sigue que $\partial^{\alpha_I} A_\varepsilon^{\mu\nu}\Big|_{w_I=0} = 0.$

Por la forma de operar que tiene la función $F$, se tiene:

$$M = \sum_{\mu+\nu=\beta} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|w_I^\gamma|<1} F_\varepsilon(w_I)\, \partial_{w_I}^{\alpha_I} A_\varepsilon^{\mu\nu}(w_I)\; dw_I\, d\bar{w}_I$$

Como la integración se hace sobre un compacto, se obtiene:

$$\partial_{w_I}^{\alpha_I} A_\varepsilon^{\mu\nu}(w_I) = \sum_{\sigma_I+\zeta_I=\alpha_I} n_{\sigma\zeta}\, \partial_{w_I}^{\sigma_I} \left[\frac{w_I^{\mu}\bar{w}_I^{\nu}}{w_I^{\gamma}}\right] \int_{|w_J^\gamma|<1} \partial_{w_I}^{\zeta_I} K_{\mu\nu} \cdot {}^{(\alpha)}\phi_\varepsilon(w_J) \frac{w_J^{\mu}\bar{w}_J^{\nu}}{w_J^{\gamma}}\, dw_J\, d\bar{w}_J$$

Como $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon^{\mu\nu}(w_I)$ existe y es una función $C^\infty$ nula en $w_I = 0$, resulta $M = 0$ en virtud del lema 1.25.

## § 3

### 3.27 Proposición

Sean $J, I, M$ una partición de $\{1,\ldots,n\}$ , donde $J = \{1,\ldots,p\}$ , $I = \{p+1,\ldots,p+q\}$ , $M = \{p+q+1,\ldots,n\}$

Sean

$$\alpha = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{N}^{(p+1)\times n}$$

$$\beta = (\beta_{ij}) \in \mathbb{N}^{(q+1)\times n}$$

$$\alpha_i = (\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in}) \quad , \quad 1 \leq i \leq p+1$$

$$\beta_i = (\beta_{i1},\ldots,\beta_{in}) \quad , \quad 1 \leq i \leq q+1$$

$$\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$$

$$\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$$

$$\rho = (\rho_1,\ldots,\rho_n)$$

$$\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n)$$

donde

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{p+1} \alpha_{ji} \quad , \quad \zeta_i = \sum_{j=1}^{q+1} \beta_{ji} \quad , \quad \rho_i = \gamma_i + \zeta_i$$

y

$$\mu_i = \alpha_i \quad , \quad 1 \leq i \leq p$$

$$\mu_i = \beta_{i-p} \quad , \quad p+1 \leq i \leq p+q$$

$$\mu_{p+q+1} = \alpha_{p+1} + \beta_{q+1}$$

y por lo tanto

$$\mu = (\mu_{ij}) \in \mathbb{N}^{(p+q+1)\times n}$$

Si

$$T^1 = \lim_{\delta\to 0} \int_{D_\delta^{\alpha,p+1}} \cdot \frac{dz_J}{z^\gamma} \in {}'\mathcal{D}_{2(n-p)}(\mathbb{C}^n)$$

$$T^2 = \lim_{\nu\to 0} \int_{D_\nu^{\beta,q+1}} \cdot \frac{dz_I}{z^\delta} \in {}'\mathcal{D}_{2(n-q)}(\mathbb{C}^n)$$

$$T^{1,2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{D_\varepsilon^{\mu,p+q+1}} \frac{dz_{J\cup I}}{z^\rho} \in {}'\mathcal{D}_{2(n-p-q)}(\mathbb{C}^n)$$

$$R_\varepsilon T^2 = [\lim_{\nu\to 0} \int_{D_\nu^{\beta,q+1}} \frac{F_\varepsilon(t-w)\ dt_I\ dt(I)d\bar{t}(I)}{t^\delta}]\ dw_I\ d\bar{w}_I$$

donde

$$R_\varepsilon T^2 \in \Gamma(\mathbb{C}^n; \mathcal{E}^q(\mathbb{C}^n)).$$

Entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} [T^1 \wedge R_\varepsilon T^2][a(w,\bar{w})dw_M d\bar{w}_M] = T^{1,2}[a(w,\bar{w})dw_M d\bar{w}_M]$$

para toda $2(n-p-q)$ - forma

$$\omega = a(w,\bar{w})dw_M d\bar{w}_M \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n; \mathcal{E}^q(\mathbb{C}^n))$$

Demostración: En virtud de [1] (cf.prop.(2.13), pag.86), se tiene:

$$R_\varepsilon T^2 = \frac{(2\pi i)^q}{(\zeta_I-1)!}\left[\lim_{\nu\to 0}\int_{1>|t(I)^\zeta|>\nu} F_\varepsilon^{(\zeta_I-1)}(w_I)\,.F_\varepsilon(t(I)-w(I))\,\frac{dt(I)\,d\bar{t}(I)}{t(I)^\gamma}\right] dw_I\wedge d\bar{w}_I =$$

$$= \frac{(2\pi i)^q}{(\zeta_I-1)!}\left[\lim_{\nu\to 0}\int_{1>|t(I)^\gamma|>\nu} F_\varepsilon(t(I)-w(I))\,\frac{dt(I)\,d\bar{t}(I)}{t(I)^\zeta}\right].\, F_\varepsilon^{(\zeta_I-1)}(w_I)\,dw_I\wedge d\bar{w}_I =$$

(usando lema 1.6)

$$= \frac{(2\pi i)^q}{(\zeta_I-1)!}\,{}^{(\zeta(I))}\phi_\varepsilon(w(I))\,.F_\varepsilon^{(\zeta_I-1)}(w_I)\,dw_I\,d\bar{w}_I \tag{3.27.1}$$

Entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(T^1\wedge R_\varepsilon T^2)\,a(w,\bar{w})dw_M d\bar{w}_M =$$

$$= \frac{(2\pi i)^q}{(\zeta_I-1)!}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{D_{\underset{\sim}{\delta}}^{\alpha,p+1}} a(w,\bar{w}).{}^{(\zeta(I))}\phi_\varepsilon(w(I)).F_\varepsilon^{(\zeta_I-1)}(w_I)\,\frac{dw_I\,dw_I\,d\bar{w}_I\,dw_M d\bar{w}_M}{w^\gamma} =$$

(usando [1] , prop. 2.13)

$$= \frac{(2\pi i)^{p+q}}{(\zeta_I-1)!\,(\gamma_J-1)!} \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w(J)^{\gamma}|>\delta} {}^{(\zeta_M)}\phi_\varepsilon(w_M) \,.\, F_\varepsilon^{(\zeta_I-1)}(w_I)\, \partial^{(\gamma_J-1)}[\,{}^{(\zeta_J)}\phi_\varepsilon(w_J).a(w)]\, \frac{dw(J)d\bar{w}(J)}{w(J)^{\gamma}}$$

(en virtud de lema 1.21, se deduce que $\zeta_J = 0$) y por lo tanto, usando lema 1.26 y llamando

$$b(w(J)) = \partial^{(\gamma_J-1)}[a(w,\bar{w})]$$

se sigue, que la última expresión es:

$$= \frac{(2\pi i)^{p+q}}{(\zeta_I-1)!\,(\gamma_J-1)!\,(\zeta_I+\gamma_I-1)!} \cdot (\zeta_I-1)! \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w_M^{\gamma}|>\delta} \partial^{\zeta_I+\gamma_I-1}[\,b(w(J),\bar{w}(J))]\, \frac{dw_M d\bar{w}_M}{w_M^{\gamma_M+\zeta_M}}$$

$$= \frac{(2\pi i)^{p+q}}{(\gamma_I-1)!\,(\zeta_I+\gamma_I-1)!} \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|w_M^{\gamma}|>\delta} \partial^{\zeta(M)+\gamma(M)-1}[\,a(w,\bar{w})]\, \frac{dw_M d\bar{w}_M}{w_M^{\gamma_M+\zeta_M}} \qquad (3.27.2)$$

Calculemos por otro lado

$$T^{1,2}\,[a(w,w)dw_M d\bar{w}_M\,] = \lim_{\delta\to 0} \int_{D_\delta^{\mu,p+q+1}} a(w,\bar{w})\, \frac{dw(M)\; dw_M d\bar{w}_M}{w^{\rho}} \qquad (3.27.3)$$

La forma $a(w,\bar{w})\ dw(M)\ dw_M d\bar{w}_M$ debe ser normal respecto de la matriz $\mu$ , de manera que deben satisfacerse las siguientes ecuaciones:

$$\alpha_{p\ 1,i} = 0 \qquad , \quad 1 \leq i \leq p+q$$

$$\beta_{q\ 1,i} = 0 \qquad , \quad 1 \leq i \leq p+q$$

$$\zeta_j = 0$$

Luego, usando nuevamente la proposición 2.13 de [1] , la expresión (3.27.1) es:

$$= \frac{(2\pi i)^{p+q}}{(\rho(M)-1)!} \lim_{\delta \to 0} \int_{1>|w_M^\rho|>\delta} \partial^{\rho(M)-1} [a(w,\bar{w})] \frac{dw_M d\bar{w}_M}{w_M^\rho}$$

que es justamente la expresión (3.27.2) , como se quería demostrar.

# CAPITULO II

Se considera en este capítulo la situación descripta en la Introducción 3.b). La demostración del teorema sobre intersección de una corriente residual y una de integración está basada en las propiedades de la "función residuo fibrado" y la "función residuo fibrado esencial" (cf. Coleff-Herrera [1], y Paenza[9]).

Como corolario del teorema, vía el argumento conocido de "pasaje por la diagonal", se obtiene el resultado sobre intersección de las clases de homología asociadas a dos corrientes residuales.

Teorema:

Sea X una variedad holomorfa, paracompacta y orientada de dimension n. Sea $\mathcal{H} = \{Y_1, \ldots, Y_p\}$ una familia de hipersuperficies en X, $1 \leq p \leq n$. Sea $W \subset X$ una subvariedad holomorfa de dimensión p, tal que:

$$\dim_C ( W \cap V_e(\mathcal{H})) = 0 . \qquad (1)$$

Sea $\tilde{\lambda} \in \Gamma(X; \mathcal{E}_X^p(*\cup\mathcal{H}))$, y sean T y S las corrientes:

$T = R_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}]$, la corriente residual asociada a $\tilde{\lambda}$ y a $\mathcal{H}$ ,

$S = I[W]$, la corriente de integración sobre la subvariedad W.

Existe entonces una familia de formas $R_\epsilon S$ regularizantes de S, tal que:

$$\lim_{\epsilon \to 0} (T \wedge R_\epsilon S)(\alpha) = R_{\mathcal{H}/w}[\tilde{\lambda}/w](\alpha/w) \quad \text{para toda} \quad \alpha \in D^o(X).$$

Notas:

1. $\mathcal{H}/w = \{Y_1 \cap W, \ldots, Y_p \cap W\}$ es la familia de hipersuperficies restringidas a W.

2. El resultado es inmediato si $V_e(\mathcal{H}) = \phi$, ya que en ese caso $V_e(\mathcal{H}/w) = \phi$ .

Demostración:

Sea $\mathcal{R} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ un cubrimiento abierto localmente finito de $X$, de manera tal que:

a) Para cada $z \in V_e(\mathcal{H}) \cap W$, $z \in \bar{U}_k$ para un único $k \in \mathbb{N}$;

b) En cada $U_k$, $k \in \mathbb{N}$, existen ecuaciones $\phi_i^k$, $k \in \mathbb{N}$ $1 \leq i \leq p$, de $U_k \cap Y_i$.

c) Cada $U_k$ es isomorfo analíticamente a la bola unidad de $C^n$, vía el isomorfismo

$$\alpha_k : U_k \longrightarrow B .$$

Podemos suponer, asimismo, que

$$\alpha_k(U_k \cap W) = \{(z_1,\ldots,z_n) \in B : z_{p+1} = \ldots = z_n = 0\} ,$$

si $U_k \cap W \neq \phi$.

El conjunto $A = W \cap V_e(\mathcal{H})$ es discreto en virtud de (1). Para cada $z_m \in A$, $m \in \mathbb{N}$, sea $U'_m = U_{k_m}$ el único abierto de $\mathcal{R}$ tal que $z_m \in U_{k_m}$. Para cada $\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq 1$, consideremos la sucesión

$$s_\epsilon = \{\varepsilon_j : j \in \mathbb{N}\} , \quad \text{donde} \quad \varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^j}$$

Asociada a la sucesión $s$, $0 < \varepsilon \leq 1$, existe una forma diferencial $R_\epsilon S$ que regulariza la corriente $S$ en el sentido presentado por de Rham (cf. [2], pag.77). Sea entonces $g \in D^0(X)$. Queremos verificar que:

$$\lim_{\epsilon \to 0} (T \wedge R_\epsilon S)(g) = R_{\mathcal{H}_{/W}}[\tilde{\lambda}_{/W}](g_{/W}) .$$

Sean $\{U'_{k_1}, \ldots, U'_{k_s}\}$ tales que:

$$\text{sop}\,(g) \cap W \cap V_e(\mathcal{H}) \subset U'_{k_1} \cup \ldots \cup U'_{k_s} ,$$

y consideremos también abiertos $V_{k_i} \subset U'_{k_i}$ , $1 \leqslant i \leqslant s$ , tales que

(2)
a) $V_{k_i} \cap U_r = \phi$ , para todo $r \neq k_i$ , $1 \leqslant i \leqslant s$

b) $\alpha_{k_i}(V_{k_i}) \subset B_{1/3}(0)$ , donde $B_{1/3}(0)$ es la bola de radio $1/3$ centrada en el origen de $\mathbb{C}^n$ .

Existe $\varepsilon_o > 0$ , tal que para todo $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_o$ es

$$\text{sop}\,(g) \cap \text{sop}\,(R_\varepsilon S) \cap V_e(\mathcal{H}) \subset V_{k_1} \cup \ldots \cup V_{k_s}$$

Sea $\rho_i \in D^o(X)$ , $1 \leqslant i \leqslant s$ , tal que

$$\rho_i\big|_{V_{k_i}} \equiv 1 \quad , \quad \rho_i\big|_{X-U'_{k_i}} \equiv 0$$

y llamemos $S_i = \rho_i . S$ , $1 \leqslant i \leqslant s$ .

Entonces

$$(T \wedge R_\varepsilon S)(g) = \sum_{i=1}^{s} (T \wedge R_\varepsilon S_i)(g) . \qquad (3)$$

En virtud de (2)(b) la regularización de de Rham es la "cartesiana" inducida por la aplicación

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x,y) \longrightarrow x + y$$

y gracias a (3) es posible reducir el problema a cada abierto $V_{k_i}$ , $1 \leqslant i \leqslant s$ , y plantearlo allí de la siguiente manera:

Sea B la bola unidad de $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^p_w \times \mathbb{C}^{n-p}_t$ , $B' \subset B$ , la bola de radio 1/3.

Sea

$$W = \{(w,t) \in B' : t = 0\}.$$

Sean $\{\phi_1, \ldots, \phi_p\}$ funciones analíticas en $B'$ ,

$$\tilde{\lambda} = \frac{a(w,t)\, dw_1 \wedge \ldots \wedge dw_p}{\prod_{r=1}^{p} \phi_r(w,t)} ,$$

donde $g(w,t),\ a(w,t) \in D(B')$ , tal que

$$W \cap V_e(\phi_1, \ldots, \phi_p) = \{0\} ,$$

entonces, debe verificarse:

$$(4)\quad \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{\substack{1>|\phi_1(w,t)|=\delta_1\\ \vdots \\ 1>|\phi_p(w,t)|=\delta_p}} \tilde{\lambda} \wedge g \wedge f_\epsilon(t,\bar{t})dt\wedge d\bar{t} = \lim_{\delta\to 0} \int_{\substack{1>|\phi_1(w,0)|\ \delta_1\\ \vdots \\ 1>|\phi_p(w,0)|\ \delta_p}} \frac{a(w,0).g(w,0)\, dw_1 \wedge \ldots \wedge dw_p}{\prod_{r=1}^{p} \phi_r(w,0)}$$

Consideremos $\pi : \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^p_w \times \mathbb{C}^{n-p}_t \longrightarrow \mathbb{C}^{n-p}_t$

$$\pi(w,t) = t$$

$$\xi = f_\epsilon(t,\bar{t})\, dt \wedge d\bar{t} \in \mathcal{E}^{2(n-p)}(\mathbb{C}^{n-p}_t)$$

Sea

$$\tilde{u} = \frac{a(w,t).g(w,t)}{\prod_{i=1}^{p} \phi_i(w,t)}\, dw_1 \ldots dw_p \in \Gamma\left(B'; \mathcal{E}^p_{\mathbb{C}^n}\left(* \bigcup_{i=1}^{p} (\phi_i = 0)\right)\right)$$

Como las fibras de $\pi$ cortan a $V_e(\mathcal{H})$ en puntos aislados se verifican las condiciones de validez del Teorema de Residuo Fibrado Esencial (cf. [9] y [1] ) , obteniéndose entonces:

(5) $$R_{\mathcal{H}}\ [\tilde{u} \wedge \pi^*(\xi)] = P_{V_e(\mathcal{H})}[\mathrm{res}_{\mathcal{H};\pi}[\tilde{u}](w,t) \wedge \pi^*(\xi)] .$$

(6) $$P_{V_e(\mathcal{H})}[\mathrm{res}_{\mathcal{H};\pi}[\tilde{u}](w,t) \wedge \pi^*(\xi)] =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{|D(t)|>\delta} [\mathrm{res}_{\mathcal{H};\pi}[\tilde{u}](w,t)] \cdot f_\epsilon(t,\bar{t})dt \wedge d\bar{t} ,$$

donde $D(t)$ es una función analítica en $B_t^{n-p}$ no idénticamente nula (cf. [1]).

Luego, de (6) resulta:

(7) $$\lim_{\delta\to 0} \int_{|D(t)|>\delta} \pi_*(\mathrm{res}_{\mathcal{H};\pi}[\tilde{u}])(t) . f_\epsilon(t,\bar{t})dt\, d\bar{t} = \int_{C_t^{n-p}} \chi(t,\bar{t}) . f_\epsilon(t,\bar{t})dt d\bar{t}$$

donde la función

$$\chi(t) = \Sigma\ \{\mathrm{res}_{\mathcal{H};\pi}[\tilde{u}](w,t) : (w,t) \in V_e(\mathcal{H}) ,\ \pi(w,t) = t\ \} .$$

La demostración del teorema estará terminada, si se comprueba que $\chi(t,\bar{t}) \in \mathcal{E}^\circ(C_t^{n-p})$ , ya que en tal caso:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_t^{n-p}} \chi(t,\bar{t}).f_\epsilon(t,\bar{t})\, dt \wedge d\bar{t} = \chi(0) = \mathrm{res}_{\mathcal{H};\pi}[\tilde{u}](w,0).$$

<u>Lema</u>: $\pi_*(\mathrm{res}_{\mathcal{H};\pi}[\tilde{u}]) \in \mathcal{E}^0(C_t^{n-p})$ .

<u>Demostración</u>: Inmediata a partir de los cálculos presentados por Coleff y Herrera en [1], pag. 163 (9) y proposición 1.8.4 , pag.50 y 190.

<u>Nota</u>: Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la expresión canónica de $\tilde{\lambda}$ es la de (3'), ya que la p-forma $\tilde{\lambda}$ debe tener bigrado (p,0) (cf. [1] , pag. 37). Si en dicha expresión figura algún $dt_i$ el primer miembro de (4) es obviamente nulo, mientras que el segundo se anula puesto que $\tilde{\lambda}_{/W} \equiv 0$ .

<u>Corolario 1:</u>

En las condiciones del teorema, supongamos que $R_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}]$ sea cerrada. Entonces

$$R_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}] \cdot I[W] = R_{\mathcal{H}/W}[\tilde{\lambda}_{/W}]$$

<u>Demostración:</u>

Sean $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ y J las corrientes residual, de integración y la restricción, respectivamente.

Llamemos $Y = V_e(\mathcal{K})$. Es posible construír una triangulación de $X$, localmente finita, tal que $Y$ y $W$ sean subpoliedros. Luego, existe un entorno U de $Y$ en $X$ tal que:

a) $Y$ es un retracto por deformación de U, con retracción $\rho: U \to Y$.

b) $Y \cap W$ es un retracto por deformación de $U \cap W$ con retracción $\rho_{/U\ W}$.

Sea ahora $c(\rho)$ la familia de soportes en U formada por los cerrados $F \cap U$ tales que $\rho_{/F}$ es propia. Entonces se tiene:

$$H_{\cdot}(Y) \xrightarrow[\cong]{\xi_*} H_{\cdot}^{c(\rho)}(U).$$

Si llamamos $c(\rho,W)$ a la familia de soportes en $U \cap W$ formada por los cerrados $F \cap W$ tales que $F \in c(\rho)$, se tendrá:

$$H_{\cdot}(Y \cap W) \xrightarrow[\cong]{\lambda_*} H_{\cdot}^{c(\rho,W)}(U \cap W).$$

En estas condiciones, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} H_{\cdot}(Y) \otimes H_{\cdot}(W) & \xrightarrow{\chi} & H_{\cdot}(Y \cap W) \\ \Pi \downarrow \cong & & \lambda_* \downarrow \cong \\ H_{\cdot}^{c(\rho)}(U) \otimes H_{\cdot}(W) & \xrightarrow{\chi'} & H_{\cdot}^{c(\rho,W)}(U \cap W) \end{array}$$

donde $\chi$ y $\chi'$ son homomorfismos de intersección en X, y $\Pi = \xi_* \otimes \mathrm{id}$
En efecto, los grupos en este diagrama se identifican con grupos de homología en X con familias convenientes de soportes ( Cf. Bredon, [11], cap.1), y la conmutatividad de (2) se reduce a la naturalidad de la operación de intersección (cf.Borel-Heffliger [12], Apéndice).

Sean ahora S, T y J corrientes cerradas de X, con soportes en Y, W, e $Y \cap W$ respectivamente, y $[S] \in H_\cdot(Y)$, $[T] \in H_\cdot(W)$ sus clases de homología ( cf. Poly [10] ).

Probar que

$$[S] \cdot [T] = [J] \in H_\cdot(Y \cap W)$$

equivale a verificar que $\lambda_*([S].[T]) = \lambda_*([J])$, y por la conmutatividad de (2), que $\xi_*[S].[T] = \lambda_*([J])$. De acuerdo con de Rham (cf. [2]), esto último equivale a demostrar que $\xi_*[S] . [T]$ y $\lambda_*[J]$ tienen la misma acción sobre las formas cerradas de X.

Ahora bien, como consecuencia del teorema (10') de la Introducción pag. 7, existe una forma $C^\infty$ $R_\epsilon S$, con soporte en $c(\rho)$ para un $\epsilon$ conveniente, y que es cohomóloga a S en U. Entonces $[S] . [T] = [R_\epsilon S] . [T] = [R_\epsilon S \wedge T]$, y la igualdad buscada

$$[S] . [T] = [J]$$

se reduce entonces a demostrar que $R_\epsilon S \wedge T$ y J coinciden sobre las formas cerradas de X.

Por el teorema anterior sabemos que, cuando $T = R_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}]$, y $S = I[W]$, se verifica:

$$\lim_{\epsilon \to 0} R_\epsilon S \wedge T\ (f) = J(f),$$

para toda forma f de X; como la clase de $R\, S \wedge T$ es independiente de $\epsilon$, esto implica que $R_\epsilon S \wedge T\ (f) = J(f)$, para toda forma f <u>cerrada</u> de X, como buscábamos.

Corolario 2 :

Sean $\mathcal{H} = \{Y_1, \ldots, Y_p\}$ , $\mathcal{H}' = \{Y_{p1}, \ldots, Y_n\}$ dos familias de hipersuperficies en X tales que

$$\dim_{\mathbb{C}} ( V_e(\mathcal{H}) \cap V_e(\mathcal{H}')) = 0 .$$

Sea $\tilde{\lambda} \in \Gamma(X; \xi_X^p(*\cup\mathcal{H}))$, $\omega \in \Gamma(X; \xi_X^p(*\cup\mathcal{H}'))$. Llamemos $\mathcal{H} \cup \mathcal{H}' =$ $= \{Y_1, \ldots, Y_n\}$.

Entonces, si $R_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}]$ y $R_{\mathcal{H}'}[\tilde{\omega}]$ son cerradas, se tiene:

$$R_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}] \quad R_{\mathcal{H}'}[\tilde{\omega}] \quad = \quad R_{\mathcal{H}\cup\mathcal{H}'}[\tilde{\lambda} \wedge \tilde{\omega}]$$

Demostración:

Consideremos la variedad producto $X \times X$ , orientada por su clase fundamental. Sea $\Delta \subset X \times X$ la diagonal:

$\Delta = \{(x,x) \in X \times X\}$, subvariedad lisa de dimensión n.

Sean $\Pi_1, \Pi_2 : X \times X \to X$, las proyecciones. Llamemos:

$\mathcal{H}_* = \{\Pi_1^{-1}(Y_1), \ldots, \Pi_1^{-1}(Y_p)\}$

$\mathcal{H}'_* = \{\Pi_2^{-1}(Y_{p1}), \ldots, \Pi_2^{-1}(Y_n)\}$ .

Sean S y T dos corrientes en X . La corriente <u>producto cartesiano de S y T</u>, denotada $S \times T$, es la única corriente en

$X \times X$ que sobre formas descomponibles actúa de la manera siguiente:

$$S \times T\,(\Pi_1^*(a) \wedge \Pi_2^*(b)) = S(a)\,.\,T(b).$$

Si $S$ y $T$ son corrientes cerradas, es sabido que:

(1) $\Pi_{1*}([I_\Delta]\,.\,[S \times T]) = [S]\,.\,[T]$, donde $I_\Delta$ denota la corriente de integración sobre $\Delta$.

Por lo tanto:

(2) $\Pi_{1*}([I_\Delta]\,.\,[R_{\mathcal{H}}[\lambda] \times R_{\mathcal{H}'}[\omega]] = [R_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}]]\,.\,[R_{\mathcal{H}'}[\tilde{\omega}]]$.

Ahora, se deduce claramente de las definiciones que:

$R_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}] \times R_{\mathcal{H}}[\tilde{\omega}] = R_{\mathcal{H}_* \cup \mathcal{H}_*}[\Pi_1^*(\lambda) \wedge \Pi_2^*(\omega)]$, y por lo tanto:

$$\Pi_{1*}([I_\Delta]\,.\,[R_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}] \times R_{\mathcal{H}'}[\tilde{\omega}]]) = \Pi_{1*}([I_\Delta]\,.\,[R_{\mathcal{H}_* \cup \mathcal{H}'_*}[\Pi_1^*(\lambda) \wedge \Pi_2^*(\omega)]).$$

Puesto que:

$\Pi_1(V_e(\mathcal{H}_* \cup \mathcal{H}'_*) \cap \Delta) = V_e(\mathcal{H}) \cap V_e(\mathcal{H}')$, el teorema precedente permite afirmar que:

$$\Pi_{1*}([I_\Delta]\,.\,[R_{\mathcal{H}_* \cup \mathcal{H}'_*}[\Pi_1^*(\tilde{\lambda}) \wedge \Pi_2^*(\tilde{\omega})]]) = \Pi_{1*}([R_{\mathcal{H}_* \cup \mathcal{H}_*/\Delta}[\Pi^*(\tilde{\lambda}) \wedge \Pi^*(\tilde{\omega})_{/\Delta}]]) =$$

$= [R_{\mathcal{H} \cup \mathcal{H}'}[\tilde{\lambda} \wedge \tilde{\omega}]]$, esta última igualdad y (2) permiten deducir la tesis.

# REFERENCIAS

[1] COLEFF, N. - HERRERA, M. : Les Courants Résiduels Associés a une forme méromorphe. Springer Lecture Notes, Vol. 633, 1978.

[2] de RHAM, G.: Variétés Différentiables. Act. Sc. et Ind. N° 1222, Hermann, Paris, 1960.

[3] FEDERER, H. : Geometric Measure Theory. Springer-Verlag, New York, 1969.

[4] GODEMENT, R. : Topologie Algébrique et Theorie des Faiseaux, Tome I. Act. Sc. et Ind. , Hermann, Paris,

[5] HERRERA, M.: Les Courants Residues Multiples. Journées Geom. Analytique, 1972, Poitiers. Bull.Soc. Math. France, Mem. 38, 27-30, 1974.

[6] -------- : Integration on a semianalitic set, Bull. Soc. Math. France 94, 141-180,1966.

[7] HERRERA, M. - LIEBERMAN, D. : Residues and Principal Values on Complex Spaces. Math. Ann. 194, 259-294.

[8] NARASIMHAN, R. : Introduction to the Theory of Analytic Spaces. Springer Lecture Notes, Vol.25, 1966.

[9] PAENZA, A. : Propiedades de las corrientes residuales en el caso de intersecciones no completas. Tesis, Universidad de Buenos Aires, 1979.

[10] POLY, J.B. : Thèses, Université de Poitiers, 1974.

[11] BREDON, G. : Sheaf Theory. New York. Mc Graw-Hill, 1967.

[12] BOREL, A. , HAEFLIGER, A. : La classe d'homologie fondamental d'un espace analytique. Bull. Soc. Math. France 89, 461-513 (1961).