La propiedad SAP en cuerpos formalmente reales y su aplicación al estudio de los cuerpos Pitagóricos

Piscoya H., Francisco M.

1978

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

" LA PROPIEDAD SAP EN CUERPOS FORMALMENTE REALES Y SU APLICACION AL ESTUDIO DE LOS CUERPOS PITAGORICOS "

TESIS

Presentada por: Lic. Francisco M. Piscoya H.
Para optar el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

- 1,978 -

El presente trabajo ha sido realizado durante el período de beca del Centro Regional de Matemática para América Latina y beca P.R.A. en el Proyecto Multinacional de Matemática en Argentina dependiente del Programa de Desarrollo Científico y Tecnológico de la O.E.A.

A mis padres , mi esposa y mis hijos

INTRODUCCION

El presente trabajo tiene su origen en la memoria de Elman y Lam (8) de 1,972 "Quadratic Forms Over Formally Real Fields and Pythagoreans Fields", en la quo se realiza un estudio por medio de formas de Pfister de los cuerpos conmutativos verificando la propiedad de aproximación fuerte (SAP). El principal resultado obtenido es que sobre un cuerpo pitagórico real son equivalentes las propiedades SAP, WAP y HIP tal como son definidas en el capitulo II. Posteriormente, por introducción del concepto de forma cuadrática establemente isótropa, se ha demostrado que debilitando convenientemente HIP , las propiedades WAP, SAP y HIP(débil) son equivalentes sobre un cuerpo real, recobrandose los resultados de (8) en el caso pitagórico, puede .. verse (16), (17) y (9).

La versión presentada en (9) por Rosenberg y Ware, realizada en 1,976, es notablemente mas simplificada que las anteriores y depende unicamente de resultados básicos sobre el anillo de Witt de formas cuadráticas del cuerpo considerado. Por este motivo,hemos tomado como base (9) para extender las equivalencias de SAP, WAP y HIP(débil) a otras propiedades equivalentes y que caracterizan por medio de formas cuadráticas un cuerpo formalmente real verificando SAP, obteniendose una versión estable de los principales resultados de (8), los mismos que hemos condensado en el teorema central que constituye el capítulo II de este trabajo.

En el Capítulo III hemos construido algunos ejemplos de cuerpos verificando SAP, mostramos que la clase de estos cuerpos es bastante amplia e importante. El hecho de que toda extensión alge - braica del cuerpo racional Q(dentro de una clausura algebraica) verifique SAP nos ha llevado a realizar un estudio de la cápsula pitagórica de Q, principalmente en lo relativo a sus extensiones, información que hemos resumido en el teorema 2 de Cap. III. Lateralmente hemos tocado la caracterización de los cuerpos superpitagóricos y pitagóricos hereditarios , encontrando que en general estos últimos constituyen una subfamilia de los cuerpos superpitagóricos y por tanto .. dentro de una clausura algebraica de Q son pitagóricos con a lo más dos órdenes.

Por otro lado, también como una aplicación de los conceptos establecidos en el Cap. II, tratamos el problema de determinar condiciones para que dada una extensión de cuerpos K/F, la hipótesis de que W(K/F) = 0 implique que las formas anisótropas so - bre F permanescan anisótropas sobre K. Aplicamos algunos de los resultados obtenidos para contestar negativamente una pregunta abierta formulada por A. Prestel en 1,975 (4), en el siguiente sentido: Si K/F extensión algebraica finita, ¿ K satisface SAP implica nece - sariamente que F satisface SAP ? . Establecemos también algunos criterios en los que la pregunta de Prestel tiene respuesta afirmativa.

En el capítulo I hemos considerado los conceptos más básicos que son usados a lo largo del desarrollo del tema, asi como se establecen las notaciones .

Finalmente, expreso mi sincero agradecimiento al Profesor Dr. Enzo R. Gentile, quien ha dirigido el pte. trabajo, por su aliento y ayuda constante en la elaboración del mismo.

Bs. Aires Mayo de 1978 Mario Piscoya

C A P I T U L O I

NOTACIONES Y RESULTADOS BASICOS

1.1 .- SOBRE FORMAS CUADRATICAS: Consideraremos cuerpos conmutativos cuya caracteristica es diferente de dos, LLamaremos un espacio cuadrático sobre el cuerpo F a un F-espacio vectorial V de dimensión finita, provisto de una forma bilineal $B: V \times V \longrightarrow F$, no degenerada. Por la forma cuadrática q asociada al espacio cuadrático (V,B) entendemos la aplicación $q: V \longrightarrow F$ tal que $q(x) = B(x,x)$. En general identificamos los espacios cuadráticos con sus formas cuadráticas. Decimos que dos espacios cuadráticos sobre F son isométricos si existe entre ellos un isomorfismo lineal que preserva las formas cuadráticas respectivas. La isométria de espacios cuadraticos la denotamos $\cong$.

Sea $\langle a \rangle$ denotando el espacio cuadrático de dimensión uno sobre F, esto es, $V = F.e$ donde $a = B(e,e)$ con $a \in \dot{F} = F - \{0\}$. Es un hecho fundamental que todo espacio cuadrático V sobre F es isométrico a una suma ortogonal $\langle a_1 \rangle \perp, \dots, \perp \langle a_n \rangle$ donde n es la dimensión de V. En esta representación V es denotado $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

Una forma cuadrática q es llamada isótropa si existe un vector $v \neq 0$ en V tal que $q(v)=0$, en caso contrario se dice que q es anisótropa. Toda forma binaria isótropa es isométrica a $\langle 1, -1 \rangle$ que es llamado plano hiperbólico y lo denotamos con H. Mas generalmente un espacio hiperbólico es definido como una suma ortogonal de planos hiperbólicos.

Toda forma cuadrática q puede descomponerse en $q_a \perp q_h$ donde q_a es anisótropa y q_h es hiperbólico (teorema de descomposición de Witt). Para un cuerpo F, $W(F)$ denotará el anillo de clases de isometrías de formas cuadráticas anisótropas sobre F, donde la operación aditiva en $W(F)$ es la suma ortogonal módulo $Z.H$ y el producto en $W(F)$ es el producto tensorial de formas cuadráticas. Dos formas cuadráticas q_1 y q_2 representan el mismo elemento en $W(F)$ si y solo si tienen la misma parte anisótropa (bajo isometría).

Dado $a_1, \dots, a_n \in \dot{F}$ denotaremos con $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ la forma cuadrática producto tensorial de las formas $\langle 1, a_i \rangle$ $i=1,\dots,n$ la que es de dimensión 2^n y nos referimos a ella como una n-forma de Pfister.

Para q forma cuadrática sobre F denotamos con $D_F(q)$ el conjunto de elementos de $\dot{F}$ representados por q. Si f es una forma de Pfister, claramente representa 1, entonces f se puede escribir diagonalmente como $f \cong \langle 1 \rangle \perp f'$, f' es llamada la parte pura de f.

Supongamos que L/K es una extensión de cuerpos, todo espacio cuadrático q sobre K determina un espacio cuadrático q_L sobre L (por extensión de escalares), esto es, $q_L = L \otimes_K q$. Ello determina un homomorfismo $r: W(K) \longrightarrow W(L)$ (inducido por la inclusión de K en L), tal que $r(q) = q_L$. Observar que si q es forma cuadrática de dimensión n sobre K entonces q_L es de dimensión n sobre L . El núcleo de esta aplicación lo denotaremos como es usual con $W(L/K)$ y tiene particular importancia como lo veremos en el cap. III del pte. trabajo. Todos estos conceptos básicos de formas cuadráticas pueden ser consultados en (1) .

Introducimos el concepto de formas de Pfister ligadas, que aparece en (2). Sean f_1 , f_2 n-formas de Pfister; decimos que f_1 y f_2 estan ligadas si y solo si existen $a, b \in \dot{F}$ y g (n-1)-forma de Pfister sobre F tales que $f_1 \cong g.\langle 1, a \rangle$ y $f_2 = g.\langle 1, b \rangle$. Decimos que dos n-formas de Pfister f_1, f_2 sobre F estan establemente ligadas si y solo si existe un $m \in N$= conjunto de los enteros positivos, tal que $2^m f_1$, $2^n f_2$ son ligadas .

Un cuerpo F se define formalmente real si la forma cuadrática $n\langle 1\rangle = \langle 1\rangle \perp \ldots \perp \langle 1\rangle$ (n veces) es anisótropa para todo $n \in N$. Ello es equivalente a que F admite un orden, esto es , existe en F un subgrupo P del grupo multiplicativo $\dot{F}$, tal que P es cerrado aditivamente y posee índice 2 en F . Si F es cuerpo formalmente real(decimos a menudo real solamente) y P es un orden en F , la clausura real de F respecto de P es unicamente determinada bajo isomorfismo en una clausura algebraica de F. Además P induce un homomorfismo $\overline{P} : W(F) \longrightarrow Z$ definido por $\overline{P}(\langle a_1,\ldots,a_n\rangle) = P(a_1) + \ldots + P(a_n)$ donde $P(a_i) = 1$ si $a_i \in P$ y $P(a_i) = -1$ si $-a_i \in P$. $\overline{P}$ es un homomorfismo de anillos usualmente denominado la signatura de P .

Si f es una forma cuadrática sobre F de dimensión n, $f = \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$; decimos que f es definida respecto de P,orden sobre F, si $|\overline{P}(f)| = n$. Si $|\overline{P}(f)| < n$ decimos que f es indefinida respecto de P. f es totalmente indefinida sobre F si f es indefinida respecto de todos los ordenes de F.

Sea $\{F_i\}$ $i \in I$ la familia de todas las clausuras reales de F respecto a los diferentes ordenes en F.El siguiente resultado conocido como el "Principio local-global de Pfister" será usado repetidas veces en los capítulos soguientes. Se enuncia como sigue y apareció en (3) .

Proposición 1.- Sea $j_i : F \hookrightarrow F_i$ la inclusión de F en su clausura real respecto del orden P_i , $i \in I$ .La siguiente sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow W_t(F) \longrightarrow W(F) \xrightarrow{\ r\ } \prod_{i \in I} W(F_i)$$

donde r es la aplicación inducida al producto por las aplicaciones parciales $r_i : W(F) \longrightarrow W(F_i)$ inducidas por j_i , $i \in I$. $W_t(F)$ denota el subgrupo de torsión del grupo aditivo $W(F)$.

Corolario.- Sea F cuerpo formalmente real, f_1, f_2 formas cuadráticas sobre f cuyas dimensiones r_1, r_2 satisfacen $r_1 \geqslant r_2$. Supongamos que para todo orden P sobre F se tenga:

$$\overline{P}(f_1) = \overline{P}(f_2)$$

Entonces existe un $m \in N$ tal que:

$$2^m f_1 \cong 2^m f_2 \perp 2^{m-1}(r_1 - r_2)H$$

Dem.- Inmediata de prop.1 .

1.2.-ESPACIOS DE ORDENES SOBRE UN CUERPO REAL: Supongamos que F es un cuerpo formalmente real, X_F el conjunto de todos los ordenes sobre F, se define para $a \in \dot{F}$:

$$W(a) = \{ P \in X_F \text{ tales que } -a \in P \}$$

La colección $\hat{B}$ de todos los conjuntos W(a) cuando a recorre $\dot{F}$, constituye una sub-base de una topología sobre F (topología de Harrison) con la cual X_F es un espacio topológico compacto y totalmente disconexo. Los detalles al respecto pueden ser consultados en((4), cap. 6). Esta topología puede obtenerse también como restricción de la topología de Zariski en el espectro del anillo W(F) al conjunto de los ideales primos minimales de W(F).

Esto porque el conjunto de ideales primos minimales de $W(F)$ esta en correspondencia biyectiva con X_F mediante la correspondencia de Harrison-Lorenz ((5),(6)).

Identificando $W(F_P)$ con Z, donde F_P denota la clausura real de F respecto del orden P, tenemos lo siguiente: Para cada forma cuadrática f sobre F queda definida una aplicación $\hat{f} : X_F \longrightarrow Z$ tal que $\hat{f}(P) = \overline{P}(f)$. Tal aplicación es continua respecto de la topología de X_F y la topología discreta en Z. Observamos también que $W(a)$ es abierto-cerrado desde que : $W(-a) = X_F - W(a)$.

1.3.-ORDENES CUADRATICOS Y ARQUIMEDIANOS: En esta sección establecemos algunos conceptos sobre ordenes cuadráticos y arquimedianos que usaremos posteriormente. Dado un cuerpo F, un subconjunto P de $\dot{F}$ verificando las siguientes propiedades es llamado un orden cuadrático o un q-orden.

a) P es cerrado aditivamente

b) $\dot{F}^2 P \subseteq P$

c) $P \cap (-1)P = \emptyset$

d) $P \cup (-1)P = \dot{F}$ $\quad 1 \in P$

Claramente todo orden es un q-orden. Lo recíproco no es verdadero, por ejemplo veremos en Cap. III que $Q(X)$ al no tener la propiedad SAP debe tener ordenes cuadráticos que no son ordenes. La notable diferencia entre estos conceptos puede verse en la exposición de A. Prestel de (4).

Notación: Dado $a, b \in F$. Si P es un q-orden sobre F, escribiremos $a < b$ para denotar que $b-a \in P$.

Proposición 2.-Para P q-orden sobre F se verifica:

1.- $0 < a < b$ entonces $ba^2 < ab^2$

2.- $0 < a < b$ entonces si a es suma de cuadrados en F es $a^2 < b^2$ (lo mismo para b).

Dem.- La primera relación se obtiene de que $0 < ((b-a)^{-1} + a^{-1})^{-1} b^2 = ab^2 - ba^2$. La segunda resulta de la primera y de que a^{-1} es suma de cuadrados en F.

Decimos que un q-orden P sobre F es arquimediano si para todo $a \in F$ existe $k \in N$ tal que $a < k$.

Proposición 3.- Para F formalmente real se verifica:

1) P es un q-orden arquimediano si y solo si Q es denso en F respecto de P.

2) Todo q-orden arquimediano es un orden.

Dem.- Puede verse en (4), capítulo 1.

1.4.- CUERPOS PITAGORICOS: Recordamos que un cuerpo F es llamado pitagórico si toda suma de cuadrados en F es un cuadrado en F. Por ejemplo, R=cuerpo de los número reales, C= cuerpo complejo, toda clausura algebraica, todo cuerpo cuadraticamente cerrado son pitagóricos. Q= cuerpo racional no es pitagórico. También es inmediato que todo cuerpo real con dos clases cuadradas es pitagórico, luego toda clausura real es pitagórico. La intersección de cuerpos pitagóricos es un cuerpo pitagórico, si consideramos F cuerpo arbitrario e intersecamos todos los cuerpos pitagóricos que contienen a F dentro de la clausura algebraica de F, obtenemos un cuerpo pitagórico que denotaremos con F_{pit} y es llamada la cápsula pitagórica de F (o también la clausura pitagórica de F).Si F es formalmente real, como la intersección de todas las clausuras reales es un pitagórico, resulta que todo orden de F se extiende a F_{pit}. A continuación damos la demostración de una propiedad importante de los cuerpos pitagóricos que usaremos repetidas veces en capítulo III, la que no es muy difundida y es debida a J. Diller y A. Dress (ver (22)). La demostración presentada se debe a T.Y. Lam.

Proposición 4.- Supongamos que E es un cuerpo pitagórico , F subcuerpo de E tal que la dimensión de E sobre F sea finita. Entonces F es también pitagórico.

Dem.- Por inducción sobre la dimensión n de E sobre F.

Si $n=1$ es obvio.

Supongamos válida la proposición para todo subcuerpo de menor dimensión. Si F no fuese pitagórico entonces existe $x \in \dot{F}$ tal que $w = 1 + x^2$ no es un cuadrado en F. Sea $K = F(w^{\frac{1}{2}})$, luego K es extensión cuadrática de F y por hipótesis inductiva es K pitagórico. Ahora como:

$$2(w + w^{\frac{1}{2}}) = (w + 2w^{\frac{1}{2}} + 1) + (w-1) = (w^{\frac{1}{2}} + 1)^2 + x^2 = u^2 \in K^2$$

y 2 es un cuadrado en K resulta que $w + w^{\frac{1}{2}} \in K^2$. Tomando $N_{K/F}$ tenemos:

$$N_{K/F}(w + w^{\frac{1}{2}}) = w^2 - w = w(w-1) = w x^2$$

es decir que wx^2 es un cuadrado en F , luego w es un cuadrado en F lo que es contrario a la elección de w . Debe ser entonces F pitagórico.

C A P I T U L O II

T E O R E M A C E N T R A L

Sea F cuerpo formalmente real, X_F su espacio de ordenes y $\widehat{B}$ la sub-base de la topología de X_F.

En (7) Knebusch, Rosenberg y Ware han introducido el concepto de cuerpos reales que satisfacen la "propiedad de aproximación fuerte", que como es usual denotaremos con sus iniciales en inglés SAP, asimismo la "propiedad de aproximación débil", que analogamente denotamos con WAP. Ellas se expresan de la forma siguiente:

SAP: Decimos que F satisface SAP si dado cualquier par de conjuntos cerrados y disjuntos A, B en X_F, existe un elemento a perteneciente a $\dot{F}$ tal que $-a$ es positivo en todo orden de A y $-a$ es negativo en todo orden de B.

WAP: Decimos que F satisface WAP si dado cualquier conjunto cerrado A en X_F y un orden P que no pertenece a A, existe un elemento a perteneciente a $\dot{F}$ tal que $-a$ es positivo en todo orden de A y a pertenece a P.

Observamos que SAP implica claramente WAP, ademas si F es un cuerpo con uno o dos ordenes trivialmente satisface SAP(por lo tanto Q satisface SAP, lo mismo R, toda clausura real, todo cuerpo euclideano, etc). En general la clase de los cuerpos satisfaciendo SAP es amplia como lo veremos en el capitulo III.

De otro lado en (8) Elman y Lam han definido para cuerpos pitagóricos reales la "propiedad de Hasse-Minkowski", la que denotaremos con HMP y se expresa como sigue:

HMP: Decimos que un cuerpo pitagórico real F satisface HMP si toda forma cuadrática totalmente indefinida es isótropa.

En (8) Elman y Lam han demostrado que SAP y WAP son equivalentes sobre un cuerpo formalmente real, si ademas es pitagórico entonces SAP, WAP y HMP son equivalentes (teor. 5.3 (8)). En (17) A. Prestel ha definido la propiedad de Hasse-Minkowski débil para un cuerpo formalmente real, introduciendo el concepto de forma cuadrática debilmente isótropa y demostrado que SAP y HMP(débil) son equivalentes si F es formalmente real (Satz 3.1). Prestel utiliza en este trabajo la teoría de valuaciones y ordenes cuadráticos para demostrar la equivalencia mencionada y caracteriza un cuerpo satisfaciendo SAP por la siguiente propiedad:

"Para toda valuación $v: F \longrightarrow G$ con grupo abeliano ordenado G y cuerpo residual F_v formalmente real es $o(G/2G) \leq 2$ y si $o(G/2G)=2$ entonces F_v tiene un único orden" .

Recientemente en (9) Rosenberg y Ware han demostrado la equivalencia de SAP, WAP y HMP(débil) sobre un cuerpo formalmente real de manera más simplificada que A. Prestel y Elman -Lam(en realidad han demostrado con mayor generalidad, sobre un anillo semi-local conexo). Esta versión de Rosenberg y Ware depende unicamente de propiedades básicas de W(F). También en (16) Elman , Lam y Prestel demuestran estas equivalencias en forma implícita, pero la demostración depende de resultados mas complejos que los usados por Rosenberg y Ware.

Definición 2.1: Una forma cuadrática f sobre F es llamada ser establemente isótropa(o debilmente isótropa) si existe un $m \in N$ tal que la forma $mf= f \perp f \perp \ldots \perp f$ (m veces) es isótropa.

Por ejemplo sobre Q , $\langle 1,-2 \rangle$ es anisótropa y establemente isótropa.

De la definición tenemos que $f=\langle a_1 , \ldots , a_n\rangle$ es establemente isótropa si y solo si existen $x_1 , \ldots , x_n$ no nulos a la vez, donde cada x_i es suma de m cuadrados con $m \in N$ verificandose que:

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$$

Si F es pitagórico , esto demuestra que establemente isótropa e isótropa coinciden

En vista a esta definición tenemos:

HMP (débil): Un cuerpo F real satisface la propiedad de Hasse-Minkowski si toda forma cuadrática totalmente indefinida sobre F es establemente isótropa.

De lo observado anteriormente se sigue que las equivalencias SAP, WAP y HMP para un cuerpo formalmente real probadas en (9),(17) y (16) implican como caso particular las equivalencias probadas por Elman y Lam en (8).

En el presente capítulo, siguiendo las lineas trazadas por Rosenberg y Ware en (9), extendemos las equivalencias de SAP, WAP y HMP sobre un cuerpo real a otras, parte de las cuales han sido demostradas por Elman y Lam en (8) sobre la hipótesis de formalmente real y pitagórico. Obtenemos asi una versión estable de (8) caracterizando los cuerpos satisfaciendo SAP por medio de formas cuadráticas, lo que sumado a la caracterización de A. Prestel por valuaciones, permite tener una amplia información sobre estos importantes cuerpos.

En lo que sigue no referiremos a HMP en su versión débil y consideramos el siguiente teorema central

Teorema 1.- Dado F formalmente real, son equivalentes:

1) SAP
2) WAP
3) $\widehat{B}$ es cerrado por intersecciones finitas
4) Todo abierto-cerrado en X_F pertenece a $\widehat{B}$
5) $\widehat{B}$ es una base de la topología de X_F
6) HMP
7) Para toda n-forma de Pfister f, existe un $m \in N$ y $a \in \dot{F}$ tal que $2^m f \cong 2^{m+n-1} \langle\langle a \rangle\rangle$.
8) Toda n-forma de Pfister es establemente ligada a $2^n \langle 1 \rangle$
9) Todo par de n-formas de Pfister son establemente ligadas.
10) Toda forma cuadrática totalmente indefinida de dimensión 4 es establemente isótropa.
11) Toda forma cuadrática de dimensión 4 y determinante -1 es establemente isótropa.
12) Toda forma $\langle 1, a, b, -ab \rangle$ es establemente isótropa.
13) Toda forma cuadrática ternaria representa establemente su determinante.
14) Toda forma cuadrática de dimensión impar representa establemente su determinante.
15) Toda forma cuadrática de dimensión par y determinante -1 es establemente isótropa.
16) Todo orden cuadrático sobre F es un orden.
17) Toda 2-forma de Pfister es establemente ligada a $4\langle 1 \rangle$.
18) Existe m entero positivo impar tal que toda forma cuadrática de dimensión m representa establemente su determinante.

Demostración: la realizaremos a lo largo de las proposiciones siguientes:

Proposición 1.- Para F formalmente real son equivalentes:

1) SAP

3) $\hat{B}$ es cerrado por intersecciones finitas.

4) Todo abierto-cerrado en X_F pertenece a $\hat{B}$.

Dem.- (1) $\rightarrow$ (4). Sea Y abierto-cerrado, luego Y, $X_F - Y$ son cerrados disjuntos en X_F, entonces existe $a \in \dot{F}$ tal que para todo orden $P \in Y$ es $-a \in P$ y para todo $P \in X_F - Y$ es $a \in P$, luego $Y = W(a)$.

(4) $\rightarrow$ (1). Supongamos dado A y B cerrados disjuntos en X_F, tomo $\sigma \in B$, luego por normalidad en espacios compactos existe O_1, O_2 abiertos en X_F, disjuntos, con $\sigma \in O_1$ y $A \subseteq O_2$. Como O_1 es reunión de conjuntos de la forma $W(a_1) \cap \dots \cap W(a_r)$ que son abiertos y cerrados entonces por hipótesis O_1 es reunión de conjuntos de la forma $W(a)$, luego existe un $a_\sigma \in \dot{F}$ tal que $\sigma \in W(a_\sigma) \subseteq O_1$ y $W(a_\sigma) \cap A = \emptyset$ de donde B es cubierto por la reunión de conjuntos $W(a_\sigma)$, $\sigma \in B$, y por compacidad existe un número finito de ellos tal que: $B = W(a_1) \cup \dots \cup W(a_n)$. Tomando complemento $X_F - B = W(-a_1) \cap \dots \cap W(-a_n) = W(b)$ por hipótesis, de donde $B = W(-b)$, entonces si $P \in B$ es $b \in P$ y si $P \in A$ es $-b \in P$, esto es, $b \in \dot{F}$ separa A y B.

(4) $\rightarrow$ (3) $W(a_1) \cap \dots \cap W(a_n)$ es de la forma $W(b)$ por hipótesis.

(3) $\rightarrow$ (4). Supongamos Y abierto-cerrado en X_F, entonces $X_F - Y = \bigcup_i O_i$ donde cada O_i es intersección de la forma $W(a_1) \cap \dots \cap W(a_n)$, por (3) cada uno de ellos es de la forma $W(a)$, luego $X_F - Y = \bigcup_{a \in I} W(a)$ $I \subseteq \dot{F}$, como $X_F - Y$ es cerrado, por compacidad existen $b_1, \dots, b_n$ tales que:

$X_F - Y = W(b_1) \cup \dots \cup W(b_n)$ de donde $Y = W(-b_1) \cap \dots \cap W(-b_n)$, luego $Y = W(a)$ por hipótesis.

Proposición 2.- Para F formalmente real son equivalentes:

(2) WAP

(5) $\widehat{B}$ es una base de la topología de X_F .

Dem.-(5) $\rightarrow$ (2). Sea A cerrado y $\sigma \notin A$, luego $X_F - A = \bigcup_{a \in I} W(a)$, $I \subseteq \dot{F}$, existe $b \in I$ tal que $\sigma \in W(b)$ y $W(b) \cap A = \emptyset$ .Luego σ y A son separados por $b \in \dot{F}$.

(2) $\rightarrow$ (5). Si todo cerrado se separa de un punto de X_F que no le pertenece, tomo A abierto, entonces para todo $P \in A$ existe $W(a_P)$ tal que $P \in W(a_P)$ y $W(a_P) \cap X_F - A = \emptyset$, de donde $A = \bigcup_P W(a_P)$, entonces B es una base.

En proposición 3 y 4 la demostración corresponde a la dada por Rosenberg y Ware en (9) con las modificaciones que se siguen de nuestra hipótesis sobre F.

Proposición 3.- Para F formalmente real son equivalentes:

(1) SAP

(2) WAP

(7) Para toda n-forma de Pfister existe un $m \in N$ y $a \in \dot{F}$ tales que $2^m f \cong 2^{m+n-1} \langle\langle a \rangle\rangle$.

(8) Toda n-forma de Pfister es establemente ligada a $2^n \langle 1 \rangle$

(9) Cualquier par de n-formas de Pfister son establemente ligadas.

Dem.- (1) $\rightarrow$ (2) . Obvio.

(2) $\rightarrow$ (1). Supongamos que B es una base de la topología de X_F por prop. 2 , demostraremos que B es cerrado por intersecciones finitas, de lo que concluimos por prop. 1, considero $Y = W(a_1) \cap \ldots \cap W(a_n)$ que es abierto-cerrado, luego $Y = \bigcup_{b \in I} W(b)$; $I \subseteq \dot{F}$ pues B es base, por compacidad $Y = W(b_1) \cup \ldots \cup W(b_r)$. Podemos escribir:

$$Y = \bigcap_{i=1}^{n} W(a_i) = \bigcup_{i=1}^{n} W(b_i) \qquad a_i,\ b_i \in \dot{F}$$

donde si es necesario repetimos alguno de los $W(a_i)$ o $W(b_i)$.Defino:

$f = \langle\langle -a_1 , \ldots , -a_n \rangle\rangle$ y $g = \langle\langle b_1 , \ldots , b_n \rangle\rangle$

Luego:

Si $P \in Y$, entonces $P(-a_i) = 1, \forall\ i=1,\ldots,n$. De donde $\bar{P}(f) = 2^n$

También si $P \in Y$ existe b_j tal que $P(b_j) = -1$. De donde $\bar{P}(g) = 0$

Si $P \in X_F - Y$ entonces existe a_j tal que $P \notin W(a_j)$, luego $P(-a_j) = -1$ de donde $\bar{P}(f) = 0$.

También si $P \in X_F - Y = \bigcap_{i=1}^{n} W(-b_i)$, entonces $\bar{P}(g) = 2^n$

En consecuencia:

$h = f \perp g$ y $2^n . \langle 1 \rangle$ satisfacen las hipótesis de corolario a proposición 1, cap. I, entonces existe $m \in N$ tal que

$$2^m h \cong 2^{m+n} \langle 1 \rangle \perp 2^{m+n-1} H$$

Entonces:

$2^m f \perp 2^m g$ es isótropa, luego existe $a \in \dot{F}$ tal que $-a$ es representado por $2^m f$ y a es representado por $2^m g$. Supongamos que $2^m f = \langle c_1, c_2, \ldots, c_{2^{n+m}} \rangle$, como $\bar{P}(2^m f) = 2^{m+n}$ $\forall\ P \in Y$ es luego $P(c_i) = 1$, $i=1,\ldots,2^{n+m}$, de donde necesariamente es $P(-a) = 1$ desde que $-a = c_1 x_1^2 + \ldots + c_{2^{n+m}} x_{2^{n+m}}^2 \in P$, luego $P(a) = -1$ $\forall\ P \in Y$ y analogamente $P(a) = 1$ $\forall\ P \in X_F - Y$, esto es, $Y = W(a)$.

(1) $\longrightarrow$ (7): Considero $f = \langle\langle a_1 , \ldots , a_n \rangle\rangle$ n-forma de Pfister y

$Y = W(a_1) \cup \ldots \cup W(a_n)$, luego $\overline{P}(f)=0 \ \forall P \in Y$ y $\overline{P}(f)=2^n \ \forall \ P \in X_F - Y$

Como $\dot{F}$ satisface SAP , entonces por prop. 1 , existe un $a \in \dot{F}$ tal que $Y = W(a)$, en consecuencia f y $2^n \langle\langle a \rangle\rangle$ satisfacen las hipótesis de corol. a prop. 1, cap. I , luego existe un $m \in N$ tal que $2^m f \simeq 2^{m+n-1} \langle 1,a \rangle$

(7) $\rightarrow$ (8). Es claro desde que dada f n-forma de Pfister existe $m \in N$ tal que $2^m f \simeq 2^{m+n-1} \langle 1,a \rangle$ y $2^{m+n} \langle 1 \rangle \cong 2^{m+n-1} \langle 1,1 \rangle$, lo que significa que $2^n \langle 1 \rangle$ y f estan establemente ligadas.

(8) $\rightarrow$ (9). Supongamos f, g dos n-formas de Pfister, por (8) existen elementos a, b, c, $d \in \dot{F}$ y números naturales m, m' asi como $(m+n-1)$-forma de Pfister G y $(m'+n-1)$-forma de Pfister T tales que:

$2^m f \simeq \langle 1, a \rangle \otimes G$; $2^{m+n} \langle 1 \rangle \simeq \langle 1,b \rangle \otimes G$; $2^{m'} g \simeq \langle 1,c \rangle \otimes T$; $2^{m'+n} \langle 1 \rangle \simeq \langle 1, d \rangle \otimes T$.

Como para todo $P \in X_F$ es $\overline{P}(2^{m+n} \langle 1 \rangle) = 2^{m+n}$ entonces $\overline{P}(\langle 1,b \rangle \otimes G) = \overline{P}(\langle 1,b \rangle)\overline{P}(G) = \overline{P}(2^{m+n} \langle 1 \rangle) = 2^{m+n}$ entonces $\overline{P}(G) = 2^{m+n-1}$

Luego G y $2^{m+n-1} \langle 1 \rangle$, satisfacen las hipótesis de corol. a prop. 1,cap. I, entonces existe un k entero positivo tal que:

$$2^k G \simeq 2^{m+n+k-1} \langle 1 \rangle \quad \text{y} \quad 2^{k'} T \simeq 2^{m'+n+k'-1} \langle 1 \rangle$$

para un k' entero positivo, de donde resulta que:

$$2^{m+k+m'+k'} f \qquad \text{y} \qquad 2^{m+k+m'+k'} g$$

son ligadas, pues:

De $2^m f \simeq \langle 1, a \rangle \otimes G$ se tiene $2^{m+m'+k+k'} f \simeq \langle 1,a \rangle \, 2^k G \, . \, 2^{m'+k'} \langle 1 \rangle \simeq \langle 1, a \rangle \, 2^{m'+k'} . \, 2^{m+n+k-1} \simeq 2^{m'+n+k+k'+n-1} \langle 1,a \rangle$ y en forma analoga $2^{m+m'+k+k'} g \simeq 2^{m'+m+k+k'+n-1} \langle 1,b \rangle$.

(9)$\rightarrow$ (1) . Por proposición 1 bastará demostrar que si tomo $Y= W(a_1)\cap \dots \cap W(a_n)$ existe $a\in \dot{F}$ tal que $Y= W(a)$.

Sea $f = \langle\langle -a_1 , \dots , -a_n\rangle\rangle$ y $g = 2^n\langle 1\rangle$

por hipótesis existe un entero positivo m y una (n+m-1)-forma de Pfister G asi como elementos $b,c \in \dot{F}$ tales que:

$$2^m f \cong \langle 1,b\rangle\otimes G \qquad y \qquad 2^m g \cong \langle 1,c\rangle \otimes G = 2^{m+n}\langle 1\rangle$$

de aqui que para toda P de X_F es $\overline{P}(G)= 2^{m+n}$

luego:

$$\forall \; P\in Y \;\; es \;\; \overline{P}(2^m f)= 2^{m+n}$$

$$\forall \; P\in X_F-Y \;\; es \;\; \overline{P}(2^m f) = 0$$

lo que implica $P(b)=1 \;\; \forall \; P\in Y$ y $P(b)=-1 \;\; \forall \; P\in X_F-Y$

es decir $Y=W(-b)$.

Proposición 4.- Para F formalmente real son equivalentes:

(1) SAP .

(6) HIP .

Demostración.- (1)$\rightarrow$(6). Sea f forma cuadrática totalmente indefinida sobre F, de dimensión n , demostraremos que F es establemente isótropa.

Como $|\overline{P}(f)| < n \;\; \forall \; P\in X_F$ entonces los posibles valores de $\overline{P}(f)$ son $-n+2, -n+4, \dots, n-4, n-2$. De aqui definimos:

$$Y_k = \{ P\in X_F \text{ tales que } \overline{P}(f) = -n +2k \} \quad k=1,\dots,n-1$$

luego Y_k es una partición de X_F (aunque algunos podrian ser vacíos), observamos también que Y_k es pre-imagen por $f : X_F \longrightarrow Z$ del punto $-n+2k$, por lo tanto Y_k es abierto y cerrado y como F satisface SAP, por prop. 1 tenemos que existen $b_1,\dots,b_{n-2}$ F tales que:

$W(b_1)=Y_1$; $W(b_2) = Y_1\cup Y_2$; .... ; $W(b_{n-2})= Y_1\cup Y_2\cup \dots \cup Y_{n-2}$,

sea $g =\langle b_1,\dots,b_{n-2}\rangle$ y $P\in Y_k$ con $1 \leqslant k \leqslant n-2$, entonces como $Y_k \subseteq W(b_k)$, $W(b_{k+1})$, ... , $W(b_{n-2})$ y es disjunto de $W(b_1)$,... , $W(b_{k-1})$ se tiene que:

$$\bar{P}\ (g) = (k-1) - (n-2-k+1) = -n + 2k = \bar{P}\ (f) \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-2$$

Si $P \in Y_{n-1}$ al ser disjunto de todos los $W(b_i)$ resulta $\bar{P}(g)=n-2=\bar{P}(f)$, en consecuencia f,g verifican las hipótesis de corol. a prop. 1 , cap. I , por tanto existe $m \in N$ tal que: $2^m f \cong 2^m g \perp 2^m H$

luego $2^m f$ es isótropa y f establemente isótropa.

Reciprocamente: Supongamos que F verifica HMP, considero $a,b \in \dot{F}$ y probaremos que $W(a) \cap W(b) = W(c)$ para algun $c \in \dot{F}$, en consecuencia $\hat{B}$ es cerrado por intersecciones finitas, y por prop. 1 , F satisface SAP.

Sea $f=\langle -1,\ a\ ,\ b,\ ab\rangle$ al ser totalmente indefinida existe un $m \in N$ tal que $2^m f$ es isótropa , luego $2^m\langle -1\rangle \perp 2^m \langle a,b,\ ab\rangle$ $m \geqslant 1$ es isótropa, podemos tomar $t \in \dot{F}$ tal que $-t$ sea representado por $2^m \langle -1\rangle$ y t representado por $2^m\langle a,b,\ ab\rangle$. Observamos que t es totalmente positivo y de otro lado al ser representado por $2^m\langle a\rangle \perp \langle b\rangle \otimes 2^m \langle 1,a\rangle$ existen $s,\ v \in \dot{F}$ con $t=s+v$, s representado por $2^m\langle a\rangle$ y v representado por $\langle b\rangle \otimes 2^m\langle 1,a\rangle$. Esto último implica que $v=bc$ donde c es representado por $2^m\langle 1,a\rangle$, entonces:

$W(s)=W(a)$ desde que $s= ax$ con x suma de 2^m cuadrados

$W(c)\subseteq W(a)$ desde que $c= x_1 + ax_2$ con x_i suma de 2^m cuadrados

de donde si $P\in W(c)$ es $-c \in P$, luego $-x_1-ax_2 \in P$, y como $x_1 \in P$ resulta $-ax_2 \in P$ de donde $-a \in P$ y $P \in W(a)$.

Ahora supongamos que $P\in W(c)$ sea tal que $P(b)= +1$, entonces $W(c)$ contenido en $W(a)$ implica que $P(bc)= -1= P(a)$, de aqui como $t=s+v=s+bc$ y $P\in W(a)=W(s)$ es $-s\in P$, $-bc\in P$, desde que esto significa $-t\in P$, se tiene que $P(t)=-1$ lo que es contrario a t totalmente positivo.

En consecuencia si $P\in W(c)$ es $P(b)=-1$ entonces $W(c)\subseteq W(a)\cap W(b)$. De otro lado como $W(a)=W(s)$ si tomo $P\in W(a)\cap W(b)$ entonces $-s\in P$ y usando $t=s+v$ resulta $P(v)=1$ de aqui que $P(c)=-1$ y $W(a)\cap W(b)\subseteq W(c)$.

Proposición 5.- Son equivalentes para un cuerpo F formalmente real

17) Toda 2-forma de Pfister es establemente ligada a $2^2\langle 1\rangle$.

8) Toda n-forma de Pfister es establemente ligada a $2^n\langle 1\rangle$.

Dem.-Probaremos en primer término que 17) implica que todo par de 2-formas de Pfister son establemente ligadas. Supongamos f, g 2-formas de Pfister, como f es establemente ligada a $2^2\langle 1\rangle$ (análogo para g) entonces

$2^n f \cong h\langle\langle a\rangle\rangle$ $a\in \dot{F}$, h n+1-Pfister $n\in N$

$2^{n+2}\langle 1\rangle \cong h\langle\langle b\rangle\rangle$ $b\in \dot{F}$

$2^m g \cong w\langle\langle c\rangle\rangle$ $c\in \dot{F}$, w m+1-Pfister $m\in N$

$2^{m+2}\langle 1\rangle \cong w\langle\langle d\rangle\rangle$ $d\in \dot{F}$

Si $P\in X_F$ es $\overline{P}(h\langle\langle b\rangle\rangle)=\overline{P}(2^{n+2}\langle 1\rangle)=2^{n+2}$ entonces $\overline{P}(h)=2^{n+1}$ de donde obtenemos que h y $2^{n+1}\langle 1\rangle$ satisfacen las hipótesis de corol. a prop. 1, cap. I , por lo que existe un entero $k\in N$ tal que $2^k h \cong 2^{k+n+1}\langle 1\rangle$ y analogamente $2^{k'} w \cong 2^{k'+m+1}\langle 1\rangle$

Ahora:

$2^n f \cong h\langle\langle a\rangle\rangle$ luego $2^{k+k'+m}\langle 1\rangle \cdot 2^n f \cong 2^{k+k'+m} h\langle\langle a\rangle\rangle$ de donde

$2^{m+n+k+k'} f \cong \langle\langle a\rangle\rangle 2^{m+n+k+k'+1}\langle 1\rangle$ y analogamente:

$2^{m+n+k+k'} g \cong \langle\langle b\rangle\rangle 2^{m+n+k+k'+1}\langle 1\rangle$

entonces f y g son establemente ligadas.

Demostraremos entonces por inducción que 17) implica 8) si n=2 es justamente la hipótesis. Supongamos válido el enunciado para $2 \leq m$ y demostraremos que toda m+1 - forma de Pfister es establemente ligada a $2^{m+1}\langle 1\rangle$. Sea f una m+1-forma de Pfister, escribo $f = g\langle\langle a\rangle\rangle$ con g m-forma de Pfister la que por hipótesis inductiva es establemente ligada a $2^m\langle 1\rangle$, entonces existe $t \in N$ tal que $2^t g \cong h\langle\langle b\rangle\rangle$ y $2^{t+m}\langle 1\rangle \cong h\langle\langle c\rangle\rangle$, luego $2^t f \cong h\langle\langle a,b\rangle\rangle$ y $2^{t+m+1}\langle 1\rangle \cong h\langle\langle 1,c\rangle\rangle$ pero $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ y $\langle\langle 1,c\rangle\rangle$ son establemente ligadas por lo ya demostrado, luego existe $r \in N$ tal que $2^r\langle\langle a,b\rangle\rangle \cong h_1\langle\langle x\rangle\rangle$ y $2^r\langle\langle 1,c\rangle\rangle \cong h_1\langle\langle y\rangle\rangle$, entonces:

$$2^{r+t} f \cong hh_1\langle\langle x\rangle\rangle$$
$$2^{r+t+m+1}\langle 1\rangle \cong hh_1\langle\langle y\rangle\rangle$$

de donde concluimos que f y $2^{m+1}\langle 1\rangle$ son establemente ligadas. La recíproca es trivial. •

Proposición 6.- Para un cuerpo F formalmente real son equivalentes:

6) HIP

10) Toda totalmente indefinida forma cuadrática de dimensión 4 es establemente isótropa

12) Toda forma $\langle 1, a, b, -ab\rangle$ es establemente isótropa.

Demostración.- (6) $\rightarrow$ (10) obvio . (10) $\rightarrow$ (12) inmediato desde que $\langle 1, a, b, -ab \rangle$ es totalmente indefinida. Luego basta demostrar que (12) implica (6) pero por proposiciones 4, 5 y 3 ya demostradas bastará demostrar que 12) implica que toda 2-forma de Pfister es establemente ligada a $4\langle 1\rangle$.

Considero $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ 2-Pfister , observemos que la forma $\langle 1, -a,-b,-ab \rangle$ es establemente isótropa por hipótesis, lo que es equivalente a decir que $\langle -1 , a,b, ab \rangle$ es establemente isótropa, entonces existe un k entero positivo tal que $2^k\langle -1,a,b,ab\rangle$ es isótropa, luego $2^k\langle 1\rangle$ y $2^k\langle a,b, ab \rangle$ representan un elemento común y con mas razón $2^k\langle 1,1,1\rangle$ y $2^k \langle a,b,ab\rangle$ representan un elemento en común al que denotemos con $c\in \dot{F}$, llamemos $f=\langle\langle 1,1\rangle\rangle$ y $g=\langle\langle a,b\rangle\rangle$, entonces $c \in D_F (2^k g')$ luego por teor. 2.6 de [2] existe un $d\in \dot{F}$ tal que :

$$2^k\langle\langle a, b\rangle\rangle \cong 2^k \langle\langle c,d \rangle\rangle$$

y analogamente usando que $c \in D_F (2^k f')$ se tiene que existe $e \in \dot{F}$ tal que:

$$2^k f \cong 2^k\langle\langle c, e\rangle\rangle$$

de donde resulta $\langle\langle a,b \rangle\rangle$ y $\langle\langle 1,1\rangle\rangle$ establemente ligadas.

Proposición 7.- Para F cuerpo formalmente real son equivalentes:

12) $\langle 1,a,b,-ab \rangle$ es establemente isótropa

13) Toda forma ternaria representa establemente su determinante

14) Toda forma de dimensión impar representa establemente su determinante.

15) Toda forma de dimensión par y determinanate -1 es establemente isótropa.

Demostración.- 12) $\rightarrow$ 13) . Sea $\langle a, b, c\rangle$ forma ternaria con $d=abc$ entonces $\langle a, b, c, -d\rangle$ es forma de dimensión 4 totalmente indefinida y luego por 12) (mejor dicho por(10) que es su equivalente) resulta $\langle a, b, c, -d\rangle$ establemente isótropa, luego existe $m \in N$ tal que $2^m \langle a,b,c,-d\rangle$ es isótropa, entonces existen x_1, x_2, x_3 y x_4 sumas de 2^m cuadrados, no nulos a la vez los x_i , verificando:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = dx_4 \qquad (°)$$

Si $x_4=0$, como algun x_i es diferente de cero resulta $2^m\langle a,b,c\rangle$ isótropa , luego universal y entonces representa en particular d , en caso contrario, como las sumas de 2^m cuadrados forman un grupo multiplicativo en $\dot{F}$, podemos despejar d de (°) y obtenemos que $2^m\langle a,b,c\rangle$ representa a d.

13) $\rightarrow$ 12). Considero $\langle 1,a,b\rangle$ forma ternaria, entonces existe $m \in N$ tal que $m\langle 1,a,b\rangle$ representa ab , luego existen x_1, x_2 , x_3 no nulos a la vez sumas de m cuadrados tales que:

$$x_1 + ax_2 + bx_3 - ab = 0$$

pero el coeficiente 1 de $-ab$ puede verse como suma de m cuadrados luego $m\langle 1,a,b,-ab\rangle$ es isótropa para toda $a,b \in \dot{F}$.

13) $\rightarrow$ 14). Supongamos $g=\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ con n impar, probaremos por inducción sobre n . Si $n=3$ es nuestra hipótesis, supongamos verdadero el enunciado para m impares tales que $3 \leq m < n$, considero $\langle a_3,\dots,a_n\rangle$ por hipótesis inductiva existe $m_1 \in N$ tal que $m_1\langle a_3,\dots,a_n\rangle \cong \langle a_3a_4\dots a_n , b_4,\dots,b_r\rangle$. Existe también un $m_2 \in N$ tal que $m_2\langle a_1, a_2 , a_3\dots a_n\rangle \cong \langle a_1\dots a_n , c_2,\dots,c_k\rangle$

luego:

$m_1\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \cong m_1\langle a_1, a_2\rangle \perp m_1\langle a_3,\ldots,a_n\rangle \cong m_1\langle a_1,a_2\rangle \perp \langle a_3\ldots a_n, b_4,\ldots,b_r\rangle$, de donde $m_1\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle \cong \langle a_1,a_2,a_3\ldots a_n,d_4,\ldots,d_s\rangle$. Sumando m_2 veces ambos miembros obtenemos que:

$m_1m_2\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \cong m_2\langle a_1, a_2, a_3\ldots a_n\rangle \perp m_2\langle d_4,\ldots\rangle \cong \langle a_1\ldots a_n, c_2,\ldots,c_k\rangle \perp m_2\langle d_4,\ldots\rangle$, es decir que $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ representa establemente su determinante.

14) $\rightarrow$ 13) obvio

14) $\rightarrow$ 15). Sea $g = \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ con n par y determinante -1, demostraremos que g es establemente isótropa. Si $n=2$ inmediato pues g es un plano hiperbólico, supongamos entonces que $n \geqslant 4$. Observamos que de $g \cong \langle a_1\rangle\langle 1, a_1a_2,\ldots,a_1a_n\rangle \cong \langle a_1\rangle g'$ y $\det(g') = a_1^{n-2}\det(g)$, como $n-2$ es par entonces $\det(g) = \det(g')$, en consecuencia bastará demostrar para $f = \langle 1, b_2, \ldots, b_n\rangle$ con $b_2\ldots b_n = -1$

Como $\langle b_2,\ldots,b_n\rangle$ tiene dimensión impar entonces por hipótesis representa establemente a -1, existe luego $m \in N$ tal que $m\langle b_2,\ldots,b_n\rangle$ representa a -1, entonces podemos encontrar x_i sumas de m cuadrados tales que $1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n = 0$ es decir que $m\langle 1, b_2,\ldots,b_n\rangle$ es isótropa.

15) $\rightarrow$ 12) obvio.

Observemos que la equivalencia entre 11) y 12) es inmediata desde que si $f = \langle a,b,c,d\rangle$ con determinante -1 entonces puedo escribirla como $f \cong \langle a\rangle\langle 1, x, y, -xy\rangle$. También supongamos que 18) se verifica, demostraremos que entonces 13) se cumple; pues tomo la forma $\langle 1,a,b\rangle$ y veamos que representa establemente a ab, si el m de la hipótesis es $m=3$, no hay nada que probar, asi que supongamos que el m de la hipótesis es mayor que 3, considero $f_1 = \langle a,b,1\rangle \perp \langle 1,\dots,1\rangle$ de dimensión m, luego existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que kf_1 representa ab, podemos encontrar x_i suma de k cuadrados verificando la relación

$$x_1 + ax_2 + bx_3 + x_4 + \dots + x_m = ab$$

pero en esta expresión $x_1 + x_4 + \dots + x_m$ es suma de $r=k(m-2)$ cuadrados, completando con ceros puede verse también x_2 y x_3 como sumas de r cuadrados y entonces $r\langle 1,a,b\rangle$ representa ab.

Para completar la demostración del teorema central nos resta probar la equivalencia de 16) con alguno de los otros enunciados, esta equivalencia permitirá unificar los resultados ya probados y que caracterizan por medio de formas cuadráticas un cuerpo real verificando SAP, con los resultados de A. Prestel, obtenidos por teoría de valuaciones y ordenes cuadráticos, al respecto puede consultarse [4] y [17].

Usaremos el siguiente lema debido a Prestel.

Lema; Una forma cuadrática sobre F es establemente isótropa si y solo si es indefinida respecto de todos los ordenes cuadráticos de F.

Proposición8.- Sobre un cuerpo F formalmente real son equivalentes:

12) $\langle 1, a, b, -ab\rangle$ es establemente isótropa

16) Todo orden cuadrático en F es un orden.

Dem.- 12) $\rightarrow$ 16) si existe un orden cuadrático P que no es orden, entonces existen $a,b \in P$ tales que $ab \notin P$, luego la forma $\langle 1,a,b,-ab\rangle$ es definida respecto de P y por el lema concluimos.

16) $\rightarrow$ 12) si todo orden cuadrático es un orden entonces por el lema F satisface HP y luego $\langle 1,a,b,-ab\rangle$ es establemente isótropa por lo ya demostrado.

CAPITULO III

EJEMPLOS Y APLICACIONES A CUERPOS PITAGORICOS

En este capítulo aplicaremos las diversas caracterizaciones que tiene un cuerpo verificando SAP al estudio de las extensiones de cuerpos pitagóricos, principalmente dentro de la clausura algebraica del cuerpo racional Q, donde se tiene la importante propiedad de que toda extensión real de Q satisface SAP. También realizamos algunas construcciones que ayudan a clarificar la estructura de los cuerpos satisfaciendo esta propiedad, tanto pitagóricos como no pitagóricos. Como ejemplo importante obtenemos información sobre la cápsula pitagórica de Q, la que denotaremos con Q_{pit}.

En relación al problema de determinar extensiones pitagóricas de Q_{pit} demostramos prop. 7, la cual aplicamos también a caracterizar los cuerpos pitagóricos hereditarios como superpitagóricos, quedando entonces caracterizados dentro de la clausura algebraica de Q como pitagóricos reales con a lo sumo dos ordenes. También nos interesamos en las extensiones "preservativas", esto es, si K/F es extensión de cuerpos con $W(K/F)=0$. ¿En que condiciones las formas anisótropas sobre F permanecen anisótropas sobre K?. Roger Ware demostró en (11) que si F es pitagórico real verificando SAP entonces para toda extensión K/F con $W(K/F)=0$ las formas anisótropas sobre F se preservan a K. En esta sección demostramos el recíproco de este resultado de Ware, estableciendo asi una condición necesaria y suficiente para que un cuerpo pitagórico real verifique SAP.

Proposición 1.- Todo cuerpo con a lo sumo tres ordenes satisface SAP

Dem: En caso de que F posea uno o dos ordenes es inmediato de la definición. Supongamos que P_1, P_2 y P_3 sean todos los diferentes ordenes de F, consideremos $A=\{P_1\}$, $B=\{P_2,P_3\}$, luego:

$P_1 \neq P_2$ implica que existe $a \in \dot{F}$ tal que $-a \in P_1$, $a \in P_2$ y $a \in P_3$ o $-a \in P_3$. Eliminemos $a \in P_3$ pues sino concluimos.

$P_1 \neq P_3$ implica que existe $b \in \dot{F}$ tal que $-b \in P_1$, $b \in P_3$ y $b \in P_2$ o $-b \in P_2$. Eliminamos $b \in P_2$ por la razón anterior.

Definimos $c= -ab$ y obtenemos $-c \in P_1$, $c \in P_2$ y $c \in P_3$ en consecuencia c separa los cerrados A y B, luego por definición F verifica SAP.

Por ejemplo: Toda clausura real, todo cuerpo euclideano, Q, R= cuerpo de los números reales, etc, al tener un único orden, analogamente $R((t))$, $Q(2^{\frac{1}{2}})$ por tener dos ordenes unicamente.

Otros ejemplos:

a) $R((t_1))((t_2))$ no satisface SAP puesto que la forma $\langle 1,t_1,t_2,-t_1t_2\rangle$ no es establemente isótropa (usar que es cuerpo local).

b) $Q(X)$ no verifica SAP: Para ver esto usaremos la caracterización de A. Prestel mencionada en la introducción al cap. II.

Sea $f(X) = X^2 - 2$, al ser irreducible sobre Q define en la forma ordinaria una valuación sobre $Q(X)$ cuyo cuerpo residual es $Q(2^{\frac{1}{2}})$ formalmente real y con dos ordenes, lo que es contrario a la suposición de que $Q(X)$ verifique SAP, desde que ella implicaria que $Q(2^{\frac{1}{2}})$ tiene un único orden.

c) $R(X)$ verifica SAP desde que R es trivialmente,euclideano hereditario , ver Teor. I de [16], aun más, toda extensión finita y real de $R(X)$ verifica SAP (idem).

d) Observemos sin embargo que $R(X,Y)$ no verifica SAP desde que la forma cuadrática $\langle 1, X, Y, -XY \rangle$ no es establemente isótropa (desde que $n\langle 1, X\rangle$ y $n\langle 1, -X\rangle$ son anisótropas,- para todo n entero positivo- sobre $R(X)$).

La siguiente proposición muestra una clase importante de cuerpos verificando SAP.

Proposición 2.- Toda extensión algebraica y real de Q verifica SAP.

Dem.- Considero F/Q extensión algebraica y real de Q, por 16) de teorema 1 , cap. II , basta demostrar que todo orden cuadrático sobre F es un orden, pero por prop 3-b, cap. I , ello resultará de demostrar que todo orden cuadrático es arquimediano.

Sea P un orden cuadrático sobre F, sea $a \in F$ y supongamos que $1 < a$, luego $1 < a < a^2 < \dots < a^m < \dots$ por aplicación de 1) en pag. 9 . Luego: $0 < 1/a^m \leq 1 \;\forall\; m \in N$. Como existen $c_o, c_1, \dots, c_{n-1}$ en Q tales que :

$$a^n + c_1 a^{n-1} + \dots + c_o = 0$$

entonces:

$$a = -(c_{n-1} + \dots + c_o \; 1/a^{n-1})$$

de donde:

$$a \leq \sum_{0 \leq i \leq n-1} |c_{n-1-i} \; 1/a^i| \leq \sum_{0 \leq i \leq n-1} |c_i| < k$$

para cierto k natural, luego P es arquimediano.

En $\overline{Q}/Q$, donde $\overline{Q}$ denota la clausura algebraica de Q nos interesa tener información de los cuerpos pitagóricos y superpitagóricos . En relación a ello tenemos en forma inmediata el siguiente resultado que se sigue de corol. 4.8 de (8) y la proposición anterior.

Proposición 3.- Todo superpitagórico en $\overline{Q}/Q$ tiene a lo sumo cuatro clases cuadradas y dos ordenes.

Observemos que en general un cuerpo superpitagórico puede tener muchas clases cuadradas, por ejemplo $R((t_1))\ldots((t_n))$ es superpitagórico con 2^{n+1} clases cuadradas y 2^n ordenes.

A continuación enunciamos un resultado de T.Y. Lam ,el cual aplicaremos repetidas veces en esta parte y cuya demostración puede verse en cap. VII de (1) , apéndice .

Teorema: Sea F una extensión normal de un cuerpo de números algebraicos . Si K es una extensión finita y propia de F entonces K tiene infinitas clases cuadradas.

Resulta asi que todo cuerpo de números algebraicos(extensión de grado finito de Q) tiene infinitas clases cuadradas.

Si F es un cuerpo formalmente real, X_F su espacio de ordenes, observamos que $W(-ab) = W(-a) \triangle W(-b)$ (diferencia simétrica), de donde resulta que la subbase de la topología de X_F con la diferencia simétrica forma un subgrupo del grupo de partes de X_F . Si definimos $f(a) = W(-a)$ para todo $a \in \dot{F}$ obtenemos un isomorfismo del grupo cociente $\dot{F} / \sum \dot{F}^2$ con $(\widehat{B}, \triangle)$ puesto que: $f(a) = \emptyset$ es equivalente a decir que a es totalmente positivo . Como consecuencia de esto demostramos la siguiente proposición:

Proposición 5.- Si F es cuerpo pitagórico real entonces; F tiene infinitos ordenes si y solo si F tiene infinitas clases cuadradas.

Dem.- Si F pitagórico real con infinitas clases cuadradas, como $\sum \dot{F}^2 = \dot{F}^2$ se tiene que B es infinito por la argumentación precedente. Recíprocamente , si F tiene un número finito de clases cuadradas entonces tiene un número finito de ordenes desde que todo orden P sobre F es un subgrupo multiplicativo de $\dot{F}$ conteniendo a $\dot{F}^2$.

De lo visto anteriormente tenemos:

Proposición 6.-

a) Q_{pit} es una extensión galoasiana infinita de Q.

b) Q_{pit} tiene infinitos ordenes e infinitas clases cuadradas.

c) Q_{pit} no posee extensiones superpitagóricas de grado finito.

d) Si F es superpitagórico en $\overline{Q}/Q$, entonces F no es extensión normal de Q ni admite subextensiones de codimensión finita y normales sobre Q.

Dem.- Q_{pit}/Q es infinita desde que Q no es pitagórico . Tomemos h una Q-inmersión de Q_{pit} en $\overline{Q}$, luego $h(Q_{pit})$ es también pitagórico, entonces $Q_{pit} \subseteq h(Q_{pit})$ y operando con h^{-1} obtenemos $h(Q_{pit}) = Q_{pit}$, de donde resulta la normalidad.

b) Q_{pit} es un cuerpo real, en consecuencia $(-1)^{\frac{1}{2}}$ no pertenece a Q_{pit} luego $K = Q_{pit}(-1)^{\frac{1}{2}}$ es extensión propia de Q_{pit} que por (a) es extensión normal de Q, luego por el teorema de Lam, K tiene infinitas clases cuadradas, pero esto implica que Q_{pit} tiene infinitas clases cuadradas y por prop.5 Q_{pit} tiene infinitos ordenes.

c) Supongamos que F es una extensión de grado finito de Q_{pit} , si $F = Q_{pit}$ o si F es extensión finita propia, por b) y teorema de Lam resulta F con infinitas clases cuadradas, luego por prop.3 , F no puede ser superpitagórico.

d) Si F es superpitagórico entonces $(-1)^{\frac{1}{2}}$ no pertenece a F, por ser F real, luego si F/Q fuese normal por teor. de Lam, F tendria infinitas clases cuadradas lo que es falso por proposición 3.

A continuación demostraremos que la capsula pitagórica de Q admite extensiones de grado finito no pitagóricas . Ello resultará de la proposición siguiente:

Proposición 7.- Sea F pitagórico real, si para toda extensión $F(a^{\frac{1}{2}})$ real es pitagórica entonces F es superpitagofico .

Antes de realizar la demostración observemos que en (8) se define cuerpo superpitagórico involucrando al mismo tiempo las propiedades pitagóricas y de orden del cuerpo definido, ello origina algunos inconveneientes al estudiar las caracteristicas de estos cuerpos. Posteriormente en (10) R. Brown ha definido cuerpos superordenados de la forma siguiente:

Def: Un cuerpo F es superordenado si para todo H, subgrupo multiplicativo de $\dot{F}$, de índice 2, tal que $-1 \notin H$, y $H \supseteq \sum \dot{F}^2$, es un orden en F.

Demostraremos que la definición de superpitagórico de Elman y Lam en (8) es equivalente a pitagórico y superordenado. Recordamos que Elman y Lam definen: F es superpitagórico si para todo subgrupo E de $\dot{F}/\dot{F}^2$ con $-1 \notin E$, existe un orden en F en el cual todos los elementos de E son positivos. Esto significa equivalentemente que para todo subgrupo multiplicativo E de $\dot{F}$ tal que $-1 \notin E$ y $E \supseteq \dot{F}^2$, existe un orden P sobre F tal que $E \subseteq P$.

Lema: Si H es un subgrupo de $\dot{F}$ tal que $-1 \notin H$ y $\sum \dot{F}^2 \subseteq H$, entonces existe un subgrupo G de $\dot{F}$ tal que $H \subseteq G$, $-1 \notin G$ y G tiene índice 2 .

Consideremos G subgrupo maximal verificando $G \supseteq H$, $-1 \notin G$, entonces si fuese $G \cup -G \neq \dot{F}$ tomo $x \notin G \cup -G$ y sea T el subgrupo generado por $G \cup \{x\}$. Asi $T \supseteq H$ y afirmamos que $-1 \notin T$, pues si $-1 = g_1^{n_1} \ldots g_r^{n_r} x^n$ entonces:

$n=0$ no es posible porque $-1 \notin G$

n par implica $x^n \in \sum \dot{F}^2 \subseteq G$ y entonces $-1 \in G$

Debe ser luego n impar y por tanto: $x = -g_1^{n_1} \ldots g_r^{n_r} x^{2m} \in -G$ lo que es contrario a la elección de x . Por la maximalidad de G se concluye que G tiene entonces índice 2 en $\dot{F}$.

Lema 2.- F es superpitagórico si y solo si F es pitagórico y superordenado.

Dem.- Supongamos que F es superordenado y pitagórico. Tomemos E subgrupo de $\dot{F}$ tal que $-1 \notin E$ y $E \supseteq \dot{F}^2$, entonces existe un subgrupo P de $\dot{F}$ tal que $-1 \notin P$, $E \subseteq P$ y P tiene índice 2 en $\dot{F}$, por definición de superordenado P resulta un orden en $\dot{F}$. Reciprocamente si F es superpitagórico considero E subgrupo de $\dot{F}$ conteniendo a $\dot{F}^2$, $-1 \notin E$ y E de índice 2. Por definición de superpitagórico existe un orden P conteniendo E y por el índice es $P=E$, luego E es un orden y F superordenado.

Demostración de la proposición 7.-

De lo observado en los lemas anteriores bastará probar que F es superordenado. Sea H subgrupo de $\dot{F}$, verificando $-1 \notin H$ y $\dot{F}^2$ contenido en H, índice de $H = 2$, demostraremos que $H+H \subseteq H$.

Si $a,b \in H$ entonces $a+b = b(1 + ab^{-1})$, luego bastará con demostrar que $1+x \in H$ cuando $x \in H$.

Si x es un cuadrado en F , entonces $1+x = 1+u^2 \in H$

Supongamos entonces que x no es un cuadrado en F , luego $F(x^{\frac{1}{2}})$ es una extensión cuadrática de F.

Si $-1 = \sum_i (x_i + y_i x^{\frac{1}{2}})^2$, luego $-1 = u^2 + v^2 x$ pues F es pitagórico, pero, $v^2 x = -(1+u^2) \in H$ y $1+u^2 \in H$, entonces $w = 1+u^2 \in H \cap -H$ que es vacío (desde que $-1 \notin H$ y H es un subgrupo de índice 2). En consecuencia $F(x^{\frac{1}{2}})$ es formalmente real. Por hipótesis es luego $F(x^{\frac{1}{2}})$ pitagórico y por tanto $1 + (x^{\frac{1}{2}})^2 = (u + v x^{\frac{1}{2}})^2$, esto es:

$$1 + x = u^2 + v^2 x + 2uv\, x^{\frac{1}{2}}$$

de donde es $uv=0$ y $1 + x = u^2 + v^2 x$. Ahora:

Si $u=0$ entonces $1 + x = v^2 x \in H$

Si $v=0$ entonces $1 + x = u^2 \in H$.

En consecuencia H es un orden y F superpitagórico.

Regresamos ahora a la cápsula pitagórica de Q en $\overline{Q}$:

Proposición 8.- Q_{pit} posee extensiones reales de grado finito y no pitagóricas.

Dem.- Por proposición 6 -c , conocemos que Q_{pit} no es superpitagórico , luego aplicando proposición 7 tenemos que existe un $a \in Q_{pit}$ tal que $Q_{pit}(a^{\frac{1}{2}})$ es extensión real no pitagórica .

Resumiendo tenemos entonces la siguiente información acerca de Q_{pit} :

Como Q_{pit} verifica SAP por proposición 2, ademas es Q_{pit} formalmente real, entonces satisface las condiciones equivalentes del

teorema central (cap. II) , por ser pitagórico el termino"establemente " es suprimido por la observación hecha a la definición de establemente isótropa y por que el concepto de formas de Pfister ligadas coincide con el de formas de Pfister establemente ligadas al no tener torsión $W(Q_{pit})$.
Tenemos entonces el siguiente teorema:

Teorema: Sobre Q_{pit} se verifican todas las siguientes equivalentes condiciones:

1) Q_{pit} satisface SAP
2) Q_{pit} satisface WAP
3) Toda n-forma de Pfister es ligada a $2^n\langle 1\rangle$.
4) Cualquier par de n-formas de Pfister estan ligadas .
5) Toda forma cuadrática de dimensión 4, totalmente indefinida es isótropa.
6) Toda forma cuadrática de dimensión 4 y determinante -1 es isótropa.
7) La forma $\langle 1, a, b, -ab\rangle$ es isótropa .
8) Toda forma cuadrática ternaria representa su determinante.
9) Toda forma cuadrática de dimensión impar representa su determinante.
10) Toda forma cuadrática de dimensión par y determinante -1 es isótropa.
11) Todo orden cuadrático es un orden.
12) Las clases de álgebras de cuaterniones forman un subgrupo del grupo de Brauer de Q_{pit} .

En lo que respecta a sus extensiones Q_{pit} tiene las siguientes propiedades:

13) Q_{pit}/Q es extensión galoasiana infinita.
14) Q_{pit} no tiene extensiones superpitagóricas de grado finito.
15) Q_{pit} tiene infinitos ordenes e infinitas clases cuadradas.
16) Q_{pit} tiene extensiones reales de grado finito no pitagóricas .

Demostración.- Se ha realizado anteriormente

Observación: (12) en el teorema resulta de (teor. 5.3 de (8)) en que se establece la equivalencia de SAP con el hecho de que las álgebras de cuaterniones formen un subgrupo en el grupo de Brauer de un pitagórico real. Esta equivalencia no es verdadera en el caso que F sea solamente real como veremos en el siguiente ejemplo:

Sea $F = Q((t))$ el cual conocemos que verifica SAP. Considero las formas de Pfister $f = \langle\langle 1,1\rangle\rangle$ y $g = \langle\langle -2,t\rangle\rangle$. Veamos que f y g no estan ligadas. Sea $q = f \perp \langle -1\rangle g$, si f,g ligadas entonces por (prop.4.4 , (2)) el índice de Witt de q será 2 , luego la forma

$$\langle 1, 1, 1, 2\rangle \perp \langle t\rangle\langle -1, 2\rangle$$

es isótropa, lo que no es verdadero desde que $\langle 1, 1, 1, 2\rangle$ y $\langle -1, 2\rangle$ son anisótropas sobre Q . En consecuencia las clases de álgebras de cuaterniones no forman subgrupo en el grupo de Brauer.

En general, dado un cuerpo pitagórico determinar las extensiones que sean pitagóricas es un problema importante. En (15) del teorema hemos establecido por ejemplo que Q_{pit} posee extensiones de grado par reales y no pitagóricas . Queda todavia por considerar el caso impar. En relación al problema general se ha definido el concepto de cuerpos pitagóricos hereditarios, los que en los últimos años han sido objeto de estudio .... detenido, principalmente por E. Becker. En las líneas siguientes usamos.... proposición 7 para demostrar que ellos constituyen una subfamilia de los ... cuerpos superpitagóricos.

Def.- Un cuerpo F formalmente real es llamado pitagórico hereditario si ... toda extensión real (en la clausura algebraica) de F es pitagórica.

Proposición 10.-Si F es pitagórico hereditario entonces es superpitagórico.

Dem.- F es pitagórico real, de no ser superpitagórico por prop. 7 se sigue que F admite una extensión cuadrática real no pitagórica .

En consecuencia los pitagóricos hereditarios en $\overline{Q}/Q$ son pitagóricos con un único orden y dos clases cuadradas o pitagóricos con dos ordenes y cuatro clases cuadradas. En (14) A. Prestel y M. Ziegler han definido cuerpos euclideanos hereditarios como cuerpos euclideanos(con un único orden y todo elemento positivo es un cuadrado) y toda extensión algebraica real de F es euclideana.

Proposición 11.- F es euclideano si y solo si es pitagórico con un único orden.

Dem.- Supongamos que F es euclideano, luego es formalmente real con dos clases cuadradas. Considero $1 + x^2 = w$ con $x \in \dot{F}$, entonces $w \equiv 1$ mod. $\dot{F}^2$ o $w \equiv -1$ mod. $\dot{F}^2$, como F real la última posibilidad se descarta, entonces F es pitagórico. Además como todo orden en F es un subgrupo de $\dot{F}$ conteniendo a $\dot{F}^2$ seguimos que F posee un orden unicamente. Reciprocamente, si F es pitagórico con un único orden entonces F tiene solo un número finito de clases cuadradas por prop. 5, como F satisface SAP por prop. 1 entonces F tiene unicamente dos claes cuadradas en virtud de (corl.5.7, (8)), luego F es euclideano.

Como consecuencia de esta proposición tenemos que los pitagóricos hereditarios en $\overline{Q}/Q$ son euclideanos (y en particular los euclideanos hereditarios son ejemplos de pitagóricos hereditarios) o pitagóricos con dos únicos ordenes . Un estudio detenido de los cuerpos euclideanos hereditarios puede verse en (14).

SOBRE UN PROBLEMA DE R. WARE:

Un problema importante en la teoría de formas cuadráticas sobre cuerpos es el siguiente: Si K/F es una extensión de cuerpos. ¿ En que condiciones de K/F las formas anisótropas sobre F permanecen anisótropas sobre K ? . Los resultados mas conocidos son los siguientes:

Prop. 12.-S i K/F es una extensión trascendente pura entonces las formas anisótropas sobre F permanecen anisótropas sobre K.

Prop. 13.-(T. A. Springer) Si K/F es una extensión de dimensión impar entonces las formas anisótropas sobre F se preservan a K.

Prop. 14.-(R. Ware) Si K/F es extensión con F pitagórico real verificando SAP y $W(K/F) = 0$ entonces las formas anisótropas sobre F permanecen anisótropas sobre K.

Prop. 15.-(R. Ware) Si K/F es extensión galoasiana finita, entonces $W(K/F) = 0$ si y solo si las formas anisótropas sobre F se preservan a K.

Ahora bien, si K/F es extensión con la propiedad de que las formas anisótropas sobre F permanecen anisótropas sobre K se implica que $W(K/F) = 0$. Lo recíproco ha sido una pregunta abierta recientemente respondida en forma negativa por R. Ware. Esto es , $W(K/F) = 0$ no implica que las formas anisótropas sobre F se preserven a K. Concretamente en (corol. 3.4 , (18), 1977) Ware establece que existe una extensión K/F de un cuerpo de números algebraicos, de grado finito , con $W(K/F) = 0$ y existe sobre F una forma cuadrática de dimensión 4 y anisótropa la que es isótropa sobre K.

(°) En proposición 15, F es pitagórico

Recientemente con Enzo R. Gentile hemos demostrado que la recíproca de prop. 14 es verdadera también, en el sentido que si F es cuerpo pitagórico real con la propiedad de que toda forma anisótropa sobre F permanece anisótropa sobre toda extensión K/F si $W(K/F) = 0$ entonces F satisface SAP . En las líneas siguientes demostramos este resultado el mismo que con prop. 14 establece una condición necesaria y suficiente para que un cuerpo pitagórico verifique SAP .También en forma lateral obtenemos un ejemplo claro de que existen extensiones K/F con $W(K/F) = 0$ pero las formas anisótropas sobre F no se preservan a la extensión K , el ejemplo construido por Ware si bien es en la situación de K/F algebraica finita, es sumante complicado (ver (18)).

Con $F(f)$ denotaremos el"cuerpo de ceros genérico" canónico de una forma cuadrática f sobre F, cuya dimensión es mayor que 1 y f no es un plano hiperbólico. $F(f)/F$ es una extensión de cuerpos generada por $x_1, \dots, x_n$ donde x_i es la imagen de X_i por medio de:

$$F[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow F[X_1, \dots, X_n]/(f)$$

donde $n = \dim f$. Claramente f es isótropa sobre $F(f)$ y la expresión para $f = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 = 0$$

permite expresar :

$$F(f) = F(x_1, \dots, x_{n-1})\left(-a_n^{-1}(a_1 x_1^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde $F(x_1, \dots x_{n-1})/F$ es extensión trascendente pura(para detalles y propiedades de"cuerpos de ceros genericos" ver (12)).

Su pongamos que F es cuerpo formalmente real y P un orden en F, si X es trascendente sobre F entonces podemos extender P a $F(X)$ de manera que $X - a \in P \ \forall \ a \in F$ (es decir X infinitamente grande). Para ello basta definir en $F[X]$ el orden:

$$f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n > 0 \text{ si y solo si } a_n > 0 \text{ en } F .$$

El orden asi definido en $F[X]$ extiende el orden P de F a $F[X]$ y tiene una única y natural extensión a $F(X)$; Además es claro que X es infinitamente grande.

Proposición 16.- Sea F formalmente real , $f \not\simeq \langle 1 , -1 \rangle$ forma cuadrática con $\dim f \geqslant 2$. Entonces todo orden de F se extiende a $F(f)$ si y solo si f es totalmente indefinida sobre f .

Demostración: Supongamos que P es un orden en F, f como en la hipótesis, podemos suponer que $a_n < 0$ y $a_{n-1} > 0$ para una escritura de $f = \langle a_1 , \dots , a_n \rangle$. Sea $K = F(x_1 , \dots , x_{n-2})$, al ser K/F trascendente pura, P puede extenderse a K y luego esta extensión extenderla a $K(x_{n-1})$ de forma que x_{n-1} sea infinitamente grande sobre K, debido a la argumentación precedente. En particular $x_{n-1} > 1$ y entonces $x_{n-1}^2 > x_{n-1}$, sea $u = -(a_1 a_{n-1}^{-1} x_1^2 + \dots + a_{n-2} a_{n-1}^{-1} x_{n-2}^2)$ de donde:

$$x_{n-1}^2 > x_{n-1} > - (a_1 a_{n-1}^{-1} x_1^2 + \dots + a_{n-2} a_{n-1}^{-1} x_{n-2}^2) \text{ en } K(x_{n-1})$$

luego:

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_{n-2} x_{n-2}^2 + a_{n-1} x_{n-1}^2 > 0 \quad \text{en } K(x_{n-1}) \qquad (°)$$

pero como

$$F(f) = K(x_{n-1})(- a_n^{-1}(a_1 x_1^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^2)^{\frac{1}{2}}$$

entonces (°) proporciona la condición necesaria y suficiente para que P pueda ser extendido a $F(f)$.

Proposición 17.- Supongamos que K es un cuerpo pitagórico real. Entonces K verifica SAP si y solo si para toda extensión L/K con $W(L/K)= 0$ las formas anisótropas sobre K se preservan a L.

Demostración.- Si K verifica SAP es prop. 14 (ver (11)).

Si K no verifica SAP, por teorema 1 de cap. II SAP es equivalente a HEP, luego existe una forma cuadrática f sobre K totalmente indefinida y no establemente isótropa sobre K, como K pitagórico, entonces f es anisótropa sobre K y totalmente indefinida. Luego por prop. 16, todo orden de K puede extenderse a K(f), de lo que se sigue que $W(K(f)/K)$ es un nilideal de $W(K)$ por (corol. 2,11 , (13)), pero al ser K pitagórico se implica que $W(K(f)/K) =0$ por (teoremas 3.3 y 6.1 de cap. VIII, (1)). Entonces por nuestra hipótesis debe ser f anisótropa sobre K(f) lo que es absurdo pues toda forma cuadrática es isótropa sobre en cualquier cuerpo de ceros genericos para ella.

Corolario: Si K pitagórico real no verificando SAP entonces existe una extensión L/K con $W(L/K) = 0$ pero las formas cuadráticas anisótropas sobre K no se preservan a L.

Dem. Se sigue inmediatamente de la demostración anterior.

Observación: Recordar que $R((t_1)) \ldots((t_n))$ para $n \geqslant 2$ es ejemplo de pitagórico no verificando SAP.

Una extensión K/F es llamada "excelente" si dada cualquier forma cuadrática f sobre F con f_K isótropa entonces existe una forma cuadrática g sobre F , isótropa y tal que $f_K \cong g_K$. Para diversas caracterizaciones y propiedades de extensiones excelentes puede consultarse (19). Tenemos la siguiente proposición en conexión .. con el problema que estamos tratando:

Proposición 18.- K/F es excelente y $W(K/F) = 0$ si y solo si toda forma cuadrática anisótropa sobre F permanece anisótropa sobre K.

Demostración.- Si K/F es una extensión excelente con $W(K/F)=0$ entonces sea f forma anisótropa sobre F, si f_K isótropa entonces por definición de excelente existe una forma sobre F, g, isótropa sobre F y tal .. que $f_K \cong g_K$, luego $f_K = g_K$ en $W(K)$ y por ser $W(K/F)=0$ resulta $f = g$ en $W(F)$, pero por tener la misma dimensión es $f \cong g$ lo que es contrario a la elección de f. Reciprocamente, si toda forma anisótropa sobre F se preserva a K, entonces por definición de extensión excelente se tiene K/F excelente y $W(K/F) = 0$.

Corolario: Si K/F es extensión galoasiana, K pitagórico. Entonces ... $W(K/F) = 0$ si y solo si toda forma anisótropa sobre F permanece anisótropa sobre K.

Dem.- Si K/F es galois con K pitagórico entonces de (15) se sigue que K/F es extensión excelente, luego por proposición 18 concluimos.

Observación: K/F puede ser de grado infinito, en caso de que K/F sea de grado finito entonces F es también pitagórico y se obtiene la proposición 15, que es debida a R. Ware(ver (11)).

En el estudio de los cuerpos verificando SAP , A. Prestel ha preguntado sobre la validez de la siguiente implicación: "K/F extensión algebraica de grado finito, K satisface SAP implica que F satisface SAP ", ella aparece formulada en (4). Nosotros aplicaremos una construcción debida a E. Becker (20) para contestar en forma negativa a la pregunta de A. Prestel. Observemos primero que la implicación en sentido contrario no es verdadera, pues por ejemplo si $F= Q((t))$

y $K= \mathbb{Q}(2^{\frac{1}{4}})((t))$, tenemos que F satisface SAP, pero K no satisface SAP desde que la valuación ordinaria de K como cuerpo local tiene como cuerpo residual $\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{4}})$, el cual posee dos ordenes.

Ejemplo: (E. Becker,(20)) Existe un cuerpo F superpitagórico con cuatro ordenes tal que posee una extensión algebraica finita L/F verificando las siguientes propiedades:

a) L satisface SAP

b) $W(L/F)=0$

c) Toda forma totalmente indefinida y anisótropa sobre F es establemente isótropa sobre L.

Corolario: F en ejemplo de E. Becker no satisface SAP

Den.- Si F verifica SAP, entonces,como sobre un cuerpo pitagórico real SAP es equivalente a que el anillo de Witt de formas cuadráticas es ... 1- estable, luego F es superpitagórico y 1-estable, en consecuencia por corolario 4.2 de (8) resulta que F tiene a lo sumo cuatro clases cuadradas, y al ser superpitagórico tendrá a lo más dos ordenes, contrario a la construcción de F.

Por lo tanto existen extensiones L/F algebraicas finitas con L verificando SAP pero no F.

De la respuesta negativa a la pregunta de Prestel resulta entonces interesante estáblecer en que casos para una extensión L/F para la cual L verifica SAP se implica que F verifica SAP. Establecemos a continuación algunos criterios

Proposición 19.-Supongamos que K/F es extensión tal que toda forma anisótropa sobre F permanece anisótropa sobre K entonces K verifica SAP, implica que F verifica SAP.

Dem.- Sea f F-forma cuadrática de dimensión 4 y determinante -1, luego f_K es establemente isótropa desde que K verifica SAP por teor. 1, cap.II, luego existe $m \in N$ tal que mf_K es isótropa, entonces por la hipótesis necesariamente debe ser mf isótropa, es decir f es establemente isótropa sobre F, entonces F satisface SAP, nuevamente por teor. 1 de cap.II.

Observación: La hipótesis de que las formas anisótropas sobre F permanescan anisótropas sobre K no implica que si F satisface SAP, K satisfaga SAP. Por ejemplo en el caso F= Q y K= Q(X).

Corolario 1.- Si K/F es extensión algebraica excelente con W(K/F)=0 entonces si K verifica SAP, se implica F verifica SAP.

Dem.- Se sigue de prop. 18 y prop. 19.

Corolario 2.- Si K/F es extensión de grado impar (o trascendente pura) K verifica SAP implica que F verifica SAP.

Dem.- De prop. 19 y prop.13 si la dimensión es impar, si la extensión es trascendente pura de prop. 19 y prop. 12.

Corolario 3.- Si K/F es extensión galoasiana con K pitagórico y W(K/F)=0 entonces K verifica SAP implica F verifica SAP.

Dem.- De prop. 19 y prop.18(corolario).

(°) En corolario 1, la hipótesis de algebraica para K/F puede ser omitida.

Aplicamos a continuación la proposición 19 a la construcción de ejemplos de cuerpos reales no verificando SAP.

Ejemplo 1.- $Q(X_1,\dots,X_n)$ para $n \geq 1$ no satisface SAP .

Dem.- Si $n=1$ conocemos ya el resultado. Si $n > 1$ entonces $Q(X_1,\dots,X_n)$ es una extensión trascendente pura de $Q(X_1)$, entonces toda forma cuadrática anisótropa sobre $Q(X_1)$ permanece anisótropa sobre $Q(X_1,\dots,X_n)$. Luego $Q(X_1,\dots,X_n)$ no puede ser SAP, puesto que $Q(X_1)$ no lo es (usando prop. 19).

Ejemplo 2.- $R(X_1,\dots,X_n)$ para $n \geq 2$ no verifica SAP.

Dem.- Se obtiene analogamente del hecho que $R(X_1,X_2)$ no verifica la propiedad SAP como hemos visto anteriormente .

Hasta el momento hemos obtenido ejemplos de cuerpos verificando SAP y no verificando SAP. Ahora bien, también conocemos que $R((t_1))\dots((t_n))$ para $n \geq 2$ no verifican SAP , sin embargo son pitagóricos reales(aun más. son superpitagóricos). Finalizaremos este capitulo presentando una construcción debida esencialmente a E. Becker, en la que se obtiene una familia de cuerpos que son extensiones de un pitagórico , verificando SAP y no pitagóricas .

Construcción de un cuerpo Pitagórico, verificando SAP, no real cerrado con la propiedad de que toda extensión real finita no es pitagórica pero verifica SAP.

Considero k_o un cuerpo de números algebraicos que posea al menos tres ordenes diferentes, P_1 , P_2 y P_3 . Sea k una extensión de k_o maximal extendiendo estos tres ordenes, luego k es pitagórico (pues todo orden se extiende a la clausura pitágórica), además k no es superpitagórico desde que posee tres ordenes al menos y segun hemos visto en la clausura algebrica de Q los superpitagóricos tienen como maximo dos ordenes , luego por prop. 7 existe una extensión cuadrática real no pitagórica $K_o = k(a^{\frac{1}{2}})$, llamemos K a la capsula pitagórica de K_o y demostraremos que K es el cuerpo buscado. Para ello vemos que:

a) La clausura algebraica de K coincide con la clausura cuadrática de K.

Sea $\overline{K}$ la clausura algebràica de K y K_c su clausura cuadrática, obviamente es K_c contenido en $\overline{K}$. Reciprocamente, considero T una extensión de galois finita de K y demostraremos que su grado es una potencia de 2. Como T = K(x) , considero la capsula normal de k(x) la que denominamos L, entonces grado de L/k es 2^r , en caso contrario podria escribir grado de $L/k = 2^r.(\text{impar})$, pero como L/k es galois por Sylow existirá un subcuerpo de L/k de grado impar sobre k, luego P_1, P_2 y P_3 se extienden a este subcuerpo lo que contradice la maximalidad de k. Entonces por teoría de galois elémental LK es galois finita sobre K, de dimensión 2^t, pero como T es subcuerpo entre KL y K resulta que grado de T/K es una potencia de dos , de lo que concluimos que la clausura algebraica coincide con la cuadrática de K.

b) Consideramos el siguiente lema:

Sea F cuerpo real no pitagórico entonces el espacio de ordenes de F_{pit} no posee puntos aislados.

Demostración.- Si P es un punto aislado , defino de $G(F_{pit} /F)$ en $X_{F_{pit}}$ la aplicación que asigna a cada f, F-automorfismo de F_{pit}, el elemento f(P), como esta aplicación es continua($G(F_{pit}/F)$ es grupo compacto totalmente disconexo con la topología de Krull), entonces la pre-imagen de P, que es la identidad, es abierto, luego el grupo finito , lo que es absurdo puesto que al no ser F pitagórico la extensión F_{pit}/F es galoasiana infinita por prop.6 .

c) Volviendo a nuestra construcción. Supongamos que K admite una extensión real finita y pitagórica, por (a) tendra grado 2^r, entonces por Sylow existe una extensión cuadrática $K(y^{\frac{1}{2}})$ de K la que será también pitagórica al tener codimensión finita respecto de un pitagórico. Entonces se verifica :

$$K^2 + K^2 y = K^2 \cup K^2 y$$

Pues si tomo $z = u^2 + v^2 y$ con $u, v \in K$ entonces $z = u^2 + (v\, y^{\frac{1}{2}})^2 = (a + b\, y^{\frac{1}{2}})^2$ por ser $K(y^{\frac{1}{2}})$ pitagórico, de aqui:

$$z = u^2 + v^2 y = a^2 + b^2 y + 2ab\, y^{\frac{1}{2}}$$

Si $a=0$ entonces $z = b^2 y \in K^2 y$

Si $b=0$ entonces $z = a^2 \in K^2$

La otra inclusión es inmediata.

Consideremos que $P = \dot{K}^2 + \dot{K}^2 . (-y)$. Demostraremos que P es un orden. Tomo $b \in \dot{K}$ entonces como K verifica SAP por prop.2, entonces la forma ternaria $\langle -y, b, -yb \rangle$ representa establemente su determinante por teor. 1 , cap.II , pero como K pitagórico tenemos que la forma $\langle -y, b, -yb \rangle$ representa 1 sobre K, luego existe $a \in \dot{K}$ tal que:

$$\langle 1, -y, b, -yb \rangle \cong \langle 1, 1, a, a \rangle$$

de donde:

$$-y = x_1^2 + x_2^2 + a(y_1^2 + y_2^2) = u^2 + av^2$$

luego:

$$0 = y + u^2 + av^2$$

Como $K^2 + K^2 y = K^2 \cup K^2 y$ entonces:

$$0 = t^2 y + av^2 \qquad \text{o} \qquad 0 = h^2 + av^2$$

Si $t^2 + av^2 = 0$ entonces $a = -y \mod K^2$ y podemos escribir:

$b = z_1^2 + z_2^2 + a(t_1^2 + t_2^2) = m^2 + (-y)\, n^2 s^2 = n^2 - r^2 y \in P$

Si $h^2 + av^2 = 0$ entonces $\langle 1, a \rangle$ es isótropa, luego $\langle 1, -y, b, -by \rangle$ isótropa entonces $-b$ es una norma en $K(y^{\frac{1}{2}})$ entonces $-b \in P$. Concluimos entonces que P es un orden.

R E F E R E N C I A S

(1) T.Y. Lam : The Algebraic Theory of Quadratic Forms; Benjamin, 1973

(2) R.Elman, T.Y. Lam : Pfister Forms and K-Theory of Fields; Journal of Algebra, Vol. 23, Number 1;1972 .

(3) A. Pfister : Zur Darstellung definiter Funktionen als Sume von Quadraten, Invent. Math. , 4; 1967

(4) A. Prestel : Lectures On Formally Real Fields, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil; 1975.

(5) D. K. Harrison : Witt Rings. Lecture Notes; University of Kentucky, Lexington, Kentucky ; 1970 .

(6) J. Leich, F. Lorenz : Die Primideale des Wittschen Ringes. Invent. Math. , 10, 1970.

(7) M. Knebusch, A. Rosenberg, R. Ware : Structure of Witt Rings, Quotients of Abelian Group Ring, and Orderings of Field. Bull. Amr. Math. Soc. , 77, 1970.

(8) R. Elman , T.Y. Lam: Quadratic Forms Over Formally Real Fields and Pythagoreans Fields; Amer. J. Math. , 94, 1972.

(9) A. Rosenberg, R. Ware : Equivalent Topological Propietes of the Space of Signatures of a Semilocal Ring; Publicationes Mathematicae, 23, Fas. 3-4, Institutum Mathematicum Universitatis, Debreceniensis, Hungaria, 1976 .

(10) R. Brown : Superpythagorean Fields ;Journal of Algebra ,42, 1976.

(11) R. Ware : A Note on Quadratic Forms Over Pythagorean Fields; Pacific Journal of Math. , 58 , Nº 2 , 1975 .

(12) M. Knebusch : Generic Splitting of Quadratic Forms I; Proc. London Math. Soc. (3), 33 , 1976 .

(13) M. Knebusch, A. Rosenberg, R. Ware: Signatures on Semilocal Rings. Journal of Algebra;26, 1973.

(14) A. Prestel, M. Ziegler : Erblich euklidische Körper; J. reine angew . Math. , 1975 .

(15) M. Marshall : Round Quadratic Forms; Math. Zeit. 140, 1974 .

(16) R. Elman, T.Y. Lam, A. Prestel : On Some Hasse Principles Over Formally Real Fields; Math. Zeit. 134, 1973 .

(17) A. Prestel : Quadratische Semi-Ordungen und Quadratische Formen; Math. Zeit. 133 , 1973 .

(18) R. Ware : Some Remarks on the Map between Witt Rings of an Algebraic Extension. Conference on Quadratic Forms-1976, Queen's University, Kingston, Canada, 1977 .

(19) R. Elamn, T.Y. Lam , A. Wadsworth : Amenables Fields and Pfister Extension. Conference of Quadratic Forms-1976, Queen's University, Kinngston, Canada, 1977.

(20) E. Becker : Comunicación Privada- Marzo de 1978 .

(21) E. Becker : Comunicación Privada- Noviembre de 1977 .

(22) J. Diller, A. Dress : Zur Galoistheorie pythagoreischer Körper , Arch. der Math. 16, 1965 .