Propiedades de corrientes residuales en el caso de intersecciones no completas

Paenza, Adrián

1979

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

PROPIEDADES DE CORRIENTES

RESIDUALES EN EL CASO

DE INTERSECCIONES NO COMPLETAS

TRABAJO PRESENTADO PARA OPTAR AL TITULO

de Doctor en Ciencias Matemáticas

ADRIAN PAENZA

Director: Dr. Miguel Herrera

Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias Exactas
y Naturales de la Universidad
Nacional de Buenos Aires.

JULIO 1979

A MIS PADRES

Quiero expresar mi profundo agradecimiento al Dr. Miguel Herrera, inspirador y director de esta tesis, y a mi compañero y amigo Nestor Búcari, por las intensas y extensas discusiones acerca de este trabajo. La concreción del mismo, se debe al esfuerzo que ambos hicieron para ayudar a esclarecer mi confusión y ordenar mis ideas.

Mi sincero reconocimiento a todos mis compañeros del departamento de Matemática, por su permanente colaboración, y particularmente al Dr. Ricardo Noriega, por la dedicación y estímulo que me dispensó cuando inicié esta nueva etapa en la facultad, al Dr. Angel R. Larotonda, por su genuina actitud docente en mis primeros pasos como investigador, y al Dr. Nicolás R. Coleff, por los provechosos debates que mantuvimos sobre el tema, durante todo su desarrollo.

Finalmente, quiero agradecer de manera muy especial a mis amigos Miguel y Jorge Davidson, por los invalorables consejos y la generosidad con la que me guiaron a lo largo de este camino.

INTRODUCCION

En la teoría de corrientes residuales asociadas a formas meromorfas desarrollada por Coleff y Herrera en [1] , quedan planteados algunos problemas no resueltos, referidos al caso de intersecciones no completas. Tales son: la "invariancia de tubos", propiedades de "puridad" del soporte de las corrientes residuales y la nulidad de las mismas en el caso de formas regulares con respecto a una hipersuperficie de la familia $\mathcal{H}$. Parte de este trabajo se dedica a la resolución de dichos problemas.

En el trabajo citado [1], los autores definen también la función residuo fibrado, y demuestran sus propiedades en el caso de intersecciones completas; se extiende aquí la definición al caso de intersecciones no completas, probando propiedades análogas.

Se desarrolla además una técnica que facilita el cálculo de los residuos, permitiendo reemplazar las hipersuperficies originales de la familia $\mathcal{H}$, que en general admiten componentes irreducibles comunes, por otras sin componentes irreducibles comunes.

Por simplicidad se supondrá que el espacio X sobre el que se trabaja, es una variedad holomorfa de dimensión compleja n. La generalización al caso en que X es un espacio complejo reducido, no presenta otras dificultades que las ya resueltas en [1], y se omite por esa razón.

El presente trabajo está dividido en tres capítulos:

CAPITULO I

La situación considerada en [1] es la siguiente: sea $\mathcal{H} = \{Y_1, \ldots\ldots, Y_{p+1}\}$ una familia de p+1 hipersuperficies complejas en X. Dada una q-forma meromorfa $\tilde{\lambda}$ sobre X con polos sobre la unión $U = \bigcup_{i=1}^{p+1} Y_i$ se definen las corrientes (p+1)-residuo $R_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}]$ y p-residuo valor principal $RP_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}]$ asociadas a $\tilde{\lambda}$; localmente en X, están definidas por los límites

$$R[\tilde{\lambda}](\alpha) = \lim_{\delta \to 0} \int_{T_\delta^{p+1}(\phi)} \tilde{\lambda} \wedge \alpha$$

$$RP[\tilde{\lambda}](\beta) = \lim_{\delta \to 0} \int_{D_\delta^{p+1}(\phi)} \tilde{\lambda} \wedge \beta$$

donde:

a) $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_{p+1})$ y cada ϕ_i es una función holomorfa en un abierto $W \subset X$ tal que $V(\phi_i) = W \cap Y_i$, $1 \leq i \leq p+1$.

b) $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{p+1}) \in R_{>}^{p+1}$, es un multi-radio que converge a cero convenientemente.

c) $T_{\delta}^{p+1}(\phi)$ es el $(p+1)$-tubo $\{|\phi_i| : 1 \leq i \leq p+1\}$, idealmente de dimensión real $2n-p-1$, orientado de forma conveniente, y $D_{\delta}^{p+1}(\phi) = T_{\delta}^{p}(\phi) \cap \{|\phi_{p+1}| > \delta_{p+1}\}$, donde $T_{\delta}^{p}(\phi)$ es el p-tubo asociado a $(\phi_1, \dots, \phi_p)$.

d) α y β son formas diferenciales C^{∞} sobre W a soporte compacto, de dimensiones $2n-p-q-1$ y $2n-p-q$ respectivamente.

En este capítulo se enuncian los resultados principales de $RP_{\mathcal{H}}$ y $R_{\mathcal{H}}$ debidos a [1] que se utilizarán posteriormente. Asimismo se establece la notación.

CAPITULO II

El objeto de este capítulo es asociar a una familia $\mathcal{H} = \{Y_1, \dots, Y_p\}$ de hipersuperficies en X, otra $\mathcal{H}^e = \{Y_1^e, \dots, Y_p^e\}$ de modo que:

a) $\cup \mathcal{H} = \cup \mathcal{H}^e$

b) $R_{\mathcal{H}}[\tilde{\alpha}] = R_{\mathcal{H}^e}[\tilde{\alpha}]$

$RP_{\mathcal{H}}[\tilde{\alpha}] = RP_{\mathcal{H}^e}[\tilde{\alpha}]$

para toda q-forma $\tilde{\alpha}$ meromorfa sobre X con polos en $\cup\mathcal{H}$.

c) localmente, las hipersuperficies de la familia $\mathcal{H}^e$, no tienen componentes irreducibles comunes.

Como aplicación, se obtiene la siguiente propiedad ("invariancia de tubos"):

Sean $\mathcal{H} = \{Y_1, \ldots, Y_p\}$ y $\mathcal{H}' = \{Y_1', \ldots, Y_p'\}$ dos familias de hipersuperficies en X, tales que:

a) $\cup\mathcal{H}$ y $\cup\mathcal{H}'$ tienen cruzamientos normales.

b) $Y_i \subset Y_i'$, $1 \leqslant i \leqslant p$.

c) $\tilde{V}_e(\mathcal{H}) = \tilde{V}_e(\mathcal{H}')$

Entonces los siguientes diagramas son conmutativos, con las inclusiones horizontales evidentes:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}_X^{\cdot -p}(*\cup\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{E}_X^{\cdot -p}(*\cup\mathcal{H}') \\
\Big\downarrow {\scriptstyle RP_{\mathcal{H}}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle RP_{\mathcal{H}'}} \\
{}'D_{2n-\cdot;\,{}'V_e(\mathcal{H})}^{\infty} & \longrightarrow & {}'D_{2n-\cdot;\,{}'V_e(\mathcal{H}')}^{\infty}
\end{array}$$

$$(**) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{E}_X^{\bullet-p}(*\cup\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d, "R_{\mathcal{H}}"] & \mathcal{E}_X^{\bullet-p}(*\cup\mathcal{H}') \arrow[d, "R_{\mathcal{H}'}"] \\ {}'D_{2n-\bullet-1;\,V_e(\mathcal{H})}^{\infty} \arrow[r] & {}'D_{2n-\bullet-1;\,V_e(\mathcal{H}')}^{\infty} \end{tikzcd}$$

Se obtiene también, en el caso de cruzamientos normales, que las corrientes $R_{\mathcal{H}}[\tilde{\omega}]$ y $RP_{\mathcal{H}}[\tilde{\omega}]$ son nulas, si $\tilde{\omega}$ es una forma regular sobre alguna de las hipersuperficies de la familia $\mathcal{H}$. Estas propiedades fueron demostradas en [1] para el caso de intersecciones completas.

Ignoramos si los diagramas (*) y (**) son conmutativos, en caso de que se verifiquen b) y c), pero $\cup\mathcal{H}$ y $\cup\mathcal{H}'$ no tienen cruzamientos normales.

CAPITULO III

En este capítulo se generaliza la noción de función residuo fibrado (cf. [1] - (4.2) p.165).

Sea $\mathcal{H} = \{Y_1, \ldots, Y_{p+1}\}$ una familia de hipersuperficies en X $0 \leq p < n$, tales que $\dim_C (\bigcap_{i=1}^{p} Y_i) > n - p$; sea $Y = V_e\{Y_1, \ldots, Y_p\}$

$i : Y \to X$ la inmersión y $\pi : X \to T$ un morfismo de X en una variedad holomorfa regular T de dimensión $n - p$, tal que:

a) $\dim_C \pi^{-1}(t) = p$

b) $\dim_C (\pi . i)^{-1}(t) = 0$

para todo $t \in T$

Para cada $\tilde{u} \in \Gamma(X; \mathcal{E}_X^p(*\cup\mathcal{H}))$, se define la función <u>residuo</u> <u>fibrado</u> <u>esencial</u>, $res_{\mathcal{H};\pi}[\tilde{u}] : \tilde{Y} \to C$, donde $\tilde{Y} = Y - Y_{p+1}$, y se prueba:

1) $res_{\mathcal{H};\pi}[\tilde{u}]$ es localmente semimeromorfa sobre Y.

2) Si además $\tilde{u} \in \Gamma_c(X; \mathcal{E}_X^p(*\cup\mathcal{H}))$ y $\alpha \in D^{2(n-p)}(T)$, entonces:

$$RP_{\mathcal{H}}[\tilde{u} \wedge \pi^*(\alpha)] = P_Y[res_{\mathcal{H};\pi}[\tilde{u}] \wedge \pi^*(\alpha)]$$

Esta fórmula permite calcular un residuo valor principal sobre X, como un valor principal sobre Y. Como consecuencia se obtiene la propiedad de puridad del soporte de las corrientes residuales:

Sea $\mathcal{H} = \{Y_1, \ldots, Y_{p+1}\}$ una familia de hipersuperficies en X. Sea $\tilde{u} \in \Gamma(X; \Omega_X^{\cdot - p}(*\cup\mathcal{H}))$. Entonces el soporte de $R_{\mathcal{H}}[\tilde{u}]$ (resp.: de $RP_{\mathcal{H}}[\tilde{u}]$) es la unión de algunas componentes irreducibles de $V_e(\mathcal{H})$ (resp.: de $\tilde{V}_e(\mathcal{H})$).

Se generaliza luego, la propiedad de antisimetría de los residuos respecto del orden de la familia $\mathcal{H}$ (caso intersección completa), en el siguiente sentido:

si $\{Y_{i_1},\ldots,Y_{i_s}\} \subset \{Y_1,\ldots,Y_p\} = \mathcal{H}$ es tal que $\dim_{\mathbb{C}}\left(\bigcap_{k=1}^{s} Y_{i_k}\right) < n - s$, entonces:

1) $RP_{\mathcal{H}}[\tilde{u}] = sg(\tau).RP_{\mathcal{H}^\tau}[\tilde{u}]$

2) $R_{\mathcal{H}}[\tilde{u}] = sg(\tau).R_{\mathcal{H}^\tau}[\tilde{u}]$

para toda permutación τ de $\{i_1,\ldots,i_s\}$ y toda q-forma $\tilde{u}$ meromorfa sobre X.

Se prueba como corolario la propiedad de nulidad de la corriente residual para una forma regular sobre alguna hipersuperficie de $\mathcal{H}$.

CAPITULO I

1.1

Sea X una variedad holomorfa de dimensión n . Sea $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p) : X \to C$ un morfismo, tal que las funciones ϕ_i no sean idénticamente nulas. Notemos $Y_i = V(\phi_i)$, $Y = \{Y_i : 1 \leq i \leq p\}$ y $\mathbb{R}^p_>$ el producto cartesiano de p copias del conjunto $\mathbb{R}_>$ de reales positivos.

Para cada $\underset{\sim}{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_p) = (\underset{\sim}{\delta}'; \delta_p) \in \mathbb{R}^p_>$ se tienen los conjuntos:

$$|T^p_\delta(\phi)| = \{x \in X - \tilde{Y} : |\phi_i| = \delta_i \quad , 1 \leq i \leq p\}$$

$$|D^p_\delta(\phi)| = \{x \in X - \tilde{Y} : |\phi_i| = \delta_i \quad , 1 \leq i < p \ , \ |\phi_p| > \delta_p\}$$

Cuando se verifica que

$$\dim_R |T^p_\delta(\phi)| \leq 2n - p$$

$$\dim_R |D^p_\delta(\phi)| \leq 2n - p + 1$$

estos conjuntos se orientan mediante las convenciones siguientes: la aplicación $|\phi| = (|\phi_1|, \dots, |\phi_p|) : X - \tilde{Y} \to \mathbb{R}$ es analítica. Entonces

$$T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi) = (-1)^{p(p-1)/2} \, |\phi|^{-1}[\underset{\sim}{\delta}]$$

$$D^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi) = (-1)^{(p-1)(p-2)/2} \, |\phi|^{-1} ([\delta] \times [x_p > \delta_p])$$

para cada $\delta \in \mathbb{R}$, donde $|\phi|^{-1}$ denota la operación "imagen inversa de cadena semianalítica" definida en [1]

La orientación de los tubos $T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)$ y $D^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)$ es la misma que en [1] y se mantendrá a lo largo de todo el trabajo. En el caso en que $X = C$, $\mathcal{H} = \{Y_1\}$ $Y_1 = V(z)$, $T_{\underset{\sim}{\delta}}$ es el círculo $|z| = \delta$ con la orientación habitual.

En el caso de intersecciones completas, se verifica que, si $\underset{\sim}{\delta}$ y $\underset{\sim}{\delta}'$ son suficientemente pequeños, entonces $T_{\underset{\sim}{\delta}}$ y $T_{\underset{\sim}{\delta}'}$ son homólogos, o sea que $T_{\underset{\sim}{\delta}} - T_{\underset{\sim}{\delta}'} = b.S$, donde S es una 2n-p+1 cadena semianalítica conveniente.

1.2

Introducimos la notación:

$\mathcal{H}(i) = \{Y_1, \ldots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \ldots, Y_{p+1}\}$

$\cup \mathcal{H} = \cup \{Y_i : 1 \leqslant i \leqslant p+1\}$

$\cap \mathcal{H} = \cap \{Y_i : 1 \leqslant i \leqslant p+1\}$

No se hace ninguna hipótesis sobre la dimensión de $\cap \mathcal{H}$. Se acepta también la posibilidad que $Y_i = Y_1$, $2 \leqslant i \leqslant p+1$.

1.3

Una trayectoria admisible en $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 2$ es una aplicación analítica

$$\underset{\sim}{\delta} = (\delta_1(\delta), \ldots, \delta_p(\delta)) : (0,1) \to \mathbb{R}^p_>$$

tal que

a) $\lim\limits_{\delta \to 0} \delta_p(\delta) = 0$

b) $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\delta_i}{\delta_{i+1}^q} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$, para todo $q \in \mathbb{N}$

Es inmediato entonces, que dados $(\varepsilon_i) \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq p$, se tiene

$$\lim_{\delta\to 0} \prod_{s=1}^{p} \delta_s(\delta)^{\varepsilon_s} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \varepsilon_i > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad \varepsilon_i < 0 \end{cases}$$

<u>1.4</u> <u>Teorema</u> (cf. [1] , (1.7.2) p.36)

Sea $\mathcal{H} = \{Y_1, \ldots, Y_{p+1}\}$ una familia de hipersuperficies en X, $0 \leq p \leq n-1$.

Elijamos ecuaciones ϕ_i de Y_i sobre un abierto relativamente compacto W de X y una trayectoria admisible $\underset{\sim}{\delta}$ en $\mathbb{R}^{p+1}_{>}$. Llamemos $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_{p+1})$. Los tubos $T^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)$ y $D^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)$ están entonces definidos para δ pequeño y los límites:

$$R^p P^{p+1}(\tilde{\alpha}) = \lim_{\delta\to 0} I[D^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)](\tilde{\alpha}) \qquad (1.4.1)$$

$\tilde{\alpha} \in \Gamma_c(W; \mathcal{E}^{2n-p}_X(*\cup\mathcal{H}))$, y

$$R^{p+1}(\tilde{\beta}) = \lim_{\delta\to 0} I[T^{p+1}_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)](\tilde{\beta}) \qquad (1.4.2)$$

$\tilde{\beta} \in \Gamma_c(W; \mathcal{E}^{2n-p-1}_X(*\cup\mathcal{H}))$, existen y verifican las siguientes propiedades:

- Los límites (1.4.1) y (1.4.2) son independientes de la elección de la trayectoria $\underset{\sim}{\delta}$ (1.4.3)

- Los límites (1.4.1) y (1.4.2) tienen bigrado (n,n-p) y (n,n-p-1) respectivamente. En particular

$$R^p P^{p+1}(\overline{\partial}\tilde{u}) = (-1)^{p+1} R^{p+1}(\tilde{u})$$

y (1.4.4)

$$R^{p+1}(\overline{\partial}\tilde{w}) = 0$$

para

$$\tilde{u} \in \Gamma_c(W; \mathcal{E}_X^{2n-p-1}(*\cup\mathcal{H}))$$

$$\tilde{v} \in \Gamma_c(W; \mathcal{E}_X^{2n-p-2}(*\cup\mathcal{H}))$$

- Para cada $\tilde{u} \in \Gamma(W; \mathcal{E}_X^{q-p}(*\cup\mathcal{H}))$, los funcionales

$$\begin{aligned} R^p P^{p+1}[\tilde{u}](\alpha) &= R^p P^{p+1}(\tilde{u}\wedge\alpha) \\ R^{p+1}[\tilde{u}](\beta) &= R^{p+1}(\tilde{u}\wedge\beta) \end{aligned} \qquad (1.4.5)$$

con $\alpha \in D^{2n-q}(W)$ y $\beta \in D^{2n-q-1}(W)$, son contínuos si uno considera el espacio $D^{\cdot}(W)$ con la topología usual.

- Existen conjuntos analíticos complejos $V_e(\mathcal{H})$ y $\tilde{V}_e(\mathcal{H})$ en X, canónicamente asociados a $\mathcal{H}$, de dimensión pura n-p-1 y n-p, conteniendo respectivamente los soportes de las corrientes $R^{p+1}[\tilde{u}]$ y $R^p P^{p+1}[\tilde{u}]$

- Para cada trayectoria admisible $\underset{\sim}{\delta}$ en $\mathbb{R}^p_>$ puede encontrarse $\delta^o_{p+1} > 0$, tal que para cada δ_{p+1} fijo, $0 < \delta_{p+1} < \delta^o_{p+1}$, el límite

$$\lim_{\delta\to 0} \quad I\,[\,D^{p+1}_{\mathcal{S};\,\delta_{p+1}}(\phi)](\tilde{\alpha})$$

existe y además

$$R^p P^{p+1}(\tilde{\alpha}) = \lim_{\delta_{p+1}\to 0} \lim_{\delta\to 0} I\,[D^{p+1}_{\mathcal{S};\,\delta_{p+1}}(\phi)]\,(\tilde{\alpha}) \qquad (1.4.7)$$

- Las definiciones locales de R^pP^{p+1} y R^{p+1} se recolectan sobre X , en virtud de (1.4.3) y resultan los homomorfismos:

$$\begin{aligned} RP_{\mathcal{H}} &: \Gamma_c\,(X;\mathcal{E}_X^{2n-p}(*\cup\mathcal{H})) \rightarrow C \\ R_{\mathcal{H}}\cdot &: \Gamma_c\,(X;\mathcal{E}_X^{2n-p-1}(*\cup\mathcal{H})) \rightarrow C \end{aligned} \qquad (1.4.8)$$

y sus valores en las formas $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ se llamarán el p-residuo valor principal de $\tilde{\alpha}$ y el (p+1)-residuo de $\tilde{\beta}$ respectivamente.

- Para cada $\tilde{\lambda} \in \Gamma(X;\mathcal{E}_X^{q-p}(*\cup\mathcal{H}))$, $q \geq p$, se definen los operadores

$$RP_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}](\alpha) = RP_{\mathcal{H}}(\tilde{\lambda}\wedge\alpha) \qquad , \alpha \in D^{2n-q}(X)$$

y

$$R_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}](\beta) = R_{\mathcal{H}}(\tilde{\lambda}\wedge\beta) \qquad , \beta \in D^{2n-q-1}(X)$$

que son corrientes sobre X gracias a (1.4.5) y serán llamados el p-residuo valor principal de $\tilde{\lambda}$ y el (p+1)-residuo de $\tilde{\lambda}$. En el caso p = 0 , se obtienen las corrientes valor principal PV y residuo Res de [2] . En este trabajo serán notados como P y R, respectivamente.

1.5 La intersección esencial

Con la misma notación que en (1.4) definimos el conjunto $\tilde{V}_e(\phi)$ (respectivamente $V_e(\phi)$) de los puntos $x \in W$ tales que para todo entorno U de x, y cada $\delta_o > 0$, existe δ, $0 < \delta < \delta_o$, tal que

$$U \cap |D_{\underset{\sim}{\delta}}^{p+1}(\phi)| \neq \phi$$

(respectivamente: $U \cap |T_{\underset{\sim}{\delta}}^{p+1}(\phi)| \neq \phi$).

Es claro que

$$\tilde{V}_e(\phi) \subset \cap \mathcal{H}(p+1)$$

$$V_e(\phi) \subset \cap \mathcal{H}$$

y usando (1.4.6), se tiene:

$$R^p P^{p+1}(\tilde{\alpha}) = 0 \quad , \text{ si } \operatorname{sop}(\tilde{\alpha}) \cap \tilde{V}_e(\phi) = \phi \qquad (1.5.1)$$

$$R^{p+1}(\tilde{\beta}) = 0 \quad , \text{ si } \operatorname{sop}(\tilde{\beta}) \cap V_e(\phi) = \phi \qquad (1.5.2)$$

Los conjuntos $V_e(\phi)$ y $\tilde{V}_e(\phi)$ son independientes de la trayectoria admisible $\underset{\sim}{\delta}$ y de las ecuaciones ϕ_i elegidas para construirlos. En consecuencia quedan definidos los conjuntos $V_e(\mathcal{H})$ y $\tilde{V}_e(\mathcal{H})$ en X llamados <u>intersecciones esenciales de la familia $\mathcal{H}$</u> que coinciden localmente con $V_e(\phi)$ y $\tilde{V}_e(\phi)$.

$\tilde{V}_e(\mathcal{H})$ y $V_e(\mathcal{H})$ pueden construirse por recurrencia de la siguiente forma: $Y'_o = X$, y para cada i, $1 \leq i \leq p$, sea $Y'_i = \cup$ {componentes irreducibles de $Y'_{i-1} \cap Y_i \not\subset Y_{i+1}$}.

Entonces $\tilde{V}_e(\mathcal{H}) = Y'_p$ y $V_e(\mathcal{H}) = Y'_p \cap Y_{p+1}$ (1.5.3)

Se sigue de la construcción anterior:

a) Si $\tilde{V}_e(\mathcal{H})$ (resp.: $V_e(\mathcal{H})$) no es vacío, es un conjunto analítico en X de dimensión pura n - p (resp.: n - p - 1).

b) Si $\dim_C \cap\mathcal{H}(p+1) = n - p$, entonces $\tilde{V}_e(\mathcal{H})$ es la unión de las componentes irreducibles de $\cap\mathcal{H}(p+1)$ que no estén contenidas en Y_{p+1}.

c) Si $\dim \cap \mathcal{H} = n - p - 1$ (<u>caso de intersección completa</u>), entonces

$$\tilde{V}_e(\mathcal{H}) = \cap\mathcal{H}(p+1)$$

y

$$V_e(\mathcal{H}) = \cap\mathcal{H}$$

En general $\tilde{V}_e(\mathcal{H})$ y $V_e(\mathcal{H})$ dependen del orden de las hipersuperficies en la familia $\mathcal{H}$ como se observa en el siguiente ejemplo:

$$Y_1 = \{z_1 . z_2\} = 0$$

$$Y_1 = \{z_2\} = 0$$

En este caso, $V_e(Y_1, Y_2) = 0$ mientras que $V_e(Y_2, Y_1) = \phi$.

<u>1.6 Propiedades de "regularidad" en el caso de intersecciones cualesquiera.</u>

Si $\tilde{\lambda} \in \Gamma(W; \mathcal{E}_X^{\cdot\, -p}(*\cup\mathcal{H}(1)))$, entonces

$$R_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}] = 0 \qquad (1.6.1)$$

Si además $p \geq 1$, entonces $RP_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}] = 0$

Si $\tilde{V}_e(\mathcal{H}) = V_e(\mathcal{H}(p+1))$ y $\tilde{\lambda} \in \Gamma(W; \mathcal{E}_X^{\cdot\, -p}(*\cup\mathcal{H}(p+1)))$

entonces

$$R_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}] = 0 \qquad (1.6.2)$$

Si además $p \geqslant 1$, entonces $RP_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}] = R_{\mathcal{H}(p+1)}[\tilde{\lambda}]$.

1.7 Propiedades de "regularidad" en el caso de intersección completa .

Sea $\dim \cap\mathcal{H} = n-p-1$. Si $\tilde{\lambda} \in \Gamma(W;\mathcal{E}_X^{\cdot\,-p}(*\cup\mathcal{H}(i)))$ entonces

$$R_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}] = 0 \qquad (1.7.1)$$

para cualquier $1 \leqslant i \leqslant p+1$.

Sea $\dim \cap\mathcal{H} = n-p-1$ y $\dim \cap\mathcal{H}(p+1) = n-p$, entonces

$$RP_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}] = 0 \qquad (1.7.2)$$

si $\tilde{\lambda} \in \Gamma(W;\mathcal{E}_X^{\cdot\,-p}(*\cup\mathcal{H}(i)))$ con $1 \leqslant i \leqslant p$

1.8 Propiedades de la "invariancia de tubos" en el caso de intersecciones cualesquiera .

Sea $\mathcal{H}' = \{Y_1',\ldots,Y_{p+1}'\}$ otra familia de hipersuperficies en X tal que:

a) $Y_1 \subset Y_1'$, $Y_{p+1} \subset Y_{p+1}'$ y $Y_i = Y_i'$, $2 \leqslant i \leqslant p$.

b) $\tilde{V}_e(\mathcal{H}) \subset \tilde{V}_e(\mathcal{H}')$ (lo que implica que $V_e(\mathcal{H}) \subset V_e(\mathcal{H}')$)

Entonces los diagramas (*) y (**) (cf. pag.4 y 5) son conmutativos.

1.9 Propiedades de "invariancia de tubos" en el caso de intersección completa .

Si $\dim_C \cap\mathcal{H} = n-p-1$, $\dim_C \cap\mathcal{H}' = n-p-1$, $Y_i \subset Y_i'$, $1 \leqslant i \leqslant p+1$

entonces el diagrama (**) es conmutativo. (1.9.1)

Si $\dim_C \cap \mathcal{H} = n-p-1$, $\dim_C \cap \mathcal{H}' = n-p-1$

$\dim_C \cap \mathcal{H}(p+1) = n-p$, $\dim_C \cap \mathcal{H}'(p+1) = n-p$

$Y_i \subset Y_i'$, $1 \leq i \leq p+1$

entonces el diagrama (*) es conmutativo. (1.9.2)

1.10 Antisimetría

Si $\dim_C \cap \mathcal{H} = n-p-1$, $R_{\mathcal{H}}$ depende de manera alternada del orden de las hipersuperficies de la familia $\mathcal{H}$. (1.10.1)

Si $\dim_C \cap \mathcal{H} = n-p-1$ y $\dim_C \cap \mathcal{H}(p+1) = n-p$, entonces $RP_{\mathcal{H}}$ depende de manera alternada del orden de las hipersuperficies de la familia $\mathcal{H}$. (1.10.2)

1.11 Puridad

Sea X una variedad y $\tilde{\lambda} \in \Gamma(W;\Omega_X^{\cdot\, -p}(*\cup\mathcal{H}))$. Entonces:

a) Si $\dim_C \cap \mathcal{H} = n-p-1$, entonces el soporte de $R[\tilde{\lambda}]$ es la unión de algunas componentes irreducibles de $\cap \mathcal{H}$.

b) Si $\dim_C \cap \mathcal{H} = n-p-1$ y $\dim_C \cap \mathcal{H}(p+1) = n-p$, entonces el soporte de $RP_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}]$ es la unión de algunas componentes irreducibles de $\cap \mathcal{H}(p+1)$.

1.12 Notación

$\mathbb{N}$ denotará el conjunto de números naturales y el cero. Si $z = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, entonces

$$z^\alpha = \prod_{k=1}^{n} z_k^{\alpha_k}$$

$$|\alpha| = \sum_k \alpha_k$$

Sea $\Lambda(p,n)$ la familia de los subconjuntos $I = \{i_1,\ldots,i_p\} \subset \subset \{1,\ldots,n\}$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$. Para cada $I \in \Lambda(p,n)$, notaremos:

$$z_I = (z_i : i \in I) = (z_{i_1},\ldots,z_{i_p})$$

$$z_I^\alpha = \prod_{i\in I} z_i^{\alpha_i}$$

Si $J = \{j_1,\ldots,j_{n-p}\} = \{1,\ldots,n\} - I$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_{n-p} \leq n$, entonces

$$z(I) = (z_{j_1},\ldots,z_{j_{n-p}}) = z_J$$

$$z(I)^\alpha = \prod_{j\in J} z_j^{\alpha_j}$$

$\|z\| = \max\{|z_i| : 1 \leq i \leq n\}$ $\qquad$ $\|z(I)\| = \max\{|z_j| : j \in J\}$

$B = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$ $\qquad$ $B(I) = \{z(I) : \|z(I)\| < 1\}$

Asimismo, para cada $\delta > 0$

$$B_\delta^\alpha = \{z \in B : \|z^\alpha\| > \delta\}$$

$$B(I)^{\alpha}_{\delta} = \{z(I) \in B(I) \ : \ \|z(I)^{\alpha}\| > \delta\}$$

Si $\beta \in \mathbb{N}^{p\times n}$ es una matriz de p filas por n columnas, denotaremos por β_{ij} el elemento de la i-sima fila y j-sima columna de β.

$\beta_i = (\beta_{i1}, \dots\dots, \beta_{in})$ es la i-sima fila.

β_I es la matriz construida con las p filas y las columnas $i_1 < \dots < i_p$ de β.

Si $\beta \in \mathbb{N}^{(p+1)\times n}$, $\beta_I\,(p+1)$ designa la matriz que tiene las primeras p filas y las columnas $i_1 < \dots\dots < i_p$ de β y $\beta(p+1)$ es la matriz construida con las primeras p filas de β.

Asimismo, notaremos:

$$dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$$
$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots\dots \wedge dz_{i_p}$$
$$d\bar{z} = d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$$
$$d\bar{z}_I = d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots\dots \wedge d\bar{z}_{i_p}$$
$$d\omega_I = dz_{i_1} \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots\dots\dots\dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{i_p}$$

Una forma $\omega \in \Gamma(C^n; \mathcal{E}^{2n-p}) = \mathcal{E}^{2n-p}(C^n)$, $0 \leq p \leq n$ admite una representación única, <u>la expresión canónica</u> de ω :

$$\omega = \sum_{A,\,B,\,M} a_{ABM}(z,\bar{z})\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge d\omega_M$$

donde A,B, M son subconjuntos ordenados de $\{1,\dots,n\}$, dos a dos disjuntos y tales que $|A| + |B| + 2|M| = 2n-p$. Necesariamente es $|A| + |B| + |M| \leq n$ y $|M| \geq n-p$.

Diremos que $\beta \in \mathbb{N}^{p\times p}$ es <u>normal</u> si $\det(\beta) \neq 0$ y si β puede transformarse en una matriz triangular superior mediante una permutación de sus columnas.

Decimos que $\beta \in \mathbb{N}^{(p+1)\times p}$ es <u>normal</u> si $\beta_{p+1} = 0$ y $\beta(p+1)$ es normal. Diremos también que $\beta \in \mathbb{N}^{p\times n}$ es <u>normal</u>, si existe $A \subset \{1,\dots,n\}$, $|A| = p$, tal que β_A es normal.

Consideremos la expresión canónica

$$\omega = b(z)\ dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge d\omega_M \in \mathcal{E}^{2n-p}(\mathbb{C}^n)$$

Decimos que <u>ω es normal respecto de</u> $\beta \in \mathbb{N}^{p\times n}$ ó $\beta \in \mathbb{N}^{(p+1)\times n}$ (o simplemente, que es normal, si no hay lugar a confusión), si:

$|B| = 0$, $|M| = n - p$ y β_A es normal

Sea $k \in \mathcal{E}^0(\mathbb{C}^n)$, $\gamma \in \mathbb{N}^n$, $I \in \Lambda(p,n)$. Entonces

$$\partial_j k = \frac{\partial k}{\partial z_j} \qquad \partial^\gamma = \partial_1^{\gamma_1}\dots\partial_n^{\gamma_n}\ k$$

$$\bar{\partial}_j k = \frac{\partial k}{\partial \bar{z}_j} \qquad \partial^\gamma(I) = \partial_{i_1}^{\gamma_{i_1}} \dots \partial_{i_p}^{\gamma_{i_p}}\ k$$

$$\gamma! = \gamma_1!\dots.\gamma_n!\ ,\ \gamma(I)! = \gamma_{i_1}!\dots\gamma_{i_p}!$$

$$k^\gamma(I) = \frac{1}{\gamma(I)}[\partial^\gamma(I)k]_{z_{i_1}=\dots=z_{i_p}=0}$$

$$\tilde{k}^\gamma(I) = z_I^\gamma k^\gamma(I)$$

CAPITULO II

2.1 Definición

Sea $\alpha \in \mathbb{N}^{p\times n}$. Definimos entonces una nueva matriz

$$E(\alpha) \in \mathbb{N}^{p\times n}$$

llamada "matriz esencial asociada a α" , como:

$$E(\alpha)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_{ij} \neq 0 \text{ y } \alpha_{kj} = 0 \ , \quad i < k \leq p \\ \\ 0 & \text{si } \alpha_{ij} = 0 \text{ ó } \alpha_{ij} \neq 0 \ , \text{ pero existe} \\ & k > i \text{ tal que } \alpha_{kj} \neq 0 \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

Ejemplo

Sea

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$E(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notar que si $\alpha \in \mathbb{N}^{p\times n}$, entonces $E(\alpha) \in Z_2^{p\times n}$.

2.2 Lema

Sea $\alpha \in \mathbb{N}^{p\times n}$ y $A \subset \{1,\dots,n\}$, $|A| = p$. Entonces α_A es normal si y solo si $E(\alpha_A)$ es normal.

Demostración:

Si α_A es normal, entonces existe una permutación de sus columnas que hace de ella una matriz triangular superior. Haciendo la misma permutación de columnas en $E(\alpha_A)$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $A = \{1,\dots,p\}$ y α_A es triangular superior. Como α_A es normal, debe ser $\det(\alpha_A) \neq 0$. Luego, $\alpha_{ii} \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq p$ y $\alpha_{ij} = 0$ si $p \geq i > j$, con $1 < i$ $1 \leq j < p$. Luego, de (2.1.1) se tiene:

$$E(\alpha)_{ii} = 1$$
$$E(\alpha)_{ij} = 0 \quad \text{si } i\neq j \text{ , con } 1 \leq i,j \leq p$$

Luego $E(\alpha_A)$ es normal.

Recíprocamente , supongamos como antes que $E(\alpha_A)$ ya es triangular superior, o sea que $E(\alpha_A)$ es la matriz identidad en $\mathbb{N}^{p\times p}$. Luego, $E(\alpha)_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq p$ implica que $\alpha_{ii} \neq 0$. Además, del hecho que $E(\alpha)_{ij} = 0$ con $i > j$, se sigue que $\alpha_{ij} = 0$ si $i > j$.

En efecto, si fuera $\alpha_{ij} \neq 0$, como $E(\alpha)_{ij} = 0$ se deduce que existe $k > i$ tal que $\alpha_{kj} \neq 0$. Sea $r = \max \{ i<k\leq p : \alpha_{kj} \neq 0\}$. Luego $\alpha_{rj} \neq 0$ y $\alpha_{sj} = 0$, para todo $r < s \leq p$. Pero entonces, sería $E(\alpha)_{rj} = 1$ con $r > i > j$, contradiciendo que $E(\alpha_A)$ es triangular superior, lo que demuestra el lema.

2.3 Lema

Sean $\alpha \in \mathbb{N}^{p\times m}$ y $\beta \in \mathbb{N}^{m\times n}$. Entonces

$$E(E(\alpha).\beta) = E(\alpha.\beta) \qquad (2.3.0)$$

Demostración:

Verificaremos entonces que $E(E(\alpha).\beta)_{ij} = E(\alpha.\beta)_{ij}$

Caso 1): $E(E(\alpha).\beta)_{ij} = 1$

Es necesario entonces probar que:

i) $(\alpha.\beta)_{ij} \neq 0$

ii) $(\alpha.\beta)_{rj} = 0$, para todo $r > i$.

Demostración de i): $E(E(\alpha).\beta)_{ij} = 1 \Rightarrow (E(\alpha).\beta)_{ij} \neq 0$ para algún k, $1 \leqslant k \leqslant m$, es

$$E(\alpha)_{ik}.\beta_{kj} \neq 0 \qquad (2.3.1)$$

Luego $E(\alpha)_{ik} \neq 0$, o sea $E(\alpha)_{ik}=1 \Rightarrow \alpha_{ik} \neq 0$. Entonces, de (2.3.1) y $\alpha_{ik} \neq 0$ se tiene $\alpha_{ik}.\beta_{kj} \neq 0$, y por lo tanto $(\alpha.\beta)_{ij} \neq 0$.

Demostración de ii): Queremos ver que $(\alpha.\beta)_{rj} = \sum_k \alpha_{rk}.\beta_{kj} = 0$ para todo $r > i$. Fijemos $r > i$. Entonces, si $\beta_{kj} = 0$ se sigue la tesis. Supongamos que $\beta_{vj} \neq 0$ y probaremos entonces que $\alpha_{rv} = 0$. Por hipótesis es $(E(\alpha).\beta)_{tj} = 0$ para todo $t > i$. En particular para r. O sea $(E(\alpha).\beta)_{rj} = \sum_k E(\alpha)_{rk}.\beta_{kj} = 0$, y de aquí $E(\alpha)_{rk}.\beta_{kj} = 0$ para todo k.

Como estamos suponiendo que $\beta_{vj} \neq 0$, se tiene $E(\alpha)_{rv} = 0$.
Aquí hay 2 posibilidades:

a) $\alpha_{rv} = 0$, que prueba lo que queremos, o bien

b) $\alpha_{rv} \neq 0$, pero existe $e > r$, tal que $\alpha_{ev} \neq 0$

Sea $u = \max \{e > r : \alpha_{ev} \neq 0\} > r > i$.
Entonces $\alpha_{uv} \neq 0$ y $E(\alpha)_{uv} = 1$; pero como $\beta_{vj} \neq 0$, se tendría $E(\alpha)_{uv} . \beta_{vj} \neq 0$ y por lo tanto $(E(\alpha).\beta)_{uj} \neq 0$ con $u > i$, contradiciendo la hipótesis del caso 1). Luego como b) no puede suceder, se tiene $\alpha_{rv} = 0$ como queríamos.

<u>Caso 2)</u>: $E(E(\alpha).\beta)_{ij} = 0$

Probaremos entonces que $E(\alpha.\beta)_{ij} = 0$

Notemos que $E(E(\alpha).\beta)_{ij} = 0$ puede suceder por 2 circunstancias

a) $(E(\alpha).\beta)_{ij} = 0$, ó

b) existe $r > i$, tal que $(E(\alpha).\beta)_{rj} \neq 0$

Si a) entonces $\sum_k E(\alpha)_{ik} . \beta_{kj} = 0$, y por lo tanto $E(\alpha)_{ik} . \beta_{kj} = 0$ para todo k. Si $\beta_{kj} = 0$ para todo k, se sigue que $\alpha_{ik} . \beta_{kj} = 0$ para todo k, y por lo tanto $(\alpha.\beta)_{ij} = 0$. En consecuencia $E(\alpha.\beta)_{ij} = 0$.

Si existe t , $1 \leq t \leq m$ tal que $\beta_{tj} \neq 0$, entonces $E(\alpha)_{it} = 0$.
Entonces, o bien $\alpha_{it} = 0$, en cuyo caso no habría contribución en $\alpha_{it} . \beta_{tj}$, o $\alpha_{it} \neq 0$, pero existe $r > i$ con $\alpha_{rt} \neq 0$. Como $\beta_{tj} \neq 0$, entonces $\alpha_{rt} . \beta_{tj} \neq 0$. Luego $(\alpha.\beta)_{rj} \neq 0$ con $r > i$ y por lo tanto $E(\alpha.\beta)_{ij} = 0$.

Si b) entonces existe $r > i$ con $(E(\alpha).\beta)_{rj} \neq 0$. Luego existe t tal que $E(\alpha)_{rt} . \beta_{tj} \neq 0$, y por lo tanto $E(\alpha)_{rt} \neq 0$ y $\alpha_{rt} \neq 0$. Entonces $\alpha_{rt} . \beta_{tj} \neq 0$ y en consecuencia $(\alpha.\beta)_{rj} \neq 0$ con $r > i$. Luego, $E(\alpha.\beta)_{ij} = 0$.

2.4 La aplicación $\phi \rightarrow \phi^e$

Definición: Sea U un abierto de C^n, h_i y ϕ_i funciones holomorfas definidas en U, $h_i(z) \neq 0$ para todo $z \in U$, $1 \leqslant i \leqslant p$.
Sea $\alpha \in N^{p \times n}$.
Si

$$\phi_i = h_i . z^{\alpha_i} \qquad (*)$$

se definen nuevas funciones holomorfas en U como sigue:

$$\phi_i^e = z^{E(\alpha)_i}$$

Ejemplo: Sea $U = C^4$. Entonces, si

$$\left[\begin{array}{l} \phi_1 = z_1 z_3^3 z_4 \\ \phi_2 = z_1^2 z_2 \\ \phi_3 = z_2 z_4 \end{array}\right. \qquad \text{entonces} \qquad \left[\begin{array}{l} \phi_1^e = z_3 \\ \phi_2^e = z_1 \\ \phi_3^e = z_2 z_4 \end{array}\right.$$

Dada entonces, una familia $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_p)$ de funciones holomorfas en U de la forma (*) , se le asocia una nueva familia $\phi^e = (\phi_1, \ldots, \phi_p)$ llamada "la familia reducida asociada a ϕ".

2.5 Lema

Sea $\alpha \in N^{p\times n}$. Entonces, si α no es normal, existe i , $1 \leq i \leq p$, tal que

$$E(\alpha)_i = (E(\alpha)_{i1},\ldots,E(\alpha)_{in}) = (0,\ldots,0)$$

Demostración: Supongamos que no se cumple la tesis. Entonces, para todo i , $1 \leq i \leq p$, existe k_i , $1 \leq k_i \leq n$, tal que

$$E(\alpha)_{ik_i} = 1$$

Notemos que $i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$. En efecto, si $i \neq j$ (digamos $i < j$) y $k_i = k_j$ se tendría

$$E(\alpha)_{ik_i} = 1 \qquad y \qquad E(\alpha)_{ik_j} = 1$$

contradiciendo la definición de $E(\alpha)$.

En consecuencia, se tienen p columnas diferentes, a saber $k_1,\ldots,k_p$ tales que $E(\alpha)_{ik_i} = 1$. Permutando entonces las columnas de $E(\alpha)$ de manera que las primeras p sean $k_1,\ldots,k_p$ respectivamente, se obtendría que $E(\alpha)$ es normal y luego de (2.2) resultaría α normal, contradiciendo la hipótesis.

2.6 Corolario

En las hipótesis de la definición 2.4 , si α no es normal, existe $1 \leq i \leq p$, tal que ϕ_i^e es inversible.

<u>Demostración</u>: Inmediata a partir del lema anterior y lema 2.2 .

<u>2.7</u> <u>Definición</u>

Sean $\tilde{\phi}_1,\ldots,\tilde{\phi}_p$ gérmenes de funciones holomorfas definidos en U entorno del origen en C^n . Supongamos que para todo $1 \leq k \leq p$, es

$$\tilde{\phi}_k = \tilde{g}_k \prod_{i=1}^{m} \tilde{f}_i^{\alpha_{ki}}$$

donde $\alpha \in \mathbb{N}^{p\times m}$, la descomposición de cada germen $\tilde{\phi}_k$ como producto de gérmenes irreducibles, siendo cada $\tilde{g}_k$ germen inversible. Definimos

$$\tilde{\phi}_k^e = \prod_{i=1}^{m} \tilde{f}_i^{E(\alpha)_{ki}}$$

los <u>gérmenes</u> <u>esenciales</u> asociados a $\tilde{\phi}_1,\ldots,\tilde{\phi}_p$.

<u>2.8</u> <u>Lema</u>

En las condiciones de la definición 2.7 , si α no es normal, existe i, $1 \leq i \leq p$, tal que $\tilde{\phi}_i^e$ es inversible.

<u>Demostración</u>: Inmediata a partir de los lemas 2.2 y 2.5 .

<u>2.9</u> <u>Definición</u>

Si $\mathcal{H} = \{Y_1, \ldots, Y_p\}$ es una familia de hipersuperficies en X, definidas localmente por $\{\phi_1, \ldots, \phi_p\}$, llamaremos

$$\mathcal{H}^e = \{Y_1^e, \ldots, Y_p^e\}$$

a la familia de hipersuperficies en X definidas localmente por los ceros de $\{\phi_1^e, \ldots, \phi_p^e\}$.

En estas condiciones, la proposición siguiente resume las propiedades fundamentales de la transformación $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^e$.

2.10 Proposición

1. $\cup\, \mathcal{H} = \cup\, \mathcal{H}^e$
2. $V_e(\mathcal{H}) = V_e(\mathcal{H}^e)$ (cf. 1.5)
3. En general $\mathcal{H}^e \neq (\mathcal{H}^\tau)^e$ donde τ es una permutación de $\{1,\ldots,p\}$ y $\mathcal{H}^\tau = \{Y_{\tau(1)}, \ldots, Y_{\tau(p)}\}$.
4. Si $\mathcal{H} = \{Y_1, Y_2\}$ entonces $V_e(\mathcal{H}) = V(\mathcal{H}^e)$
5. Con la notación de 2.7, si $m < p$, entonces $V_e(\phi) = \phi$
6. Sean $f_1, \ldots, f_m$ representantes de gérmenes irreducibles en un entorno del origen en C^n, tales que

$$V(f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}) = V_{i_1, \ldots, i_k}$$

tiene dimensión pura $n - k$, para todo $1 \leq k \leq n$. Sea $p \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{N}^{p \times m}$. Si

$$\phi_r = \prod_{i=1}^{m} f_i^{\alpha_{ri}}$$

$1 \leq r \leq p$, entonces $V_e(\phi) = V(\phi^e)$. En particular, en el caso de cruzamientos normales, $V(\phi^e)$ es completa.

7. Sean $\phi_1, \ldots, \phi_p$ gérmenes en el origen en C^n, tales que

$$\phi_k = \prod_{l=1}^{n_k} \phi_{lk}$$

(ϕ_{lk} no necesariamente irreducibles), entonces

$$V_e(\phi) \subset \cup\{V_e(\phi_{1k_1},\ldots,\phi_{pk_p}) : \begin{matrix} 1 < k_1 < n_1 \\ \vdots \\ 1 < k_p < n_p \end{matrix} \}$$

<u>Demostración</u>: 1) y 4) son inmediatos a partir de la definición de ϕ^e y la construcción (1.5.3).

Para 2) probaremos el siguiente resultado: Sean $\mathcal{H} = \{Y_1,\ldots,Y_p\}$ y $\mathcal{H}_1 = \{Z_1,\ldots,Z_p\}$ dos familias de hipersuperficies en X , definidas localmente por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} Y_j = V(a.\phi_j) \\ Y_k = V(a.\phi_k) \\ Y_i = V(\phi_i) \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant p \quad , \quad i \neq j,k \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_i = V(\phi_i) \quad , \quad 1 < i < p \quad , \quad i \neq k \\ Z_k = V(a.\phi_k) \end{cases}$$

donde $\phi_1,\ldots,\phi_p, a$ son funciones holomorfas definidas en W un abierto en X . Entonces

$$V_e(\mathcal{H}) = V_e(\phi_1,\ldots,a.\phi_j,\ldots,a.\phi_k,\ldots,\phi_p) =$$
$$= V_e(\phi_1,\ldots,\phi_j,\ldots,a.\phi_k,\ldots\phi_p) = V_e(\mathcal{H}_1)$$

En el proceso de construcción por recurrencia de la intersección esencial, Coleff y Herrera (cf. [1] , (1.7.4) p.41) definen los conjuntos Y_i' y Z_i' para las familias $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_1$ respectivamente. Observemos entonces que:

1. $Y_i = Z_i$, $1 \leq i \leq j-1$. Luego $Y_i' = Z_i'$ si $1 \leq i \leq j-2$

2. En general

$Y_{j-1}' = \cup$ {componentes irreducibles de $(Y_{j-2}' \cap Y_{j-1}) \not\subset Y_j\} \subset Z_{j-1}'$.
Luego resulta $V_e(\mathcal{H}) \subset V_e(\mathcal{H}_1)$. Sean

$$Y_{j-1}' = A_1 \cup \ldots \cup A_v$$

(*) $Z_{j-1}' = A_1 \cup \ldots \cup A_v \cup B_1 \cup \ldots \cup B_t$, donde $B_r \subset V(a)$ para $1 \leq r \leq t$, la descomposición en componentes irreducibles de Y_{j-1}' y Z_{j-1}' .

En consecuencia de (*) y del hecho que $Y_k = V(a) \cup V(\phi_k) = Z_k$, las componentes B_r , $1 \leq r \leq t$, no aportan nuevas componentes irreducibles en $V_e(\mathcal{H}_1)$ y por lo tanto, resulta la tesis.

Para 3) observemos el siguiente ejemplo: sean en C^3

$$\begin{array}{lll} \phi_1 = z_1 z_2 & \multirow{2}{*}{luego} & \phi_1^e = z_2 \\ \phi_2 = z_1 z_3 & & \phi_2^e = z_1 z_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \psi_1 = \phi_2 & \text{luego} & \psi_1^e = z_3 \\ \psi_2 = \phi_1 & & \psi_2^e = z_1 z_2 \end{array}$$

Para 5) basta notar, que si $m < p$, en la matriz $E(\alpha)$ hay necesariamente una fila de ceros.

Para 6) notemos que por 2) alcanza con ver que $V_e(\phi^e) = V(\phi^e)$. Llamando $Y_j = V(\phi_j^e)$, definimos

$$Y_o' = C^n$$

$$Y_j' = \cup \{\text{componentes irreducibles de} (Y_{j-1}' \cap Y_j) \not\subset Y_{j+1}\}$$

La tesis, resultará de probar que

$$Y_j' = Y_1 \cap \ldots \cap Y_j$$

Para $n = 1$

$$Y_1' = V(f_{i_1}) \cup \ldots \cup V(f_{i_s})$$

donde $i_1, \ldots, i_s$ son tales que

$$E(\alpha)_{1i_k} = 1 \quad , \quad 1 \leq k \leq s.$$

En efecto, $V(f_{i_k})$ es irreducible y $V(f_{i_k}) \not\subset Y_2$ si $E(\alpha)_{1i_k} = 1$, puesto que si

$$V(f_{i_k}) \subset Y_2 = V(f_{j_1}) \cup \ldots \cup V(f_{j_t})$$

entonces

$$V(f_{i_k}) \subset V(f_{j_v}) \quad \text{(notar que } i_k \neq j_v \text{ por construcción de } E(\alpha)\text{)}$$

y resulta

$$V(f_{i_k}) \subset V_{i_k j_v} \quad \text{, imposible por razones de dimensión.}$$

Supongamos ahora

$$Y_{j-1}' = Y_1 \cap \ldots \cap Y_{j-1}$$

Por definición y usando la hipótesis inductiva, se tiene:

$$Y_j' = \cup \{\text{componentes irreducibles de} \bigcap_{k=1}^{j} Y_k \not\subset Y_{j+1}\}$$

y notemos que

$$Y_1 \cap \ldots \cap Y_j = \cup \{\text{comp. irred. de } \{V_{i_1 \ldots i_j} : E(\alpha)_{ri_r} = 1\}\}_{1 \leq r \leq j}$$

Sea A una componente irreducible de $V_{i_1 \ldots i_j}$; afirmamos que $A \not\subset Y_{j+1}$:

Si $A \subset Y_{j+1}$, entonces $A \subset V(f_s)$ para algún s tal que $E(\alpha)_{j+1,s} = 1$; luego

$$A \subset A \cap V(f_s) \subset V_{i_1 \ldots i_j, s}$$

absurdo, pues

$$\dim A = n - j$$

y

$$\dim (V_{i_1, \ldots i_j, s}) = n - (j + 1).$$

Para 7) basta probar que:

$$V_e(\phi_1, \ldots, a.\phi_j, \ldots, \phi_p) \subset V_e(\phi_1, \ldots, \phi_j, \ldots, \phi_p) \cup V_e(\phi_1, \ldots, a, \ldots, \phi_p)$$

Por simplicidad veremos que

$$V_e(\phi_1, a.\phi_2, \ldots, \phi_p) \subset V_e(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p) \cup V_e(\phi_1, a, \ldots, \phi_p)$$

La demostración se hará en dos etapas:

a) Sean $\phi_i = h_i z^{\alpha_i}$, $a = g z^{\beta}$, h_i y g inversibles, $\alpha \in \mathbb{N}^{p \times n}$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$. Definamos entonces

$$\alpha' = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \alpha'' = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha + \beta \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Veremos que cada componente irreducible de $V_e(\phi_1, a.\phi_2, \ldots, \phi_p)$ lo es de $V_e(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p)$ o de $V_e(\phi_1, a, \ldots, \phi_p)$.

Sea A una componente irreducible de $V_e(\phi_1, a.\phi_2, \ldots, \phi_p)$;

por lo tanto, luego de 6) se tiene:

$$A = V(z_{i_1}, \dots, z_{i_p}) \qquad \text{con} \quad E(\alpha'')_{ji_j} = 1 \;,\; i_k \neq i_v \quad \text{si}$$

$k \neq v$

Verificaremos que

$$E(\alpha)_{1i_1} = E(\alpha)_{2i_2} = 1 \quad \text{o bien}$$

$$E(\alpha')_{1i_1} = E(\alpha')_{2i_2} = 1$$

lo que implicará, que A es una componente irreducible de $V_e(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$ o de $V_e(\phi_1, a, \dots, \phi_p)$, ya que $E(\alpha)_k = E(\alpha')_k = E(\alpha'')_k$ para $k > 3$.

Ahora:

$$E(\alpha'')_{1i_1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha_{1i_1} \neq 0 & \\ \alpha_{ji_1} = 0 & \text{para todo } j > 1 \\ \beta_{i_1} = 0 & \end{bmatrix}$$

$$E(\alpha'')_{2i_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha_{ji_2} = 0 & \text{para todo } j > 2 \\ \alpha_{2i_2} \neq 0 & (*) \text{, ó} \\ \beta_{i_2} \neq 0 & (**) \end{bmatrix}$$

En caso que se verifique (*), resulta

$$A \subset V_e(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$$

y si sucede (**), entonces

$$A \subset V_e(\phi_1, a, \dots, \phi_p)$$

b) Para el caso general, consideremos W un abierto relativamente compacto en X, donde estén definidas $\phi_1,\ldots,\phi_p$ y a.

Sea $\pi : W_1 \to W$ una resolución de las singularidades de $Y_o = V(\phi_1 \cdots \phi_{p+1} . a)$. Entonces, notando que

$$\pi(V_e(\phi_1^*,\ldots,a^*.\phi_j^*,\ldots,\phi_p^*)) = V_e(\phi_1,\ldots,a.\phi_j,\ldots,\phi_p)$$
$$\pi(V_e(\phi_1^*,\ldots,\phi_p^*)) = V_e(\phi_1,\ldots,\phi_p)$$
$$\pi(V_e(\phi_1^*,\ldots,a^*,\ldots,\phi_p^*)) = V_e(\phi_1,\ldots,a,\ldots,\phi_p)$$

(cf. [1] p.125) donde

$$\phi_i^* = \phi_i \circ \pi$$
$$a^* = a \circ \pi$$

y usando la parte a) se sigue la tesis.

2.11 Lema

Sean $\phi_1,\ldots,\phi_p$ funciones holomorfas en C^n, con cruzamientos normales. Sea $\omega \in \Gamma_c(C^n;\mathcal{E}^{2n-p})$. Entonces, si $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_p)$ y $\phi^e = (\phi_1^e,\ldots,\phi_p^e)$ se tiene:

a) $$\lim_{\delta\to 0} I[T^p_{\delta}(\phi)](\frac{\omega}{\phi}) = \lim_{\delta\to 0} I[T^p_{\delta}(\phi^e)](\frac{\omega}{\phi})$$

b) Si $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\phi}$ y $\lambda \in \Gamma_c(C^n;\mathcal{E}^{2n-p+1})$, entonces

$$\lim_{\delta\to 0} I[D^p_{\delta}(\phi)](\frac{\lambda}{\phi}) = \lim_{\delta\to 0} I[D^p_{\delta}(\phi^e)](\frac{\lambda}{\phi})$$

Demostración: a) Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$\phi_i = z^{\alpha_i}, \quad \text{donde } z = (z_1,\ldots,z_n),\ \alpha \in N^{p\times n}$$

(cf. [1], lemas 2.13 (2) y 2.15 (2)).

Luego

$$\phi_i = z^{E(\alpha)_i}$$

Si $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\phi}$ no es normal respecto de α , entonces (cf.[1])

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{T^p_{\delta}(\phi)} \tilde{\omega} = 0$$

Además, $\tilde{\omega}$ no es normal respecto de $E(\alpha)$ (cf. lema 2.2). Luego, para δ suficientemente pequeño es $T^p_{\delta}(\phi^e) = \emptyset$ y por lo tanto $\lim_{\delta\to 0} I[T^p_{\delta}(\phi^e)](\tilde{\omega}) = 0$.

Sea entonces $\tilde{\omega}$ normal respecto de α (y por lo tanto también de $E(\alpha)$). Sin pérdida de generalidad, supongamos que:

$I = \{1,\dots,p\}$, $M = \{1,\dots,n\} - I$

$\alpha_I \in \mathbb{N}^{p\times p}$ triangular superior y $\det(\alpha_I) \neq 0$.

Luego $E(\alpha_I) = Id_{p\times p}$.

Sea $\omega = b(z).dz_I\, d\omega_M$, donde $b \in D^o(\mathbb{C}^n)$, sop $(b) \subset B$

$\gamma_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij}$, $1 \leq j \leq n$, $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n) \in \mathbb{N}^n$

Entonces, si

$\tilde{\omega} = \frac{b(z)dz_I\, d\omega_M}{z^{\gamma}}$, tenemos

$$\lim_{\delta\to 0} I[T^p_{\delta}(\phi)](\tilde{\omega}) =$$

$$= k.\lim_{\delta\to 0} I[1 > |z(I)| > \delta]\,(z(I)^{-\gamma}b^{\gamma-1}(I)\,d\omega_M) \quad , \tag{2.11.1}$$

donde

$k = sg(\det(\alpha_I))(2\pi i)^p$

y se ha usado la proposición 2.13 de [1] .

Por otro lado, notando que

$$V(z^{\gamma}) = V(\prod_{i=1}^{p} z^{E(\alpha)_i})$$

y usando nuevamente la misma proposición de [1] , se tiene:

$$\lim_{\delta\to 0} I[T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi^e)](\tilde{\omega}) = \lim_{\delta\to 0} I[S_{\underset{\sim}{\delta}}](z^{-\gamma} b dz_I \, d\omega_M) =$$

$$k.\lim_{\delta\to 0} I[1 > |z(I)^{\gamma}| > \delta](z(I)^{-\gamma} b^{\gamma-1}(I) d\omega_M) \qquad (2.11.2)$$

donde $S_{\underset{\sim}{\delta}}$ es el conjunto definido por las siguientes ecuaciones:

$$|z_1 z_{p+1}^{E(\alpha)_{1,p+1}} \cdots\cdots z_n^{E(\alpha)_{1n}}| = \delta_1$$

$$\vdots$$

$$|z_p z_{p+1}^{E(\alpha)_{p\,p+1}} \cdots\cdots z_n^{E(\alpha)_{pn}}| = \delta_p$$

Luego, de (2.11.1) y (2.11.2), se sigue a).

La demostración de b) es análoga

<u>2.12</u> <u>Teorema</u>

Sea $\mathcal{H}$ una familia de hipersuperficies $\{Y_1,\ldots,Y_p\}$ en X . Sea $Y = V_e(\mathcal{H})$, $\phi_1,\ldots,\phi_p \in (W)$ las ecuaciones locales de las hipersuperficies en un entorno W de $y \in Y$. Entonces:

a) Si $\omega \in \Gamma_c(X, \mathcal{E}_X^{2n-p})$,

$$\lim_{\delta\to 0} I[T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)](\frac{\omega}{\phi}) = \lim_{\delta\to 0} I[T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi^e)](\frac{\omega}{\phi})$$

b) Si $\zeta \in \Gamma_c(X;\mathcal{E}_X^{2n-p+1})$

$$\lim_{\delta\to 0} I[D^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)](\frac{\zeta}{\phi}) = \lim_{\delta\to 0} I[D^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi^e)](\frac{\zeta}{\phi})$$

siendo $\underset{\sim}{\delta}$ una trayectoria admisible.

Demostración: a) Restringiendo W eventualmente, existe una resolución de las singularidades de $Y' = V(\phi_1,\ldots,\phi_p)$, o sea, una variedad holomorfa W_1 y un morfismo propio $\pi : W_1 \to W$, que induce un isomorfismo analítico entre $W_1 - \pi^{-1}(Y')$ y $W - Y'$, y tal que $\pi^{-1}(Y')$ tenga cruzamientos normales en W_1.

Supongamos entonces que

$$\phi_k = \prod_{l=1}^{m} f^{\alpha_{kl}} \qquad 1 \leqslant k \leqslant p$$

es la descomposición de ϕ_k en factores irreducibles, que podemos suponer válida en W .

Sea $f_k^* = (f_k \circ \pi) = h_k(z).z^{\beta_k} \qquad 1 \leqslant k \leqslant p$

donde $h_k(z)$ es una función holomorfa nunca nula y $\beta_k = (\beta_{k1},\ldots,\beta_{kn})$ es una n-upla en $\mathbb{N}^n$. Sean $\alpha \in \mathbb{N}^{p\times m}$ y $\beta \in \mathbb{N}^{m\times n}$ las matrices de filas α_k y β_k respectivamente. Entonces

$$\phi_k^* = (\phi_k \circ \pi) = \prod_{l=1}^{m} (z^{\beta_l})^{\alpha_{kl}}.h_l^{\alpha_{kl}}(z)$$

Llamemos

$$g_k(z) = \prod_{l=1}^{m} h_l^{\alpha_{kl}}(z) \quad , \qquad 1 \leqslant k \leqslant p$$

Luego, para cada k , g_k es una función nunca nula, y se tiene:

$$\phi_k^* = g_k . \prod_{i=1}^{m} (z^{\beta_i})^{\alpha_{ki}} \quad , \quad 1 \leq k \leq p \qquad (2.12.1)$$

esto es

$$\phi_k^* = g_k . z^{(\alpha.\beta)_k}$$

donde $(\alpha.\beta)_k$ = k-sima fila de $(\alpha.\beta)$.

Por lo tanto

$$(\phi_k^*)^e = z^{E(\alpha.\beta)_k} \quad , \quad 1 \leq k \leq p \qquad (2.12.2)$$

Por otro lado

$$\phi_k^e = \prod_{i=1}^{m} f_i^{E(\alpha)_{ki}}$$

$$(\phi_k^e)^* = \prod_{i=1}^{m} (f_i^*)^{E(\alpha)_{ki}} = \tilde{g}_k z^{(E(\alpha.\beta)_k} \qquad (2.12.3)$$

donde $\tilde{g}_k = \prod_{i=1}^{m} h_i (z)^{E(\alpha)_{ki}}$

$$((\phi_k^e)^*)^e = z^{E(E(\alpha).\beta)}$$

Entonces, usando la proposición 2.10 (a) se tiene:

$$\lim_{\delta\to 0} I [T_{\delta}^p(\phi)] (\frac{\omega}{\phi}) = \lim_{\delta\to 0} I [T_{\delta}^p(\phi^*)] (\frac{\pi^*(\omega)}{\phi^*}) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} I [T_{\delta}^p((\phi^*)^e)] (\frac{\pi^*(\omega)}{\phi^*}) \qquad (2.12.4)$$

Por otro lado

$$\lim_{\delta\to 0} I [T_{\delta}^p(\phi^e)] (\frac{\omega}{\phi}) = \lim_{\delta\to 0} I [T_{\delta}^p((\phi^e)^*)] (\frac{\pi^*(\omega)}{\phi^*}) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} I [T_{\delta}^p(((\phi^e)^*)^e)] (\frac{\pi^*(\omega)}{\phi^*}) \qquad (2.12.5)$$

Por lema 2.3 resulta $(\phi^*)^e = ((\phi^e)^*)^e$ y por proposición

(2.15) de [1] , resulta el teorema.

Para b) , la demostración es análoga.

2.13 Teorema

Sean $\mathcal{H} = \{Y_1, \dots, Y_p\}$ y $\mathcal{H}' = \{Y'_1, \dots, Y'_p\}$ dos familias de hipersuperficies en X . Sean, W un abierto de X , $\{\phi_1, \dots, \phi_p\}$ y $\{\psi_1, \dots, \psi_p\}$ ecuaciones en W de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ respectivamente, de manera que:

a) $\phi_i = z^{\alpha_i}$

b) $\psi_i = z^{\beta_i}$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{p \times n}$

c) $V_e(\mathcal{H}) = V_e(\mathcal{H}')$

d) $V(\phi_i) \subset V(\psi_i)$, $1 \leqslant i \leqslant p$

(esto es: si $\alpha_{ij} \neq 0$ entonces $\beta_{ij} \neq 0$).

Entonces, si $\tilde{\omega} \in \Gamma_c(X; \mathcal{E}_X^{2n-p}(*\cup\mathcal{H}))$, se tiene:

i) $R_{\mathcal{H}}[\tilde{\omega}] = R_{\mathcal{H}'}[\tilde{\omega}]$

ii) $RP_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}] = RP_{\mathcal{H}'}[\tilde{\lambda}]$

siendo $\tilde{\lambda} \in \Gamma_c(X; \mathcal{E}_X^{2n-p+1}(*\cup\mathcal{H}))$

<u>Nota</u>: La tesis del teorema es equivalente a la conmutatividad de los diagramas (1.8.2) y (1.8.3).

<u>Demostración</u>: Para i) Sea $\tilde{\omega} \in \Gamma_c(W; \mathcal{E}_X^{2n-p}(*\cup\mathcal{H}))$; luego de 1.12 podemos considerar (2n-p)-formas del siguiente tipo:

$$\tilde{\omega} = z^{-\gamma}.b(z)dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge d\omega_M \quad , \quad b \in \mathcal{D}^0(W)$$

Por lema 2.12 y nota 2.8 de [1] , podemos suponer aún que $|B| = 0$ y $|M| = n-p$.

Probaremos entonces, el siguiente resultado, del que se sigue inmediatamente la tesis:

$$V_e(\phi) = V_e(\psi) \quad \text{si y solo si} \quad E(\alpha) = E(\beta) .$$

Si $E(\alpha) = E(\beta)$, entonces $V_e(\phi) = V_e(\psi)$ por 2.10.2 .
Supongamos entonces, que $V_e(\phi) = V_e(\psi)$.

Sea Ω una componente irreducible de $V_e(\phi)$. Como $\phi_i = z^{\alpha_i}$, resulta ser $\Omega = V_{i_1,\ldots,i_p} = V(z_{i_1},\ldots,z_{i_p})$.
Por simplicidad, supongamos que $i_k = k$, $1 \leq k \leq p$.
Luego

$$E(\alpha)_{ii} = 1 \quad , \quad 1 \leq i \leq p$$

$$E(\alpha)_{ij} = 0 \quad , \quad 1 \leq i,j \leq p \quad , \quad i \neq j$$

Entonces, si $A = \{1,\ldots,p\}$, es $E(\alpha_A)$ la matriz identidad de $\mathbb{N}^{p\times p}$. Como $E(\alpha)_{pp} = 1$, se sigue que $\alpha_{pp} \neq 0$, y por hipótesis (d), es $\beta_{pp} \neq 0$. Luego $E(\beta)_{pp} = 1$.

Si $E(\beta)_{pk} = 1$ para algún $k \neq p$, se seguiría que cualquier componente irreducible Λ de $V_e(\psi)$, con $\Lambda \subset V(z_k)$ es $\Lambda \not\subset V(z_p)$, lo que contradice entonces, la existencia de Ω
Luego

$$E(\alpha)_p = E(\beta)_p$$

Supongamos que

$$E(\alpha)_r = E(\beta)_r \quad , \quad \text{para} \quad p \geq r > m$$

Veamos entonces que resulta

$$E(\alpha)_m = E(\beta)_m$$

$E(\alpha)_{mm} = 1 \Rightarrow \alpha_{mm} \quad 0 \Rightarrow \beta_{mm} \neq 0$. Como $E(\alpha)_{rm} = 0$ para $r \neq m$ se sigue por hipótesis inductiva que $E(\beta)_{rm} = 0$. Luego $E(\beta)_{mm} =$ $= 1$.

Ahora, observemos que $E(\alpha)_{mt} = 0$ para todo $t \neq m$, obliga a que $E(\beta)_{mt} = 0$. En efecto, si $E(\beta)_{mt} = 1$ para algún $t \neq m$ debe ser $t < m$ (ya que si $t > m$, entonces $E(\beta)_{tt} = 1$ y por lo tanto $E(\beta)_{mt} = 0$).

En consecuencia, $E(\beta)_{mt} = 1$ implica que $\beta_{mt} \neq 0$, con lo que cualquier componente irreducible Λ de $V_e(\psi)$ tal que $\Lambda \subset V(z_t)$, es $\Lambda \not\subset V(z_m)$, lo que contradice entonces, la existencia de Ω .

Luego, para completar la demostración del teorema, solo resta notar que, por hipótesis (d) y $E(\alpha) = E(\beta)$, resulta

$$\phi_i = \psi_i \qquad , \quad 1 \leqslant i \leqslant p$$

y por lo tanto, por 2.11 (a),

$$R_{\mathcal{H}}[\tilde{\omega}] = R_{\mathcal{H}^e}[\tilde{\omega}] = R_{\mathcal{H}'^e}[\tilde{\omega}] = R_{\mathcal{H}'}[\tilde{\omega}]$$

Análoga demostración para ii).

2.14

La hipótesis c) del teorema 2.13 es necesaria para la conmutatividad de los diagramas (1.8.2) y (1.8.3) como se observa en el siguiente ejemplo: sean en $\mathbb{C}^3$:

$$\mathcal{H} : \begin{bmatrix} \phi_1 = z_1 z_2 \\ \phi_2 = 1 \\ \phi_3 = z_3 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{H}' : \begin{bmatrix} \psi_1 = z_1 z_2 \\ \psi_2 = z_2 \\ \psi_3 = z_3 \end{bmatrix}$$

Sea

$$\tilde{\omega} = \frac{a(z)dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3}{z_1 z_2 z_3} \quad , \quad a \in D^{\circ}(C^3)$$

Entonces,

$$R_{\mathcal{H}}[\tilde{\omega}] = 0 \quad , \quad \text{pues} \quad V_e(\mathcal{H}) = \phi$$

mientras que

$$R_{\mathcal{H}'}[\tilde{\omega}] = (2\pi i).a(0,0,0)$$

Nosotros ignoramos, sin embargo, si los diagramas conmutan en el caso en que solo se verifiquen (c) y (d) del teorema 2.13 .

2.15 Teorema

Sea $\mathcal{H} = \{Y_1, \ldots, Y_p\}$ una familia de hipersuperficies en X , tal que $\bigcup_{i=1}^{p} Y_i$ tiene cruzamientos normales. Sea W un entorno de $x \in X$, $\phi_1, \ldots, \phi_p$ funciones holomorfas en W , tales que

$$Y_j \cap W = (\phi_j = 0) \quad , \quad 1 \leqslant j \leqslant p$$

a) Si $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{f}$, $\omega \in \Gamma_c(W; \mathcal{E}_X^{2n-p})$, f holomorfa en W y

$Y = (f = 0) \subset \bigcup_{i \neq j} (\phi_i^e = 0)$, entonces

$$R_{\phi}[\tilde{\omega}] = 0$$

b) Si $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{f}$, $\lambda \in \Gamma(W; \mathcal{E}^{2n-p+1})$, $1 \leqslant j < p$

entonces

$$RP_{\phi}[\tilde{\lambda}] = 0$$

<u>Demostración</u>: a) $R_\phi[\tilde{\omega}] = \lim_{\delta\to 0} I[T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)](\tilde{\omega}) =$ (por 2.11 (a))

$= \lim_{\delta\to 0} I[T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi^e)](\tilde{\omega})$

donde $\phi_i = h_i . z^{\alpha_i}$ con h_i funciones holomorfas inversibles en W, $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{f}$ con $f = z^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{N}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^{p\times n}$

Por hipótesis, es

$$(z^\gamma = 0) = Y \bigcup_{i\neq j} (z^{E(\alpha)_i} = 0)$$

Ahora, usando (2.10), se deduce que $\{\phi_1, \ldots, \phi_p\}$ tienen intersección completa, y por lo tanto, por proposición 1.7.6 de [1], se tiene:

$$\lim_{\delta\to 0} I[T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)](\tilde{\omega}) = 0$$

La demostración de (b) es análoga.

<u>2.16</u>

La hipótesis del teorema anterior es más débil que la de [1] para el mismo resultado, como se ve en el siguiente ejemplo:

En $\mathbb{C}^4$, sea

$$\mathcal{H} : \begin{cases} \phi_1 = z_1 z_2 z_4 \\ \phi_2 = z_1 z_3 \\ \phi_3 = z_3 z_4 \end{cases}$$

$$\text{Sea } \tilde{\omega} = \frac{b(z)dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \wedge dz_4 \wedge d\bar{z}_4}{z_2 z_3 z_4}, \quad b \in D^\circ(\mathbb{C}^4)$$

forma que no es regular sobre $(\phi_2 = 0)$; sin embargo,

$$(f = z_2 z_3 z_4 = 0) \subset (\phi_1^e = 0) \cup (\phi_3^e = 0) = (z_2 = 0) \cup (z_3 z_4 = 0)$$

y por lo tanto

$$R_{\phi}\ [\tilde{\omega}] = 0$$

<u>2.17</u>

El teorema 2.15 es válido también, en las siguientes condiciones con la misma demostración: sean

$$\phi_i = \prod_{j=1}^{m} f_j^{\alpha_{ij}} \qquad , \quad 1 \leqslant i \leqslant p \quad , \alpha \in \mathbb{N}^{p\times m}$$

f_j representantes de gérmenes irreducibles en un entorno del origen en $\mathbb{C}^n$, tales que:

$$\dim_{\mathbb{C}} \bigcap_{k=1}^{m} V(f_{j_k}) = n - s \quad , \text{ pura para todo}$$

$$\{j_1, \ldots, j_s\} \subset \{1, \ldots, m\} \quad , \quad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_s \leqslant m$$

CAPITULO III

3.1 Definición: Sea $\mathcal{H} = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ una familia de hipersuperficies en X (dim $X = n$) . Sea $Y = V(\mathcal{H})$; de acuerdo con [1], dim $Y = 0$. Consideremos $x \in Y$ y W un entorno de x tal que

$$\bar{W} \cap Y = \{x\}$$

Dada $\underset{\sim}{\delta}$ una trayectoria admisible y $\delta \in \mathbb{R}^+$, decimos que la terna $(W; \underset{\sim}{\delta}; \delta_o)$ está adaptada al punto $\underline{x}$ y al morfismo $\underline{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$, donde ϕ_i son funciones holomorfas en W , tales que $(\phi_i = 0) = Y_i \cap W$, si y solo si

$$T^n_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi) \cap \dot{W} = \phi$$

si $0 < \delta \leqslant \delta_o$

3.2 Proposición (existencia de ternas adaptadas)

Sea W un entorno de x en X tal que $\bar{W} \cap Y = \{x\}$. Sea $\underset{\sim}{\delta}$ una trayectoria admisible. Existen entonces $W' \subset W$, entorno de x en X y $\delta_o > 0$ tal que $(W'; \underset{\sim}{\delta}; \delta_o)$ es una terna adaptada a $\underline{x}$ y a $\underline{\phi}$.

Demostración: Sea $\bar{W}'$ entorno de x , tal que $\bar{W}' \subset W$ y $\bar{W}'$ compacto. Sea $t \in \dot{W}'$. Luego, $t \notin Y$ y por lo tanto existe U_t entorno de t y $\delta_t > 0$, tal que si $0 < \delta \leqslant \delta_t$

$$U_t \cap T^n_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi) = \phi$$

Sea $\dot{W}' \subset \bigcup_{t \in \dot{W}'} U_t = \bigcup_{i=1}^{m} U_{t_i}$ y $\delta_o = \min \{\delta_{t_i} : 1 \leqslant i \leqslant m\}$.

Luego, si $0 < \delta \leqslant \delta_o$

$$T^n_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi) \cap W' = \phi$$

3.3 La función residuo fibrado esencial

Sea $\mathcal{H} = \{Y_1, \ldots Y_{p+1}\}$ una familia de hipersuperficies en X, $0 < p < n$, tal que $\dim (\cap\mathcal{H}(p+1)) > n-p$.

Llamemos

$$Y = V_e(\mathcal{H}(p+1))$$

$i : Y \to X$ la inmersión y $\pi : X \to T$ un morfismo de X en una variedad holomorfa regular T de dimensión $n - p$, tal que:

a) $\dim_C \pi^{-1}(t) = p$

b) $\dim_C (\pi . i)^{-1}(t) = 0$

para todo $t \in T$

Sea $\tilde{Y} = Y - Y_{p+1}$. Para cada $y \in \tilde{Y}$ consideremos $X_y = \pi^{-1}(\pi(y))$. Por b) $\mathcal{H}_y = \{Y_1 \cap X_y, \ldots, Y_p \cap X_y\}$ es una familia de hipersuperficies en X_y tal que

$$\dim_C V_e(\mathcal{H}_y) = 0$$

Para cada $\tilde{u} \in \Gamma_c(X; \mathcal{E}^p_X(*\cup\mathcal{H}))$, se define la función <u>residuo fibrado esencial</u>

$$\mathrm{res}_{\mathcal{H},\pi}[\tilde{u}] : Y \to C$$

como

$$\mathrm{res}_{\mathcal{H};\pi}[\tilde{u}](y) = \mathrm{res}_{[X_y];\mathcal{H}_y;y}(i_y^*(\tilde{u}))$$

(cf. [1],(1.8.6)(2))

donde

$$i_y : X_y \to X$$

y por lo tanto

$$i_y^*(\tilde{u}) \in \Gamma(X_y - Y_{p+1};\mathcal{E}^p_{X_y}(*\cup\mathcal{H}_y))$$

3.4 Teorema

En las condiciones precedentes,

a) $\mathrm{res}_{\mathcal{H};\pi}[\tilde{u}]$ es localmente semimeromorfa sobre Y, para cada $\tilde{u} \in \Gamma(X;\mathcal{E}^p_X(*\cup\mathcal{H}))$

b) suponiendo además, que $\tilde{u} \in \Gamma_c(X;{}^p_X(*\cup\mathcal{H}))$, para toda $\xi \in D^{2(n-p)}(T)$, se tiene

$$RP[\tilde{u} \wedge \pi^*(\xi)] = P_Y[\mathrm{res}_{\mathcal{H};}[\tilde{u}] \wedge \pi^*(\xi)]$$

donde la corriente de la derecha, designa el valor principal sobre Y.

Demostración: Como el resultado a probar es local podemos suponer que X es un abierto de C^n, T es un abierto de C^{n-p} y

$$\pi(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_{n-p})$$

Sean ϕ_i funciones holomorfas en X, $1 \leq i \leq p$, tales que

$$Y_i = V(\phi_i)$$

Llamemos

$$e = n-p$$

Sea $y_0 \in Y$, $y_0 = (t_1, \dots, t_e, \dots, t_n) = (t^e, t^p)$

En virtud de la proposición 1.7.2 (4) de [1], basta considerar formas diferenciales $\tilde{u}$ de bigrado (p,0). Por lo tanto, sea $a \in \mathcal{E}^0(X)$, $A = \{e+1, \dots, n\}$

$$\tilde{u} = \frac{a(x)\, dx_{e+1} \wedge \dots \wedge dx_n}{\phi_1 \dots \phi_{p+1}} \in \Gamma(X; \mathcal{E}^p_X(*U\mathcal{H}))$$

Para la demostración del teorema 3.4 -en el caso de intersección completa- , Coleff y Herrera en [1], prueban lo siguiente:

1. (cf. [1], proposición 4.2.3) Existe un polidisco centrado en t^e , $D^e \subset T$ y funciones η_1 y η_2 holomorfas en D^e , tales que $V^e = V(\eta_1 . \eta_2) \cap T$ es una hipersuperficie en $T \cap D^e$, $\pi(sY \cup (Y \cap Y_{p+1})) \subset V^e$ (sY = puntos singulares de Y en el entorno $D^e \times D^p$ de y)

y además:

a) Para cada $y^e \in T \cap D^e - V^e$ las bolas abiertas

$$B^p_\rho(y) = \{(y^e, t^p) : |t^p - y^p| < \rho\} \subset \{y^e\} \times D^p$$

de radios $\rho = \rho(y^e) = |\eta_1(y^e)|$, son dos a dos disjuntas.

b) Para cada $y \in [Y - \pi^{-1}(V^e)] \cap D$, el par

$$(X_{y^e} \cap B^p_\rho(y);\ \delta(y^e))$$

está adaptado al punto $\underline{y}$, y al morfismo

$$\phi_{y^e} = (\phi_1, \ldots, \phi_p)|_{X_{y^e}}$$

donde $\rho = \rho(y^e)$ y $\delta(y^e) = |n_2(y^e)|$.

c) Si $T_{\delta}(y) = T^p_{[X_{y^e}];\delta}(\phi_y) \cap B^p_\rho(y)$, donde $[X_{y^e}] = \pi^{-1}[y^e]$, para $y \in (Y - \pi^{-1}(V^e)) \cap D$, y $\delta \leq \delta(y^e)$, entonces

$$|T^p_{\delta}(y)| \cap Y_{p+1} = \phi$$

d) Existe $C > 0$, tal que

$$M_D(I[T_{\delta}(y)]) \leq C$$

para $y \in (Y - \pi^{-1}(V^e)) \cap D$, $\delta \leq \delta(y^e)$, donde $M_D(I[T_{\delta}(y)])$ es la masa de la corriente $I[T_{\delta}(y)]$ en $D = D^e \times D^p$ con respecto a la estructura riemanniana de C^n (cf. [4] y [5]).

2. En un polidisco $D = D^{n-p} \times D^p \subset X$ conveniente, se define para cada $y \in \tilde{Y} \cap D$, y para cada $r \in \mathbb{N}^p$, la función

$$k[r,A](y) = \operatorname{res}_{[x_y];\mathcal{H}_y;y}(i^*_y(\beta[r;y])dt_A)$$

donde $\beta[r;y]$ es una función meromorfa sobre $\{y^e\} \times D^p$ definida como sigue

$$\beta[r;y](t^p) = \beta[r;y](t_{e+1}, \ldots, t_n) = \frac{\prod_{j=e+1}^{n} (t_j - y_j)^{r_j}}{\prod_{j=1}^{p+1} \phi_j(y^e; t^p)}$$

y usando la proposición 4.1.3 (9) de [1] , resulta que existe $n(y) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathrm{res}_{\mathcal{H};\pi}[\tilde{u}](y) = \sum_{|r|<n(y)} \frac{1}{r!}\partial^r a(y).k[r;A](y)$$

para $y \in \tilde{Y} \cap D$.

3. Por último, se prueba que las funciones $k[r;A]$ son meromorfas sobre $Y \cap D$ y que existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $k[r;A] \equiv 0$ para $|r| \geq n_1$, y se obtiene la parte a) de la tesis, notando que

$$\mathrm{res}_{\mathcal{H}\ \pi}[\tilde{u}](y) = \sum_{|r|<n(y)} \frac{1}{r!}\partial^r a(y).k[r;A](y)$$

Seguiremos aquí el mismo esquema, probando 1), 2) y 3) en el caso que

$$\dim_{C} \cap \mathcal{H}(p+1) > n - p$$

<u>Demostración</u> <u>de</u> <u>1</u>): Sean $t' = (t_j : j \in E)$, $E = (e+1,\dots,p)$

$t'' = (t_j : j \in A)$, $A = (1,\dots,e)$

Sea $D = D^e \times D^p$ un polidisco centrado en y tal que:

i) $\{0^e\} \times D^p \cap Y = \{y_0\}$

ii) $\pi_{|Y \cap D} : Y \cap D \to C^e \cap D^e = D^e$, es un morfismo propio y finito.

Restringiendo D^e si fuera necesario, pueden encontrarse polinomios distinguidos con coeficientes holomorfos en $\bar{D}^e$ (compacto)

$$\left.\begin{array}{l} H_j(t';t_j) \\ gr(H_j) = s_j \end{array}\right. \qquad j \in A$$

sin componentes irreducibles múltiples, tales que si

$$M = \{t \in D : H_j(t';t_j) = 0 \ , \ j \in A\}$$

entonces

$$Y \cap D \subset M$$

de manera que la proyección

$$\pi : M \to D^e$$

es propia, finita y abierta.

Sea Δ_j el discriminante de H_j , $\Delta = \prod_{j \in A} \Delta_j$ es entonces una función holomorfa en $\bar{D}^e$.

Sea

$$S' = V(\Delta) \subset D^e$$

$$S = D \cap \pi^{-1}(S')$$

y Ω un abierto simplemente conexo, $\Omega \subset D^e - S'$; se tienen en consecuencia, las siguientes descomposiciones:

$$H_j(t';t_j) = \prod_{\alpha_j = 1}^{s_j} (t_j - g_{\alpha_j}(t'))$$

$$\Delta_j(t') = \prod_{\alpha_j \neq \beta_j} (g_{\alpha_j}(t') - g_{\beta_j}(t'))^2$$

donde $t' \in \Omega$, g_{α_j} son funciones holomorfas en Ω , $j \in A$.

Llamemos

$$M_\Omega = M \cap (\Omega \times D^p)$$

$$Y_\Omega = Y \cap (\Omega \times D^p)$$

y considerando la descomposición

$$M_\Omega = \cup\{ \Gamma_{\underset{\sim}{\alpha}} : \underset{\sim}{\alpha} = \alpha_j \text{ con } 1 \leqslant \alpha_j \leqslant s_j \ , \ j \in A\}$$

de M_Ω en componentes conexas, donde $\Gamma_{\underset{\sim}{\alpha}} = \text{graf}\ (g_{\underset{\sim}{\alpha}})$

$$g_{\underset{\sim}{\alpha}} = (g_{\alpha_j} : j \in A) : \Omega \to C$$

Y_Ω es por lo tanto, la unión de algunas componentes irreducibles de $\Gamma_{\underset{\sim}{\alpha}}$.

<u>3.4.1</u> <u>Lema</u>

Existen constantes positivas a,b,c tales que para cada $t' \in D^e - S'$ se tiene:

i) Las bolas abiertas

$$B^p_\rho = \{(t',v") : |v" - t"| < \rho\} \subset \{t'\} \times D^p$$

centradas en $t = (t',t") \in M(t') = M \cap \{t'\} \times D^p$, y de radio $\rho = a.|\Delta(t')|^{1/2}$ son dos a dos disjuntas.

ii) Para cada $y = (y',y") \in Y - S$ la terna

$$(X_{y'} \cap B^p_\rho(y) \ ; \ \mathcal{L} \ ; \ \delta_o(y'))$$

está adaptada en $X_{y'} = \pi^{-1}(y')$, al punto $\underline{y}$, y al morfismo

$$\phi_{y'} = (\phi_1, \ldots, \phi_p)|_{X_{y'}}$$

donde

$$\rho = a.|\Delta(y')|^{1/2}$$

$$\delta_o(y') = b.|\Delta(y')|^c$$

<u>Demostración del lema</u>: Para i), cf. [1] , lema 4.2.4 (i) .

Para ii) se necesitan los siguientes lemas:

<u>3.4.1.1 Lema</u>

Sea $d_f(t,M)$ la distancia euclideana del punto $(t',t") =$ $= t \in D$ al conjunto

$$M_t = M \cap \{t'\} \times D^p$$

y $d(t,M)$ la distancia de t a M. Existen entonces constantes positivas b_1 y c_1 tales que:

$$d_f(t,M) \leq b_1 d(t,M)^{c_1} \quad , \quad t \in D.$$

<u>Demostración</u>: cf. [1] lema 4.2.5 .

J. Solomín demuestra en [6] el siguiente resultado:

dada $\tilde{u} = \frac{u}{\phi} \in \Gamma(X; \mathcal{E}_X^p(*\cup\mathcal{H}))$, existe $q \in \mathbb{N}$, tal que si

$$\underset{\sim}{\delta} : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^p_>$$

es una aplicación analítica de la forma

$$\underset{\sim}{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_p) \tag{3.1.1}$$

tal que para cada $t \in (0,1)$ es $\delta_i(t) = t^{n_i}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq p$, con

$$\frac{n_i}{n_{i+1}} > q$$

entonces:

1) $RP[\tilde{u} \wedge .] = \lim\limits_{t \to 0} I[D^{p+1}_{\delta(t)}(\phi)](\tilde{u} \wedge .)$

2) El entero q, depende únicamente del soporte y de la polaridad de $\tilde{u}$ en el siguiente sentido:

Si $\tilde{a} = \frac{a}{\phi} \in \Gamma(X; \mathcal{E}_X^p(*\cup\mathcal{H}))$ es tal, que $sop(a) \subset sop(u)$, entonces

$$RP[\tilde{a} \wedge .] = \lim_{t \to 0} I[D^{p+1}_{\delta(t)}(\phi)](\tilde{a} \wedge .)$$

Luego, considerando esa trayectoria $\underset{\sim}{\delta}$, definimos:

$$T = \bigcup_{0<\delta<\varepsilon_1} T^p_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi) \cap D$$

con $\varepsilon_1 > 0$, tal que $\dim_R T^p_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi) \leq 2n - p$, para todo $0 < \delta < \varepsilon_1$ y se prueba:

3.4.1.2 Lema

Existen constantes positivas α y β tal que para todo $x \in T$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$d(x;Y \cap D) \leq \alpha\, d(x;F)^{\beta}$$

donde $F = \bigcap_{i=1}^{p}(\phi_i = 0) \cap D.$

Demostración: Sea $\Lambda = \{\underset{\sim}{\delta}(\delta) : 0 < \delta < \varepsilon_1\}$

$$|\phi| = (|\phi_1|, \ldots, |\phi_p|)$$

Entonces,

$$T = |\phi|^{-1}(\Lambda)$$

y es en consecuencia un conjunto semianalítico. Como F es analítico, resultan F y $\overline{T}$ regularmente separados por su intersección (cf. [7]). El lema se sigue de notar que

$$\overline{T} \cap F = Y.$$

Demostración de 3.4.1 (ii): Sea $|\psi| = \sum_{i=1}^{p} |\phi_i|^2$. Por la desigualdad de Lojasiewicz (cf. [8]), existen constantes b_4 , $c_4 > 0$, tales que

$$|\psi(t)| \geq b_4 . d(t,F)^{c_4} \qquad , \quad t \in D .$$

Por otra parte, por lema 3.4.1.2 , se tiene:

$|\psi(t)| \geq b_4 . d(t,F)^{c_4} \geq b_4 . r . d(t,Y \quad D)^{c_4 . s} \geq b_4 . r . d(t,M)^{c_4 . s}$, donde

$t \in \overline{T}$, $s = \frac{1}{\beta}$, $r = \alpha^{-s}$. En virtud del lema 3.4.1.1 se sigue:

$$(t) \quad b_5 . d_f (t,M)^{c_5} \qquad , \quad t \in \overline{T} \qquad (3.1.2)$$

Como $\underset{\sim}{\delta}$ es una trayectoria del tipo definido en (3.1.1), existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $\delta_i(\delta) < \delta$ si $0 < \delta < \varepsilon_2$, $1 \leq i \leq p$. Sea $\varepsilon = \text{mín}\{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}$. Podemos asegurar que existe $k > 0$, tal que

$k < a$, y además

$$[k . |\Delta(t')|^{1/2}]^{c_5/2} . \frac{b_5^{1/2}}{p^{1/2}} < \varepsilon$$

para todo $t' \in \overline{D}$. Definimos entonces:

$$\delta_0 (t') = b . |\Delta(t')|^c \qquad , \quad \text{donde}$$

$$b < \frac{k^{c_5/2} . b_5^{1/2}}{p^{1/2}}$$

y $\qquad c = \dfrac{c_s}{4}$

Veremos ahora que si $\delta < \delta_0(y')$, entonces:

$$\dot{B}^p_\rho(y) \cap T^p_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi) = \phi$$

o sea, que la terna

$$(B^p_\rho(y) \cap X_{y'} \; ; \; \underset{\sim}{\delta} \; ; \delta_0(y'))$$

está adaptada en X, al punto $\underline{y}$, y al morfismo:

$$\phi_{y'} = (\phi_1, \ldots, \phi_p)\Big|_{X_{y'}}$$

Supongamos que para algún $\delta < \delta_0(y')$ es

$$t = (y', t'') \in \dot{B}^p_\rho(y) \cap T^p_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi)$$

Entonces $|t'' - y''| = \rho = a.|\Delta(y')|^{1/2}$. Si $t \in T^p_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(\phi)$ con $\delta < \delta_0(y')$, entonces

$$|\phi_i(y', t'')| = \delta_i(\delta)$$

Luego

$$|\psi(t)| = \sum_{i=1}^{p} |\phi_i(t)| = \sum_{i=1}^{p} \delta_i^2(\delta) \leq \quad \text{(puesto que } \delta_0(y') < \varepsilon\text{)}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} \delta^2 \leq p.\delta_0^2(y') < p.(\frac{k^{c_s}.b_s}{p} . |\Delta(y')|^{c_s/2}) < \text{(ya que } k < a\text{)}$$

$< b_s . a^{c_s} . |\Delta(y')|^{c_s/2}$. Entonces si llamamos:

$$b_4 = u \quad , \quad c_4 = v \quad , \quad b_5 = w \quad y \quad c_5 = \tilde{n} \quad ,$$

se tiene:

$$\frac{1}{w} . |\psi(t)|^{1/\tilde{n}} < a. |\Delta(y')|^{1/2}.$$

Luego, en virtud de (3.1.2) resulta:

$$d_f(t,M) < a. |\Delta(y')|^{1/2} = \rho$$

lo que es imposible, ya que $d_f(t,M) = |t''-y''| = \rho$. Esto concluye la demostración de las partes a) y b) de 1.

Para c), sean:

$$E = \pi([sY \cup (Y \cap Y_{p+1})] \cap D) \cup S'$$

$$Y = V_e(\mathcal{H}(p+1)) = V(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \quad ,$$ donde las funciones α_i son analíticas sobre D . Existe entonces una función analítica sobre D^e , digamos ζ' , tal que

$$E \subset V(\zeta')$$

Sea

$$\zeta = \zeta' \circ \pi$$

Como ζ se anula sobre $D \cap Y \cap Y_{p+1}$, restringiendo eventualmente D , por el teorema de los ceros de Hilbert podemos afirmar que existen funciones analíticas sobre D ,

$$h_i \quad , \quad 1 < i < q$$

y h , tales que

$|h_i| < G$, $|h| < G$ en D para alguna constante $G > 0$ y donde

$$\zeta^m = h_1 . \alpha_1 + \ldots + h_q . \alpha_q + h . \phi_{p+1}$$

Para cada $t' \in D^c - V(\zeta')$, sea $\delta_i = \delta_0(t')$, tal que

$$0 < \delta < \frac{u}{p} . \left(\frac{|\zeta|^m}{2Gk'\alpha}\right)^{v/\beta} < 1$$

donde $k' > 0$, es tal que $k'.d(x,Y) \geq \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|$. Luego

$$\sum_{i=1}^{q} |h_i . \alpha_i| \leq G \sum_{i=1}^{q} |\alpha_i| \leq G.k'.d(x,Y) \leq G.k'.\alpha.d(x,F)^{\beta} \leq$$

(por lema 3.4.1.2 , para $x \in T$)

$$\leq \frac{G.k'.\alpha}{u^{\beta/v}} \left(\sum_{i=1}^{p} |\phi_i|^2 \right)^{\beta/v} < \frac{G.k'.\alpha}{u^{\beta/v}} \left(\sum_{i=1}^{p} \delta_i \right)^{\beta/v} \leq$$

$$\leq \frac{G.k'.\alpha}{u^{\beta/v}} \left(p. \left(\frac{u}{p} . \left(\frac{|\zeta|^m}{2Gk'\alpha}\right)^{v/\beta}\right)\right)^{\beta/v} < \frac{|\zeta|^m}{2}$$

Por otro lado

$$G.|\phi_{p+1}| \geq |h.\phi_{p+1}| \geq \frac{1}{2}|\zeta^m|$$

(usando que $|\zeta^m| \leq \frac{1}{2}|\zeta^m| + |h| . |\phi_{p+1}|$), todas las desigualdades válidas en $D \cap |T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)|$.

Luego, tomando

$$\delta(y^e) = \frac{u}{p} \left(\frac{|\zeta(y)|^m}{2Gk'.\alpha}\right)^{v/\beta}$$

se obtiene

$$T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(y) \cap Y_{p+1} = \phi \quad , \text{ si } \delta < \delta(y^e).$$

Es claro además, que podemos suponer que en D^e tanto $\delta(y^e)$ como $b.\Delta^c$ son menores o iguales que 1, y por lo tanto

$\eta_2 = \delta(y^e).b.\Delta^c$, satisface las condiciones del lema.

Para la demostración de d) cf. [1], pag. 179.

<u>Demostración</u> <u>de</u> <u>2</u>: (cf. [1], teorema 4.2.2) notando que las funciones

$$\beta[r;y](t^p) = \prod_{j=e+1}^{n} (t_j - y_j)^{r_j} \left[\prod_{j=1}^{p+1} \phi_j(y^e;t^p)\right]^{-1}$$

son meromorfas sobre $\tilde{Y} \cap D$, puesto que su denominador no es idénticamente nulo en $\tilde{Y} \cap D$. En efecto, si $y = (y^e, y^p) \in \tilde{Y} \cap D$, caben dos posibilidades:

a) $\pi^{-1}(y^e) \subset V(\phi_i)$ para algún $1 \leq i \leq p$

entonces

$$\dim_C \pi^{-1}(y^e) = p$$
$$\dim_C V_e(\mathcal{H}(p+1)) = n - p \quad , \quad V_e(\mathcal{H}(p+1)) = Y \subset V(\phi_i)$$
$$\dim_C V(\phi_i) = n - 1 \quad ,$$

tendríamos necesariamente

$$\dim_C [\pi^{-1}(y^e) \cap Y] > 0$$

lo que contradice la hipótesis del teorema.

Podemos por tanto suponer que sucede

b) $\pi^{-1}(y^e) \not\subset V(\phi_i)$, $1 \leq i \leq p$

y en este caso,

$$\pi^{-1}(y^e) - \bigcup_{i=1}^{p} V(\phi_i)$$

es un abierto denso en $\pi^{-1}(y^e)$.

Demostración de 3: (cf. [1], 4.2.6) notando que la trayectoria semianalítica $\underset{\sim}{\delta}$ elegida para el lema 3.4.1.2 , puede no ser la adecuada en cada fibra, para el cálculo de la función $\mathrm{res}_{\mathcal{H},\pi}[\tilde{u}]$. Sin embargo, para cada $y = (y^e ; y^p) \in Y$, como la terna

$$(B^p_\rho(y) \cap D \, ; \underset{\sim}{\delta} \, ; \delta_0(y^e))$$

está adaptada, entonces la función

$$h[\tilde{\omega}] : \tilde{Y} \to C \quad , \quad h[\tilde{\omega}](y) = I[D \cap T_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(y)][i^*(\tilde{\omega})]$$

con $\delta < \delta_0(y^e)$, está definida y es localmente semimeromorfa, para cada $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\phi} \in \Gamma(X; \mathcal{E}^p_X(* \cup \mathcal{H}))$ tal que $\mathrm{sop}(\omega) \subset \mathrm{sop}(u)$. Además, si $\tilde{\omega}$ es una forma meromorfa,

$$h[\tilde{\omega}](y) = \mathrm{res}_{\mathcal{H},\pi}[\tilde{\omega}](y) \tag{3.1.3}$$

ya que:

a) si $\underset{\sim}{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ es una trayectoria admisible cualquiera,

$$\mathrm{res}_{\mathcal{H},\pi}[\tilde{\omega}](y) = \lim_{\varepsilon \to 0} I[D \cap T^p_{\underset{\sim}{\varepsilon}(\varepsilon)}(y)][i^*_y(\tilde{\omega})] =$$

$$= I[D \cap T^p_{\underset{\sim}{\varepsilon}(\varepsilon_o)}(\phi)](i^*_y(\tilde{\omega}))$$

para $\varepsilon_o > 0$ conveniente.

b) si ε_o es suficientemente pequeño

$$T_{\underset{\sim}{\delta}(\delta)}(y) \cap D \qquad \text{y} \qquad T_{\underset{\sim}{\varepsilon}(\varepsilon_o)}(y) \cap D$$

son homólogos.

En efecto, si $\underset{\sim}{\delta}(\delta) = (\delta^{n_1}, \ldots, \delta^{n_p})$ y

$\underset{\sim}{\varepsilon}(\delta) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$

definimos

$$\sigma^1 : [0,1] \times (0,1) \to R^p_>$$

como

$$\sigma^1(t,\delta) = (\sigma^1_1, \ldots, \sigma^1_p)$$

$$\sigma_1^1(t,\delta) = t.\delta_1(\delta) + (1-t).\varepsilon_1(\delta)$$

$$\sigma_j^1(t,\delta) = \delta_j(\delta) \qquad , \quad 2 \leq j \leq p$$

y por recurrencia

$$\sigma^k(t,\delta) = (\sigma_1^k, \ldots, \sigma_p^k)$$

como

$$\sigma_k^k(t,\delta) = t.\sigma_k^{k-1}(\delta) + (1-t).\varepsilon_k(\delta)$$
$$\sigma_i^k(t,\delta) = \sigma_i^{k-1}(t,\delta) \qquad , \quad i \neq k \quad , \quad 1 \leq i \leq p$$

Notar que

$$\sigma^1(1,\delta) = (\delta_1(\delta), \ldots, \delta_p(\delta))$$
$$\sigma^p(0,\delta) = (\varepsilon_1(\delta), \ldots, \varepsilon_p(\delta))$$

En virtud de (3.1.3), basta encontrar una forma meromorfa $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\phi}$ tal que

$$res_{\mathcal{H},\pi}[\tilde{\omega}] = res_{\mathcal{H},\pi}[\tilde{u}]$$

en $\tilde{Y} \cap D$, lo que es posible, razonando como en [1], pág.162 y 184.

<u>Demostración de la parte b) de 3.4</u> : (cf. [1], 4.3.1).

<u>3.5 Teorema</u>

Sea $\mathcal{H} = \{Y_1, \ldots, Y_{p+1}\}$ una familia de hipersuperficies en X . Sea $\tilde{\lambda} \in \Gamma(X;\Omega_X^{\cdot -p}(*\cup\mathcal{H}))$. Entonces, el soporte de $R_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}]$ (resp.: de $RP_{\mathcal{H}}[\tilde{\lambda}]$) es la unión de algunas componentes irreducibles de $V_e(\mathcal{H})$ (resp.: de $\tilde{V}_e(\mathcal{H})$) .

Demostración: Análoga a la de [1],4.4.3 usando el teorema 3.4 .

3.6 Lema

Sea U un abierto de C^n , $\phi_1,\ldots,\phi_p$ funciones holomorfas en U tales que

$$\dim_C V(\phi_{i_1},\ldots,\phi_{i_k}) = n - k \qquad (3.6.1)$$

donde $\{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,\ldots,p\}$.

Sea $\underset{\sim}{\delta} = (\delta_1(\delta),\ldots,\delta_p(\delta))$ una trayectoria admisible y τ una permutación de $\{i_1,\ldots,i_k\}$. Entonces, dado W un abierto relativamente compacto en U , existe $\delta_o > 0$ tal que

a) los tubos $T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi) \cap W$ y $T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi^\tau) \cap W$ están definidos para todo $0 < \delta < \delta_o$

b) $T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi) \cap W \approx sg(\tau).T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi^\tau) \cap W$

Demostración: La parte a) es inmediata en vista del teorema 1.7.2 de [1] . Sean $I = \{i_1,\ldots,i_p\}$, $J = \{1,\ldots,p\} - I$

$$\phi' = \phi_I = (\phi_{i_1},\ldots,\phi_{i_k}) \quad , \quad \underset{\sim}{\delta}' = \underset{\sim}{\delta}_I$$

$$\phi'' = \phi_J \quad , \quad \underset{\sim}{\delta}'' = \underset{\sim}{\delta}_J$$

Siempre puede suponerse, gracias a (3.6.1) que:

$$\dim_{\mathbb{R}} (T_\delta(\phi')) < 2n - k$$

para $0 < \delta' < \delta_o$ (δ' no necesariamente admisible, (cf. [1]))

Luego

$$T^k_{\underset{\sim}{\delta}'}(\phi') \approx sg(\tau) .\ T^k_{\underset{\sim}{\delta}'}(\phi'^{\tau})$$

Por lo tanto, salvo un signo es

$$T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi) = \pm T^k_{\underset{\sim}{\delta}'}(\phi') .\ T^{p-k}_{\underset{\sim}{\delta}''}(\phi'') \approx \pm\ sg(\tau).T^k_{\underset{\sim}{\delta}'}(\phi'^{\tau}).T^{p-k}_{\underset{\sim}{\delta}''}(\phi'')$$

o sea

$$T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi) \approx sg(\tau).T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi^{\tau})$$

lo que demuestra el lema.

3.7 Teorema

Sea $\mathcal{H} = \{Y_1,\ldots,Y_p\}$ una familia de hipersuperficies en X tales que

$$\dim_{\mathbb{C}}\{Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_k}\} = n - k$$

donde

$$\{i_1,\ldots, i_p\} \subset \{1,\ldots,p\}$$

Sea $W \subset X$, un abierto de manera que existan ecuaciones

$$(\phi_i = 0) = Y_i \cap W \qquad , \qquad 1 \leq i \leq p$$

donde las funciones ϕ_i son holomorfas en W. Sea además τ una permutación de $\{i_1, \ldots, i_k\}$. Entonces

a) Para cada $\tilde{\alpha} \in \Gamma_c(W; \mathcal{E}_X^{2n-p}(* \cup \mathcal{H}))$

$$R^p[\tilde{\alpha}] = \lim_{\delta \to 0} I\,[T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)](\tilde{\alpha}) = sg(\tau).\lim_{\delta \to 0} I\,[T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi^\tau)](\tilde{\alpha})$$

b) Para cada $\tilde{\beta} \in \Gamma_c(W; \mathcal{E}_X^{2n-p+1}(* \cup \mathcal{H}))$,

si $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, p-1\}$

$$R^{p-1}P^p[\tilde{\beta}] = \lim_{\delta \to 0} I\,[D^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)](\tilde{\beta}) = sg(\tau).\lim_{\delta \to 0} I\,[D^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi^\tau)](\tilde{\beta})$$

Demostración: a) Como la propiedad es local, es suficiente reducirse al caso, en que W es un abierto de C^n. Elijamos entonces un sistema de coordenadas conveniente $z = (z_1, \ldots, z_n)$ centrado en $x_o \in Y = V_e(\mathcal{H})$ que verifica

$$\dim_{x_o} \pi_E^{-1}(0) \cap Y = 0$$

para todo subconjunto $E \in \Lambda(n, n-p)$, donde $\pi_E : C^n \to C^E$ es la proyección $z = (z_1, \ldots, z_n) \to z_E$ (cf. [9], pag. 311 y [10], pag. 201).

En virtud de la fórmula 3.4 (b), es posible restringirse a considerar solamente el caso puntual , o sea $p = n$.

Sea entonces $\tilde{\alpha} \in \Gamma\ (W; \mathcal{E}^n_X(* \cup \mathcal{H}))$
de manera que

$$\tilde{\alpha} = \frac{a(z)\ dz_1 \ldots dz_n}{f}$$

donde $a(z)$ es una función de $D^0(W)$, $f(z)$ holomorfa en W y $V(f) \cap W \subset \cup\mathcal{H} \cap W$.

Haciendo el desarrollo en serie de Taylor de $a(z)$ alrededor de x_0 y usando el lema 4.3.1 de [1] , es posible calcular $R_\phi[\tilde{\alpha}]$ como

$$R_\phi[\tilde{\alpha}] = \lim_{\delta \to 0} I[T^n_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)](\tilde{\alpha}) =$$

$$= I[T^n_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi)]\left(\frac{P\ dz_1 \ldots dz_n}{f}\right)$$

donde P es un polinomio holomorfo en W y δ_0 es suficientemente pequeño (cf. [1], 4.2.2 (ii), 3.5.3 y 3.5.4). Pero, en virtud del lema 3.6 , es posible encontrar una cadena semianalítica S de manera que

$$[T^n_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi) - sg(\tau).T^n_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi^\tau)] = b_\bullet S$$

Observando ahora que $d\left(\frac{P\ dz_1 \ldots dz_n}{f}\right) = 0$

y en virtud del teorema de Stokes (cf. [1], (1.6.8)) se tiene

$$I\,[T^n_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi) - sg(\tau).T^n_{\underset{\sim}{\delta}}(\phi^{\tau})]\left(\frac{Pdz_1 \ldots dz_n}{f}\right) = I[b_{\bullet}S]\left(\frac{Pdz_1 \ldots dz_n}{f}\right) = 0$$

La demostración de b) es similar.

Luego del teorema 3.7 , estamos en condiciones de contestar el problema planteado por Coleff-Herrera en [1] , (1.7.8).

3.8 Teorema

Sea $\{Y_1, \ldots, Y_p\} = \mathcal{H}$ una familia de hipersuperficies en X. Sea

$$\omega \in \Gamma(X; \mathcal{E}_X^{\cdot -p}(*\cup\mathcal{H}(j)) \quad , \quad 1 < j < p$$

Entonces

a) $R_{\mathcal{H}}[\tilde{\omega}] = 0$

b) $RP_{\mathcal{H}}[\tilde{\omega}] = 0$

Demostración: Como el problema es local, basta considerar W un abierto de C^n . Sea

$$\tilde{\omega} = \frac{a(z)\ dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge d\omega_M}{f}$$

donde $a(z) \in D^o(W)$, f una función holomorfa en W y

$$|A| + |B| + |M| \leqslant 2n - p$$

y sean ϕ_i funciones holomorfas en W que dan ecuaciones locales de Y_i , $1 \leq i \leq p$. Por hipótesis es

$$\dim_{\mathbb{C}} ((f=0) \cap V(\phi_j)) \quad n-2$$

Luego, por teorema 2.12 es

$$R_{\phi}[\tilde{\omega}] = R_{\phi^e}[\tilde{\omega}] \tag{3.8.1}$$

Como ϕ_i^e y ϕ_j^e tienen intersección completa , podemos considerar τ la permutación de $\{1,j\}$ distinta de la identidad. Luego, en virtud del teorema 3.7 , se sigue:

$$R_{\phi^e}[\tilde{\omega}] = R_{(\phi^e)^\tau}[\tilde{\omega}]$$

Ahora, gracias a [1], 1.7.5 (3) se sabe que

$$R_{(\phi^e)^\tau}[\tilde{\omega}] = 0 \tag{3.8.2}$$

Por último, de (3.8.1) y (3.8.2) se sigue la parte a) de la tesis.

La demostración de la parte b) es análoga.

REFERENCIAS

1 .- COLEFF, N. - HERRERA, M. , Les Courants Résiduels Associés a une forme méromorphe, Springer Lecture Notes, Vol.633,1978.

2 .- NARASIMHAN, R. , Introduction to the theory of Analytic Spaces, Springer Lecture Notes, Vol. 25 , 1966.

3 .- HERRERA, M. - LIEBERMAN, D. , Residues and principal values on complex spaces. Math. Annalen 194, 259-294.

4 .- FEDERER, H. , Geometric Measure Theory, Springer Verlag, New York, 1969.

5 .- KING, J.R. , The currents defined by analytic varieties. Acta Math. 127, (1971) , 185-220.

6 .- SOLOMIN, J. , Tesis doctoral, Universidad de La Plata, 1977.

7 .- MALGRANGE, B. , 1966 , Ideals of differentiable functions , Tata Institute of Fundamental Research, Bombay and Oxford University Press.

8 .- LOJASIEWICZ, S. , Sur le probleme de la divisiốn. Studia Math. t. 18 , 1959, 87-136.

9 .- THIE, P. , The Lelong Number of a Point of a Complex Analytic Set. Math. Ann. 172 ,(1967) , 269-312.

10.- KING, J.R. , Global residues and intersections on a Complex Manifold. Preprint.

11.- HERRERA, M. , Integration on a Semianalytic Set . Bull. Soc. Math. France 94, 141-180, 1966.

12.- HERRERA, M. , Les courants residus multiples. Journées Geom. Analy., 1972, Poitiers, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 38 (1974) , 27-30.

ADRIAN PAENZA

M. HERRERA